Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

TRABAJO FIN DE MÁSTER UNIVERSITARIO DE PROFESOR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS. ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS.

Reeducando matemáticamente ante la ansiedad matemática: un estudio de caso

Autor: Roberto Lobón Vecín

Tutor: José María Marbán Prieto

Año: 2024

Contenido

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

La educación matemática ha prestado tradicionalmente más atención al dominio cognitivo que afectivo, sobre todo en lo concerniente a la práctica de aula. Afortunadamente, esta atención comienza a equilibrarse, motivada en parte por las evidencias científicas que muestran la influencia de los afectos tanto en el rendimiento académico como en el desempeño propio de la vida cotidiana en contextos en los que las matemáticas son necesarias, destacando en términos de impacto negativo el provocado por la ansiedad matemática. Es este hecho, precisamente, el que motiva este Trabajo de Fin de Máster, trabajo que adopta un enfoque cualitativo a través de un estudio de casos intrínseco centrado en una única estudiante que presenta dislexia, discalculia y ansiedad matemática.

El trabajo aborda diferentes objetivos personales, intelectuales y prácticos, destacando en este último caso el orientado a reducir la ansiedad matemática de la participante en el estudio de caso. Para ello se recurre a procesos de enseñanza-aprendizaje tutelados basados en ciclos CPA, en particular, conformados por diversas actividades vinculadas al currículo propio del curso en el que se encontraba matriculada la participante durante el desarrollo del estudio. En la consecución del mencionado objetivo fue preciso comprender el origen y las posibles causas de la ansiedad matemática exhibida y reconocida por la participante. Por otra parte, se recurrió a la toma de datos a través de diferentes procedimientos y estrategias como la observación sistemática, un Mapa de Humor y cuestionarios de contexto tomados de las pruebas PISA 2022.

PALABRAS CLAVE

Ansiedad matemática, discalculia, dislexia, estudio de casos intrínseco. mapa de humor.

ABSTRACT

Mathematical education has traditionally paid more attention to the cognitive domain than the affective domain, especially concerning classroom practice. Fortunately, this focus is beginning to balance out, partly motivated by scientific evidence showing the influence of emotions on both academic performance and everyday life performance in contexts where mathematics is necessary, with math anxiety standing out in terms of negative impact. It is precisely this fact that motivates this Master's Thesis, which takes a qualitative approach through an intrinsic case study focused on a single student who presents dyslexia, dyscalculia, and math anxiety.

The thesis addresses different personal, intellectual, and practical objectives, with the latter aiming to reduce the participant's math anxiety in the case study. To achieve this, guided teaching and learning processes based on CPA cycles are employed, particularly through various activities linked to the curriculum of the course in which the participant was enrolled during the study's development. In achieving the mentioned objective, it was necessary to understand the origin and possible causes of the math anxiety exhibited and acknowledged by the participant. Additionally, data were collected through different procedures and strategies such as systematic observation, a Mood Map, and context questionnaires taken from the PISA 2022 tests.

KEYWORDS

Dyscalculia, dyslexia, intrinsic case study, math anxiety, mood map.

Agradecimientos

A Irene (nombre ficticio para mantener el anonimato) y a su familia por haberme dado la confianza y haber accedido a hacer el estudio de casos, facilitándome cualquier necesidad que tuviese y adaptándose a mis propias necesidades. Este trabajo no habría sido posible de no ser por ellos.

A mi familia y a todos mis amigos, tanto los que ya tenía como los que he hecho en toda esta etapa que he vivido en Valladolid, por haber compartido conmigo los distintos momentos vividos en estos años, ya sean buenos o malos, apoyándome siempre que lo necesité.

A José María Marbán por haber estado siempre disponible ante cualquier problema o duda que haya tenido a lo largo de la realización de este trabajo y por los consejos que me ha estado dando durante todo este periodo.

En coherencia con el valor de la igualdad de género asumido por la Universidad de Valladolid, todas las denominaciones que en este trabajo se efectúan en género masculino, cuando no hayan sido sustituidas por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino.

1. Introducción.

Familia de Irene: *"Desde la familia queremos agradecer el esfuerzo dedicado a este proyecto. Visto egoístamente por nuestra parte, el resultado no podía ser mejor, ya que se ha logrado que una niña diagnosticada de dislexia y discalculia se enfrente a la asignatura de Matemáticas de forma completamente diferente.*

Cuando se nos presentó la oportunidad de participar en este trabajo no lo dudamos. Nuestra hija ya asistía a clases de matemáticas de refuerzo en su colegio sin ningún resultado positivo. Creemos que, a pesar del esfuerzo del profesor, su nivel de estrés a la hora de realizar sus deberes diarios de matemáticas y los correspondientes exámenes no disminuía; más bien al contrario.

Tenemos que decir que sólo detectábamos estos síntomas con las matemáticas y quizás, aunque en menor medida, con la asignatura de Lengua. Y, a día de hoy, a punto de finalizar este proyecto, podemos decir que se enfrenta a los deberes de "mates" incluso con entusiasmo -lo venimos notamos desde hace aproximadamente tres meses-. Incluso el nivel de estrés que demuestra ante los exámenes es prácticamente el mismo frente a cualquier otra asignatura.

Ya sólo nos queda esperar que estos resultados se puedan trasladar a otros niños, tengan o no dificultades en el aprendizaje, que puedan llegar también a las aulas de los colegios y no tener que depender de acciones "especiales" como ésta para que nuestros hijos –todos, y no sólo aquellos que padezcan discalculia, puedan beneficiarse de ellos."

Irene: *"Aunque las matemáticas siguen sin ser mi asignatura favorita, ahora no las odio. Me has enseñado a disfrutar de ellas y a no tener miedo de los números. Ha sido genial poder participar en tu trabajo. Muchas gracias por tu dedicación y paciencia."*

1.1. Un acercamiento al problema general.

Normalmente se piensa que las matemáticas son una ciencia donde solo tiene importancia el terreno cognitivo. Sin embargo, hoy en día se está prestando cada vez más importancia a lo que se conoce como dominio afectivo, término que fue introducido por Mcleod (1988,1992). Dentro de este dominio afectivo, se encuentran las emociones, reacciones de nuestro cuerpo ante un determinado estimulo que se manifiestan con una alta intensidad pero que duran poco tiempo, interesándonos en este trabajo por la ansiedad y, en particular, por la ansiedad matemática.

La ansiedad matemática -a veces referida como ansiedad numérica- se puede definir como aquel sentimiento de tensión y ansiedad que interfiere en la manipulación de los números y en la resolución de problemas matemáticos en la vida diaria y académica, descripción introducida por Dregen y Aiken (1957). Por la definición anterior, quedan claras las dificultades que puede generar este tipo de ansiedad para poder desenvolverse académica, personal y profesionalmente en un mundo donde la información que se genera a diario, en gran medida de tipo cuantitativa, es cada vez mayor y cuyo análisis requiere de habilidades, destrezas y competencias asociadas a las matemáticas.

Con esta relevancia en mente, se llevará a cabo en primer lugar una revisión del estado del arte en el campo de la investigación en relación con la ansiedad matemática para conocer, entre otros aspectos, sus causas, sus manifestaciones, la forma de medirla, sus efectos sobre rendimiento y autoconcepto matemático, propuestas de intervención, así como su comportamiento en función del género, entre otras cuestiones.

Como se acaba de mencionar, se han llevado a cabo múltiples trabajos relacionados con la medición de la ansiedad que han dado lugar a escalas, como la conocida escala MARS, creada por Richardson y Suinn (1972), así como a procedimientos biométricos más centrados en detectar y cuantificar comportamientos anómalos que produce nuestro cuerpo al tener ansiedad matemática, comportamientos relacionados con el latido del corazón o con la secreción de cortisol, entre otros, recurriendo en nuestro caso al uso de un instrumento sencillo, de corte más cualitativo, que denominamos *Mapa de Humor*, que será de gran utilidad en el estudio de casos llevado a cabo y que será descrito más adelante.

Junto con las cuestiones vinculadas a la ansiedad matemática, el trabajo también se ocupa, en menor medida, de dos trastornos del aprendizaje como son la dislexia y la discalculia, ambos presentes en las aulas con una prevalencia superior al 5% y que suponen un factor de riesgo en relación con la aparición de ansiedad matemática, siendo esta la situación del estudio de caso del que se ocupa este trabajo. La dislexia, por su lado, afecta a la lecto-escritura y a la memoria a corto plazo del alumnado, encontrándose, entre las diferentes adaptaciones que suelen incorporarse en las aulas, el uso de un mayor interlineado, el incremento del tiempo establecido para la realización de exámenes o el uso de fuentes tipográficas más adecuadas como Comic Sans o Arial.

El segundo trastorno al que nos hemos referido es la discalculia, vinculada en este caso al desarrollo del sentido numérico, complicando, por ejemplo, el aprendizaje de las tablas de multiplicar, el establecimiento de relaciones numéricas como la que establece es la mitad de 6, que es igual a 2+1 o que resulta ser la raíz cuadrada de 9 o causando problemas en la vida diaria en relación con la medición del tiempo, entre otros problemas. Así, este trastorno del aprendizaje puede interferir e impactar negativamente en el rendimiento en matemáticas, siendo mucho menos conocido y atendido, entre otras posibles causas por las extendidas creencias sociales sobre la dificultad de las matemáticas escolares o sobre el hecho de "ser de letras o ciencias", lo que dificulta indagar en las verdaderas causas de muchas de las dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas y, en particular, aquellas relacionadas con la discalculia, de forma que se asume en algunos casos que este alumnado no obtiene buenas calificaciones por no esforzarse lo suficiente.

Una vez descritas las dificultades y problemáticas que centran el interés del estudio de caso de este trabajo, se procede a analizar posibles propuestas de intervención comenzando con un acercamiento al enfoque conocido como CPA. Este modelo fue propuesto por Bruner (1966), el cual se basa en un ciclo que comienza abordando una cuestión o tarea matemática mediante el trabajo con material manipulativo (C = concreto), pasando después a un nivel esencialmente visual (P = pictórico) y, finalmente, concluyendo con una fase más formal, simbólica o algebraica (A = abstracto) donde en cierto modo se institucionaliza el saber matemático abordado.

Una variación de este enfoque es el modelo de Sharma (1986), donde se comienza en primer lugar con algo ya conocido por el alumnado para aplicar a continuación el ciclo CPA y finalizar buscando una aplicación a la idea matemática trabajada, monitorizando de manera transversal durante todo este proceso el progreso del alumnado buscando que comunique lo que esté haciendo. Además, junto con este tipo de enfoques, es habitual aplicar principios como los de Dienes (Martínez y Varela, 2022), así como diseñar secuencias de aprendizaje que tengan en cuenta diferentes niveles de demanda cognitiva.

Junto con las revisiones descritas previamente, aprovechando los resultados de la última edición del informe PISA, los cuales se pueden encontrar en OECD (2023), publicados el 5 de diciembre de 2023, y el hecho de que otorgaron una especial relevancia a la ansiedad matemática, se mencionarán sus conclusiones y se tendrán en cuenta en el propio estudio de caso de este trabajo, en particular a través de sus cuestionarios de contexto.

A su vez, realizaremos una revisión de las distintas leyes orgánicas de nuestro país para comprobar a partir de cuál de ellas empezaron a contemplarse de manera específica las cuestiones afectivas y, en particular, las vinculadas a las matemáticas, haciendo hincapié en las novedades que se incluyen en la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE).

1.2. Descripción del problema tratado.

Como ya se viene anticipando, el trabajo se ha diseñado desde una cosmovisión pragmática y transformadora, y se ha abordado con un enfoque cualitativo a través de un estudio de casos intrínseco protagonizado por una niña, a la que llamaremos Irene (nombre ficticio para proteger su anonimato) que presenta dislexia, discalculia y ansiedad matemática. En concreto, este estudio de casos incluye 22 sesiones de trabajo con Irene combinando los modelos CPA y de Sharma en las cuales se va dando cuenta de la evolución de sus emociones a través de un *Mapa de Humor* adaptado a sus intereses y necesidades elaborado de forma conjunta en la primera sesión, prestando especial atención a las cuestiones relacionadas con su ansiedad matemática.

Además, en este estudio de casos se trata de dar respuesta a varias preguntas de investigación, las cuales están relacionadas con el origen y las causas de la ansiedad matemática de Irene y con los efectos que tiene la aplicación del modelo CPA en su ansiedad matemática y en la comprensión de conceptos de matemáticas.

Por otro lado, el estudio de casos se concibió con el fin de querer dar con una respuesta a las siguientes preguntas, las cuales son generales pero sirven para originar los objetivos de la investigación:

- ¿Cuáles son los síntomas más comunes de la ansiedad matemática?
- ¿Qué técnicas de enseñanza pueden ser más efectivas para fomentar la inclusión y reducir la ansiedad matemática en el aula?
- ¿Qué tipos de materiales manipulativos pueden ser más efectivos para enseñar conceptos matemáticos abstractos?
- ¿Cuáles son los efectos del modelo de enseñanza CPA (Concreto, Pictórico, Abstracto) en la reducción de la ansiedad matemática y la adquisición de nuevas habilidades matemáticas?
- ¿Cómo se puede medir la eficacia de un *Mapa de Humor* en la reducción de la ansiedad matemática?

Por las preguntas anteriores, este estudio de casos se ha elaborado con el propósito de alcanzar distintos objetivos que podemos clasificar en personales, prácticos e intelectuales:

- <u>Objetivo personal.</u> Conocer los rasgos más significativos de la ansiedad matemática, así como distintos enfoques que se pueden usar para reducir dicha ansiedad favoreciendo la inclusión.

- <u>Objetivo práctico.</u> Elaborar distintos tipos de material manipulativo y de propuestas educativas para lograr una mejor asimilación de determinados conceptos matemáticos.

- <u>Objetivo intelectual.</u> Comprobar si la aplicación del modelo CPA ayuda a reducir la ansiedad matemática a la vez que se logra la adquisición de nuevas nociones en matemáticas y verificar si el uso de un *Mapa de Humor* ayuda a reducir la ansiedad matemática.

1.3. Estructura del trabajo.

Este trabajo se compone de seis bloques, cuyo contenido se procede a resumir a continuación:

- <u>Bloque 1: Introducción.</u>
  En la introducción se presentan los objetivos y la motivación de la memoria.
- <u>Bloque 2: Marco teórico y normativo.</u>
  En este apartado se recopilará todo lo relacionado acerca de los constructos sobre los que gira el trabajo, a saber: dominio afectivo en matemáticas, la ansiedad matemática (junto con los resultados que se han obtenido en PISA relativos a este constructo) y finalmente, discalculia y dislexia como dos trastornos del aprendizaje que suponen un riesgo potencial de generación de ansiedad matemática, presentando también en este capítulo distintas propuestas de intervención con las que se puede disminuir este tipo de ansiedad. Por último, se realizará una revisión de las distintas leyes orgánicas de educación que ha habido en la historia reciente de nuestro país para verificar cuándo se empezó a contemplar las cuestiones afectivas.
- <u>Bloque 3: Marco Metodológico.</u>

En este bloque se presenta la cosmovisión y el enfoque que acompañan y guían este trabajo, así como el diseño concreto de investigación que se aborda.

- Bloque 4: Marco de intervención.
  En este capítulo se comenzará describiendo la naturaleza del caso que vamos a tratar para, después, formular las distintas preguntas que queremos responder. Una vez que se ha explicado esto, se procede a detallar lo trascurrido en las 22 sesiones usando los distintos métodos de obtención de datos y se concluye el capítulo analizando los resultados obtenidos.
- Bloque 5: Conclusiones.
  En este bloque se comenzará respondiendo a las distintas preguntas de investigación que hemos formulado, se comentarán los resultados obtenidos en el estudio de casos y se comparará con otros estudios similares para finalizar aclarando las limitaciones del estudio presentado y proporcionando posibles futuras líneas de actuación.
- Bloque 6: Anexos.
  En este apartado se recogen todos los anexos que hemos ido elaborando a lo largo del estudio de casos y el material que hemos creado para las distintas sesiones.

1.4. Relación con el máster.

En el trascurso de la elaboración de este trabajo de fin de máster, se han puesto en práctica los distintos conceptos y recursos que se han impartido a lo largo del máster. Por este motivo, vamos a presentar, en primer lugar, las asignaturas de dicho máster que más han influido y ayudado en la elaboración de este trabajo y, en segundo lugar, las principales competencias que se han desarrollado en la realización de esta memoria.

1.4.1. Relación con las asignaturas del máster.

A lo largo del máster se han dado una serie de contenidos divididos en varias asignaturas. A pesar de que todas las materias han contribuido en cierto modo en la elaboración del trabajo, vamos a destacar las que más han influido:

- Didáctica de las matemáticas: esta asignatura ha sido útil para conocer las demandas cognitivas de Stein-Smith y poder diseñar distintas secuencias de aprendizaje que tengan en cuenta estas demandas cognitivas. Además, con en esta materia he podido conocer y asimilar los principios de Dienes.
- Innovación docente en matemáticas: es la asignatura que más ha influido en la elaboración de las distintas sesiones al permitirme conocer los distintos materiales manipulativos que pueden ser usados para presentar nociones matemáticas y así poder desarrollar el nivel manipulativo del modelo CPA.
- Iniciación a la investigación educativa en matemáticas: con esta asignatura he podido conocer las distintas cosmovisiones y enfoques que pueden encontrarse en una investigación educativa,

aprendiendo una breve noción de lo que es un estudio de casos y distintos métodos que hay para recoger datos en una investigación de este tipo.

1.4.2. Relación con las competencias del máster.

A continuación, se enumeran las competencias del máster (Universidad de Valladolid, s.f.) que son trabajadas a lo largo de la realización del trabajo y la justificación de estas.

1.4.2.1. Competencias generales.

G.1. "Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones". Esta competencia se trabaja en la elaboración de las 22 sesiones del estudio de casos, al basarnos en los contenidos de su curso.

G.4. "Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes". Esta competencia se ve trabajada al adaptarnos a las características que tiene Irene a la hora de planificar las distintas sesiones.

G.6. "Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales". Esta competencia se puede ver trabajada en las distintas sesiones que se han planificado en el estudio de casos, donde se buscaba proporcionar técnicas para que se facilite la confianza que tiene en matemáticas.

1.4.2.2. Competencias específicas del módulo genérico.

E.G.1. "Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones". Esta competencia se ve trabajada en la elaboración de las 22 sesiones, ya que han sido elaboradas en función de las características de Irene. Por otro lado, también se han tenido en cuenta el contexto social de Irene para explicar y entender distintos comportamientos.

E.G.3. "Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales". Esta competencia se trabaja a lo largo de las 22 sesiones propuestas al tener como objetivo el desarrollo de aptitudes matemáticas a la vez que se intenta reducir la ansiedad matemática.

E.G.4. “Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje”. Esta competencia se ve trabajada al planificar las distintas sesiones en función del ritmo de aprendizaje que tiene Irene.

E.G.6. “Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país”. Esta competencia se ha trabajado al explorar la evolución en cuestiones afectivas de las distintas leyes orgánicas.

E.G.10. Relacionar la educación con el medio y comprender la función educadora de la familia y la comunidad, tanto en la adquisición de competencias y aprendizajes como en la educación en el respeto de los derechos y libertades, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad. Esta competencia se ve trabajada en la utilización de distintos enfoques que beneficien al alumnado en riesgo en relación con la aparición de ansiedad matemática, permitiendo así la inclusión de este tipo de alumnado.

1.4.2.3. Competencias específicas del módulo específico.

E.E.7. “Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo”. Esta competencia se ha trabajado al programar las distintas sesiones del estudio de caso de tal manera que se trabajen los distintos contenidos del currículo de segundo de la ESO.

E.E.8. “Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos”. Esta competencia se ve trabajada al elegir el mejor material manipulativo que brinde un mayor aprendizaje de los distintos contenidos que se han trabajado en el estudio de casos.

E.E.12. “Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada”. Esta competencia se ve trabajada al usar distintos enfoques y principios en la planificación de las sesiones del estudio de casos.

2. Marco Teórico y Normativo.

En este capítulo, en primer lugar, se recogerán los distintos constructos que hemos necesitado para abordar el estudio de casos, que se describe en el Capítulo 4.

Por último, se hará una revisión de la aparición del tratamiento de los afectos en educación matemática a lo largo de las distintas leyes orgánicas de educación que hubo a lo largo de la historia de España, centrándose en la que está vigente en la actualidad, la LOMLOE.

2.1. Marco Teórico.

En este apartado, se llevará a cabo una revisión de los principales constructos, trabajos e investigaciones en el campo de la ansiedad matemática. Para ello, se comenzará con lo más general para, progresivamente, adentrarnos en nuestro tema: la ansiedad matemática.

Una vez detallado todo lo referente al ámbito de la ansiedad matemática, va a ser conveniente dar unas nociones acerca de qué es la dislexia y la discalculia, por qué se producen y qué efectos tienen en la vida educativa del alumno, ya que esto va a servir para entender mejor la naturaleza del caso que se va a tratar en el Capítulo 4. Por otro lado, también va a ser importante conocer distintos enfoques que sirvan para introducir un concepto en matemáticas.

Lo último que se verá en esta sección se centrará en lo relativo a las pruebas PISA, destacando que, en el último informe, publicado en 2023, se centraron en matemáticas y en la ansiedad matemática, realizando un análisis de los resultados obtenidos en este ámbito.

2.1.1. Afecto en Matemáticas.

En los últimos años, se ha dado cada vez más importancia al sentido afectivo en la enseñanza de las matemáticas, ya que ha habido indicios de que muchos de los problemas de la educación en matemáticas no se pueden explicar mediante aspectos puramente cognitivos, enfoque en el cual nos centraremos al hablar de PISA. Para ello, nos encontramos muchas dificultades, donde una de las principales es, precisamente, tener una descripción precisa de lo que es afecto y lo que significa el dominio afectivo.

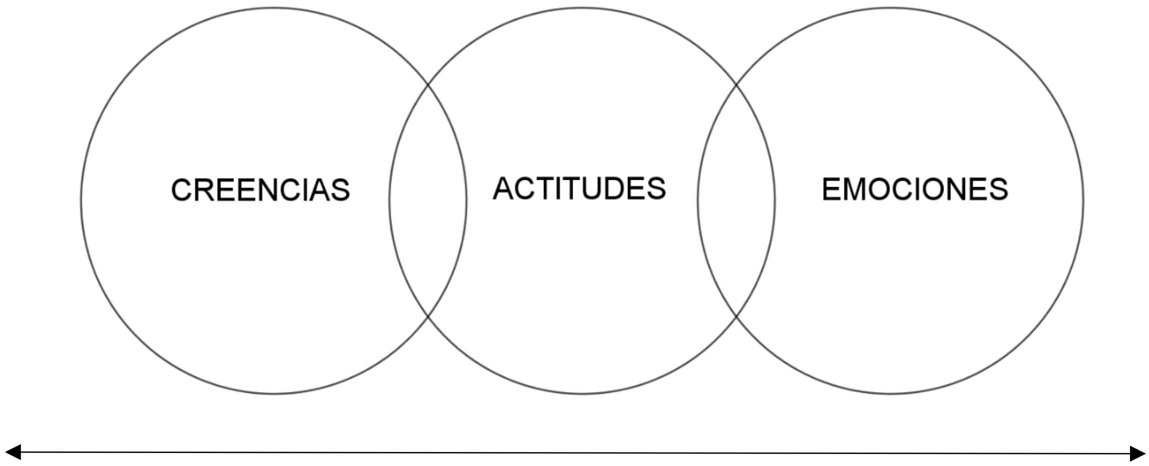
En cuanto al término afecto, este se puede usar, siguiendo a Mcleod (2012, p. 40), como un término general que se utiliza para describir distintas actitudes, apreciaciones, preferencias, emociones, sentimientos y valores. Ejemplos de afecto podrían ser enfado, ansiedad, tristeza, odio, etc., por lo que este constructo es usado en ocasiones como un sinónimo de emoción.

En lo que respecta al dominio afectivo en matemáticas, Krathwohl et al. (1964) definieron el dominio afectivo como “un conjunto amplio de sentimientos y estados de ánimo que generalmente se consideran diferentes de la pura cognición, incluyendo, como componentes específicos, actitudes, creencias y emociones”.

Esta definición deja en claro que el dominio afectivo es un constructo multidimensional, lo que conduce naturalmente a la descripción de los componentes específicos incluidos por Krathwohl et al. (1964) en su conceptualización del dominio afectivo. Es decir, se focalizará en aclarar lo que son actitudes, creencias y emociones:

- **Actitud**
  El término actitud se define, según Mcleod (2012, p. 39), como la predisposición a responder de un modo favorable o no con respecto a un estímulo dado, ya sea una persona, una actividad o una idea. Esta definición tiene en cuenta la reacción afectiva o emocional del sujeto hacia el estímulo, así como el comportamiento y las creencias que tiene el individuo en relación con este.
  Aplicándolo a nuestro ámbito, esto quiere decir que una actitud positiva o negativa hacia las matemáticas se puede deducir a partir de la reacción emocional de una persona hacia las matemáticas, es decir, el comportamiento que tiene al enfrentarlas o evitarlas.
- **Creencia**
  Según Colby (1973, p. 253), las creencias pueden entenderse como aquellos entendimientos, premisas o proposiciones psicológicamente sostenidas sobre el mundo que se perciben como verdaderas. En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, las creencias juegan un papel crucial. Por ejemplo, según las conclusiones de Schoenfeld (1985), aunque los alumnos posean los conocimientos matemáticos necesarios para resolver un problema, si creen que estos conocimientos no son útiles, es probable que opten por no aplicarlos, lo que podría llevar a los profesores a interpretar que estos alumnos no tienen una comprensión completa de la materia.
- **Emociones**
  De acuerdo con Grootenboer y Marshman (2016, p. 20), las emociones pueden entenderse como aquellas respuestas afectivas a una situación en particular que son temporales e inestables. Pese a ser temporales, un aspecto notable, como se señala en Grootenboer y Marshman (2016, p. 19), y por lo tanto digno de análisis, es que la repetición de una misma emoción en un evento particular puede dar lugar a una actitud o creencia específica.

Generalmente, las emociones están relacionadas con respuestas donde se muestra una gran afectividad e intensidad, pero una menor estabilidad y cognición, mientras que en las creencias ocurre al contrario, con una mayor estabilidad y cognición pero una afectividad e intensidad mínimas. En un punto intermedio entre estas dos componentes se encuentran las actitudes. Gráficamente, se puede representar de la siguiente manera:



Mayor estabilidad y cognición y menor afectividad e intensidad

Mayor afectividad e intensidad y menor estabilidad y cognición

Ilustración 1.Componentes del dominio afectivo. Elaboración propia.

Una vez que se ha definido el afecto y el dominio afectivo en matemáticas, con sus tres componentes, dentro del espectro emocional se encuentra la ansiedad. Según Benner (1985), esta puede definirse como una sensación subjetiva de tensión, aprensión y preocupación, desencadena por una combinación particular de señales cognitivas, emocionales, fisiológicas y conductuales. Dentro de la ansiedad, Spielberger (1972) distingue dos tipos principales: la ansiedad estado, que es la ansiedad que surge en un momento determinado, y la ansiedad rasgo, que es la ansiedad vista como una característica de la personalidad en sí misma.

Tras revisar la definición de ansiedad, surge de manera natural la pregunta sobre su origen. Este proceso se explica mediante el modelo de Byrd (1982), que se detalla a continuación. En primer lugar, el sujeto se enfrenta a una experiencia estresante, percibiéndola de algún modo como amenazante, ya que de lo contrario, no se produciría ansiedad. Esto desencadena una respuesta, como puede ser el aumento del latido cardíaco o el temblor de la voz. Una vez que se produce esta respuesta, tiene lugar la reevaluación cognitiva, que consiste en elegir la mejor estrategia para abordar el factor que desencadenó el evento estresante, seleccionando la opción más adecuada. La Ilustración 2 muestra de manera visual el flujo de eventos que ocurren en el proceso de la ansiedad, según el modelo de Byrd.

En este contexto, se dirigirá la atención hacia un tipo particular de ansiedad que tiene suma importancia en la educación en matemáticas debido a los efectos que ejerce en los estudiantes que la padecen: la ansiedad matemática. En la siguiente sección, se definirá este constructo y se explorarán los diferentes aspectos y manifestaciones de la ansiedad matemática, analizando cómo afecta a diversos grupos de individuos y examinando distintas estrategias para abordarla.

Ilustración 2.Modelo de Byrd. Elaboración propia.

2.1.2. Ansiedad matemática.

La ansiedad matemática es un tipo de ansiedad que pueden experimentar las personas en situaciones relacionadas con las matemáticas; de hecho, en la actualidad, y con una tendencia claramente creciente, se presentan cada vez más situaciones en la vida cotidiana donde se requieren habilidades matemáticas. Por ello, es crucial tener en cuenta la presencia de este tipo de ansiedad, que afecta entre el 5% y el 20% de la población, como se evidencia en Tejedor et al. (2009), y buscar soluciones para abordarla.

El constructo conocido hoy como ansiedad matemática fue introducido por Dregen y Aiken (1957) con el nombre de ansiedad numérica, y se puede definir de varias maneras, que se enuncian a continuación:

- Dregen y Aiken (1957) la describen como “un sentimiento de tensión y ansiedad que interfiere en la manipulación de los números y en la resolución de problemas matemáticos en la vida diaria y académica”.
- Richardson y Suinn (1972), y más adelante McLeod (1994), definen la ansiedad matemática como “un sentimiento de tensión, aprensión o miedo que interfiere con el rendimiento matemático”.
- Fennema y Sherman (1976) caracterizan la ansiedad matemática como “un sentimiento de temor, nerviosismo o síntomas corporales que se tienen cuando se realiza matemáticas”.
- Hembree (1990) la define como “el sentimiento de impotencia y preocupación en situaciones que involucran matemáticas”.
- Beilock y Willingham (2014) describen la ansiedad matemática como “el conjunto de emociones negativas que surgen cuando alguien se enfrenta a las tareas matemáticas”.

- Kvedere (2014) la define como “la cantidad en la que aumenta la interpretación emocional de una persona en respuesta a la necesidad de utilizar las matemáticas, como los sentimientos de presión por rendir bien, los sentimientos de insuficiencia para llevar a cabo funciones matemáticas en la vida y el miedo a la capacidad de rendir bien en un examen de matemáticas”.

De todas las definiciones expuestas anteriormente, se considerará la expuesta por Dregen y Aiken, ya que incluye también las situaciones de la vida cotidiana, no limitándose únicamente a la resolución de tareas en un contexto académico.

Cuando se define un constructo, es natural preguntarse por las posibles dimensiones que tenga. En el caso de la ansiedad matemática, este constructo se revela como multidimensional. En Quintero et al. (2022), se menciona que Chiu y Henry (1990) identificaron tres dimensiones de la ansiedad matemática: la ansiedad en las pruebas, que es la ansiedad que se siente antes o después de una prueba; la ansiedad en el aprendizaje, que es la ansiedad que se experimenta durante las explicaciones de matemáticas; y la ansiedad al aplicar matemáticas, es decir, la ansiedad que se manifiesta cuando se realizan cálculos matemáticos, ya sea en un ámbito educativo o cotidiano. Por otro lado, en Dowker et al. (2016), se afirma que tiene dos dimensiones: una cognitiva que se basa en el rendimiento de cada uno y en las consecuencias que tiene el fracaso, y una afectiva que estudia el nerviosismo y la tensión que experimenta un alumno en un examen.

Una vez definido el constructo junto con las dimensiones que tiene, se detallarán los distintos descubrimientos que se han ido recopilando a lo largo de los años. En estos apartados, se recopilará distinta información acerca de las causas de la ansiedad matemática, su relación con la ansiedad general, su impacto en el rendimiento en matemáticas, el disfrute y la confianza en esta ciencia, la influencia de la conducta que presentan los padres hacia las matemáticas en función de su ansiedad matemática, y cómo evoluciona con la edad y el género. También se explorarán distintas escalas o procedimientos que se usan para medir la ansiedad en matemáticas, así como posibles medidas que se aplican para reducirla.

2.1.2.1. Causas u orígenes de la ansiedad matemática.

Entender los motivos que pueden llevar a un alumno a desarrollar ansiedad matemática es crucial, ya que conocer el origen de esta dificultad puede facilitar la aplicación de medidas orientadas a resolver la situación problemática. Principalmente, la ansiedad matemática puede atribuirse a cuatro motivos:

- **Cognitivos o afectivos.**
- **Genéticos.** De hecho, Wang et al. (2014) encontraron que las diferencias genéticas en la ansiedad también se reflejan en la ansiedad matemática.
- **Sociales.** Este factor incluye los numerosos estereotipos sociales negativos asociados con las matemáticas.

- El fenómeno conocido como **oportunidad perdida**, que afecta a aquellas personas que experimentan ansiedad matemática debido a la falta de acceso o la incapacidad de aprovechar oportunidades para aprender esta disciplina. Esto puede ocurrir, por ejemplo, debido al limitado conocimiento en matemáticas por parte del docente.

Buxton (1981) llevó a cabo un experimento que proporcionó el primer marco teórico para comprender el origen de la ansiedad matemática, al que denominó "pánico hacia las matemáticas". En su teoría, dividió el proceso de razonamiento en tres partes: delta 1, encargado de procesar la información recibida a partir de los órganos sensoriales; delta 2, que opera en el mundo mental del individuo, independientemente de los cambios externos; y delta 3, que controla la interacción entre delta 1 y delta 2.

Según Buxton, al resolver un problema, delta 1 puede abordarlo de manera rutinaria o solicitar a delta 2 un plan para su solución, lo que genera una emoción positiva que facilita su resolución. Sin embargo, algunas personas experimentan la amenaza de un fracaso inminente, lo que desencadena emociones negativas y provoca que delta 1 recurra con urgencia a delta 2. En este caso, delta 2 no puede proporcionar el plan necesario, devolviéndole a delta 1 el problema sin solucionar, creando un bucle que termina en un estado de parálisis mental, lo que Buxton denomina pánico, donde el exceso de emociones negativas limita el rendimiento.

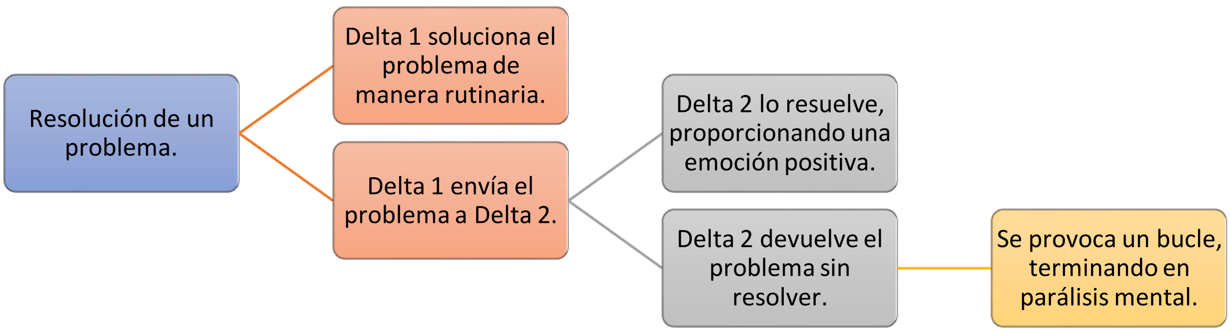


Ilustración 3. Modelo de Buxton. Elaboración propia.

2.1.2.2. Relación con la ansiedad general.

Una de las principales cuestiones que surgen es la relación entre la ansiedad matemática y la ansiedad general, y si la primera constituye realmente un tipo específico de la segunda. Estudios como el de Tejedor et al. (2009), sugieren que, si bien existe una relación entre la ansiedad matemática y la ansiedad general, ambos fenómenos son distintos y pueden ser diferenciados. Esto se evidencia en el experimento de Hembree (1990), donde se encontró una correlación limitada entre la ansiedad matemática y la ansiedad rasgo. De hecho, solo la ansiedad estado parece explicar la ansiedad matemática.

2.1.2.3. Relación con el rendimiento, el disfrute y la confianza en matemáticas.

Uno de los motivos principales por los cuales se enfoca el estudio de la ansiedad matemática es su relación con el desempeño académico del estudiante en esta materia, tanto en exámenes como en cualquier tarea que requiera el uso de matemáticas. De hecho, la mayoría de los artículos que abordan el tema de la ansiedad matemática buscan comprender esta relación para poder encontrar una solución.

La evidencia recopilada en estudios como pueden ser Dowker et al. (2016), Tejedor et al. (2009), Quintero et al. (2022) y Richland et al. (2020) sugiere una correlación negativa entre la ansiedad matemática y los resultados obtenidos en las tareas que involucran matemáticas, así como el rendimiento del estudiante en esta área. En otras palabras, los estudiantes que obtienen bajos resultados en matemáticas tienen más probabilidades de experimentar ansiedad matemática, y viceversa.

En este contexto, se observa que la ansiedad matemática, según lo expuesto por Dowker et al. (2016), está asociada negativamente con el disfrute de las matemáticas, la confianza al abordar ejercicios matemáticos y el autoconcepto. Es decir, si un alumno sufre de ansiedad matemática, es probable que no disfrute las matemáticas, tenga poca confianza en sí mismo a la hora de hacer los distintos ejercicios de matemáticas y subestime su habilidad en este campo. Del mismo modo, si se define la autoeficacia de Bandura (1977) como la confianza de uno mismo para realizar matemáticas, esforzarse y persistir en conseguir el éxito, se observa una relación negativa entre este constructo y la ansiedad matemática.

Ilustración 4. Ansiedad matemática, rendimiento, disfrute y autoconcepto. Elaboración propia.

Con estas tres relaciones se puede comprender que un alumno con ansiedad matemática no solo no disfruta ni obtiene un buen rendimiento al realizar matemáticas, sino que también carece de seguridad en su capacidad para realizar los ejercicios requeridos, lo que puede llevar a que evite cursos relacionados con matemáticas.

Esta información se resume en la Ilustración 4, que muestra los efectos de la ansiedad matemática en las categorías citadas anteriormente.

2.1.2.4. Conductas de los padres con respecto a las matemáticas.

El papel de los padres como modelos de referencia para sus hijos en cuanto a actitudes, creencias y emociones es fundamental. Surge así la pregunta natural de si la formación de los padres y su comportamiento hacia las matemáticas influyen en el desarrollo matemático de sus hijos.

Un estudio relevante en esta área es el realizado por Deringöl (2022), que encontró una relación significativa entre la competencia matemática de los padres, su ansiedad respecto a las matemáticas y su participación en la educación de sus hijos. Se observó que a medida que disminuye la competencia matemática de los padres, aumenta su ansiedad en relación con las matemáticas, lo que a su vez se traduce en una menor participación en el proceso educativo de sus hijos. Además, se encontró una correlación positiva entre el nivel de participación de los padres y el rendimiento académico de sus hijos en matemáticas.

Estos hallazgos sugieren, como se mencionó en la Sección 2.1.2.3, que si los padres experimentan ansiedad matemática, es probable que sus hijos también la experimenten. Este fenómeno puede indicar un ciclo perjudicial que solo podrá romperse con la colaboración activa de los padres.

2.1.2.5. Relación con el género.

En el ámbito de las ciencias, especialmente en las ramas científico-técnicas o aquellas donde se requiere una mayor presencia de las matemáticas, es alarmante la poca presencia por parte de las mujeres. Esto ha generado un claro interés en comprender las razones detrás de este fenómeno. Distintas fuentes, como Dowker et al. (2016), Pérez-Tyteca et al. (2009), Rahe y Quaiser-Pohl (2023) y Tobias (1978), sugieren que las mujeres experimentan niveles más altos de ansiedad matemática que los hombres, lo que se traduce en un menor rendimiento en matemáticas y, en muchos casos, en la renuncia de las mujeres a áreas que requieren el uso de matemáticas, como se mencionó anteriormente en la Sección 2.1.2.3.

Es natural preguntarse sobre las razones detrás de este fenómeno, ya que la intuición sugiere que mujeres y hombres deberían niveles similares de ansiedad matemática. Dowker et al. (2016) y Tobias (1978) plantean varias posibles razones:

- La primera posible razón es que las mujeres tienden a creer que son menos competentes en matemáticas, lo que conduce a una mayor ansiedad en los relativo a esta asignatura. Esto puede deberse a la amenaza del estereotipo, un fenómeno que ocurre cuando las personas sienten que pueden que se confirmar un estereotipo asociado a su grupo (Dowker et al., 2016). En el caso de las mujeres, esto implica el pensamiento de que son peores en matemáticas que los hombres. El concepto de amenaza del estereotipo de evidenció en un experimento realizado por Johns et al. (2005), en el que los participantes debían resolver una tarea matemática. Se dividieron en tres grupos, uno sin información sobre estereotipos de género, otro informado de que se investigaba por qué las mujeres eran peores en matemáticas que los hombres, y un tercero que además fue instruido sobre el concepto de amenaza del estereotipo. Los resultados mostraron que las mujeres obtuvieron peores resultados que los hombres en el segundo grupo, mientras que en los otros dos grupos no se observaron diferencias de género, lo que subraya la influencia de la amenaza del estereotipo.

- La segunda causa se relaciona con que las mujeres suelen atribuir el éxito en matemáticas al esfuerzo y el fracaso a la falta de habilidad, mientras que en los hombres sucede al contrario. Esto lleva a que las mujeres tengan una autoestima menor en matemáticas que los hombres.
  Este fenómeno se puede explicar con la teoría de Weiner (1974), que sugiere que la falta de habilidad se percibe como una variable interna y estable, mientras que el esfuerzo se considera inestable e interno. Por lo tanto, las mujeres suelen tener la idea de que el éxito es más fácil de modificar que el fracaso, lo que explica su menor autoestima en matemáticas.

En el siguiente esquema visualiza de manera más clara las principales ideas que aparece a lo largo de este apartado:

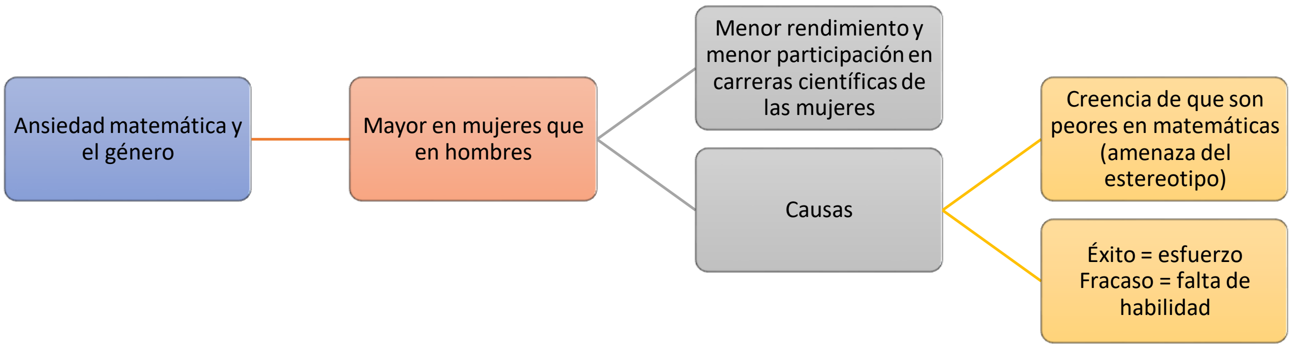


Ilustración 5. Ansiedad matemática y el género. Elaboración propia.

2.1.2.6. Relación con la edad.

Cuando se estudia el dominio afectivo en matemáticas, y en particular la ansiedad matemática, llama la atención que a los niños de infantil y de los primeros cursos de primaria suelen gustarles las matemáticas. Sin embargo, al preguntar a alumnos de secundaria en adelante, el porcentaje de estudiantes a los que les gusta las matemáticas disminuye notablemente, lo que suscita interrogantes sobre las posibles causas de este cambio.

Este fenómeno conlleva un aumento de la ansiedad matemática, que puede atribuirse a varios factores, como un incremento general de la ansiedad, la creciente comparación de uno mismo con los demás a medida que se crece, los estereotipos sociales o el temor al fracaso en el ámbito matemático, como señala Dowker et al. (2016). Es relevante destacar que, según Pérez-Tyteca et al. (2009), aproximadamente el 27% de los universitarios experimentan por primera vez ansiedad matemática en el primer año de carrera. Además, aunque este tipo de ansiedad parece ser más común en adolescentes, según Dowker et al. (2016), el 17 % de la población adulta también la experimenta.

2.1.2.7. Escalas y formas de medir la ansiedad matemática.

Para tratar la ansiedad matemática, es evidente que hay que encontrar formas para medirla. Casi todos los esfuerzos que se han hecho fueron para crear distintas escalas, presentándose a continuación algunas de ellas, por lo que tiene sentido que la mayoría de los experimentos realizados hasta el momento sigan un enfoque cuantitativo o mixto, aunque el que realicemos en este trabajo será cualitativo, en concreto un estudio de casos.

Destacaremos las siguientes escalas:

- **La escala MARS (Math Anxiety Rating Scale):** Creada por Richardson y Suinn (1972), es una escala de 98 ítems y tiene numerosas variantes, como la escala MARS-A, la escala AMAS o la escala MARS-E.
- **La escala de Fennema-Sherman:** Diseñada por Fennema y Sherman (1976), consiste en 12 ítems con 5 posibles respuestas cada uno, formulándose tanto de forma positiva como negativa para evitar que se responda sin criterio.
- **La escala MASC (Multidimensional Anxiety Scale for Children)**: Desarrollada por March (1997), es una escala adaptada para medir ansiedad matemática a los niños. Consta de 22 ítems divididos en tres partes, cada una centrada en una dimensión distinta de la ansiedad matemática, donde 7 ítems miden la ansiedad en los exámenes, 11 la ansiedad en el aprendizaje y 4 la ansiedad a la hora de aplicar matemáticas.
- **La escala MASP (Mathematics Anxiety for Parents):** Desarrollada por Öztop (2018), consta de 27 ítems y se usa para medir la ansiedad matemática que tienen los padres.

Sin embargo, como afirma Dowker et al. (2016), los resultados de estas escalas pueden ser sesgados, ya que algunos alumnos pueden falsear los datos. Para ello, se han explorado otros métodos basados en cambios en la actividad del organismo o en la producción anómala de distintas hormonas, como pueden ser los siguientes:

- **Medición del ritmo cardíaco:** Según Hannesdóttir et al. (2010), la ansiedad matemática se relaciona directamente con un aumento en el ritmo cardiaco y una disminución en su variabilidad.

- **La actividad cerebral:** De acuerdo con Hannesdóttir et al. (2010), las personas con alta ansiedad matemática muestran una mayor actividad cerebral en la parte frontal derecha, mientras que aquellos con una menor ansiedad matemática manifiestan un mayor funcionamiento en la parte frontal izquierda. Relacionado con este hecho, Dowker et al. (2016) también señalan que la ansiedad matemática está estrechamente vinculada a una mayor actividad en la zona de la amígdala derecha.

- **Mediante electroencefalogramas (EEG) y potenciales relacionados a eventos (PRE):** Como informa Dowker et al. (2016), las personas con alta ansiedad matemática tardaban más en hacer las tareas, mostraban tiempos de reacción más lentos y, además, sus ondas del PRE, que miden la respuesta cerebral como resultado a un evento específico, exhibían una mayor amplitud en la zona frontal en comparación con aquellos que tenían menos ansiedad.

- **Secreción de cortisol**: El cortisol es una hormona que se secreta en situaciones de estrés, por lo que es natural pensar si su secreción en la realización de pruebas matemáticas está relacionada con la ansiedad matemática. Según Dowker et al. (2016), se dan dos experimentos: el primero permitió concluir que aquellas personas con más ansiedad matemática secretaban cortisol antes de un examen. En el segundo, se observó que los participantes con alta ansiedad matemática y una mayor memoria a corto plazo mostraron una relación negativa entre la secreción de cortisol y el rendimiento en las pruebas, mientras que los que tenían poca ansiedad matemática manifestaron una relación positiva entre el nivel de cortisol y su desempeño en esta tarea.

Ilustración 6. Formas de medir la ansiedad matemática. Elaboración propia.

La Ilustración 6 resume las distintas formas que hay para medir la ansiedad matemática, ya sea utilizando escalas o basándose en alteraciones en el cuerpo humano.

2.1.2.8. Formas de reducir la ansiedad matemática.

Al igual que en el anterior apartado se centraba en las distintas formas que puede haber para medir la ansiedad matemática, donde se mencionaba que las más comunes eran las escalas, también es crucial, una vez que se sabe que un estudiante tiene ansiedad matemática, conocer técnicas que permitan reducir la ansiedad matemática una vez que se detecta en un estudiante. La mayoría de estas técnicas requieren tiempo para cambiar las actitudes y creencias negativas hacia las matemáticas, y también necesitan la colaboración activa del alumno y sus familiares.

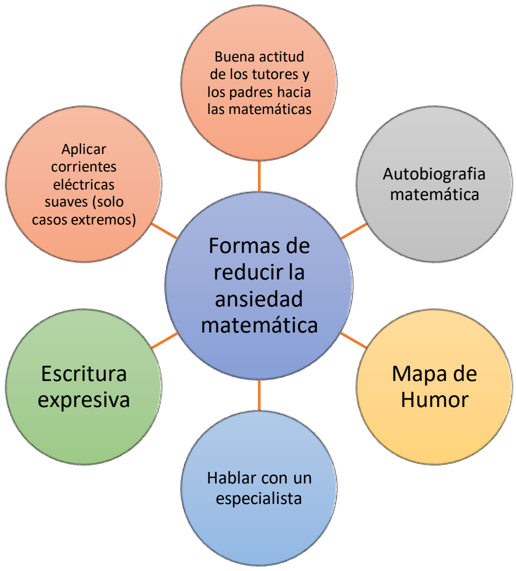


Ilustración 7. Formas de reducir la ansiedad matemática. Elaboración propia.

Según Dowker et al. (2016), Tobias (1978) y Beltrán-Pellicer y Cárdenas Lizarazo (2016), las técnicas más comunes, y que se pueden ver en la Ilustración 7, incluyen:

- Fomentar actitudes positivas hacia las matemáticas por parte de los padres y tutores, lo que puede ayudar a romper el ciclo en el que la ansiedad causada por las tareas de matemáticas conduce a más dificultades con la asignatura.
- Realizar una autobiografía matemática, donde el estudiante exprese sus emociones sobre las matemáticas. Esto permite conocer el estado actual del estudiante y su evolución a lo largo del tiempo, lo que puede ayudar a identificar y reforzar las emociones positivas asociadas con las matemáticas.
- Crear un mapa del humor de los problemas, donde los alumnos registren sus emociones antes, durante y después de resolver un problema matemático. Esto permite monitorear la evolución de las emociones del estudiante y fomentar las emociones positivas durante la resolución de problemas.
- Hablar con un especialista sobre las emociones del alumno al realizar matemáticas.
- Utilizar una hoja de registro donde los estudiantes anoten lo que sienten al resolver un problema matemático y luego discutirlo. Esto puede ayudar a identificar y abordar la ansiedad del estudiante.
- Practicar la escritura expresiva, donde el estudiante escribe libremente sobre sus pensamientos y emociones. Esta técnica puede ayudar al estudiante a identificar y procesar sus preocupaciones relacionadas con las matemáticas.
- En casos extremos de ansiedad matemática, considerar la aplicación de corrientes eléctricas suaves en el cerebro para modular la actividad cerebral y facilitar el control emocional sobre las respuestas

negativas asociadas con las matemáticas. Esta es una medida extrema que debe ser utilizada con precaución y bajo supervisión de profesionales capacitados.

Una vez desarrollado el marco teórico relativo al dominio afectivo, especialmente en relación con la ansiedad matemática, resulta crucial considerar ciertos grupos de estudiantes con dificultades de aprendizaje. Estos grupos enfrentan un riesgo mayor de desarrollar ansiedad matemática, especialmente cuando están presentes trastornos del aprendizaje. Este trabajo se enfocará específicamente en dos de estos trastornos: la dislexia y la discalculia. En concreto, en el estudio de casos, se abordará estos dos trastornos de manera conjunta.

2.1.3. Discalculia.

La discalculia, o dificultad en matemáticas según el libro DSM-V (APA, 2013), es el trastorno del aprendizaje menos reconocido de los dos mencionados anteriormente. En gran medida, esto se debe a que pasa desapercibido, ya que afecta a una parte significativa de la población que enfrenta dificultades en esta asignatura. Sin embargo, se reconoce que la discalculia está asociada principalmente con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el ámbito de la aritmética.

Pese a que la discalculia no está precisamente definida, diversas fuentes ofrecen definiciones esclarecedoras Kosc (1974) proporcionó una de las primeras definiciones, describiendo la discalculia como “un trastorno estructural de las habilidades en matemáticas que se debe a una alteración genética o congénita en aquellas partes del cerebro encargadas de las habilidades matemáticas, siempre y cuando no se produzca otro trastorno de las funciones mentales generales”. Esta definición destaca que la discalculia se limita típicamente al ámbito de las matemáticas y no afecta a otras funciones mentales generales. Además, sugiere un origen genético del trastorno, lo que podría explicar su presencia en familias con antecedentes de discalculia.

Por otro lado, el DSM-IV (APA, 2000), un referente en el campo de la psicología, define la discalculia como “una condición en la cual la capacidad matemática de un individuo es considerablemente menor de lo esperado para su edad, inteligencia y nivel educativo”. Esta definición subraya que la discalculia no puede atribuirse a otros trastornos mentales y que afecta significativamente al rendimiento académico y a la vida cotidiana de la persona, como en la gestión financiera, la toma de decisiones o la comprensión de horarios de transporte público.

Una definición adicional señala que la discalculia es un trastorno que afecta a la adquisición de habilidades aritméticas, resultando en dificultades para comprender conceptos numéricos básicos, carencia de intuición numérica y problemas para aprender características y procedimientos numéricos. Esta definición resalta las dificultades específicas que enfrentan las personas con discalculia al trabajar con números y establecer conexiones entre ellos, como reconocer relaciones simples entre cifras o aplicar diferentes procedimientos para resolver problemas (DfES, 2001).

En resumen, todas estas definiciones coinciden en asociar la discalculia con dificultades para trabajar con números y establecer conexiones numéricas, subrayando su naturaleza anómala y su distinción de otros trastornos mentales.

Por otro lado, es pertinente indagar sobre las diferencias biológicas que existen entre alumnos que padecen discalculia y aquellos que no la sufren, A partir de diversos experimentos, se ha podido constatar que los alumnos con este trastorno presentan una menor cantidad de materia gris en el surco intraparietal izquierdo y en el lóbulo parietal izquierdo, áreas responsables de llevar a cabo operaciones aritméticas y procesamiento numérico.

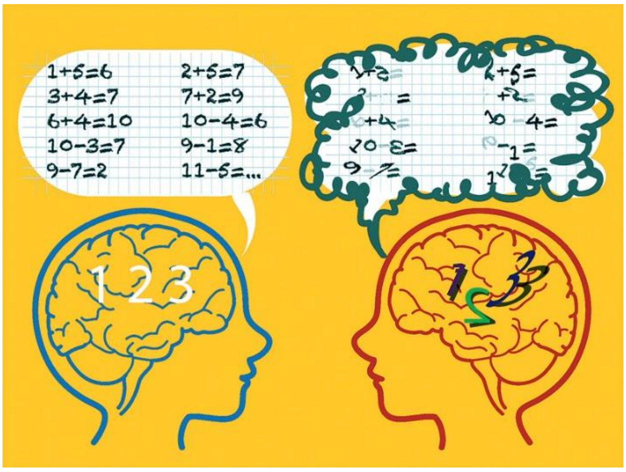


Ilustración 8.Discalculia. (de la Rosa, 2020).

2.1.3.1. Tipos de discalculia.

A través de distintos experimentos, se ha podido observar que no todas las personas que padecen discalculia presentan las mismas características ni comparten el mismo origen de este trastorno, lo que sugiere la necesidad de dividir la discalculia en varios tipos.

Una posible división es la hecha por Price y Ansari (2013), quienes clasificaron la discalculia en primaria y secundaria:

- La **discalculia primaria** es aquella que se atribuye a problemas en la capacidad del cerebro para procesar información numérica.
- La **discalculia secundaria** se explica principalmente por factores externos, como el bajo nivel socioeconómico familiar, déficits cognitivos, deficiencias en la enseñanza, entre otros.

Otra clasificación fue propuesta por Tony Attwood (Hornigold, 2017), quien identificó cinco subtipos de discalculia, los cuales son los siguientes:

- **Tipo I**. Se caracterizan por una elevada ansiedad matemática, donde las dificultades en matemáticas se atribuyen a esta ansiedad.
- **Tipo II.** Presentan ansiedad matemática, pero han desarrollado distintas estrategias para lidiar con las matemáticas básicas, aunque trabajan a un ritmo más lento y son conscientes de esto.
- **Tipo III.** Tienen grandes problemas para comprender y manejar el concepto del tiempo, lo que afecta significativamente a su vida diaria. También pueden presentar problemas para describir secuencias de acciones.
- **Tipo IV.** No tienen problemas con el concepto numérico, pero sí con la memoria, especialmente para transferir información de la memoria a corto plazo a la de largo plazo. Por ejemplo, les resulta difícil memorizar las tablas de multiplicar.
- **Tipo V.** Ven las matemáticas como algo abstracto y les resulta difícil visualizar o relacionar los conceptos con situaciones de la vida real.

Una vez concluida la revisión de los aspectos más significativos de la discalculia, se procederá a realizar un análisis de los rasgos más característicos de la dislexia.

2.1.4. Dislexia.

La dislexia, un trastorno del aprendizaje cuyo término deriva del griego y significa "dificultad con las palabras", afecta aproximadamente al 10% de la población (Hornigold, 2017, p.74) y es, de los dos trastornos del aprendizaje mencionados, el más conocido y estudiado.

El primer registro documentado de la dislexia data de 1986, cuando el doctor Pringle-Morgan (1986) describió el caso de un niño de 14 años que presentaba dificultades para escribir palabras de una sola sílaba y no era consciente de sus errores hasta recibir correcciones repetidas. Sin embargo, destacaba que, en evaluaciones orales, el niño obtenía las calificaciones más altas.

Es frecuente que los alumnos con dislexia también presenten otros trastornos, como el trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH), y que existan antecedentes familiares de dislexia, lo que sugiere un componente hereditario en este trastorno.

Respecto a la definición de la dislexia, no existe un consenso absoluto. Sin embargo, se suele tomar como referencia la definición propuesta por Rose (2009), basada en una revisión de casos en el Reino Unido: “La dislexia es una dificultad del aprendizaje que afecta principalmente a las habilidades relacionadas con la lectura precisa y fluida de palabras, así como la escritura”.

Rose (2009) identificó además algunos rasgos característicos de la dislexia, como las dificultades en la conciencia fonológica, en la memoria verbal y en la velocidad de procesamiento verbal.

Esta definición fue posteriormente actualizada por la Asociación Británica de la Dislexia, BDA, (Hornigold, 2017), incluyendo las dificultades de procesamiento visual, y destacando las capacidades positivas que suelen tener las personas con dislexia.

Por otro lado, Gavin Reid (2008) ofreció una definición centrada en considerar la dislexia como una dificultad del aprendizaje, y enumeró rasgos característicos adicionales, tales como dificultades en la memoria, en la velocidad de procesamiento, en la gestión del tiempo, en la coordinación y en la realización automática de tareas.

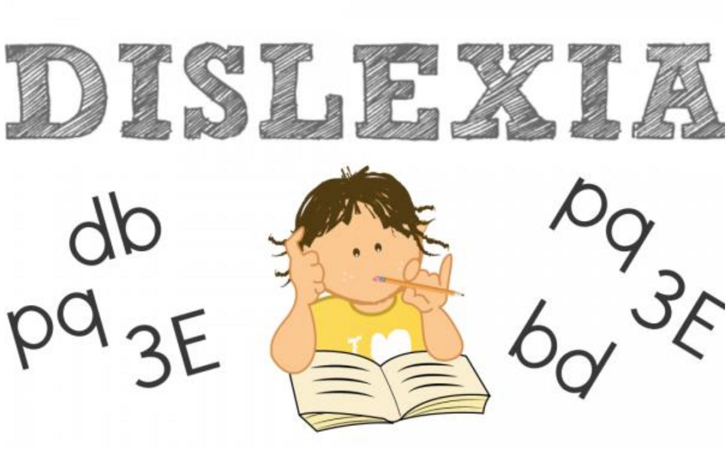


Ilustración 9.Dislexia (Komunikat, 2018).

Una vez definida la dislexia, se procederá a enumerar los rasgos que caracterizan a los individuos con dislexia y que hay que tener en cuenta cuando se tiene un alumno con este tipo de trastorno de aprendizaje.

2.1.4.1. Indicadores de la dislexia.

A partir de las definiciones anteriores, se puede observar que las personas con dislexia experimentan dificultades significativas en áreas como la lectura y la escritura. A continuación, se detallarán los distintos rasgos que verifican este grupo de individuos (Hornigold, 2017, pp. 77-83):

- **Dificultad para aprender a leer.** Este es el problema más característico de la dislexia. Los alumnos con dislexia enfrentan grandes desafíos al iniciar el proceso de lectura, y estas dificultades tienden a incrementarse bajo presión. Esta dificultad puede interferir también en la resolución de problemas matemáticos que requieran extraer información de un enunciado. Además, estos alumnos suelen presentar grandes problemas para leer un texto cuando las letras están muy juntas unas de otras.
- **Dificultad para aprender a escribir.** Las personas con dislexia suelen enfrentar problemas al escribir, cometiendo diversos errores al intentar escribir una misma palabra en varias ocasiones. También es común que tengan una caligrafía poco legible, e incluso pueden deliberadamente de manera desordenada para ocultar errores. Asimismo, suelen confundir las letras similares, como la b y la d o

la p y la q, como manifiesta la Ilustración 9, y pueden presentar una escritura desordenada, con palabras que saltan de línea, entre otros aspectos.

- **Problemas relacionados con la memoria.** Las personas con dislexia suelen tener dificultades para transferir la información de la memoria a corto plazo a la memoria a largo plazo, lo que puede generar frustración al parecer que han comprendido los conceptos durante la clase, pero luego no recuerdan la información al llegar a casa.

  Además, como la memoria a corto plazo tiene una capacidad limitada, si se almacena demasiada información, puede ocurrir que esta no se transfiera a la memoria a largo plazo, lo que afecta a la capacidad del individuo para recibir nueva información.

  También pueden experimentar dificultades para recuperar la información almacenada en la memoria a largo plazo, lo que puede interferir en la resolución de ejercicios de matemáticas, aunque sepan qué información utilizar. En el estudio de casos, se trabajará en algunas sesiones con este rasgo.

2.1.5. Enfoques pedagógicos para enseñar matemáticas.

El siguiente aspecto en el que se centrará el trabajo es en proporcionar ciertas técnicas que pueden emplearse al presentar un concepto matemático y que funcionan en intervenciones diseñadas para reducir la ansiedad matemática. Estas técnicas también pueden garantizar la inclusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas para aquellos alumnos con dificultades de aprendizaje, como los que tienen dislexia y discalculia, por ejemplo.

En primer lugar, se darán dos modelos teóricos que consisten en particionar el aprendizaje en distintas fases cuyo objetivo es que el alumno consiga entender y realizar con fluidez los contenidos del curso. A su vez, también se mencionarán los conocidos como principios de Dienes (Martínez y Varela, 2022) y el método con el que se va a buscar incrementar las demandas cognitivas (Stein et al., 2009, p. 1), empezando con problemas sencillos en un primer nivel para cada vez ir aumentando la complejidad gradualmente hasta llegar al punto que se desee.

2.1.5.1. Modelo CPA.

Uno de los primeros métodos que se crearon es el método CPA (Concrete, Pictorial, Abstract approach en inglés), desarrollado por Jerome Bruner (1966).

Este modelo teórico defiende que, para entender un concepto matemático, se tiene que pasar por tres etapas donde se experimenta con este concepto de tres modos distintos. Estos tres niveles son el nivel manipulativo, pictórico y el algebraico o abstracto, los cuales se detallarán a continuación:

2.1.5.1.1. Nivel Manipulativo.

En esta primera etapa, el alumno utiliza un determinado material que puede ser adecuado para entender el concepto en el que se esté trabajando, incluso pudiendo obtener propiedades relativas a esta nueva noción. Ejemplos de estos materiales, que son los que aparecen en la Ilustración 10 y en la Ilustración 11, pueden ser los muros de fracciones para trabajar lo relativo a suma y resta de fracciones o fracciones equivalentes, regletas para trabajar las operaciones como pueden ser la suma, resta, producto, cuadrados y raíces cuadradas, etc.

De este modo, el pensamiento se realiza a través de la manipulación de los objetos y a través de una representación en concreto, ilustrando la idea matemática que queramos trabajar a partir de un objeto real, proporcionando así la base de la comprensión de este concepto.

Ilustración 10. Muro de fracciones. Elaboración propia.

Ilustración 11. Regletas. Elaboración propia.

2.1.5.1.2. Nivel Pictórico.

El siguiente paso en el modelo CPA consiste en elaborar diversos esquemas o dibujos que ayuden a resolver un problema específico. Este nivel actúa como puente para que el alumno logre una comprensión completa del concepto enseñado y resulta realmente útil para visualizar las matemáticas y reforzar el aprendizaje del alumno cuando no se dispone de material manipulativo.

Por ejemplo, siguiendo con el caso de las fracciones, al enseñar el concepto de fracciones equivalentes el nivel pictórico se podría desarrollar de un modo análogo a como se hace con el *muro de fracciones*. Se podrían crear dos dibujos de las dos fracciones que se desean comparar, y al verificar si las áreas pintadas en ambos dibujos son iguales, se determinaría si las fracciones son equivalentes o no. Esto se puede apreciar en la siguiente imagen, donde se ilustran las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$.

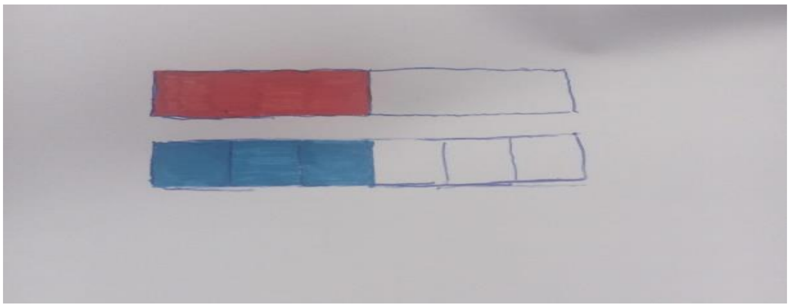


Ilustración 12. Representación de dos fracciones equivalentes mediante un dibujo. Elaboración propia.

2.1.5.1.3. Nivel Algebraico.

El último nivel del modelo de Bruner introduce los símbolos matemáticos y la notación que se utilizará con más frecuencia. Por ejemplo, en el caso de las fracciones, se introduciría la notación de mínimo común múltiplo (mcm) y otras convenciones similares.

Bruner (1966) también aboga por la existencia de un currículo en espiral, donde los conceptos matemáticos se revisan y profundizan gradualmente, partiendo de lo ya conocido para facilitar una comprensión más profunda de la asignatura.

2.1.5.2. Modelo de Sharma.

A partir del modelo CPA se desarrollaron numerosas variantes para alcanzar la plena comprensión de un concepto matemático. De todas ellas, este trabajo se centrará en el conocido modelo de Sharma (1986), donde afirma que un concepto matemático debería ser enseñado en seis niveles: intuitivo, manipulativo, pictórico, abstracto, aplicativo y comunicativo, donde este último nivel se realizará durante el tiempo en el que se realicen los restantes. Únicamente se detallarán los niveles que no están explícitamente presentes en el modelo CPA, es decir, los niveles intuitivo, aplicativo y comunicativo, ya que los otros tres son similares a lo visto en el modelo CPA.

2.1.5.2.1. Nivel Intuitivo.

En este nivel, se introduce el nuevo contenido relacionándolo con conceptos que los estudiantes ya conocen. Esta estrategia reduce la ansiedad matemática y facilita un aprendizaje más significativo y duradero. A su vez, se desarrollan habilidades de razonamiento al mostrar cómo una idea matemática puede conducir a otra.

Particularizándolo al ejemplo de las fracciones, se puede empezar relacionándolas con la división de dos números, un concepto familiar para los estudiantes.

2.1.5.2.2. Nivel Aplicativo.

Después de introducir la notación y los símbolos matemáticos propios del concepto, muchos estudiantes pueden sentir que el contenido abstracto no tiene aplicaciones prácticas. En este nivel, se alienta a los estudiantes a proporcionar ejemplos de situaciones de la vida real donde se pueda aplicar el concepto enseñado.

En este nivel, aplicado a fracciones, se pueden explorar situaciones cotidianas como un cuarto de hora o medio kilo de melocotones.

2.1.5.2.3. Nivel Comunicativo.

Como se comentaba anteriormente, este nivel es fundamental en todos los niveles anteriores. Se fomenta la comunicación entre los estudiantes y el profesor para monitorear el progreso y abordar las dificultades. Se alienta a los estudiantes a verbalizar sus procesos de pensamiento y a razonar sobre los conceptos. En el estudio de casos que se llevará a cabo, este nivel se trabajará mediante la verbalización de los procedimientos utilizados.

2.1.5.3. Principios del aprendizaje de las matemáticas de Dienes.

Con respecto a estos dos modelos, se aplican simultáneamente algunas teorías del aprendizaje, donde se debe destacar en primer lugar la teoría de Dienes (Martínez y Varela, 2022), la cual sostiene que el aprendizaje de las matemáticas se basa en los siguientes principios:

- **Principio Dinámico.**

Dienes afirma que cualquier abstracción parte de la experiencia. Por lo tanto, propone comenzar con juegos donde los niños puedan explorar libremente los materiales manipulativos que se utilizarán en el aprendizaje. Luego, se pasará a juegos estructurados donde los estudiantes pueden descubrir propiedades del concepto en cuestión. Finalmente, se realizan juegos de práctica para que los alumnos utilicen el concepto en diversas aplicaciones, consolidando así su comprensión.

- **<u>Principio de la Constructividad</u>.**

Según Dienes, el aprendizaje de las matemáticas implica la construcción progresiva de conceptos. Los alumnos deben construir y elaborar estos conceptos a medida que avanzan en su aprendizaje.

- **<u>Principio de la Variabilidad Perceptiva</u>.**

Este principio sostiene que un concepto debe presentarse de diversas formas para tener en cuenta las diferencias individuales de los estudiantes. La variabilidad en la presentación ayuda a los alumnos a formar una comprensión más completa del concepto.

- **<u>Principio de la Variabilidad Matemática</u>**.

Dienes defiende que es necesario manifestar explícitamente todas las formas posibles que puede adquirir un concepto. Esto permite que el alumnado encuentre relaciones entre las distintas representaciones, lo que facilita la abstracción del concepto.

2.1.5.4. La evolución de la demanda cognitiva: de lo simple a lo complejo.

Un aspecto realmente importante a la hora de planificar las distintas actividades es preparar actividades que vayan acorde al nivel de los estudiantes, ya que, si son demasiado sencillas, no suponen un reto y si son muy complicadas, pueden producir efectos adversos en el proceso de aprendizaje del alumno. Para ello surge el concepto de demanda cognitiva, de manera que, según Stein et al. (2009, p.1), la demanda cognitiva que tiene una determinada tarea es "el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder participar en la tarea y resolverla con éxito".

En el estudio de casos, el objetivo es alcanzar la demanda cognitiva más alta posible sin que tenga ansiedad matemática, es decir, lograr resolver los ejercicios más desafiantes posibles sin mostrar rasgos de ansiedad matemática.

Para conseguir esta meta, no es coherente proponer tareas que sean muy complejos en primer lugar, sino que lo lógico es empezar con ejercicios que sean simples o se apoyen en ideas ya conocidas, para que se adquieran conceptos y se desarrollen técnicas que se van a seguir usando en otro tipo de situaciones que son más complejas y con una demanda cognitiva mayor. No obstante, al tener ya una concepción previa de lo que había que hacer en el tipo de problemas más sencillos, van a poder abordar estas tareas más complejas con mayor facilidad.

Por lo que, siguiendo un enfoque progresivo partiendo de lo más sencillo y realizando pequeñas modificaciones a esta situación inicial, se va a conseguir una evolución en la demanda cognitiva del alumno.

En particular, en nuestro estudio de casos, se realizará de manera general este enfoque de manera que, además queremos que tenga la menor ansiedad matemática posible antes de incrementar la demanda cognitiva. Se puede observar muy bien esta evolución de la demanda cognitiva siguiendo el enfoque progresivo en las sesiones relativas a las ecuaciones de primer grado y sobre todo en las ecuaciones de segundo grado, donde partiendo de algo ya trabajado como puede ser completar cuadrados, modificando el problema cada vez más, hasta que fue capaz de demostrar la fórmula de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.1.6. PISA

Una vez que se ha desarrollado todo lo relativo al dominio afectivo, a la discalculia y a la dislexia y se han detallado algunas de las posibles formas en las que se puede presentar un concepto matemático, atendiendo a planteamientos inclusivos, nos ocuparemos ahora de los resultados obtenidos en las pruebas PISA (*Programme for International Student Assessment*), donde en la última edición que se realizó en 2022 hay una atención especial a la ansiedad matemática.

En concreto, en esta sección se explicará lo que son estas pruebas, los resultados obtenidos en esta última edición y algunas conclusiones relacionadas con la ansiedad matemática que se han obtenido en el último estudio realizado.

2.1.6.1. Generalidades de las pruebas PISA.

El programa PISA (OECD, 2023) forma parte de un conjunto de programas de evaluación nacional e internacional a gran escala que se realizan, y juegan un papel importante, de cara a evaluar los distintos sistemas educativos en función de su capacidad para desarrollar el potencial humano, el progreso, la calidad de vida de todos los habitantes del mundo y prepararse para las futuras demandas del siglo XXI.

De todos estos programas, el más importante es PISA, un programa internacional que evalúa a los estudiantes de 15 años que vivan en países que pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) o que vivan en países colaboradores de esta asociación. En 2022, 81 países participaron en PISA, los cuales aparecen en la Ilustración 13.

PISA se caracteriza por lo siguiente:

- PISA se presenta como un mecanismo a nivel educativo que representa la voluntad que tiene el gobierno de comprobar los resultados y el rendimiento de su sistema educativo.
- PISA no solo evalúa los resultados de aprendizaje de los alumnos, sino que busca conexiones entre estos resultados y otros factores que puedan influir en el proceso educativo.

- PISA se hace regularmente, en concreto cada 3 años, para que así los países puedan monitorizar su progreso en aspectos educativos.
- PISA evalúa por un lado el conocimiento de la materia y por otro lado la capacidad del alumno de aplicar los contenidos de una manera creativa.
- Al ser internacional, se puede usar como una medida para comparar la efectividad, equidad y eficiencia de los distintos sistemas educativos a nivel internacional.
- PISA no evalúa ni el aprendizaje de los contenidos específicos del currículo, ni a los docentes ni al currículo.

Ilustración 13. Países que participaron en PISA 2022. (PISA 2022 Results,2023)

Por otro lado, todos los exámenes PISA evalúan tres áreas, la competencia lectora, matemática y científica, de manera que en cada año que se realiza se centran en una en particular, ocupando aproximadamente esta última un 66% de la prueba y las dos restantes un 17%. Por ejemplo, en la edición de 2022, se centraron en la competencia matemática, la cual se puede definir, según Ministerio de Educación (2023), como “la competencia matemática implica la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y poder usar e involucrarse con las matemáticas”, implicando esto que el alumno pueda razonar de manera matemática en problemas de la vida cotidiana.

2.1.6.2. Resultados en matemáticas de las pruebas PISA de 2022.

En 2022 se llevó a cabo una edición de las pruebas PISA, cuyos resultados se publicaron el 5 de diciembre de 2023. En estos resultados, se puede concluir que el país que mejor puntuación obtuvo en matemáticas fue Singapur, obteniendo una media de 575 puntos.

Según la OCDE (OECD, 2023), la puntuación media en estas pruebas de los países miembros de esta asociación es de 472 puntos. En particular, España tiene una puntuación de 473, es decir está en la media de estos países, destacando Catilla y León como la comunidad autónoma con mayor puntuación media con 499 puntos.

2.1.6.2.1. Resultados relacionados con la ansiedad matemática.

En estas pruebas la rama central fueron las matemáticas, y además se estudió la ansiedad matemática de los estudiantes, obteniéndose resultados interesantes que refuerzan lo visto en el marco teórico de la ansiedad matemática.

En concreto, para medir la ansiedad matemática, se preguntó a los estudiantes hasta qué punto estaban de acuerdo (teniendo que contestar con “muy en desacuerdo”,” en desacuerdo”, “de acuerdo” o “muy de acuerdo”) con afirmaciones como puede ser “Me pongo muy tenso cuando tengo que hacer mis deberes de matemáticas”. Según lo observado en PISA 2012, se encontró que aquellos estudiantes que obtuvieron mejores resultados en la prueba normalmente tenían menos ansiedad matemática, ocurriendo esto en cada región en la que se hizo el programa PISA (OECD, 2023). Como se puede observar en la Ilustración 14, se realiza una comparación entre la puntuación media obtenida tanto en los exámenes PISA y la ansiedad matemática de los distintos países.

Observando la Ilustración 14, se puede apreciar que los países con alta ansiedad matemática suelen tener una puntuación media más baja en las pruebas PISA, aunque esto no siempre se cumple de manera consistente. Por ejemplo, países como Japón muestran una alta puntuación media junto con una ansiedad matemática alta, mientras que otros como Uzbekistán tienen tanto una puntuación como una ansiedad matemática bajas. Centrándonos en España, se observa que presenta una ansiedad superior a la media de la OCDE, a pesar de tener una puntuación similar a la media de los países de esta organización.

Por último, en estos estudios, también se relaciona la mentalidad del alumno con su ansiedad matemática y la puntuación en las pruebas PISA. Según OECD (2023), un estudiante puede tener dos tipos de mentalidad, o tener una mentalidad de crecimiento o fija, dos términos antagónicos donde la mentalidad de crecimiento la posee aquel que cree que las habilidades y la inteligencia pueden desarrollarse con el tiempo, lo que les lleva a esforzarse por mejorar, incluso ante los obstáculos.

Para determinar el tipo de mentalidad del alumno, se realizaron preguntas, donde, de un modo similar a lo realizado al medir la ansiedad matemática, debían responder en una escala que iba desde “muy en desacuerdo” hasta “muy de acuerdo”. Se encontró que los estudiantes con mentalidad de crecimiento tienden a experimentar menos ansiedad matemática y a obtener puntuaciones más altas en las pruebas PISA en comparación con aquellos con una mentalidad fija. Esta diferencia se evidencia claramente en la Ilustración 15, donde los estudiantes se dividen según su tipo de mentalidad y su nivel de ansiedad matemática.

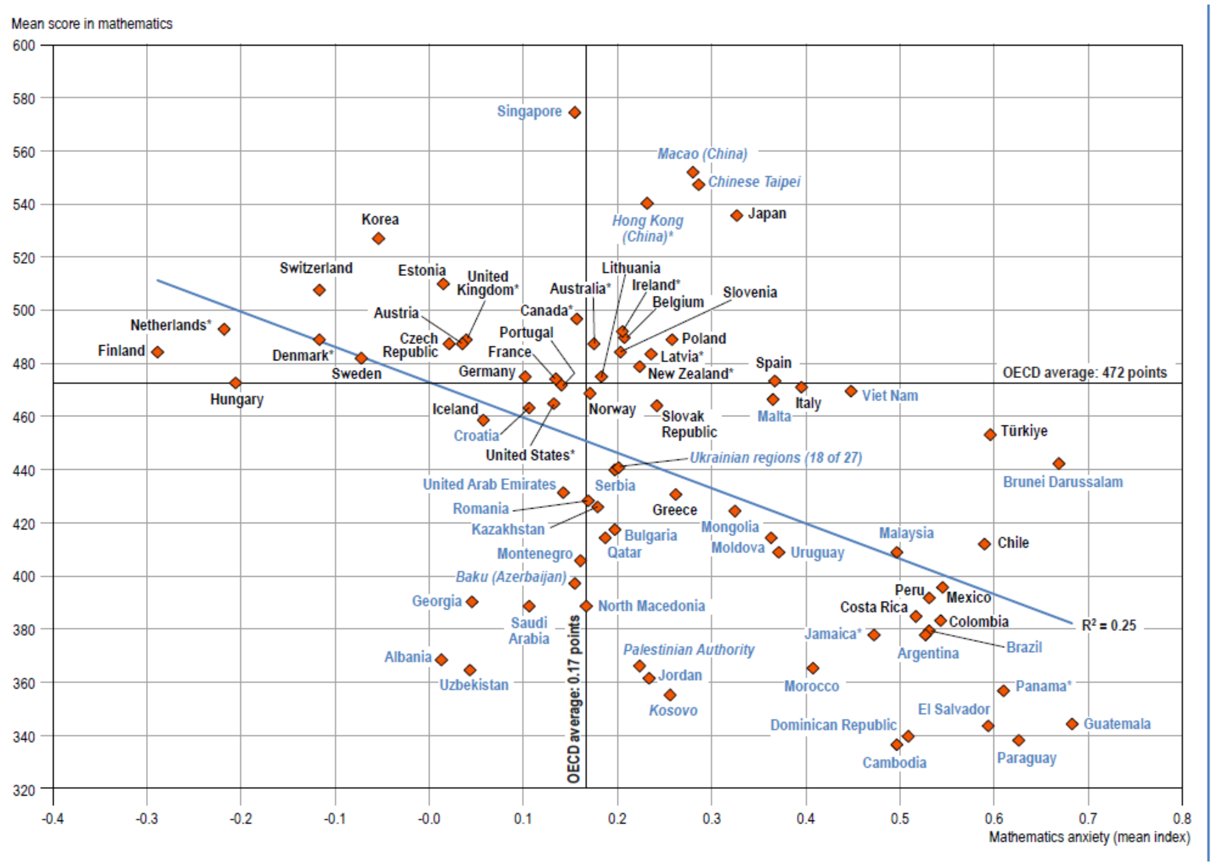


Ilustración 14. Relación ansiedad matemática-puntuación obtenida en PISA 2022. (PISA 2022 Results,2023)

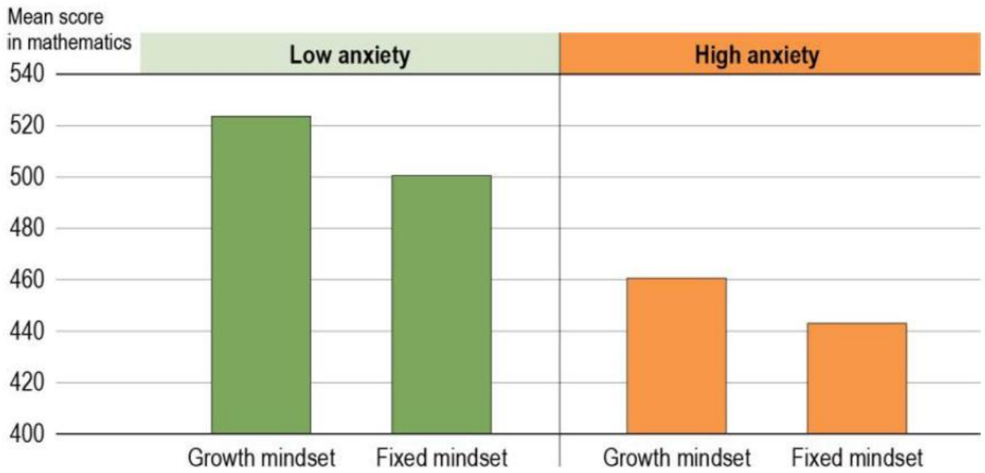


Ilustración 15. Comparación de los resultados de PISA 2022 con respecto al tipo de mentalidad y la ansiedad matemática. (PISA 2022 Results,2023)

A partir de este gráfico, se puede concluir que, incluso en presencia de ansiedad matemática alta, los estudiantes con mentalidad de crecimiento muestran una mejor puntuación que aquellos con ansiedad matemática alta y mentalidad fija. Sin embargo, la disparidad en la puntuación entre los dos tipos de mentalidad es más significativa cuando la ansiedad matemática es baja.

2.2. Marco Normativo.

Una vez que se ha desarrollado el marco teórico, se explorarán las medidas legislativas implementadas en España para optimizar el desarrollo del dominio afectivo. Para ello, nos basaremos en el concepto de educación emocional, término definido por Mayer y Salovey (1993) como "la habilidad de controlar las emociones propias y las de los demás para distinguirlas y de usar la información para guiar el pensamiento propio y las acciones".

La importancia de la educación emocional ha sido confirmada por autores como Bisquerra (2005), quien sostiene que esta debe de estar presente a lo largo de todo el currículo académico. En el caso específico de España y de la educación emocional en matemáticas, hasta la promulgación de la Ley Orgánica de Educación (LOE) de 2006, no se hace ninguna mención específica a la educación emocional en las leyes educativas (Más y Arroyo, 2022). La LOE regula la educación emocional a través de tanto las competencias clave y específicas, abordándola de manera transversal en todas las etapas salvo en la educación infantil.

Hasta la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE) en 2020, no se aborda específicamente la educación emocional en matemáticas en secundaria y bachillerato. La LOMLOE incluye el sentido socioafectivo junto con los sentidos más clásicos, como el numérico, el algebraico o el estocástico. Según la LOMLOE, el sentido socioafectivo implica identificar y gestionar las emociones, afrontar los desafíos, mantener la motivación y la perseverancia y desarrollar el autoconcepto y el sentido de la identidad en el aprendizaje de las matemáticas.

Este sentido contribuirá principalmente al desarrollo de la Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender, con competencias específicas que servirán para desarrollar las destrezas socioafectivas. A continuación, se describirán estas junto con los principales criterios de evaluación, según la etapa donde nos encontremos.

En el currículo de secundaria se encuentran la competencia específica 9 y 10, que son las siguientes:

- Competencia específica 9: "*Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas*".

En cuanto a los criterios de evaluación de esta competencia, destaca el criterio 9.1, que valora lo siguiente: *"Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos",* donde se focaliza la atención en las emociones y el autoconcepto matemático, que vimos en el anterior capítulo la relación que tenía con la ansiedad matemática.

- Competencia específica 10: "*Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables".*

  Entre los criterios de evaluación de esta competencia específica, se destaca el criterio 10.1, que evalúa lo siguiente: "*Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa*".

Sin embargo, en el currículo de bachillerato solo hay una competencia específica que se ocupe de la educación emocional, la competencia específica 9, que se define como sigue:

- Competencia específica 9: "*Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas*".

Para esta competencia, se encuentra el criterio de evaluación 9.1, que valora "*Afrontar las situaciones de incertidumbre, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas*", enfatizando la gestión emocional y la superación del error.

3. Marco Metodológico.

En este capítulo se detallará todo lo relativo a las distintas posibilidades que pueden surgir al realizar una investigación, comenzando con las principales cosmovisiones y luego explorando los distintos enfoques que puede tener un estudio, con especial atención al enfoque cualitativo y, en particular, a la descripción de un estudio de casos, que será implementado en el Capítulo 4.

3.1. Cosmovisiones de una investigación.

Al realizar un estudio, es inevitable que el investigador aporte su propia manera de ver y entender el mundo, lo que puede influir en las decisiones que tome al diseñar su investigación. Por tanto, es necesario que el científico defina y comprenda su cosmovisión o posición paradigmática. Según Jorrín (s.f.), las principales cosmovisiones son las siguientes:

- **Cosmovisión positivista:** los investigadores que adoptan esta perspectiva creen en la existencia de una única realidad que puede ser conocida y explicada. Se esfuerzan por ser objetivos y por minimizar cualquier sesgo en su investigación, siguiendo estrictos criterios de validez y de fiabilidad. Esta cosmovisión es predominante en ciencias de la salud, aunque también está presente en ciencias sociales, de la salud, de la educación y en psicología.
- **La cosmovisión post-positivista:** los investigadores afines a esta posición paradigmática creen que existen muchos aspectos, que son importantes para la investigación, que provienen del ámbito de las relaciones los cuales no son observables. Por lo tanto, esta cosmovisión es contraria a la positivista, aunque se sigue creyendo en la importancia de la objetividad y en la búsqueda de generalizar los resultados de la investigación.

  Dos rasgos que caracterizan a los investigadores de esta corriente es que usan distintas secuencias estructuradas de investigación, donde juegan un rol principal los métodos de recogida y análisis de datos, y que, además, creen que existe una realidad social que incorpora las distintas perspectivas individuales, a diferencia de los positivistas que pensaban que solo existía una.
- **La cosmovisión constructivista:** en esta posición paradigmática se cree en la construcción social del conocimiento a causa de la interacción social. Es por esto que los investigadores de esta cosmovisión asumen que el conocimiento se debe al contexto social donde se origina, provocando esto que este en constante revisión y que dicho ambiente condiciona las conclusiones que hayan obtenido en la investigación.

  En este sentido, los científicos que adhieren a esta perspectiva otorgan mayor importancia a los diferentes significados que los participantes de la investigación atribuyen, en lugar de centrarse exclusivamente en el fenómeno estudiado, ya que este está estrechamente ligado al contexto social.

Para abordar este aspecto, se emplean procesos inductivos que permiten una reflexión detallada y una descripción exhaustiva del entorno social en el que se desarrolla la investigación.

- **La cosmovisión transformadora:** los investigadores de esta cosmovisión defienden la existencia de esta posición paradigmática en el hecho de que las dos cosmovisiones anteriores, es decir post-positivismo y constructivismo, no satisfacen las distintas demandas que tengan los grupos en riesgo de exclusión social.

  En este sentido, los investigadores de esta perspectiva buscan otorgar un papel central a las opiniones de los participantes de la investigación. Esto implica un enfoque que no solo busca comprender el fenómeno asociado, sino también promover cambios significativos que contribuyan a la inclusión y la mejora de las condiciones de vida de los grupos marginados. D

- **La cosmovisión pragmática:** en esta posición paradigmática, se cree que solo existe una única realidad, una perspectiva inherente del post-positivismo, mientras que reconoce la interpretación individual propia del constructivismo.

  Los investigadores afines a esta cosmovisión enfatizan la importancia del fenómeno que es objeto de estudio por encima de las técnicas utilizadas para abordarlo. En este enfoque, se valora la utilización de cualquier método que facilite la exploración de las preguntas de investigación y la búsqueda de respuestas.

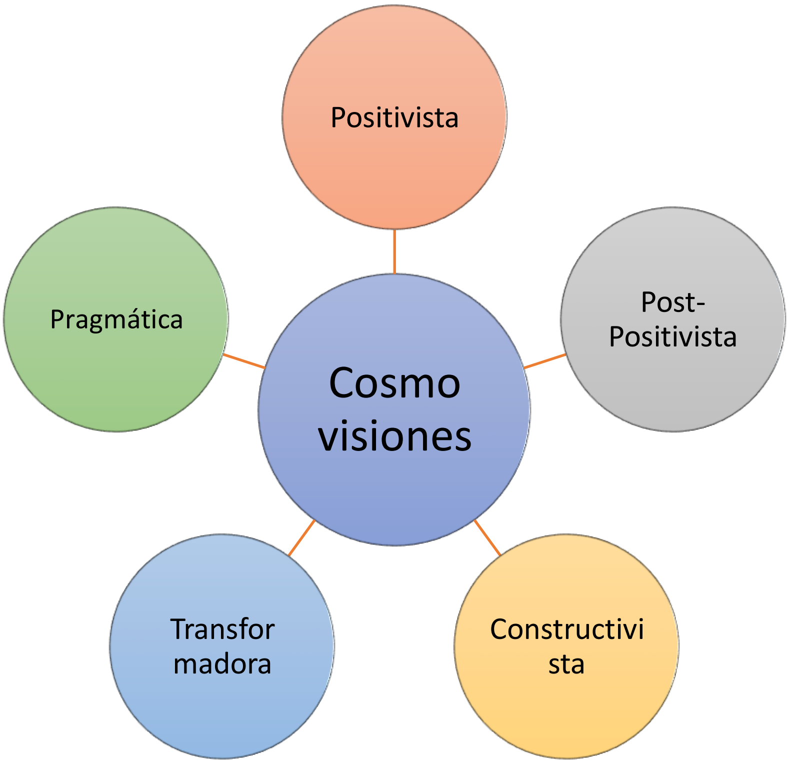


Ilustración 16. Principales cosmovisiones. Elaboración propia.

3.2. Enfoques de una investigación.

La última decisión a considerar al planificar una investigación es el enfoque que se dará, influenciado en gran parte por el tema de investigación elegido y las preguntas de investigación a responder. Hay tres enfoques principales, los cuales son el cuantitativo, el cualitativo y el mixto, de manera que este último surgió como un término medio entre los dos primeros. A continuación, se procederá a explicar los tres enfoques, tomando gran importancia el cualitativo, desarrollando en primer lugar las generalidades de toda investigación de este tipo para luego exponer todo lo relativo a un estudio de casos, ya que la intervención que se realizará en el Capítulo 4 será de este tipo.

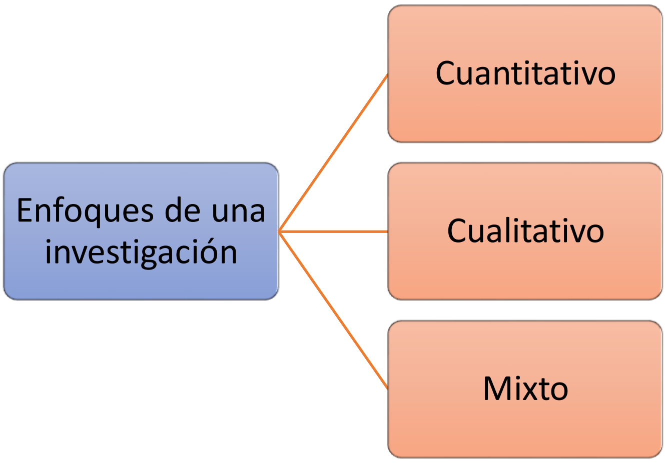


Ilustración 17. Enfoques de una investigación. Elaboración propia.

3.2.1. Enfoque cuantitativo.

El enfoque cuantitativo se caracteriza por ser un diseño de investigación donde el investigador recopila datos para obtener medidas a través de distintos procedimientos, posteriormente tratados mediante técnicas estadísticas, computacionales o matemáticas, buscando crear o utilizar distintos modelos matemáticos relativos al fenómeno estudiado. Este enfoque se centra en datos expresados numéricamente, como estadísticas o porcentajes.

Las investigaciones cuantitativas se caracterizan principalmente por ser objetivas, realizan el análisis de los datos de una forma deductiva y apoyándose en gran medida de la estadística. Buscan generalizar los resultados obtenidos y descomponer la realidad en un conjunto de variables. No obstante, son investigaciones reduccionistas, que son insuficientes si buscan explicar la complejidad la realidad, interpretándola siguiendo un modelo mecanicista.

Este tipo de investigaciones se pueden clasificar siguiendo distintos criterios, entre los que se encuentran los siguientes:

- **Según su propósito o alcance.** En este caso las investigaciones cuantitativas pueden ser explicativas, correlacionales, descriptivas y exploratorias.
- **Según el número de variables independientes y dependientes.** En esta clasificación, se encuentran cuatro posibilidades: univariado-univariado (una variable independiente y una dependiente), multivariado-univariado (varias variables independientes y una dependiente), univariado-multivariado (una variable independiente y varias dependientes) y multivariado-multivariado (varias variables independientes y varias dependientes).
- **Según el grado de control del investigador sobre el experimento.** Al realizar esta división, se encuentran, de menos a más control del investigador en la investigación, los estudios no experimentales, cuasiexperimentales y experimentales.

3.2.2. Enfoque cualitativo.

El segundo tipo de enfoque que existe, el cual será el que más se detalle de los tres, es un tipo de investigación que es muy usada cuando el objetivo es explorar y conocer de manera profunda una determinada situación o hecho particular. Por esta razón, este tipo de enfoque está muy vinculado a investigaciones que tengan la cosmovisión constructivista y transformadora, las cuales ya se han abordado en la Sección 3.1.

Con respecto a la educación en matemáticas, los diseños de investigación cualitativa más frecuentes que se realizan, según Maxwell (2008), son:

- **La teoría fundamentada**. Es aquella investigación que busca es generalizar a partir de ella una teoría a partir de la recogida y el análisis de los datos. Es útil en ramas donde haya pocos antecedentes.
- **Investigación-acción.** El objetivo de todas las investigaciones de este tipo es mejorar la práctica educativa a partir de la recogida y análisis de los datos tomados.
- **Estudio de casos**. Este tipo de investigación cualitativa nos centraremos en la siguiente sección, al ser la intervención que implementamos en el Capítulo 4 un estudio de casos.

Para terminar, es conveniente a la hora de realizar un experimento cualitativo comprobar su confiabilidad. Para ello, lo más común es realizar de manera simultánea los cuatro criterios de Guba (1981), los cuales se explican a continuación:

1. **Credibilidad**. Es un término que informa acerca de que los resultados obtenidos en un estudio son coherentes con la realidad estudiada.
2. **Transferibilidad.** Este término da información acerca de si los resultados obtenidos son transferibles a otras situaciones cuya realidad o contexto sea muy similar al planteado en la investigación.
3. **Fiabilidad.** Es la capacidad que tiene una investigación de ser repetida por otro investigador con un contexto similar y producir resultados muy similares.

4. **Confirmabilidad.** Es la propiedad que tiene una investigación de manera que los resultados no vengan influenciados por el investigador, sino que salgan como consecuencia de lo expresado por los participantes de dicha investigación.

Para cumplir estos cuatro criterios, normalmente se suelen adoptar diseños de investigación ya conocidos, se comparten los resultados que se van obteniendo con los participantes o personas relacionadas con ellos, se realizan amplias descripciones situacionales o contextuales, se revisan otras investigaciones que se hayan hecho que estén relacionadas al estudio que estemos haciendo, se admiten las creencias que tenemos como investigadores o se usan diversas tácticas para asegurar que los distintos participantes son realmente honestos.

Ilustración 18. Criterios de Guba. Elaboración propia.

3.2.3. Enfoque mixto.

Una vez presentado los dos enfoques anteriores, surge de manera natural la investigación que toma aspectos del enfoque cuantitativo y cualitativo, conocida como enfoque mixto. Estos enfoques se definen como aquellos diseños de investigación en los que el investigador recoge y analiza tanto datos cuantitativos como cualitativos, realizando un solo estudio o un estudio que se divide en varias fases.

Además, el enfoque mixto es el que proporciona una mejor aproximación para investigar el mundo social, donde normalmente se usa más de una metodología implicando esto que se tiene más de una forma de conocimiento.

Por último, se presentarán los cuatro tipos principales de enfoques mixtos:

- **Triangulación.** Son aquellos estudios donde se dan los dos enfoques, cualitativo y cuantitativo, teniendo ambos la misma importancia y el mismo tiempo en la investigación.

- **Embebido.** Está presente en aquellas investigaciones donde la parte cuantitativa está dentro de un estudio cualitativo mayor o viceversa, necesitando diferentes datos para cada parte.
- **Explicativo.** En estos estudios se dan dos fases diferenciadas, siendo la primera cuantitativa y la segunda cualitativa, de tal manera que la segunda fase interpreta los datos que se han obtenido en la parte cuantitativa.
- **Exploratorio.** Se vuelven a dar dos fases claramente diferenciadas, con la distinción de que la primera fase es cualitativa y sirve para apoyar a realizar la segunda fase, que es de tipo cualitativo.

3.3. Estudio de casos.

Como se ha planteado en la anterior sección al hablar del enfoque cualitativo, este apartado se centrará en las generalidades de un tipo de diseño cualitativo, el estudio de casos, sus características y los tipos que hay, así como también cómo obtener información relevante, cómo analizarla y los posibles roles que tiene el investigador en el estudio de casos. Este apartado será clave para introducir la notación que se usará en el Capítulo 4, que se centrará en nuestro estudio de caso.

3.3.1. Definición y tipos.

Según Stake (1995, p. xi), un estudio de casos es una investigación que se centra en la peculiaridad y complejidad de un individuo o conjunto de individuos, que llamaremos casos, de manera que se logre entender su actividad en un contexto particular y de suma importancia.

En la definición anterior, puede haber problemas para definir con precisión qué es un caso, por lo que proponemos algunos ejemplos significativos de estos. Un caso se puede considerar que es una persona, un grupo de personas, un programa innovador, todos los institutos de España o un instituto en particular que tenga especial interés por sí mismo. Es por ello por lo que un caso se podría definir como un sistema "acotado", el cual es el centro de la investigación, en lugar de las posibles preguntas de investigación que podamos tener.

Los estudios de casos se suelen clasificar, siguiendo a Stake (1995, pp. 3-5), en función del caso que tengamos en los siguientes tipos:

- **Estudio de Caso Intrínseco.** Es un tipo de estudio de casos en el que el interés que tenemos por el caso no es tanto para aprender de otros casos con las mismas características o de un problema general, sino porque el caso en sí mismo presenta un tipo de características que nos resultan especialmente interesantes.
  Un ejemplo de este tipo de estudios surge cuando se quiere explicar por qué un alumno en particular suspende.

- **Estudio de Caso Instrumental.** En este tipo de estudio de casos, la perspectiva es distinta, ya que el interés se centra en una determinada pregunta de investigación o una necesidad de entender un determinado fenómeno, de manera que se eligen los casos que mejor se adapten a nuestros intereses. Siguiendo la línea del ejemplo del estudio de caso intrínseco, un estudio de casos instrumental se realizaría si se quiere saber por qué los alumnos suspenden y se selecciona a un alumno de estos para comprender mejor esta razón.
- **Estudio de Caso Colectivo.** Es un tipo de estudios de casos en el que se tienen varios estudios de casos instrumentales coordinados entre sí para responder a una pregunta de investigación. En estos estudios, es de vital importancia la coordinación que tiene que haber entre los estudios individuales. Un estudio de casos colectivo podría ser que cada profesor del departamento de Matemáticas de un instituto, de manera coordinada, escoja cada uno un alumno suyo que suspendió para comprender por qué suspenden los distintos alumnos.

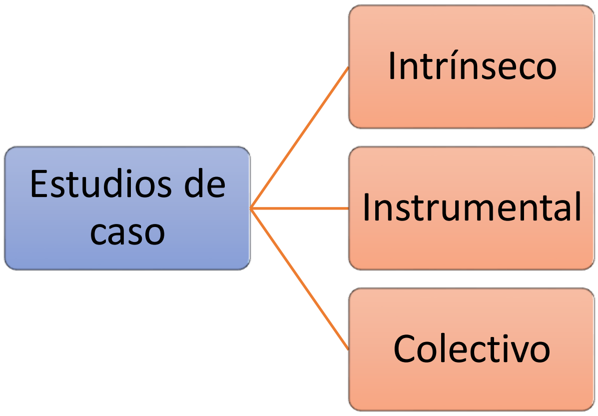


Ilustración 19.Tipos de estudio de caso. Elaboración propia.

Esta división de los tipos de casos es de vital importancia porque, en función del tipo de caso que tengamos, se van a usar distintos métodos, de manera que cuanto más intrínseco sea el estudio, más hay que centrarse en el caso y menos en las posibles preguntas que tengamos.

Una de las posibles dudas que pueden surgir es, si es posible, cómo elegir los casos. Para ello, se intentará escoger aquellos que sean representativos de otros casos, aunque también hay que tener siempre presente que el objetivo de los estudios de casos no es entender otros casos, sino entender lo máximo posible del o los casos que estemos tratando.

Por otro lado, partiendo de la singularidad del caso con el que estamos trabajando, es posible que se hagan generalizaciones, observando el comportamiento del caso, o que ocurra todo lo contrario, es decir, que generalizaciones que se asumían como ciertas sean erróneas y el caso sirva como un contraejemplo para comprender que lo que se pensaba que era cierto no lo es.

Conviene apuntar que un estudio de casos lleva tiempo, por lo que hay que ser paciente, reflexivo, expectante por comprender las múltiples realidades que vive el caso, sean o no contradictorias, para alcanzar una mayor comprensión del caso.

3.3.2. Preguntas de investigación.

Un aspecto muy importante y de cierta dificultad en el estudio de caso es la elección de buenas preguntas de investigación que sirvan para encarar la investigación. Este aspecto requiere de cierta organización por parte del investigador acerca de lo que se quiere conocer con relación al caso, llevando la investigación de un estado de desconcierto a uno de comprensión y explicación de los fenómenos.

Particularizando lo anterior al estudio de casos, donde lo que se busca es adquirir la mayor comprensión del caso, Stake (1995, p. 16) utiliza lo que él llama problemas, que son "preguntas que el investigador debe tener presentes para poder dirigir la observación a aquellas situaciones que se consideren especialmente relevantes para el trascurrir del estudio". Usando el estudio de casos intrínseco que se usó como ejemplo, dos problemas podrían ser las siguientes: ¿qué hábitos de estudio tiene el alumno? o ¿el contexto del aula explica el rendimiento del alumno?

Un aspecto que es muy común es la confusión entre las preguntas informativas y los problemas, por lo que conviene aclarar la distinción. La principal diferencia radica en que las preguntas informativas se usan para conocer la evolución del caso y te pueden ayudar a resolver los problemas planteados, pero no tienen la misión de organizar la investigación que estemos llevando a cabo, es decir, los problemas deben de estar íntimamente ligados a la situación del caso para poder organizar la investigación.

Los problemas no tienen por qué surgir en el principio de la investigación; pueden surgir a lo largo del proceso, que se conocen como problemas émicos, o ya estar contemplados desde el inicio, debido a la influencia de otras investigaciones anteriores, los llamados problemas éticos. Por lo tanto, durante el estudio de casos pueden surgir diferentes problemas, algunos de los cuales podrían haber sido importantes inicialmente y luego perder relevancia, o viceversa. También es posible que un problema evolucione con el tiempo para ajustarse mejor a la situación del caso.

En el estudio de caso, recogido en el Capítulo 4, se buscará responder, en línea con los objetivos mencionados en la Sección 1.2, cuatro preguntas de investigación, las cuales son las siguientes:

- ¿En qué momento Irene empezó a sentir ansiedad matemática?
- ¿En qué situaciones Irene presenta una mayor ansiedad matemática?
- ¿Qué es lo que causa la ansiedad matemática en Irene?
- ¿La aplicación del modelo CPA ayuda a Irene en la comprensión de los conceptos nuevos de matemáticas y en la reducción de su ansiedad matemática?

3.3.3. Recolección de los datos.

Al realizar un estudio de casos, es común comenzar recolectando datos relacionados con los antecedentes del caso, el conocimiento previo de otros casos similares y las primeras impresiones. Una vez recopilados estos datos iniciales, el investigador debe prestar especial atención a los aspectos que considere importantes y utilizarlos para llegar a conclusiones significativas para la comunidad científica.

La recopilación de datos sin un plan puede resultar complicada debido al limitado tiempo disponible para llevar a cabo el estudio de casos. Por lo tanto, es importante planificar cuidadosamente el proceso, siguiendo los pasos sugeridos por Stake (1995, p.51):

1) Definición del caso y de los objetivos de investigación.
2) Identificación de los elementos que pueden ser útiles para la investigación.
3) Localización de las fuentes de información relevantes.
4) Planificación de la distribución de las sesiones de estudio.
5) Estimación de los gastos asociados con el estudio de casos.
6) Detallar qué aspectos se espera informar durante el proceso de investigación.

Por lo tanto, en relación con este plan de acción, existen dos posibles enfoques para recopilar datos de manera completamente válida: algunos investigadores consideran que lo más importante para crear un plan de recolección de datos es saber exactamente qué se necesita o que se quiere saber, mientras que otros prefieren estar preparados para asimilar cualquier información relevante que surja durante el proceso.

A continuación, se procede a recopilar los principales métodos de recopilación de información, siguiendo la metodología propuesta por Stake (1995, pp. 60-67). Es importante tener en cuenta que se requieren los permisos correspondientes para llevar a cabo estas actividades:

- **Observación.** Este método constituye la piedra angular de la recolección de datos en los estudios de casos, ya que permite al investigador obtener una comprensión más profunda del caso en estudio. La atención prestada durante la observación estará influenciada por los problemas que hayan sido definidos en ese momento, así como por su importancia relativa. Es esencial que el investigador mantenga un registro detallado de lo observado para facilitar el posterior análisis de los datos.
- **Grabaciones de audio y de video.** Estos sistemas proporcionan registros que permiten al investigador realizar un análisis más exhaustivo, no limitándose solo a la observación. Con las grabaciones, es posible capturar exactamente lo que dice el caso (si se trata de una persona) o analizar diferentes gestos corporales. Algunos investigadores afirman que este método les permite pensar y reflexionar de manera más efectiva. Sin embargo, una desventaja principal de este enfoque es la necesidad de transcribir lo que se registra en los videos o audios, lo que implica un trabajo adicional.
- **Entrevistas.** En el estudio de casos, uno de los objetivos es mostrar las diversas realidades del caso. Para lograrlo, una herramienta útil es la entrevista semiestructurada, en la que el investigador prepara

algunas preguntas y el caso describe o explica sus experiencias y sentimientos. Además, las entrevistas suelen complementarse con grabaciones de audio o video para capturar las palabras exactas del entrevistado y también su comportamiento no verbal. También puede ser útil entrevistar a personas que conozcan bien el caso para obtener perspectivas adicionales.

- **Descripción del contexto.** Es fundamental analizar el entorno físico donde se llevan a cabo las sesiones del estudio de caso para proporcionar al lector información detallada sobre el lugar y las actividades que se realizan en él. Además, la descripción socioeconómica del contexto y el nivel de apoyo proporcionado por los casos y sus familias son aspectos importantes que considerar, ya que pueden influir en la facilidad o dificultad del desarrollo del estudio. Específicamente, en estudios de casos más intrínsecos, se debe prestar una mayor atención a este aspecto debido a su relevancia para comprender completamente el caso.

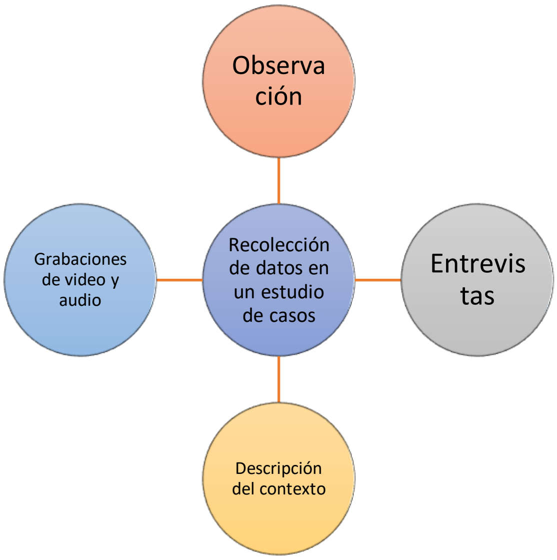


Ilustración 20. Recolección de datos en un estudio de casos. Elaboración propia.

En el estudio de casos, la observación el recurso predominante en la recolección de datos. Por otro lado, también se recopilará información a través de un *Mapa de Humor*, confeccionado en la sesión inicial, y mediante el cuestionario de contextos de PISA.

3.3.4. Análisis de los datos.

En cualquier estudio, ya sea cualitativo, cuantitativo o mixto, es necesario realizar un análisis de los datos recopilados a lo largo de la investigación. Según Stake (1995, p.71), en un estudio de casos, el análisis de los datos implica dar sentido a las primeras impresiones que se tienen al abordar el caso, así como a los informes finales. En otras palabras, consiste en descomponer nuestras observaciones e impresiones de lo que está sucediendo para llegar a conclusiones significativas.

En cuanto al momento para iniciar el análisis de datos, no hay un punto específico para comenzar, ya que esto depende del progreso y desarrollo del estudio.

Para analizar los datos, se pueden aplicar principalmente dos técnicas:

- Interpretar directamente cada situación de forma individual.
- Agrupar distintas situaciones hasta que se pueda llegar a alguna conclusión sobre todas ellas en conjunto.

Por lo general, en un estudio de casos se utilizan ambas técnicas. En el caso del estudio de casos intrínseco, donde el objetivo principal es comprender al máximo el caso en cuestión, la técnica predominante suele ser la primera. Sin embargo, también se pueden agrupar ciertas características que se observan en las distintas sesiones. En cambio, en el estudio de casos instrumental, la segunda técnica tiende a ser la dominante, aunque es importante tener en cuenta la primera, ya que ciertos rasgos interesantes pueden surgir en momentos específicos de una sesión particular.

Como se mencionaba anteriormente, el análisis se realiza como un medio para buscar conclusiones. El objetivo es identificar patrones que proporcionen cierta consistencia en las observaciones, es decir, comportamientos que se repitan a lo largo del tiempo o en diferentes contextos, lo que se conoce como correspondencias (Stake, 1995). Para lograr esto, dado que la prioridad en un estudio de casos es el propio caso, es crucial identificar patrones y determinar su importancia a través de la interpretación directa de la realidad. Se trata de preguntarnos qué significan esos patrones y cómo contribuyen a nuestra comprensión del caso en cuestión.

Otro objetivo, como se discutió en la Sección 3.3.1, es derivar generalizaciones o refutar otras que se consideran ciertas. Un tipo particular de estas generalizaciones son las naturales, que son aquellas conclusiones que se consiguen a partir de la experiencia personal u observando a otras personas, es decir a partir del aprendizaje vicario (Stake, 1995, p.85). Estas generalizaciones naturales son significativas porque surgen de la experiencia directa del lector, incluso si no se han expresado verbalmente.

En el contexto del estudio de casos propuesto, los datos recopilados serán sometidos a un análisis cualitativo detallado. Se verificará, respaldados por el *Mapa de Humor*, si las emociones adversas para el aprendizaje de las matemáticas experimentan un declive progresivo. Por otro lado, el comportamiento observado por parte de Irene será crucial para el desarrollo de las sesiones, particularmente al abordar los contenidos pertinentes a su curso, donde deberá demostrar fluidez y ausencia de signos de ansiedad matemática. Por último, la información obtenida en el cuestionario de contextos se empleará para identificar los orígenes de su ansiedad matemática y validar la eficacia del modelo CPA.

4. Marco de intervención.

Una vez definido todo lo que se necesita saber en lo concerniente al marco metodológico, se va a desarrollar el estudio de casos que realizamos desde la semana del 27 de noviembre hasta el 28 de febrero, con un total de 22 sesiones, donde se tratarán diferentes aspectos de las matemáticas, teniendo simultáneamente en cuenta las preguntas de investigación específicamente asociadas al caso y que serán formuladas más adelante. La decisión de realizar este número de sesiones vino determinada en gran parte por Sammallahti et al. (2023), quien afirma que las intervenciones que son largas tienen mejores efectos que aquellas que duran menos tiempo.

Para lograr este objetivo, es muy importante formular de manera específica aquello que se quiere investigar, es decir, se debe delimitar el problema de investigación.

En particular, en nuestro caso, el problema de investigación va a consistir en explorar las distintas causas que provocan la ansiedad matemática, proporcionando estrategias para combatir este tipo de ansiedad según las diferentes causas, adaptándose a un caso en particular.

Para ello, se va a describir lo que se conocía de nuestro caso al empezar la intervención, para poner en contexto al lector.

4.1. Descripción del caso.

El estudio de casos consta únicamente de una persona, Irene (nombre ficticio para mantener el anonimato), de 13 años, matriculada en el curso correspondiente a su edad actual (2º de Educación Secundaria Obligatoria). Irene presenta dislexia y discalculia, lo que caracteriza de forma especial el caso. La elección del colegio y del instituto donde estudia se debe a la atención especializada que ofrecen a alumnado con estos trastornos del aprendizaje, especialmente enfocada en la dislexia debido a su significativa prevalencia entre los estudiantes.

En cuanto a su entorno socioeconómico y afectivo, Irene se encuentra en un contexto favorable. Sus padres están muy involucrados en su educación y trabajan en colaboración con el profesorado para adaptar el entorno educativo y compensar estas dificultades. Irene tiene interés en estudiar el Grado en Educación Primaria, por lo que sus padres la animan a asistir a charlas sobre discalculia y dislexia para que pueda comprenderse mejor a sí misma y adquirir conocimientos que le serán útiles en el futuro.

La madre de Irene señaló, durante el primer contacto con la familia, que notó indicios de discalculia cuando Irene estaba en la etapa infantil y tenía dificultades para sumar sin apoyarse en materiales físicos como garbanzos o pinturas. Aunque la profesora en ese momento no identificó la discalculia, la madre notó la dificultad y compartió sus preocupaciones con los profesores. Más tarde, cuando Irene tuvo que aprender las tablas de multiplicar en Primaria, también enfrentó dificultades significativas. Después de varias conversaciones con los profesores, se permitió a Irene llevar una hoja con las tablas de multiplicar para ayudarla en su aprendizaje.

Con lo comentado anteriormente y basándonos en lo desarrollado en la Sección 2.1.3.1, se puede concluir que Irene pertenece al grupo de discalculia primaria, según la clasificación de Price y Ansari, y es posible que esté en el grupo IV de la clasificación realizada por Tony Attwood.

En cuanto a la dislexia, Irene se quejaba de que. en ocasiones, durante los exámenes, los profesores no tenían en cuenta su condición y colocaban los enunciados demasiado juntos. Esto provocaba que Irene tardara más en leer el enunciado y le afectaba negativamente en la calificación obtenida.

Por último, será relevante señalar que a Irene le gusta participar en otras actividades, destacando el baile, e incluso ha competido a nivel nacional en esta disciplina.

4.2. Tipo de estudio de caso y preguntas de investigación.

Una vez descrito el caso que se va a tratar, lo siguiente que hay que realizar es tomar la decisión acerca de qué tipo de estudio de casos va a ser y las preguntas de investigación que se quieren abordar. En concreto, nuestro estudio de casos será un estudio de caso intrínseco, ya que el caso que se va a estudiar ya tiene interés propio de por sí, dado que no es común encontrarse con un perfil que presente discalculia, dislexia y ansiedad matemática simultáneamente. Además, este tipo de estudio de caso es el mejor en nuestra situación al centrarnos en un único individuo.

Respecto a las preguntas de investigación, es importante definir aquello para lo que se quiere encontrar una respuesta, para acabar de concretar el problema de investigación previamente mencionado y saber dónde poner más esfuerzo. En este estudio, se busca responder a las cuatro preguntas siguientes:

- ¿En qué momento Irene empezó a sentir ansiedad matemática?
- ¿En qué situaciones Irene presenta una mayor ansiedad matemática?
- ¿Qué es lo que causa la ansiedad matemática en Irene?
- ¿La aplicación del modelo CPA ayuda a Irene en la comprensión conceptual en matemáticas y en la reducción de su ansiedad matemática?

4.3. Obtención de los datos.

Para obtener los datos a lo largo de las sesiones, el recurso principal será la observación, complementada con preguntas específicas que permitan desvelar la historia afectiva de Irene respecto a las matemáticas y responder a las cuatro preguntas planeadas anteriormente. Además, se utilizará un *Mapa de Humor*, elaborado en la primera sesión, junto con los resultados relacionados con la educación en matemáticas del cuestionario de contextos de PISA 2022.

4.4. Desarrollo del estudio de casos.

Tras haber descrito el caso, las distintas preguntas que se buscan responder y cómo se van a obtener los distintos datos para contestar a las cuestiones, en esta sección, se detallará todo lo concerniente a las distintas sesiones, de una hora cada una, que se han realizado con Irene, detallando las razones para hacer las sesiones y los resultados obtenidos en cada una de ellas.

Una tónica que se suele repetir en las sesiones es basarse en lo que estuviese trabajando en el aula Irene en ese momento en el marco del sentido numérico, para así comprobar si usando el modelo CPA ella consideraba si tenía menor ansiedad al hacer las distintas tareas matemáticas. Sin embargo, en un punto determinado, por razones que se explicarán más adelante, se decidió cambiar del sentido numérico al algebraico, que no lo estaba trabajando en ese momento y para el cual aún quedaba mucho tiempo en la planificación escolar.

El objetivo de las sesiones es también preparar actividades variadas para ayudar a Irene a ver las matemáticas de manera diferente y permitir realizar preguntas, de manera que ella conteste con mayor naturalidad, sin la presión de ser interrogada.

Respecto a la ubicación de las sesiones, inicialmente se consideró realizarlas todas en el domicilio familiar. Sin embargo, tras hablar con los padres e Irene sobre la disponibilidad de horarios, se acordó que las sesiones del lunes se llevarían a cabo en un seminario de la Facultad de Educación y Trabajo Social de la Uva, mientras que las del viernes se realizarían en su casa. Hubo algunas modificaciones en este horario, las cuales se indicarán en la sesión correspondiente.

I. Primera Sesión (27 de noviembre de 2023)

Esta primera sesión sirvió como toma de contacto con Irene planteando como objetivos la creación de un *Mapa de Humor* junto con la realización de ejercicios asociados a contenidos que estuviese trabajando en esos momentos en el ámbito escolar, tratando con ello que se familiarizase con la mecánica de uso del Mapa, mecánica que se mantendría a lo largo de todas las sesiones.

Como se avanzó en el anterior párrafo, la sesión comenzó con una explicación sobre una de las principales mecánicas a aplicar durante el desarrollo del propio estudio de casos, mecánica consistente en dibujar, utilizando un *Mapa de Humor* adaptado a sus preferencias a partir de otro mapa tomado de la literatura existente (Gómez-Chacón,2000) las emociones que experimentase, eligiendo el emoticono que mejor reflejase dicha emoción. Durante este proceso, se le preguntó en qué situaciones podría experimentar estas emociones, lo que le permitió ejemplificar y verbalizar sus emociones, a pesar de la posible complejidad que esto podría representar para su edad.

Es importante destacar que Irene ha diferenciado entre estrés y ansiedad durante el estudio. Según sus propias palabras, ella experimenta estrés cuando siente cierto agobio, pero esta emoción no le impide continuar con la actividad que está realizando en ese momento. Por otro lado, Irene describe la ansiedad como una emoción que la incapacita para continuar con la actividad en curso. Esta distinción entre estrés y ansiedad proporciona información valiosa sobre cómo estas emociones afectan su capacidad para funcionar en situaciones específicas.

Después de completar el *Mapa de Humor*, cuyo resultado se muestra en el Anexo 6.1, se exploró el tema que Irene estaba trabajando en el entorno escolar en ese momento, descubriendo que recién había comenzado con las potencias y ya había concluido el tema de las fracciones. Para reforzar su comprensión sobre fracciones, se realizaron actividades que implicaban operaciones simples con ellas, con el propósito de que Irene también aplicara el *Mapa de Humor* recién elaborado.

Inicialmente, Irene cometió algunos errores de cálculo, como no calcular correctamente el mínimo común múltiplo de los denominadores o equivocarse en operaciones básicas, los cuales son típicos de la discalculia. Ante esta problemática, se introdujo el recurso conocido como *muro de fracciones* ilustrado en la Ilustración 10, explicando su funcionamiento. Luego, se realizaron algunas operaciones sencillas utilizando este recurso manipulativo para que Irene se familiarizara con su uso, ya que sería importante en sesiones futuras.

Al finalizar la sesión, al preguntarle a Irene cómo se estaba sintiendo, ella expresó que al principio se sentía estresada al realizar las operaciones con fracciones, como indicó con el emoticono correspondiente. Sin embargo, al empezar a utilizar el *muro de fracciones*, su emoción cambió de sentirse estresada a experimentar una mayor tranquilidad y curiosidad solo por emplear dicho recurso manipulativo.

Este cambio en su estado emocional sugiere que el uso del *muro de fracciones* contribuyó a reducir el estrés que Irene inicialmente experimentaba al enfrentarse a las operaciones de manera tradicional. Por lo tanto, en la siguiente sesión, se continuará trabajando con fracciones utilizando este recurso manipulativo para confirmar que su efectividad persiste y para seguir fortaleciendo la confianza y el interés de Irene en este tema.

II. Segunda Sesión (1 de diciembre de 2023)

Reflexionando sobre el perfil de Irene y considerando uno de los rasgos característicos de la dislexia, el asociado a los problemas relacionados con la memoria a corto plazo, tal como se mencionó en la Sección 2.1.4.1, se planteó la posibilidad de realizar una actividad interesante para explorar este aspecto y continuar trabajando con el *muro de fracciones*, actividad denominada *memory de fracciones*, que se encuentra en el Anexo 6.2. Para llevar a cabo esta actividad, se procedió a plastificar las hojas mostradas en dicho anexo y recortarlas para crear tarjetas, donde en cada tarjeta se mostraba una fracción, una suma o una resta de dos fracciones. Con el apoyo de este recurso manipulativo, Irene debía determinar si las expresiones de las dos tarjetas elegidas eran equivalentes o no.

Esta sesión se diseñó para completar el *memory* en su totalidad, identificando las diversas emociones que experimentaba Irene durante la actividad y, en los últimos minutos de la sesión, se comenzó a cumplimentar el cuestionario de contextos de PISA.

Al traducir este cuestionario, teniendo en cuenta la dislexia de Irene, se optó por utilizar la fuente tipográfica Arial, un tamaño de letra de 14 puntos y un interlineado de 1.5. Se planificó completar el cuestionario gradualmente en los últimos minutos de cada sesión para evitar que se aburriera al tener que realizarlo todo de una vez, comenzando en esta sesión y concluyendo en la séptima. El análisis de las respuestas proporcionadas en este cuestionario se llevará a cabo en la Sección 4.5.2.

Dada la naturaleza del *memory,* que requiere al menos dos jugadores, participé en el juego con Irene, quien confirmaría si las expresiones de las dos cartas eran equivalentes o no. Esta actividad se dividió en tres etapas, según el comportamiento observado en Irene.

Inicialmente, al tener que decidir si una suma de dos fracciones y una fracción eran equivalentes o no, Irene no calculaba la suma de estas dos fracciones para luego compararla con la fracción. En cambio, verificaba si el resultado coincidía sin conocer el valor exacto de la suma. También mostró cierto nerviosismo al darse cuenta de que el número de fichas en el *memory* no disminuía cuando no encontraba cartas equivalentes, aunque se trató de minimizar esta preocupación explicando que una vez que comenzaran a quitarse, lo harían más rápidamente. Es importante destacar que cuando las dos fracciones a comparar diferían significativamente entre sí, Irene no utilizaba el recurso manipulativo y afirmaba con seguridad que no eran iguales.

Al observar que Irene no realizaba las operaciones de suma o resta de fracciones de manera explícita, se le solicitó que usara el *muro de fracciones* para calcular estas operaciones. Se observó un método interesante que Irene utilizaba al restar: situaba las dos fracciones con sus fichas una sobre la otra y, en ocasiones, añadía fichas a la fracción más pequeña para que coincidiera con la más grande, o quitaba fichas de la fracción más grande para igualarla a la más pequeña. Se reflexionó sobre este método y se relacionó con la resta de números enteros, donde se puede restar restando al minuendo o sumando al sustraendo.

Una vez que Irene demostró fluidez al sumar y restar fracciones utilizando el *muro de fracciones*, se le planteó comprender por qué se calculaba el mínimo común múltiplo, solicitándole que intentara representar las dos fracciones con fichas del mismo color en el muro. Surgió la dificultad de no encontrar fichas del mismo color, lo que condujo a explicar el concepto de buscar un múltiplo común a ambas fracciones, apoyándose en una representación gráfica. Tras comprender este concepto, y con ayuda de las tablas de multiplicar, Irene comenzó a prescindir gradualmente del material manipulativo para determinar si dos fracciones eran equivalentes o no, aunque ocasionalmente cometía pequeños errores de cálculo, en menor medida, eso sí, que en la primera sesión.

Al finalizar el trabajo con el *memory*, se discutieron las emociones experimentadas por Irene a lo largo de la actividad, señalando que al principio estaba preocupada por el tiempo al no reducirse el número de fichas, pero que luego se sintió cada vez más tranquila. Surgió por primera vez el problema que Irene tenía con el tiempo, un aspecto que se explorará en la próxima sesión y que desempeñará un papel central en el estudio de casos.

III. Tercera Sesión (4 de diciembre de 2023)

Esta sesión se enfocó en las operaciones con potencias, dado que Irene ya había señalado previamente que tenía dificultades para comprenderlas. Con el propósito de evaluar su desempeño bajo presión temporal, se diseñaron actividades relacionadas con este concepto, estableciendo un límite de tiempo para su ejecución.

Para este fin, se emplearon *regletas* como recurso manipulativo, asignándoles a cada color un número (en nuestro caso, las *regletas* rojas representaban el número 2, las verdes el 3, las azules el 5 y las amarillas el 6). Se comenzó explicando que la unión de dos *regletas* equivalía a una multiplicación, y que, por lo tanto, el exponente de un número correspondía al número de *regletas* asociadas a ese dígito colocadas juntas. Además, se enseñó sobre la división de potencias, mostrando que consistía en colocar el numerador sobre el denominador y eliminar las *regletas* repetidas tanto arriba como abajo, obteniendo el resultado final.

Una vez comprendido cómo utilizar el material manipulativo, se procedió a realizar ejercicios relacionados con las potencias, inicialmente estableciendo un tiempo límite amplio para determinar si la simple presencia de una restricción temporal generaba ansiedad en Irene. Durante esos ejercicios, Irene los llevó a cabo sin sentirse nerviosa, excepto en situaciones donde había una gran cantidad de números, lo que provocaba cierto agobio, un aspecto que podría estar relacionado con la discalculia.

Observando esta tranquilidad inicial, se redujo el tiempo para completar las tareas en un intervalo en el que Irene no viese de forma obvia que dispondría de margen suficiente para resolverlas, momento en el cual se empezaron a manifestar claramente síntomas de ansiedad. Irene suspiraba al escuchar el tiempo asignado, se agobiaba al cometer errores en los cálculos, entrando en una espiral de ansiedad. Optaba por no utilizar el material manipulativo porque sentía que no le daba tiempo para terminar el ejercicio, lo que resultaba en más errores en comparación con la sesión anterior y cuando disponía de más tiempo. Esto evidenció que, claramente, el tiempo representaba un problema para ella, por lo que se decidió trabajar en aliviar esta presión en el futuro.

En esta sesión, y más adelante con el análisis del mapa del humor elaborado por Irene, se pudieron observar dos posibles causas de su ansiedad matemática: la presencia de muchos números, por un lado, que puede que se derive de la discalculia, y la presión del tiempo (se volverá sobre ello en algunas sesiones posteriores), por otra parte.

En las siguientes sesiones, se continuarán buscando respuestas a las preguntas de investigación y se explorarán más posibles causas de esta ansiedad, con el objetivo de identificar el origen de manera clara y poder diseñar sesiones que contribuyan eficazmente a abordar esta problemática directamente.

IV. Cuarta Sesión (13 de diciembre de 2023)

Esta sesión se centró en los contenidos relacionados con la notación científica, ya que Irene mencionó que le estaba costando comprender este tema. Simultáneamente, se exploraron las distintas respuestas a preguntas destinadas a determinar si el comportamiento de la profesora le provocaba cierta ansiedad matemática, buscando profundizar en las posibles causas de esta ansiedad.

Para esta sesión, se preparó un *puzle sobre notación científica*, donde las fichas son triángulos, y al menos dos de los tres lados contienen números expresados en notación científica o decimal. El *puzle* se puede ver en el Anexo 6.3. Después de completar el *puzle*, se planteó a Irene que buscara una aplicación práctica para este concepto y que resolviera algunos ejercicios relacionados con la notación científica. Dado que Irene tiene dislexia, el texto se redactó utilizando la fuente Arial, tamaño 14 e interlineado de 1.5, como se muestra en el Anexo 6.4.

Cuando se le preguntó sobre qué aspectos le gustaban de los profesores de matemáticas, Irene mencionó que le gusta cuando los profesores detallan todos los pasos para que le resulte más claro, pero que la profesora actual hace todo lo contrario, dejándola con dudas, aunque un compañero de clase que se sienta a su lado la ayuda. También destacó la importancia de conocer la utilidad práctica de los conceptos matemáticos en la vida real, por lo que se acordó que ella intentaría proporcionar aplicaciones prácticas para todos los conceptos matemáticos que se enseñasen, pidiendo ayuda en caso de no dar con ninguna. Por último, mencionó que le gusta aprender trucos para memorizar fórmulas, influida por su dislexia, como se comentó en la Sección 2.1.4.1, como el método para dividir fracciones, que se puede ver en la Ilustración 21, que le enseñó su profesora de sexto de Primaria.

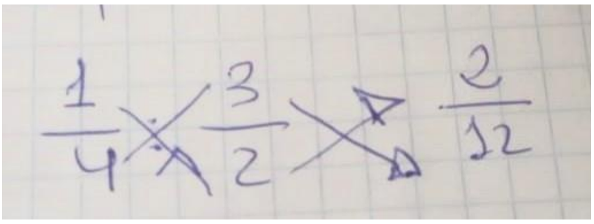


Ilustración 21. Método para dividir que usa Irene. Elaboración propia.

Por lo tanto, a la presión del tiempo y a aspectos relativos a la discalculia, se suma un problema de naturaleza social: los métodos de enseñanza de la profesora no resultaban óptimos para Irene o, al menos, así lo percibía Irene.

Durante la actividad del *puzle*, Irene debía decidir si convertía los números de notación científica a decimal o viceversa para, a continuación, realizar el cambio con cada número que eligiera cambiar, eligiendo la conversión de notación científica a decimal. Al principio, cada vez que convertía a notación decimal los números en un triángulo, solicitaba que se corrigiera su propuesta, mostrando inseguridad sobre si lo había hecho correctamente. Una vez que se comprobó que tenía dos o tres correctos, se comenzó a corregir cada dos triángulos, y después de dos correcciones exitosas, se pasó a corregir tres a la vez y, finalmente, la última ronda de seis triángulos se hizo sin interrupciones. Durante este proceso, se optó por que Irene explicara cómo convertía los números a notación decimal, sin decirle si la conversión a decimal estaba bien o mal. De esta manera, Irene se dio cuenta de sus errores al intentar explicarlo, lo que le proporcionó una comprensión más profunda que si simplemente se le hubiera dicho que estaba mal. En caso de que no se diera cuenta de los errores, se le proporcionaba alguna indicación para que supiera que se había equivocado.

Una vez completado el *puzle*, que se puede ver en la Ilustración 22, se dialogó sobre cómo se sintió Irene. Al principio estaba nerviosa sobre si lo había hecho bien o no, por lo que solicitaba que se corrigiera cada triángulo que completaba. Sin embargo, cuando se dio cuenta de que lo estaba haciendo bien, se sintió muy bien ("genial" en sus palabras) al hacer los ejercicios. Al discutir sobre la utilidad de la notación científica, Irene no pudo pensar en ninguna aplicación práctica, por lo que se le proporcionaron ejemplos como el número de Avogadro, 6.022x 10^{23}, masas de planetas o números muy pequeños, como el tamaño de un electrón o de un átomo.

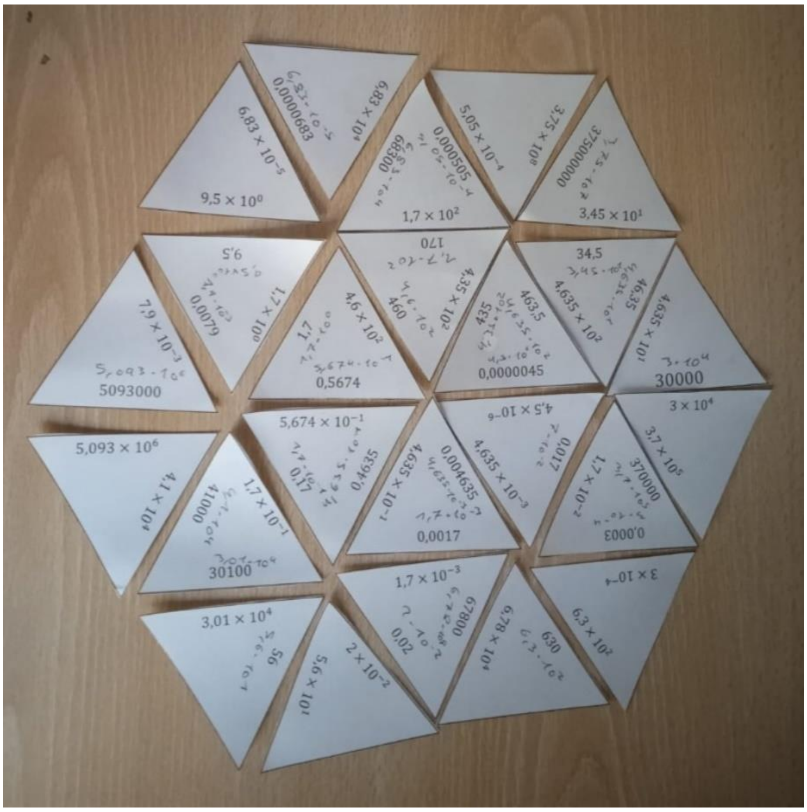


Ilustración 22. Puzle de la notación científica resuelto. Elaboración propia.

En cuanto a los problemas, solo tuvo tiempo de hacer el primero de los tres que había planeado. Por lo tanto, se le sugirió que, para la siguiente sesión, tuviera resueltos los dos ejercicios restantes de esa hoja, comenzando la sesión corrigiendo estos dos problemas.

Al observar cómo Irene abordaba el problema, se notó que usaba diferentes colores para resaltar los datos y las preguntas. Al principio, Irene intentó calcular directamente el número de granos de arroz en la décima posición, pero le resultó difícil encontrar el patrón. Se mostraba ansiosa, así que se le sugirió que intentara calcular primero el número de granos de arroz para las primeras posiciones. Llegó hasta la sexta posición y se dio cuenta de que en la décima posición tendría 2^9 granos de arroz, y luego concluyó que en la posición 64 tendría 2^{63} granos de arroz. Se sorprendió al calcular el último número con la calculadora y ver el gran número resultante, lo que sirvió para ilustrar una aplicación práctica de la notación científica.

Reflexionando sobre cómo abordar el posible problema relacionado con los métodos de enseñanza de la profesora, la única opción disponible era proporcionarle a Irene diferentes estrategias basadas en el modelo CPA para ayudarla a comprender los conceptos matemáticos (más adelante se discutirá un cambio que ocurrió en esta situación, el cual benefició considerablemente a Irene).

Dado que el tema que estaban trabajando en el entorno escolar en ese momento era la raíz cuadrada, en la siguiente sesión, se presentará este concepto utilizando el modelo CPA, lo que permitirá una comprensión más profunda del mismo.

V. Quinta Sesión (15 de diciembre de 2023)

Esta sesión se planificó con el propósito de abordar por primera vez un concepto matemático a través de los tres niveles del modelo CPA, como se expuso en la Sección 2.1.5.1 y alcanzar el nivel aplicativo propio del modelo de Sharma, centrándose en el concepto de la raíz cuadrada de un número. Sin embargo, como se había acordado previamente, se comenzó revisando los dos ejercicios pendientes de la sesión anterior sobre notación científica. Además, se estableció como objetivo de esta sesión identificar el momento en el que Irene consideraba que comenzó a experimentar ansiedad matemática, para responder así a la primera pregunta de investigación.

La sesión se inició revisando los dos ejercicios propuestos previamente (Ejercicios 2 y 3 del Anexo 6.4). En el Ejercicio 2, tras calcular explícitamente el resultado de 3^8 y 3^4, en metros cuadrados ambos, Irene intentó convertirlos a metros, lo que generó una oportunidad para discutir el concepto de metro cuadrado y metro, usando la tapa de la caja de las *regletas* para clarificar la diferencia. Respecto al Ejercicio 3, despertó su curiosidad al ser otro ejemplo práctico de notación científica, que luego incorporó en su *Mapa de Humor*.

Posteriormente, se procedió a explicar el concepto de raíz cuadrada a través del modelo CPA. En el nivel manipulativo, se utilizaron las *regletas* para crear cuadrados y comprender que el área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado, introduciendo así la noción de raíz cuadrada. Luego, se exploraron ejemplos de cuadrados perfectos para que Irene relacionara el lado del cuadrado con la raíz cuadrada del área y de aproximaciones enteras de raíces cuadradas, dado que así era cómo estaban trabajando en el aula.

En el nivel pictórico, se representó de manera gráfica el proceso para obtener la raíz cuadrada, de tal manera que ayudó a Irene a comprender el algoritmo tradicional. Aunque Irene mostró curiosidad por los métodos alternativos presentados, se sintió más cómoda al trabajar con el método convencional, dada su familiaridad con él, por lo que se optó por no desarrollar el nivel algebraico, al controlar el algoritmo. No obstante, es importante destacar que los dos niveles previos contribuyeron significativamente a su comprensión del concepto de la raíz cuadrada, tal como se evidenciará en el análisis del cuestionario de contextos de PISA 2022 en la Sección 4.5.2.

Sin embargo, cabe destacar que, a partir de la representación utilizada en el nivel pictórico, mostrada en la Ilustración 23, Irene pudo deducir la fórmula del cuadrado de la suma, mostrando así un progreso significativo en su comprensión matemática.

La sesión finalizó al buscar una aplicación práctica de la raíz cuadrada para fomentar así el desarrollo del nivel aplicativo. Después de considerar algunas sugerencias, se propuso el siguiente ejemplo: ¿Cuántos metros cuadrado de rodapié se necesitan para una habitación cuadrada de 16 metros cuadrados?

Después de describir detalladamente el desarrollo de la sesión, se procederá a discutir las respuestas proporcionadas a las preguntas sobre el origen de la ansiedad matemática de Irene y sus sensaciones durante la sesión. En cuanto al primer aspecto, se inició abordando el tema del cambio de actitud hacia las matemáticas que suele observarse al pasar de Primaria a Educación Secundaria, como se señaló en la Sección 2.1.2.6. Al preguntarle a Irene sobre cuándo percibió este cambio, ella mencionó que lo notó durante la transición de Primaria a Educación Secundaria. Explicó que en Primaria, las matemáticas se presentaban de manera más clara y se explicaban todos los detalles, mientras que en la Educación Secundaria el ritmo era más rápido, lo que indirectamente evidenciaba el problema de la ansiedad por el tiempo. Esta percepción de que algunas cosas quedaban sin entender agravaba aún más su ansiedad en relación con las matemáticas.

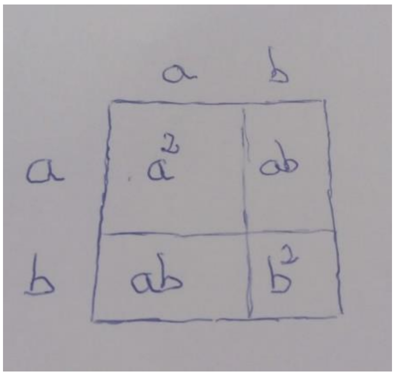


Ilustración 23. Representación del cuadrado de lado a+b. Elaboración propia.

Durante esta sesión, Irene demostró un gran interés por los dos métodos alternativos presentados para explicar la raíz cuadrada. Se quejó, especialmente durante el nivel pictórico, de por qué estos enfoques no se habían enseñado en Primaria. A pesar de su curiosidad, Irene optó por aplicar el método convencional, ya que era el que le brindaba mayor seguridad. Otro momento destacado fue cuando se le condujo a deducir la fórmula del cuadrado de la suma, lo que le sorprendió. Comentó que si se le enseñara de la misma manera que se hizo en esta sesión, sería mucho más sencillo para ella, ya que podía visualizarlo. Este enfoque visual es común en el alumnado con discalculia, quienes necesitan apoyo visual para comprender mejor los conceptos,

Al finalizar la sesión, se le solicitó a Irene su opinión sobre las sesiones. Ella expresó que todas le parecían muy interesantes y expresó el deseo de que las clases fueran así. Este comentario es significativo, ya que proviene de Irene, quien experimenta ansiedad matemática, lo que indica que se está logrando despertar su interés por las matemáticas.

Las conclusiones que se pueden extraer de esta sesión son diversas. Primero, se puede observar una clara inclinación de Irene hacia el uso de algoritmos, lo cual no es sorprendente dada su discalculia. Además, se evidencia que, al igual que en sesiones anteriores, Irene no conoce aplicaciones prácticas de los conceptos que se están enseñando, lo que puede hacer que perciba las matemáticas como algo abstracto y alejado de su aplicación en la vida cotidiana. Por otro lado, se identifica el momento en el que Irene comenzó a experimentar ansiedad matemática, durante la transición de Primaria a Educación Secundaria, un cambio marcado por la presión temporal.

Además, al finalizar la sesión, Irene expresó confianza en sus habilidades relacionadas con las reglas de proporcionalidad, el siguiente tema que trabajaría en el entorno escolar. Este comentario proporcionó una oportunidad para evaluar su desempeño en áreas que no se limitan únicamente a la manipulación numérica, lo cual es relevante dado el impacto significativo que la discalculia tiene en su capacidad para trabajar con números.

Teniendo en cuenta el contenido del libro de Irene, y considerando que el siguiente tema después de las reglas de proporcionalidad es relativo a geometría, y que en este sentido no se anticipaban grandes dificultades salvo la ansiedad matemática, se acordó abordar el sentido algebraico, especialmente en relación con los polinomios.

VI. Sexta Sesión (18 de diciembre de 2023)

La sesión tenía como objetivo, comenzando con el nivel manipulativo del modelo CPA, presentar los principales conceptos asociados con el tema de polinomios, como la idea de monomio, polinomio, grado de un polinomio, coeficiente líder o término independiente, y comenzar con la suma, resta, y, si hubiera tiempo, el producto de polinomios. Por otro lado, para continuar explorando las posibles causas de la ansiedad matemática, la sesión se centró en determinar si esta ansiedad podría deberse a factores sociales, como la vergüenza de salir a la pizarra, un fenómeno común en una parte del alumnado.

El material manipulativo utilizado, que se puede observar en la Ilustración 24, consistió en una especie de *ábaco* elaborado a partir de una caja de zapatos. Este *ábaco* estaba compuesto por cinco palillos, donde cada uno representaba, de izquierda a derecha, los monomios 1, x, x^2, x^3 y x^4, respectivamente. También se contaba con fichas rectangulares verdes y rojas, donde el color verde indicaba valores positivos y el rojo valores negativos. De este modo, para representar, por ejemplo, el polinomio $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$, se agregan tres fichas verdes en el palillo de x^2 y una en el de 1. Luego, se añadirían dos fichas rojas en el palillo de x^3 y una ficha roja en el de x , obteniéndose el polinomio representado en la Ilustración 24.

La sesión comenzó explicando el uso del nuevo material manipulativo, el *ábaco* y su mecánica, enfatizando que la combinación de una ficha roja y una verde en el mismo palillo resulta en la anulación mutua. Tras asegurarse de que Irene comprendiera la dinámica mediante ejemplos prácticos donde se ponían unas fichas en el *ábaco* e Irene tenía que indicar el polinomio representado y viceversa, se procedió a abordar los conceptos de monomio y polinomio, utilizando al *ábaco* como referencia. Se estableció que un monomio es aquel que contiene fichas únicamente en un palillo, mientras que un polinomio implica la presencia de fichas en varios palillos. Para reforzar esta distinción, se plantearon diversos casos (como $4x$, $5x^2$, $-3x^3$, 6, $2-x^2$ y x^4+3x), donde Irene debía identificar si se trataba de monomios o polinomios y escribir las expresiones a mano.

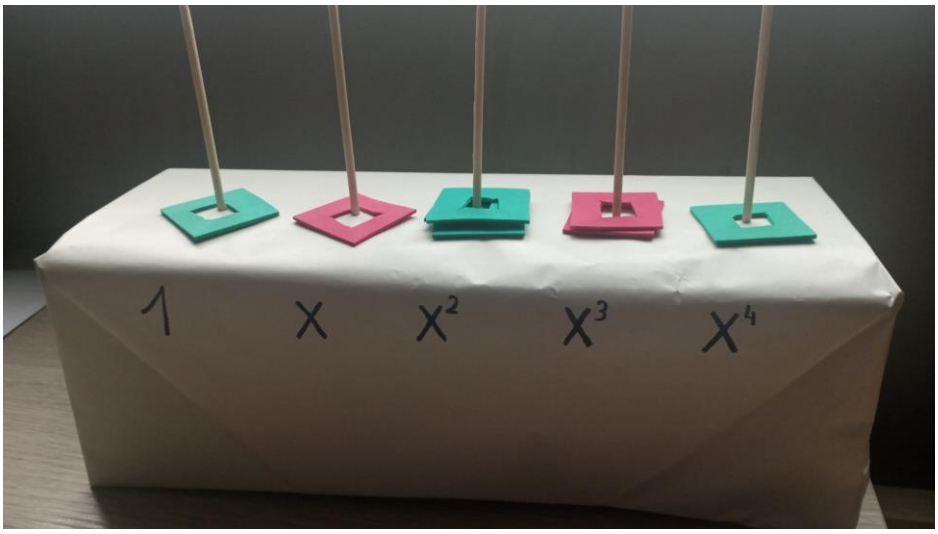


Ilustración 24. Representación de polinomios usando el ábaco. Elaboración propia.

Posteriormente, se definió el grado de un polinomio, el coeficiente líder y el término independiente. El grado se identificó como el exponente de la x correspondiente al palillo más a la derecha con fichas, el coeficiente líder como el número de fichas en dicho palillo y el término independiente como el número de fichas en el palillo del 1. Mediante ejemplos similares a los anteriores, se solicitó a Irene nombrar las tres propiedades de los polinomios mencionadas anteriormente.

Durante esta dase, se observó que Irene presentaba algunos errores conceptuales, como referirse al grado como "x^4" en lugar de simplemente "4". Asimismo, al preguntar si existía un grado máximo en los polinomios, indicó que era 4, basándose en el palillo más a la derecha con fichas. Para reforzar la idea de que no hay grado máximo, se planearon ajustes para la siguiente sesión con el propósito de abordar este concepto de manera más efectiva.

Una vez que Irene demostró comprender correctamente varios aspectos relacionados con los conceptos previamente abordados, se procedió a enseñar la suma de polinomios, utilizando el *ábaco* como herramienta. La regla establecida fue colocar las fichas del segundo polinomio sobre las del primero, anulando cualquier ficha roja y verde que estén superpuestas hasta que solo haya de un color, como se muestra en la Ilustración 25, donde se suman x^3+x^2-2x+3 y $3x^2+x-2$. Se plantearon varios ejemplos para practicar la suma y consolidar la comprensión del procedimiento, tanto en el *ábaco* como por escrito, con el objetivo de deducir el algoritmo subyacente.

Aunque Irene captó la idea principal sin dificultades, se observó que, posiblemente debido al orden elegido para representar los monomios, tendía a escribir, por ejemplo, $1+x+x^2$ en lugar de x^2+x+1, que es la convención habitual en el entorno escolar. Aunque esto no constituye un error en sí mismo, se consideró realizar un pequeño ajuste en la siguiente sesión para evitar posibles confusiones.

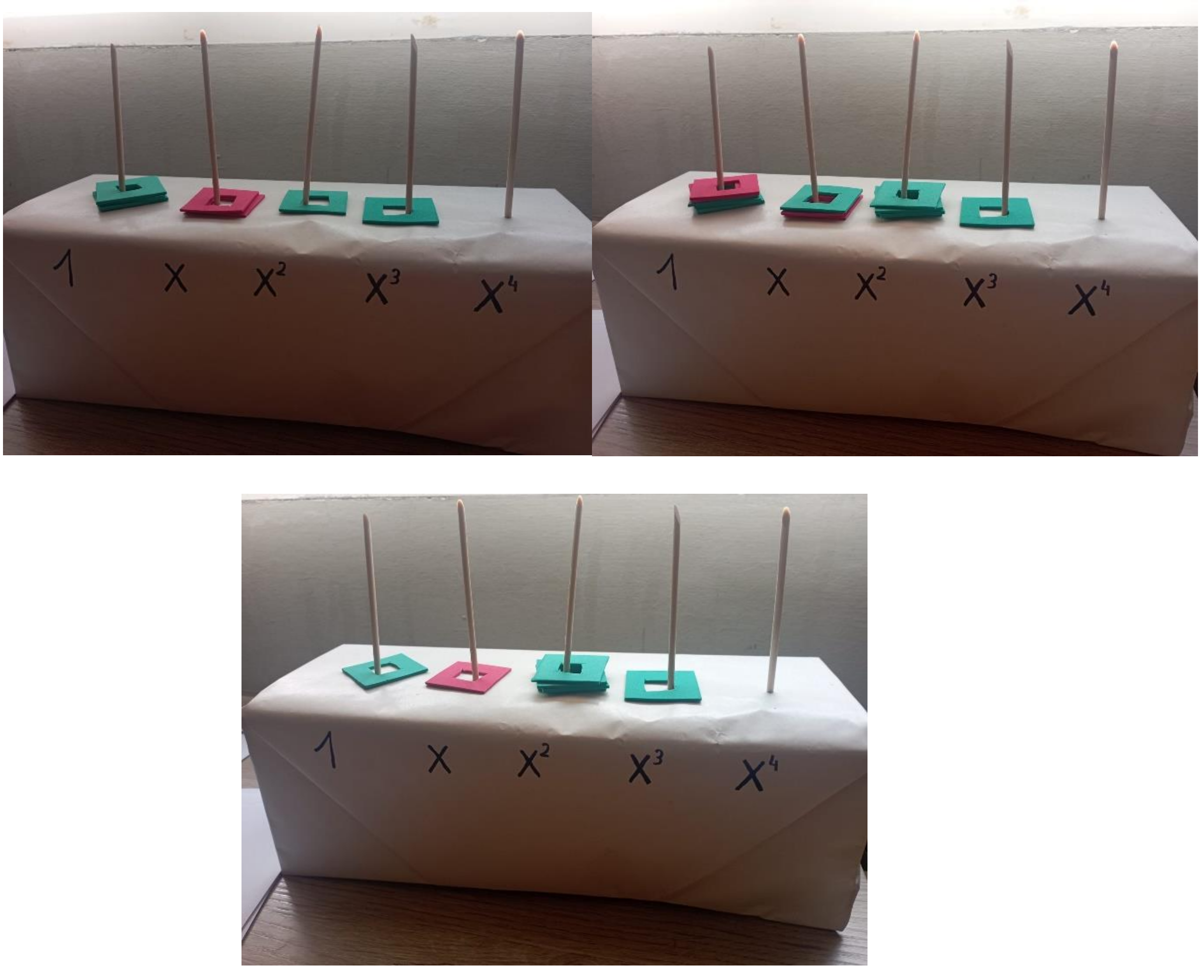


Ilustración 25. Representación de la suma en el ábaco. *Elaboración propia.*

Es interesante notar que Irene mostraba una tendencia a omitir el paso de colocar los dos polinomios juntos antes de realizar la suma de los coeficientes de los monomios directamente, lo cual indica una inclinación hacia el algoritmo. Además, solía realizar primero la suma de manera convencional y luego utilizar el material manipulativo, a veces cometiendo errores en los cálculos, lo cual puede atribuirse en gran medida a la discalculia.

Otro aspecto observado fue la dificultad de Irene para distinguir fácilmente el número de fichas en un palillo debido a que se solapaban. Para superar esta dificultad, se propuso dibujar el *ábaco* en papel y utilizar bolas rojas y verdes para representar las fichas, lo cual facilitó su comprensión visual.

Para abordar la resta de polinomios, se partió de un concepto familiar para Irene: restar un número equivale a sumar su opuesto. Se ilustró este principio con un ejemplo simple, como 7-3=7+ (-3), para luego extrapolarlo al ámbito de los polinomios; restar un polinomio es equivalente a sumar su opuesto. Con el objetivo de evitar normas como “menos por menos es más”, se plantearon preguntas sobre cómo obtener el opuesto de un polinomios.

Aunque Irene experimentó bloqueos al intentar responder, se le explicó que simplemente debía cambiar el color de todas las fichas para obtener el opuesto. Después de trabajar en ejemplos prácticos siguiendo el mismo patrón empleado en la suma de polinomios, se concluyó la sesión. Irene expresó su incertidumbre sobre la utilidad de los polinomios, momento en el que se presentó un ejemplo aplicado que influyó en su comprensión: modelizar fenómenos de la vida real, como calcular el dinero acumulado en un determinado tiempo a partir de una cantidad inicial y un flujo de ingresos. Esta aplicación concreta pareció tranquilizarla y clarificar su comprensión.

Por otro lado, al final Irene también confirmó que no veía bien las fichas que se estaban usando en ese momento, y que por eso no utilizaba el recurso manipulativo. Propuso que, si las fichas fueran más gruesas, se distinguirían mejor. No obstante, con el *ábaco* en papel, lograba una mejor visibilidad, por lo que se acordó que en la siguiente sesión se utilizaría el mismo *ábaco* en papel desde el principio.

Como se mencionaba al principio de esta sesión, se quería determinar si su ansiedad matemática podría deberse, en cierta medida, a la ansiedad social. Esto era poco probable dado que estaba acostumbrada a participar en galas de baile. Sin embargo, se plantearon estas preguntas para descartar la posibilidad de que la ansiedad estuviera presente solo en el ámbito matemático. Se realizaron distintas preguntas, como, por ejemplo: "¿te avergüenza tener que resolver ejercicios frente a la pizarra?", a lo que ella respondía generalmente que no, sobre todo en situaciones en las que estaba segura de saber la respuesta o cuando le pedían resolver un ejercicio que ya había practicado en clase. Sin embargo, la situación cambiaba si tenía dudas sobre la respuesta o si la urgencia de completar el ejercicio la presionaba. Esto se debía más al factor tiempo y a la inseguridad al resolver problemas matemáticos que a la preocupación por cometer errores o ser objeto de burlas, ya que cuando se le preguntó al respecto, indicó que esto último no le afectaba significativamente.

Resumiendo, en esta sesión se introdujeron los conceptos relacionados con polinomios y las operaciones de suma y resta de polinomios, utilizando el *ábaco* como recurso didáctico. Sin embargo, surgieron varios errores conceptuales, como la percepción errónea del grado de un polinomio o la escritura poco convencional de los términos. Además, Irene tuvo dificultades para visualizar las fichas debido a su grosor. En la siguiente sesión, se abordarán estas cuestiones y se tomarán medidas para corregirlas.

Por otro lado, según lo que mencionó Irene, se puede descartar que su ansiedad se deba a factores como la vergüenza de resolver ejercicios frente a la pizarra, independientemente de si están bien o mal resueltos. Sin embargo, se reafirma su dificultad con la presión del tiempo, lo que adquiere mayor relevancia, y se identifican problemas de inseguridad y bajo autoconcepto en relación con las matemáticas.

VII. Séptima Sesión (20 de diciembre de 2023)

En esta sesión se continuó con las operaciones utilizando polinomios, aunque debido a la dificultad de visualizar el número de fichas en los palillos del *ábaco*, se optó por trabajar en papel. Se implementaron dos cambios importantes para mejorar la comprensión de Irene sobre el concepto del grado de un polinomio y la forma de escribir un polinomio. Para abordar el primero, se introdujeron monomios hasta x^5, mostrando así que los polinomios pueden tener un grado mayor que 4, ya que en la sesión anterior Irene creía erróneamente que solo podían ser de grado 4. En cuanto al segundo problema, se estableció la convención de escribir los monomios en orden descendente, siguiendo la notación estándar: x^5, x^4, x^3, x^2, x y 1.

Durante este proceso, también se buscó comprender el origen de la presión que Irene sentía cuando estaba bajo límite de tiempo. Para comenzar la sesión, se revisaron los fundamentos del *ábaco*, con el objetivo de que Irene comprendiera que era una representación visual del proceso anterior utilizando fichas, tal como se muestra en la Ilustración 26. Se estableció una convención en la representación, utilizando cuadrados para representar números positivos y círculos para los negativos.

Tras repasar las dos operaciones vistas en la otra sesión, se procedió a abordar la multiplicación de polinomios, comenzando por la multiplicación de un escalar por un polinomio. Para ello, se enseñó que bastaba con multiplicar cada término del polinomio por el escalar. Sin embargo, se observó una tendencia a aplicar de manera memorística la regla "menos por menos es más" al multiplicar polinomios por números negativos. Con el fin de evitar la memorización y promover una comprensión más profunda, se explicó que, al multiplicar un polinomio por un número negativo, primero se debía cambiar el signo o el color de las fichas, y luego multiplicar por el valor absoluto del número.

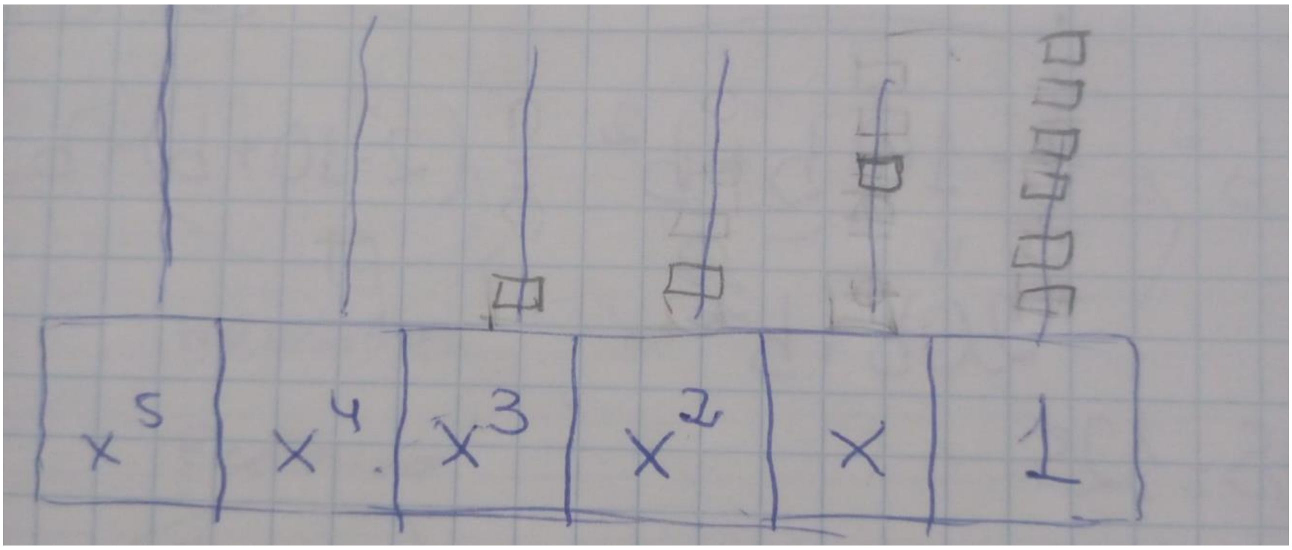


Ilustración 26. Representación de polinomios usando el nivel pictórico. Elaboración propia.

El siguiente paso fue la multiplicación por monomios, estableciendo la regla de que multiplicar por x implicaba mover todos los términos un palillo hacia la izquierda. Irene comprendió fácilmente que como $x^2 = x \cdot x$, entonces multiplicar por x^2 equivalía a mover todos los términos dos palillos hacia la izquierda.

Una vez comprendido esto, y después de realizar algunos ejemplos, se procedió a abordar la multiplicación de polinomios. Se le enseñó a multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo, sumando luego los productos obtenidos. En el *ábaco*, esto implicaba multiplicar el primer polinomio por el escalar de cada monomio del segundo y luego desplazar, si era necesario, colocando cada término encima del otro para luego simplificar las fichas hasta que quedara una sola de cada tipo.

En relación con esta sesión, Irene expresó sentirse más tranquila al poder visualizar las fichas con mayor claridad. Asimismo, señaló que este sentimiento podría atribuirse al hecho de que los polinomios ya no eran algo completamente nuevo, a diferencia de la sesión anterior. Este comportamiento se observaría nuevamente más adelante y podría asociarse al bajo autoconcepto que Irene tiene, lo que podría llevarla a sentir que no comprenderá o no podrá abordar un nuevo concepto o idea matemática. Sin embargo, al realizar correctamente las tareas propuestas relacionadas con esta nueva noción presentada, Irene va ganando confianza y reduciendo dicha ansiedad.

Por otro lado, se buscaba determinar el origen del problema de Irene con la presión del tiempo y si este se limitaba únicamente a las matemáticas o abarcaba otras áreas. Irene respondió que ha experimentado este problema desde siempre, afectándole en todas las asignaturas por igual.

También se discutió la importancia de proporcionarle a Irene diferentes estrategias para abordar un problema, incluso si su profesora espera que sigan únicamente la estrategia proporcionada por ella en clase. El objetivo de esto era brindarle más seguridad en caso de que olvidara algún paso. Irene respondió que "nadie se siente seguro al hablar de matemáticas", una afirmación que refleja claramente la falta de confianza que experimenta en esta área. Este comentario resalta la baja autoestima en matemáticas, un aspecto común entre aquellos que sufren de ansiedad matemática, como se evidenció en la Sección 2.1.2.3.

En estas sesiones, tanto en la presente como en la anterior, se ha destacado el problema del bajo autoconcepto que enfrenta Irene. Este se suma a los otros tres factores identificados previamente, constituyendo así los principales desencadenantes de la ansiedad matemática de Irene. Al lograr responder a la tercera pregunta sobre los motivos subyacentes de su ansiedad, ahora se tiene una base sólida para buscar soluciones efectivas.

Por otro lado, dado que Irene ha demostrado habilidades adecuadas para realizar operaciones con polinomios con una moderada tranquilidad, se puede avanzar y plantear actividades adicionales. Se propuso trabajar en la factorización de polinomios mónicos de grado dos en polinomios con coeficientes enteros, siempre que sea factible, como próxima tarea después de las vacaciones.

Al analizar la primera parte del *Mapa de Humor*, que abarca todas las emociones recopiladas hasta la fecha, se observa un cambio significativo. Inicialmente, predominaban la prisa debido al problema del tiempo y el estrés asociado con los números. Sin embargo, con el tiempo, las emociones predominantes han evolucionado hacia la tranquilidad y la satisfacción, llegando incluso a momentos de entusiasmo catalogados como "geniales". Este cambio indica una reducción progresiva de la ansiedad matemática, reflejada ahora en una sola emoción registrada como ansiedad.

A su vez, al completar el cuestionario de contextos en su totalidad, es notable destacar que el único concepto matemático marcado como comprendido por Irene fue precisamente el concepto de la raíz cuadrada. Esta noción fue explicada utilizando el modelo CPA, lo que sugiere que este enfoque resulta útil para que Irene adquiera los contenidos matemáticos.

VIII. Octava Sesión (8 de enero de 2024)

A la vuelta de las vacaciones de Navidad, se supo que la profesora de matemáticas de Irene estaba cerca de la jubilación. Como consecuencia, en su instituto se decidió reducirle las horas docentes, asignándole a Irene un profesor más joven. Este cambió generó cierta angustia en Irene, aunque en esta sesión comentó que le parecía un buen profesor. Además, mencionó que en la clase del día habían realizado juegos, aunque también señaló que su percepción podría deberse al hecho de que era el primer día con el nuevo docente.

Durante las siguientes sesiones, se le preguntó sobre su evolución en la opinión respecto a este nuevo profesor y a las clases con él, con el fin de verificar si el cambio de profesor había influido en la problemática relacionada con su anterior profesora. Afortunadamente, el cambio resultó beneficioso para Irene, ya que expresó que le gustaba más la forma de enseñar del nuevo profesor en comparación con la anterior profesora. Esta mejora implicó la desaparición del problema que existía con respecto a su profesora anterior, quedando solo los otros tres problemas mencionados en sesiones anteriores: la presión del tiempo, los problemas de inseguridad y el bajo autoconcepto en matemáticas y la presencia de muchos números, aspecto derivado de la discalculia.

Una vez discutido el cambio de profesor y sus implicaciones para el estudio de casos, esta sesión se diseñó con el propósito de ilustrar la utilidad de la factorización de polinomios mónicos de grado mediante el producto de polinomios, como puede ser en lugar de evaluar en x=7 el polinomio escrito como $x^2 + 8x + 7$, evaluarlo cuando está expresado como $(x + 1)(x + 7)$. Específicamente, se buscaba mostrar cómo los polinomios de grado 2 con coeficiente líder igual a 1 pueden descomponerse en el producto de dos polinomios de grado 1, siempre que sea posible y de manera sencilla, es decir, cuando los coeficiente de los polinomios de grado 1 sean enteros.

El objetivo final era que Irene comprendiese el procedimiento subyacente, una variante de las conocidas como fórmulas de Cardano-Vieta para polinomios mónicos de grado 2. Este tema se abordaría a lo largo de varias sesiones, transitando por los niveles manipulativo y algebraico, dado que el nivel pictórico es en gran parte similar al manipulativo.

La motivación detrás de enseñar esta técnica radica en su gran utilidad para resolver ecuaciones de segundo grado, una habilidad que será crucial para el enfoque futuro en la Sesión XVII. Durante en estas sesiones, se enfocaría exclusivamente en polinomios mónicos, ya que resulta más sencillo deducir el proceso de manera abstracta. Además, para resolver ecuaciones de segundo grado, siempre podemos transformar la ecuación en una donde el coeficiente de x^2 sea 1, dividiendo por dicho número.

En esta sesión específica, el primer objetivo consistía en proporcionar una aplicación práctica a la factorización de polinomios de grado 2. Para lograr esto, se comenzó repasando el proceso de multiplicación de polinomios, centrándose en el producto de polinomios de grado 1 para obtener uno de grado 2. Se llevaron a cabo varios ejemplos de este tipo y se le pidió a Irene que evaluara el polinomio resultante en varios puntos, tanto directamente como a través del producto de los dos polinomios de grado 1. Tras realizar estas evaluaciones, se llegó a la conclusión de que le resultaba más sencillo evaluar el polinomio como producto de dos de grado 1.

Además, el siguiente objetivo consistía en la deducción por parte de Irene del procedimiento que había detrás de la simplificación de polinomios mónicos de grado 2, donde, en caso de no lograrlo, se le daría alguna indicación.

Para lograr este objetivo, se inició el desarrollo del nivel manipulativo del modelo CPA utilizando los conocidos como *azulejos algebraicos*, que se pueden ver en el Anexo 6.7. Durante esta fase, se le explicó a Irene que el propósito era construir un rectángulo de tal manera que su área representara el polinomio *P(x)* que se desea simplificar. Una vez construido el rectángulo, se le hizo notar que *P(x)* es el producto de los lados.

Considerando lo abordado en la Sección 2.1.5.4, se procedió con ejemplos donde todos los coeficientes eran positivos, como el polinomio $x^2 + 6x + 6$, cuyo resultado se puede observar en la Ilustración 27.

Se pudo observar que inicialmente Irene experimentaba dificultades para construir el rectángulo, lo que la llevó a sentirse estresada ya que las fichas de 1 no encajaban correctamente. Después de trabajar con varios ejemplos donde todos los coeficientes eran positivos, comenzó a adquirir fluidez en el proceso. Sin embargo, al preguntarle si identificaba algún patrón para construir el rectángulo, expresó no tener claridad al respecto.

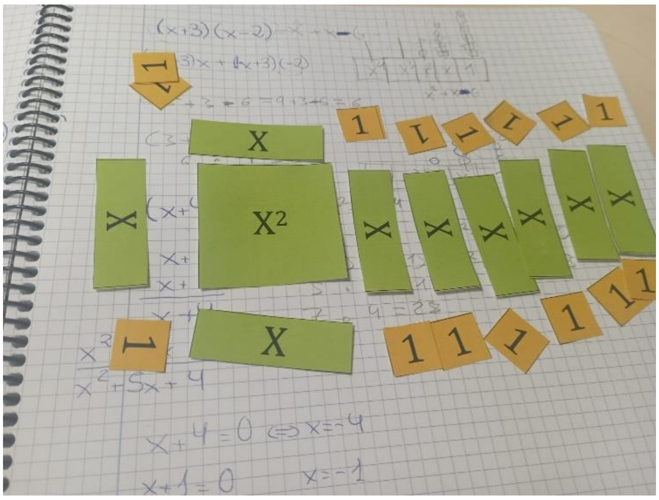


Ilustración 27. Factorización de polinomios usando azulejos algebraicos. Elaboración propia.

En un intento por ayudarla a descubrir el procedimiento, se procedió a redondear los términos independientes de los dos factores obtenidos en todas las factorizaciones realizadas. Luego, se continuó factorizando otros polinomios con el fin de que Irene progresivamente percibiera, con alguna indicación, que el producto de los términos independientes de los factores era igual al término independiente del polinomio a factorizar.

Tras darse cuenta de este hecho, Irene empezó a buscar números naturales que, multiplicados, dieran como resultado el término independiente del polinomio. Después de varios intentos, se percató de que la suma de los dos factores correspondía al coeficiente de x.

Como conclusión de esta sesión, al finalizar se pudo observar que Irene, al buscar factores del término independiente, se limitaba a buscar entre los números naturales. Esto resalta la necesidad de abordar este aspecto en la próxima sesión, ya que será de vital importancia cuando todos los coeficientes del polinomio no sean positivos.

IX. Novena Sesión (12 de enero de 2024)

Esta sesión se planificó con el objetivo de continuar con la factorización de polinomios mónicos de grado 2, aumentando la demanda cognitiva al permitir que los coeficientes no fueran necesariamente todos positivos, excepto el coeficiente principal que debía ser 1. No obstante, se decidió comenzar corrigiendo el error mencionado anteriormente, ya que sería fundamental para la factorización de otros polinomios, como por ejemplo $x^2 - 6x + 8$.

Antes de iniciar la sesión se observó cómo Irene, mientras hacía sus deberes, estaba experimentando un gran estrés (de hecho, ya lo había señalado en el mapa del humor). Estaba trabajando en ejercicios de matemáticas entre los que había uno sobre potencias que no lograba resolver, por lo que se decidió comenzar la sesión abordando ese ejercicio para tranquilizarla. Lo primero que se hizo fue empezar el ejercicio desde cero, sin tener en cuenta lo que ya había intentado, ya que se estaba enfocando demasiado en lo que debería obtener y en su intento anterior. Finalmente, se logró resolver el problema, como se puede ver en la siguiente imagen.

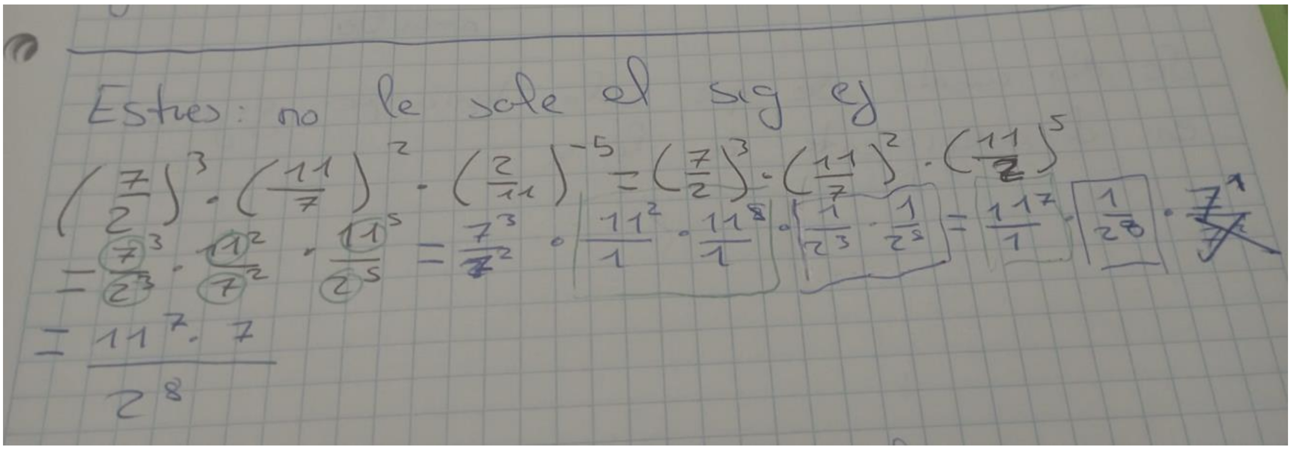


Ilustración 28. Resolución de un ejercicio de potencias que no le salía. Elaboración propia.

Al acabar y revisar lo que había hecho, notamos que el profesor solo había desarrollado la parte de $\frac{7^3}{7^2} = 7$, lo que llevó a Irene a pensar que el resultado final era 7.

Al comenzar con la factorización de polinomios, se corrigió el error mencionado en las conclusiones de la sesión anterior, Irene se dio cuenta de que debía incluir los casos en los que ambos términos eran negativos, un aspecto que, aunque no tuviera una gran importancia debido a la discalculia, era necesario corregir para el desarrollo de la sesión. Una vez entendido este error, se explicó que, si todos los coeficientes no eran positivos, salvo el de x^2, el proceso sería análogo al caso en el que todos fueran positivos, ya trabajado.

La decisión de comunicarle esto se basó en que, si decidía factorizar utilizando *azulejos*, Irene tendría que añadir manualmente fichas verdes y rojas de x y -x respectivamente. Dado que ya había adquirido el algoritmo para los polinomios de grado 2 con coeficientes positivos, esto le resultaría más natural. A pesar de esto, en los primeros ejemplos se le propuso que construyera el rectángulo como en la sesión anterior, enfatizando que, si lo resolvía de esta manera, tendría que añadir fichas de x y de -x. La Ilustración 29 muestra el proceso de factorización del polinomio $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$.

Visto el dominio mostrado en la factorización de polinomios, se decidió avanzar del nivel manipulativo al nivel algebraico, omitiendo el nivel pictórico. Esto se debió a que las actividades significativas para el proceso de este concepto eran esencialmente las mismas en ambos niveles, y el nivel manipulativo ya mostraba un alto grado de dominio sin presentar signos de ansiedad.

El único problema observado, relacionado con la discalculia, fue que a Irene le costaba encontrar dos números que sumaran -6 al factorizar $x^2 - 6x + 8$, aunque tuviera correctamente identificados los factores de 8. Estos factores incluían combinaciones como 2,4; -2,-4; 1,8; -1,-8. Incluso cuando encontraba los números correctos, como en este caso, a veces cometía errores al calcular su suma. Para abordar este desafío, se recurrió a ejemplos de la vida real donde se explicaba que si un número era negativo, significaba que se debía la cantidad sin el signo, y si era positivo, significaba que se tenía la cantidad. Esta comparación resultó útil y se aplicó en ejercicios posteriores.

Ilustración 29. Factorización de polinomios de manera que el término independiente es negativo. Elaboración propia.

Un problema particular surgió cuando en el polinomio no aparecía la x. Apoyado en la representación del *ábaco* que se había utilizado en la Sesión VII, se pudo concluir que, si no aparecía la x, significaba que el coeficiente 0, lo que permitió factorizar el polinomio.

Finalmente, se le pidió a Irene que intentara explicar cómo factorizar los polinomios de grado 2. Al verbalizarlo, resulta más fácil evaluar su nivel de comprensión y desarrollar así el nivel comunicativo del modelo de Sharma. Irene describió todo el procedimiento correctamente. Además, no recordaba la palabra “factor”, por lo que dijo “dos números que multiplicados den el término independiente”.

Durante esta sesión, se observaron dos aspectos muy reveladores en relación con la ansiedad matemática de Irene. En primer lugar, se evidenció que disfrutaba del proceso sin mostrar signos de estrés, a diferencia de lo que ocurrió al principio con el problema de las potencias que le presentaba dificultades. Al preguntarle por su opinión respecto a la factorización de polinomios, Irene respondió: “Me parece hasta divertido”, lo que sugiere que su nivel de estrés era considerablemente más bajo en consideración con el inicio de la sesión, o incluso podría haber desaparecido por completo.

En segundo lugar, al finalizar la sesión y para controlar la presión del tiempo, se le asignaron cuatro polinomios para factorizar en un intervalo de cuatro minutos. A pesar de que inicialmente podría haberse esperado de que se pusiera nerviosa y se bloqueara, Irene logró completar la tarea en el tiempo asignado. Es particularmente destacable que uno de los polinomios propuestos para factorizar fue $P(x) = x^2 + 7x + 8$, el cual no puede ser factorizado utilizando los métodos previamente aprendidos. Sin embargo, la reacción de Irene no fue bloquearse o dudar de sí misma, sino que dejó este polinomio para el final y afirmó con seguridad que no se podía factorizar utilizando los métodos disponibles. Esta actitud refleja una confianza en sí misma y una habilidad para afrontar los desafíos matemáticos, lo que sugiere una disminución significativa de su ansiedad matemática.

Estos hallazgos ilustran cómo el uso del modelo CPA conduce a una mayor comprensión del concepto y contribuye a reducir la presión del tiempo, así como a mejorar el autoconcepto de Irene. Esto aborda las tres causas principales que se buscaban solucionar en relación con su ansiedad matemática.

También es importante destacar que Irene logró factorizar correctamente los tres polinomios restantes y, además, cuando se presentó el polinomio $P(x) = x^2 + 9x + 8$, que podía factorizarse utilizando los métodos previamente enseñados, lo hizo sin cometer errores.

Esta sesión arroja conclusiones muy interesantes en varios aspectos. En cuanto al dominio afectivo, se observa que Irene disfrutaba del proceso de factorización de polinomios, lo que sugiere una baja o nula presencia de ansiedad Además, se evidenció que la presión por el tiempo estaba disminuyendo y que su confianza en las matemáticas estaba aumentando, como se refleja en su capacidad para afirmar con seguridad que un polinomio no podía ser factorizado con los métodos conocidos, una afirmación que resultó ser correcta. Este desarrollo es coherente con la ausencia del sentimiento de prisa en el *Mapa de Humor*, que no se había observado desde la Sesión V.

Por otro lado, Irene demostró una gran habilidad para factorizar polinomios de grado 2 con fluidez, cometiendo pocos errores, a excepción de aquellos relacionados con la discalculia, los cuales ya fueron mencionados. Por lo tanto, en las próximas sesiones se comenzará a trabajar en la técnica siguiente: completar cuadrados.

X. Décima Sesión (15 de enero de 2024)

Vistos los resultados tan satisfactorios con respecto a la factorización de polinomios mónicos de grado 2, trabajado en las dos sesiones anteriores, estas próximas sesiones se dedicarán a completar cuadrados, pasando por los distintos niveles del modelo CPA. En esta sesión, en particular, se busca que Irene adquiera soltura completando cuadrados utilizando los *azulejos algebraicos*. La comprensión de esta técnica será crucial en las sesiones posteriores, comenzando en la XVII, para poder demostrar la fórmula de la ecuación de segundo grado.

Esta sesión se centrará en el nivel manipulativo. Por lo tanto, se trabajará con ejercicios sencillos, donde todos los coeficientes de x sean pares, siguiendo las ideas tratadas en la Sección 2.1.5.4. Para iniciar, se propuso a Irene un polinomio que no pusiera ser factorizado, utilizando los métodos vistos en las sesiones anteriores, siendo este el polinomio $x^2 + 2x + 2$. Irene rápidamente identificó que los números cuyo producto dieran 2, no sumaban 2, concluyendo acertadamente que no se podía factorizar. Esto sirvió para introducir la idea de completar cuadrados como una forma alternativa de facilitar la evaluación de un polinomio de grado 2 en un punto, como una aplicación de dicha técnica, mediante la construcción de un cuadrado con todas las x y x^2 del polinomio.

Una vez explicado el procedimiento, comenzando con el ejemplo mostrado anteriormente, Irene logró construir el cuadrado requerido. Sin embargo, al notar que quedaba una ficha de 1 sobrante, mostró confusión. Para abordar esta inquietud, se plantearon preguntas como: "¿Cuál es el área del cuadrado de lado x+1?" o "¿Qué falta o sobra para llegar al polinomio que se desea obtener?". Tras responder estas preguntas, Irene se dio cuenta de que el resultado era $(x+1)^2+1$.

Una vez que obtenidos los dos polinomios, se le consultó cuál de los dos le resultaba más sencillo de evaluar, a lo que respondió que el segundo. Se realizaron algunas evaluaciones con valores específicos para confirmar esta preferencia.

Posteriormente, se realizaron un par de ejemplos más que no podían factorizarse para evitar que intentara aplicar el mismo método. Cabe destacar que por cada x que colocaba debajo del cuadrado x^2, ponía otro a la derecha del mismo cuadrado. Sin embargo, al preguntarle por qué lo hacía de esa manera, Irene expresó que no sabía, y que así creía que formaba un cuadrado.

Mientras completaba cuadrados para el polinomio $P(x)=x^2+8x+10$, Irene se sorprendió al notar que le faltaban fichas para completar el cuadrado después de colocar fichas x a la derecha de x^2 y 4 debajo de x^2. En respuesta a esta situación, se sacó una ficha de 1 (amarilla) y una de -1 (azul), y se le preguntó cuánto sumaban estas dos fichas, a lo que Irene respondió "0". En consecuencia, se señaló que podía introducir una ficha amarilla en el cuadrado y dejar una ficha azul fuera. Irene comprendió rápidamente que este proceso debía repetirse tantas veces como fuera necesario hasta completar el cuadrado, resultando en $P(x)=(x+4)^2-6$, como se puede observar en la Ilustración 30.

Un aspecto significativo que mencionó Irene es que creía que si se podía completar cuadrados no se podía factorizar. Para abordar esta creencia, se le propuso completar cuadrados en el polinomio $P(x)=x^2+4x+3$. Tras completar cuadrados, se le pidió que simplificara el mismo polinomio, momento en el que se dio cuenta de que, de hecho, sí era posible factorizarlo. Con el propósito de desafiar esta creencia y practicar la factorización, se le asignó completar cuadrados y factorizar simultáneamente, si era posible.

Una vez que Irene demostró comprender cómo completar cuadrados cuando todos los coeficientes eran positivos (y el coeficiente de x era par), se empezó a trabajar con polinomios mónicos donde los coeficientes restantes no fuesen necesariamente positivos, aunque el coeficiente de x seguiría siendo par. Comenzando con x^2-2x, Irene construyó correctamente el cuadrado de lado (x-1). Sin embargo, al verbalizar que (-1) por (-1) era 1, comentó que era porque “menos por menos es más”. Por lo tanto, se aclaró que multiplicar por -1 consistía en cambiar el signo del otro número, visualizándose esto como un cambio en el color de las fichas. Irene luego afirmó que “azul por azul era amarillo”, por lo que en las siguientes sesiones, se planea trabajar en ayudarla a comprender que multiplicar por -1 equivale a cambiar el signo, abordando así la variabilidad perceptiva.

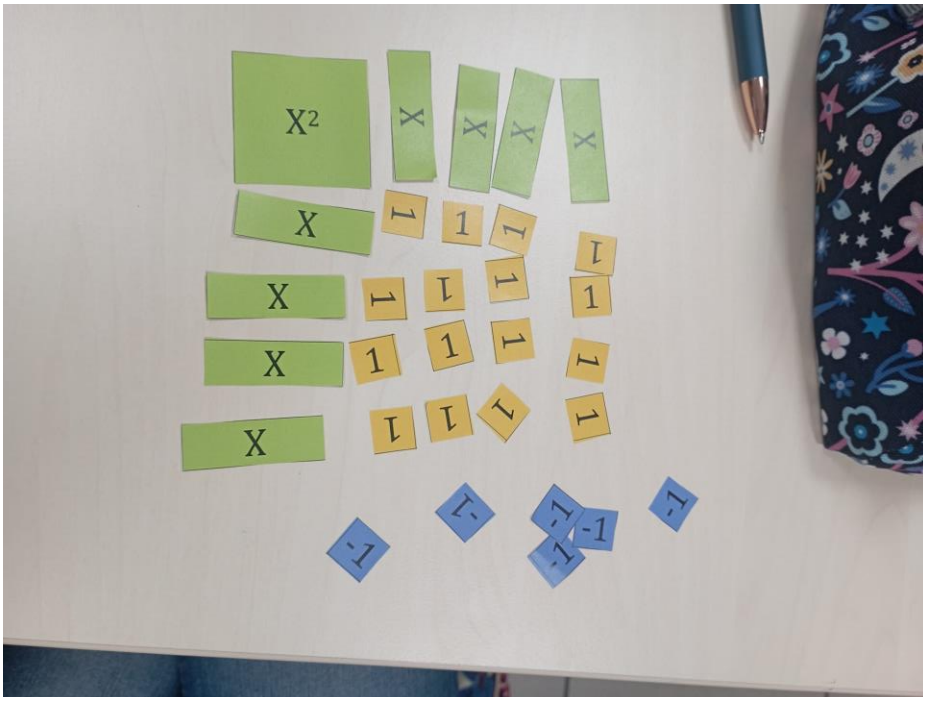


Ilustración 30. Completando cuadrados usando azulejos algebraicos. Elaboración propia.

La sesión concluyó ayudando a Irene a darse cuenta de que el término independiente del lado del cuadrado obtenido al completar cuadrados era la mitad del coeficiente de las x del polinomio original, y que el valor del término independiente del polinomio original no afectaba la elección de este número. Para lograrlo, se plantearon preguntas a lo largo de la sesión sobre por qué agrupaba las x de cierta manera. Al final, de manera similar a como se hizo con la factorización, se redondeó cada coeficiente de las x y el coeficiente resultante, lo que llevó a Irene a darse cuenta de que el factor era la mitad de dicho coeficiente.

Posteriormente, se propusieron 4 polinomios exactamente iguales, excepto por el término independiente. Por ejemplo, uno de ellos era x^2-2x+2. En primer lugar, se preguntó cuál sería el lado del cuadrado obtenido, a lo que Irene respondió correctamente que era x-1. Luego, al completar cuadrados, se dio cuenta de que solo variaba el número que se sumaba después del $(x-1)^2$. Este aspecto se seguirá trabajando en la siguiente sesión.

Con respecto a este nuevo concepto, Irene al principio expresó una preferencia por la factorización, lo cual es razonable dado que ya estaba familiarizada con el proceso después de las dos sesiones dedicadas a ello, como se mencionó en la Sesión IX. Sin embargo, al concluir esta sesión, afirmaba que le parecía más sencillo completar cuadrados. Esto puede deberse a que, para completar cuadrados, solo tenía que dividir un número entre dos, dando un resultado exacto en esta sesión, mientras que para factorizar debía encontrar todas las parejas de números que multiplicadas diesen el término independiente, y luego seleccionar las que sumadas dieran el coeficiente de las x.

En esta sesión, se pudo observar que, aunque no llegó a deducir la regla por sí sola, indirectamente estaba entendiendo el proceso, ya que iba colocando *baldosas* de x a cada lado del cuadrado x^2 hasta que no quedaba ninguna. También es importante destacar su tendencia a usar la frase memorística "menos por menos es más" o a asociar colores a dicha frase. Por lo tanto, en la siguiente sesión, además de seguir trabajando en completar cuadrados y aumentar la demanda cognitiva, se buscará que comprenda esta afirmación, trabajando en la variabilidad perceptiva.

XI. Undécima Sesión (19 de enero de 2024)

El lunes, durante la sesión, se abordó en primer lugar el desempeño de Irene en el examen del viernes anterior. Ella comentó que había salido del examen con buenas sensaciones y, en comparación con sus compañeros, había hecho relativamente pocas preguntas. Además, se indagó sobre su reacción ante la presión del tiempo durante el examen. Irene señaló que, si bien no se había sentido nerviosa por el tiempo, sí había sentido cierta presión para completar todas las tareas en el periodo asignado, lo cual es comprensible dada la diferencia entre realizar ejercicios en casa y enfrentarse a un examen cronometrado. En relación con esto, mencionó que a muchos de sus compañeros no les había dado tiempo para terminar, pero que ella sí había logrado finalizarlo.

En cuanto a la sesión en sí, se tenía previsto abordar en primer lugar la noción de que multiplicar por (-1) equivale a cambiar el signo, representado por el cambio de color de las fichas de 1 y -1, como se explicará más adelante. Una vez que Irene comprendiera esta idea, desarrollando el nivel pictórico, se intentaría llegar a las expresiones del cuadrado de una suma y cuadrado de una diferencia, teniendo en cuenta que $(x-a)^2 = (x+(-a))^2$, y se verificaría si había entendido correctamente el concepto trabajado al principio de la sesión. Posteriormente, una vez obtenidas estas fórmulas, se procedería a completar cuadrados, ya en un nivel algebraico, manteniendo la restricción de que el coeficiente de x fuera par.

Una vez iniciada la sesión, siguiendo el plan previamente establecido, se procedió a trabajar el significado de multiplicar por -1. Con este fin, se modificó el color de las fichas de 1 a azul oscuro y de -1 a marrón claro, y se propuso a Irene completar cuadrados utilizando el material manipulativo, con ejemplos donde el coeficiente de las x fuera negativo, como en el caso de x^2-6x+8. El objetivo era abordar este aspecto específico. Al mismo tiempo, se le solicitó explicar el proceso que seguía para obtener el resultado, lo que permitió desarrollar el nivel comunicativo del modelo de Sharma.

Irene explicaba el proceso con precisión, pero al llegar al punto de explicar por qué surgían las fichas de 1 y no de -1, parecía recurrir nuevamente a la frase "menos por menos es más". Ante esto, se decidió detener la actividad de completar cuadrados para reflexionar sobre el significado de multiplicar por (-1).

Para esta reflexión, se emplearon las fichas de esta sesión, así como las de sesiones anteriores, con el objetivo de ayudar a Irene a captar la idea, y se trabajó en la variabilidad perceptiva. Se colocaron las fichas de manera análoga a como se disponen los lados de un cuadrado antes de multiplicarlos. En concreto, se situaron dos fichas de -1, una ficha de 1 y otra de -1, y una ficha de 1 junto con otra de 1, utilizando colores diferentes de manera indistinta. Tras observar el resultado de esta operación como 1, -1 y 1, discutimos sobre el motivo de este resultado. Finalmente, Irene notó que al multiplicar por (-1) se cambiaba el signo del otro número.

Para verificar su comprensión de esta idea y proporcionar un ejemplo donde no se abordara solo el caso de (-1) por (-1), se empleó (-6) por (-7) como ejemplo. Al principio, Irene mostraba cierta dificultad para abordarlo sin recurrir a la expresión "menos por menos, más". Sin embargo, al señalarle que (-6) podía expresarse como (-1) por 6, se le preguntó por la razón de esto. Irene respondió correctamente que esto implicaba cambiar el signo del 6. Procedió de manera similar con el número -7, y al utilizar la propiedad conmutativa, escribió (-6) por (-7) como (-1) por (-1) por 6 por 7. En este punto, comprendió que multiplicar por (-1) implicaba cambiar el signo del (-1), lo que llevó al resultado (-6) por (-7) igual a 6 por 7, es decir, 42.

Otra prueba de su comprensión fue solicitarle que completara cuadrados en el polinomio x^2-4x+7, requiriendo verbalizar el proceso nuevamente. Al llegar al paso crítico, donde debía explicar la operación de (-1) por (-1), Irene afirmó que el resultado era 1 debido a que “en (-1) por (-1) hay que cambiar el signo a uno de los dos”. Esta afirmación indicaba claramente que había comprendido el concepto, lo que indicaba que estaba lista para avanzar al nivel pictórico relacionado con completar cuadrados, donde se continuaría trabajando esta idea.

El objetivo de este nivel era simplemente obtener las fórmulas del cuadrado de una suma y cuadrado de una diferencia para así completar el proceso de deducción necesario para entender cómo completar cuadrados. Se comenzó deduciendo el cuadrado de una suma al preguntar cómo se podría representar $(x+a)^2$. Irene respondió correctamente que era el área del cuadrado de lado x+a, una idea previamente trabajada en sesiones anteriores. Luego, realizó la división del lado entre x y a para subdividir el cuadrado en dos cuadrados y dos rectángulos, calculando el área de cada uno y concluyendo que $(x+a)^2$ es la suma de estas áreas.

Sin embargo, enfrentó dificultades al sumar $a \cdot x$ y $x \cdot a$. Para resolverlo, primero se utilizaron ejemplos simples como $2 \cdot 3$ y $3 \cdot 2$ para establecer que $a \cdot x = x \cdot a$. Luego, para realizar la suma, se introdujo una variable y para representar a $a \cdot x$, llegando finalmente al resultado deseado:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

En cuanto al cuadrado de una diferencia, se esperaba ver cómo se aplicaba la multiplicación por -a. Por este motivo, se solicitó a Irene que explicara el proceso hasta llegar a la fórmula correspondiente, demostrando comprender cada paso, incluyendo por qué $a \cdot (-x) = -a \cdot x$ y $(-a) \cdot (-a) = a^2$. Con esto, sin enfrentar las dificultades mencionadas previamente en el cuadrado de una suma, pudo llegar a la fórmula deseada:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Es importante señalar que en realidad lo que se propuso fue calcular el área del cuadrado con lado x+(-a), lo cual difiere ligeramente del enfoque típico en el nivel pictórico. Sin embargo, esta decisión se tomó para seguir un proceso análogo al utilizado al completar cuadrados con los *azulejos algebraicos*.

La Ilustración 31 detalla todo el proceso que Irene siguió para llegar a estas dos fórmulas.

Una vez obtenidas estas dos fórmulas, que eran el objetivo buscado previamente para asegurar que todas las x estuvieran presentes al cuadrado, se llegó a que el término "a" que aparece en la fórmula del cuadrado de una suma o diferencia era la mitad del coeficiente de las x del polinomio original. Sin embargo, era necesario introducir el término a^2 para que se verifique la fórmula. Para lograr esto, y utilizando varios ejemplos, se observó que al agregar a^2 mediante la suma, era necesario restar a^2 para mantener el equilibrio, permitiendo así utilizar la fórmula y calcular lo que quedaba de manera más sencilla.

En primer lugar, se comenzó con ejemplos simples, donde el coeficiente de x fuera par para facilitar el uso del material manipulativo. La estrategia consistía en añadir a^2 fichas de 1 y de -1, y luego realizar las operaciones con las fichas de -1 y las del polinomio original, eliminando una ficha de 1 por una de -1 hasta quedarnos únicamente con un tipo de fichas.

Para llevar a cabo los ejemplos, Irene solicitó usar rotuladores para resaltar el $2a$ de la fórmula y el coeficiente de x, utilizando el color verde para los coeficientes positivos y naranja para los negativos. Después de completar un par de ejemplos y verificar con el material manipulativo que estaban correctamente realizados, en los últimos ejercicios de la sesión Irene optó por no utilizar los *azulejos algebraicos*, lo marcó el comienzo de la transición completa al nivel algebraico.

Al preguntarle sobre la dificultad de este proceso, Irene comentó que era complejo, lo cual es razonable dado que no se trata de una técnica sencilla. Por lo tanto, el resto de esta sesión y la próxima se dedicarán a completar cuadrados de esta manera.

Aunque al principio le costaba, al final consiguió hacerlo con fluidez y, salvo errores de cálculo atribuibles a la discalculia, como se detalló en la Sección 2.1.3, o errores comunes de cálculo, como mencionar que 5^2=10, en general los realizaba correctamente. El último ejemplo sirvió como una introducción a lo que se abordará en la próxima sesión, dado que se planteó un ejemplo donde el coeficiente de la x era impar. Al intentar dividirlo entre 2, observó que no era un resultado exacto y quería quedarse con la parte entera, pero al señalarle que podía expresarlo como fracción y que, entonces, el a buscado sería esa fracción. Tras esta observación y salvo algunos errores de cálculo que corrigió cuando se indicaron, logró ejecutarlo correctamente.

Dado que este proceso es el más complejo visto hasta el momento, al principio le parecía muy difícil, como se mencionó anteriormente, pero una vez que adquirió fluidez, al final de la sesión se le volvió a preguntar qué le parecía y comentó que le resultaba interesante aunque no del todo sencillo, una perspectiva que se considera normal en estas circunstancias.

Durante esta sesión, se logró un avance significativo al permitir que ella dedujera por sí sola las fórmulas del cuadrado de una suma y del cuadrado de una diferencia, lo que luego la llevó a comenzar a completar cuadrados desde un enfoque puramente algebraico. Este salto conceptual se percibió como desafiante, lo cual es comprensible, pero no mostró signos pronunciados de ansiedad matemática. Con la realización de algunos ejemplos, fue adquiriendo la destreza y ejecutando la mayoría de las tareas correctamente, a excepción de algunos errores de cálculo. En la próxima sesión, se continuará desde el punto en que lo dejamos, con el objetivo de aumentar aún más la demanda cognitiva.

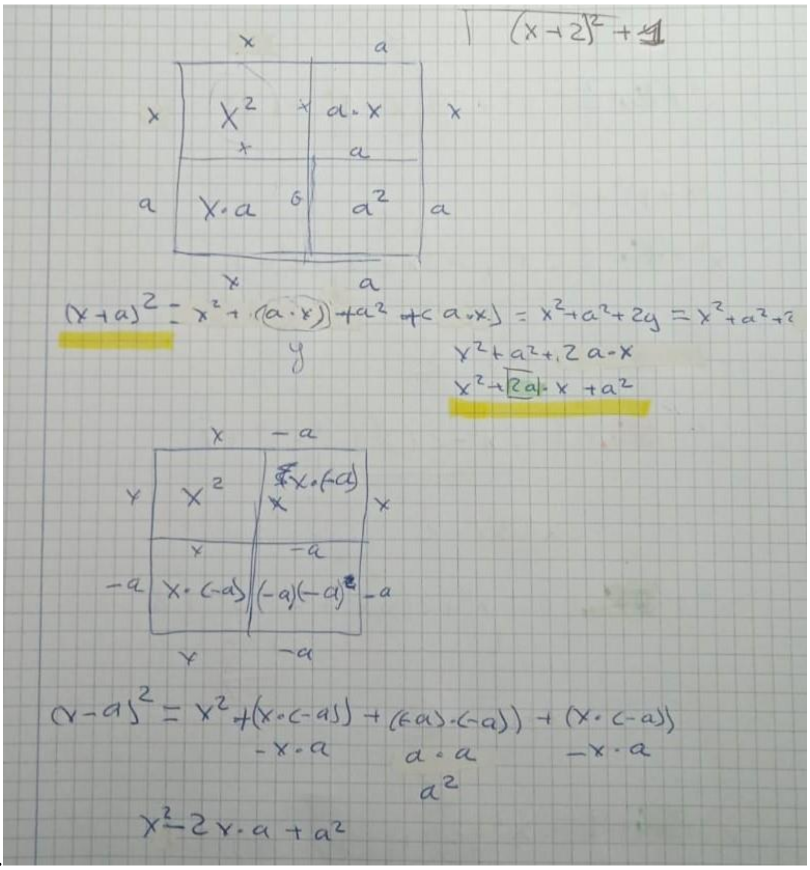


Ilustración 31.Obtención del cuadrado de una suma y de una resta por parte de Irene. Elaboración propia.

XII. Duodécima Sesión (22 de enero de 2024)

Durante esta sesión, se continuó trabajando en completar cuadrados desde un enfoque algebraico, con el objetivo de aumentar progresivamente la demanda cognitiva, retomando desde donde se dejó en la sesión anterior.

Al inicio de la sesión, se le preguntó a Irene si recordaba las fórmulas del cuadrado de una suma y del cuadrado de una diferencia, a lo que respondió negativamente. Entonces, se le pidió que las dedujera por sí misma. De manera interesante, practicó la variabilidad perceptiva sin darse cuenta, al realizar $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$, trabajando de la misma manera que se ilustró en la sesión anterior. Al notar esto, se le preguntó a Irene si las fórmulas obtenidas en los dos días eran las mismas, a lo que respondió afirmativamente, destacando que solo se cambiaban las letras.

Luego, se procedió a completar cuadrados donde el coeficiente de x fuera par en primer lugar e impar en segundo lugar. Durante este proceso, se observó que al expresar el polinomio $x^2+2ax+c$ como $(x+a)^2-a^2+c$, a menudo olvidaba el signo menos antes de a^2. Para abordar este problema, se intentó expresarlo como $(x+a)^2+c-a^2$, lo que redujo la frecuencia de este error.

Además, cuando el polinomio $x^2+2ax+c$, al sumar y restar a^2, solía escribirlo como $x^2+2a+a^2+c-a^2$. La explicación de este comportamiento se aclararía más adelante.

También es importante destacar que, en lugar de escribir, por ejemplo, $(\frac{3}{2})^2$, escribía $\frac{3^2}{2}$, un error muy común en Secundaria. Sin embargo, rápidamente, sin necesidad de que se le señalara, se daba cuenta del error y lo corregía.

Durante estos ejemplos, no se estableció un límite de tiempo porque el objetivo principal era identificar posibles fallos, destacando aquellos mencionados anteriormente, y ayudarla a ganar confianza mientras se evaluaba su desempeño. En este sentido, Irene expresó cierto nerviosismo cuando pasamos de trabajar con coeficientes de x pares a impares, ya que temía no estar aplicando la misma estrategia. Ante este comentario, se estableció un breve descanso para que reflexionara sobre la diferencia entre los casos en ellos que el coeficiente de las x, b, fuese par o impar: cuando b era par, $\frac{b}{2}$ daba un número entero, por lo que se utilizaba este valor; en cambio, cuando b era impar, $\frac{b}{2}$ no era entero, por lo que se utilizaba $\frac{b}{2}$.

Tras completar la serie de ejercicios anteriores, se le propuso completar el cuadrado de cuatro polinomios en un plazo de seis minutos: x^2+6x-3, x^2-x+1, x^2+2x+3 y x^2+3x+4. Irene logró completarlos en casi 5 minutos, mostrando una gran tranquilidad. Al corregirlos, resultó que todos estaban correctos. Este resultado indica que no experimentó ansiedad frente al límite de tiempo propuesto y que pudo completar los ejercicios con precisión, mostrando que cuando no siente ansiedad o nerviosismo, su rendimiento es óptimo y que la introducción del límite de tiempo no afectó su desempeño.

A continuación, se le solicitó que completara cuadrados cuando el coeficiente de x fuera una fracción, lo cual sería de gran utilidad en la resolución de ecuaciones cuadráticas. Al recordarle este nuevo enfoque, se observó cierto nerviosismo y ansiedad en su respuesta, expresando que cada vez que se introducía un nuevo elemento, sentía que las cosas se complicaban más. Ante su reacción, se decidió explicarle el procedimiento relacionándolo con los casos anteriores y proporcionar ejemplos adicionales para demostrar que el proceso seguía siendo similar. En este punto, mostró un mayor nerviosismo en comparación con cuando se trabajaba con coeficientes impares.

Tras esto, se le asignaron 5 polinomios en los que el coeficiente de x podía ser cualquier número racional, y se le pidió que completara cuadrados en estos polinomios en un plazo de 7 minutos. Durante esta tarea, Irene mostró un mayor nivel de nerviosismo. Sin embargo, es importante destacar positivamente que cuando completó cuadrados en el polinomio $x^2 - \frac{1}{2}x + 2$, experimentó un momento de bloqueo debido a un error al escribir una fracción. A pesar de esto, logró darse cuenta del error por sí misma, corrigió su equivocación y completó cuadrados en los 5 polinomios en el tiempo asignado.

Al finalizar, se corrigieron los 5 polinomios, concluyendo que 4 de los 5 estaban resueltos correctamente, donde se había cometido un error en los signos. Aprovechando este corrección, se le preguntó por cómo se había sentido durante esta serie de ejercicios. Irene comentó que sentía una menor tranquilidad. Por otro lado, se le preguntó acerca del motivo de no incluir la x en sus respuestas. Explicó que en su entorno escolar estaban trabajando en ese momento con reglas de proporcionalidad y que, cuando se buscaba comprobar que dos fracciones equivalentes, en lugar de escribir $\frac{3}{6} = \frac{x}{4}$, simplemente omitían la variable x, lo que los llevaba a resolver la ecuación sin asignar una incógnita a ninguna cantidad.

Por último, se discutió el hecho de que Irene se había puesto nerviosa al intentar abordar el caso en el que el coeficiente de las x era un número racional. En este contexto, se resaltó que en matemáticas la idea es comenzar con algo más sencillo y luego avanzar hacia casos más complicados, siguiendo así los principios expuestos en la Sección 2.1.5.4.

En esta sesión, Irene mostró una notable evolución en el ámbito cognitivo al completar cuadrados de cualquier polinomio mónico de grado 2. A lo largo de la sesión, surgieron algunos errores que fueron corregidos de manera efectiva. Aunque experimentó niveles de nerviosismo más elevados a medida que aumentaba la demanda cognitiva, logró completar los cuadrados de manera correcta, y la presencia del límite de tiempo no supuso una presión significativa para ella.

Por lo tanto, en la siguiente sesión, se decidió no continuar con la práctica de completar cuadrados; en su lugar, la siguiente sesión se centrará en la resolución de ecuaciones de primer grado que no involucren paréntesis ni fracciones.

XIII. Decimotercera Sesión (26 de enero de 2024)

En estas sesión, se va a abordar la resolución de ecuaciones de primer grado. Inicialmente, se le pedirá a Irene que resuelva estas ecuaciones sin utilizar ningún tipo de material manipulativo. Posteriormente, se evaluará su reacción y, en caso de necesidad, se le proporcionará el material manipulativo adecuado para estas sesiones, que consistirá en *balanzas en dos dimensiones* y en *azulejos algebraicos* o *balanzas virtuales.* Se empezará con ecuaciones que no contengan paréntesis ni fracciones, ya que estas requieren una menor demanda cognitiva, siguiendo la estrategia discutida en la Sección 2.1.5.4.

Al llegar a casa, Irene reportó que había recibido la nota de un examen del que se había hablado en la Sesión XI, obteniendo una calificación de 7. Esta fue la calificación más alta que había obtenido en matemáticas desde que estaba en la Secundaria. Este hecho no podría ser simplemente una coincidencia, especialmente considerando que Irene había experimentado ansiedad matemática desde que ingresó a la Secundaria, lo que afectó negativamente su rendimiento académico, como se detalló en la Sección 2.1.2.3.

Ante esta situación, se le preguntó a Irene si creía que las sesiones podrían haber influido en su éxito en el examen. Ella comentó que pensaba que sí, ya que desde que se comenzaron las sesiones, se sentía más tranquila al enfrentarse a las matemáticas. Este cambio en su percepción sugiere que las sesiones están teniendo un impacto positivo en su rendimiento académico.

Tras discutir esto, se le explicó a Irene el enfoque que se iba a adoptar, centrándose en la resolución de ecuaciones de primer grado. Además, se mencionó que este tema sería especialmente útil para ella, dado que en ese momento en su centro escolar se estaba trabajando las reglas de proporcionalidad, lo que complementaría su comprensión al resolver estas ecuaciones.

Para evaluar su reacción emocional frente a las ecuaciones de primer grado sin recurrir al modelo CPA, se le propuso resolver tres ecuaciones simples extraídas de su libro de texto. Durante este ejercicio, se pudo notar cierto nivel de nerviosismo en ella, ya que no se sentía segura de cómo abordarlas. Al finalizar, con dos de las tres ecuaciones resueltas incorrectamente, se le preguntó acerca de sus sensaciones para confirmar lo observado. Irene corroboró que, de hecho, se había sentido un poco nerviosa debido a su falta de recuerdo sobre cómo resolverlas, y expresó que esta inseguridad también la experimentaba en clase, especialmente considerando el trabajo actual en el que estaban inmersos.

Dada la respuesta de Irene al resolver estas ecuaciones de manera independiente, se decidió no continuar con más ejercicios de este tipo. En cambio, se optó por aplicar el enfoque de Jerome Bruner, comenzando con el uso de material manipulativo. Para ello, se inició preguntándole a Irene si estaba familiarizada con el funcionamiento de una balanza, a lo que respondió afirmativamente. Aprovechando esta comprensión, se exploró cómo la balanza se mantiene en equilibrio cuando ambos lados pesan lo mismo, concepto que se aplicaría posteriormente al representar cada término de la ecuación en un lado de la balanza utilizando los *azulejos algebraicos* que se habían empleado en sesiones anteriores.

Para ilustrar el proceso, que se puede ver en la Ilustración 32, se ha utilizado como ejemplo la ecuación 3x+5=8. Se explicó que el objetivo era aislar las fichas que representaban las x, de modo que quedaran solas en un lado de la ecuación. A su vez, se le recomendó que mantuviera las fichas de x siempre positivas para facilitar las operaciones.

Para lograr este objetivo, se introdujeron fichas con valor -1 en ambos lados de la ecuación para cancelar las fichas de 1 que representan las constantes. Sin embargo, al principio cometió el error de colocar las fichas con valor -1 solo en un lado de la balanza, lo que no permitía el equilibrio. Se aclaró la importancia de mantener el equilibrio de mantener el equilibrio en ambos lados de la ecuación.

Una vez corregido este error, se procedió a eliminar las cinco fichas de un lado de la ecuación utilizando las fichas con valor -1. Esto reflejó la frase de "lo que está sumando pasa restando". Se le pidió que anotara la nueva ecuación obtenida después de esta operación, que sería 3x+5-5=8-5, y se simplificó para obtener 3x=8-5.

Luego, se explicó que al restar 5 en ambos lados de la ecuación, parecía que se estaba "pasando" la suma al otro lado restando, pero que en realidad se estaba eliminando la misma cantidad de ambos lados. Por lo tanto, la ecuación era equivalente a la anterior. Se continuó eliminando las fichas de 1 con las de -1 en el otro lado de la ecuación, lo que nos llevó a que 3x=3.

Para ayudarla a comprender como se seguía, se utilizó un ejemplo práctico con la compra de rotuladores (si se compran 4 rotuladores iguales por 8 euros en total, ¿cuánto cuesta un rotulador?), comprendiendo así que había que dividir entre 3, obteniéndose así que x=1.

Finalmente para verificar que x=1 cumple con la igualdad original, se le pidió que sustituyera la x por 1 en la ecuación original 3x+5=8. Al hacerlo, se confirmó que la igualdad seguía siendo cierta. Además, al aplicar este método a una de las ecuaciones que había resuelto incorrectamente, Irene pudo notar que la igualdad no se cumplía en ese caso.

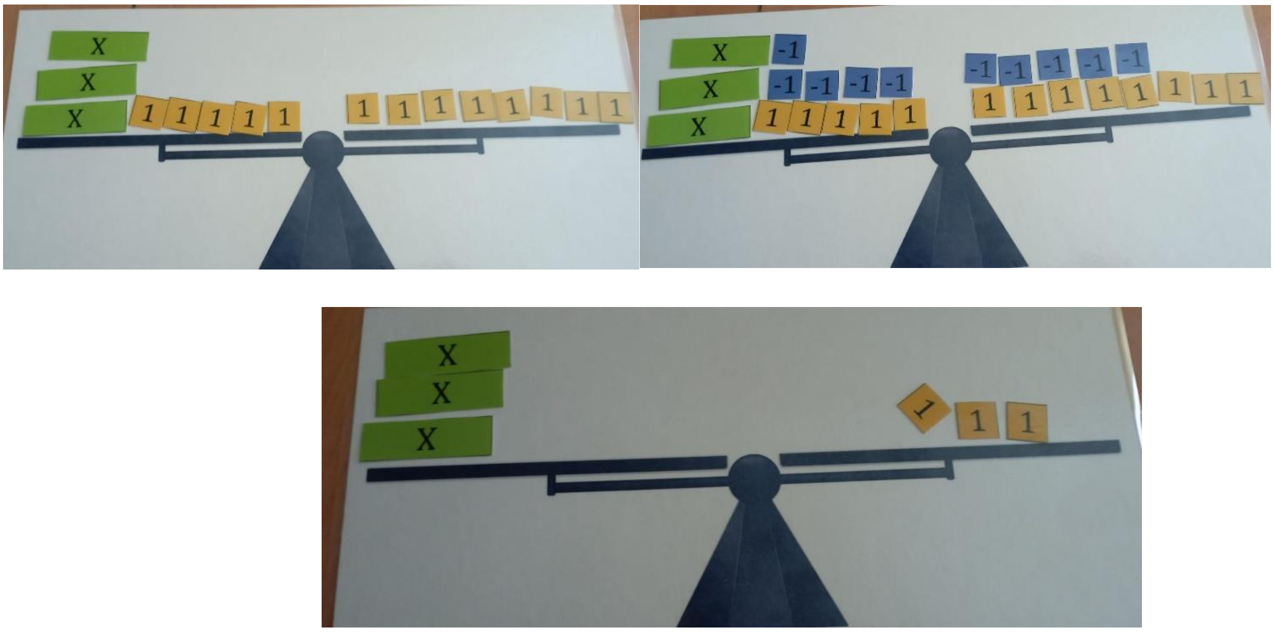


Ilustración 32. Proceso para resolver una ecuación de primer grado usando azulejos algebraicos. Elaboración propia.

Después de completar los ejemplos iniciales usando la balanza y observar que los resolvía correctamente, se le preguntó a Irene si se sentía más cómoda ahora que al principio, afirmando que se sentía tranquila y que incluso le resultaba divertido.

El siguiente paso en el nivel de las demandas cognitivas fue verificar qué sucedía cuando había x en ambos lados de la ecuación. Para ello, se presentó un ejemplo: 2x+2=x+4, Se explicó que debía decidir en qué lado dejar las x, eligiendo Irene el lado izquierdo al haber más x en ese lado. Después, restó 2 en ambos lados para obtener la ecuación 2x=x+2. Sin necesidad de indicación adicionales, colocó una ficha de -x en ambos lados para obtener 2x-x=x-x+2, resultando en x=2.

Se continuó practicando con ecuaciones en las que había x en ambos lados, destacándose los siguientes aspectos:

En primer lugar, al intentar resolver la ecuación 2x+3=x-1, colocó inicialmente 3 fichas -1 en el lado izquierdo, pero en el lado derecho dispuso 3 fichas de 1. Se explicó que, en este caso, no podía colocar fichas de 1 en el lado derecho porque desequilibraría la balanza. Para que entendiera mejor la situación, se le mostró el recurso en línea de https://es.mathigon.org/polypad#algebra-tiles (*Polypad – Manipulantes virtuales –*, s. f.), lo que le permitió comprender visualmente el error, como se muestra en la Ilustración 33.

En segundo lugar, en una de las ecuaciones, Irene llegó a que 3x=-3 después de realizar las operaciones oportunas, y se pudo observar cómo agrupaba Irene los números en columnas según la cantidad de x que había. Para confirmar que estaba agrupando los números en conjuntos de tres, se le preguntó como actuaría si en lugar de -3 fuese -6. Se observó cómo colocaba las tres fichas de -1 necesarias de manera que cada una estuviera en una columna diferente, demostrándose así que estaba agrupando los números según la cantidad de x, comprendiendo así la necesidad de dividir.

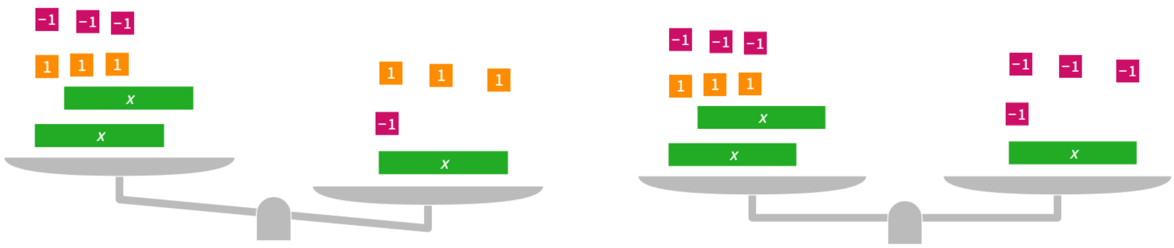


Ilustración 33. Procedimiento que seguimos usando mathigon para que Irene se diese cuenta del error. (Polypad – Manipulantes virtuales –, s. f.),

En tercer lugar, para abordar la variabilidad perceptiva, se le preguntó si pasaría algo si en lugar de haber x hubiese otra letra, como y o z. Irene respondió que creía que el procedimiento sería el mismo, mostrando una gran seguridad al respecto.

Por último, la última ecuación que se propuso resolver fue 3x+8=10x+1. Esta ecuación fue seleccionada para verificar su reacción cuando obtuviera 1=x, ya que iba a trasladar la x al lado derecho debido a que había más x en ese lado. Sin embargo, Irene resolvió la ecuación y no mostró ninguna reacción ante este hecho, lo cual suele ser problemático para los alumnos de Secundaria. Al preguntarle al respecto, Irene expresó que no importaba si se escribía 1=x o x=1 porque la balanza estaría equilibrada de igual manera.

Como conclusión, se observó que inicialmente Irene mostró un considerable nerviosismo al enfrentarse a las tres ecuaciones iniciales, y no las resolvió de manera correcta. Sin embargo, una vez que se le explicó la mecánica a seguir utilizando el material manipulativo, este nerviosismo disminuyó y se transformó en una cierta confianza, lo que indicó un aumento en su seguridad al abordar problemas matemáticos. A pesar de algunos errores, como el mencionado anteriormente, que se corrigieron con una breve explicación, Irene logró resolver las ecuaciones de manera adecuada, e incluso demostró signos de comprensión durante el proceso.

Por lo tanto, en la próxima sesión, se planteará resolver ecuaciones como repaso, para luego enfrentarse a otro conjunto de problemas con un límite de tiempo, con el fin de evaluar la evolución de esta situación y buscar aumentar aún más la demanda cognitiva.

XIV. Decimocuarta Sesión (29 de enero de 2024)

Esta sesión se inició revisando la mecánica para resolver ecuaciones de primer grado, repasando los conceptos abordados en la sesión anterior mediante la resolución de las ecuaciones $-2+1+x=5-x$ y $3x+1=x+4$. Posteriormente, se le presentaron cuatro ecuaciones de primer grado con un tiempo límite establecido, con el propósito de continuar evaluando su progreso en el manejo de esta problemática a lo largo del tiempo. Luego de esto, se abordarán ecuaciones de primer grado que incluyan paréntesis, con el fin de incrementar la complejidad y la demanda cognitiva.

La sesión dio inicio con el análisis de las dos ecuaciones mencionadas anteriormente, cada una con un objetivo específico. La primera ecuación se diseñó para observar la reacción de Irene ante la presencia de -2+1, considerando su discalculia. Se buscaba determinar si calculaba -2+1=-1 o si aplicaba primero la operación de suma al -2, seguida por la resta del 1. Irene demostró un comportamiento gratificante al calcular correctamente -2+1=-1 y continuar con la resolución sin contratiempos, lo cual es destacable dado el desafío adicional que representa la discalculia, como se señaló en la Sección 2.1.3.

La segunda ecuación tenía como objetivo observar cómo respondía Irene al encontrarse con la situación donde 3x+1=x+4 se simplificaba a 2x=3, ya que previamente esta situación le generaba dificultades. En esta ocasión, Irene resolvió la ecuación obteniendo $x=\frac{3}{2}=1.5$ sin mayores problemas.

Cuando finalizó la tarea, se le preguntó a Irene por cómo se había sentido al resolver las dos ecuaciones iniciales. Ella expresó sentirse tranquila y segura con estas resoluciones. Aprovechando este sentimiento positivo, se le propuso resolver cuatro ecuaciones adicionales (10-5x=x-2, x+4=2x+4, 2y-3=y+5, 4x+2=2x+6) en un plazo de 8 minutos. Se tomó esta decisión considerando que el uso del material manipulativo aumenta el tiempo necesario para completar las tareas, y además, la primera ecuación presentaba números relativamente grandes. Además, la se eligió que en la tercera ecuación la incógnita fuese la letra y para trabajar la variabilidad perceptiva.

Durante los 8 minutos de límite temporal, Irene resolvió las tres primeras ecuaciones, aunque la última le llevó un minuto adicional. Al preguntarle sobre su reacción ante esta tarea, expresó sentirse más nerviosa al darse cuenta de que el tiempo era limitado mientras trabajaba en las primeras ecuaciones. Esta reacción es lógica, ya que es natural que alguien se sienta más ansiosa al percibir que el tiempo disponible podría no ser suficiente para completar la tarea asignada.

Es muy revelador observar cómo Irene ha experimentado un cambio positivo en su percepción y desempeño en matemáticas con la introducción del límite de tiempo en las tareas. Sus comentarios reflejan una disminución en la presión percibida y un aumento en su seguridad al abordar ejercicios matemáticos bajo estas condiciones. Este cambio se alinea con lo observado desde sesiones anteriores, donde se notaba su agobio ante la presencia de límite temporal. Esta mejora en la autoconfianza también coincide con una mejora en su autoconcepto, como se ha discutido en sesiones anteriores, lo que parece haberse traducido una reducción en su ansiedad matemática y un aumento en su rendimiento en esta disciplina.

En cuanto a la resolución de las ecuaciones, Irene demostró un desempeño sólido al completar todas las tareas correctamente. Es razonable que pueda haber cierta confusión al cambiar la variable de una ecuación, como en el caso de la tercera ecuación donde comenzó con la y pero luego la cambió por la x. Su explicación sobre esta confusión, atribuyéndola al uso del material manipulativo donde la incógnita se representa con la x, es comprensible.

Al zanjar esta conversación, se recordó la importancia de verificar la validez de una ecuación sustituyendo el valor obtenido en la ecuación original para confirmar su corrección. Se realizó esta comprobación en las cuatro ecuaciones resueltas anteriormente, y se pudo observar que los resultados coincidían en ambos lados de la ecuación. A partir de este punto, Irene asumió el rol de verificar si las ecuaciones estaban correctas antes de que yo las confirmara, promoviendo así su participación en el proceso de corrección, aumentando así su confianza.

Luego, se abordaron las ecuaciones que incluían paréntesis, comenzando con casos donde el coeficiente fuera positivo para seguir avanzando en la complejidad cognitiva. Para introducir este concepto, se le preguntó acerca de la representación de 2x, lo cual la llevó a colocar dos fichas de x una encima de la otra. Aprovechando esta representación, se aclaró que esto equivalía a "dos veces x", y se le mostró cómo se representaría 2(x+1) en la balanza, destacando la importancia de una visualización clara. Después de colocar las fichas correspondientes y sumarlas, Irene concluyó que 2(x+1) era igual a 2x+2, demostrando una comprensión adecuada del concepto.

Se continuó practicando con la resolución de la ecuación 2(x-1) +3=9 como una prueba para consolidar su comprensión de este proceso. Se procedió a resolverla paso a paso, como se muestra en la Ilustración 34.

Después de obtener que x=4 y verificar su validez en la ecuación, surgió un problema que requerirá especial atención en la siguiente sesión. Al sustituir x por 4 en el lado izquierdo de la ecuación, Irene realizaba 2(4-1) +3=2+3+3=8, es decir, el error fue atribuible a la omisión del signo de multiplicación, lo que provocó que el 2 se interpretara como una suma. Sin embargo, este tipo de error solo ocurre al sustituir x por un número.

La siguiente ecuación que se propuso fue $3(x+1)-2=2(x-4)$. Lo interesante en esta ecuación fue que Irene inicialmente interpretó $2(x-4)$ como $x-4+x-4$. Luego procedió a descomponer $3(x+1)$ como $x+1+x+1+x+1$, lo que muestra una comprensión de que el coeficiente numérico está multiplicando. Tras esto, usando el material manipulativo a partir de aquí, Irene logró resolver correctamente la ecuación para obtener $x=-9$. No obstante, al revisar la validez de la solución, repitió el error mencionado anteriormente.

En la siguiente ecuación, $3x-7=2(x+1)$, Irene procedió directamente a descomponer hizo 2(x+1) como 2x+2. Además, un aspecto interesante a destacar ocurrió cuando llegó a la ecuación x-7=2. En lugar de sumar n lugar de sumar 7 a ambos lados como habíamos estado haciendo hasta entonces, Irene realizó la operación de la siguiente manera: -7=2-x, y luego pasó el 2 restando para obtener -9=-x, lo que finalmente le llevó a la solución. Al observar esto se le preguntó por qué había tomado esa decisión, ya que hasta ese momento habíamos mantenido x siempre positiva, a lo que Irene respondió que lo hizo para evitar colocar demasiadas fichas. Este enfoque es muy positivo porque, al seguir respetando las reglas establecidas sobre la conservación de la igualdad, Irene fue capaz de pensar fuera del marco enseñado previamente y comprobar que su método alternativo funcionaba. También se discutió que la descomposición de 2(x+1) =2x+2 siempre es válida, ya sea que los números involucrados sean positivos o negativos.

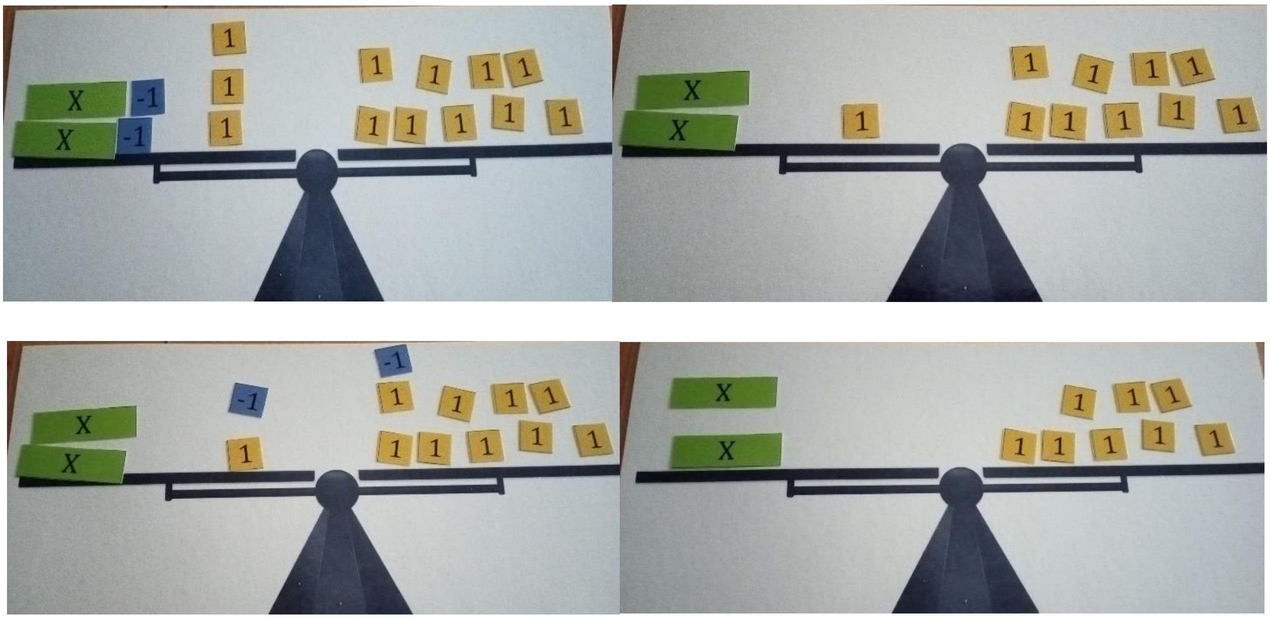


Ilustración 34.Resolución de 2(x-1) +3=9 usando material manipulativo. Elaboración propia.

El siguiente paso, en relación con lo comentado anteriormente acerca de la demanda cognitiva, es abordar qué sucede cuando el coeficiente que multiplica al paréntesis es un número negativo. Para ello, se explicó a Irene que primero se debe multiplicar el número que no lleva signo por el paréntesis (cálculo que ella ya sabe realizar) y luego cambiar el signo de cada término resultante. Sin embargo, Irene tendía a aplicar las reglas conocidas, como "menos por menos es más". Cuando se le preguntó por qué utilizaba estas expresiones, mencionó que desde quinto grado de primaria le enseñaron estas reglas sobre los números enteros, lo que explicaba su inclinación a utilizarlas.

Durante este proceso, Irene cometió varios errores comunes que, aunque son frecuentes entre los estudiantes de secundaria, le generaban cierta ansiedad porque no se sentía segura. Por ejemplo, a veces no cambiaba el signo de todo el paréntesis, solo cambiaba el signo del primer término y no del segundo (como en el caso de -3(x+3) =-3x+9) o se equivocaba en algún signo. A pesar de explicarle que esta era su primera sesión resolviendo ecuaciones con paréntesis y que estos errores son comunes incluso entre estudiantes mayores que ella, dado que está en segundo de Secundaria, su ansiedad persistía debido a su falta de dominio en estos conceptos.

Por último, se discutió que el objetivo final era resolver las ecuaciones sin depender del material manipulativo, pero de una manera similar a cómo lo estaba haciendo con dicho material. Irene sugirió la idea de dibujar una balanza y representar las incógnitas y números en forma de cajitas en ambos lados, según la estructura de la ecuación. Esta propuesta demostró que Irene pudo extrapolar el método del material manipulativo a la resolución de ecuaciones mediante un dibujo, lo que indica una transición exitosa del nivel manipulativo al algebraico directo.

En la próxima sesión se continuará trabajando con ecuaciones que incluyan paréntesis, ya que Irene expresó sentirse más nerviosa al enfrentarse a estas ecuaciones que a las que no los tienen. Esto se debe a que el año anterior solo había visto ecuaciones más simples sin paréntesis, por lo que se sentía más familiarizada con ellas. El objetivo será abordar los errores que comete al eliminar los paréntesis y al despejar la variable x por un valor. A pesar de sentirse nerviosa por el tiempo limitado para resolver las ecuaciones, lo que resultó ser insuficiente, su reacción no fue tan ansiosa como al principio del estudio de casos. Esto indica un progreso significativo en su confianza y habilidades matemáticas.

XV. Decimoquinta Sesión (2 de febrero de 2024)

En esta sesión, se abordará el problema que Irene tenía al sustituir la x por un número, el cual consistía en sumar en lugar de multiplicar, como se discutió anteriormente. Una vez tratado este tema, se resolverán ecuaciones de primer grado con paréntesis, con el objetivo de avanzar al nivel algebraico. Posteriormente, se le presentará a Irene una estrategia para evitar cometer errores al deshacer paréntesis.

Para abordar el primer problema, se le pidió a Irene que calculara $2(3+4)$ y $3 \cdot (4-1)$. Después de obtener los resultados de ambas operaciones, se le preguntó cuál de las dos formas prefería para representar el producto. Sin titubear, expresó su preferencia por la segunda opción. A partir de este momento, en las ecuaciones con paréntesis, se utilizará un punto antes o después del paréntesis para indicar la multiplicación por un número.

Tras esta observación, se procedió con el cálculo de ecuaciones con paréntesis, retomando desde donde lo dejamos en la sesión anterior y aplicando la modificación mencionada anteriormente. Irene resolvió la primera ecuación $2 \cdot (x-2) = 6$. Se esperaba que utilizara el material manipulativo desde el principio, pero, sin recurrir a él, transformó la ecuación en $2x - 4 = 6$. Al notar esto y que planeaba utilizar el material manipulativo después de obtener esta ecuación, se le preguntó si podía resolverla sin usar este recurso, a lo que respondió afirmativamente. Sin embargo, cometió un error al proceder a $2x = 6 - 4$. Al obtener $x = 1$ y sustituirlo en la ecuación original, notó el error. Tras revisarlo de manera conjunta, identificó su equivocación, corrigiéndola y llegando a la solución correcta, $x = 5$, y pudo comprobar que era correcta.

En el siguiente grupo de ecuaciones, observé que Irene las resolvió correctamente sin recurrir al material manipulativo, lo que indicaba una transición exitosa del nivel manipulativo al algebraico. Además, verificaba si la solución obtenida al sustituir x en la ecuación daba el mismo resultado. Para aumentar su confianza, se propuso que si al realizar esta prueba obtenía el mismo resultado, ella misma marcara la ecuación como correcta, sujeta a mi revisión posterior para evitar posibles errores o coincidencias fortuitas en el cálculo.

Al finalizar un conjunto de ecuaciones, donde apenas mostró algunos despistes normalmente relacionados con los signos, se preguntó a Irene acerca de si se sentía más segura en esta sesión o en la anterior, comentando que en esta, porque le iban saliendo bien las ecuaciones, pero que le seguían pareciendo algo complicadas.

Después de esta conversación, se continuó con un par de ecuaciones más, donde se notó que a veces se le olvidaba multiplicar el número que estaba fuera del paréntesis por el segundo de dentro del paréntesis. En este momento, se le propuso un método para realizar este tipo de ecuaciones sin equivocarse. Consistía en que, antes de multiplicar, rodeara el número exterior al paréntesis y señalara ambos números con una flecha como se muestra en la Ilustración 35.

Entonces, tendría que multiplicar el número por cada expresión señalada por la flecha, quedando en este caso $3x - 6 - 2x - 6 = 0$. Se insistiría en este enfoque más adelante y durante la siguiente sesión.

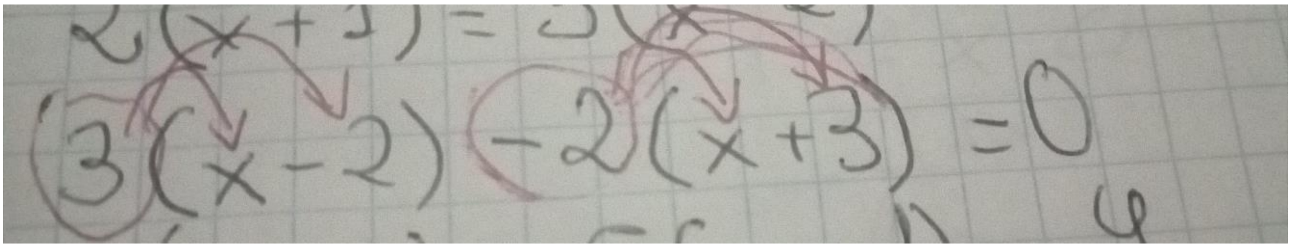


Ilustración 35. Método para resolver ecuaciones con paréntesis. Elaboración propia.

Al realizar otra serie de ecuaciones, donde solo cometió pequeños fallos como olvidarse de un número o multiplicar incorrectamente dos números, aspectos propios de la dislexia y la discalculia respectivamente, e incluso después de preguntarle si comprendía lo que debía hacer y comentar que se seguía sintiendo moderadamente tranquila, se comenzó a abordar ecuaciones que involucraban fracciones. Estas ecuaciones tenían denominadores que consistían únicamente en números, utilizando ejemplos simples y vinculándolos con el tema de proporcionalidad que Irene estaba trabajando en el entorno escolar en ese momento.

El primer ejemplo de estas ecuaciones fue $\frac{x}{2} = 2$, donde Irene utilizó la conocida expresión de "lo que está dividiendo pasa multiplicando". Para explicar el significado de la expresión y evitar un error muy común, el cual es, por ejemplo:

$$x - \frac{1 + x}{2} = 2 \leftrightarrow \frac{2x - 1 + x}{2} = 2$$

Se le aconsejó buscar un múltiplo común a los denominadores y multiplicar todo por ese número.

El siguiente ejemplo, con el que seguimos trabajando esta idea es $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$. Irene mencionó que el mínimo común múltiplo era 6, lo cual es correcto, pero se señaló que también podría servir 12, 24 o 120, ya que basta con tener un múltiplo para todos los denominadores. Después de esta aclaración, y para que se familiarizara con este tipo de ecuaciones, se resolvieron algunas que incluían denominadores obtenidas a partir de su libro de texto.

Al resolver estas ecuaciones, se notó que Irene comenzaba a trasladar todos los números de un lado al otro simultáneamente, en lugar de hacerlo uno por uno, lo que demostraba un mayor dominio del algoritmo utilizado en la resolución de ecuaciones. Además, cuando se encontraba con numerosas variables y constantes, empleaba colores para visualizar mejor la ubicación de las variables y los números, facilitando así el proceso de agrupación.

Sin embargo, durante la resolución de estas ecuaciones, persistió en el error mencionado anteriormente en relación con las ecuaciones con paréntesis. Por ello, se le recordó la técnica que se puede apreciar en la Ilustración 35. Se reiterará este recordatorio en la siguiente sesión, donde se abordarán más ecuaciones con fracciones, las cuales, tras la multiplicación por un múltiplo común de los denominadores, se convierten en ecuaciones con paréntesis.

Al concluir la sesión, se tuvo una conversación con Irene sobre sus impresiones respecto a este nuevo tipo de ecuaciones que se estaban abordando. Comentó que las encontraba complicadas, por lo que se remarcó que era comprensible, dado que era la primera vez (aunque no completamente dedicada) que se adentraba en las ecuaciones con fracciones.

Para aprovechar los últimos minutos, se decidió verificar si era capaz de traducir expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico. Se plantearon diversas afirmaciones como "el doble de algo", "la cuarta parte de algo", "el siguiente de un número", entre otras. Esto permitió comenzar a fortalecer su habilidad en esta área, ya que en la siguiente sesión se buscará resolver problemas de ecuaciones de primer grado, donde es crucial poder traducir del lenguaje cotidiano al algebraico. Los resultados fueron muy satisfactorios, ya que respondió acertadamente a todas las consignas planteadas.

En esta sesión, se logró corregir el error de Irene al sustituir valores en las ecuaciones mediante la introducción de un simple punto para denotar explícitamente el producto, lo que permitió avanzar al nivel algebraico en la resolución de ecuaciones de primer grado. Esto facilitó la aplicación de una técnica que le permitió abordar con mayor destreza las ecuaciones con paréntesis, y se comenzó a trabajar con ecuaciones que involucraban fracciones, las cuales al final fueron convertidas en ecuaciones con paréntesis únicamente.

Para concluir, se llevaron a cabo una serie de actividades destinadas a practicar la traducción del lenguaje cotidiano al algebraico, una habilidad esencial para resolver problemas de ecuaciones de primer grado en la siguiente sesión.

Con respecto a la evolución del *Mapa de Humor*, es notable cómo la emoción predominante en este mapa es la tranquilidad, y apenas se registran emociones negativas en comparación con sesiones anteriores.

XVI. Decimosexta Sesión (5 de febrero de 2024)

En esta sesión, en primer lugar, se llevarán a cabo ejercicios de ecuaciones con fracciones. Posteriormente, se explorará un ejemplo de una identidad, un concepto que habitualmente no se aborda en el entorno escolar debido a la presión del tiempo. En este contexto, se utilizó la traducción del lenguaje cotidiano al algebraico para resolver problemas de ecuaciones de primer grado, con el objetivo de seguir desarrollando la habilidad de traducción mencionada anteriormente. Es importante destacar que, para prevenir errores causados por la dislexia, los problemas están presentados utilizando la fuente Arial, un interlineado de 1.5 y un tamaño de 14, como se detalla en el Anexo 6.8.

Como se anticipaba, se comenzó con la resolución de ejercicios de ecuaciones con fracciones. En ocasiones, se observó que Irene empleaba el procedimiento que se puede visualizar en la Ilustración 35Ilustración 35. Método para resolver ecuaciones con paréntesis.De hecho, era muy común que, cuando no se utilizaba este método, la ecuación se resolviera de manera incorrecta.

Otro error que cometió Irene un par de veces fue el siguiente: en la ecuación $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=x-1$, identificaba correctamente el mínimo común múltiplo de 3 y 2, que en este caso es 6. Sin embargo, al multiplicar la ecuación por 6, realizaba la operación de la siguiente manera: $6\cdot\frac{x}{3}=\frac{x}{2}$. Al observar esto, se detuvo el proceso y se abordó como un producto de fracciones. En este contexto, se obtuvo la expresión $\frac{6x}{3}=2x$ y, se señaló que si hubiera sido $x-3$ en vez de x, habría sido necesario colocar paréntesis, ya que se quería multiplicar el número por todo el término y no solo por x.

Un aspecto interesante es que comprobaba todas las ecuaciones que resolvía. Si obtenía el mismo valor en ambos lados de la ecuación, entonces, como se mencionó en la sesión anterior, se le permitía confirmar que estaba correcto, aunque, posteriormente, verificara personalmente el resultado una vez ella afirmara haber terminado.

Tras realizar estas ecuaciones solo se detectaron los errores comunes que puede tener todo estudiante de segundo de Secundaria, como pueden ser confundirse en un signo al "pasar" un determinado número o incógnita, o errores en los cálculos. Sin embargo, estos fallos tuvieron como consecuencia que la ecuación no diera el resultado esperado, lo que llevó a Irene a darse cuenta de que algo estaba mal.

Al finalizar, se preguntó a Irene acerca de cómo se sentía ante esta colección de ecuaciones con fracciones. Irene comentó que se sentía más tranquila que en la sesión anterior, excepto en la cuarta ecuación, que era $x-\frac{x-3}{3}=1$. Tras multiplicar, había colocado primero $-x+3$ y luego $x-3$, lo que denotaba cierto nerviosismo debido a la inseguridad que sentía. Es importante destacar que, a pesar de que este error ocurrió en la cuarta ecuación y podría haber causado un bloqueo en Irene, ella continuó resolviendo ecuaciones y logró resolver una correctamente incluso en el primer intento. Este comportamiento indica una cierta resiliencia, lo cual es muy positivo para la evolución de su ansiedad matemática.

Lo siguiente que se realizó en esta sesión antes de empezar con problemas fue pedirle a Irene que pensara un número, lo multiplicara por dos y luego le sumara seis. Después, se le pidió que dividiera el resultado entre 2 y restara el número original, preguntándole si el resultado obtenido era 3. Una vez que lo hizo, se cuestionó si este truco funcionaba para cualquier número. Irene respondió que, aunque ya le habían hecho este truco anteriormente, no estaba segura, por lo que se comprobó de la siguiente manera:

$$\frac{2x+6}{2} - x = \frac{2x+6}{2} - \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

De este modo, Irene trabajaba el lenguaje algebraico y se proporcionaba un ejemplo de identidad, que es un aspecto que no se suele trabajar en el entorno escolar debido al papel central que desempeñan las ecuaciones en la enseñanza.

Una vez realizado esto, se comenzó con los problemas de ecuaciones, los cuales se pueden revisar en el Anexo 6.8, iniciando por el Problema 2 debido a que se trata de un problema de geometría e Irene podría visualizar el cuadrado. En este problema, Irene preguntó si el perímetro era la diagonal y confundió el concepto de perímetro con el de área, errores que, aunque no estén relacionados directamente con la ansiedad matemática, reflejan cierta falta de comprensión de estos conceptos.

Sin embargo, Irene demostró una notable capacidad para entender el enunciado, utilizando el subrayado para extraer los datos y relacionarlos correctamente según lo indicado en el problema. Este enfoque es crucial ya que muchos estudiantes enfrentan dificultades al no comprender adecuadamente los enunciados de los problemas, lo que puede ser la razón detrás de su incapacidad para resolverlos.

A su vez, también se explicó la importancia de revisar las soluciones obtenidas en estos problemas. Se utilizaron ejemplos para ilustrarlo, como pueden ser que si la solución implicaba que un lado en un problema de geometría fuera negativo, si la edad del hijo resultaba mayor que la del padre, o si indicaba que el padre tenía 10 años y el hijo 5, entonces algo estaba mal. Esta estrategia le serviría como método de verificación.

En el problema de determinar mi edad, cometió un error al "pasar" la incógnita, representada por x, sumando en lugar de restar. Este error condujo a que obtuviera mi edad como 11.5, lo cual reconoció como incorrecto y trató de identificar el error sin éxito. Al solicitarle que explicara su procedimiento, finalmente se dio cuenta del error, lo corrigió y obtuvo la solución deseada.

En el Problema 5, inicialmente determinó que $B = 2A$ y $C = 3A$. Se le sugirió utilizar la letra A en lugar de x para trabajar la variabilidad perceptiva, resolviendo el problema exitosamente. En relación con la resolución de problemas, mostró una notable confianza en sí misma, resolviéndolos con fluidez y precisión en su mayoría, a pesar de los desafíos que la dislexia puede presentar en este tipo de tareas.

En esta sesión, Irene demostró una mayor tranquilidad en comparación con las dos sesiones anteriores, salvo en una ecuación donde se bloqueó al no estar segura de si debía escribir -x+3 o x-3. A pesar de este contratiempo, pudo resolver las ecuaciones siguientes sin dificultades, lo que indica una disminución en su ansiedad matemática. Es importante destacar la notable capacidad que Irene mostró al resolver los problemas de ecuaciones, relacionando los datos del enunciado con habilidad y precisión. Debido a esto, se decidió dejar de lado las ecuaciones de primer grado y pasar a trabajar con ecuaciones de segundo grado.

XVII. Decimoséptima Sesión (12 de febrero de 2024)

Estas últimas sesiones del estudio de casos, exceptuando la Sesión XVIII donde se explicará el cambio en el plan previsto, se enfocarán en el estudio de las ecuaciones de segundo grado. El objetivo final es que Irene demuestre por sí sola la conocida fórmula de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para lograr este objetivo, se utilizará la factorización de polinomios mónicos de grado 2, que se ha trabajado en las Sesiones VIII y IX, así como la resolución de ecuaciones de ecuaciones de primer grado, que se ha abordado en las sesiones desde la XIII hasta la XVI. Además, se empleará el método de completar cuadrados, que se ha estudiado en las Sesiones X, XI y XII. De esta manera, estas sesiones servirán como aplicación de todo lo que se ha visto hasta ahora, permitiendo que Irene obtenga una fórmula esencial que, en segundo de Secundaria, se enseña sin demostración.

No obstante, esta sesión es de tipo introductorio, enfocada en el concepto de la raíz cuadrada y en la resolución de las conocidas como ecuaciones de segundo grado incompletas.

La sesión comenzó abordando el concepto de la raíz cuadrada. Aunque ya se había trabajado este contenido en la Sesión V, en esta ocasión cobrará especial atención la comprensión de que la raíz cuadrada de un número positivo da dos valores, siendo comúnmente omitido el valor negativo. Además, se destacó que la raíz cuadrada de 0 es 0, mientras que la de un número negativo no tiene solución real o no existe.

Para ilustrar esto, se propusieron algunos ejemplos, como $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{0}$ o $\sqrt{-9}$. En los dos primeros casos, Irene identificó correctamente los valores 3 y 2 respectivamente. Sin embargo, al preguntar por el resultado de $(-3) \cdot (-3)$ y afirmar que era 9, se percató de que también debía incluir el valor negativo, reconociendo así que $\sqrt{9}$ también puede ser -3 y que $\sqrt{4}$ puede ser -2. Con respecto a los otros dos casos, Irene experimentó cierto bloqueo. Para abordar esto, se recurrió a cómo se había conceptualizado la raíz cuadrada en la Sesión V. Se planteó cuánto debería medir el lado de un cuadrado con área 0 y con área -9. Rápidamente identificó que en el primer caso sería 0, pero al enfrentarse al segundo, expresó con cierta inseguridad que no era posible. En ese punto, se explicó que en tales casos la raíz cuadrada no tiene solución real o no existe.

Tras abordar el concepto de la raíz cuadrada, se comenzó con la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas, donde b es igual a 0. Esta elección permitió seguir trabajando con la idea previamente vista. Se comenzó con ecuaciones simples como $x^2 = 16$, $x^2 = -25$ y $x^2 = 0$. Utilizando el enfoque de que x^2 representa el área de un cuadrado con lado donde b, Irene dedujo que debía aplicar la raíz cuadrada para encontrar el valor de x. Es importante destacar que, al principio, Irene olvidaba incluir el símbolo $\pm$, pero a medida que avanzaban las sesiones, fue corrigiendo este error.

Una ver que Irene resolvió estas ecuaciones con fluidez, se procedió a aumentar la dificultad modificando el tipo de ecuaciones. Ahora, se enfrentaba a ecuaciones como $2x^2 - 8 = 0$, donde primero debía despejar el término independiente y luego dividir entre 2 antes de calcular la raíz cuadrada de 4.

Mientras Irene resolvía este tipo de ecuaciones de segundo grado, se enfrentaba al problema de no saber cuál era el índice de la raíz porque no aparecía. Por eso, en esta sesión y en la siguiente (en las posteriores no sintió la necesidad de hacerlo), escribía la raíz cuadrada como $\sqrt[2]{}$, lo que le permitía aclararse mejor.

El siguiente paso que se dio fue introducir las ecuaciones de segundo grado incompletas donde $c = 0$, es decir del tipo $ax^2 + bx = 0$. Para ilustrar esto, se tomó como ejemplo la ecuación $x^2 + 7x = 0$ y se empleó la factorización de polinomios. En primer lugar, se recordó que se debía encontrar dos factores de 0 cuya suma fuese igual al coeficiente de x, en este caso 7. Irene rápidamente dedujo que uno de los dos números buscados debía ser 0 y el otro 7. Así, concluyo que la ecuación anterior era equivalente a $(x + 0) \cdot (x + 7) = 0$, y al preguntarle por dos números cuyo producto fuese 0, determinó que $x + 0 = 0$, es decir, $x = 0$, o $x + 7 = 0$, es decir, $x = -7$. Esto proporcionó una manera de resolver ecuaciones de segundo grado: siempre que sea posible, se factoriza el polinomio con el método enseñado y luego se iguala cada monomio a 0.

En esta primera sesión, Irene se mostró nerviosa durante gran parte del tiempo. Al preguntarle cómo se sentía, ella admitió que estaba algo nerviosa porque sentía que su desempeño no estaba siendo óptimo, especialmente por cometer errores como olvidarse del signo $\pm$. Se intentó tranquilizarla, explicándole que era completamente normal cometer errores en esta etapa inicial, ya que era la primera vez que resolvía este tipo de ecuaciones, asegurándole que, con el tiempo y la práctica, estos errores irían desapareciendo.

En la siguiente sesión, se planeó dedicar una sesión especial para preparar el examen del lunes 19. Después de eso, se continuaría con el estudio de las ecuaciones de segundo grado completas, comenzando por aquellas donde el coeficiente de x sea par y el coeficiente de x^2 sea 1.

XVIII. Decimoctava Sesión (16 de febrero de 2024)

Como se acordó en la sesión anterior, en esta ocasión no se continuará con el estudio de las ecuaciones de segundo grado. Irene comentó al finalizar la sesión que tenía un examen programado para el lunes 19 sobre reglas de proporcionalidad, interés simple y compuesto. Por lo tanto, esta sesión se enfocará en resolver este tipo de problemas para evaluar su desempeño y familiarizarse con el formato de examen. Se estableció un límite de tiempo de 30 minutos para simular las condiciones de un examen real. El examen se presentó utilizando la fuente Arial, tamaño 14 e interlineado 1.5 para evitar posibles dificultades relacionadas con la dislexia. El contenido completo del examen se encuentra detallado en el Anexo 6.9.

Durante la realización del examen, se hizo una modificación en el Ejercicio 4, debido a que, en el entorno escolar, no habían abordado la situación en la que el rédito se da en trimestres, cuatrimestres o días, en lugar de años. Por lo tanto, se le solicitó que modificara el 4% trimestral por un 4% anual para adaptarlo a lo que habían estudiado previamente.

En cuanto a la forma en que Irene resolvió los ejercicios, cabe destacar que al abordar las reglas de tres, en lugar de resolver la ecuación de primer grado resultante paso a paso, optó por despejar directamente la variable x para obtener el valor buscado. Cuando se le preguntó al respecto, explicó que en su clase ella era la única que sabía resolver ecuaciones de primer grado, por lo que este método era el que utilizaban habitualmente.

Además, mencionó que su profesor había notado esta habilidad y la solicitaba a menudo para resolver problemas en la pizarra.

Ante esta situación, surgió la pregunta sobre cómo se sentía al enfrentarse a resolver ejercicios en la pizarra frente a sus compañeros, ya que esto puede generar inseguridad o vergüenza en muchas personas. Sin embargo, Irene comentó que no le importaba en particular, excepto cuando tenía que permanecer de pie más tiempo del necesario, lo que le impedía tomar apuntes. Este cambio en su actitud refleja un aumento en su seguridad en sí misma, en comparación con la Sesión VI, cuando mencionó que se ponía nerviosa si no estaba segura de cómo abordar un problema en la pizarra o si se le asignaba una tarea repentinamente. Este cambio es un signo positivo en relación con su ansiedad matemática.

Después de completar el examen con límite de tiempo, se le preguntó a Irene cómo se había sentido al enfrentarse a los ejercicios bajo presión temporal. Ella mencionó que experimentó cierto grado de nerviosismo, pero no demasiado. Esto sugiere que la presión del tiempo es una parte natural del proceso y, como se ha observado a lo largo de las sesiones, su impacto se ha ido reduciendo gradualmente a medida que ha adquirido herramientas matemáticas para abordar diferentes conceptos y ha fortalecido su confianza en sus habilidades matemáticas.

El resto de la sesión se dedicó a resolver ejercicios del libro que no estaban relacionados con los problemas del examen. Durante esta parte, solo hubo un detalle notable: en un ejercicio que implicaba calcular el 20% de 1250, Irene dividió 1250 entre 100 y luego multiplicó el resultado por 20, en lugar de simplemente eliminar dos ceros y multiplicar 125 por 2. Este rasgo, como se discutió al describir la discalculia en la Sección 2.1.3, es característico de aquellos que padecen este trastorno del aprendizaje.

En esta sesión, dedicada a preparar el examen, se observó nuevamente un aumento en la confianza de Irene en sí misma y una reducción en la presión del tiempo a medida que se le proporcionaron diversas técnicas matemáticas.

XIX. Decimonovena Sesión (19 de febrero de 2024)

En esta sesión y en las que siguen, se continúa abordando la resolución de ecuaciones de segundo grado completas. Se comenzará con aquellas ecuaciones en las que el coeficiente de las x es par y el de x^2 es 1. La estrategia consiste en pedirle que, siempre que sea posible, resuelva las ecuaciones mediante factorización, como se hizo al final de la Sesión XVII, y que utilice el método de completar cuadrados en todos los casos.

Al principio, se plantearon ecuaciones que cumplían estas condiciones y que podían factorizarse con los métodos vistos. Por ejemplo, si se tenía la ecuación $x^2 + 6x + 8 = 0$, mostraba una mayor seguridad al factorizar el polinomio cuadrático, obteniendo $(x + 2)(x + 4) = 0$, y luego resolviendo las dos ecuaciones de primer grado resultantes, $x + 2 = 0$ y $x + 4 = 0$.

También se le pidió que comprobara todas las soluciones que obtuviera, verificando si al sustituir x por las posibles soluciones se obtenía la igualdad. Si la igualdad se cumplía, ella misma marcaba la solución como correcta. Esta dinámica se mantuvo consistente con lo que se ha hecho en sesiones anteriores, especialmente en aquellas relacionadas con la resolución de ecuaciones de primer grado.

Para completar cuadrados, se recordó cómo se obtenían las fórmulas $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ y $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$, y se repasó el procedimiento para aplicarlas. Al principio, Irene marcaba explícitamente el valor de a, pero al avanzar en la sesión, dejó de sentir la necesidad de hacerlo.

Un error común que cometía era equivocarse en el signo del coeficiente de las x, lo que resultaba en escribir $(x-a)^2$ en lugar de $(x+a)^2$, o viceversa. Para corregir esto, se le sugirió que fuera atenta al signo del coeficiente de las x, redondeándolo para evitar confusiones.

Además, el hecho de que estas ecuaciones típicamente tuvieran dos soluciones le sirvió como recordatorio de incluir el signo ± al calcular la raíz cuadrada. Si se olvidaba de este signo al completar cuadrados, solo obtenía una solución, pero al factorizar, obtenía dos. Al preguntarle por qué podría ser esto y verbalizar su proceso de resolución, Irene sola se daba cuenta de su error y recordaba incluir el signo ±.

Al notar que Irene estaba ganando fluidez y expresaba sentirse más tranquila, se decidió presentarle ecuaciones de segundo grado que aún cumplían las condiciones iniciales: el coeficiente de las x ha de ser par y el de x^2 ha de ser 1. Sin embargo, estas ecuaciones no necesariamente podían factorizarse utilizando la técnica previamente enseñada. Se le pidió que determinara si era posible factorizarlas utilizando lo que se había aprendido, y en caso afirmativo, que aplicara ambos métodos (completar cuadrados siempre sería necesario, ya que se buscaba que ganara soltura con esta técnica).

Es relevante destacar el manejo de la ecuación $x^2 + 6x + 3 = 0$, donde al completar cuadrados, obtuvo $(x+3)^2 = 6$. Al calcular las raíces cuadradas, notó que $\sqrt{6}$ no daba un valor exacto. Influenciada por la práctica de su antigua profesora, que les pedía tomar la parte entera del resultado positivo (como se mencionó en la Sesión V), Irene estaba a punto de redondear $\sqrt{6}$ a 2. Sin embargo, se indicó que si no podía encontrar un número cuyo cuadrado diera el valor dentro de la raíz, debía dejarlo como estaba. También se observó su reacción al enfrentarse a esta situación, ya que las raíces que no dan un resultado exacto a menudo causan cierto malestar en los estudiantes.

Como Irene resolvía correctamente todas las ecuaciones propuestas del tipo anterior, se decidió avanzar hacia el siguiente paso, aunque no estuviera planificado para esta sesión, como se indica en la Sesión 2.1.5.4. Este paso consistía en resolver ecuaciones de segundo grado donde el coeficiente de x fuera impar y el de x^2 fuera 1. Para ello, se siguió el mismo enfoque que en el caso anterior, comenzando con ecuaciones que pudieran factorizarse según lo visto para que Irene estuviera segura de las soluciones obtenidas, para luego completar cuadrados y resolver la misma ecuación.

Se empezó con el ejemplo de $x^2 - 5x + 4 = 0$, donde Irene la factorizó obteniendo $(x-4)(x-1) = 0$ y, por lo tanto, la solución era $x = 1$ o $x = 4$. Al completar cuadrados, se encontró con la necesidad de dividir 5 entre 2, pero al no obtener un resultado exacto, estaba a punto de utilizar decimales. Sin embargo, para simplificar los cálculos y mantener la progresión en la demanda cognitiva, se indicó que si no obtenía un resultado exacto, lo dejara en forma de fracción, es decir, como $\frac{5}{2}$. Así, obtuvo que la ecuación propuesta era equivalente a $(x-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4}$. Surgió otra problemática al calcular la raíz cuadrada de una fracción, pero se recordó la propiedad que había trabajado en el entorno escolar de que $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, lo que le permitió resolver la ecuación de manera satisfactoria.

En el resto de la sesión, se continuó trabajando con ecuaciones de segundo grado completas donde el coeficiente de las x fuese impar y el de x^2 fuese 1. Con cada ecuación resuelta, Irene ganaba más soltura y confianza, llegando a comentar que se sentía tranquila y segura al realizarlas.

Aunque esta sesión estaba inicialmente planeada para que Irene resolviera y adquiriera soltura en ecuaciones de segundo grado completas donde el coeficiente de las x fuera par y el de x^2 fuera 1, se logró avanzar más rápido de lo esperado. Esto permitió pasar a las ecuaciones de segundo grado completas donde el coeficiente de las x fuera par y el de x^2 fuera 1 antes de lo previsto. Se continuará trabajando con este tipo de ecuaciones en la siguiente sesión.

XX. Vigésima Sesión (21 de febrero de 2024)

Esta sesión se planeó el objetivo de continuar resolviendo ecuaciones de segundo grado desde el punto de cierre de la última sesión, es decir, ecuaciones completas donde el coeficiente de x fuera impar y el de x^2 fuera 1, manteniendo así la progresión en la demanda cognitiva. La primera ecuación propuesta tenía una relevancia especial debido a sus aplicaciones en la sucesión de Fibonacci y su relación con el número áureo φ.

Se comenzó abordando la ecuación $x^2-x-1=0$, con el propósito de obtener el número áureo y discutir su conexión con la sucesión de Fibonacci, así como sus apariciones en la naturaleza y en la vida cotidiana. Irene demostró un gran interés y curiosidad en este tema, el cual desconocía

Durante la resolución de las ecuaciones propuestas, Irene mantuvo una tranquilidad constante y, salvo pequeños errores de cálculo que podrían atribuirse a la discalculia según lo discutido anteriormente, resolvió todas las ecuaciones correctamente.

Entonces, el nuevo objetivo de la sesión se centró en guiar para que comprendiera cómo deshacerse de la condición de x^2 fuese 1, un paso necesario antes de demostrar la fórmula de la ecuación de segundo grado. Se decidió enfocarse inicialmente en trabajar con coeficientes positivos, y una vez obtenida la fórmula, se consideraría cualquier número.

En primer lugar, se aclaró que para completar cuadrados era conveniente tener el coeficiente de x^2 igual a 1, ya que aunque se podía completar cuadrados con otros coeficientes, era más complicado. Se utilizó un símil con el proceso que se sigue en las ecuaciones de primer grado al despejar x, y así, Irene llegó a la conclusión de que se debía dividir toda la ecuación entre este coeficiente.

En esta ocasión, se siguió una progresión específica al resolver ecuaciones de segundo grado. En primer lugar, se buscó resolver aquellas ecuaciones donde, al dividir todos los coeficientes originales entre el coeficiente previamente mencionado, se obtuviesen resultados exactos. Más adelante, se abordaron las ecuaciones en las que, tras la división, el coeficiente de x fuera racional. Finalmente, se trabajó en las ecuaciones en las que, después de la división, tanto el coeficiente de x como el del término independiente eran racionales. Irene resolvió todas las ecuaciones sin dificultades.

Un comportamiento notable que Irene empezó a mostrar fue calcular el valor de a necesario para completar cuadrados directamente, ya sea para $(x+a)^2$ o $(x-a)^2$, dividiendo el coeficiente de x entre dos antes de escribirlo. Esto indica que comprende cómo obtener este valor.

En esta sesión, se logró completar todas las etapas necesarias para que Irene pueda demostrar la fórmula de la ecuación de segundo grado por sí sola. Realizó todas las ecuaciones propuestas correctamente, mostrando cada vez más autonomía en el proceso descrito en las sesiones anteriores. Todo está listo para que en la siguiente sesión se comience con la obtención de la fórmula.

XXI. Vigesimoprimera Sesión (26 de febrero de 2024)

En esta sesión, se alcanza el objetivo crucial de deducir la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, al completar en las sesiones anteriores todos los pasos para lograrlo con éxito.

Al comenzar, se planteó a Irene si prefería proceder con la deducción de la fórmula de inmediato o resolver otra ecuación de ejemplo antes de abordarla. Decidió resolver primero una ecuación de ejemplo, proponiendo la ecuación $3x^2+x+1=0$, con la cual Irene llegó satisfactoriamente a la conclusión de que no tenía solución.

Posteriormente, se abordó la obtención de la fórmula para este tipo de ecuaciones, el objetivo central de nuestra sesión. En la Ilustración 36 se detalla todo el proceso que Irene llevó a cabo para alcanzar esta fórmula.

Durante este proceso, Irene trabajó de manera independiente hasta llegar al momento de calcular las raíces cuadradas. A partir de este punto, mi labor fue proporcionarle algunas indicaciones para que pudiera continuar con la resolución de manera independiente. Por ejemplo, se señaló que $\frac{\frac{b}{a}}{2}$ era $\frac{b}{a}:2$, permitiendo deducir a Irene que el resultado era $\frac{b}{2a}$. Un aspecto notable ocurrió cuando calculó $\sqrt{4a^2}$ y determinó que era $2a$, explicando que $(2a)^2=4a^2$ y argumentando que la raíz cuadrada deshace los cuadrados. Este razonamiento evidenció una sólida comprensión de la raíz cuadrada, relacionándola con el concepto de elevar al cuadrado.

Tras obtener la fórmula, Irene preguntó por qué se escribe la ecuación de segundo grado en la forma $ax^2+bx+c=0$. Se aclaró que una ecuación de segundo grado se representa mediante un polinomio de grado dos, y que esta forma es la manera más sencilla de representar un polinomio igual o menor que dos. Para facilitar su comprensión, se le pidió que escribiera un polinomio de grado y se le señaló cómo identificar los términos que correspondían a a, b y c.

Después de esta explicación, se hizo saber a Irene que esta fórmula sería la que utilizaría la mayor parte del tiempo en adelante. Como todavía se tenía tiempo disponible, se comenzó a trabajar en ejemplos de ecuaciones de segundo grado utilizando esta fórmula, señalando explícitamente los valores de a, b y c. Durante estas actividades, se notó que Irene a veces escribía -1^2 en lugar de $(-1)^2$, y a veces cometía errores al indicar coeficientes negativos, escribiendo el número positivo en su lugar. Sin embargo, después de aclararse estos puntos, empezó a cometer estos errores con menos frecuencia.

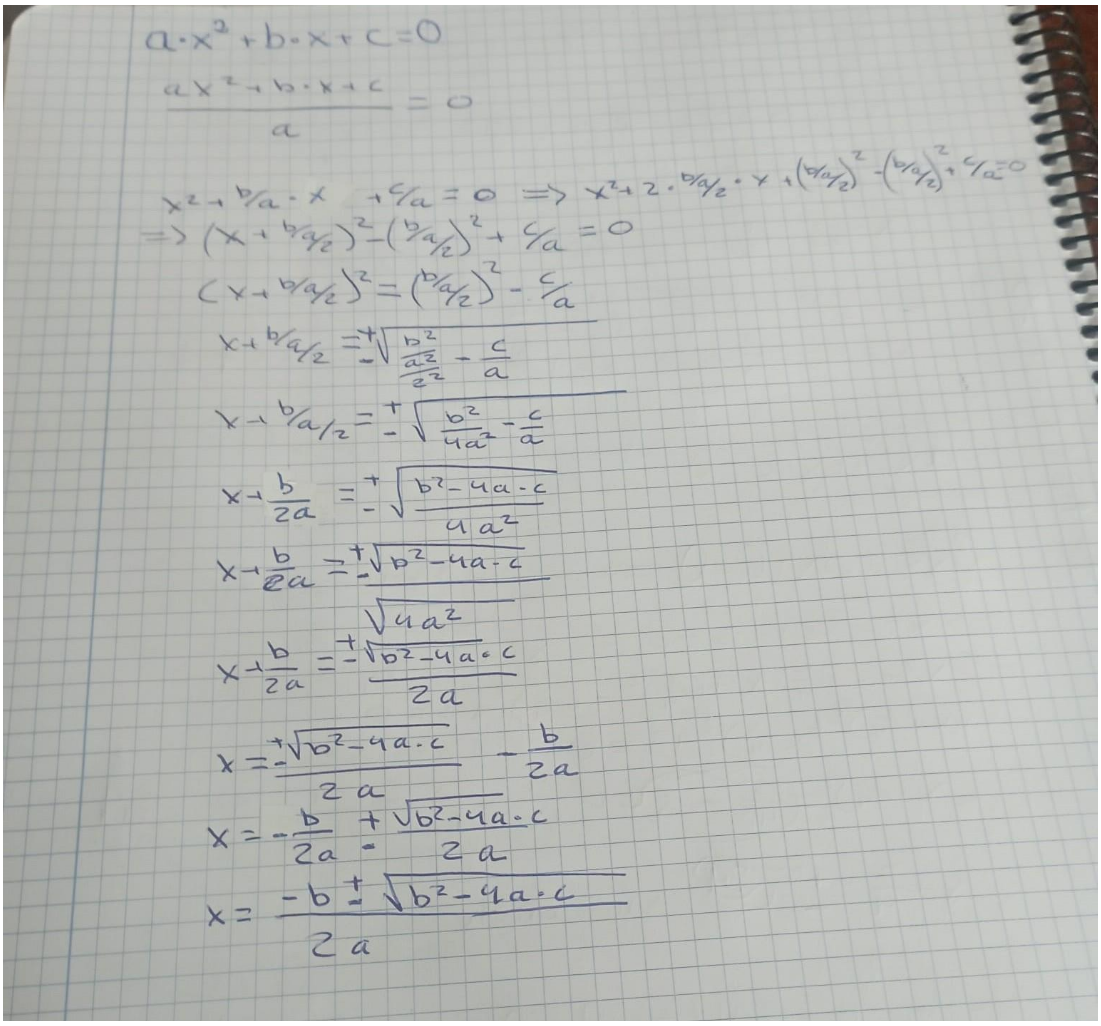


Ilustración 36. Obtención de la fórmula de segundo grado. Elaboración propia.

Para evitar que tuviera que estar mirando la fórmula constantemente en su cuaderno, se decidió escribirla en mi propio cuaderno. Sin embargo, en una ocasión, Irene confundió las variables b y c, lo cual puede ser atribuido por la dislexia como se mencionó en la Sección 2.1.4. Para facilitar la distinción entre las letras, se decidió cambiar los coeficientes a, b y c por A, B y C, respectivamente. De esta manera, ella resolvería la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ y la fórmula quedaría de la siguiente manera:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Es notable que durante la demostración de la fórmula, Irene se sintió tranquila, pero expresó cierta inseguridad al comenzar a resolver las ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula. Comentó que se sentía menos segura en comparación con la resolución mediante completar cuadrados, aunque atribuyó esta sensación al hecho de que era la primera vez que abordaba las ecuaciones de esta manera.

En cuanto al logro de los objetivos de estas sesiones, se pudo confirmar, a través de los comentarios de Irene, que había alcanzado un entendimiento sólido del concepto de raíz cuadrada. Además, al haber logrado este objetivo antes de lo previsto, se pudo dedicar tiempo adicional a la práctica de resolución de ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula. Durante esta práctica, Irene cometió algunos errores comunes que suelen enfrentar la mayoría de los estudiantes.

En la próxima sesión, se continuará trabajando en la resolución de ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula, teniendo en cuenta las modificaciones que hemos discutido anteriormente para facilitar el proceso de aprendizaje de Irene.

XXII. Vigesimosegunda Sesión (28 de febrero de 2024)

El objetivo de esta sesión es que Irene desarrolle habilidades para resolver ecuaciones de segundo grado con fluidez y reconozca la importancia de tener la ecuación en la forma estándar $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Se comenzó proponiendo ecuaciones donde solo debía aplicar la fórmula, lo que permitió observar una mejora en la reducción de los errores que había cometido con mayor frecuencia en sesiones anteriores. Después de que Irene resolviera correctamente tres ecuaciones consecutivas, se avanzó al segundo objetivo de la sesión.

En este segundo objetivo, se planteó a Irene la resolución de la ecuación $x^2 = -6x - 8$. Inicialmente, ella intentó aplicar la fórmula directamente, pero se aclaró que esta solo puede utilizarse si la ecuación está en la forma estándar mencionada anteriormente. Irene procedió a reorganizar la ecuación pasando sumando $6x$ y 8 a la izquierda, explicando que lo reorganizó de esta manera para evitar los signos negativos. El resto de la sesión se centró en resolver ecuaciones de segundo grado de este tipo, observando un progreso notable y la realización correcta de la mayoría de las ecuaciones, con solo pequeños errores en los cálculos.

Durante esta sesión, Irene mostró un cierto nivel de tranquilidad y relajación, ya que percibía que las ecuaciones le salían correctamente. Además, para evaluar si los padres habían observado una evolución en términos de la ansiedad y el rendimiento matemáticos de Irene, me comuniqué con ellos. Según sus comentarios, notaron que Irene estaba más tranquila desde el inicio de la intervención y que también habían observado una mejora en sus notas de matemáticas.

Este diálogo con los padres proporcionó información importante sobre el progreso de Irene, evidenciando una evolución positiva en su ansiedad matemática y su desempeño académico en esta área.

4.5. Análisis de lo recopilado.

Este apartado consistirá en realizar el análisis de lo ocurrido en el estudio de casos, si bien parte de este ha ido acompañando ya cada una de las sesiones. Para facilitar el estudio, se va a abordar en dos apartados, uno apoyado en el *Mapa de Humor* y otro en el cuestionario de contextos de PISA 2022.

4.5.1. Análisis del *Mapa de Humor*.

Esta sección es la que abarcará todo lo referente al *Mapa de Humor* elaborado por Irene, que se puede observar en el Anexo 6.5. A partir de las imágenes proporcionadas, se puede identificar o visualizar fácilmente el problema de Irene con el tiempo. Frecuentemente, en los primeros días, se observaba que experimentaba prisa cuando se le asignaba poco tiempo para realizar tareas, lo cual ella percibía como una dificultad para manejar la presión del tiempo.

Además, a lo largo de todas las sesiones, era común observar que cuando Irene resolvía correctamente un tipo específico de ejercicios en varias ocasiones, experimentaba *tranquilidad* o se sentía muy bien, como ella misma lo expresaba ("*genial*", en sus palabras). Esto podría atribuirse al hecho de que al ver que sus respuestas son correctas, adquiere confianza en su habilidad para aplicar el algoritmo que ha aprendido, lo que le brinda una sensación de seguridad. Esta suposición se fundamenta en la observación de que es común entre el alumnado con discalculia que tiendan a aferrarse a un algoritmo especifico, incluso cuando existen métodos alternativos que podrían ser más eficientes, como se mencionó en la Sección 2.1.3 y se ejemplificó en la Sesión XVIII al calcular el 20% de 1250.

También es relevante destacar que Irene experimenta estrés cuando se enfrenta a la presencia de muchos números, lo cual es lógico dada la discalculia. La cantidad de cifras puede generarle *estrés*, y de hecho, esta fue una de las razones por las cuales se optó por cambiar del sentido numérico al algebraico.

Resulta notable que, a pesar de enfrentarse a momentos de *estrés*, Irene persiste en sus esfuerzos por resolver los ejercicios de fracciones hasta lograrlo. Este nivel de perseverancia evidencia su resiliencia, como se ilustra en el texto que menciona: "Estrés. Muchos números. No me sale, lo he repetido hasta que me ha salido".

Aunque experimenta ansiedad matemática, demuestra *curiosidad* cuando se le presentan situaciones de la vida real que involucran matemáticas. Esto se refleja en su emoción al resolver los problemas de potencias propuestos en la Sesión V, donde Irene apuntó: "Curiosidad. No sabía cosas de las que salían en los problemas" o en las aplicaciones del número de oro, exploradas en la Sesión XX.

Si se analiza la evolución de las emociones a lo largo del tiempo, se observa un cambio significativo en la tendencia de las impresiones que experimentaba Irene desde el inicio hasta el final del estudio de casos. Inicialmente, era frecuente encontrar emociones como la *prisa*, la *ansiedad* o el *estrés*, pero gradualmente estas fueron dando paso a una sensación creciente de *tranquilidad*, e incluso en ocasiones llegó a sentirse lo que ella cataloga como *genial*. Este cambio de percepción se reflejó claramente en la Sesión XIII, donde se le preguntó si el haber sacado un 7, su máxima nota en la Secundaria, creía que era consecuencia de las sesiones, comentando Irene que lo que le parecía era que estas actividades le habían servido para tener más tranquilidad.

Para concluir el análisis del *Mapa de Humor*, usando los diagramas de Sankey que se muestran en la Ilustración 37 y en la Ilustración 38, se puede visualizar la evolución de sus emociones, dividiendo lo registrado en dos etapas, siendo la primera desde que el inicio del estudio de casos hasta las vacaciones de Navidad y la segunda comprendiendo el periodo que abarca desde el regreso de las vacaciones de Navidad hasta finalizar el estudio de casos. En estas ilustraciones presentadas, se observa de manera evidente cómo evolucionaron las emociones a lo largo del estudio de casos. En la primera etapa, no se aprecia una diferencia destacada entre la cantidad de emociones negativas (*estrés*, *prisa* y *ansiedad*) y positivas (*tranquilidad, curiosidad y genial*). Sin embargo, en la segunda ilustración, se registra solo un total de cuatro emociones negativas, lo que representa una proporción mínima considerando que 35 de las 39 emociones anotadas son positivas, predominando la *tranquilidad*.
Conviene resaltar, además, que en la primera parte ya se había conseguido controlar la ansiedad, habiendo registrado solo una vez este tipo de emoción. En la segunda parte, no solo se eliminó por completo la ansiedad, sino también la emoción *prisa*, quedando solo el *estrés* como la única emoción negativa, aunque con la misma frecuencia absoluta que en la primera parte.

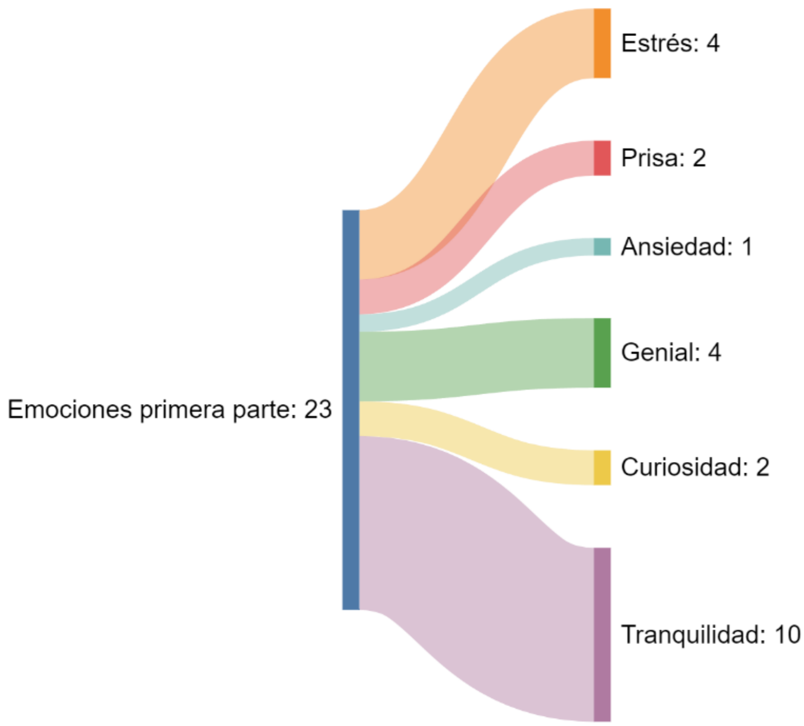


Ilustración 37. Diagrama de Sankey de la primera parte.(https://www.sankeymatic.com/build/)

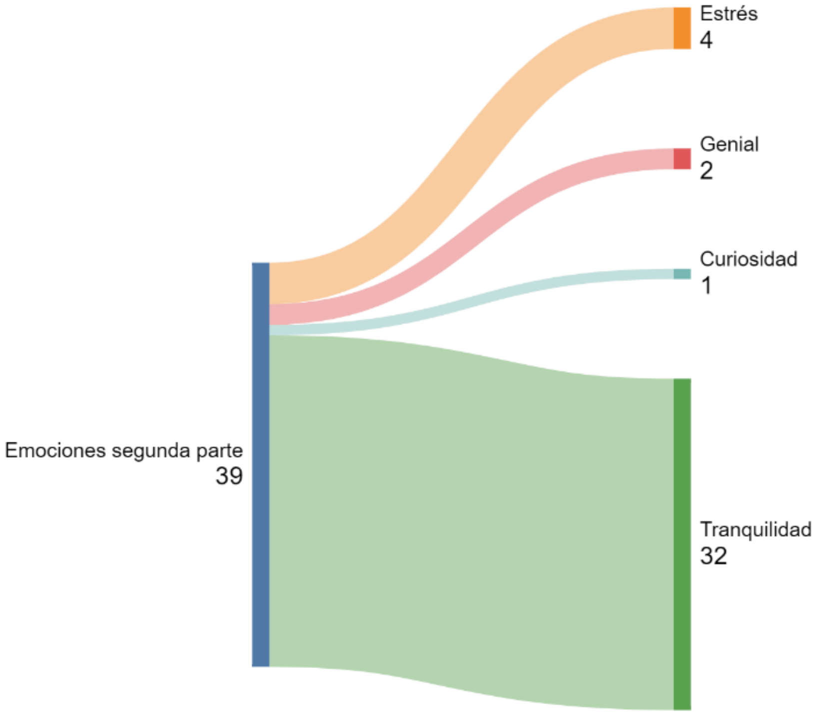


Ilustración 38. Diagrama de Sankey de la segunda parte. (https://www.sankeymatic.com/build/)

En resumen, el *Mapa de Humor* ha sido una herramienta clave para identificar y abordar los desafíos que Irene enfrentaba al lidiar con la presión del tiempo, así como para confirmar posibles dificultades relacionadas con el trabajo numérico y la dependencia en el uso de algoritmos, características comunes entre quienes tienen discalculia. Además, ha permitido observar una evolución positiva con respecto a sus emociones, así como confirmar estas observaciones contrastándolas con su propia opinión.

4.5.2. Análisis del cuestionario de contextos de PISA 2022.

En lo referente al análisis del cuestionario de contextos de PISA, este se va a dividir, a su vez, en varias partes, de manera que nos centraremos en el ambiente que hay en su clase, en el comportamiento de su profesora, en el tipo de tareas que suele encontrarse Irene y en cómo de segura se siente al resolverlos, donde si no vio un determinado concepto se marcará como un "para nada segura", y hasta qué grado está familiarizada con distintos conceptos de matemáticas. Lo cumplimentado por Irene se puede encontrar en el Anexo 6.6. Conviene mencionar que este cuestionario fue realizado antes de la Sesión VIII, por lo que hay que tener en cuenta que Irene aún seguía con su profesora inicial y que no había trabajado aún conceptos relativos al sentido algebraico.

En cuanto al ambiente en el aula, se observa que el comportamiento de la clase es disruptivo, con mucho ruido que interrumpe el trabajo adecuado en clase. La presencia de ruido señala Irene que le molesta a la hora de atender en clase, teniendo repercusiones en su aprendizaje, dificultando así la comprensión de los conceptos matemáticos. Es importante destacar que en el instituto de Irene está prohibido el uso de teléfonos móviles, lo que limita las distracciones causadas por este dispositivo electrónico.

Un aspecto positivo es que Irene comenta que, a pesar del comportamiento disruptivo del grupo, la profesora muestra interés en el aprendizaje de los alumnos y brinda especial atención a aquellos que necesitan apoyo adicional. Sin embargo, a veces la profesora continúa explicando incluso si algunos alumnos no han entendido, lo que puede deberse a la presión de cubrir todo el currículo.

En cuanto a las actitudes de la profesora en las clases de matemáticas, se observa que rara vez prepara actividades personalizadas para alumnos con dificultades de aprendizaje o con altas capacidades. Además, tiende a favorecer el trabajo individual sobre el trabajo en grupos reducidos, aunque Irene sí que comentó que, en ocasiones, permite que los compañeros se ayuden entre sí, como lo indica la afirmación "El profesor os pide dialogar entre vosotros lo que aprendisteis".

Es notable la importancia que la profesora otorga a los problemas, ya que en más de la mitad de las clases propone problemas para resolver. Sin embargo, todos los problemas requieren realizar cálculos, de acuerdo con lo respondido en “El profesor nos pide resolver problemas de matemáticas sin realizar cálculos o cuentas”.

Aunque se valora el hecho de que los alumnos tengan que explicar su proceso para resolver los problemas, lo que permite que la profesora monitoree su progreso, sería beneficioso también incorporar tiempo para reflexionar sobre posibles aplicaciones en la vida cotidiana de los conceptos aprendidos en clase. Esta práctica podría ser especialmente útil para Irene, quien expresó interés en ver las matemáticas como algo cercano y aplicable.

Con respecto al razonamiento matemático, la profesora demuestra un firme compromiso en fomentar el desarrollo de este tipo de pensamiento entre sus alumnos. Frecuentemente, alienta el uso de la lógica para abordar nuevas situaciones y desafíos. Sin embargo, Irene no percibe que se dedique suficiente tiempo a establecer conexiones intramatemáticas, impidiendo que distintos conceptos converjan para formar una comprensión más amplia. Este enfoque se alinea con la perspectiva de Bruner sobre la estructura del currículo matemático en forma de espiral.

Al enfocarse en la dinámica entre la alumna y profesora, se observa que esta última brinda regularmente retroalimentación a Irene sobre los errores que comete en sus ejercicios de matemáticas. Además, califica sus trabajos y ofrece consejos para su mejora, destacando las áreas en las que ha progresado. Es evidente que la profesora muestra un notable nivel de atención hacia Irene, monitorizando su avance de manera frecuente. Este compromiso es digno de reconocimiento, ya que no es común que los profesores adopten esta práctica con sus alumnos.

El siguiente tema por tratar se enfocará en el tipo de tareas típicas encontradas en el ámbito de las matemáticas. Es importante destacar que, dado que se encuentra en segundo de Secundaria, es razonable que algunos contenidos presentes en el cuestionario no hayan sido abordados en ese momento. Por lo tanto, tiene sentido que, por ejemplo, cuando se refiere a “Resolver una ecuación como puede ser 3x+5=17”, la respuesta sea nunca. De hecho, se marcó “rara vez” en “Resolver una ecuación como puede ser $6x^2 + 5 = 29$”, pero posteriormente se aclaró en la siguiente sección de preguntas que esta respuesta se debió a que se pensaba que eran polinomios, tema que se estaba abordando en ese momento, por lo que en este caso también debería ser “nunca”.

Al analizar lo completado, se confirma la observación de que en su clase no se exploran aplicaciones de la vida real en gran medida. Esto se evidencia en preguntas como “Calcular, a partir de un horario de trenes, cuánto tiempo tardaría de llegar de un lugar a otro” o “Calcular el consumo eléctrico de un electrodoméstico (como puede ser un microondas) cada semana”, donde la mayoría de las respuestas son “rara vez” o “nunca”. En contraste, es más frecuente que calculen el perímetro y el área de objetos de forma irregular, aspecto que, si bien es menos común en la vida real que los ejemplos anteriores, sí se aborda con mayor frecuencia en ejercicios de matemáticas.

A continuación, abordaremos el tipo de ejercicios a los que Irene está más habituada a resolver. Según PISA, estos ejercicios se dividen en dos categorías: aquellos que tienen una única solución y se resuelven mediante cálculos de diversos tipos, y aquellos cuya solución depende de las suposiciones que haga el lector, requiriendo una explicación de su razonamiento.

Sin analizar las respuestas proporcionadas, es lógico inferir, basándonos en lo observado hasta el momento, que Irene ha realizado con frecuencia ejercicios del primer tipo y apenas, si es que acaso alguno, ha abordado problemas del segundo tipo.

Efectivamente, se observa que las respuestas proporcionadas sobre la frecuencia con la que Irene ha visto en clase y en los exámenes, tanto este año como en años anteriores, problemas del primer tipo muestran una tendencia hacia "con frecuencia" y "a veces", mientras que para el segundo grupo de problemas, todas las respuestas fueron "nunca". Esta disparidad no es sorprendente, ya que refleja la concepción tradicional de las matemáticas, en la que se espera una única respuesta correcta y donde el error en el resultado final invalida todo el ejercicio, relegando a un segundo plano el razonamiento, que paradójicamente es el aspecto más crucial y del que se puede extraer más información.

Esta observación está en consonancia con la sensación de tranquilidad que experimenta Irene cuando resuelve varios ejercicios seguidos con éxito, como se pudo observar en el *Mapa de Humor* y en las diversas sesiones, como la Sesión IV. En esos momentos, ella confía en que tiene un algoritmo que funciona sin necesidad de reflexionar sobre por qué realiza cada paso.

En la Sesión VII, se llegó a la conclusión de que la afirmación de Irene de que “nadie se siente seguro al hablar de matemáticas” podría indicar una falta de confianza en sí misma en relación con esta materia. Esta percepción se ve respaldada por las respuestas proporcionadas en la sección del cuestionario que aborda su nivel de seguridad al realizar diversas actividades en matemáticas. En casi todas las actividades, Irene seleccionó las opciones "para nada segura" o "no muy segura", y en aquellas en las que no seleccionó estas opciones, optó por la alternativa "con confianza". Es decir, nunca marcó ninguna actividad en la casilla de "muy segura".

No resulta sorprendente que las actividades de índole más geométrica hayan sido las que Irene marcó con la opción "con confianza", ya que no están estrechamente relacionadas con los números y pueden ser visualizadas fácilmente. Tampoco es sorprendente que muestre confianza en el uso de programas matemáticos como GeoGebra, dado que es un programa muy visual y de uso intuitivo.

Finalmente, se comentará el análisis de la familiaridad que tiene Irene con distintos conceptos matemáticos. En primer lugar, aquellos conceptos que nunca ha estudiado o cuyos nombres no son comunes como "fracción declarativa" o "figura congruente", los ha marcado con un "nunca". Sin embargo, conceptos ampliamente utilizados en la vida cotidiana, como la probabilidad, los marca como "a veces".

Por otro lado, todos los conceptos matemáticos que Irene ha estudiado y utilizado en algún momento pasado, los califica como "los escucho a menudo", excepto la raíz cuadrada. Este punto es significativo y refuerza la efectividad del modelo CPA, ya que la raíz cuadrada fue uno de los conceptos trabajados en las sesiones, particularmente en la Sesión V, donde se aplicaron las tres etapas del método, incluyendo dos de las tres fases nuevas introducidas en el modelo se Sharma: el nivel aplicativo al final y el nivel comunicativo a lo largo de la sesión. Este dominio del concepto también se evidencia en la Sesión XXI, donde Irene afirma que la raíz cuadrada de $4a^2$ es $2a$ porque $(2a)^2 = 4a^2$.

5. Conclusiones.

Las conclusiones de este trabajo se centrarán en responder a las preguntas de investigación planteadas en la Sección 4.2 de esta memoria. En primer lugar, se abordarán estas preguntas para luego reflexionar sobre las conclusiones derivadas de los resultados del análisis de datos y la evolución en la ansiedad matemática de Irene durante el estudio de casos.

Además, en este capítulo se llevará a cabo una comparación con otros estudios realizados en circunstancias similares a las del presente estudio de caso. Se citarán algunas limitaciones de la investigación, donde nos basaremos en los cuatro criterios de Guba expuestos en la Sección 3.2.2, y se plantearán, finalmente, posibles futuras líneas de actuación.

5.1. Respuestas a las preguntas de investigación.

En este estudio se fijaron cuatro preguntas de investigación, como se detalla en la Sección 4.2. Para contestar a estas cuestiones, nos basaremos en la interpretación de los eventos que tuvieron lugar a lo largo de todo el estudio de casos, así como en los comentarios proporcionados por Irene. Por otro lado, como es un estudio cualitativo y, al ser en concreto un estudio de caso intrínseco donde solo hay un único caso, no se busca producir resultados generalizables, sino que solo se busca responder a las preguntas propuestas, sin menoscabo de la potencial transferibilidad a otros contextos y realidades que pueda asociarse a los resultados por parte de quien acceda a ellos.

En primer lugar, se buscaba conocer el momento en el que Irene comenzó a experimentar ansiedad matemática, ya que este momento marca el inicio de la disminución en su rendimiento matemático. Según los comentarios de Irene durante la Sesión IV, este momento coincidió con su transición de Primaria a Secundaria. Irene mencionó que había aspectos que no comprendía bien debido a la rapidez del ritmo en Secundaria, lo que indicaba un cambio significativo en su experiencia educativa. Además, este declive en el rendimiento matemático se confirmó indirectamente en la Sesión XIII, cuando Irene mencionó que la nota de siete que obtuvo era la mejor que había tenido desde Primaria.

Para abordar la segunda pregunta de investigación, es evidente que Irene experimentaba una mayor ansiedad matemática en una situación específica, cuando se le imponía un límite de tiempo para completar una tarea, como se observó durante la Sesión III, donde mostraba claros signos de ansiedad al escuchar el límite de tiempo. A lo largo del estudio de casos, se observó cómo este comportamiento ante este estímulo se reducía gradualmente, aunque no desaparecía por completo, transformándose en estrés.

Con respecto a las causas de la ansiedad matemática, a lo largo del estudio de casos se identificaron diversos motivos con diferentes orígenes. En primer lugar, se observaron causas de tipo personal, como el problema del autoconcepto del que hablamos anteriormente. Un ejemplo ilustrativo de esto ocurrió durante la realización del *puzle* de la notación científica de la Sesión IV, donde Irene inicialmente solicitaba corrección para cada triángulo del *puzle*. Sin embargo, al ver que sus respuestas estaban correctas, se incrementaba gradualmente el número de triángulos que corregía a la vez, lo que finalmente le permitió completar todos los triángulos de una sola vez. Este problema se superaba cuando Irene realizaba varios ejercicios del mismo tipo de manera correcta, lo que le otorgaba confianza en sus habilidades.

Otro tipo de causas estaban relacionadas con factores ambientales, como los métodos de enseñanza utilizados por la profesora y la presión del tiempo. Para abordar el primer motivo, se le proporcionaron a Irene diferentes técnicas y tareas relacionadas con el contenido estudiado para que ganara confianza. Esta situación mejoró cuando, tras las vacaciones de Navidad, Irene tuvo un cambio de profesor. Respecto al segundo motivo, la presión del tiempo, se trabajó a través de diferentes ejercicios donde se estableció un límite de tiempo, lo que ayudó a reducir gradualmente la presión que el tiempo le generaba, aunque no desapareció por completo.

La última causa estaba relacionada con factores numéricos, en gran parte debido a la discalculia que sufre Irene. Esto se manifestaba en ejercicios con muchas cifras o cuando el resultado final no coincidía con lo esperado, lo que aumentaba su ansiedad. Para abordar este problema, se alentaba a Irene a que revisara por sí misma los errores y se le pedía que explicara su procedimiento, lo que en la mayoría de los casos le permitía identificar sus errores por sí misma, y en caso contrario, se le proporcionaban algunas indicaciones para ayudarla a comprenderlos.

La última pregunta relacionada con el modelo CPA se responde de manera positiva. En la dimensión afectiva, Irene afirmaba sentirse más tranquila, y se observó una mejora en sus calificaciones desde que comenzamos a aplicar este enfoque. Esto se corroboró mediante los diagramas de Sankey que mostraban la evolución del *Mapa de Humor* en las dos etapas (Ilustración 37 e Ilustración 38).

Centrándonos en la comprensión de los distintos conceptos, el cuestionario de contextos proporciona evidencia de los beneficios derivados de la aplicación del modelo CPA en el concepto de la raíz cuadrada. Esta mejora también se evidenció en las sesiones sobre la ecuación de segundo grado, donde Irene recordaba perfectamente el procedimiento necesario para factorizar y completar cuadrados en un polinomio mónico, métodos que fueron abordados a través de las tres etapas del modelo CPA.

5.2. Resultados del estudio de casos.

Una vez que se han respondido a las distintas preguntas de investigación que se han formulado, se pueden extraer, basándose en los datos analizados y en el desarrollo del estudio de casos, las siguientes conclusiones:

- El nivel de ansiedad matemática de Irene se redujo una cantidad considerable, visto ya a lo largo de las sesiones. Este cambio fue evidente tanto por la percepción de Irene misma como por los comentarios de sus padres al finalizar el estudio de casos, así como por lo registrado en el *Mapa de Humor*.

- La aplicación del modelo CPA a los contenidos del curso tuvo un impacto significativo en la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de Irene. Esto se reflejó en las respuestas proporcionadas en el cuestionario de contextos de PISA 2022.
- La verbalización por parte de Irene del procedimiento utilizado en un ejercicio determinado fue un recurso clave para evaluar su comprensión de los contenidos y para que ella misma identificara posibles errores.

5.3. Comparación con otros estudios.

Conviene comenzar observando que este estudio es único en sí mismo porque como todo estudio de casos intrínseco se centra en las peculiaridades del caso, siendo en este caso las de Irene (la discalculia, la dislexia o los factores ambientales que afectaban a su ansiedad matemática). Pese a esto, se pueden encontrar similitudes entre el trabajo que se ha desarrollado y los realizados por algunos autores, como puede ser el estudio de casos realizado por de Pedro (2021), donde a partir del modelo CPA lograba que una alumna con discalculia adquiriese distintos conceptos matemáticos.

Por otro lado, en Rojas Suarez et al. (2011) se concluía que el uso de distintos materiales manipulativos y representaciones pictóricas implicaban una mejora en el proceso del aprendizaje de alumnos con discalculia, aspecto que se puede ver en esta investigación.

5.4. Limitaciones del estudio.

Al hablar de las posibles limitaciones que tiene el estudio es obligatorio comenzar observando que este trabajo es un estudio de casos intrínseco, de manera que nos hemos centrado en una única persona que tiene características muy peculiares, adaptando las distintas sesiones a las características de Irene. Este hecho hace que sea difícil que la investigación sea generalizable, aunque es precisamente esta particularidad lo que hace interesante a la intervención.

Sin embargo, a pesar de esta limitación, las diversas actividades realizadas a lo largo del estudio pueden ser fácilmente implementadas con otros grupos de estudiantes. Las modificaciones realizadas en las sesiones debido a la dislexia de Irene, como el uso de la fuente Arial o un tamaño de letra de 14 puntos, no impiden el aprendizaje de otros estudiantes. Por lo tanto, los resultados obtenidos en este estudio pueden ser generalizables a otros contextos educativos, lo que garantiza la fiabilidad de las conclusiones obtenidas.

Por otro lado, al impartir diferentes contenidos del currículo de segundo de Secundaria, es posible obtener resultados similares si se aplica el modelo CPA para enseñar los conceptos abordados a lo largo de la investigación a otros estudiantes. Esto aseguraría la transferibilidad de los hallazgos.

Por último, al ser este un estudio cualitativo, existe la posibilidad de que las conclusiones estén influenciadas en gran parte por la subjetividad del propio investigador, lo que podría afectar la confirmabilidad y la credibilidad de los resultados según los cuatro criterios de Guba. Para mitigar este riesgo, se tomaron medidas para reducir al máximo la subjetividad. Se incluyó la retroalimentación ocasional de Irene sobre si percibía los cambios observados y, finalmente, se consultó a los padres, quienes confirmaron la evolución positiva observada. Esto contribuyó a aumentar la confirmabilidad y la credibilidad de las conclusiones obtenidas.

5.5. Futuras líneas de actuación.

La investigación que hemos realizado en este trabajo trata distintos temas en los que se puede trabajar en distintas investigaciones, como pueden ser las siguientes:

- Se ha comprobado que la utilización del modelo CPA produjo unos efectos notorios en la comprensión de conceptos matemáticos y en la reducción de la ansiedad matemática en el caso de Irene, por lo que sería relevante investigar cómo este enfoque podría beneficiar a un grupo más amplio de estudiantes en un entorno educativo convencional.
- Pese a que la dislexia ya es un trastorno del aprendizaje muy conocido por parte de los profesores, una gran parte de este mismo sector desconoce la presencia de la discalculia y de la ansiedad matemática, por lo que sería interesante formar al profesorado de matemáticas para que sea consciente de la existencia de estos dos trastornos y conozcan técnicas para afrontarlos de la mejor manera posible. Se abre en este caso una línea de investigación centrada en diagnosticar el conocimiento del profesorado sobre estas cuestiones.

Bibliografía

Albelbisi, N. A., Al-Adwan, A. S., Habibi, A., y Rasoold, S. (2022). The relationship between students' attitudes toward online homework and mathematics anxiety. *International journal of mathematical education in science and technology*, *55*(3), 1-19. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2023769.

American Psychiatric Association (APA) (2000). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (4th edn.) (DSM-IV). APA.

American Psychiatric Association (APA) (2013). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (5th edn.) (DSM-V). APA.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review,84*(2), 191-215. https://doi.org/10.1037/0033-295X.84.2.191.

Beilock, S. L., y Willingham, D. T. (2014). Math anxiety: Can teachers help students reduce It? Ask the cognitive scientist. *American Educator, 38(2),* 28-32. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1043398.pdf.

Beltrán-Pellicer, P., y Cárdenas Lizarazo, J. A. (2016). Incorporando el plano afectivo en el aula de Matemáticas. Actas del XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, pp. 264-272. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales.

Benner, D.G. (Ed.). (1985). *Baker encyclopedia of psychology.* Baker Book House.

Bisquerra Alzina, R. (2005): La educación emocional en la formación del profesorado, *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 19(3), 95-114. https://www.redalyc.org/pdf/274/27411927006.pdf

Brewster, B. J., y Miller, T. (2022). Expressive writing interventions for pre-service teachers' mathematics anxiety. *International electronic journal of mathematics education*, *17*(4), 1-13. https://doi.org/10.29333/iejme/12298.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Buxton, L. (1981). *Do you panic about maths? Coping with maths anxiety*. Heinemann Educational Books.

Byrd, P. (1982). A descriptive study of mathematics anxiety: its nature and antecedents. Un- published doctoral dissertation, Indiana University,

Chiu, L., y Henry, L. (1990). Development and validation of the Mathematics Anxiety Scale for Children. *Measurement and Valuation in Counseling and Development*, 23(3), 121–127.

Colby, K.M. (1973). Simulations of belief systems. En R.C. Schank, y K.M. Colby (Eds.), *Computer models of thought and language* (pp. 251-286). W.H. Freeman.

de la Rosa, A. B. (2020). https://www.magisnet.com/2020/03/la-discalculia-gran-desconocida-entre-el-publico-en-general/

de Pedro, J. J. S. E. (2021). *Reeducación Matemática y Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas: un estudio de caso intrínseco*. Universidad de Valladolid.

Decreto 39/2022 de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. (2022).

Decreto 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. (2022).

Department for Education and Science (DfES) (2001). *Guidance to Support Pupils with Dyslexia and Dyscalculia.* DfES Publications.

Deringöl, Y. (2022). Parents' Mathematics Anxiety and Their Contribution to Mathematics Education. *International Journal of Psychology and Educational Studies*, *9*(1), 12-21. https://doi.org/10.52380/ijpes.2022.9.1.374

Dowker, A., Sarkar, A., y Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in psychology*, *7*(508), 1-16. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508.

Dreger, R. M., y Aiken Jr, L. R. (1957). The identification of number anxiety in a college population. *Journal of Educational psychology*, *48*(6), 344-351. https://doi.org/10.1037/h0045894.

Enamul Hoque, M. (2016). Three Domains of Learning: Cognitive, Affective and Psychomotor. *The Journal of EFL Education and Research*, *2*(2), 45-52.

Fennema, E., y Sherman, J.A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales; instruments designed to measure attitudes towards the learning of mathematics by females and males. *J. Res. Math. Educ.* *7*(5), 324-326. https://doi.org/10.2307/748467 .

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Grootenboer, P., y Marshman, M. (2016). *Mathematics, affect and learning: Middle school students' beliefs and attitudes about mathematics education*. Springer.

Guba, E. (1981). Criteria for assessing the trust worthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology Journal*, *29*(2), 75-91. https://doi.org/10.1007/BF02766777.

Hannesdóttir, D. K., Doxie, J., Bell, M. A., Ollendick, T. H., y Wolfe, C. D. (2010). A Longitudinal Study of Emotion Regulation and Anxiety in Middle Childhood: Associations with Frontal EEG Asymmetry in Early Childhood. *Developmental psychobiology*, *52*(2), 197-204. https://doi.org/10.1002/dev.20425.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 33–46. https://doi.org/10.2307/749455.

Hornigold, J. (2017). *Understanding learning difficulties in maths: Dyscalculia, dyslexia or dyspraxia?* Open University Press.

Johns, M., Schmader, T., y Martens, A. (2005). Knowing is half the battle: teaching stereotype threat as a means of improving women's math performance. *Psychol.Sci.* *16*(3), 175–179. https://doi.org/10.1111/j.0956-7976.2005.00799.x.

Jorrín, I.M. (s.f). Hopscotch Model. https://hopscotchmodel.com/pasos/.

Karadağ, K., y Engin, Ç. (2021). Multi-group análisis of the effects of coping with mathematics on math anxiety and achievement. *Research in Pedagogy*, *11*(2), 340-350. http://doi.org/10.5937/IstrPed2102340K.

Komunikat. (2018). *Dislexia. Magisterio.* https://www.logopedia-barcelona.com/que-es-la-dislexia/

Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia, *Journal of Learning Disabilities*, *7*(3); 164-177. https://doi.org/10.1177/002221947400700309.

Krathwohl, D.R., Bloom, B.S., y Masia, B.B. (1964). *Taxonomy of educational objectives: Handbook* 2. *Affective domain.* David McKay.

Kvedere, L. (2014). Mathematics self-efficacy, self-concept and anxiety among 9th grade students in Latvia. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *116*, 2687-2690, https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.636.

Mas, M. Y. L., y Arroyo, S. H. (2022). La educación emocional en la legislación educativa. Análisis a partir de los Decretos de contenidos mínimos emanados de la LOMLOE. *Human Review*, *13*(2), 1-17. https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4023.

Marbán, J. M., Palacios, A., y Maroto, A. (2021). Enjoyment of teaching mathematics among pre-service teachers. *Mathematics education research journal*, *33*(3), 613-629. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00341-y.

March, J. (1997). Multidimensional Anxiety Scale for Children. *Multi-Health Systems Inc*.

Martínez, R. M., y Varela, K. B. (2022). Estrategias pedagógicas diversificadas. Desarrollo de habilidades matemáticas en ejes números y operaciones. *Opción*, *38*(99), 170-191. https://doi.org/10.5281/zenodo.7502694.

Maxwell, J.A. (2008). Designing a qualitative study. En L.Bickman, y D.J. Rog (Eds.), *The SAGE Handbook of Applied Social Science Research Methods 2* (pp. 214-253). Sage.

Mayer, J.D., y Salovey, P. (1993): The intelligence of Emotional intelligence, *Intelligence*, *17*(4), 433-442. https://doi.org/10.1016/0160-2896(93)90010-3.

McLeod, D.B. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(2), 134-141. https://doi.org/10.2307/749407.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). Macmillan Library Reference.

McLeod, D.B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 637-647. https://doi.org/10.2307/749576.

McLeod, D. B., y Adams, V. M. (Eds.). (2012). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (1989.ª ed.). Springer.

Ministerio de Educación, F. P. Y. D. (2023). *PISA 2022 Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes Informe español*.

OECD. (2023). *PISA 2022 Results. The State of Learning and Equity in Education Publication Volume I*.

Öztop, F. (2018). *Examination of mathematics anxiety of the parent of primary school students according to various factors* [Master Thesis]. Kırıkkale University, Turkey.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F., y Cano, F. (2009). El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *4*(1), 23-35. http://hdl.handle.net/10481/3510.

Polypad – Manipulantes virtuales –. (s. f.). Mathigon. Recuperado el 2 de febrero de 2024, de https://es.mathigon.org/polypad.

Price, G., y Ansari, D. (2013). Dyscalculia: characteristics, causes and treatments, *Numeracy*, *6*(1), 1-16. http://doi.org/10.5038/1936-4660.6.1.2.

Pringle Morgan, W. (1896). A case of congenital Word blindness, *British Medical Journal, 2*(1871):1378. https://doi.org/10.1136/bmj.2.1871.1378.

Quintero, M., Hasty, L., Li, T., Song, S., y Wang, Z. (2022). A multidimensional examination of math anxiety and engagement on math achievement. *The British journal of educational psychology*, *92*(3), 955-973. https://doi.org/10.1111/bjep.12482.

Rahe, M., y Quaiser-Pohl, C. (2023). Can (perceived) mental-rotation performance mediate gender differences in math anxiety in adolescents and young adults? *Mathematics education research journal*, *35*(1), 255-279. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00387-6.

Reid, G. (2008). *Dyslexia: A practitiones's handbook* (4th edn.). Wiley-Blackwell.

Reyes, L. H. (1984). Affective Variables and Mathematics Education. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 558-581. https://doi.org/10.1086/461384.

Richardson, F. C., y Suinn, R.M (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale. *Journal of Counseling Psychology*, *19*(6), 551-554, https://doi.org/10.1037/h0033456.

Richland, L. E., Naslund-Hadley, E., Alonzo, H., Lyons, E., y Vollman, E. (2020). Teacher and Students' Mathematics Anxiety and Achievement in a Low-Income National Context. *Mind, Brain and Education*, *14*(4). https://doi.org/10.1111/mbe.12253.

Rojas Suarez, A. C., Contreras Hernández, A. P., y Arévalo Duarte, M. A. (2011). Intervención didáctica para promover el aprendizaje de las matemáticas, en niños con discalculia. *Respuestas*, *16*(2), 5-13. https://doi.org/10.22463/0122820x.359.

Rose, J. (2009). *Identifying and Teaching Children and Young People with Dyslexia and Literacy Difficulties: An Independient Report* (The Rose Review).

Rounds, J. B., y Hendel, D. D. (1980). Measurement and Dimensionality of Mathematics Anxiety. *Journal of counseling psychology*, *27*(2), 138-149. https://doi.org/10.1037/0022-0167.27.2.138.

Sammallahti, E., Finell, J., Jonsson, B., y Korhonen, J. (2023). A Meta-Analysis of Math Anxiety Interventions. *Journal of Numerical Cognition*, *9*(2), 346-362. https://doi.org/10.5964/jnc.8401.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Schlöglmann, W. (2010). Categories of affect – Some remarks. En V. Durand- Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME (pp. 164–173). Institut National de Recherche Pédagogique.

Sharma, M. C. (1986). Dyscalculia and other learning problems in arithmetic: a historical perspective, *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(2), 7-21.

Spielberger, C.D. (1972). Conceptual and methodological issues in anxiety research. En C.D. Spielberger (Ed.), *Anxiety: Current trends in theory and research* (Vol. 2, pp. 481-493). Academic Press.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* Nueva York: Teachers College Press.

Tejedor, B., Santos, M. A., García-Orza, J., Carratalà, P., y Navas, M. (2009). Variables explicativas de la ansiedad frente a las matemáticas: un estudio de una muestra de 6º de primaria. *Anuario de Psicología*, *40*(3), 345-355. https://doi.org/10.1344/%25x .

Tobias, S. (1978). *Overcoming Math Anxiety*. WW Norton.

Uddin, M. S. (2022). Exploring the effect of student-teaching on elementary student-teachers' math anxiety. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *17*(4). https://doi.org/10.29333/iejme/12316

Universidad de Valladolid. (s.f.). Competencias del Máster en Profesor de Educación Secundaria. Recuperado de: https://www.uva.es/export/sites/uva/2.docencia/2.02.mastersoficiales/2.02.02.normativa/_documentos/COMPETENCIAS-MASTER-EN-PROFESOR-DE-EDUCACION-SECUNDARIA.pdf

Wang, Z., Hart, S.A., Kovas, Y., Lukovski, S., Soden, B., Thompson, L. A., et al.(2014). Who is afraid of math? Two sources of genetic variance for mathematical anxiety. *J.ChildPsychol.Psychiatry 55*(9), 1056–1064. https://doi.org/10.1111/jcpp.12224.

Weiner, B. (1979). A theory of motivation for some classroom experiences. *Journal of Educational Psychology 71* (1), 3-25. https://doi.org/10.1037/0022-0663.71.1.3.

6. Anexos.

En esta sección se recogerán los distintos contenidos que se han ido recopilando a lo largo del estudio de casos y que agruparemos aquí para facilitar la lectura y que se eche un vistazo si el lector así lo desea.

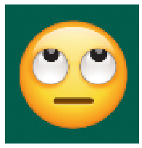
6.1. Mapa de Humor.

El *Mapa de Humor* que planteamos Irene y yo, el cual cada vez que sentía una emoción tenía que dibujar el emoticono asociado es el siguiente:

Ansiedad 

Prisa 

Diversión 

Estrés 

Genial 

6.2. *Memory* de fracciones.

La actividad pensada en la segunda sesión del estudio de casos se realizó a partir de la siguiente plantilla:

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{12}$$

$$\frac{2}{4}$$

$$\frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\frac{6}{10}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

$$\frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$$

$$1$$

$$\frac{2}{12}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{5}$$

$$1$$

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

FRACCIONA

TU MEMORIA

$$\frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{3}{10}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$$

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

FRACCIONA
TU MEMORIA

6.3. *Puzle* notación científica.

$3{,}75 \times 10^8$

$5{,}05 \times 10^{-4}$

375000000

$3{,}45 \times 10^1$

34,5

46,35

$4{,}635 \times 10^2$

$4{,}635 \times 10^1$

30000

3×10^4

$3{,}7 \times 10^5$

0,000505

68300

$1{,}7 \times 10^2$

$6{,}83 \times 10^4$

0,0000683

$4{,}35 \times 10^2$

170

460

435

463,5

0,0000045

0,017

$4{,}5 \times 10^{-6}$

$4{,}635 \times 10^{-3}$

370000

0,0003

$1{,}7 \times 10^0$

3×10^{-4}

$6{,}3 \times 10^2$

$6{,}83 \times 10^{-5}$

$9{,}5 \times 10^{0}$

$1{,}7 \times 10^{-2}$

9,5

0,0079

$5{,}674 \times 10^{-1}$

0,4635

0,17

0,004635

$4{,}635 \times 10^{-1}$

0,0017

$1{,}7 \times 10^{-3}$

67800

0,02

630

$6{,}78 \times 10^{4}$

1,7

$4{,}6 \times 10^{2}$

0,5674

$7{,}9 \times 10^{-3}$

5093000

$5{,}093 \times 10^{6}$

$4{,}1 \times 10^{4}$

$1{,}7 \times 10^{-1}$

41000

30100

$3{,}01 \times 10^{4}$

56

2×10^{-2}

$5{,}6 \times 10^{1}$

6.4. Problemas de potencias.

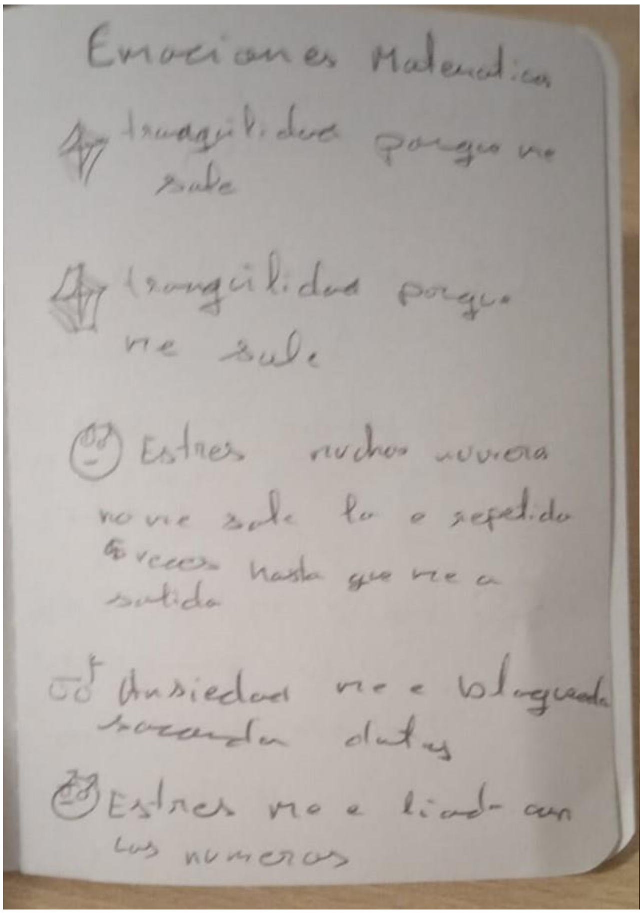
EJERCICIOS POTENCIAS

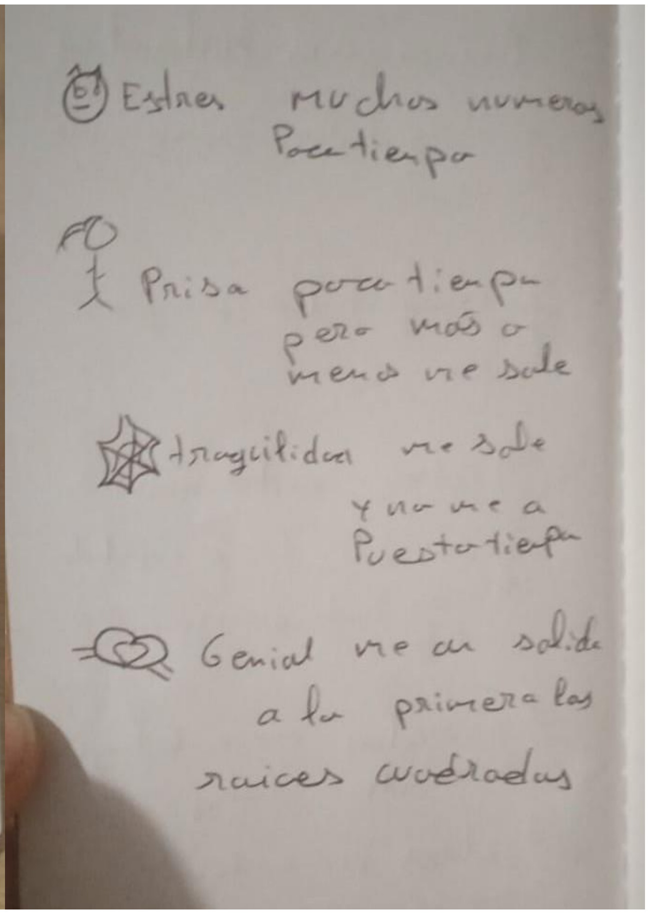
1) **Historia del Ajedrez:**
   Cuenta la leyenda que un súbdito enseñó a jugar al ajedrez al príncipe persa Sisso, y le gustó tanto que prometió regalarle lo que pidiera. El súbdito, muy inteligente por su parte, le dijo que quería un grano de trigo por la primera casilla de trigo, dos por la segunda, el doble por la tercera y así sucesivamente hasta llegar a la última. Sisso le pareció bien la idea, pero cuando hizo el cálculo se dio cuenta que no había tanto trigo en todo el reino.
   - ¿Cuánto trigo le dan en la tercera casilla? ¿Y en la cuarta? ¿Y en la quinta? ¿Y por la suma de las tres primeras casillas?
   - ¿Y en la casilla 10? ¿Y en la casilla 64 (usa la calculadora)?
2) La huerta de mi tío mide 3^8 metros cuadrados y la de mi padre 3^4 metros cuadrados. Están discutiendo porque mi tío dice que su huerta es el doble que la de mi padre y mi padre dice que es más que el doble. ¿Quién tiene razón? ¿Cuánto es más grande la huerta de mi tío que la de mi padre?
3) La masa del Sol es de 2×10^{30} kilogramos, mientras que la de Jupiter es de 2×10^{27} kilos. ¿Cuántas veces es mayor la masa del Sol que la de Jupiter?

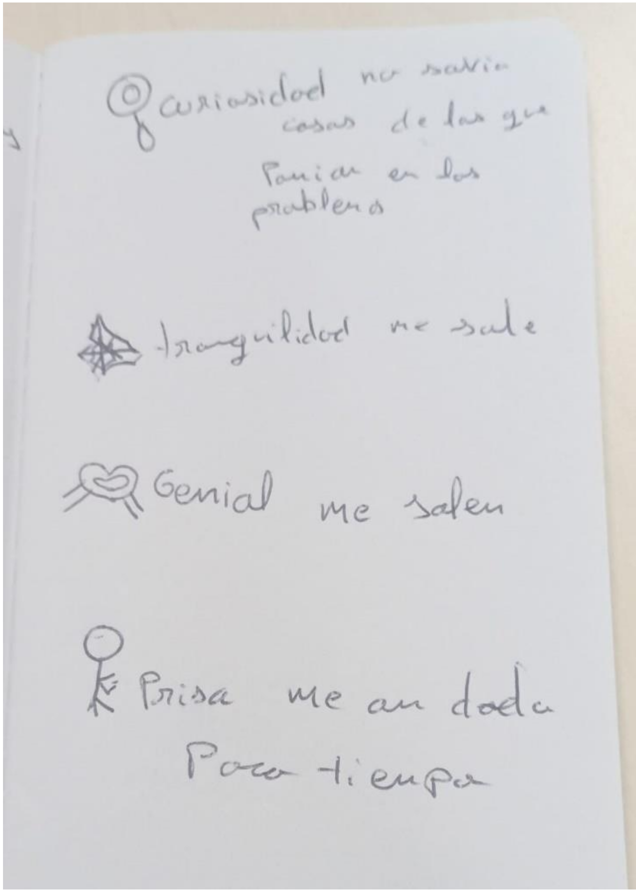
6.5. *Mapa de Humor* realizado por Irene.

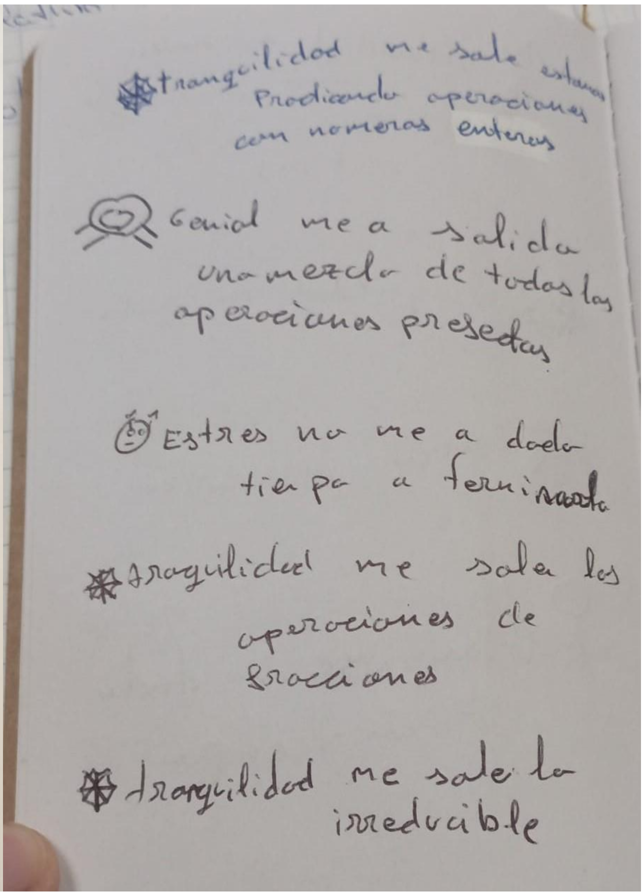
Aquí se encontrarán distintas fotos que se han hecho de la libreta donde Irene recogía las emociones que iba sintiendo con respecto a las matemáticas, con una breve explicación. Para favorecer el análisis mediante diagramas de Sankey, como podemos ver en la Sección 4.5.1, vamos a dividirlo en dos partes donde la primera abarcará lo comprendido hasta navidades y la segunda desde la vuelta de navidades hasta el final.

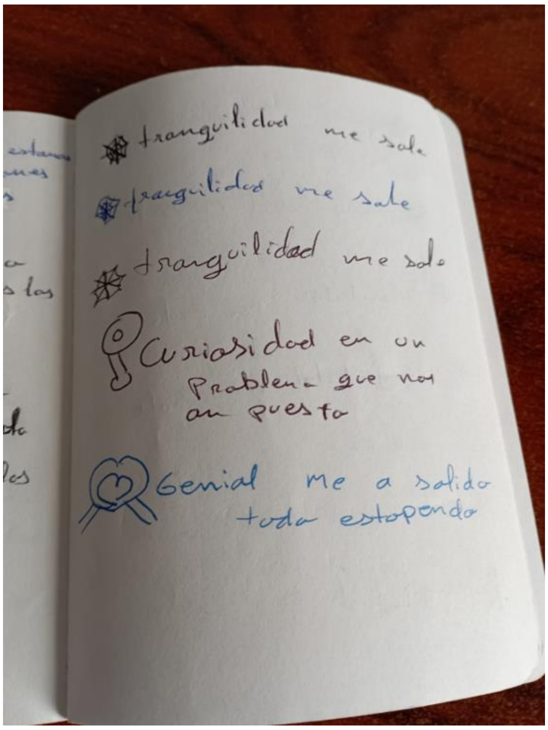
1. **Primera Parte**


Emociones Matematicas
tranquilidad porque me sale
tranquilidad porque me sale
Estres muchos numera no me sale la e repetido 6 veces hasta que me a salido
Ansiedad me e bloqueado sacando datos
Estres me e liado con los numeros

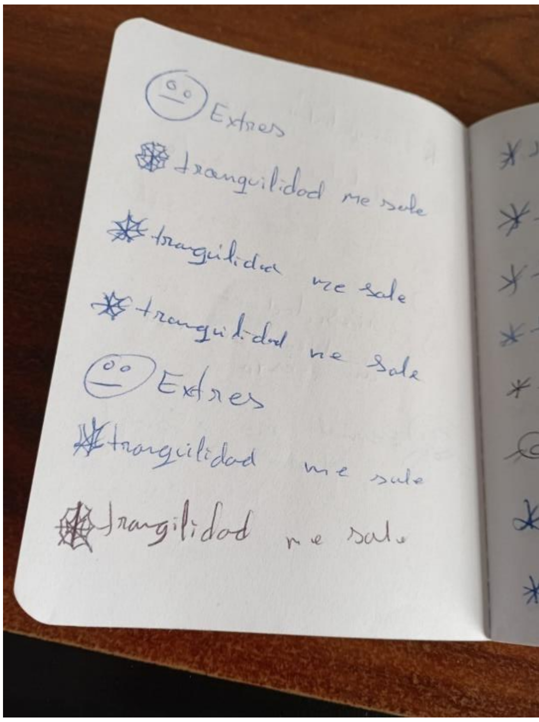

Estres muchos numeros Poco tiempo
Prisa poco tiempo pero más o menos me sale
tranquilidad me sale y no me a Puesto tiempo
Genial me a salido a la primera las raices cuadradas

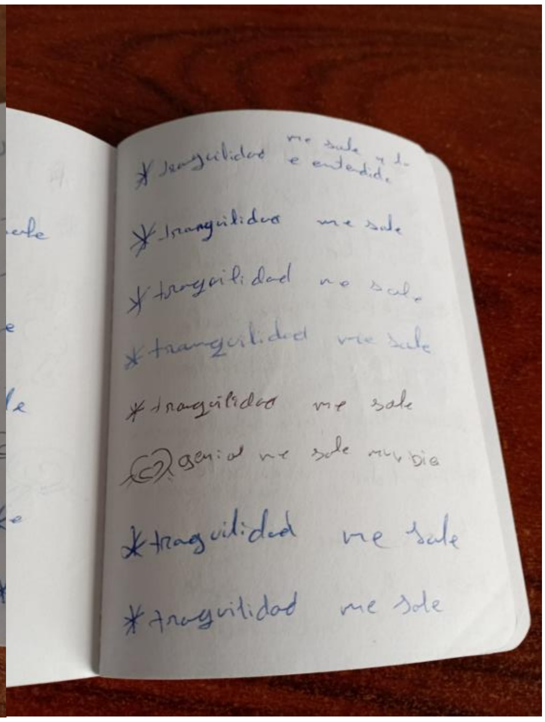

curiosidad no savia cosas de las que Ponian en los problemas
tranquilidad me sale
Genial me salen
Prisa me an dado Poco tiempo

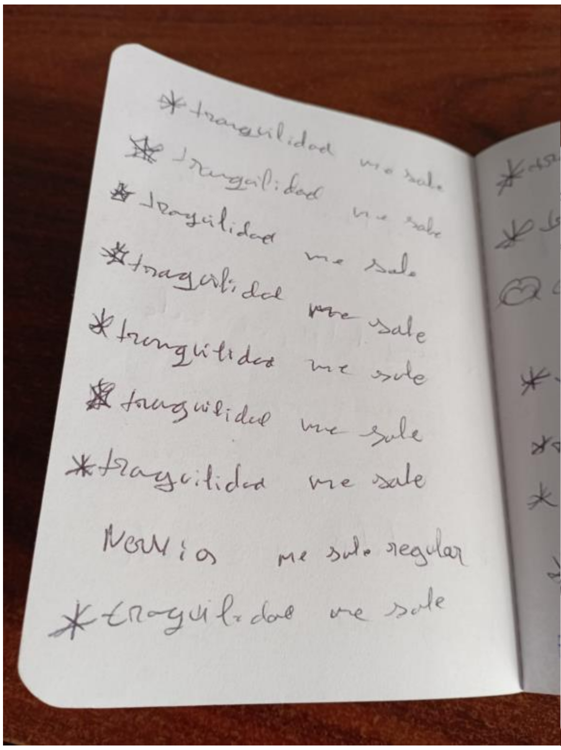

tranquilidad me sale estamos Practicando operaciones con numeros enteros
Genial me a salido una mezcla de todas las operaciones pasadas
Estres no me a dado tiempo a terminarlo
tranquilidad me sale las operaciones de fracciones
tranquilidad me sale la irreducible

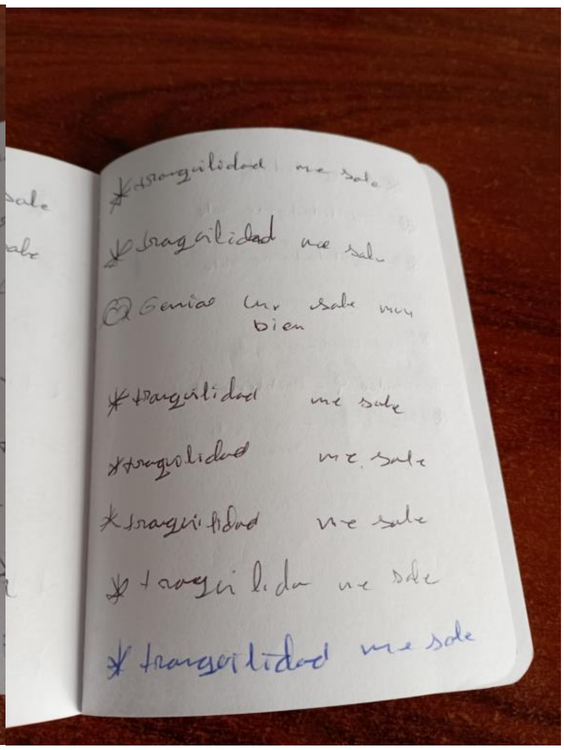


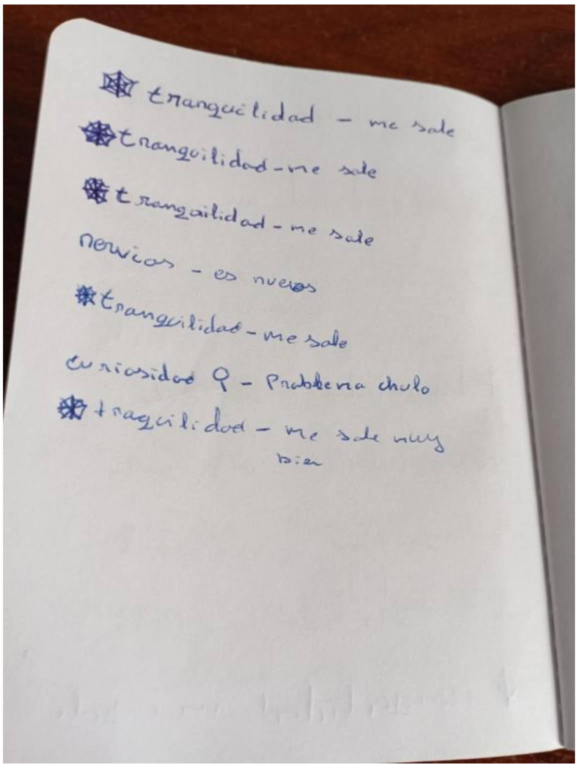
2. **Segunda parte**



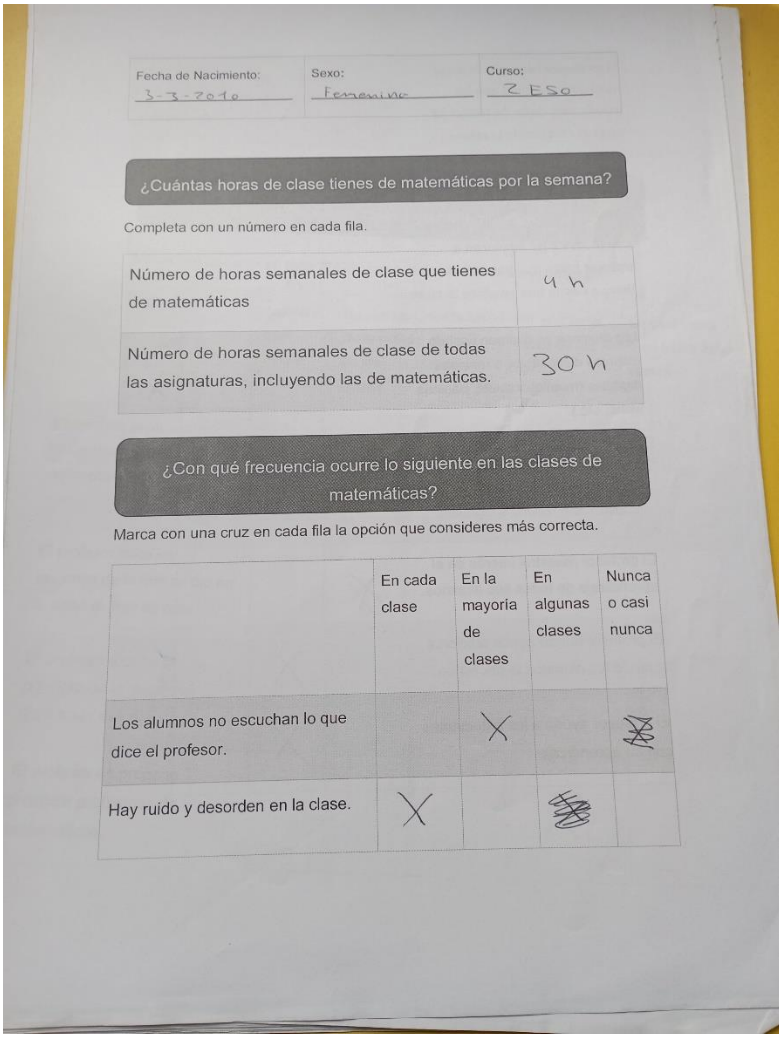



tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
Nervios me sale regular
tranquilidad me sale


tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
Genial me sale muy bien
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale
tranquilidad me sale


tranquilidad - me sale
tranquilidad - me sale
tranquilidad - me sale
nervios - es nuevos
tranquilidad - me sale
curiosidad ? - Problema chulo
tranquilidad - me sale muy bien

6.6. Cuestionario de contextos PISA.



Fecha de Nacimiento:	Sexo:	Curso:
3-3-2010	Femenino	2 ESO

¿Cuántas horas de clase tienes de matemáticas por la semana?

Completa con un número en cada fila.

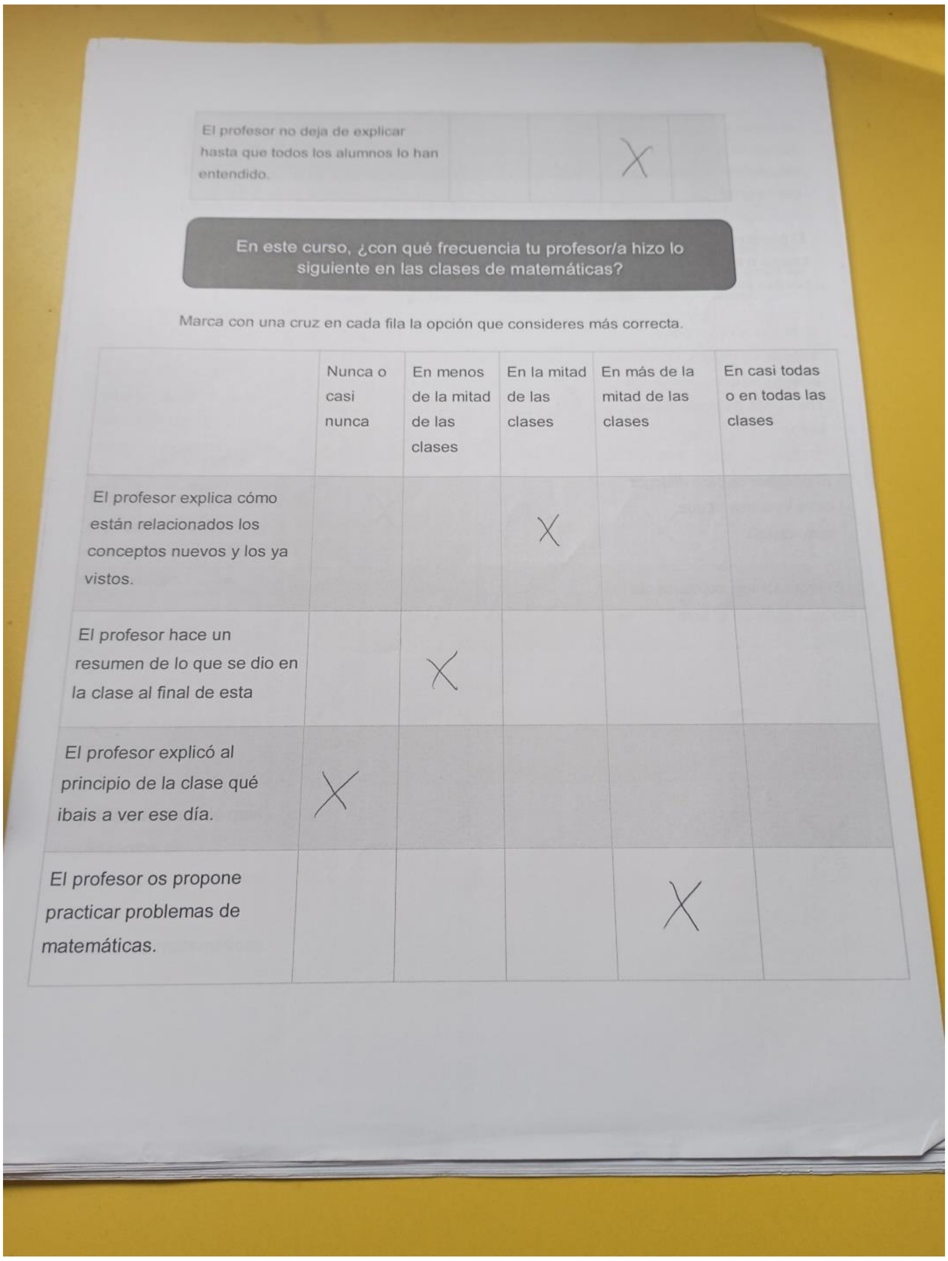
Número de horas semanales de clase que tienes de matemáticas	4 h
Número de horas semanales de clase de todas las asignaturas, incluyendo las de matemáticas.	30 h

¿Con qué frecuencia ocurre lo siguiente en las clases de matemáticas?

Marca con una cruz en cada fila la opción que consideres más correcta.

	En cada clase	En la mayoría de clases	En algunas clases	Nunca o casi nunca
Los alumnos no escuchan lo que dice el profesor.		X		~~X~~
Hay ruido y desorden en la clase.	X		~~X~~	

El professor tiene que esperar mucho tiempo para que los estudiantes dejen de hablar (al empezar o durante la clase).		X		
Los alumnos no pueden trabajar bien en clase.		X		
Los alumnos no empiezan a trabajar hasta que pasa mucho tiempo desde que empieza la clase		X		
Los alumnos se distraen usando distintos dispositivos o recursos digitales (mobiles, tablets, páginas webs, etc.).				X
Los alumnos son distraídos por otros estudiantes que estén usando dispositivos o recursos digitales.				X
El profesor muestral interés en el aprendizaje de todos sus alumnos.	X			
El profesor brinda ayuda adicional cuando los alumnos la necesitan.		X		
El profesor ayuda a los estudiantes con su aprendizaje.		X		



El profesor no deja de explicar hasta que todos los alumnos lo han entendido.			X	

En este curso, ¿con qué frecuencia tu profesor/a hizo lo siguiente en las clases de matemáticas?

Marca con una cruz en cada fila la opción que consideres más correcta.

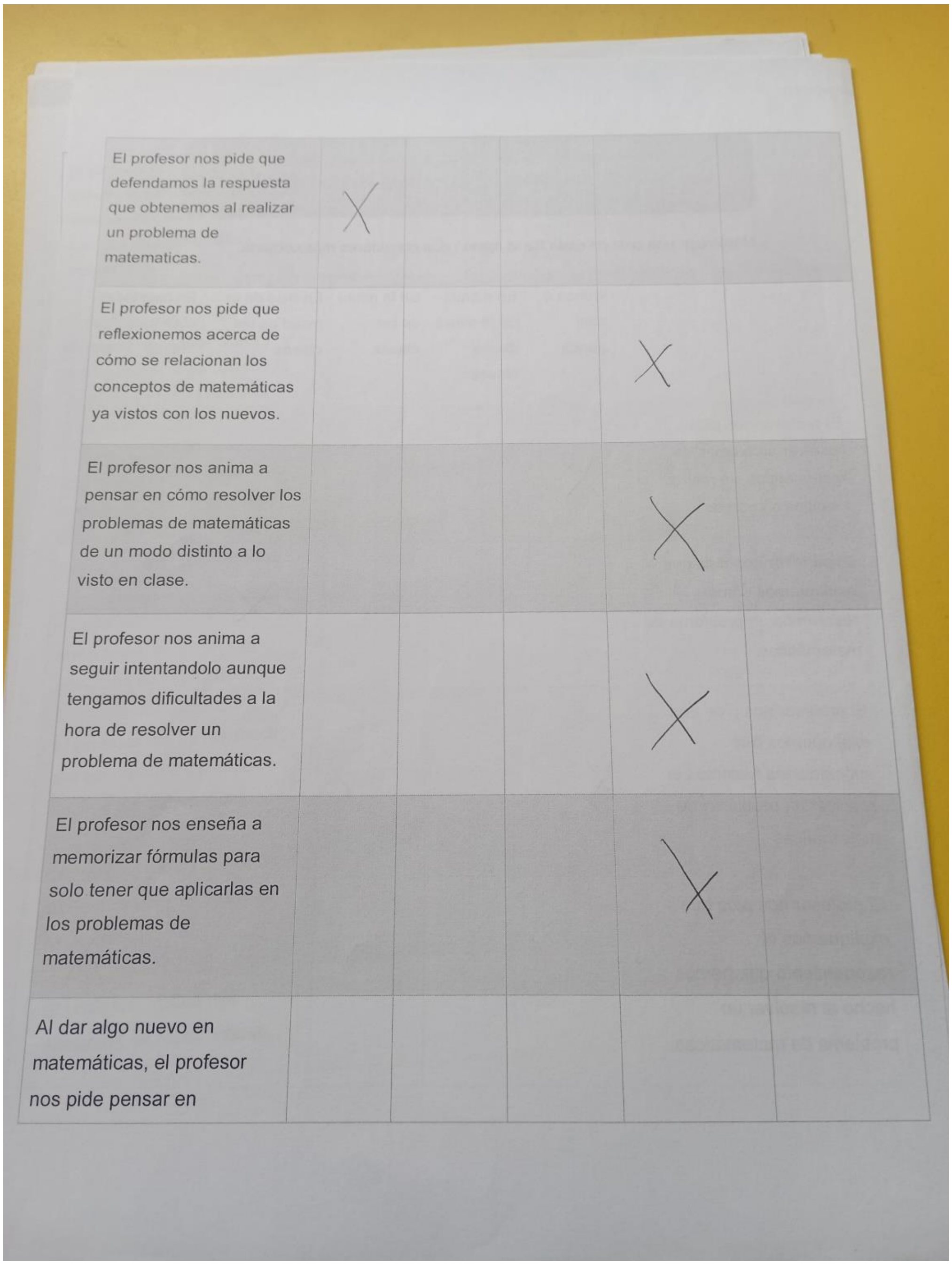
	Nunca o casi nunca	En menos de la mitad de las clases	En la mitad de las clases	En más de la mitad de las clases	En casi todas o en todas las clases
El profesor explica cómo están relacionados los conceptos nuevos y los ya vistos.			X		
El profesor hace un resumen de lo que se dio en la clase al final de esta		X			
El profesor explicó al principio de la clase qué ibais a ver ese día.	X				
El profesor os propone practicar problemas de matemáticas.				X	

El profesor os da diferente trabajo en función de las dificultades de aprendizaje que tengáis.	X				
El profesor os da diferente trabajo a aquellos que puedan avanzar más rápido.	X				
El profesor os propone trabajar en grupos pequeños para resolver los problemas de matemáticas juntos.	X				
El profesor os pide dialogar entre vosotros lo que aprendisteis.			X		
El profesor lee exactamente lo que pone en el libro.		X			

En este curso, ¿con qué frecuencia tu profesor/a hizo lo siguiente en las clases de matemáticas?

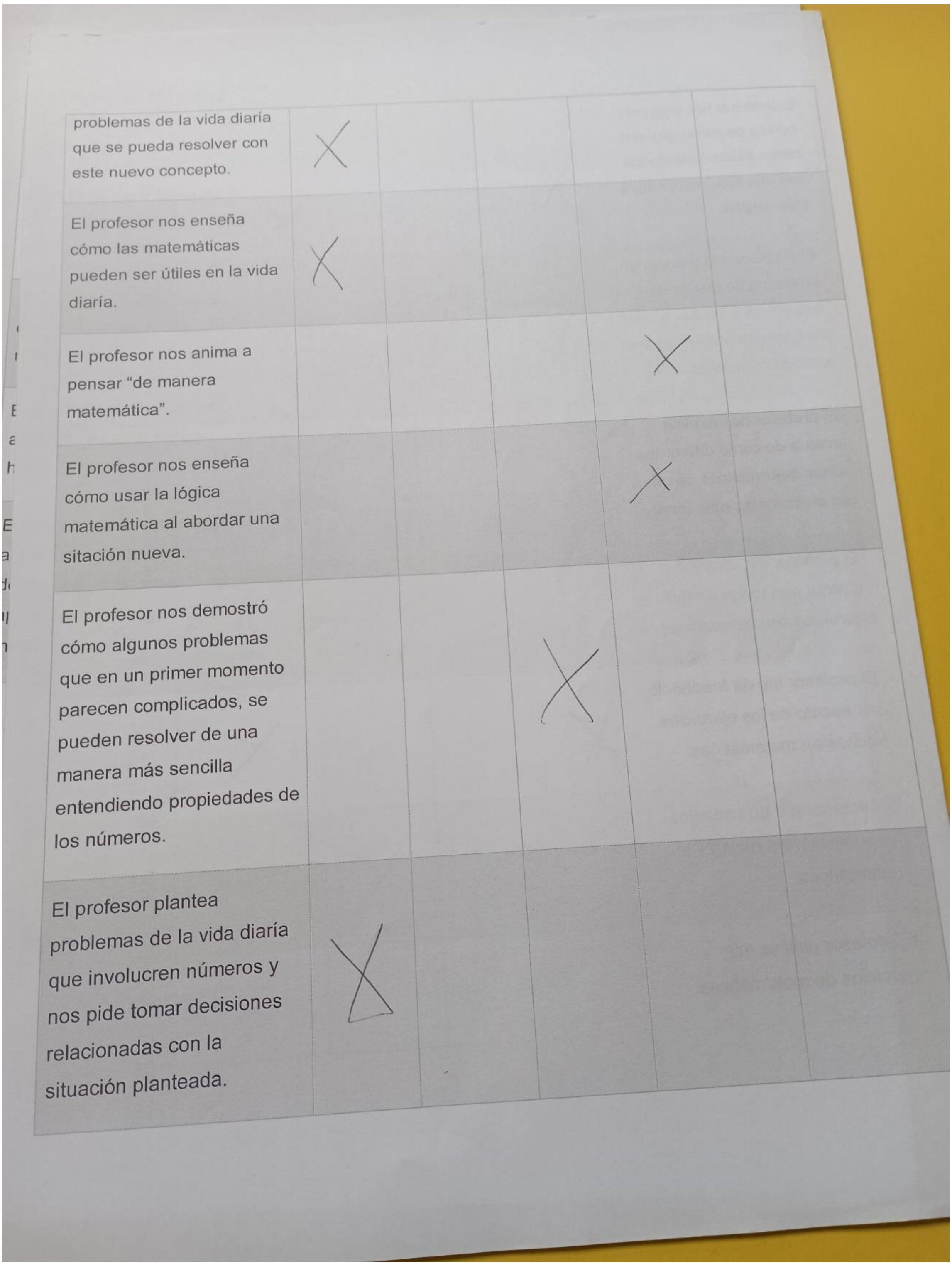
Marca con una cruz en cada fila la opción que consideres más correcta.

	Nunca o casi nunca	En menos de la mitad de las clases	En la mitad de las clases	En más de la mitad de las clases	En casi todas o en todas las clases
El profesor nos pide resolver problemas de matemáticas sin realizar cálculos o cuentas.	X				
El profesor nos pide que expliquemos cómo resolvimos un problema de matemáticas.				X	
El profesor nos pide que expliquemos qué suposiciones hacemos al resolver un problema de matemáticas.	X				
El profesor nos pide que expliquemos el razonamiento que hemos hecho al resolver un problema de matemáticas.					X

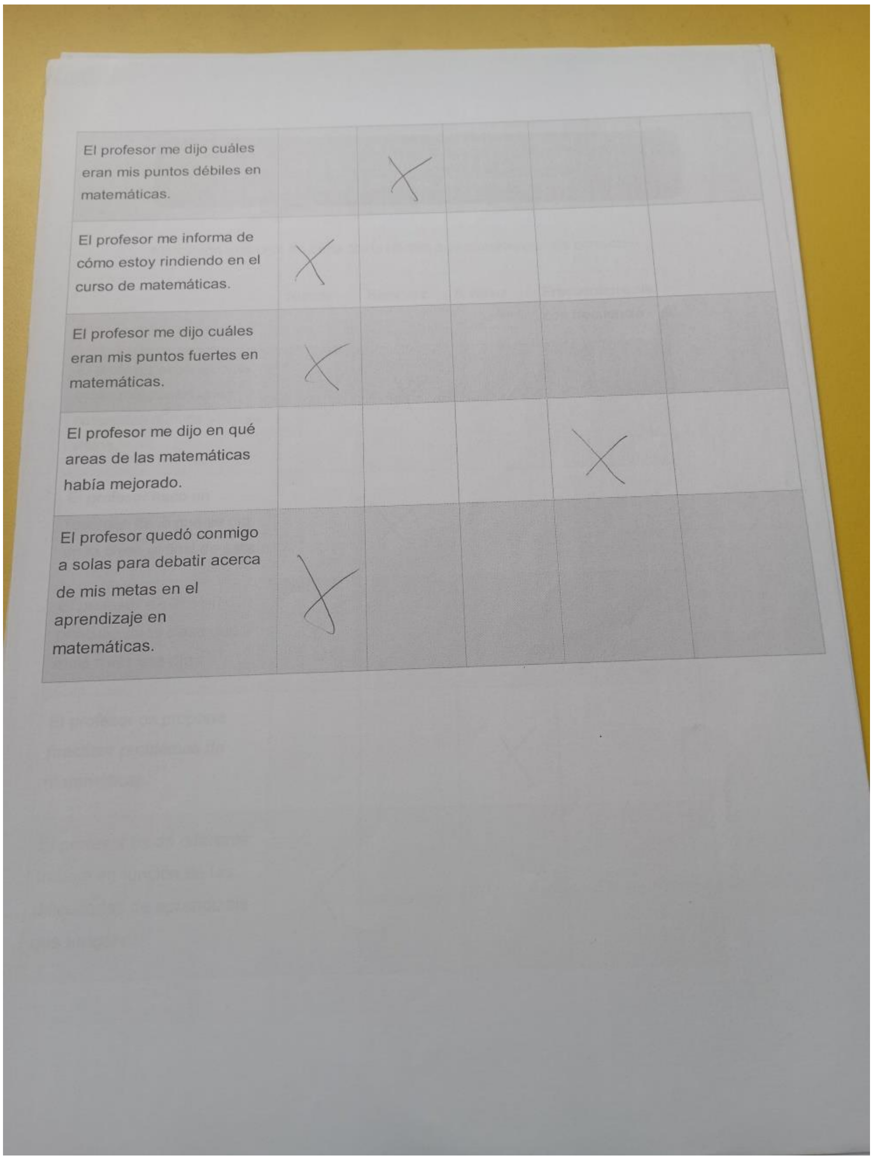


El profesor nos pide que defendamos la respuesta que obtenemos al realizar un problema de matematicas.	X				
El profesor nos pide que reflexionemos acerca de cómo se relacionan los conceptos de matemáticas ya vistos con los nuevos.				X	
El profesor nos anima a pensar en cómo resolver los problemas de matemáticas de un modo distinto a lo visto en clase.				X	
El profesor nos anima a seguir intentandolo aunque tengamos dificultades a la hora de resolver un problema de matemáticas.				X	
El profesor nos enseña a memorizar fórmulas para solo tener que aplicarlas en los problemas de matemáticas.				X	
Al dar algo nuevo en matemáticas, el profesor nos pide pensar en					

El profesor nos pregunta acerca de cómo distintos temas están conectados con una idea matemática más amplia.	X				
El profesor nos plantea un problema de la vida diaria y nos anima a pensar acerca de cómo se podría resolver usando matemáticas.	X				
El profesor nos explica acerca de cómo diferentes ideas matemáticas se unen en un contexto más amplio.	X				
El profesor me dice los errores que tengo en mis ejercicios de matemáticas.					X
El profesor me da feedback por escrito de los ejercicios hechos en matemáticas.	~~X~~			X	
El profesor me da consejos personales para mejorar en matemáticas.			X		
El profesor califica mis ejercicios de matemáticas.				X	



problemas de la vida diaría que se pueda resolver con este nuevo concepto.	X				
El profesor nos enseña cómo las matemáticas pueden ser útiles en la vida diaría.	X				
El profesor nos anima a pensar "de manera matemática".				X	
El profesor nos enseña cómo usar la lógica matemática al abordar una sitación nueva.				X	
El profesor nos demostró cómo algunos problemas que en un primer momento parecen complicados, se pueden resolver de una manera más sencilla entendiendo propiedades de los números.			X		
El profesor plantea problemas de la vida diaría que involucren números y nos pide tomar decisiones relacionadas con la situación planteada.	X				



El profesor me dijo cuáles eran mis puntos débiles en matemáticas.		X			
El profesor me informa de cómo estoy rindiendo en el curso de matemáticas.	X				
El profesor me dijo cuáles eran mis puntos fuertes en matemáticas.	X				
El profesor me dijo en qué areas de las matemáticas había mejorado.				X	
El profesor quedó conmigo a solas para debatir acerca de mis metas en el aprendizaje en matemáticas.	X				

En este curso, ¿con qué frecuencia tu profesor/a hizo lo siguiente en las clases de matemáticas?

Marca con una cruz en cada fila la opción que consideres más correcta.

	Nunca	Rara vez	A veces	Frecuentemente/ con frecuencia
El profesor explica cómo están relacionados los conceptos nuevos y los ya vistos.		X		
El profesor hace un resumen de lo que se dio en la clase al final de esta		X		
El profesor explicó al principio de la clase qué ibais a ver ese día.	X			
El profesor os propone practicar problemas de matemáticas.			X	
El profesor os da diferente trabajo en función de las dificultades de aprendizaje que tengáis.	X			

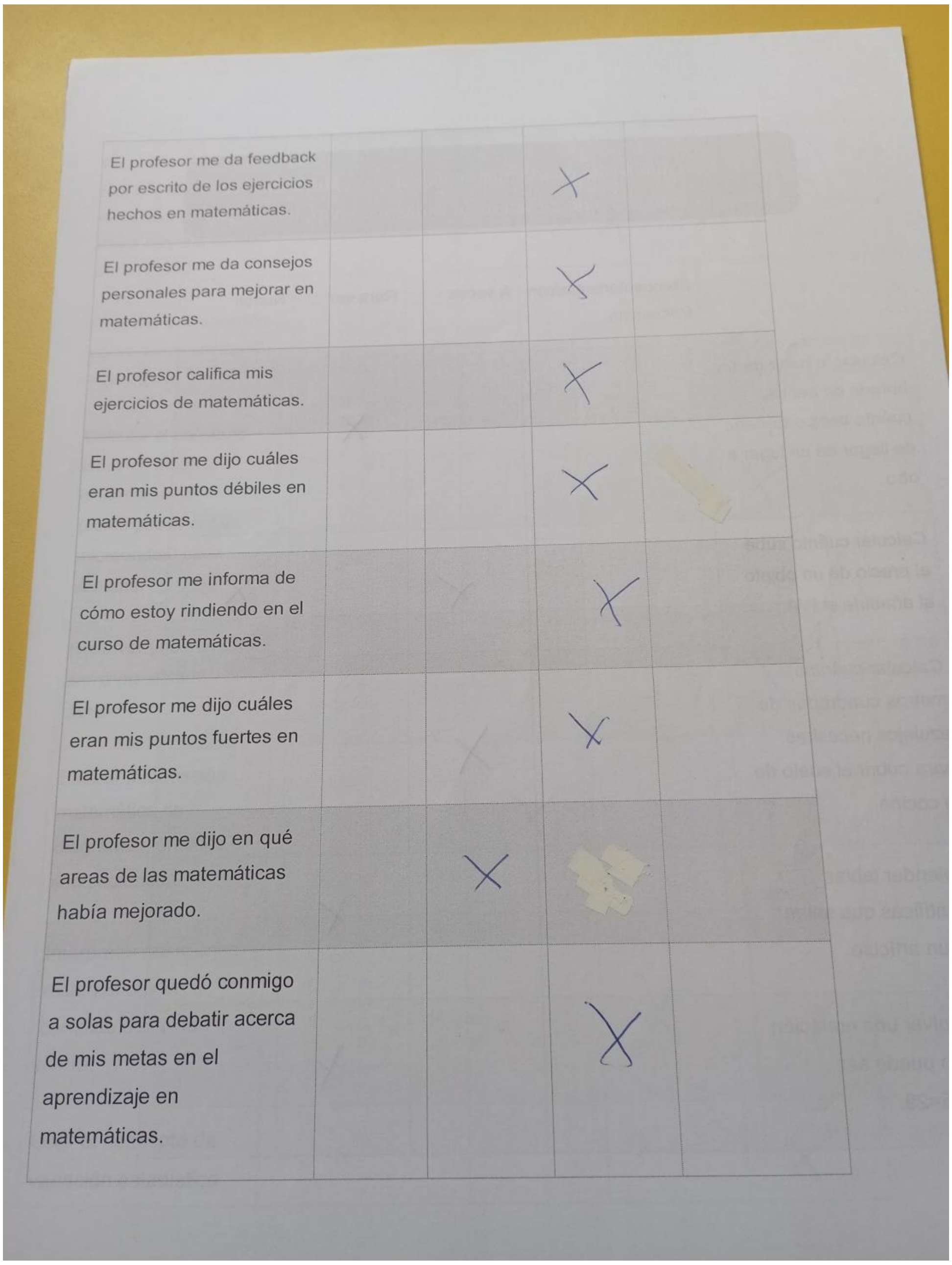
El profesor os da diferente trabajo a aquellos que puedan avanzar más rápido.		X		
El profesor os propone trabajar en grupos pequeños para resolver los problemas de matemáticas juntos.	X			
El profesor os pide dialogar entre vosotros lo que aprendisteis.			X	
El profesor lee exactamente lo que pone en el libro.				X

El profesor nos pide resolver problemas de matemáticas sin realizar cálculos o cuentas.			X	
El profesor nos pide que expliquemos cómo resolvimos un problema de matemáticas.			X	

El profesor nos pide que expliquemos qué suposiciones hacemos al resolver un problema de matemáticas.				X
El profesor nos pide que expliquemos el razonamiento que hemos hecho al resolver un problema de matemáticas.			X	
El profesor nos pide que defendamos la respuesta que obtenemos al realizar un problema de matematicas.			X	
El profesor nos pide que reflexionemos acerca de cómo se relacionan los conceptos de matemáticas ya vistos con los nuevos.			X	
El profesor nos anima a pensar en cómo resolver los problemas de matemáticas de un modo distinto a lo visto en clase.			X	
El profesor nos anima a seguir intentandolo aunque tengamos dificultades a la			X	

hora de resolver un problema de matemáticas.			X	
El profesor nos enseña a memorizar fórmulas para solo tener que aplicarlas en los problemas de matemáticas.				X
Al dar algo nuevo en matemáticas, el profesor nos pide pensar en problemas de la vida diaría que se pueda resolver con este nuevo concepto.	X			
El profesor nos enseña cómo las matemáticas pueden ser útiles en la vida diaría.		X		
El profesor nos anima a pensar "de manera matemática".			X	
El profesor nos enseña cómo usar la lógica matemática al abordar una sitación nueva.		X		
El profesor nos demostró cómo algunos problemas que en un primer momento				

parecen complicados, se pueden resolver de una manera más sencilla entendiendo propiedades de los números.				✓
El profesor plantea problemas de la vida diaría que involucren números y nos pide tomar decisiones relacionadas con la situación planteada.	✓			
El profesor nos pregunta acerca de cómo distintos temas están conectados con una idea matemática más amplia.		✓		
El profesor nos plantea un problema de la vida diaría y nos anima a pensar acerca de cómo se podría resolver usando matemáticas.	✓			
El profesor nos explica acerca de cómo diferentes ideas matemáticas se unen en un contexto más amplio.			✓	
El profesor me dice los errores que tengo en mis ejercicios de matemáticas.				✓

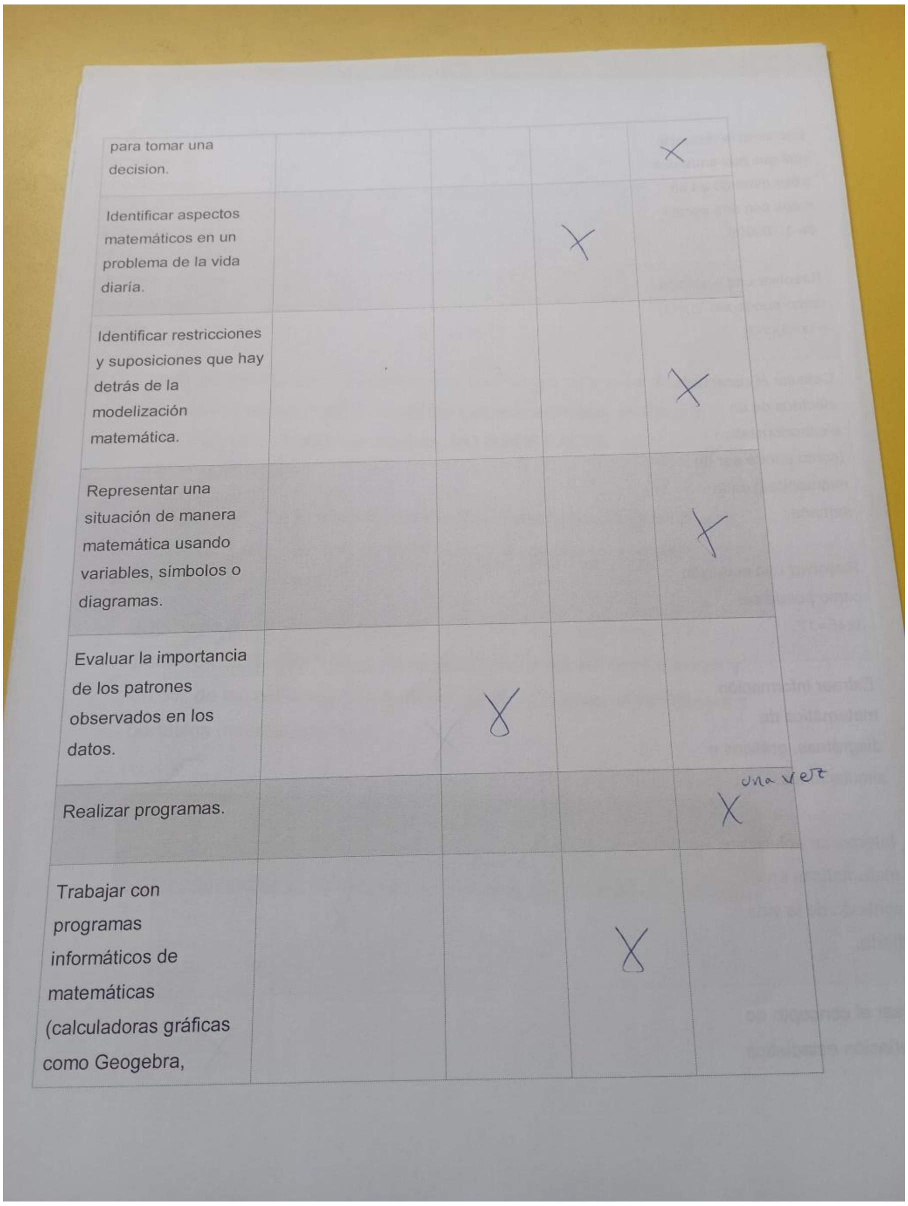


El profesor me da feedback por escrito de los ejercicios hechos en matemáticas.			X	
El profesor me da consejos personales para mejorar en matemáticas.			X	
El profesor califica mis ejercicios de matemáticas.			X	
El profesor me dijo cuáles eran mis puntos débiles en matemáticas.			X	
El profesor me informa de cómo estoy rindiendo en el curso de matemáticas.			X	
El profesor me dijo cuáles eran mis puntos fuertes en matemáticas.			X	
El profesor me dijo en qué areas de las matemáticas había mejorado.		X		
El profesor quedó conmigo a solas para debatir acerca de mis metas en el aprendizaje en matemáticas.			X	

En todo lo que llevas dando matemáticas, ¿con qué frecuencia te encontraste este tipo de tareas (o similares) en matemáticas?

	Frecuentemente/con frecuencia	A veces	Rara vez	Nunca
Calcular, a partir de un horario de trenes, cuánto tiempo tardaría de llegar de un lugar a otro.			X	
Calcular cuánto sube el precio de un objeto al añadirle el IVA.		X		
Calcular cuántos metros cuadrados de azulejos necesitas para cubrir el suelo de la cocina.		X		
Entender tablas científicas que salen en un artículo.			X	
Resolver una ecuación como puede ser $6x^2+5=29$.			X	

Encontrar la distancia real que hay entre dos sitios mirando en un mapa con una escala de 1:100000.			X	
Resolver una ecuación como puede ser 2(x+3) = (x+3)(x-3)				X
Calcular el consumo eléctrico de un electrodoméstico (como puede ser un microondas) cada semana.				X
Resolver una ecuación como puede ser 3x+5=17				X
Extraer información matemática de diagrámas, gráficos o simulaciones.		X		
Interpretar soluciones matemáticas en el contexto de la vida diaría.			X	
Usar el concepto de variación estadística				X



para tomar una decision.				X
Identificar aspectos matemáticos en un problema de la vida diaria.			X	
Identificar restricciones y suposiciones que hay detrás de la modelización matemática.				X
Representar una situación de manera matemática usando variables, símbolos o diagramas.				X
Evaluar la importancia de los patrones observados en los datos.		X		
Realizar programas.				una vez X
Trabajar con programas informáticos de matemáticas (calculadoras gráficas como Geogebra,				X

programas de ordenador, etc.)			X	
Calcular distintas propiedades (área, perímetro, etc) de un objeto de forma irregular.	X			

Hay problemas de matemáticas que solo tienen una única solución y que se pueden resolver mediante cálculos sencillos. Indicamos dos ejemplos de estos problemas. **NO HACE FALTA RESOLVERLOS**

Problema 1 : Tenemos dos huevos. El primero pesa 78 gramos y el segundo 110g. ¿En qué porcentaje es más pesado el segundo huevo que el primero?

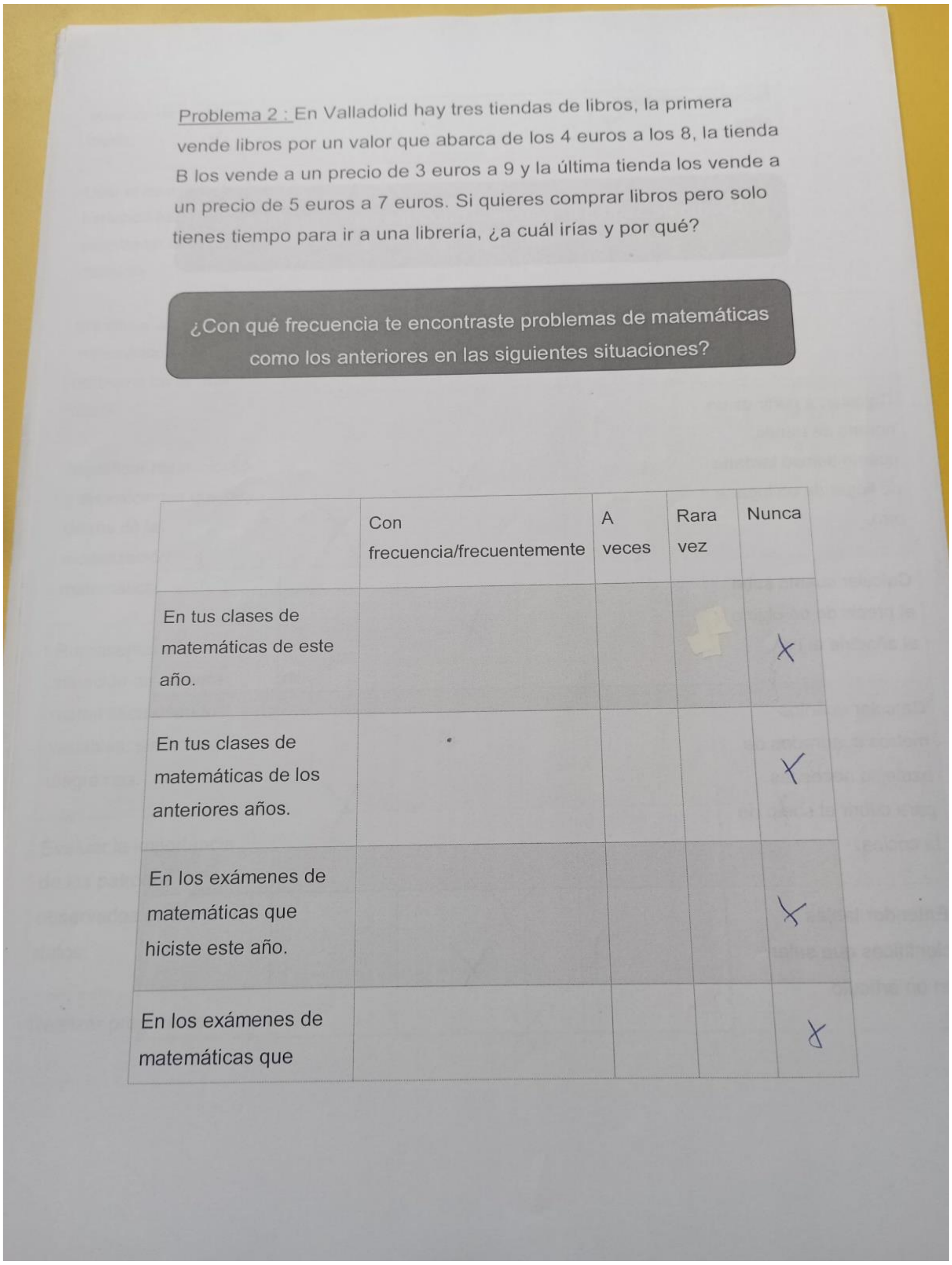
Problema 2 : Una compañía produce 2000 ordenadores y 6000 portatiles cada año. Aproximadamente un 4% de los ordenadores y un 5% de los portatiles están defectuosos. ¿Cuántos ordenadores y portatiles defectuosos hay?

¿Con qué frecuencia te encontraste problemas de matemáticas como los anteriores en las siguientes situaciones?

	Con frecuencia/frecuentemente	A veces	Rara vez	Nunca
En tus clases de matemáticas de este año.	X			
En tus clases de matemáticas de los anteriores años.		X		
En los exámenes de matemáticas que hiciste este año.	X			
En los exámenes de matemáticas que hiciste los anteriores años.		X		

Hay problemas de matemáticas que pueden tener distintas soluciones en función de lo que supongamos. Estos problemas requieren que expliques lo que razones. Indicamos dos ejemplos de estos problemas. **NO HACE FALTA RESOLVERLOS**

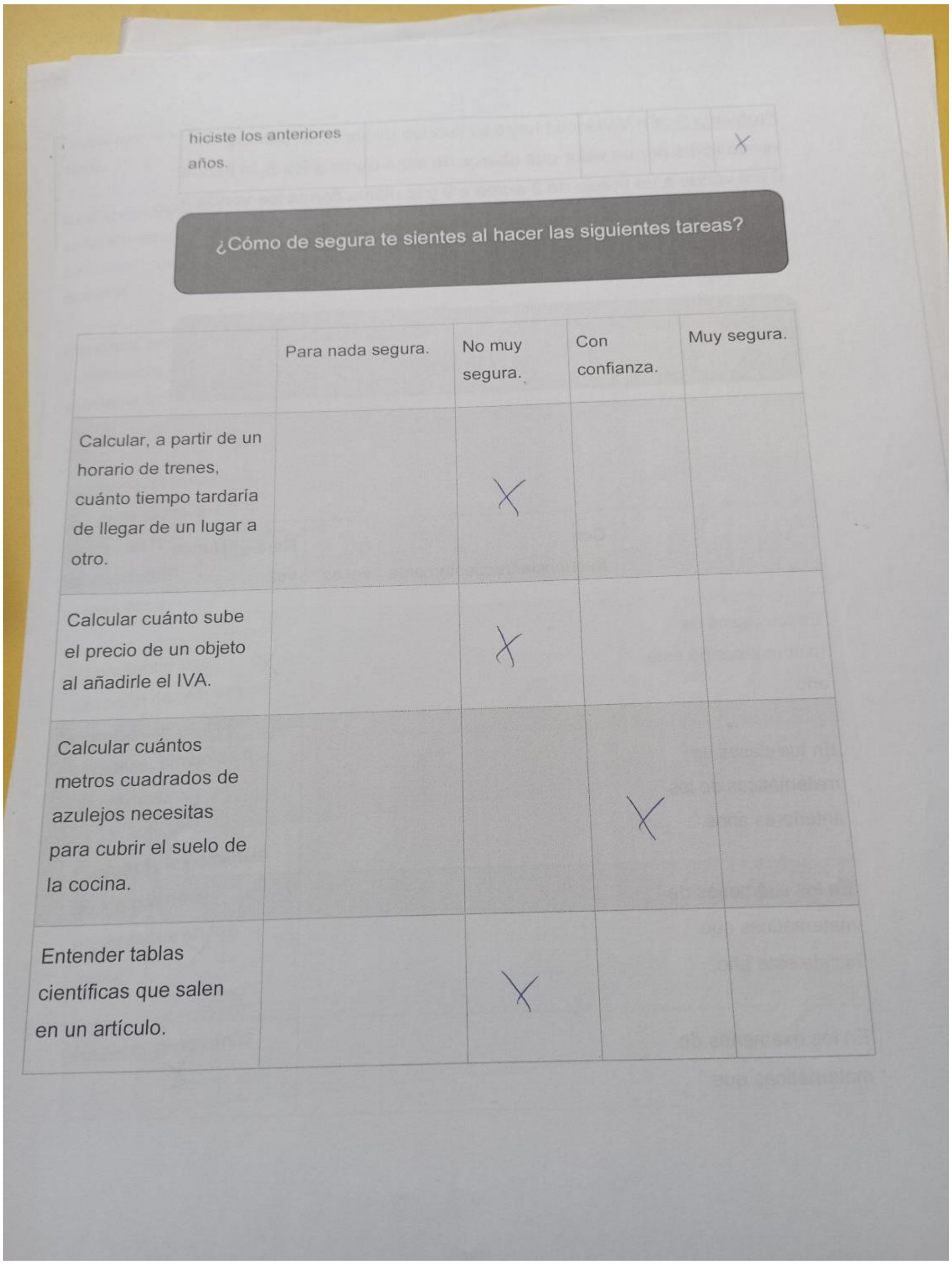
Problema 1 : Cada día hay una probabilidad de 1/5 de que un pájaro venga a San Pablo. Si se sabe que el pájaro vino ayer a San Pablo, ¿es buena decision ir a San Pablo los siguientes 4 días? Justifica tu respuesta.



Problema 2 : En Valladolid hay tres tiendas de libros, la primera vende libros por un valor que abarca de los 4 euros a los 8, la tienda B los vende a un precio de 3 euros a 9 y la última tienda los vende a un precio de 5 euros a 7 euros. Si quieres comprar libros pero solo tienes tiempo para ir a una librería, ¿a cuál irías y por qué?

¿Con qué frecuencia te encontraste problemas de matemáticas como los anteriores en las siguientes situaciones?

	Con frecuencia/frecuentemente	A veces	Rara vez	Nunca
En tus clases de matemáticas de este año.				X
En tus clases de matemáticas de los anteriores años.				X
En los exámenes de matemáticas que hiciste este año.				X
En los exámenes de matemáticas que				X



hiciste los anteriores años.				X

¿Cómo de segura te sientes al hacer las siguientes tareas?

	Para nada segura.	No muy segura.	Con confianza.	Muy segura.
Calcular, a partir de un horario de trenes, cuánto tiempo tardaría de llegar de un lugar a otro.		X		
Calcular cuánto sube el precio de un objeto al añadirle el IVA.		X		
Calcular cuántos metros cuadrados de azulejos necesitas para cubrir el suelo de la cocina.			X	
Entender tablas científicas que salen en un artículo.		X		

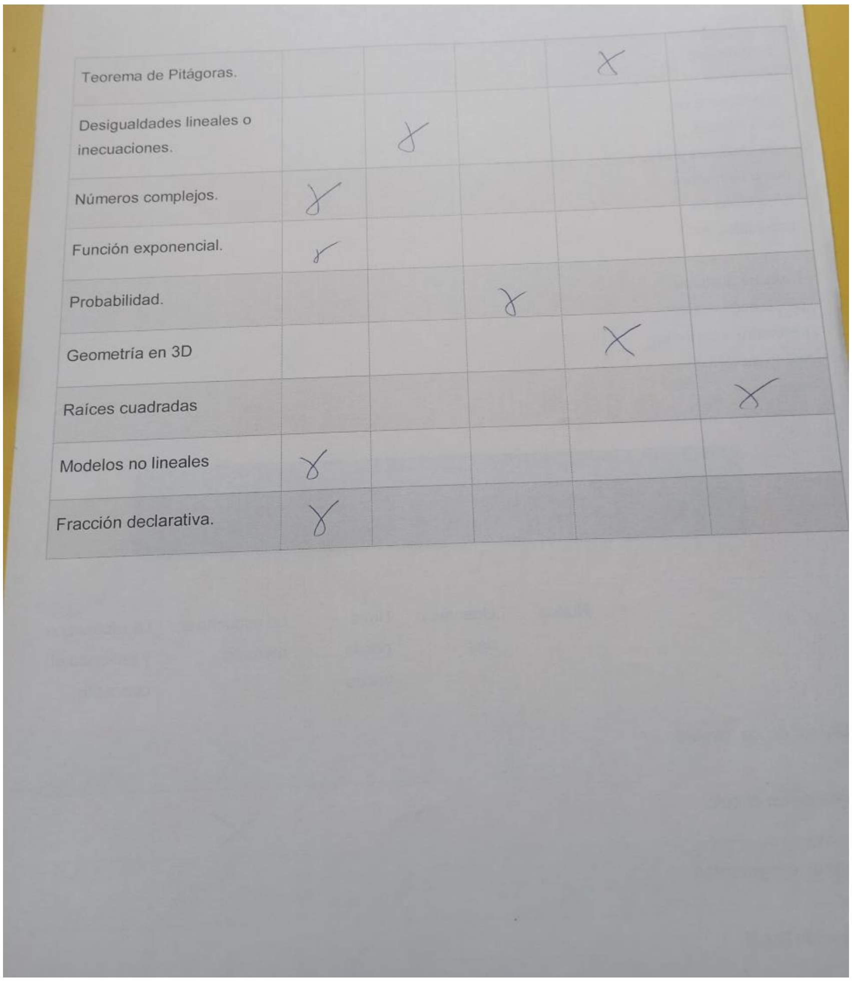
Resolver una ecuación como puede ser $6x^2+5=29$.	X			
Encontrar la distancia real que hay entre dos sitios mirando en un mapa con una escala de 1:100000.		X		
Resolver una ecuación como puede ser $2(x+3) = (x+3)(x-3)$	X			
Calcular el consumo eléctrico de un electrodoméstico (como puede ser un microondas) cada semana.	X			
Resolver una ecuación como puede ser $3x+5=17$	X			
Extraer información matemática de diagrámas, gráficos o simulaciones.			X	
Interpretar soluciones matemáticas en el			X	

contexto de la vida diaria.			X	
Usar el concepto de variación estadística para tomar una decision.	X			
Identificar aspectos matemáticos en un problema de la vida diaría.			X	
Identificar restricciones y suposiciones que hay detrás de la modelización matemática.	X			
Representar una situación de manera matemática usando variables, símbolos o diagramas.		X		
Evaluar la importancia de los patrones observados en los datos.		X		
Realizar programas.		X		

Trabajar con programas informáticos de matemáticas (calculadoras gráficas como Geogebra, programas de ordenador, etc.)			X	
Calcular distintas propiedades (área, perímetro, etc) de un objeto de forma irregular.			X	

¿Has escuchado hablar de estos conceptos de matemáticas?

	Nunca	Una vez o dos	Unas pocas veces	Lo escucho a menudo	Lo reconozco y entiendo el concepto
Divisor de un número.				X	
Área de un círculo.				X	
Figuras congruentes	X				
Ecuación lineal			X		



Teorema de Pitágoras.				X	
Desigualdades lineales o inecuaciones.		X			
Números complejos.	X				
Función exponencial.	X				
Probabilidad.			X		
Geometría en 3D				X	
Raíces cuadradas					X
Modelos no lineales	X				
Fracción declarativa.	X				

6.7. *Azulejos Algebraicos.*

X^2	X^2	X^2
X^2	X^2	X^2

X^2	X^2	X^2
X^2	X^2	X^2

$-X^2$	$-X^2$	$-X^2$
$-X^2$	$-X^2$	$-X^2$
$-X^2$	$-X^2$	$-X^2$
$-X^2$	$-X^2$	$-X^2$

X	X	X
X	X	X
X	X	X
X	X	X
X	X	X
X	X	X
X	X	X
X	X	X
X	X	X
X	X	X

-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X
-X	-X	-X

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

6.8. Problemas de ecuaciones de primer grado.

PROBLEMAS ECUACIONES

1) Si Manuel es 3 años mayor que Andrea y la suma de sus edades es 35, ¿cuántos años tiene cada uno?

2) Si el perímetro de un cuadrado es 48 cm, ¿cuánto miden sus lados?

3) Calcular tres números consecutivos que sumen 24.

4) La edad de Javier es el triple que la de su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Qué edad tiene el hijo de Javier?

5) Una cuerda de 180m se corta en 3 trozos: trozo A, trozo B y trozo C. Calcular cuánto miden los trozos sabiendo que el trozo B y el trozo C miden el doble y el triple que el trozo A, respectivamente.

6) Calcula la edad de tu profe Roberto, sabiendo que su edad dentro de 7 años será el triple que la edad que tenía hace 13 años.

6.9. Examen proporciones.

Examen proporciones

1. Calcula la tasa de interés compuesto que se aplica a un capital inicial de 13000 € para que después de 3 años se tengan 14500 €.
2. Pedro, Alberto y María tenían, respectivamente, 5, 3 y 2 euros. Juntaron su dinero y compraron 500 folios. ¿Cuántos folios recibe cada uno?
3. En el aparcamiento de unos grandes almacenes hay 420 coches, de los que el 35 % son blancos. ¿Cuántos coches hay no blancos?
4. ¿Cuál es el interés simple generado en un plazo fijo, por un capital de 10000 €, al 4% trimestral durante 2 años?
5. En una fábrica automovilística, una máquina pone, en total, 15.000 tornillos en las 8 horas de jornada laboral, funcionando de forma ininterrumpida. ¿Cuántos tornillos pondrá en 3 horas?

6.10. Consentimiento informado.

Consentimiento informado

Título del Trabajo de Fin de Máster: *Reeducando matemáticamente desde la ansiedad matemática: un estudio de caso*
Tutor del trabajo: José María Marbán Prieto
Estudiante: Roberto Lobón Vecín

PARTE I: INFORMACIÓN DEL CONSENTIMIENTO

1.- INTRODUCCIÓN

La ansiedad matemática se puede definir como un sentimiento de tensión o nerviosismo que interfiere en la manipulación de los números y en la resolución de problemas matemáticos tanto en la vida diaria como académica. Se sabe que la ansiedad matemática está vinculada a problemas en el correcto rendimiento académico del alumno, así como en el autoconcepto y el disfrute que tiene en las matemáticas.

Se estima que, aproximadamente entre un 5% y un 20% de la población tiene ansiedad matemática. Sin embargo, el conocimiento sobre la ansiedad matemática y los avances en su órigen, diágnostico y en el diseño de propuestas eficaces de intervención educativa para su atención son escasos. Por lo tanto, es un problema abierto que requiere de más evidencias basadas en la investigación, de manera que esto facilitará diagnósticos tempranos que disminuyan los riesgos asociados a la ansiedad matemática ya comentados previamente. Además, permitirá el diseño de procesos de intervención educativa eficaces que ayuden en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en niños con ansiedad matemática.

El propósito de este formulario es proporcionarles información suficiente para tomar una decisión bien informada sobre la participación o no en el estudio asociado a este trabajo académico. Lean la información que se ofrece a continuación y formulen cualquier pregunta que permita aclarar sus dudas antes de tomar la decisión de participar (en el caso de la niña) o de autorizar la participación de su hija (en el caso de los padres), tomando todo el tiempo que consideren oportuno. En caso de que finalmente la respuesta sea positiva por todas las partes, este formulario se utilizará para registrar su decisión.

2.- PROPÓSITO DEL ESTUDIO

El propósito general del estudio es el de contribuir, a través de un estudio de caso, a un mejor, mayor y más profundo conocimiento de la ansiedad matemática, así como de las características que debe poseer una buena intervención educativa para una eficaz (re)educación matemática de los niños con ansiedad matemática. Todo ello partiendo del firme convencimiento de que cada niña/o es un caso singular y que los procesos de intervención deben partir de una fuerte componente de atención individualizada que permita atender adecuadamente las especificidades que presenta en relación con la ansiedad matemática y el aprendizaje de las matemáticas.

En un plano más concreto o específico, se pretende que la niña participante en este estudio pueda reconstruir y mejorar su relación con el aprendizaje matemático partiendo de sus dificultades específicas en este campo, de sus propios ritmos, gustos y estilos de aprendizaje y desde los fundamentos numéricos básicos, sin establecer una conexión necesariamente directa con el currículo matemático correspondiente a su curso actual, pero sin perderlo de vista en aquello en lo que pueda contribuir a la eficacia de las actuaciones previstas. En todo este proceso se prestará especial atención y cuidado a los aspectos afectivo-matemáticos y, en particular, a los relacionados con el auto concepto matemático, el gusto por las matemáticas, la ansiedad matemática y la percepción de utilidad y dificultad de las matemáticas.

3.- PROPUESTA CONCRETA DE INTERVENCIÓN

En este estudio de caso se propone un proceso de sesiones de trabajo matemático tuteladas e individuales con la niña participante en el estudio, guiadas por el estudiante que realiza el presente Trabajo de Fin de Máster (en adelante TFM), bajo la supervisión previa y posterior de su tutor, y apoyadas en tres principios básicos: uso de enfoques y recursos multisensoriales (manipular, dibujar, ver, leer, …), lúdicos y orientados a la reducción de la ansiedad matemática. Estas sesiones de desarrollarán en el domicilio de la niña como su entorno más natural de estudio y trabajo matemático y tendrán lugar dos veces por semana, con una duración de una hora cada una, a lo largo de todo el curso 2023-2024 hasta la entrega de dicho TFM, pudiendo seguir yendo una vez entregado si los padres lo desean.

A lo largo del desarrollo de estas intervenciones se pedirá a la niña que realice ciertas tareas/actividades matemáticas (incluyendo, de forma significativa, juegos), mantenga un diálogo abierto con el estudiante responsable de las sesiones y del trabajo sobre sus dificultades y sus logros y cumplimente algunas escalas o test validados para la medición de la evolución de su ansiedad matemática.

4.- BENEFICIOS

Desde el punto de vista de la niña creemos que su participación en este estudio permitirá una mejoría tanto en su dominio afectivo matemático, así como un mejor conocimiento tanto de sus dificultades originadas por la ansiedad matemática como de sus potencialidades como aprendiz de matemáticas.

Desde un punto de vista más general, si bien las características propias de un estudio de caso singular no permiten, a priori, prever el impacto social y educativo que sus resultados pueden provocar, confiamos en que estos puedan ser no solo un estímulo más para seguir avanzando y colaborando en la comprensión de la ansiedad matemática sino también un modelo o ejemplo de propuesta de (re)educación matemática que, con las adaptaciones que se consideren oportunas, pueda aplicarse en situaciones similares con éxito.

5.- CONFIDENCIALIDAD Y PRIVACIDAD

Aunque siempre existe un ligero riesgo de pérdida del anonimato al trabajar en un marco de estudio de caso, no se escatimarán esfuerzos para proteger tanto la información como la privacidad de la niña y de sus padres. Así, solo estudiante y tutor, responsables de este estudio, tendrán acceso a la información que les identifica. Además, todos los datos utilizados para este estudio serán anonimizados, lo que significa que se usarán en todo momento y en todos los documentos que se manejen referencias genéricas (niña, padres, …), nombres ficticios o códigos alfanuméricos y no se hará referencia ni en el trabajo ni en ninguna publicación asociada al mismo a la que pudiera dar lugar a ningún dato que pueda permitir a terceras personas la asociación de los resultados con personas concretas, salvo, claro está, el tutor y el estudiante responsables del estudio.

Si bien no está inicialmente prevista su necesidad, en el caso de que fuera preciso recurrir a algún tipo de registro gráfico o audiovisual, no solo se pediría previamente el correspondiente consentimiento explícito para realizarlo, sino que estos registros serían tratados de inmediato para eliminar todo riesgo de identificación personal (distorsión de la voz, procesos de difuminación de rostros, etc) y destruidos en su formato original a continuación, siempre que fuera necesario conservar el registro en su formato audiovisual para los propósitos del estudio. En caso contrario, se procedería simplemente a realizar las transcripciones -totales o parciales- de episodios correspondientes en formato escrito para proceder automáticamente a la destrucción del registro audiovisual.

Mientras se esté trabajando en el proyecto, cualquier dato recopilado en el marco de su desarrollo que pudiera incluir algún tipo de información no anonimizada se mantendrá únicamente almacenado en unidades de almacenamiento externas protegidas con contraseña y utilizadas únicamente por tutor y estudiante, o en papel -como es el caso del consentimiento informado- en el despacho de trabajo del tutor en lugar confidencial, siendo todos ellos destruidos en su totalidad transcurridos un máximo de cinco años.

A partir del 25 de mayo de 2018 es de plena aplicación la nueva legislación en la UE sobre datos personales, en concreto el Reglamento (UE) 2016/679 del Parlamento europeo y del Consejo de 27 de abril de 2016 de Protección de Datos (RGPD). Por ello, es importante que conozca la siguiente información:

- Los resultados que genere el proyecto serán tratados con los únicos fines académicos, de investigación y de innovación educativa que marca el propio estudio y estos podrán ser publicados y difundidos bajo los principios de privacidad y anonimato mencionados previamente. En todo caso, y en aras a garantizar los derechos en este sentido de la niña participante y de sus padres, se solicitará su conformidad con la forma en que se han garantizado su privacidad y anonimato, siempre con carácter previo al envío de resultados para su publicación, evaluación o almacenamiento en repositorios institucionales.
- En todo momento podrá revocarse este consentimiento prestado, así como ejercer los correspondientes derechos de acceso, rectificación, supresión, oposición, limitación del tratamiento y portabilidad, en la medida que sean aplicables, a través de comunicación escrita al tutor de este estudio con dirección en la Facultad de Educación y Trabajo Social sita en el Campus Miguel Delibes, Paseo de Belén 1, 47010 Valladolid.
- Tutor y estudiante se comprometen a informar mensualmente -y en cuentas ocasiones así se requiriese por parte de los padres de la niña participante- de los avances del TFM, así como a facilitar la versión final del TFM con carácter previo a su depósito con la finalidad ya expresada en el primer punto de esta enumeración y, del mismo modo información acerca de cualquier estudio o proyecto de investigación en los que se hayan utilizado los datos del TFM.

6.- PARTICIPACIÓN VOLUNTARIA

La participación en este estudio es totalmente libre y voluntaria pudiendo decidir dejar de participar o cambiar su decisión y retirar su consentimiento en cualquier momento del proyecto.

6.- CONTACTO

Si tienen cualquier pregunta pueden hacerla ahora o más tarde, incluso después de haberse iniciado la participación en el estudio bien en persona o bien por correo electrónico dirigido al tutor del trabajo en la dirección josemaria.marban@uva.es.

PARTE II: FORMULARIO DE CONSENTIMIENTO

Los abajo firmantes declaramos haber leído todo el documento y damos los consentimientos necesarios para la realización del estudio en los términos en los que se ha descrito previamente.

Aceptamos, por tanto, que:

- ***Hemos leído la información formulada en este consentimiento.***
- ***Entendemos el propósito, los procedimientos; y los posibles riesgos y beneficios del estudio***
- ***Se nos ha dado tiempo suficiente para pensarlo.***
- ***Hemos tenido la oportunidad de hacer preguntas y hemos recibido respuestas satisfactorias.***
- ***Entendemos que somos libres de retirar nuestro consentimiento en cualquier momento por cualquier motivo.***
- ***Damos permiso para el uso de la información no identificada o anonimizada recopilada para su uso en este caso práctico, como se describe en este formulario.***
- ***Entiendo que al firmar este documento no renuncio a ninguno de mis derechos legales.***
- ***Se nos entrega una copia firmada completa (las dos partes) de este formulario de consentimiento.***

____

Firma de los padres o tutores legales Fecha

____

Firma de la niña participante en el estudio Fecha

____

Firma del tutor del TFM. Fecha

____

Firma de la estudiante que realiza el TFM Fecha

o