



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID  
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FINAL DE MÁSTER  
MÁSTER DE PROFESOR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA  
OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL  
Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS, ESPECIALIDAD DE  
MATEMÁTICAS

---

**Estudio de la educación española  
haciendo uso del Machine-Learning**

---

***Autor: Carlos Saravia de Coca***

**Tutores:**  
***Cesáreo Jesús González***  
***Iñigo Sanz Rubiales***

*Departamento de Matemática Aplicada y Departamento de Derecho Público*



# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. La Educación en el Ordenamiento Jurídico Español</b>	<b>11</b>
1.1. Legislación y poder judicial en el ámbito educativo . . . . .	11
1.2. Bases constitucionales del derecho a la educación . . . . .	12
1.3. Configuración jurisprudencial del ideario educativo como derecho . . . . .	13
1.4. El concierto de la educación . . . . .	14
1.5. La libertad de los padres y la libertad de enseñanza . . . . .	15
1.6. Abandono escolar y legislación educativa . . . . .	15
<b>2. Evaluaciones del Sistema Educativo</b>	<b>19</b>
2.1. Informe TALIS . . . . .	20
2.2. Informe PISA . . . . .	20
2.2.1. Características del informe PISA . . . . .	21
2.2.2. Anomalías de la Evaluación de la prueba PISA . . . . .	22
<b>3. El informe PISA en España</b>	<b>23</b>
3.1. Evolución de los resultados en PISA . . . . .	25
3.2. Resultados de PISA en las Comunidades Autónomas españolas . . . . .	28
<b>4. Análisis de los Factores Explicativos del Rendimiento Educativo</b>	<b>31</b>
4.1. El gasto público en educación por Comunidades Autónomas . . . . .	32
4.2. El estatus socioeconómico del alumnado . . . . .	36
4.2.1. P.I.B. per cápita por Comunidad Autónoma . . . . .	37
4.2.2. Ocupación profesional de los padres del alumno . . . . .	39
4.2.3. Índice de Estatus Social, Económico y Cultural . . . . .	39
4.3. Los tipos de centros educativos . . . . .	41
4.3.1. Educación pública y privada y su efecto sobre el rendimiento educativo . . . . .	41
4.3.2. Localización geográfica de los centros educativos . . . . .	45
4.4. Características adicionales del alumnado . . . . .	48
4.4.1. Alumnado extranjero . . . . .	48
4.4.2. Brecha de género en educación . . . . .	53

<b>5. Matemáticas en el informe PISA</b>	<b>59</b>
5.1. Promedios globales en Matemáticas . . . . .	59
5.2. Rendimientos medios estimados en las subescalas de Matemáticas . . .	60
5.2.1. Rendimientos medios estimados en las subescalas de procesos . .	61
5.2.1.1. Formular situaciones matemáticamente . . . . .	61
5.2.1.2. Emplear conceptos . . . . .	63
5.2.1.3. Interpretación y evaluación de resultados matemáticos .	66
5.2.1.4. Razonamiento matemático . . . . .	67
5.2.2. Rendimientos medios estimados en las subescalas de contenidos	69
5.2.2.1. Cambio y relaciones . . . . .	72
5.2.2.2. Espacio y forma . . . . .	73
5.2.2.3. Cantidad . . . . .	74
5.2.2.4. Incertidumbre y datos . . . . .	75
5.3. Evolución de los resultados en Matemáticas . . . . .	76
<b>6. Modelos estadísticos para el rendimiento educativo</b>	<b>81</b>
6.1. Modelo de sección cruzada para las Comunidades Autónomas en PISA	
2022 . . . . .	81
6.1.1. Linealidad del modelo . . . . .	85
6.1.2. Normalidad de la perturbación aleatoria . . . . .	86
6.1.3. Homocedasticidad de las perturbaciones . . . . .	88
6.1.4. Conclusiones del modelo de sección cruzada . . . . .	89
6.2. Modelos de series temporales para el rendimiento educativo . . . . .	89
6.2.1. Modelos Autoregresivos . . . . .	90
6.2.2. Modelos de Media Móvil . . . . .	91
6.2.3. Modelos ARIMA(p,d,q) . . . . .	92
6.2.4. Random Forest . . . . .	92
6.2.5. Redes Neuronales . . . . .	95
<b>7. Delineación de políticas públicas</b>	<b>97</b>
7.1. La innovación educativa como solución . . . . .	97
7.1.1. Innovación en subescalas de procesos . . . . .	97
7.1.2. Innovación en subescalas de contenidos . . . . .	98
7.1.3. El plan de mejora en Castilla y León . . . . .	99
7.1.4. Una alternativa en la financiación de los centros . . . . .	100
7.2. Los Objetivos de Desarrollo Sostenible y la excelencia educativa . . . . .	102
<b>A. Tablas</b>	<b>105</b>

# Abstract

## Abstract

This study provides a detailed analysis of educational performance in Spain, evaluating not only the country's overall performance but also the variations and nuances among the different Autonomous Communities. By considering factors such as public spending per student, GDP per capita, and the type of educational institution, the study seeks to uncover the key elements that explain the differences in educational outcomes.

The objective of this research is to propose public policies that optimize educational performance in Spain. Through data analysis, optimal public policies that should be implemented to improve education are outlined. The study emphasizes didactic innovation in the field of mathematics, an area crucial for the development of critical and analytical skills in students.

## Resumen

Este estudio analiza detalladamente el rendimiento educativo en España, evaluando no solo el desempeño general del país, sino también las variaciones y matices entre las distintas Comunidades Autónomas. Considerando factores como el gasto público por alumno, el PIB per cápita, y el tipo de centro educativo, se busca desentrañar las claves que explican las diferencias en los resultados educativos.

El objetivo de esta investigación es proponer políticas públicas que optimicen el rendimiento educativo en España. A través del análisis de datos, se delinean las políticas públicas óptimas que deberían implementarse para mejorar el sistema educativo. Se enfatiza la innovación didáctica en el ámbito de las matemáticas, un área crucial para el desarrollo de habilidades críticas y analíticas en los estudiantes.



# Introducción

La educación es uno de los pilares fundamentales sobre los que se construye el futuro de una sociedad. En España, como en muchas otras naciones, el rendimiento educativo de los estudiantes se encuentra en el centro del debate público y académico. A medida que el mundo se enfrenta a retos cada vez más complejos y cambiantes, la calidad de la educación se convierte en un factor crucial para asegurar el progreso y la competitividad de un país. Sin embargo, ¿qué factores determinan realmente el rendimiento educativo en España y sus Comunidades Autónomas? ¿Cómo podemos identificar y aplicar políticas públicas que optimicen este rendimiento?

Este estudio se adentra en el análisis detallado del rendimiento educativo en España, evaluando no solo el desempeño general del país, sino también las variaciones y matices que existen entre las distintas Comunidades Autónomas. Al considerar una variedad de factores, como el gasto público por alumno, el PIB per cápita, y el tipo de centro educativo, se busca desentrañar las claves que explican las diferencias en los resultados educativos. Estos factores, aunque diversos y complejos, proporcionan una base sólida para comprender cómo y por qué se producen ciertas disparidades en el rendimiento académico.

El objetivo final de esta investigación no es solo descriptivo, sino profundamente propositivo. A través del análisis de datos y la identificación de patrones y correlaciones, se aspira a delinear las políticas públicas óptimas que deberían implementarse para mejorar la educación en España. En particular, se pone un énfasis especial en la innovación didáctica en el ámbito de las matemáticas, un área que ha demostrado ser crucial para el desarrollo de habilidades críticas y analíticas en los estudiantes.

La innovación en la enseñanza de las matemáticas no es solo una necesidad pedagógica, sino una urgencia para preparar a los estudiantes para los desafíos del siglo XXI. Este estudio pretende ofrecer un marco de referencia para los responsables políticos, educadores y administradores, proporcionando recomendaciones basadas en evidencia que puedan transformar el panorama educativo en España. Al hacerlo, se busca no solo elevar el rendimiento académico, sino también garantizar que cada estudiante tenga las oportunidades necesarias para alcanzar su máximo potencial.

En definitiva, esta investigación se propone no solo desentrañar los factores que influyen en el rendimiento educativo, sino también ofrecer soluciones prácticas y basadas en estudios empíricos que puedan guiar la toma de decisiones en el ámbito educativo. Al abordar estos temas con rigor y profundidad, esperamos contribuir a un futuro en el que la educación en España sea sinónimo de excelencia.

Todos los datos empleados en este trabajo han sido analizados con el máximo rigor. Las bases de datos se han tomado de diversas fuentes e instituciones oficiales. Además de tomar los datos de instituciones estatales muchos de ellos han sido reforzados con datos proporcionados por las Comunidades Autónomas. En concreto, en

este trabajo se ha analizado con detalle a la Comunidad de Castilla y León de donde se han empleado los datos de la plataforma [Datos Abiertos Castilla y León](#) que se ha citado en la bibliografía como [[Junta de Castilla y León, 2024](#)]

La estructura del trabajo se organiza en diversos capítulos que proporcionan una comprensión del rendimiento educativo en el contexto español:

- En el **Capítulo 1**, se realiza un análisis de la legislación educativa española. Se examinan las políticas y reformas educativas implementadas a lo largo del tiempo, identificando cómo estas han influido en los organigramas educativos.
- El **Capítulo 2**, ofrece una explicación detallada de los distintos tipos de evaluaciones en informes educativos, destacando la importancia de PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) y TALIS (Encuesta Internacional sobre Enseñanza y Aprendizaje). Se exploran las metodologías de evaluación y su relevancia para comprender el rendimiento educativo.
- En el **Capítulo 3**, se lleva a cabo un estudio exhaustivo sobre el informe PISA en España y sus comunidades autónomas, analizando la evolución de las puntuaciones a lo largo del tiempo. Se examinan las tendencias y se identifican posibles patrones en el rendimiento estudiantil.
- El **Capítulo 4**, se centra en analizar los factores explicativos del rendimiento educativo. Se exploran variables como el gasto público en educación, el estatus socioeconómico del alumnado entre otros elementos clave para entender las variaciones en el rendimiento educativo.
- El **Capítulo 5**, presenta un estudio específico sobre el informe PISA 2022, con un enfoque en la competencia matemática. Se examinan los resultados y se identifican posibles áreas de mejora en la educación matemática en España.
- En el **Capítulo 6**, se lleva a cabo un análisis estadístico y econométrico. Este estudio se abordará mediante técnicas de machine learning para analizar y predecir el rendimiento educativo, utilizando factores explicativos identificados en capítulos anteriores. Este enfoque proporciona una perspectiva predictiva basada en la serie temporal de datos. Por un lado, se realizará un modelo de sección cruzada para entender el rendimiento educativo de 2022 donde las variables independientes serán los factores explicativos y la variable dependiente será el rendimiento educativo. Por otro lado, se realizará una predicción de la serie temporal del rendimiento educativo en Matemáticas empleando diversos métodos estadísticos y de Machine-Learning.
- En el **Capítulo 7**, se expondrán algunas conclusiones derivadas de los estudios previos y se propondrán unas líneas de política educativa que puedan guiar la toma de decisiones en el ámbito educativo y promover el funcionamiento correcto del sistema educativo.

**Justificación de afinidad con el Máster de Profesor en E.S.O. y Bachillerato en Matemáticas.** Este trabajo de investigación se propone no solo desentrañar los factores que influyen en el rendimiento educativo, sino también delinear las políticas públicas que puedan guiar la toma de decisiones en el ámbito educativo. Como se

observará a lo largo del trabajo, las medidas necesarias para incrementar el rendimiento educativo estarán basadas en la innovación docente en Matemáticas que se ha enseñado en el máster. En concreto, en las asignaturas Didáctica de las Matemáticas, Diseño Curricular en Matemáticas, Metodología y Evaluación en Matemáticas e Innovación Docente en Matemáticas (IDM). Poniendo de relieve el Plan de Mejora implementado por la Junta de Castilla y León. Además, este estudio tiene una fuerte componente investigadora donde se ha seguido la metodología enseñada en la asignatura Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas (IIEM)



## Capítulo 1

# La Educación en el Ordenamiento Jurídico Español

### 1.1. Legislación y poder judicial en el ámbito educativo

Lo relativo a la educación, el régimen jurídico español ha sido un tema que ha originado gran polémica y que perdura hasta el día de hoy. Esto ha dado lugar a diversas controversias que han sido reflejadas en las leyes del ámbito educativo y en los numerosos conflictos jurisdiccionales. Por ello, es preciso estudiar las fuentes en materia de educación para después concretar de manera conveniente. Una de las fuentes primarias ineludibles es la Constitución Española de 1978, en su Carta Magna donde aparece el artículo 27, uno de los más debatidos en las Cortes Constituyentes. Era disputada la libertad y el pluralismo “Ya desde este momento, el debate planteaba esencialmente un enfrentamiento de posiciones que pueden resumirse en dos posiciones [. . .]: el pluralismo escolar frente a la escuela única, aunque pluralista” (López-Muñiz, 1979, p 217). Esta contraposición que se mantiene hasta nuestros días tuvo como resultado una redacción del art. 27 CE que puede resultar algo confusa. Es por esto, que se vuelve complejo delimitar el derecho al que hace referencia el citado artículo. La falta de consenso político en este ámbito, fruto de las diferentes visiones ideológicas, ha dado lugar a numerosas disputas tras la aprobación de la Constitución. Todo este conflicto se ha reflejado en las diversas leyes orgánicas en materia de educación (Fernández-Miranda y Sánchez Navarro, 1978, pp 157-272). Entre las principales leyes, son de obligada mención la Ley orgánica 8/1985, de 3 de julio, reguladora del derecho a la educación (LORDE); Ley 1/1990, 3 de octubre de 1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE); Ley Orgánica 9/1995, de 20 de noviembre, de participación, evaluación y el gobierno de centros docentes; Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de la calidad de la educación (LOCE); Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación (LOE); y Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). La nueva Ley Orgánica educativa, es una reforma de la LOE llamada LOMLOE, cuyos acrónimos significan Ley Orgánica por la que se Modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. El derecho a la educación es uno de los derechos fundamentales, en base al artículo 10 de la Constitución Española, que reconoce y protege la dignidad humana. Todos los poderes públicos quedan vinculados por los derechos fundamentales según afirma el artículo 53.1 de la Constitución Española. Cabe la regulación del



Figura 1.1: Línea de tiempo de la legislación educativa en España

ejercicio de tales derechos y libertades que se tutelarán de acuerdo con lo previsto en el artículo 161,1 a), que hace referencia al recurso de inconstitucionalidad que se puede interponer contra leyes y disposiciones normativas con fuerza de ley ante el Tribunal Constitucional.

Para dar cumplimiento al mandato constitucional, el poder legislativo ha dado luz a diferentes procedimientos en relación con los distintos derechos y órganos jurisdiccionales implicados. Es menester poner énfasis a los artículos 114 a 122 bis de la Ley 29/1998, de la Jurisdicción Contencioso-Administrativa (LJCA) haciendo referencia los citados artículos al procedimiento preferente y sumario al que alude el art. 53.2 CE. Este procedimiento tiene como objeto la impugnación de cualquier forma de actuación administrativa que vulnere alguno de los derechos de los artículos 14 a 29 de la Constitución Española: actos, disposiciones, actividad material de la Administración e inactividad Administrativa. El artículo 119 contempla la intervención preceptiva del Ministerio Fiscal, al que se dará traslado de la demanda, junto a las partes demandadas, para que formule las alegaciones y presente la documentación que se estime oportuna. En virtud del artículo 121 de la LJCA contra las sentencias del Juzgado de lo Contencioso-Administrativo cabrá recurso de apelación y contra las sentencias dictadas en única instancia de la Sala de lo Contencioso-Administrativo de la Audiencia Nacional y por las Salas de lo Contencioso-Administrativo de los Tribunales Superiores de Justicia cabrá recurso de casación ante el Tribunal Supremo según el art. 86 LJCA, (Yarza, 2017).

## 1.2. Bases constitucionales del derecho a la educación

Resulta de obligado análisis el articulado constitucional que rodea a la educación. Se comienza con el estudio del artículo 27 de la Carta Magna para discernir los criterios que el Tribunal Constitucional usa en sus sentencias para justificar la educación diferenciada en la Constitución Española. Puede dividirse el contenido del precepto en el derecho a la educación y la libertad de enseñanza. Esta dualidad se encuentra reflejada tanto en la jurisprudencia del Tribunal Constitucional como en la doctrina. Otro enfoque alternativo de sendos conceptos es la libertad y prestación, siendo esta división de derechos la usada en la doctrina clásica. Por un lado, los derechos de libertad imponen una actitud de abstención por parte en especial del poder público, es decir, una delimitación negativa del ámbito de actuación del individuo (Pérez Tremps, 2013, p 128). Por otro lado, en los derechos de prestación, requieren de una actitud activa de los poderes públicos, lo que puede implicar, en su caso, el destino de fondos públicos para que ese derecho fundamental pueda ser ejercitado por los ciudadanos (Guardia, 2019, p 327). Esto resulta esencial a la hora de estudiar el art. 27 CE pues trata de recoger sensibilidades diferentes. Muchos autores se refieren a este artículo como ejemplo de consenso. No obstante, la polémica que suscitó en su día en las Cortes Constituyentes sigue latente, sobre todo en la financiación pública

de centros privados. El Tribunal Constitucional irá delimitando este derecho, pero solventando esto con votos particulares y concurrentes.

En lo relativo al derecho a la educación la doctrina ha mantenido en estas décadas los puntos esenciales del art. 27 CE. También forman parte de la Carta Magna el art 10.2 CE. El contenido del derecho a la educación varía en función del autor en ciertas cuestiones. Una ejemplificación de esto puede ser que por un lado, Embid Irujo opina que el derecho al acceso a los centros de enseñanza se encuentra dentro del derecho a la educación sin más limitaciones que las establecidas por razones de interés público; por otro lado, Fernández-Miranda contempla el derecho a la elección de centro dentro de la libertad de enseñanza (Martínez Pisón, 2003, p 128). Estas discusiones no son intrascendentes, de hecho son discusiones cuya esencia es de suma importancia. No es equivalente la interpretación del acceso a los centros como un derecho de prestación que como un derecho de libertad de enseñanza. Este discernimiento se hará en base al contenido establecido por el Tribunal Constitucional a través de la jurisprudencia establecida. Se puede dilucidar a partir de la Constitución Española el papel que juegan los poderes públicos respecto al derecho a la educación como bien señala Ortiz Díaz, el Estado no asume para sí mismo y con exclusividad una función educativa “prestadora” sino garantizadora, es más, “dice el texto constitucional a este respecto que los poderes públicos garantizan. . . ; y dice bien, puesto que no parece admisible en este terreno un mayor protagonismo de los poderes públicos; estos garantizan la educación, pero no educan” (Zumaquero, 1984, p. 249-250).

### **1.3. Configuración jurisprudencial del ideario educativo como derecho**

Si uno atiende a la Constitución Española, en concreto al artículo 27.5, se habla acerca de la garantía institucional de la enseñanza pública; el apartado siguiente prevé “la libertad de los centros docentes”. Velar por un lógico pluralismo y la independencia política partidista es la razón de ser de este derecho promoviendo así la libertad de enseñanza, es más es la “conveniencia de establecer distancias con respecto a la influencia política partidista que podría suponer la dependencia sin más del gobierno estatal, regional o municipal de que se tratara” (López-Muñiz, 2004, p. 488). Consecuencia de la libertad de creación de centros docentes, se establece la fijación de un ideario o carácter propio del centro ya que “sin ideario carece de sentido la libertad de creación de centros docentes, porque el ideario garantiza frente a terceros el tipo de educación que en él se va a proporcionar” (Ortiz Díaz, 1980) (Beneyto Berenguer, 2005, p. 17). Sin embargo, todo esto no venía de forma explícita salvo en la LOECE en los artículos 15, 18 y 34, los cuales fueron impugnados por el grupo socialista ante el Tribunal Constitucional. El Constitucional dictó sentencia desestimando todos los motivos y reconoció el derecho del ideario configurando los límites del derecho (STC 5/1981). En el recurso interpuesto por el grupo socialista, se interpretaba que el alcance del derecho al ideario solo comprendía aspectos morales y religiosos. Sin embargo, el Tribunal Constitucional “no acepta la tesis de los recurrentes que lo constreñía a los aspectos morales y religiosos sin poder entrar en los pedagógicos, culturales o científicos, como si dicho ideario fuera una mera consecuencia del derecho a la elección de formación moral y religiosa” (Fernández-Miranda, 1988, p. 82).

Como dice el fundamento jurídico octavo de la sentencia: “El derecho a establecer un ideario no está limitado a los aspectos religiosos y morales de la actividad educativa. [...], el ideario educativo propio de cada centro puede extenderse a los distintos aspectos de su actividad”. Se encuentran dos limitaciones en el derecho de la fijación de un ideario propio: por un lado, se tienen los límites materiales o sustantivos, que van dirigidos a asegurar que el contenido de la docencia impartido en base al ideario es aceptable; por otro lado, están los límites formales basados en la sujeción a un sistema de autorización, que permita controlar el cumplimiento de los límites materiales. Dicha autorización no puede ser estrictamente reglada ya que “invadiría así la delicada labor de delimitar un conjunto de derechos constitucionales en presencia, labor que sólo corresponde a las jurisdicciones competentes”(STC 77/1985). En los casos flagrantes de traspaso de los límites materiales cabría la denegación por parte de la Administración, por ejemplo en el caso de que fuera un centro discriminatorio. Sin embargo, “no deben ser objeto de un control previo por parte del Gobierno, sino que deben ser tutelados por los Tribunales de Justicia a posteriori” (Domínguez-Berrueta y Sendín, 2005, p. 99). Sobre todo existe una problemática, esa es la ausencia de un régimen de autorizaciones por el ideario. La existencia de este sería necesaria para poder garantizar la independencia de la Administración frente al Gobierno de turno ya que este último podría decidir con fines ideológicos que ideario se autoriza y cuál no.

#### **1.4. El concierto de la educación**

Un tema polémico en cuanto al contenido del artículo 27 de la Constitución Española es el de la educación concertada. Las controversias residen en si el derecho de los padres a elegir centro educativo podrían ser parte de la libertad de enseñanza. No se entrará en profundidad de si el derecho a la financiación pública se trata de un derecho prestacional o de un derecho de libertad. El artículo 27.9 de la Constitución Española dice que “los poderes públicos ayudarán a los centros docentes que reúnan los requisitos que la Ley establezca”. Esta redacción integra dos posturas. Por un lado, se podría interpretar de forma que la financiación pública es un derecho fundamental y por otro lado que se trata de un derecho de configuración legal. El Tribunal Constitucional matizó el contenido del citado derecho cuando se impugnó la LODE de 1985. “Este afirmó que del art. 27.9 no se desprende un derecho fundamental incondicionado a una prestación económica pública a favor de centros privados” (Guardia, 2019, p. 331-332). El derecho a la financiación no surge directamente del art. 27.9 CE sino del desarrollo legislativo que se realiza a partir de él. Esto no es óbice para que, como bien matiza el Tribunal de Garantías, el legislador sea libre para habilitar tal marco normativo. “Lo que la Constitución establece es una obligación de los poderes públicos y no un derecho subjetivo de los particulares” (Lorenzo Vázquez, 2001, p. 79). Se podría dar otro régimen distinto al concierto como el cheque escolar. Es decir, “se advierte rápidamente que el abanico de posibilidades que se deja en manos del legislador español y de su ejecución por las administraciones educativas es muy amplio” (Guardia, 2019, p. 332). Sin embargo, el Tribunal Constitucional ha manifestado que la “gratuidad garantizada constitucionalmente no puede referirse exclusivamente a la escuela pública, negándola a todos los centros privados, ya que ello implicaría la obligatoriedad de tal enseñanza pública, al menos en el nivel bási-

co, impidiendo la posibilidad real de elegir la enseñanza básica en cualquier centro privado. Ello cercenaría de raíz, no solo el derecho de los padres a elegir como centro docente, sino también el derecho de creación de centros docentes consagrado en el artículo 27.6 CE” (STC 31/2018).

## **1.5. La libertad de los padres y la libertad de enseñanza**

El artículo 27.3 de la Constitución Española afirma que “los poderes públicos garantizan el derecho que asiste a los padres para que sus hijos reciban formación religiosa y moral que esté de acuerdo con sus propias convicciones”. Este precepto que puede encontrarse de manera equivalente en numerosos tratados internacionales, manifiesta el contenido de libertad que tiene la educación. Otro artículo a consultar suele ser el artículo 27.1 CE cuando habla de la libertad de enseñanza. El poder judicial ha tratado de hacer una ponderación para conseguir un equilibrio entre los diversos intereses en conflicto. Las controversias que se dan en el mundo educativo son variadas como la enseñanza de lenguas cooficiales o la asignatura de religión. Todas estas controversias desembocan en una problemática común: hasta dónde llega la intervención del Estado en la educación de las personas. Esto no quiere decir que las controversias citadas sean una cuestión exclusiva de la libertad de enseñanza. El Tribunal Constitucional dejó claro que el derecho a la educación incorpora “sin duda” un “contenido primario de derecho de libertad” y junto a él “una dimensión de libertad” y de manera conjunta a este “una dimensión prestacional, en cuya virtud los poderes públicos habrán de procurar la efectividad de tal derecho” (STC 86/1985). El profesor López-Muñiz denomina “derecho de educación en libertad” (López-Muñiz, 2007, p. 33-34) que reconoce la Constitución Española.

## **1.6. Abandono escolar y legislación educativa**

Si bien ahora, se va a exponer de manera sucinta el efecto de la legislación educativa y sus efectos sobre el abandono escolar, después se estudiará en detalle el rendimiento escolar. Las definiciones del abandono escolar en la literatura son diversas, por ello es preciso dar una definición previa sobre el abandono prematuro de la escuela. En este trabajo se hará uso de la medida estándar de la OCDE. Se define *abandono escolar* como el porcentaje de la población de entre 18 y 24 años cuyo máximo nivel educativo es formación secundaria obligatoria, según la *International Standard Classification of Education* (ISCED). El abandono escolar es uno de los problemas prioritarios de los sistemas educativos, ya que sus consecuencias en el mercado de trabajo y participación en la sociedad es negativo (Heckman y Lafontaine, 2009). Los costes sociales asociados al abandono escolar son elevados pues supone un incremento de la exclusión social, es decir, condiciones socioeconómicas mucho peores que como se verá después conlleva una disminución del rendimiento escolar. Por otro lado, la cualificación que posee la fuerza de trabajo contribuye al desarrollo económico, lo que deriva en una mejora de las condiciones socioeconómicas de la población, descenso de la tasa del paro... que se verá después que son factores determinantes para un buen rendimiento educativo. La tasa de abandono escolar en España disminuyó desde el 70% en 1977 hasta el 30% a mediados de

la década de los 90, estancándose ese nivel de porcentaje desde entonces hasta la Crisis Financiera de 2008. En los años 2012 y 2013 la incidencia del abandono prematuro de la educación de la escuela disminuyó en cinco puntos porcentuales. Esto seguramente haya sido causa de la recesión, pues los jóvenes son menos propensos a tener trabajos de baja cualificación que estaban disponibles antes de la crisis. Las tasas de abandono escolar son significativamente elevadas en España, basta atender a los datos proporcionados por la OCDE y el Ministerio de Educación Español, en el 2011 alcanzó el 26,5%, entre las más elevadas de Europa donde por ese entonces la media de la UE-27 se sitúa en torno al 13,5%. Actualmente, en 2023 la tasa de abandono se sitúa en el 13,9%, aunque los jóvenes de 25 a 34 años que sólo tienen estudios básicos son el 26,5% de la población, frente al 12% de la UE. Resulta de gran interés estudiar la causa por la que el secular proceso de caída de la tasa de abandono escolar y la brecha con la UE sólo produzca tímidas mejoras. Cabe mencionar que se produjo una notable mejora respecto del abandono escolar y una clara reducción de la brecha con Europa durante la legislatura en la que Mariano Rajoy era presidente del Gobierno. La hipótesis que se baraja en este trabajo que procede de [Florentino Felgueroso and Jiménez-Martín, 2013] es que la LOGSE supone un aspecto determinante que ha provocado un estancamiento en el descenso de la tasa de abandono escolar. La LOGSE sustituyó a la LGE (Ley General de Educación) de 1970.

En el periodo de vigencia de la LGE, la educación obligatoria abarcaba el periodo temporal comprendido de los 6 a los 14 años, la *Educación General Obligatoria* abreviada bajo el acrónimo EGB o educación primaria, aunque en la década de los ochenta, puesto que estaba legalmente prohibido trabajar hasta los dieciseis años desde el Estatuto de los Trabajadores, la escolarización obligatoria estaba generalizada hasta esa edad. Cuando el alumnado de catorce años no mostraba un rendimiento óptimo en la EGB eran derivados a la *Formación Profesional de Primer Grado* FPI, hasta los dieciseis años. Esto supone que, de facto, si bien la educación obligatoria en la EGB llegaba hasta los catorce años en realidad era hasta los dieciseis para el alumnado que accedía al primer nivel de formación profesional o bachillerato. El estudiante graduado de la EGB tenía la posibilidad de elegir entre la educación secundaria denominada *Bachillerato Unificado Polivalente*, abreviado como BUP o formación profesional de segundo grado FPI. Una vez finalizada la educación secundaria cabía la posibilidad de realizar un curso especializado para el acceso a la universidad el denominado *Curso de Orientación Universitaria* resumido bajo el acrónimo COU.

Una vez implantada la LOGSE, dicha ley disminuyó la duración de la educación primaria llamada *Educación Primaria Obligatoria* abreviadamente EPO, hasta los doce años, e impuso la obligatoriedad de la *Educación Secundaria Obligatoria* denominada bajo las siglas ESO, hasta los dieciseis años. Tras completar la ESO, el estudiante podía optar por el *Bachillerato* con una duración bianual, hasta los dieciocho años e ir a la universidad o estudiar formación profesional, *Formación Profesional de Grado Medio*.

Comparando sendas leyes y su efecto sobre la temporalidad de los ciclos educativos, se observará que precisamente la LOGSE introdujo ciertos cambios en la educación. En primer lugar, aumentó la educación obligatoria de los catorce a los dieciseis años. En segundo lugar, redujo la educación primaria de los catorce a los doce años e incluyó un período adicional de cuatro años de ESO, partiendo de los doce y llegando hasta los dieciseis. Por ello, la educación secundaria no obligatoria aumentó

---

de catorce a dieciséis años. Todo esto, conllevó la eliminación de la FPI de primer grado, es decir, la de los catorce a los dieciséis años y el alumnado de esa edad se vió obligado a cursar la educación secundaria obligatoria. Nótese que en 1990 y 1991, el 39,1 % de los hombres de catorce y quince años y el 31,9 % de las mujeres estaban matriculados en FPI. Todo lo anterior tuvo como consecuencia que el alumnado sin interés por obtener un perfil académico cursasen una educación obligatoria académica en lugar de un tipo de formación adaptada a un perfil más profesionalizado. Este hecho podría haber generado los denominados *negative peer effects* que traducido significa los "efectos condiscípulo negativos" al emparejar el resto de estudiantes con alumnos con menor motivación y con menos interés académico, teniendo esto unas graves consecuencias sobre el rendimiento general. Asimismo, la obligación del alumnado a permanecer en el sistema educativo en períodos más largos, podría haber provocado una disminución en la fracción que estudia formación profesional. Por la particular composición de España en comunidades autónomas conviene estudiar las diferencias regionales, y en concreto en esta sección el ritmo de implementación de la LOGSE.

Como bien señala buena parte de la literatura este podría ser un factor determinante pero, como lleva siendo una constante a lo largo del informe PISA, no permite hacer comparaciones temporales. Para poder hacer uso de este factor sería necesario un análisis de ámbito internacional que no es el objetivo de este trabajo.



## Capítulo 2

# Evaluaciones del Sistema Educativo

La evaluación internacional de la educación es un proceso analítico y comparativo que tiene como finalidad examinar los sistemas educativos de diversas naciones con el objetivo de medir su eficacia y calidad. Estas evaluaciones son típicamente llevadas a cabo por organizaciones internacionales de renombre, tales como la *Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura* (UNESCO), la *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos* (OCDE), y la *Unión Europea* UE, la *Asociación Internacional de Evaluación del Rendimiento Educativo* (IEA), entre otras. Estas evaluaciones se sustentan en una serie de indicadores y pruebas diseñadas para medir diversos aspectos del sistema educativo en los países participantes. Ejemplos notorios de evaluaciones internacionales en este ámbito incluyen el *Programa Internacional para la Evaluación de Alumnos* (PISA) de la OCDE, el *Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias* (TIMSS), *Estudio Internacional sobre la Enseñanza y el Aprendizaje* (TALIS) y el *Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora* (PIRLS). Estos estudios proporcionan a las naciones participan-

<b>Informes Educativos</b>	<b>Institución</b>
PISA	OCDE
TIMMS	IEA
PIRLS	IEA
TALIS	OCDE
EECL	UE
PIAAC	OCDE
TEDS-M	IEA

Cuadro 2.1: Algunos informes educativos con sus instituciones organizadoras correspondientes.

tes información de gran relevancia para evaluar sus respectivos sistemas educativos en un contexto global, identificar áreas de mejora y aprender de las mejores prácticas implementadas por otros países. Se persigue el propósito de estimular la mejora constante de los sistemas educativos a nivel global, identificar prácticas efectivas y promover el intercambio de conocimientos entre naciones. Estas evaluaciones asis-

ten a los responsables de la toma de decisiones al ofrecer una mejor comprensión de los desafíos y oportunidades en el ámbito educativo, permitiéndoles adoptar políticas más efectivas y fundamentadas en base a la información obtenida.

En este trabajo se analizarán los datos de los informes PISA y TALIS, que de manera conjunta se encargan de evaluar el sistema educativo de los Estados participantes. La diferencia entre ambos informes es su población objetivo, si bien el informe PISA se focaliza en el alumnado, el informe TALIS se encarga del profesorado.

## 2.1. Informe TALIS

El informe TALIS (*Teaching and Learning International Survey*) "es el Estudio Internacional de la Enseñanza y del Aprendizaje promovido por la OCDE. El estudio se lleva a cabo mediante la aplicación de cuestionarios específicos dirigidos al profesorado y a las direcciones de los centros educativos de primaria y secundaria en relación con sus condiciones laborales, su formación inicial y permanente, su experiencia y prácticas docentes, el clima escolar de sus centros, su grado de satisfacción con la profesión, sus prácticas de evaluación y su gestión de la disciplina" (INEE, 2018, pág 11). Dicha evaluación se realiza con una periodicidad de un lustro, desde 2008 participando España en sus tres últimas ediciones, que han sido celebradas en los años 2008, 2013 y 2018. Es decir, este estudio tiene como objetivo evaluar y analizar las condiciones laborales de los docentes, así como las prácticas de enseñanza en escuelas en la etapa de primaria y secundaria en un marco internacional. Este estudio se lleva a cabo a través de encuestas y cuestionarios diseñados para recopilar información detallada sobre la profesión docente y el ambiente de trabajo en distintos países. El estudio se enfoca en aspectos clave relacionados con la enseñanza, incluyendo la formación y el desarrollo profesional de los docentes, las condiciones de trabajo, las prácticas pedagógicas, la satisfacción laboral y la percepción de la profesión docente. Los datos recopilados permiten realizar comparaciones entre países y regiones, lo que brinda información valiosa para los responsables de la toma de decisiones en educación, es decir, los encargados de diseñar la política educativa. Este estudio proporciona una visión global de la profesión docente, identifica áreas de mejora y orienta el diseño de políticas educativas efectivas. Los resultados se utilizan para promover la calidad de la educación y el bienestar de los docentes en todo el mundo.

## 2.2. Informe PISA

El informe PISA (*Programme for International Student Assessment*) que traducido significa *Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes* "es un estudio de evaluación internacional promovido por la OCDE y los países participantes, que intenta responder a una necesidad común a todos los sistemas educativos actuales: delimitar, describir y explicar lo que los jóvenes de quince años, que ejercerán en poco tiempo después sus derechos como ciudadanos, conocen y saben hacer, aplicando sus conocimientos a una variedad de entornos y contextos, al final de su etapa educativa obligatoria" (INEE, 2018, pág 17). El Informe PISA se lleva a cabo cada tres años y tiene como objetivo proporcionar una evaluación comparativa de los sistemas educativos de los países participantes. El objetivo principal del Informe consiste me-

dir y comparar el rendimiento académico de los estudiantes de diferentes países en áreas fundamentales, como matemáticas, lectura y ciencias. También evalúa la capacidad de los estudiantes para aplicar sus conocimientos en situaciones del mundo real, lo que se conoce como *competencia global*. Recalcar de nuevo que, el informe enfatiza el cómo emplea el alumnado el conocimiento obtenido en las asignaturas.

### 2.2.1. Características del informe PISA

El informe PISA se celebra con una periodicidad trianual, celebrándose por primera vez en el año 2000. Por lo tanto, han tenido lugar ocho ediciones del informe las de los años 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018 y la última en 2022, ya que por causa de la pandemia COVID-19 se atrasó la fecha de la convocatoria.

Como se ha comentado antes, la *población objetivo* es el alumnado de quince y dieciséis años, que lleven al menos seis años en el sistema educativo. En España, dicha población está recogida en los estudiantes de 4<sup>º</sup> ESO. La muestra es de 600.000 alumnos, como representación de una población objetivo es 32 millones de personas. La composición de esta muestra consta de centros públicos y privados de cada Estado siendo éstos elegidos de manera aleatoria. La OCDE obliga a que la muestra estatal alcance una representatividad mínima del 85 % de la población objetivo.

La competencia global se divide a su vez en tres competencias troncales: lectora, matemática y científica, que el informe PISA define como sigue

- (1) La *competencia lectora* es la "capacidad del estudiantado de comprender, emplear, valorar, reflexionar e interesarse por los textos escritos para alcanzar unos objetivos, desarrollar el conocimiento y potencial propios y participar en la sociedad".
- (2) La *competencia matemática* es la "capacidad de los estudiantes de formular, aplicar e interpretar las Matemáticas en contextos diferentes. Incluye razonar matemáticamente y emplear conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos de diverso tipo".
- (3) La *competencia científica* es la "capacidad de los estudiantes de interesarse sobre cuestiones e ideas científicas como ciudadano reflexivo. Una persona científicamente competente sabe intervenir con un discurso razonado sobre ciencia y tecnología para explicar fenómenos científicos, valorar y diseñar investigaciones científicas, e interpretar datos y pruebas científicas".

Estas definiciones han sido tomadas de (INEE, 2018, pág 19). En cada edición del informe se focaliza en el análisis de una de las competencias troncales, donde en la última edición, la de 2022, se centra en la evaluación de la competencia matemática como materia principal y la comprensión lectora y científica como secundarias. La competencia innovadora es en esta ocasión el pensamiento creativo. Se pretende medir la evolución del conocimiento y las habilidades del alumnado en un contexto de proliferación de las tecnologías de la información y la comunicación, y su capacidad de respuesta a las demandas de un mundo dinámico, donde la innovación y la creatividad son elementos cruciales para la adaptación.

La participación estatal está compuesta por los Estados miembros de la OCDE que lo soliciten y Estados asociados que, sin ser miembros, decidan participar en la

edición correspondiente del informe. En 2022, en total 81 países, de ellos 37 forman parte de la OCDE.

La prueba se realiza mediante medios informáticos, es decir, con ordenador. Estos exámenes están compuestos por un cuestionario donde las preguntas son de tipo test con opción múltiple y abiertas, de dos horas y cuatro partes de media hora. Asimismo, se realizan cuestionarios adicionales sobre el contexto del centro y sobre el marco socioeconómico, para contextualizar y realizar un análisis minucioso de los sistemas educativos.

Los resultados a partir de las mediciones del informe PISA, constituyen una medida relativa, pues se cotejan resultados de distintos países y sus sistemas educativos, y en el caso de España, entre las distintas regiones y Comunidades Autónomas. Los resultados brindados por el informe se miden con una distribución normal de media 500 y desviación típica 100. Es un convenio que pretende "fijar un promedio internacional y ubicar dentro de una escala común el resultado de cualquier estudiante, centro o país, y de esta forma dar significado al análisis de resultados" (Consejería de Educación de Asturias, 2018, pág 27). Así, las diferencias de 10 o 20 puntos no pueden considerarse demasiado altas, aunque cabe recalcar que para la OCDE la diferencia de 30 puntos equivale a un curso escolar. La OCDE, establece escalas que permiten la valoración del desempeño del alumnado en función de la dificultad de las preguntas que integran la prueba, el escalado está compuesto por alumnos de tipo A (rendimiento *relativamente alto*), de tipo B (rendimiento *moderado*) y de tipo C (rendimiento *relativamente bajo*). Lógicamente, la pretensión de los sistemas educativos a través de la política educativa debería de ser la reducción del número de alumnos de bajo rendimiento y aumentar los de alto rendimiento.

### **2.2.2. Anomalías de la Evaluación de la prueba PISA**

El informe PISA es un estudio ampliamente reconocido y utilizado para evaluar el rendimiento académico de estudiantes en todo el mundo. Sin embargo, como cualquier evaluación a gran escala, PISA no está exento de críticas y desafíos. Las pruebas se administran en varios idiomas, lo que puede generar diferencias en los resultados según la lengua materna de los estudiantes. Además, el contenido y las preguntas de las pruebas pueden estar sesgados culturalmente, lo que podría afectar a los estudiantes de diferentes países. Atendiendo al diario El País (Elisa Silió, 2019) se han detectado anomalías en diez países durante las diversas ediciones de PISA, destacando las llamadas al boicot austriaco en 2009, negándose el 2,2 % del alumnado a realizar la prueba; la falta de representatividad de los colegios elegidos, como en Malasia en el año 2015, o las anomalías detectadas en las pruebas de lectura en España en 2018. Estos errores enfatizan la forma de aplicar y adaptar la prueba a cada lengua y sistema educativo, siendo esto un deber de los Gobiernos de los países, pudiendo dar lugar a sesgos y errores en la prueba donde cabe la posibilidad de que los resultados obtenidos son irrelevantes.

## Capítulo 3

# El informe PISA en España

España es un país que se compone de 17 comunidades autónomas y 2 ciudades autónomas, cada una de las cuales tiene una cierta autonomía para gestionar sus asuntos internos en áreas como la educación, la salud, la cultura y la administración local.

La composición del país en comunidades autónomas y su organización política se encuentra regulada principalmente en la Constitución Española de 1978. La Constitución establece los principios fundamentales de la organización territorial de España en su Título VIII, que lleva por título "De la Organización Territorial del Estado". El art.2 CE establece que la Constitución se fundamenta en la indisoluble unidad de la Nación Española, que comprende su territorio y su pueblo. Reconoce y garantiza el derecho a la autonomía de las nacionalidades y regiones que la integran, así como la solidaridad entre todas ellas. El art.137 CE establece que las Comunidades Autónomas pueden asumir competencias en diversas materias de acuerdo con sus respectivos Estatutos de Autonomía, y señala que las competencias no atribuidas al Estado por la Constitución pueden corresponder a las Comunidades Autónomas. En art.148 CE se enumeran las materias sobre las cuales las Comunidades Autónomas pueden asumir competencias legislativas y de ejecución. Estas competencias pueden ser transferidas desde el Estado central a las Comunidades Autónomas, siempre que se cumplan los requisitos establecidos. El art.149 CE se enumeran las materias que son competencia exclusiva del Estado y que no pueden ser asumidas por las Comunidades Autónomas. Algunas de estas materias incluyen la defensa, la seguridad pública y las relaciones internacionales. En adición a la Constitución, cada Comunidad Autónoma tiene su propio Estatuto de Autonomía, que es una ley básica que regula su organización, competencias y sistema de gobierno. Estos Estatutos de Autonomía deben ser aprobados por las Cortes Generales (Parlamento español) y refrendados por los ciudadanos de la Comunidad Autónoma mediante un proceso de votación.

En concreto, la competencia en educación es un asunto que involucra tanto al Gobierno Central como a las Comunidades Autónomas. La Constitución Española de 1978 establece el marco legal y los principios generales para la educación en el país. No obstante, las Comunidades Autónomas tienen una gran autonomía en la gestión de sus sistemas educativos, lo que significa que tienen competencias significativas en esta área. A continuación, se describen las competencias clave en educación en España:

(1) Competencias del Estado Central:

- **Legislación marco:** El Gobierno central tiene la competencia exclusiva para establecer una legislación marco en materia de educación que, por ser la educación un derecho fundamental es ley orgánica. Esto se refleja en la LOE y, más recientemente, en la LOMCE, que establecen los principios generales y las directrices para el sistema educativo en todo el país. Si bien en PISA 2022 la ley vigente ha sido la LOMCE, la última ley educativa es la LOMLOE, tal y como se explicó en el primer capítulo.
- **Títulos académicos y su homologación:** El Estado central es responsable de la regulación y homologación de los títulos académicos y grados universitarios en toda España, garantizando la movilidad y el reconocimiento de estos títulos en todo el territorio nacional e internacional. (art,149.30 CE)
- **Competencias básicas:** El Estado también establece las competencias básicas que deben adquirir los estudiantes en todo el país.

(2) Competencias de las Comunidades Autónomas:

- **Gestión de centros educativos:** Las Comunidades Autónomas tienen competencia para la creación, organización, mantenimiento y supervisión de los centros educativos de su territorio, desde la educación infantil hasta la educación secundaria.
- **Currículo y contenidos:** Las Comunidades Autónomas tienen la facultad de establecer sus propios currículos y contenidos educativos, dentro de los parámetros generales establecidos por la legislación estatal. Esto permite adaptar la educación a las necesidades y características específicas de cada región.
- **Lengua Española y otras lenguas:** En regiones con lenguas cooficiales, las Comunidades Autónomas tienen competencia para regular la enseñanza en su lengua cooficial, así como en la lengua oficial del Estado (español).
- **Educación universitaria:** Aunque el Estado central regula los títulos académicos y su homologación, las Comunidades Autónomas tienen competencia para establecer los criterios de acceso y admisión a las universidades públicas de su territorio.

(3) Competencias compartidas: La financiación de la educación es una competencia compartida entre el Estado central y las Comunidades Autónomas. El Estado establece un marco de financiación, pero las Comunidades Autónomas tienen la responsabilidad de gestionar los recursos destinados a la educación en sus territorios.

(4) Coordinación entre niveles educativos: Existe una coordinación necesaria entre el Estado y las Comunidades Autónomas para garantizar la coherencia y la calidad del sistema educativo en todo el país. Para ello, se celebran reuniones periódicas entre el Ministerio de Educación y las autoridades educativas autonómicas.

En síntesis, el sistema de competencias en educación en España se caracteriza por su modelo descentralizado, donde tanto el Estado central como las Comunidades

Autónomas desempeñan roles y responsabilidades definidos. Este sistema permite la adaptación de la educación a las realidades culturales y lingüísticas de las diversas regiones del país, garantizando al mismo tiempo la coherencia y la movilidad en todo el territorio nacional.

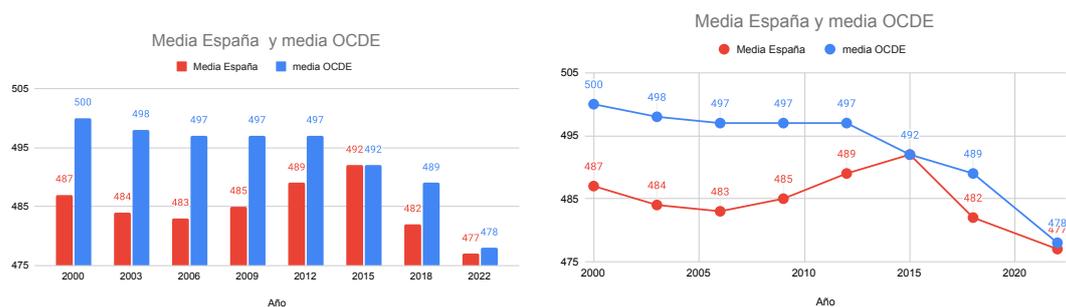
Por lo comentado anteriormente, si bien España es un Estado miembro de la OCDE desde 1991, y ha participado en el informe PISA desde su primera edición en el año 2000, depende de las Consejerías de Educación de las Comunidades Autónomas aplicar las pruebas de evaluación PISA en sus territorios correspondientes. Por tanto, depende de la voluntad de cada Comunidad Autónoma el someterse a la evaluación PISA, a todas las competencias troncales o parcialmente. Como resultado se obtienen uno a nivel nacional y los diversos resultados regionales. Véase los siguientes epígrafes sobre los participantes en las distintas ediciones:

- En el año 2000, participó España obteniéndose un único resultado a nivel nacional, esta prueba la realizó el Ministerio de Educación.
- En el año 2003, participaron las Comunidades Autónomas de forma individualizada, en esta edición únicamente participaron Castilla y León, País Vasco y Cataluña.
- En el año 2006, decidieron participar la mayoría de las Comunidades Autónomas excepto la Comunidad Valenciana, las Islas Baleares, Canarias, Castilla-La Mancha, Madrid y Murcia.
- En 2009 y 2012, se obtienen datos de las 17 Comunidades Autónomas pero algunas se someten a unas determinadas competencias troncales como en las Islas Baleares y la Comunidad Valenciana.
- En 2015 todas las Comunidades Autónomas se someten a todas las pruebas, exceptuando las Ciudades Autónomas, Ceuta y Melilla.
- En 2018 y 2022, ya participan todas las entidades territoriales citadas del país.

### **3.1. Evolución de los resultados en PISA**

En esta sección se presentará un análisis de los resultados del informe PISA en España cotejándolos con las medias de la OCDE. Se ha obtenido la nota media de las tres pruebas que hacen referencia a cada competencia troncal, brindando estas medias una herramienta para medir el rendimiento educativo

A simple vista se observa que los datos de España siempre han sido menores o iguales que la media de la OCDE y por debajo de la media 500 marcada por convenio, se puede afirmar que España tiene un nivel educativo por debajo de la media. Si bien el máximo se alcanza en la edición de 2015 que se consigue equiparar con la media de la OCDE, el mínimo se alcanzó en 2022 con un valor de 477. Atendiendo a la tendencia de las gráficas, si bien la evolución de la nota media de la OCDE es decreciente, la gráfica española presenta distintos tramos, cabe destacar que los resultados tan bajos en esta última edición se deben en parte a la pandemia del COVID-19. El estudio de las tendencias del nivel educativo son complicadas pues beben de varias fuentes, en el caso de la OCDE la tendencia decreciente puede deberse a que la prueba PISA se ha extendido a países menos desarrollados que por



(a) Gráfico de barras de las notas PISA (b) Gráfico de líneas de las notas PISA

Figura 3.1: Gráfico que muestra la evolución de la nota media del informe de PISA de España y la OCDE, elaborado en base a la información de los informes PISA 2000-2018, INEE

ende poseen un sistema educativo deficiente, incidiendo de manera negativa en el promedio. Los informes proporcionados por PISA alertan sobre el estancamiento de los resultados. El análisis de los tramos en el caso español es el siguiente:

- Tramo inicial (2000, 2009): los valores del rendimiento educativo están en el intervalo  $[483, 487]$ , que son unos resultados que están un 15 % por debajo de la media de la OCDE, es decir, unos resultados bajos.
- En el tramo (2009, 2015) los resultados se aproximan a la media con valores en torno a 490, donde en 2015 se alcanza el máximo histórico.
- En el 2018, se ve reflejado un claro empeoramiento de las calificaciones, con un descenso de diez puntos y alcanzando el mínimo histórico.
- En el 2022, se observan mínimos históricos que se deben en parte a los efectos de la pandemia del COVID-19 en el alumnado.

En las Figuras 3.2, 3.3a y 3.3b se pueden observar los resultados desglosados por competencias. En lo que respecta a Matemáticas son realmente negativos donde España tiene una serie de problemas a abordar. Se observa en este caso un estancamiento en el intervalo  $[480, 485]$  puntos, que distan bastante de los de la OCDE, aunque los de esta última han decrecido con el paso del tiempo y la brecha de separación se ha ido reduciendo de manera progresiva. La conclusión que se puede observar es un claro estancamiento a pesar de los avances en alfabetización.

Una vez vistas las tendencias, pueden estudiarse las causas que han podido provocar dicha evolución. En lo respectivo a lo económico, el período 2000-2022 está marcado por la crisis inmobiliaria y financiera, conocida como la *Gran Recesión*, que comienza en el año 2008 y sus efectos recesivos perduraron hasta el año 2013. En el caso de España, la recesión tuvo efectos particularmente graves, pues se tuvo el mayor incremento de la tasa de desempleo comparado con el resto de la UE, en el 2012 se alcanzó un 24,1 % de paro. Otro de los factores puede deberse a la precariedad, según el sindicato de Comisiones Obreras la negatividad de los resultados puede deberse en parte a que "hay un 62 % más de profesores precarios que en 2009, 2.214

### Comparación de resultados en PISA entre España y la OCDE

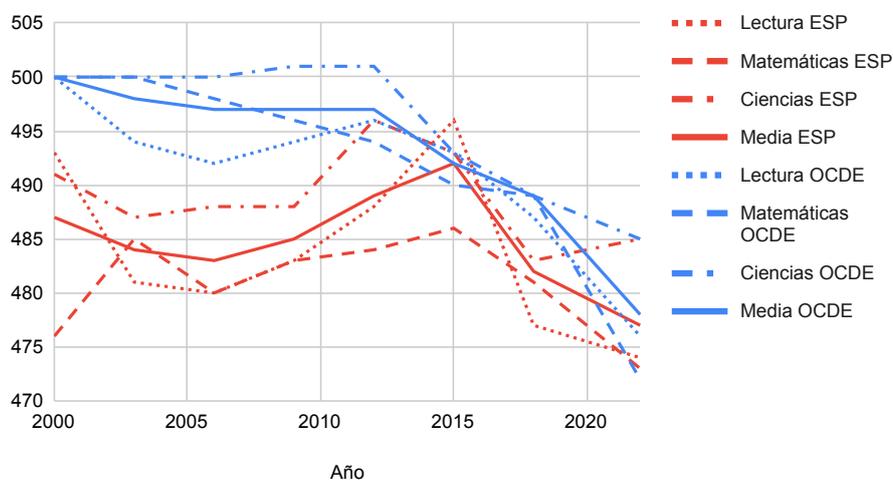
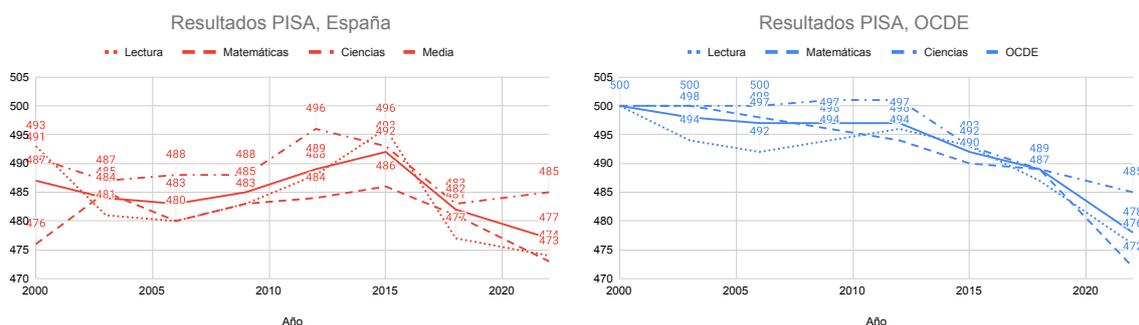


Figura 3.2: Comparativa de los resultados del informe PISA entre España y la OCDE entre 2000 y 2022



(a) Resultados del informe PISA en España entre 2000 y 2022 (b) Resultados del informe PISA en la OCDE entre 2000 y 2022

Figura 3.3: Gráficos que muestra la evolución de la nota media del informe de PISA de España y la OCDE, elaborado en base a la información de los informes PISA 2000-2022, INEE

docentes menos que hace una década y los profesores imparten 20 horas semanales de clase", es decir, existe un empeoramiento de las condiciones educativas y un empeoramiento de las condiciones laborales del profesorado. Finalmente, las puntuaciones tan bajas obtenidas en PISA 2022 pueden deberse en parte a la pandemia COVID-19.

Por lo visto en el primer capítulo, atendiendo a la Figura 1.1 se puede ver que en el período 2000-2022 han estado vigentes tres leyes educativas, la LOCE, LOE y LOMCE, la última ha sido la LOMLOE. Esta inestabilidad legislativa y en concreto en el ámbito educativo, donde a medida que llega un nuevo gobierno propone una nueva reforma educativa, siendo esto un factor claramente negativo para los resultados

académicos. Es relativamente indiferente que la reforma sea positiva o negativa, pues las reformas en educación producen resultados notables a largo plazo, entonces si cada vez que cambia el gobierno que suele ser cada cuatro u ocho años se modifica el sistema educativo, como el currículo, la evaluación o el sistema de acceso a la universidad resulta extremadamente complejo plantear objetivos a medio y largo plazo. Otra de las razones es que según el director de PISA, Andreas Schleider en sus recomendaciones a España plantea que se ha reorientar al sistema educativo en otras facetas y enfatizar menos el aspecto memorístico, ya que como se dijo anteriormente el informe PISA evalúa la puesta en práctica de los conocimientos obtenidos.

### 3.2. Resultados de PISA en las Comunidades Autónomas españolas

Se cotejarán los resultados de PISA de 2015, 2018 y 2022 pues es cuando se tuvo mayor participación por parte de las Comunidades Autónomas, para el estudio autonómico se consideran las medias en cada Comunidad Autónoma en los informes de esos años, esto brindará información sobre la evolución en ese período y tener una comparación intercomunitaria y una comparativa con la media nacional y con el promedio de la OCDE. Se tienen los siguientes gráficos que muestran la evolución de la nota media en el informe de PISA de las Comunidades Autónomas de España, elaborado en base a la información de los informes PISA 2015, 2018 y 2022, INEE

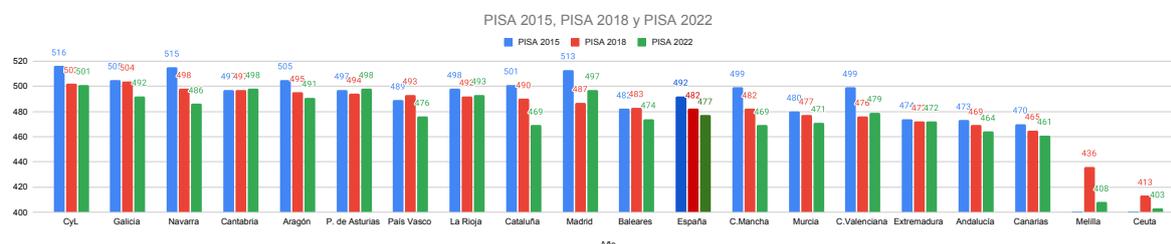


Figura 3.4: Comparación intercomunitaria del informe PISA en España entre 2015, 2018 y 2022, gráfico de barras. Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del Ministerio de Educación y Formación Profesional

Observando las Figuras 3.4 y 3.5, se contempla la tendencia decreciente ya comentada. En prácticamente la totalidad de las Comunidades Autónomas ha habido un empeoramiento de los resultados exceptuando algunas comunidades que han notado una ligera mejoría, la única Comunidad Autónoma que ha mejorado sus resultados notablemente es la Comunidad de Madrid. Otra de las conclusiones que se pueden obtener a raíz del gráfico es que únicamente Castilla y León, Madrid, Navarra, Galicia, Aragón y Cataluña superan en alguno de los dos períodos analizados el convenio de los 500 puntos de la distribución normal, mientras que el resto de las comunidades están por debajo de la media. Aunque, en 2015 únicamente seis Comunidades Autónomas obtienen resultados por debajo de los 490 puntos, es decir, esa diferencia de un 10% no es especialmente significativa. En 2018, las únicas Comunidades Autónomas que superan el promedio de los 500 puntos son Castilla y León y Galicia con 502 y 504 puntos respectivamente. Es decir, el promedio español

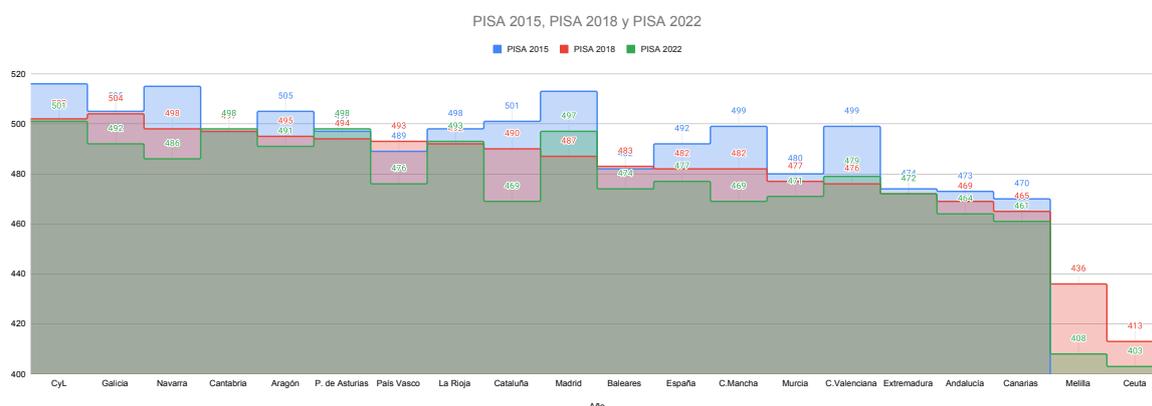


Figura 3.5: Comparación intercomunitaria del informe PISA en España entre 2015, 2018 y 2022, gráfico de áreas. Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del Ministerio de Educación y Formación Profesional

es inferior a 500 puntos. Por último, en 2022 la única Comunidad Autónoma que ha superado los 500 puntos es Castilla y León.

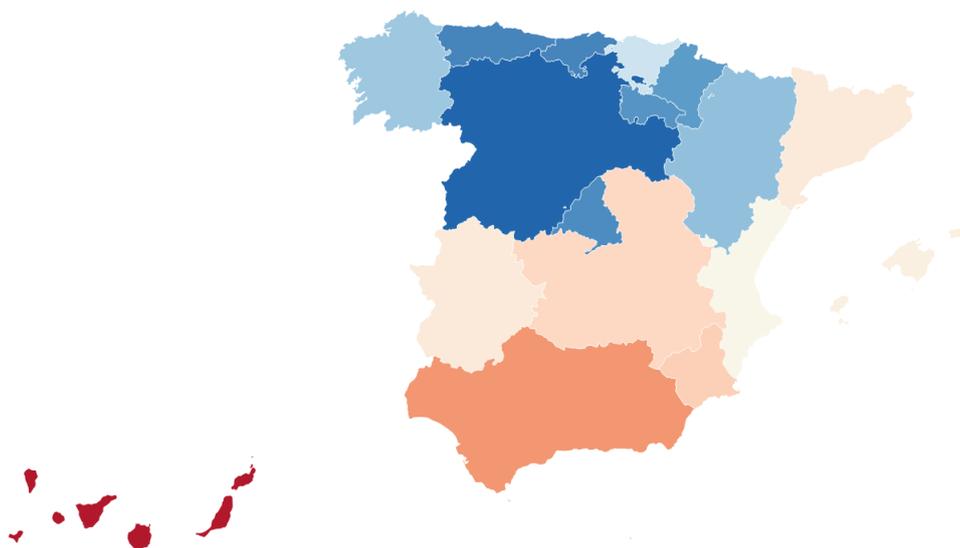
Además, se percibe un empeoramiento general según pasa el tiempo, en concreto del 2015 al 2022 se percibe el empeoramiento general, en la Figura 3.5 se ve claramente como la gráfica correspondiente a 2015 sobresale por encima a la referente a 2018 y la del 2018 sobrepasa a la de 2022. En 2015 una de las Comunidades Autónomas a destacar es Castilla y León, donde en 2015 tuvo el resultado más alto en el ámbito nacional un 16% por encima de la media mientras que Canarias un 30% inferior a la media, ergo entre el máximo y el mínimo existe una diferencia de 46 puntos donde esto es equivalente a un curso y medio de diferencia. En 2018 como se ha comentado se produce un decrecimiento del rendimiento educativo, además al incluir Ceuta y Melilla la media nacional disminuye aún más, pues el peor de los casos que es Ceuta obtiene una puntuación de 413 puntos lo que supone por ejemplo una diferencia de tres cursos respecto de los alumnos de Castilla y León. En el año 2022, Castilla y León sigue encabezando el ranking. Si bien Madrid en 2022 ha incrementado su puntuación otras Comunidades Autónomas han empeorado su resultado de manera notable como País Vasco, Cataluña o Melilla. Si ponemos esto en un contexto internacional Castilla y León y Galicia están a la altura de los países más destacados en el ámbito educativo como Canadá o Taiwán, mientras que Ceuta y Melilla se asemejan más a países menos desarrollados.

Si se considera la barrera de la media española existen Comunidades Autonomas por encima de dicho promedio que son las que están al Norte del país y las que están por debajo de la media que son las del Sur. Por esto último, pueden distinguirse dos grupos, por un lado las Comunidades del Norte donde se incluye Madrid y las Comunidades que están por encima. Y otro grupo son las Comunidades del Sur, que son las que están por debajo de Madrid. Se aprecian por tanto claras diferencias y desigualdades entre Comunidades Autónomas, divisándose así la denominada *España a dos velocidades*.

Esta teoría de doble velocidad se plasma en las desigualdades existentes entre Comunidades Autónomas y se escudriñará en una parte del trabajo. En 2022, los

## Nota Matemáticas PISA 2022

Notas de la asignatura de Matemáticas en el examen de PISA 2022 por Comunidad Autónoma en España



Map: Elaborado por Carlos Saravia de Coca • Source: PISA 2022 • Created with Datawrapper

Figura 3.6: Nota de Matemáticas en PISA 2022 por comunidad autónoma en España. Elaboración propia.

resultados en la mayoría de los casos se mantienen estancados o empeoran, exceptuando unos pocos casos de mejoría como en el caso de la Comunidad de Madrid que ha experimentado un incremento en su puntuación. Los casos más destacables este año sin duda son Castilla y León que mantiene la excelencia que ha llevado a lo largo del tiempo, otro de los casos a mencionar es la mejoría de la Comunidad de Madrid. Sin duda, si algo se mantiene en los últimos resultados es que las Comunidades Autónomas del norte obtienen mejores resultados en comparación con las Comunidades Autónomas del sur. Existe también una diferencia de prácticamente 100 puntos entre las Comunidades Autónomas con mejores resultados y las de peores resultados. Se puede observar en la Figura 3.6 la España a dos velocidades. Las Comunidades Autónomas del norte tienen resultados superiores a la media (tonos azulados) mientras que las Comunidades Autónomas del sur tienen resultados por debajo de la media (tonos rojizos). Hay alguna excepción, como por ejemplo Cataluña donde el resultado es inferior a las Comunidades Autónomas del norte e inferior a la media, País Vasco también tiene una nota en la media que dista de las Comunidades Autónomas de su entorno.

## Capítulo 4

# Análisis de los Factores Explicativos del Rendimiento Educativo

La pretensión del presente trabajo es estudiar el rendimiento educativo para el cuál se formulará un modelo estadístico y econométrico donde el rendimiento educativo será la variable dependiente que dependerá de los factores explicativos que actuarán como variables independientes los cuales permitirán extraer conclusiones relevantes.

La labor de determinar cuáles son los factores explicativos requiere de un amplio análisis de la bibliografía que trata esta materia. De todas las referencias consultadas para la elaboración de dicho trabajo se pueden pormenorizar las distintas clasificaciones.

En primer lugar, en [Yao, 2016] afirma la existencia de cuatro grupos de factores:

1. *Factores reales*: hacen referencia la existencia de docentes y alumnos, siendo estos los integrantes del sistema educativo.
2. *Factores básicos*: cualidades que poseen los alumnos y los docentes.
3. *Factores fluidos*: se refieren a la puesta en práctica en la educación, por ello se consideran el currículo educativo, el contenido de la enseñanza y los métodos de enseñanza. La palabra fluido hace referencia a que son factores que varían a lo largo del tiempo. Por ejemplo, el articulado que afecta al currículo educativo varía con frecuencia a medida que surgen nuevas legislaturas en el Gobierno de España.
4. *Factores sólidos*: son los medios e instalaciones donde se desarrolla la enseñanza. Ahora, la palabra sólido, hace referencia a que el entorno se suele mantener constante en un período temporal medianamente largo.

Por otro lado, en [Coleman, 1966] la regresión se obtiene a partir de dos grupos:

1. *Características individuales y familiares del alumno*: aquí se incluyen factores internos y externos que afectan al alumno donde las internas pueden ser las capacidades el alumno y los externos el entorno socioeconómico del alumno.

2. *Inputs escolares*: constituidos por los recursos económicos de los que se disponen y características del propio centro educativo.

Por último, en [García Pérez, 2012] establecen dos bloques de factores que son:

1. *Características del alumno*: como puede ser el sexo (masculino o femenino), condición de inmigrante o si el alumno es repetidor o no.
2. *Impacto de las variables sociofamiliares*: estatus socioeconómico, educación, empleo y ocupación de los padres y si el alumno cursó educación infantil.

Aunando los factores explicativos y añadiendo algunos de los considerados en [Casado, 2020], se podría decir que en común analizan *factores socioeconómicos*, donde se considerará el estatus socioeconómico del alumno y su familia; las *condiciones personales*, es decir, si el alumno es repetidor o no, o si es inmigrante o no. Y las *condiciones del centro educativo*, donde se tiene en consideración del tipo de centro y los recursos educativos de los que este centro dispone. Donde estos factores explicativos sobre las desigualdades entre Comunidades Autónomas y su influencia en el rendimiento educativo puede resumirse en el siguiente compendio:

1. *Gasto público*: que tiene cada Comunidad Autónoma en educación.
2. *Estatus socioeconómico* en cada Comunidad Autónoma.
3. *Condiciones de los centros educativos*: donde las dicotomías a considerar en el estudio serán
  - a) *Financiación del centro*: pudiendo ser centros públicos o privados incluyendo en estos últimos los centros concertados.
  - b) *Situación geográfica del centro*: se dividirán entre centros urbanos o rurales y se prestará especial interés al número de docentes por alumno.
  - c) *Condiciones personales del alumno*: donde se analizará la proporción de alumnado inmigrante y como afecta al nivel educativo.

En las siguientes secciones de este capítulo se irán analizando cada uno de los factores explicativos y como repercuten al rendimiento educativo.

#### **4.1. El gasto público en educación por Comunidades Autónomas**

Se define el *gasto público en educación* como el conjunto de recursos económicos que provienen de la Administración Pública y de las Consejerías de Educación destinadas a la competencia educativa. En España, debido al modelo territorial, existen competencias que están descentralizadas respecto de la Administración del Estado, las que se denominarán *competencias compartidas*, donde el Estado y en concreto la Administración Pública cede ciertas potestades, denominadas competencias ejecutivas, a la Consejería de Educación que corresponda a cada comunidad autónoma referenciado en Art. 149.1 CE. Los fondos destinados a Educación depende de la transferencia del Estado a cada comunidad o los tributos cedidos entre otros, que

pueden variar en función de cada Comunidad Autónoma y por ende también varía la asignación que cada comunidad autónoma otorge a tal consejería, todo esto se ajusta a la legislación vigente en la Ley Orgánica 7/2001 de Financiación de las Comunidades Autónomas (LOFCA) que se aplica al conjunto del Estado a excepción de las que poseen un régimen foral. El gasto público en general, y en educación en particular, han experimentado cambios a lo largo del tiempo como por ejemplo en la Gran Recesión que comenzó en 2008 y terminó aproximadamente en 2013. Esto puede verse en la serie que aparece en la Figura 4.1, donde se refleja que el gasto público en educación en proporción al PIB oscila entre el 4,2 % y el 5,1 %, datos que están por debajo de la mayoría de los países europeos. También se puede observar que las tendencias del gasto suelen perdurar a lo largo del tiempo, esto se debe a la inestabilidad política en la que España se ve envuelta de manera recurrente lo que deriva en ocasiones en una dificultad considerable a la hora de aprobar los Presupuestos Generales del Estado (PGE).

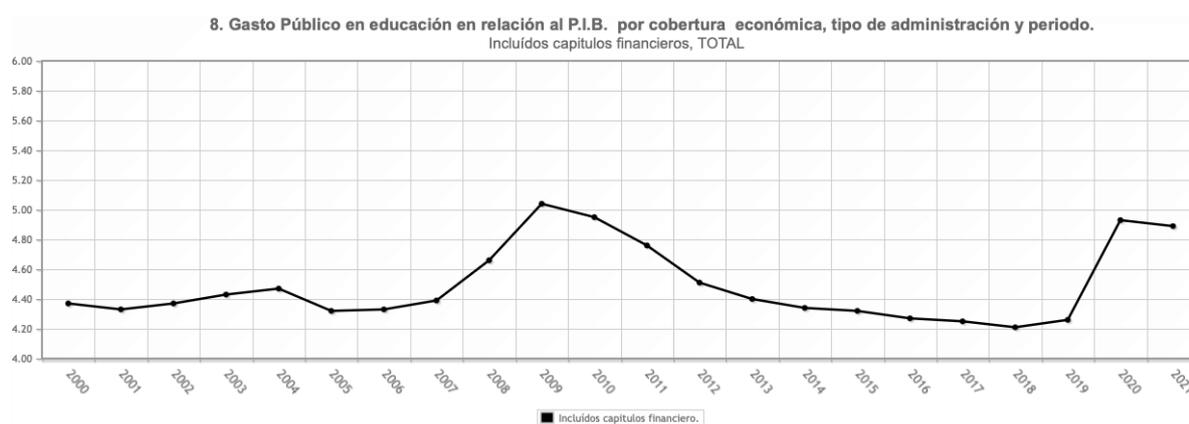


Figura 4.1: Evolución del gasto público en educación sobre el PIB. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Lógicamente, el gasto público en educación se desglosa en distintas partidas, donde se encuentran el gasto de Educación No Universitaria que se divide por un lado en Educación Infantil y Primaria y por otro la Educación Secundaria y Formación Profesional y en Educación Universitaria. Se pueden observar las distintas series temporales en Figura 4.2 donde se ve claramente que la partida mayoritaria de gasto está destinada a la Educación No Universitaria con un gasto prácticamente equivalente a los subgrupos de Infantil y Primaria y al subgrupo de Educación Secundaria. Seguidos en la lista en cantidad se tiene la Educación Universitaria y por último la Formación Profesional.

Como se ha comentado, es una competencia repartida entre la Administración del Estado y las Administraciones de las Comunidades Autónomas, por lo que el gasto depende también de lo que cada Comunidad Autónoma decide asignar a tal fin, gestionado por las Consejerías de Educación. Este gasto por cada Comunidad Autónoma depende del número de centros escolares, alumnos y docentes entre otras cosas. Resulta pertinente analizar la influencia de este factor explicativo aporta información de las diferencias existentes en el rendimiento educativo entre las distintas comunidades. Se muestra en la Figura la partida de gasto público destinada a edu-

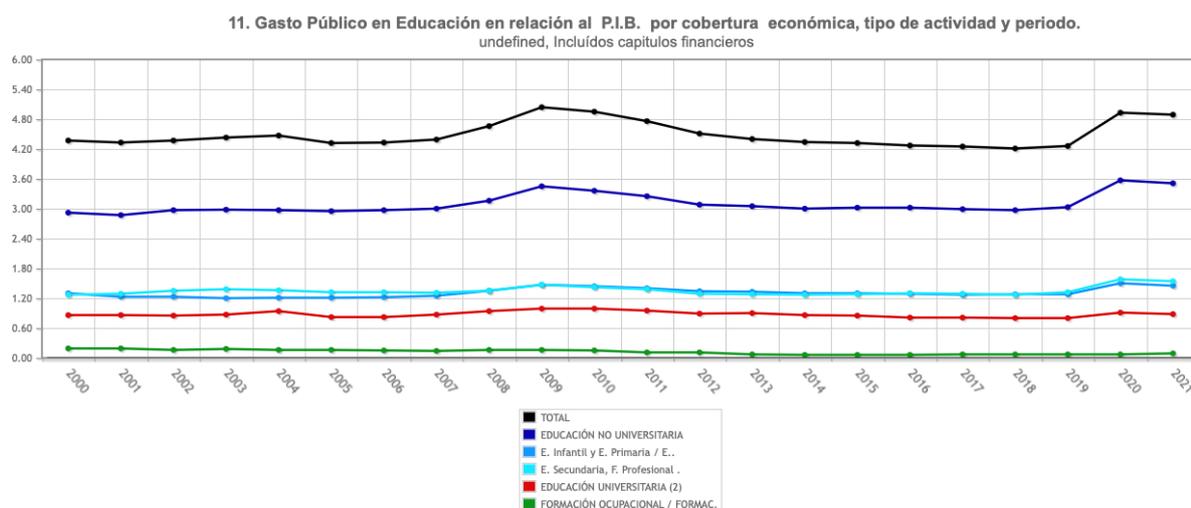


Figura 4.2: Evolución del Gasto Público en relación al P.I.B. dividido en tipos de actividad. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional.

cación por alumno en cada Comunidad Autónoma en 2018 que hasta el momento es la última fecha del examen PISA de la que se tiene conocimiento del gasto educativo.

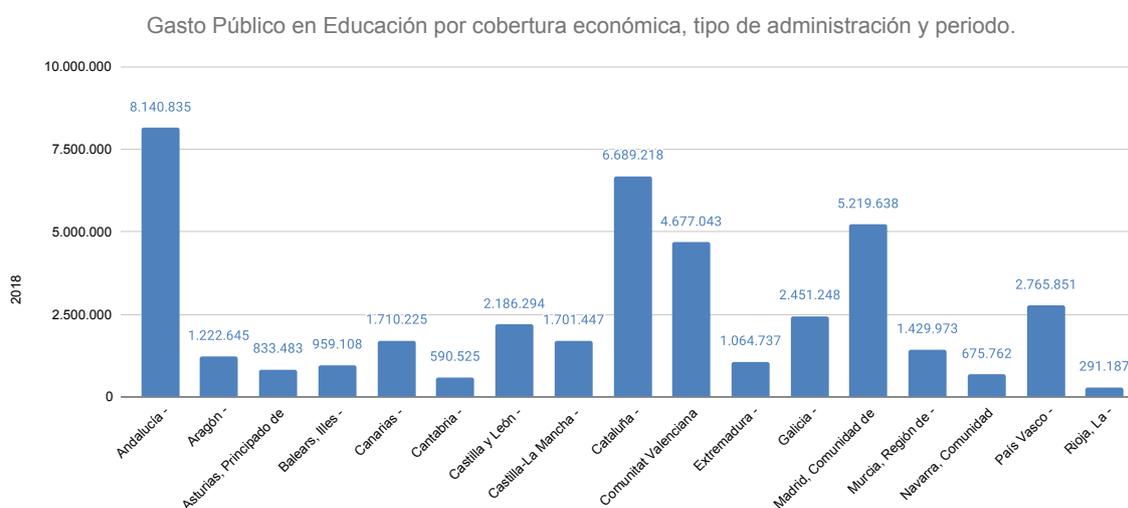


Figura 4.3: Gasto Público en Educación por Comunidad Autónoma en 2018. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

Uno de los conceptos que es de mayor relevancia es el *gasto económico acumulado de un país* que es "la cantidad total de dólares que éste gasta en la educación de un alumno de los seis a los quince años" (OCDE, 2012, pág. 2) donde en 2018 fue del 4,21 % del P.I.B que puede encontrarse en las Notas Estadísticas del Gasto Público en Educación elaboradas por el Ministerio de Educación en 2018. En la Figura 4.5 puede consultarse el gasto económico acumulado por Comunidad Autónoma, donde

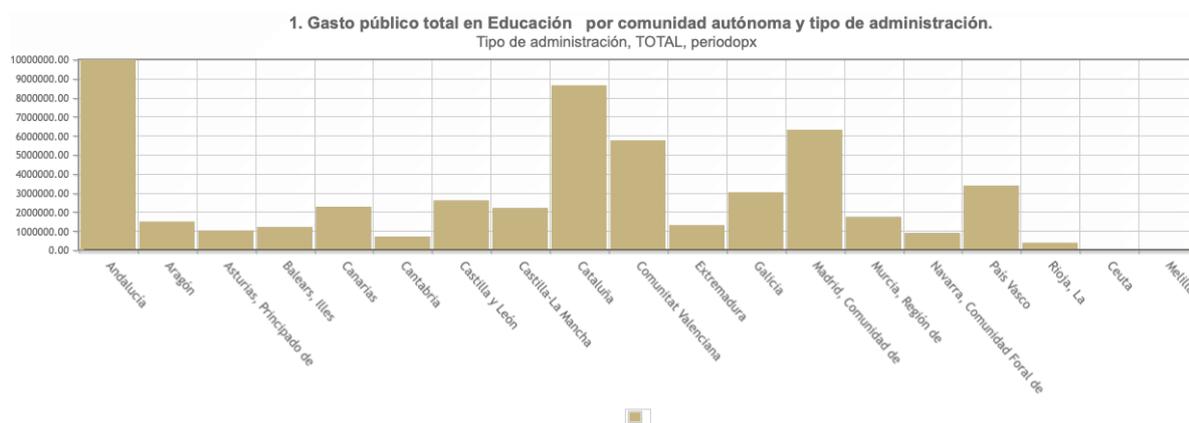


Figura 4.4: Gasto Público en Educación por Comunidad Autónoma en 2022. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

el mayor gasto viene por parte de la Comunidad Valenciana y el País Vasco donde existe una diferencia mayor que 1000 puntos que el grupo de Comunidades Autónomas con un gasto elevado como Cantabria y Castilla y León. Entre las Comunidades Autónomas con un menor gasto se encuentra la Comunidad de Madrid con 3000 puntos de diferencia respecto de las Comunidades que más gastan.

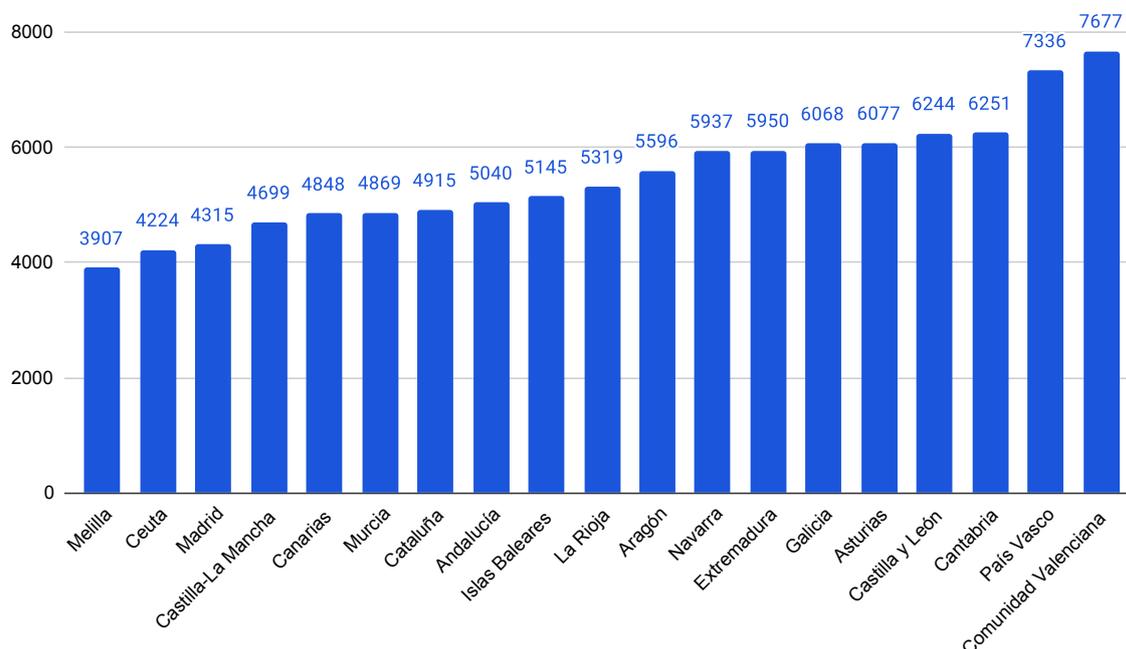
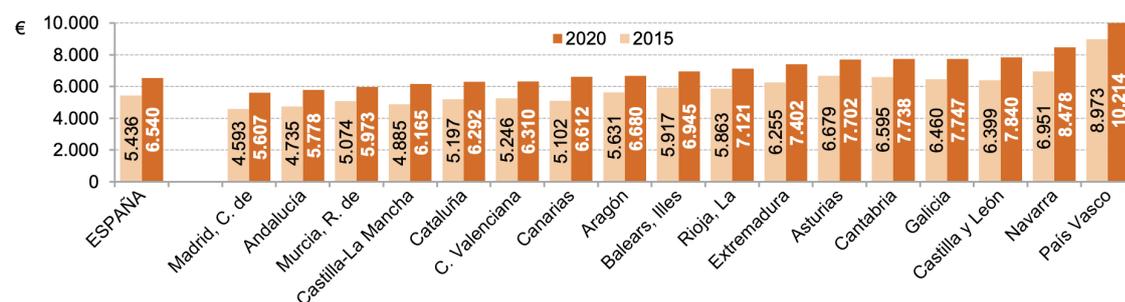


Figura 4.5: Gasto Público educativo por alumno en 2018 para cada Comunidad Autónoma

Se antoja necesario estudiar si el gasto económico acumulado afecta al rendimiento educativo, es decir, si las Comunidades Autónomas con mayor gasto por alumno obtienen mejores resultados de rendimiento educativo. En las Figuras 3.4 y 3.5 se



**Nota:** gasto público por alumno en enseñanzas no universitarias del sistema educativo, por tanto, excluida la formación ocupacional. El alumnado se ha transformado en equivalentes a tiempo completo, de acuerdo a la metodología utilizada en la estadística internacional.

Figura 4.6: Gasto Público educativo por alumno en 2020 para cada Comunidad Autónoma. Fuente: ministerio de Educación y Formación Profesional

observó que las denominadas *Comunidades del Norte* obtuvieron resultados por encima de la media española. Entre estas no se encuentra la Comunidad Valenciana donde tiene el mayor volumen de gasto por alumno mientras que su rendimiento medio es de 476 puntos. Por otro lado, Castilla y León o Galicia que a lo largo de los años suelen encabezar el ranking no son las Comunidades Autónomas que más gastan, al menos gastan menos que la Comunidad Valenciana y País Vasco pero obtienen mejores calificaciones. Por lo que se pueden llegar a las mismas conclusiones que la OCDE que afirman que el volumen del gasto no es determinante en el rendimiento educativo. Empíricamente se aprecia que a pesar de que los países de la OCDE hayan aumentado el gasto educativo un 15% aproximadamente los resultados siguen presentando el mismo estancamiento. Las OCDE afirma que "PISA ha encontrado sistemáticamente que la relación entre la cantidad de recursos gastados en educación -inclusive los recursos financieros, humanos y materiales- sólo guardan una relación parcial con el rendimiento del estudiante" (OCDE, 2014, pág.2). Ha de preguntarse si existe una barrera a partir de la cual una vez superada no se aprecie un incremento sustancial del rendimiento educativo. La OCDE establece este umbral en la cifra de los 35000\$ por alumno donde una vez superada esa franja no se apreciarán efectos significativos sobre dicho alumno. Es decir a mayor gasto no implica mayor rendimiento educativo, por lo que lo fundamental no es el volumen de gasto sino la manera en como se gasta, "los países con mejores resultados tienden a asignar los recursos con mayor equidad entre los distintos centros educativos" (OCDE, 2014, pág.2). Luego en lo referente a este factor explicativo se concluye que los sistemas educativos que gocen de mayor equidad obtendrán un mejor rendimiento educativo.

## 4.2. El estatus socioeconómico del alumnado

En esta sección se estudiará el estatus socioeconómico del alumnado como factor explicativo del rendimiento académico. Para ello se subdivirá el estatus socioeconómico del alumnado en el origen socioeconómico familiar del alumno y el nivel socioeconómico del centro escolar. Un concepto que se usará frecuentemente es el de peer effect o efecto entre pares que se refiere al impacto o influencia que los compañeros tienen entre sí. En diversos contextos, especialmente en el ámbito académico, económico y social, se ha observado que las decisiones, comportamientos o logros de

una persona pueden afectar a sus compañeros de alguna manera. Por ejemplo, en el ámbito educativo, el peer effect puede referirse al fenómeno en el cual el rendimiento académico de un estudiante es influenciado por el rendimiento de sus compañeros. Si un estudiante está rodeado de compañeros que se esfuerzan y tienen buenos resultados, es probable que experimente un impacto positivo en su propio rendimiento. En términos más generales, el peer effect también puede referirse a cómo las actitudes, comportamientos y elecciones de un individuo son moldeados por la influencia de sus compañeros en diversos aspectos de la vida, como la toma de decisiones, la adopción de hábitos y la conformidad social. El estudio de los peer effects es relevante en campos como la educación y la economía, ya que ayuda a comprender cómo las interacciones entre individuos en un grupo pueden tener un impacto significativo en sus vidas y comportamientos.

El origen socioeconómico del alumno se refiere a la posición social y económica de la familia de la cual proviene un estudiante. Este factor tiene una influencia significativa en la experiencia educativa y en el rendimiento académico de los estudiantes. La comprensión del origen socioeconómico del alumno es crucial para abordar desafíos relacionados con la equidad educativa. Las políticas y prácticas que buscan reducir las disparidades en el rendimiento académico a menudo se centran en proporcionar recursos adicionales y apoyo a los estudiantes que provienen de entornos socioeconómicos desfavorecidos, con el objetivo de garantizar que todos los alumnos tengan oportunidades justas y equitativas para alcanzar su máximo potencial educativo. Para contrastar la relevancia de este factor se estudiarán diversos indicadores para explicar las diferencias educativas. Los indicadores en cuestión serán:

1. P.I.B per cápita por Comunidad Autónoma
2. Ocupación de los padres del alumno
3. Índice de Estatus Social Económico y Cultural (ISEC) que en lengua inglesa se denomina Index of Economic, Social and Cultural Status.

#### **4.2.1. P.I.B. per cápita por Comunidad Autónoma**

Se concluyó anteriormente que la implicación de que una mayor riqueza en la Nación derive en un incremento del rendimiento educativo, pero se ha de comprobar si este aserto conserva su veracidad entre Comunidades Autónomas. El primer indicador que se considerará es el P.I.B. per cápita que es un indicador que plasma la riqueza por habitante respecto del territorio sobre el cuál se considera el P.I.B.

**Definición 4.2.1.** El *Producto Interno Bruto per cápita*, comúnmente abreviado como P.I.B. per cápita, es una medida que se utiliza para evaluar el nivel de desarrollo económico de un país y para comparar el estándar de vida entre diferentes naciones. Se calcula dividiendo el Producto Interno Bruto (PIB) de un país entre su población total:

$$\text{P.I.B. per cápita} = \frac{\text{P.I.B}}{\text{Población}}$$

En este caso se considerará el P.I.B. per cápita por Comunidad Autónoma que se recoge en las Figuras 4.7 y 4.8 donde se puede ver que existen grandes diferencias intercomunitarias y que ha habido un empeoramiento con el paso del tiempo. Por

ejemplo, el dato más elevado es Madrid con 35000€, en contraposición el mínimo se encuentra en Melilla con 18645€ y en los territorios peninsulares españoles se tiene Extremadura con 18829€, es decir, existen grandes diferencias intercomunitarias.

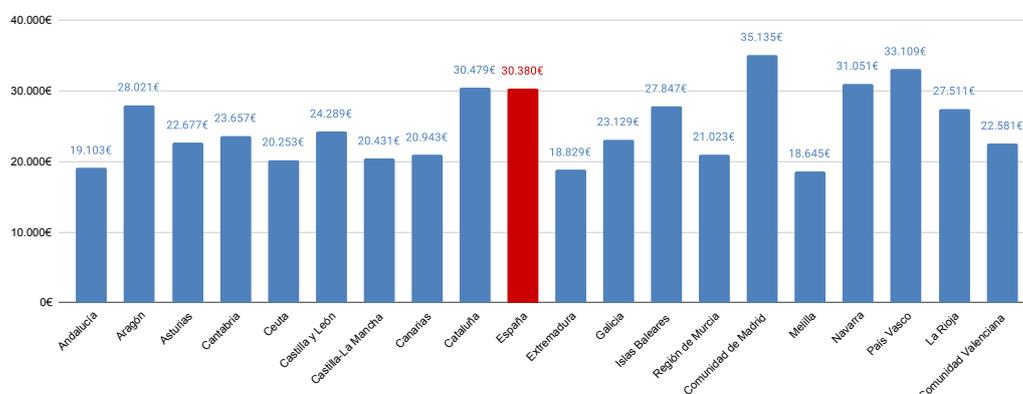


Figura 4.7: P.I.B. per cápita para cada Comunidad Autónoma en 2018. Fuente: Instituto Nacional de Estadística (INE)

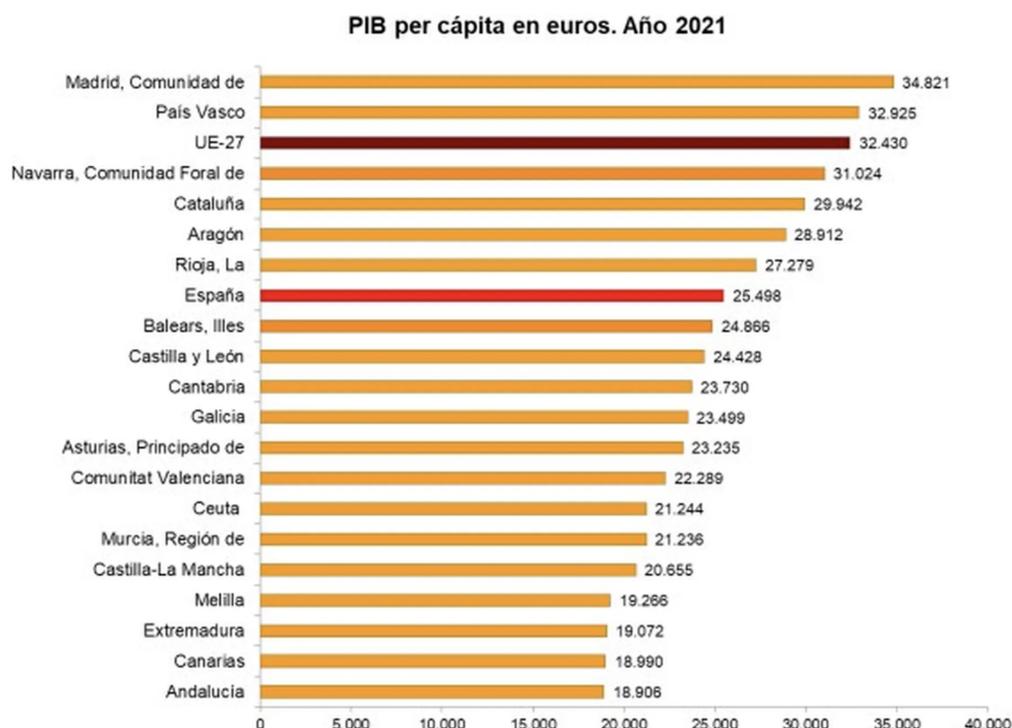


Figura 4.8: P.I.B. per cápita para cada Comunidad Autónoma en 2021. Fuente: Instituto Nacional de Estadística (INE)

Analizando las conclusiones sobre el P.I.B. per cápita entre Comunidades Autónomas aflora de nuevo la teoría de la España de dos velocidades pues existen semejanzas de distribución entre el P.I.B. per cápita y el rendimiento educativo. Si bien lo que se acaba de comentar es cierto, existen algunas excepciones, que son precisa-

mente las Comunidades Autónomas con mejores resultados académicos no son las de mayor P.I.B. per cápita que son Castilla y León, Galicia y Navarra. Con esto se puede concluir que existe una relación positiva pero seguramente no sea una condición necesaria y suficiente.

#### **4.2.2. Ocupación profesional de los padres del alumno**

La ocupación de los padres puede tener un impacto significativo en el rendimiento educativo de los estudiantes. Los padres con ocupaciones bien remuneradas pueden tener la capacidad de proporcionar a sus hijos acceso a recursos educativos adicionales que pueden contribuir al desarrollo académico de los estudiantes. Ya que "en el ámbito internacional, los hijos de padres con ocupaciones más cualificadas tienden a obtener mejores resultados que el resto de estudiantes. Los resultados de PISA 2012 indican que ese fenómeno también se da en las comunidades autónomas españolas, aunque con una intensidad variable" (INEE, 2014, pág.1).

Si bien es cierto que las comunidades donde los padres tienen profesiones cualificadas obtienen buenos resultados no se cumple para la totalidad de los casos pues por ejemplo, Castilla y León obtiene excelentes resultados académicos pero posee una economía predominantemente agraria y ganadera, pertenecientes al sector primario donde existe una parte trabajadora poco cualificada. Esto no es óbice para que el sistema educativo si está bien planteado pueda suplir los problemas que surjan, como bien se manifiesta en (OCDE, 2014, pág.4), lo realmente determinante es que un buen sistema educativo es capaz de proporcionar oportunidades educativas adecuadas tanto a hijos de profesionales poco cualificados como a los de padres con profesiones de alta cualificación. Otra cuestión a considerar no es sólo la cualificación del empleo, sino que también se ha de considerar si se tiene empleo o por el contrario se está en situación de desempleo. En (Valenzuela, 2013), se afirma la existencia de una correlación causal negativa entre el rendimiento educativo y el desempleo de los padres del alumno.

#### **4.2.3. Índice de Estatus Social, Económico y Cultural**

El Índice de Estatus Social Económico y Cultural (ISEC) constituye una métrica diseñada para cuantificar el estatus social de un individuo o grupo, considerando factores económicos, educativos y culturales. Este índice pretende evaluar la posición socioeconómica y cultural de manera integral, incorporando diversos indicadores ponderados en función de su relevancia para la comprensión del estatus social. Este índice se utiliza comúnmente en estudios sociales y de salud para examinar las disparidades y entender cómo los factores socioeconómicos pueden afectar diversos resultados, como la salud, el acceso a la educación y otras dimensiones de la calidad de vida. En el caso que ocupa nuestro trabajo el ISEC se definirá como el índice que cuantifica la equidad del sistema educativo a estudiar. Se dice que se tiene un *sistema educativo equitativo* si logra que el rendimiento educativo del alumno depende de sus propias capacidades y no de su contexto socioeconómico y cultural tal y como se plasma en (INEE, 2018).

Cuando los valores son mayores que cero, es decir, positivos indican que el sistema educativo de ese territorio goza de mayor equidad. Mientras que puede tomar

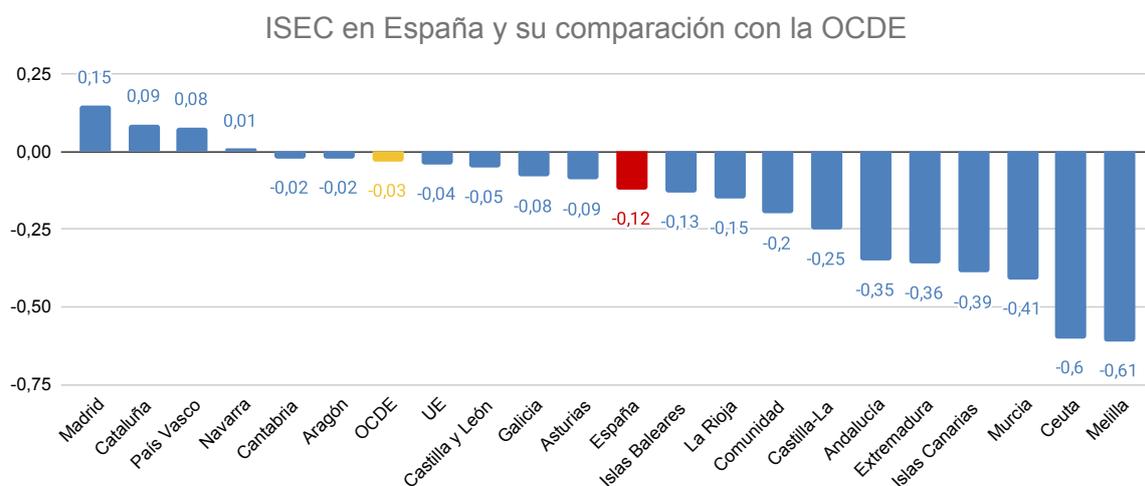


Figura 4.9: ISEC en las Comunidades Autónomas españolas y su comparación nacional y con la OCDE, 2018. Fuente: (Casado, 2020) e (INEE, 2018)

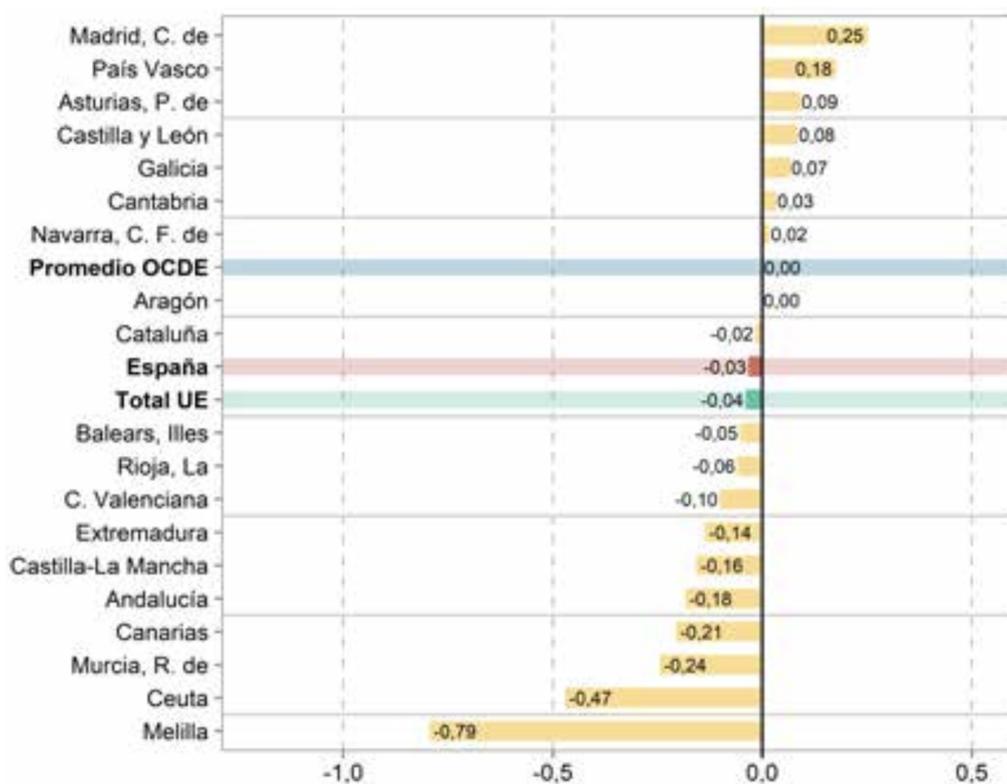


Figura 4.10: ISEC en las Comunidades Autónomas españolas y su comparación nacional y con la OCDE, 2022. Fuente: PISA 2022

también valores menores que cero, es decir, negativos que refleja desigualdad entre los alumnos de ese territorio concreto.

Prestando atención a las Comunidades Autónomas y sus correspondientes valores

ISEC, sobretudo en los casos extremos se puede ver que los sistemas educativos que gozan de mayor equidad obtienen buenos resultados y los que tienen valores negativos del ISEC obtienen peores resultados. Desde 2018 a 2022, España ha mejorado su resultado donde ha pasado de -0.12 a -0.03. Además, existen varias Comunidades Autónomas que han incrementado su ISEC como por ejemplo Castilla y León, Galicia, Cantabria, Asturias y Navarra. No está claro que el ISEC sea una condición suficiente pues existen Comunidades Autónomas que poseen usualmente los mejores resultados y que no tienen los ISEC más favorables. Por ejemplo, Castilla y León y Galicia no poseían un ISEC elevado pero han obtenido siempre los mejores resultados. Aunque parece haber cierta evidencia de que las diferencias de rendimiento educativo producidas por el origen socioeconómico del alumno se agravan por el tipo de sistema escolar.

### 4.3. Los tipos de centros educativos

Los centros educativos son instituciones dedicadas a la provisión de educación formal y desempeñan un papel crucial en el desarrollo académico y personal de los estudiantes. Existen diversos tipos de centros educativos, cada uno con características particulares que se adaptan a necesidades específicas.

#### 4.3.1. Educación pública y privada y su efecto sobre el rendimiento educativo

Los centros educativos pueden clasificarse en diferentes categorías en función de su financiación, lo que afecta directamente su gestión, acceso y autonomía. Aquí se presentan algunos de los tipos más comunes de centros educativos en relación con su financiamiento:

- *Escuelas Públicas*: las escuelas públicas son financiadas y gestionadas por entidades gubernamentales, ya sea a nivel local, regional o nacional. Estas instituciones ofrecen educación de forma gratuita para los estudiantes y están diseñadas para ser accesibles para toda la población.
- *Escuelas Privadas*: Las escuelas privadas obtienen sus recursos principalmente de las tarifas de matrícula y, en algunos casos, de donaciones privadas. Tienen mayor autonomía en la toma de decisiones y en la elaboración de planes de estudio debido a su independencia financiera. Pueden ofrecer una variedad de enfoques educativos, y gozan de mayor libertad para seleccionar su propio personal docente.
- *Escuelas Concertadas*: Los centros educativos concertados reciben fondos tanto del sector público como del privado. Aunque son de propiedad privada, reciben subvenciones del gobierno para su funcionamiento. Son gestionados por entidades privadas, como organizaciones religiosas, fundaciones o asociaciones educativas. Pueden cobrar cuotas de matrícula y tienen autonomía en la definición de políticas internas y selección de personal docente.

Estas categorías representan diferentes enfoques en términos de financiación y gestión, y cada una tiene sus propias características y consideraciones. La elección

entre estos tipos de centros educativos a menudo depende de las preferencias de los padres, las necesidades de los estudiantes y la disponibilidad de recursos. El tipo de centro educativo constituye una parte del estatus socioeconómico del alumno y los efectos por pares que puedan surgir. El análisis que se realizará en este trabajo estudiará la distinción entre la titularidad del centro y de localización de éste pues se tienen las escuelas urbanas y rurales y el número de alumnos por docente. En lo que respecta a la titularidad del centro se incluirán las escuelas concertadas en el subgrupo de escuelas privadas, es decir, se tendrán escuelas públicas y privadas tal y como se plantea en (OCDE, 2011).

Está demostrado que "los alumnos que asisten a centros privados suelen tener un mejor rendimiento en las evaluaciones PISA que los alumnos que asisten a centros públicos" (OCDE, 2011) y esto se debe según PISA al grado de autonomía respecto al currículo educativo y la correcta asignación de recursos; y mejor sistema de transparencia y rendición de cuentas periódicamente. Los centros privados además tienen una gran capacidad de atracción de talento y capacidad, esto hace que las familias con recursos suficientes opten por centros de titularidad privada. Esto ocasiona *segregación escolar* que significa que los alumnos con mejor rendimiento están separados en centros distintos a los de alumnos con bajo rendimiento derivando en una ausencia de efectos por pares que de ocurrir podría favorecer al rendimiento educativo de los alumnos con menor rendimiento. Esta magnitud se cuantifica mediante el *índice de aislamiento* que es una medida definida en (INEE, 2018) que se utiliza para cuantificar el grado de segregación o aislamiento de un grupo específico de estudiantes en escuelas.

El índice de aislamiento se interpreta como la probabilidad de que un estudiante de un grupo minoritario se encuentre con alguien de su mismo colectivo en la escuela

$$\text{Aislamiento Educativo} = \sum_{i=1}^k \frac{X_{1i}}{X_1} \frac{X_{1i}}{T_i}.$$

Este índice se enfoca en la homogeneidad o heterogeneidad de la composición estudiantil en las instituciones educativas, particularmente en relación al nivel educativo y que puede oscilar desde el 0 si no existe segregación o 1 si existe una segregación total. Se puede ver en la Figura 4.11 que no es elevado, de hecho, es bajo. En la OCDE la media del índice de aislamiento es 0,17, si se compara esta media con el índice de aislamiento de las Comunidades Autónomas españolas todas están por debajo de la media de la OCDE. Con esto se concluye que la segregación en España es prácticamente inexistente.

Existen otros índices de segregación escolar pero este es el único que mide la dimensión de exposición. Este índice es muy sensible al tamaño del grupo minoritario por lo que puede resultar algo inadecuado para comparar sistemas que tengan diferentes definiciones y referencias del concepto de grupo minoritario.

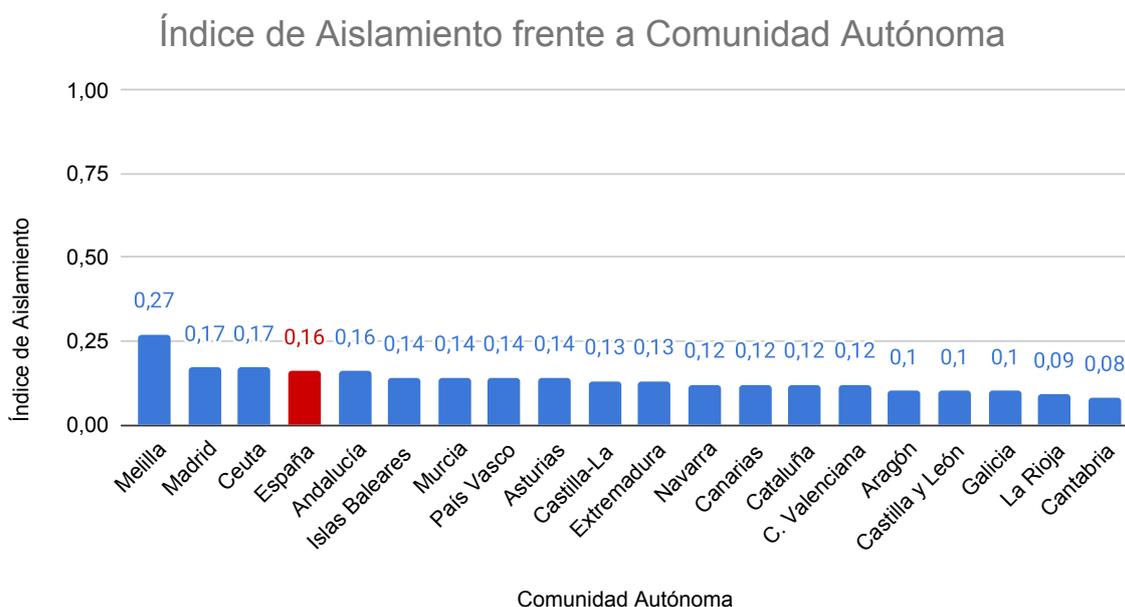


Figura 4.11: Índice de Aislamiento para cada Comunidad Autónoma

Ahora, se presta atención a la proporción de centros privados y públicos en España y el número de alumnos que acude a ella. Se recogen a continuación una colección de gráficos obtenidos del Ministerio de Educación en su publicación *Datos y Cifras. Curso 2019/2020* (Ministerio de Educación, 2020). Se comienza con las Figuras 4.12 y 4.13, en 2018 España un 67,1 % del alumnado cursa sus estudios en centros públicos mientras en la OCDE un 84 % y en 2022 en España disminuye poco, un 67 % cursa sus estudios en centros públicos. Observando de nuevo la gráfica para sacar algunas conclusiones, se deduce rápidamente la aparición de nuevo de la España a dos velocidades, pues las Comunidades Autónomas del norte son las de mejores resultados y con mayor proporción del alumnado en centros privados al contrario que pasa con las comunidades del sur, la única excepción es Galicia aunque no resulta un contraejemplo tajante. Se puede concluir por tanto, que existe una correlación positiva del nivel socioeconómico elevado y la asistencia a centros privados y sobretodo que las comunidades con mayor proporción en centros privados obtienen un mejor rendimiento educativo. Se puede ver incluso desglosado por provincias en algunas Comunidades Autónomas, por ejemplo en Castilla y León a través de [Junta de Castilla y León, 2024].

En (OCDE, 2011) se destaca que los centros privados consiguen estos buenos resultados fundamentalmente por la autonomía de la que gozan en cuanto a la elaboración del currículo y la contratación del personal docente. Actualmente en España "las últimas cifras del Ministerio de Educación y Formación Profesional ofrecidas en lo relativo al curso escolar 2021/2022, arrojan que en nuestro país hay un total de 28.470 centros educativos, de los que 19.155 corresponden a centros de enseñanza de tipo pública y que 9.315 centros son de tipo concertados y privados." (Delgado, 2023) y "de ellos, 4.595 imparten exclusivamente Educación Infantil, 454 centros tienen Educación Primaria y además pueden impartir Educación Infantil, 1.591 cuen-

### Distribución del alumnado de Enseñanzas de Régimen General no universitarias por titularidad/financiación del centro y comunidad autónoma. Curso 2018-2019

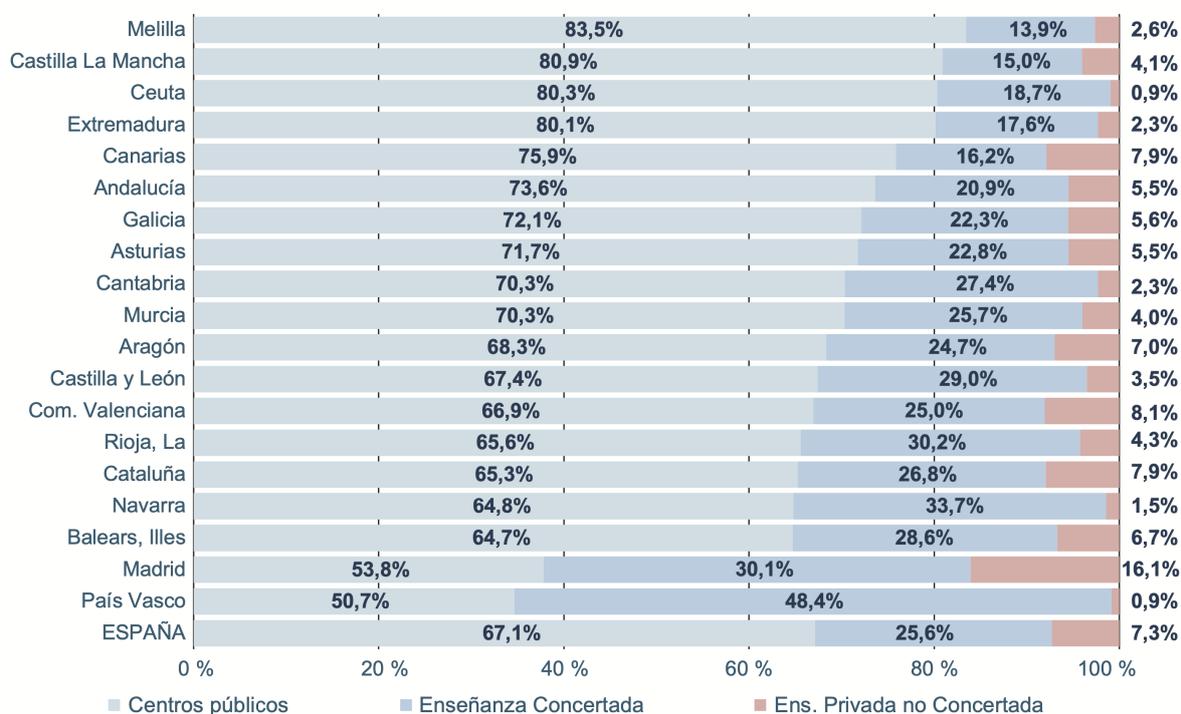


Figura 4.12: Distribución del alumnado entre centros públicos y privados 2018-2019. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

tan con los tres niveles obligatorios (Infantil, Primaria y ESO), 900 imparten ESO, Bachillerato y FP y 1.480 incluyen todos los niveles formativos en su oferta académica." (Esteban, 2020). Según las cifras presentadas por el Consejo Escolar de Estado los países con más centros privados son Reino Unido, Malta y Bélgica. En Francia, las cifras son semejantes a las de España, de 7,6 millones de estudiantes, 1,3 acuden a centros concertados, 3,1 a privados y 6,2 a públicos. En Alemania, de los 4,5 millones de alumnos, 4,4 estudian en centros públicos y 238.486 en privados. El menor número de alumnos en la educación concertada es Italia, donde de los 4,6 millones de estudiantes, 4,4 millones eligen la educación pública.

Se estudió anteriormente que el gasto por alumno era un factor a considerar, si uno atiende también al coste por plaza. "Según la Estadística de Gasto Público en Educación, las transferencias de las administraciones educativas a centros educativos de titularidad concertada privada ascienden a 6.174,4 millones de euros. El gasto total en educación total ascendió a 49.463.000 millones de euros, es decir, a la Educación concertada se destina un 12,4 por ciento. Según datos de la Plataforma Concertados, el coste anual de cada alumno que acude a la educación pública es de 6.000 euros, frente a los 3.000 euros que supone un alumno que acuda a centros concertados. Por tanto, los conciertos educativos son una opción más económica para el Estado. El coste por alumno es mucho más barato en un colegio concertado que en uno público." (Esteban, 2020). Luego, la educación privada en general y la educación concertada en particular supone una optimización del gasto educativo, pues

### Distribución del alumnado de Enseñanzas de Régimen General no universitarias por titularidad/financiación del centro y comunidad autónoma. Curso 2021-2022.

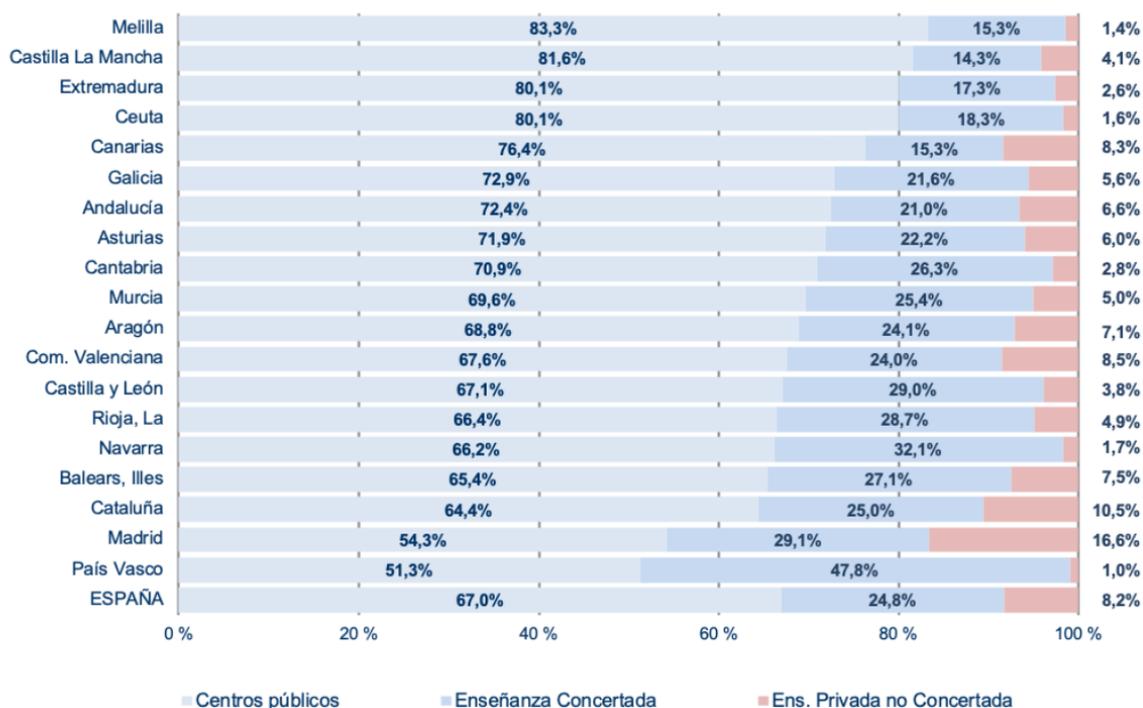


Figura 4.13: Distribución del alumnado entre centros públicos y privados 2021-2022. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

siendo mucho menos costoso para el Estado se obtienen unos mejores resultados en lo que a rendimiento educativo se refiere. Lógicamente se deberán usar herramientas de política educativa para mejorar todo lo posible el sistema educativo nacional.

#### 4.3.2. Localización geográfica de los centros educativos

Los centros educativos pueden clasificarse según su localización geográfica en entornos urbanos o rurales. Estas diferencias en la ubicación pueden tener un impacto significativo en diversos aspectos del entorno educativo. A continuación, se describen algunas características comunes de los centros educativos urbanos y rurales:

- *Centros Educativos Urbanos*: son los centros educativos que se encuentran en entornos urbanos, en particular en (OCDE, 2019) se especifica para poblaciones de más de 3000 habitantes. Que además suelen caracterizarse por determinadas características.
  - **Densidad Poblacional**: Los centros educativos urbanos están ubicados en áreas urbanas con alta densidad poblacional. Esto significa que hay una concentración significativa de personas en la región circundante.
  - **Infraestructura y Recursos**: Suelen tener acceso a una infraestructuras más desarrolladas y a mayores recursos en comparación con las escue-

- las rurales. Pueden contar con instalaciones modernas, laboratorios bien equipados y acceso a tecnología educativa avanzada.
- **Diversidad Cultural y Lingüística:** Debido a la mezcla de población en áreas urbanas, las escuelas urbanas tienden a ser más diversas en términos de culturas y lenguajes representados entre los estudiantes. Esto puede influir en enfoques educativos específicos.
  - **Oferta Curricular Amplia:** Las escuelas urbanas tienden a ofrecer una gama más amplia de cursos, actividades extracurriculares y programas especializados debido a la diversidad de intereses y recursos disponibles.
  - **Transporte Público y Accesibilidad:** Los centros educativos urbanos suelen ser más accesibles mediante el uso de transporte público o caminando debido a la proximidad de la escuela a las áreas residenciales.
- **Centros Educativos Rurales:** son los centros educativos que se encuentran en entornos rurales, en particular en (OCDE, 2019) se especifica para poblaciones de menos de 100000 habitantes. Que además suelen caracterizarse por determinadas características.
- **Baja Densidad Poblacional:** Están ubicados en áreas rurales con baja densidad poblacional. Pueden estar dispersos geográficamente debido a la naturaleza menos concentrada de las comunidades rurales.
  - **Recursos Limitados:** A menudo enfrentan desafíos en términos de recursos limitados, incluyendo presupuestos más bajos, menor acceso a tecnología educativa y menos oportunidades de desarrollo profesional para los maestros.
  - **Conexión con la Comunidad:** Existe una conexión más estrecha entre la escuela y la comunidad en entornos rurales. La participación de los padres y la colaboración comunitaria son aspectos importantes.
  - **Adaptación Curricular a la Vida Rural:** Algunas escuelas rurales pueden adaptar su oferta curricular para abordar las necesidades específicas de la comunidad, incluyendo programas relacionados con la agricultura, ganadería u otros aspectos de la vida rural.
  - **Transporte Escolar:** Debido a la dispersión geográfica, el transporte escolar puede ser esencial para que los estudiantes rurales lleguen a la escuela. Esto puede plantear desafíos logísticos y afectar la asistencia escolar.

Cada tipo de centro educativo enfrenta sus propios desafíos y beneficios, y las estrategias educativas deben adaptarse a las características específicas de su entorno.

La OCDE afirma que "las escuelas urbanas son generalmente más grandes, presentan estudiantes con una situación socioeconómica más favorecida, tienen mayor responsabilidad en la asignación de los recursos, es menos probable que experimenten una escasez de personal, pueden acceder a una mayor proporción de profesores cualificados, y disponen de mayores ratios estudiante-profesor que las escuelas en zonas rurales y pequeñas ciudades." (OCDE, 2013). Sin embargo, esta afirmación requiere un análisis más minucioso pues por ejemplo, los docentes de las escuelas rurales suelen tener mayor capacidad de focalización sobre los alumnos pues las

clases de los centros rurales tienen un número pequeño de alumnos. De esto surge la necesidad de analizar el número de alumnos por docente ya que este ratio puede aportar luz sobre el rendimiento educativo. No obstante todo esto depende en buena parte de la capacidad del docente y sus cualidades.

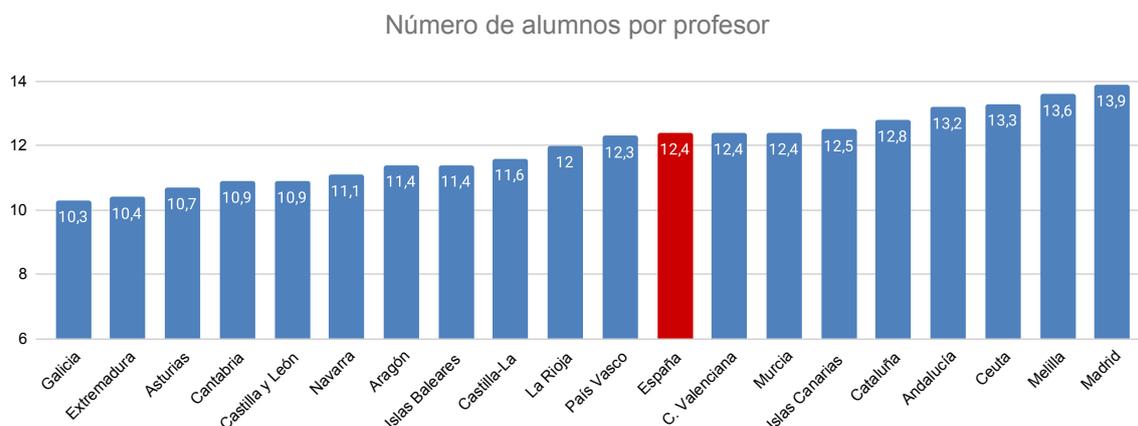
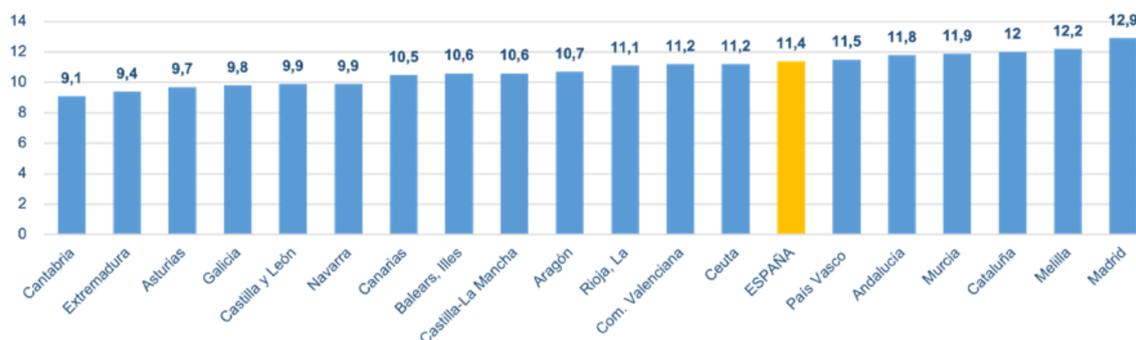


Figura 4.14: Ratio de alumnos por profesor en 2018.

### Número medio de alumnos por profesor <sup>(1)</sup> por comunidad autónoma. Enseñanzas de Régimen General no universitarias. Curso 2021-2022



(1) Calculado en equivalente a tiempo completo de alumnado y profesorado.

Figura 4.15: Ratio de alumnos por profesor en 2021-2022. Fuente Ministerio de Educación y Formación Profesional

El ratio más pequeño, es decir, donde existen menos alumnos por profesor son las Comunidades Autónomas eminentemente rurales, tal y como puede verse en las Figuras 4.14 y 4.15. Pero, este indicador no es muy indicativo pues el caso de Extremadura tiene un ratio bajo pero no tiene unos buenos resultados de rendimiento académico. La OCDE afirma que "el tamaño de la clase no se relaciona con el rendimiento global del sistema educativo; en otras palabras, los países que mejor rinden tienden a priorizar la inversión en el profesorado antes que a reducir el tamaño de las clases" (OCDE, 2012). Luego una de las conclusiones a las que se puede llegar a base

de los estudios es que la inversión en el profesorado para poder captar a profesionales talentosos es de vital importancia. Prestando atención a lo expuesto en secciones previas, los centros públicos tienen un sistema excesivamente rígido que contrasta con la flexibilidad y dinamismo de los que goza el sistema de los centros privados que pueden gestionar sus fondos y recursos de manera mucho más autónoma.

## 4.4. Características adicionales del alumnado

Las características adicionales del alumnado, como la diversidad cultural representada por el alumnado extranjero o el sexo (masculino o femenino) de los estudiantes, son aspectos importantes en el ámbito educativo que pueden influir en la experiencia y el rendimiento académico. En esta sección se explorarán algunas de las características clave asociadas con el alumnado extranjero y la brecha de género.

### 4.4.1. Alumnado extranjero

La razón por la que este estudio (y la OCDE) consideran la característica de extranjería es porque pretende analizar la dificultad de adaptación al sistema educativo de un país. Antes de empezar a analizar los datos conviene definir al colectivo de individuos que se va a estudiar, en este estudio se seguirán rigurosamente el marco y metodología empleado por la OCDE que en el Informe PISA 2018 se define *alumno inmigrante*, “como aquellos alumnos cuyos progenitores han nacido en un país distinto al que el estudiante ha realizado la prueba.” (INEE, 2018). Coloquialmente, se considerará como alumno inmigrante en España todo aquel alumno no nacido en España o que, habiendo nacido en España, es hijo de padres extranjeros, el matiz característico será si tiene antecesores (y/o antecedentes) extranjeros. Asimismo, el Informe los *estudiantes nativos* son “aquellos de los que al menos un progenitor ha nacido en el país en el que realiza la prueba PISA, independientemente de que el estudiante haya nacido en dicho país.” (INEE, 2018). La OCDE establece estos criterios específicos de ordenación de la dicotomía nacionalidad/extranjería del alumno con la pretensión de estudiar la dificultad de un alumno para integrarse en un sistema educativo de un país diferente al propio. Por ello, considera nativo a un extranjero cuyo padre sea del país donde realiza la prueba, porque, aunque este alumno es inmigrante, la OCDE entiende que el impacto cultural y de aprendizaje al que está sometido no será tan grande. Cabe resaltar que ha habido un incremento notable en alumnado extranjero para ello basta observar la Figura 4.16

De este tipo de alumnado lógicamente cada Comunidad Autónoma tendrá una proporción determinada tal y como puede verse en la Figura 4.17, en este caso la distribución Comunidades del Norte y Comunidades del Sur no está tan clara. Por ejemplo, la mayoría de Comunidades del Norte tienen un porcentaje pequeño de alumnado extranjero como es el caso de Castilla y León, Asturias, Cantabria, País Vasco... pero existen excepciones como Cataluña con un alto porcentaje. Por otro lado, las Comunidades del Sur no presentan tanto porcentaje de alumnado extranjero aunque es cierto que las Islas Baleares es el territorio español con mayor porcentaje de alumnado extranjero.

Una de las barreras como bien indica la OCDE es el impacto cultural en general y el idioma en particular. Para ello conviene analizar el tipo de inmigración que entra

## Evolución del alumnado extranjero

	2012-13	2017-18	2021-22	2022-23
<b>TOTAL</b>	<b>763.087</b>	<b>751.390</b>	<b>890.971</b>	<b>988.781</b>
<b>Enseñanzas de Régimen General</b>	<b>732.665</b>	<b>718.190</b>	<b>854.121</b>	<b>944.992</b>
E. Infantil	151.206	152.187	164.167	174.725
E. Primaria	257.158	284.717	346.546	380.787
Educación Especial	3.974	4.184	5.328	5.903
ESO	205.128	167.107	202.269	240.156
Bachillerato	47.991	43.412	46.457	48.452
Ciclos Formativos FP Grado Básico	-	10.807	11.952	12.629
Ciclos Formativos FP Grado Medio	31.530	29.553	36.689	39.379
Ciclos Formativos FP Grado Superior	18.171	23.427	36.812	39.154
Programas de Cualificación Profesional Inicial	17.507	-	-	-
Otros Programas Formativos	-	2.796	3.901	3.807
<b>Enseñanzas de Régimen Especial</b>	<b>30.422</b>	<b>33.200</b>	<b>36.850</b>	<b>43.789</b>

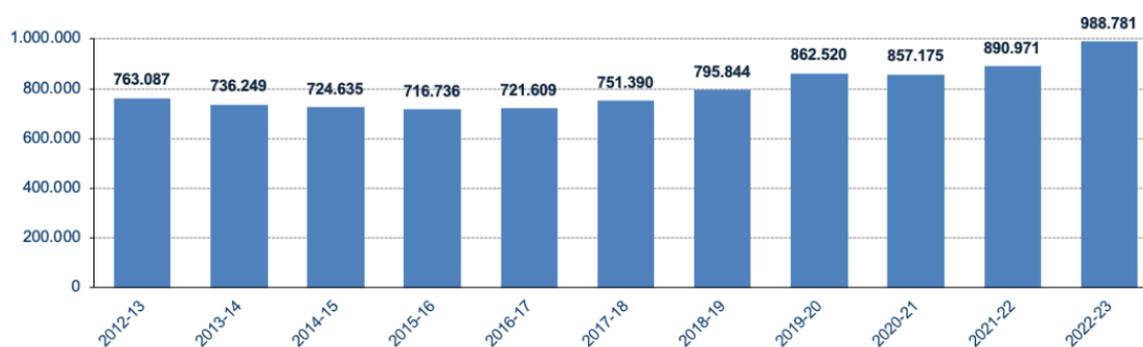


Figura 4.16: Evolución del alumnado extranjero. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

en España, que puede verse en la Figura 4.18. De la inmigración que viene a España sin duda existen tres grandes grupos de alumnado extranjero los que provienen de Europa, África y América. En el caso del alumnado europeo si bien no comparten el idioma castellano al provenir de países con un desarrollo similar el impacto cultural no es excesivamente notorio; el alumnado extranjero que proviene de África proviene de países muy poco desarrollados con sistemas educativos con un bajo desarrollo y al no existir muchos lazos culturales más allá de puntuales episodios el impacto cultural puede resultar bastante grande y finalmente, el alumnado que proviene de Hispanoamérica al compartir el idioma y existir un vínculo histórico fuerte el impacto cultural es menor.

Indica la OCDE que "en la mayoría de países de la OCDE, el bajo rendimiento de los alumnos inmigrantes con relación a otros está estrechamente vinculado a la desventaja en la escuela" (OCDE, 2012) pues como se comentó antes suelen provenir de países menos desarrollados. Además, el alumnado extranjero suele provenir de un entorno socioeconómico desfavorecido que acompaña a las diferencias culturales. Además, "en la media de países de la OCDE, los estudiantes inmigrantes obtienen 39 puntos menos en matemáticas que los nativos y, en España 40 puntos" (INEE, 2018). En la Figura 4.19 se presenta, para los distintos países de la OCDE, el porcentaje de

### Porcentaje de alumnado extranjero sobre el total de alumnado, por comunidad autónoma. EE. Régimen General no universitarias. Curso 2022-2023

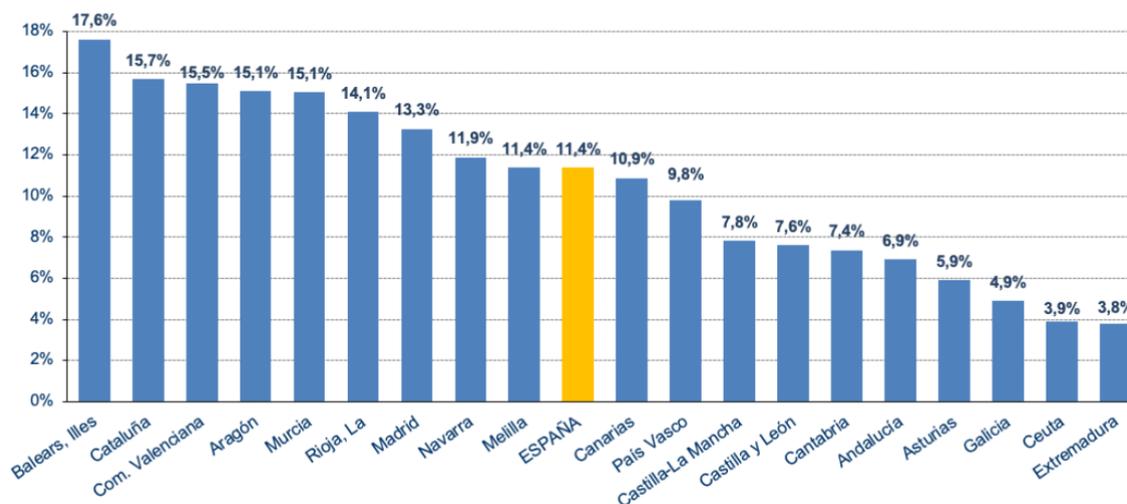


Figura 4.17: Proporción de alumnado extranjero por Comunidad Autónoma. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

### Distribución porcentual del alumnado extranjero por procedencia geográfica. Curso 2022-2023

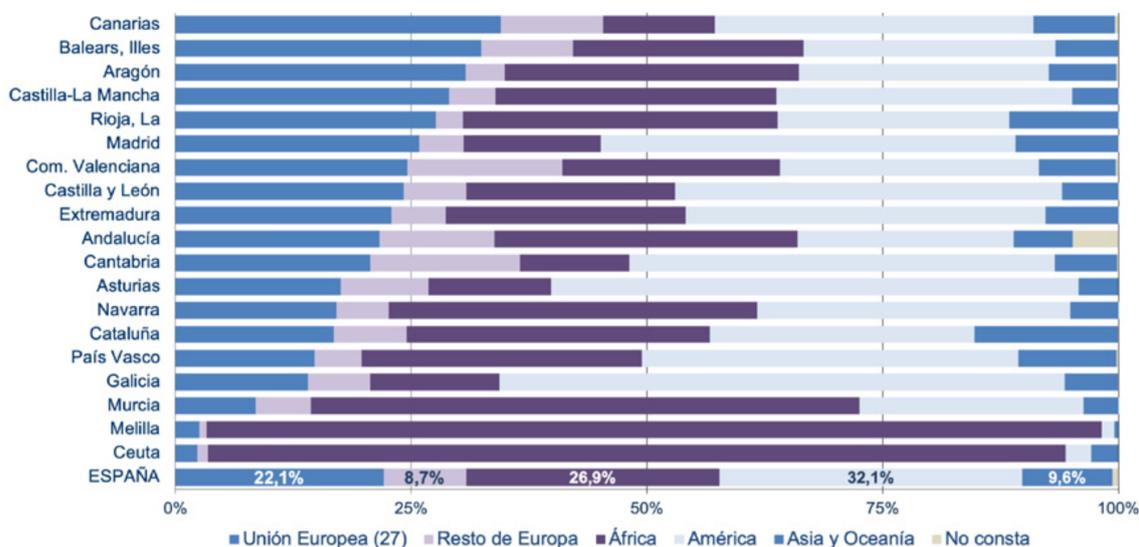


Figura 4.18: Procedencia geográfica del alumnado extranjero por Comunidad Autónoma 2022. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

alumnado extranjero (entre paréntesis), y la diferencia de puntuaciones medias estimadas en matemáticas, lectura y ciencias entre estudiantes nacionales y extranjeros, con indicación de su significatividad al 95%. Asimismo, se ha ordenado de mayor a

menor diferencia entre nacionales y extranjeros en la competencia principal, la matemática. Entre los países seleccionados, Suiza (35 %) y Canadá (34 %) son, con gran diferencia, los países que presentan la proporción más alta de alumnado inmigrante, y también en Australia (29 %), Nueva Zelanda (29 %), Austria (27 %) y Alemania (26 %) dicha proporción alcanza cifras elevadas. Como se observa en la Figura 4.19, en todas las competencias los resultados del rendimiento educativo del alumnado nativo es significativamente mejor que el del alumnado inmigrante. "La diferencia de rendimiento en matemáticas alcanza 30 puntos en el promedio de los países de la OCDE y 42 en el Total de la UE, a favor del alumnado nativo. Mientras que en lectura esta diferencia es de 41 puntos a favor de los nativos en el Promedio OCDE y 46 en el Total UE. En el caso de ciencias las diferencias son similares a las de lectura y matemáticas, 38 puntos en el Promedio OCDE y 49 en el Total UE, siempre a favor del alumnado nativo." [INEE, 2023]. En lectura la diferencia es significativa a favor del alumnado nativo. Hay que resaltar que en más de la mitad de los países seleccionados la diferencia de rendimiento en lectura entre el alumnado nativo e inmigrante es de 40 puntos o más, mientras que en España esta diferencia se mantiene en 32 puntos. Asimismo, también se muestran los resultados para ciencias, que muestra una situación similar a la observada en matemáticas y lectura. En la mayoría de países la diferencia es significativa a favor de los nativos, siendo en el alumnado de Finlandia en el que más difieren (91 puntos).

En la Figura 4.20 se presentan desagregadas por condición de inmigración las diferencias en el rendimiento estimado en matemáticas, lectura y ciencias para las Comunidades Autónomas y Ciudades Autónomas, ordenadas de mayor a menor diferencia de rendimiento entre nativos menos inmigrantes en la competencia matemática. En Melilla (26 %), Cataluña (24 %) e Illes Balears (21 %) se concentra la mayor proporción de inmigrantes, y en Extremadura (4 %) y Galicia (7 %), la menor. Tanto en las Comunidades Autónomas como en las Ciudades Autónomas el alumnado nativo obtiene rendimiento superior al inmigrante. Las diferencias son estadísticamente significativas. Por competencias, las mayores diferencias se observan en el País Vasco (70 puntos en matemáticas), Melilla (57 puntos en lectura) y Galicia (59 puntos en ciencias). En las pruebas sobre la competencia de matemáticas existen más de dos cursos de diferencia entre los alumnos nacionales y extranjeros, de hecho ya en 2018 "de Galicia (60 pts), Castilla y León (61 pts), Navarra (68 pts), La Rioja (70 pts) y País Vasco (77 pts)." (INEE, 2018). Por lo que se puede concluir que el alumnado extranjero influye en el rendimiento educativo a nivel nacional.

Figura 3.3.a. Diferencia en las puntuaciones medias de matemáticas, lectura y ciencias según la condición de inmigrante, significatividad del 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

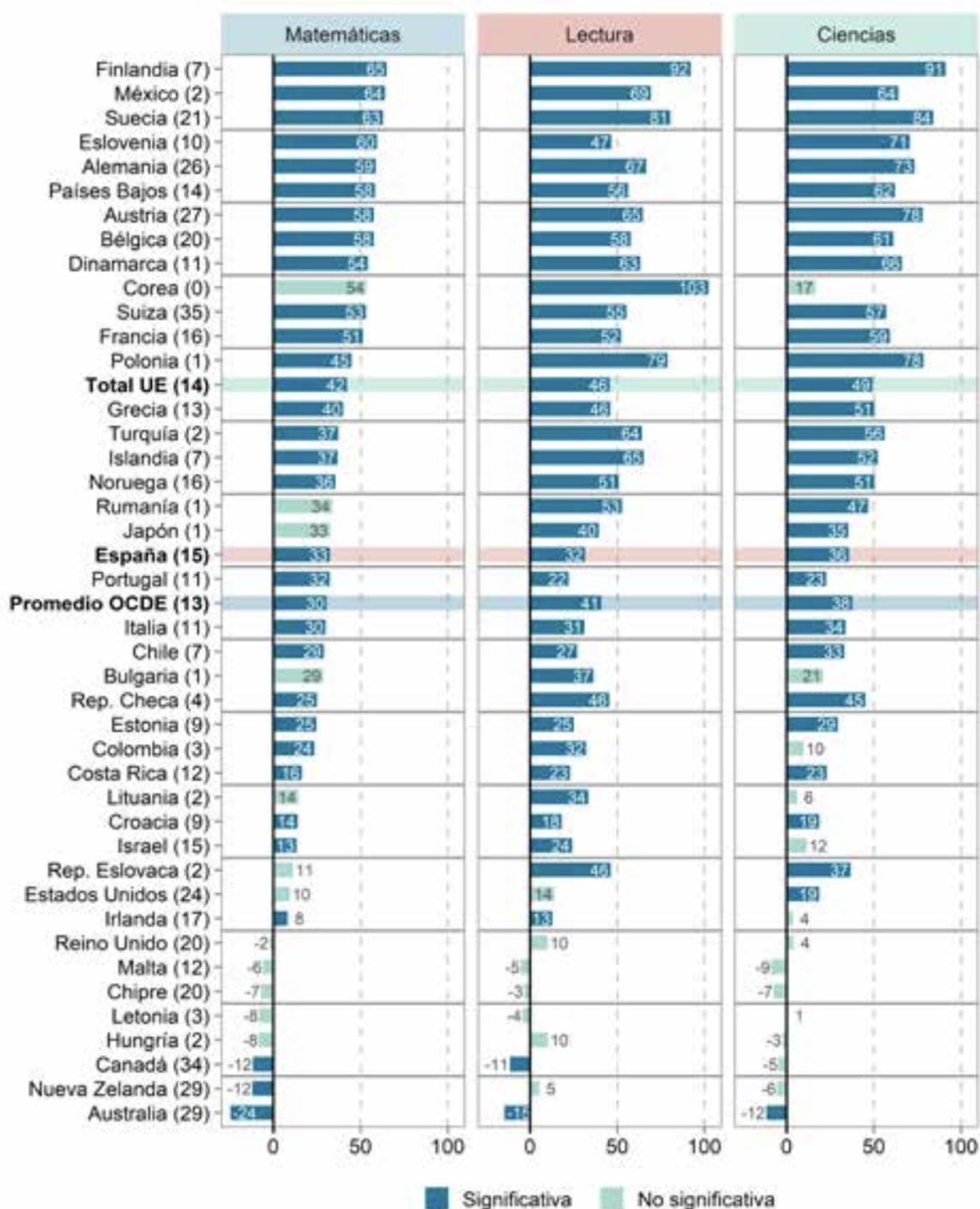


Figura 4.19: Procedencia geográfica del alumnado extranjero por Comunidad Autónoma 2022. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

Figura 3.3.b. Diferencia en las puntuaciones medias de matemáticas, lectura y ciencias según la condición de inmigrante, significatividad del 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

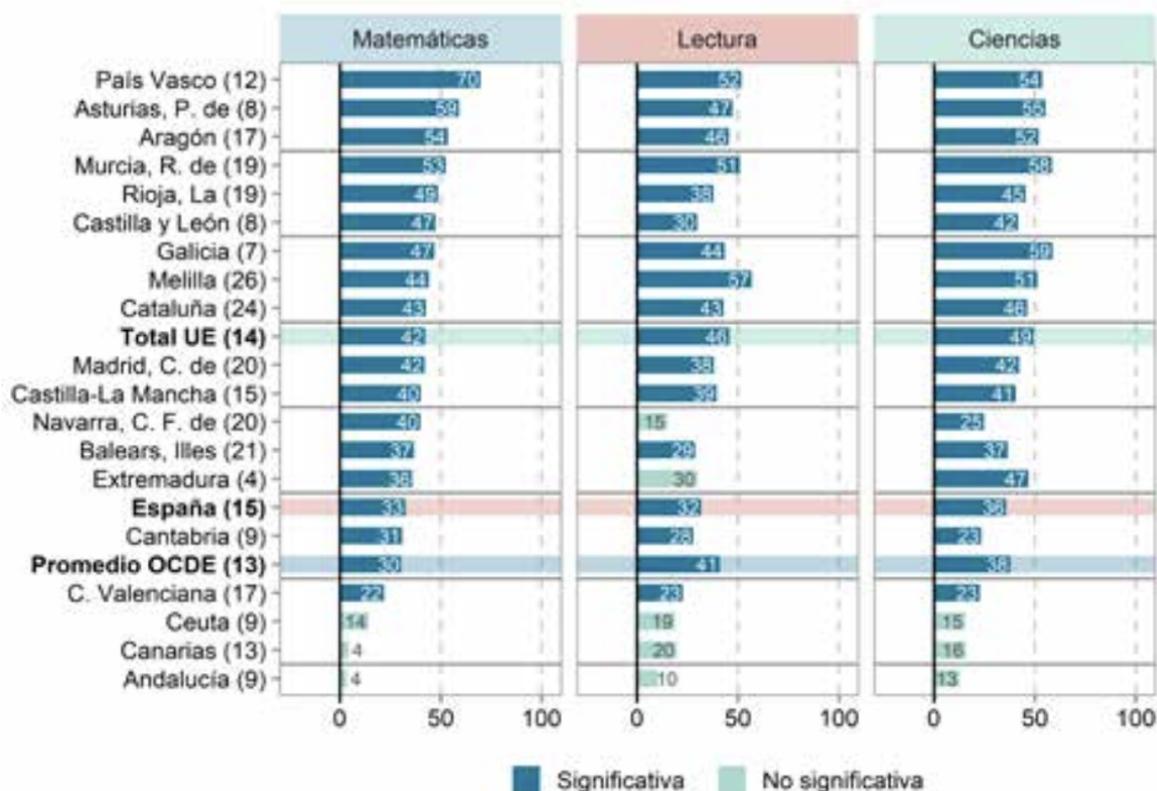


Figura 4.20: Procedencia geográfica del alumnado extranjero por Comunidad Autónoma 2022. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional

#### 4.4.2. Brecha de género en educación

A lo largo de los años la OCDE resalta las diferencias existentes entre hombres y mujeres en PISA. En concreto revela que los hombres y mujeres en la franja entre los 15 y los 16 años presentan contrastes en sus calificaciones, prestando atención a los resultados los chicos obtienen mejores calificaciones en Matemáticas y las chicas mejores resultados en lectura. Tal y como se manifiesta en (OCDE, 2015) las diferencias de género en el rendimiento a los 15-16 años pueden tener consecuencias en un plazo largo de tiempo en el futuro personal y profesional de chicas y chicos. De hecho "los varones rezagados y que carecen de competencias básicas en lectura pueden encontrar dificultades para acceder a una educación superior, a puestos deseables en el mercado laboral y a un pleno desarrollo personal. Del mismo modo, la subrepresentación de las chicas entre el alumnado de rendimiento alto en ciencias y matemáticas puede explicar, en parte, la persistente brecha de género en las carreras de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM), que a menudo se encuentran entre las profesiones mejor pagadas." [INEE, 2023]. De hecho, estas diferencias persisten a lo largo del tiempo ya que "en PISA 2022 se repite el mismo patrón de los ciclos anteriores en cuanto a esta diferencia de género: existe en matemáticas, a favor

de los chicos, y en lectura, a favor de las chicas, en este caso por un margen considerablemente mayor." [INEE, 2023] y también como se manifiesta en (Peri, 2012) y (Anelli, Cecci y Williams, 2007) manifiestan que el peor resultado de las chicas es en Matemáticas.

Se dice en el informe PISA 2022, "la diferencia en matemáticas entre las puntuaciones de alumnos y alumnas alcanza 9 puntos en el promedio de los países de la OCDE y 10 en el valor Total de la UE, a favor de los chicos, ambas estadísticamente significativas. En lectura, esta diferencia es de 24 puntos a favor de las chicas tanto en el Promedio OCDE como en el Total UE. En el caso de ciencias no hay diferencia estadísticamente significativa entre alumnos y alumnas para el Promedio de la OCDE (0) ni para el Total UE (0)." [INEE, 2023]. Y, "se muestran los resultados para ciencias que, como se anticipaba, presentan mucha variabilidad entre países. En 11 países la diferencia es significativa a favor de las alumnas, siendo las de Chipre quienes difieren más en resultado respecto a sus compañeros (29 puntos). En 23 países no hay diferencias significativas en el rendimiento en ciencias entre chicas y chicos, al igual que ocurría en el Promedio OCDE y Total UE. Y en 8 la diferencia es significativa a favor de los estudiantes, entre los que se encuentra España (5 puntos a favor de los alumnos). El país en el que mayor diferencia se estima es Costa Rica con 15 puntos a favor de los chicos." [INEE, 2023]. Todo lo comentado puede observarse en la Figura 4.21, en Matemáticas las chicas obtienen en promedio puntuaciones inferiores en 10 puntos más bajas que las de los chicos. España es el séptimo de los países en la brecha en Matemáticas con -19,32 puntos. Asimismo, la brecha se invierte en lectura donde en promedio las chicas obtienen una puntuación de 25 por encima que las de los chicos.

Los efectos de la brecha de género son devastadores, "Según la Edición 2014 del *Informe Cifras de la Educación en España* del Ministerio de Educación, la tasa de idoneidad a los 15 años, es decir, quienes no habían repetido ningún curso, era un porcentaje del 66,8% en mujeres y del 56,9% en varones. Por cada 100 varones de 15 años que no hubieran repetido, había 117 mujeres." (Aguiló, 2016) y en "los estudios universitarios en España, según el informe del Ministerio de Educación *Datos y Cifras del Sistema Universitario español. Curso 2014/2015*, el 54,8% de los que superan las pruebas de acceso a la universidad son mujeres y el 45,2% son varones (página 23). Esa diferencia se incrementa si nos fijamos en los que concluyen su grado universitario: 63,6% mujeres y 36,4% varones (página 42). Todo esto indica por cada 100 varones que aprueban las pruebas de acceso a la universidad lo hacen 121 mujeres. Y por cada 100 estudiantes varones de Grado egresados hay 175 mujeres." (Aguiló, 2016)

Ahora bien, el territorio principal de estudio es España y las Comunidades Autónomas que la componen, por ello se analiza ahora, la brecha de género existente en España. En la Figura 4.22 se repite el patrón de ámbito internacional en las Comunidades Autónomas. Los chicos obtienen una puntuación superior en rendimiento educativo en Matemáticas que las chicas. Por otro lado, ellas obtienen calificaciones más altas en lectura que sus compañeros y en ciencias no existe tendencia estadística clara. Entre las que más presentan una diferencia significativa en esta competencia, las diferencias varían entre los 17 puntos estimados a favor de ellos en Cantabria y los 10 en Galicia. En lectura, únicamente las ciudades autónomas no presentan diferencia significativa en el rendimiento entre los estudiantes. En todas las comunidades autónomas las diferencias son significativas variando entre los 34 puntos

de Cataluña y los 14 de Cantabria a favor de ellas. En ciencias únicamente Illes Balears (9 puntos), Comunidad de Madrid (10 puntos), Región de Murcia (12 puntos) y Cantabria (12 puntos) presentan diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento y siempre a favor de los alumnos como bien plantea [INEE, 2023]. Además esta tendencia se mantiene con el paso del tiempo tal y como se puede ver en la Figura que muestra la evolución del rendimiento en matemáticas desagregado por género para España, Promedio OCDE y Total UE (desde PISA 2015). En todos los casos se observa una tendencia clara descendente y en proporción similar en ambos géneros. En el ciclo de PISA 2018 la brecha fue menor entre los alumnos y las alumnas, 7 puntos para España, 5 para el Promedio OCDE y 7 para el Total UE. En PISA 2022, ha aumentado hasta los aproximadamente 10 puntos de diferencia en España, OCDE y UE, lejos de los 16 que presentaba España en PISA 2012 y 2015. Por tanto, se concluye que, en la última década en España, la tendencia se orienta a reducir la brecha de género en el rendimiento en matemáticas.

Figura 3.1.a. Diferencia en las puntuaciones medias de matemáticas, lectura y ciencias según género (chicas-chicos), significatividad del 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

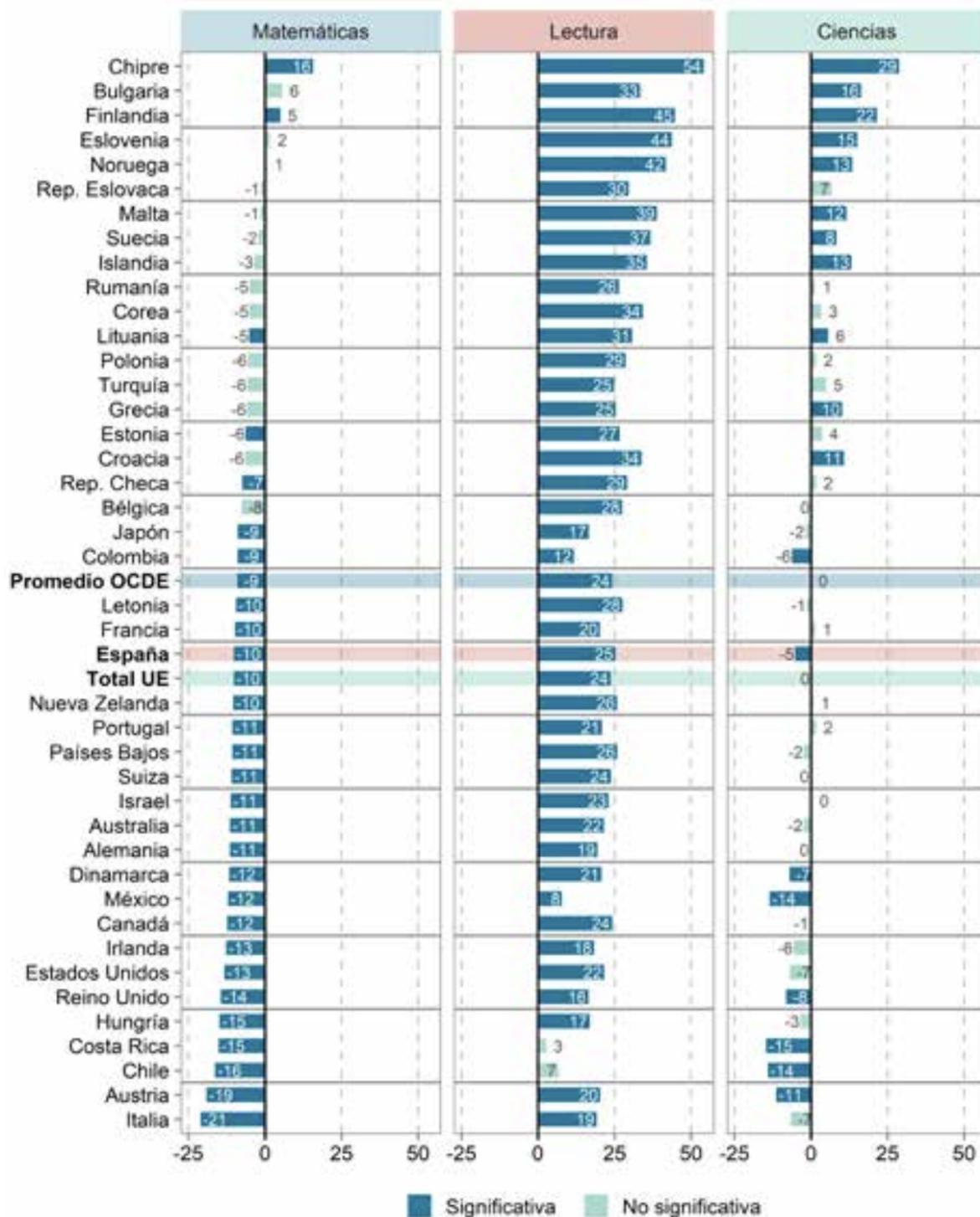


Figura 4.21: Diferencias de las calificaciones en promedio de Matemáticas, Lectura y Ciencias en función del género. Fuente: [INEE, 2023]

Figura 3.1.b. Diferencia en las puntuaciones medias de matemáticas, lectura y ciencias según género (chicas-chicos), significatividad del 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

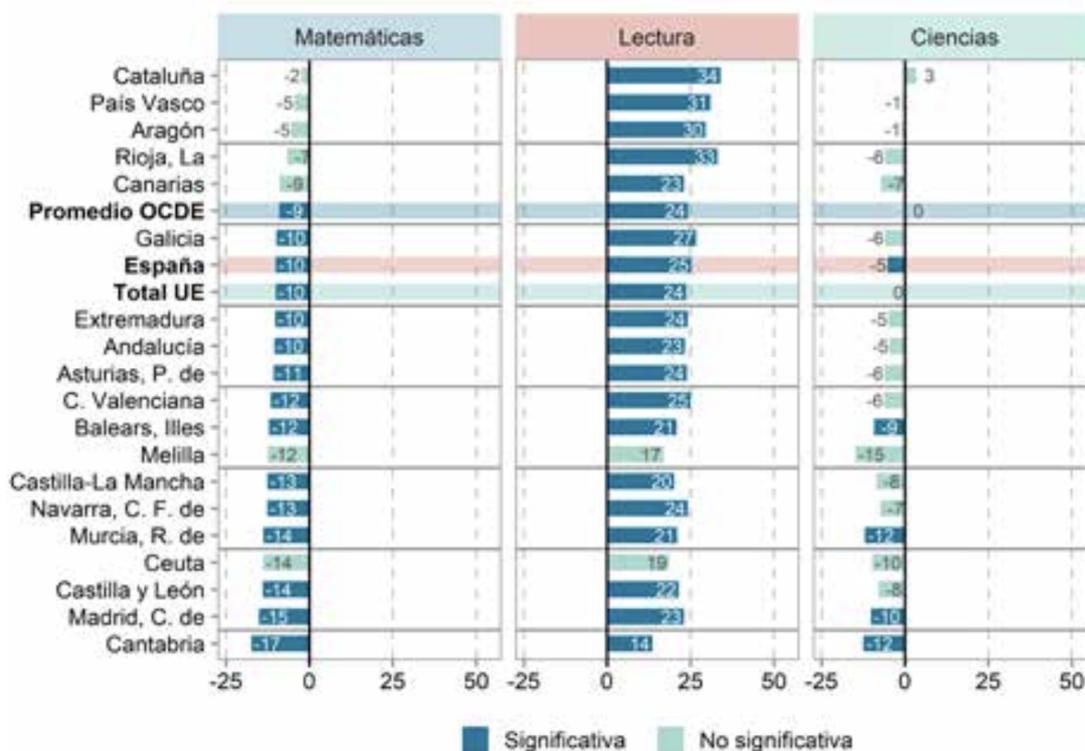


Figura 4.22: Diferencia en las puntuaciones medias de Matemáticas, Lectura y Ciencias en función del género por Comunidad Autónoma. Fuente: [INEE, 2023]

Figura 3.2. Tendencia en las puntuaciones medias en matemáticas según género



Figura 4.23: Tendencia en las puntuaciones medias en Matemáticas en función del género. Fuente: [INEE, 2023]



## Capítulo 5

# Matemáticas en el informe PISA

La competencia en Matemáticas es una de las áreas clave evaluadas en el informe PISA. Este programa de la OCDE se centra en medir el rendimiento académico de estudiantes de 15 años en todo el mundo, y la competencia en matemáticas es esencial para evaluar la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos matemáticos en situaciones de la vida real. En el informe PISA, la evaluación de la competencia en matemáticas no se limita simplemente a la capacidad de realizar cálculos aritméticos básicos. En cambio, se enfoca en evaluar la capacidad de los estudiantes para comprender, razonar y resolver problemas matemáticos en contextos variados.

En este capítulo se analizarán los rendimientos medios obtenidos por una selección de países participantes en PISA 2022, y de las comunidades y ciudades autónomas de España. Con el propósito de facilitar la comprensión de los resultados, se presenta de manera gráfica la información global mediante las puntuaciones medias estimadas de los estudiantes de diversos países, así como de las comunidades y ciudades autónomas españolas. Estas puntuaciones se acompañan de intervalos de confianza al 95 %, los cuales funcionan como estimadores de la media poblacional. Los datos correspondientes a estas mediciones se encuentran detallados en las tablas respectivas, con una numeración correlativa a la utilizada en las figuras.

Debido a que la competencia matemática ocupa un rol preponderante en la edición de PISA correspondiente al año 2022, se llevará a cabo un análisis más detallado de sus resultados. Este análisis se caracterizará por desagregar las puntuaciones en relación con cada una de las cuatro subescalas de contenidos (Cambio y relaciones, Cantidad, Espacio y forma, Incertidumbre y datos), así como con cada una de las cuatro subescalas de procesos (Formular expresiones matemáticas; Emplear conceptos, hechos y procedimientos matemáticos; Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos; Razonar).

### 5.1. Promedios globales en Matemáticas

Para comenzar, en esta sección se realiza un análisis de la competencia matemática global sin distinguir aspectos de la misma. Prestando atención a la Figura 5.1, se observa que España obtiene una puntuación de 473 puntos cercana a la media de la UE con 474 puntos y la media de la OCDE con una puntuación de 472 puntos. Obtenemos una puntuación similar a los países de nuestro entorno, Alemania con 475 puntos, Francia con 474 puntos y Portugal con 472 puntos. Desde luego

estamos enormemente alejados de los países con mejores resultados entre los que se encuentran Japón (536), Corea (527), Estonia (510), Suiza (508) y Canadá (497). Atendiendo ahora a la Figura 5.2 se puede hacer un estudio comparativo entre las comunidades autónomas españolas. Tomando como referencia la media española de 473 puntos, se observa que existen comunidades autónomas que están muy por encima de la media, sin duda la que mejores resultados obtiene es Castilla y León (499), por debajo tiene a Asturias y Cantabria (495), Madrid (494), La Rioja (493) y Navarra (492) pudiéndose incluir las restantes comunidades autónomas del norte excluyendo a Cataluña que ha obtenido unos resultados por debajo de la media. El nivel bajo está compuesto por las comunidades autónomas del sur y Cataluña, las puntuaciones más bajas son las obtenidas por Melilla (404) y Ceuta (395). Se puede observar claramente que la España a dos velocidades es una realidad que se sigue verificando en Matemáticas.

Se pueden establecer equivalencias entre España y sus comunidades autónomas con los países de la OCDE. En cuanto a la equivalencia de España(473) con el resto de países de la OCDE, se asemeja a Alemania y Lituania(475), Francia(474) y Hungría (473). En lo que respecta a las comunidades autónomas, la que ha obtenido mejores resultados es Castilla y León (499) que está por encima de Canadá (498) y cerca de Suiza (508). El resto de comunidades autónomas que han obtenido buenos resultados son equivalentes a Países Bajos (493), Irlanda (492), Bélgica, Dinamarca, Reino Unido y Polonia (489). Las comunidades autónomas con peores resultados equivalen a Italia (471), Noruega (468), Malta (466), Estados Unidos (465), Rep. Eslovaca (464), Croacia (463), Israel (458) y Turquía (453). Las ciudades de Melilla y Ceuta que son las que han obtenido los resultados más bajos son equivalentes con Chile (412) y México (395).

## 5.2. Rendimientos medios estimados en las subescalas de Matemáticas

Conforme se expone en este trabajo, se destaca que la competencia preeminente en la edición de PISA 2022 ha sido la competencia matemática, motivo por el cual se ha procedido a realizar un análisis detallado de dicha competencia. Este análisis implica, entre otras consideraciones, la determinación de los rendimientos medios estimados para cada una de las subescalas de procesos y contenidos contempladas en el Marco de Matemáticas PISA 2022 [INEE, 2023].

Las *subescalas de procesos* son:

- Formular situaciones matemáticamente
- Emplear conceptos, hechos y procedimientos matemáticos
- Interpretar y evaluar resultados matemáticos
- Razonamiento matemático

Las *subescalas de contenidos* son:

- Cambio y relaciones
- Espacio y forma

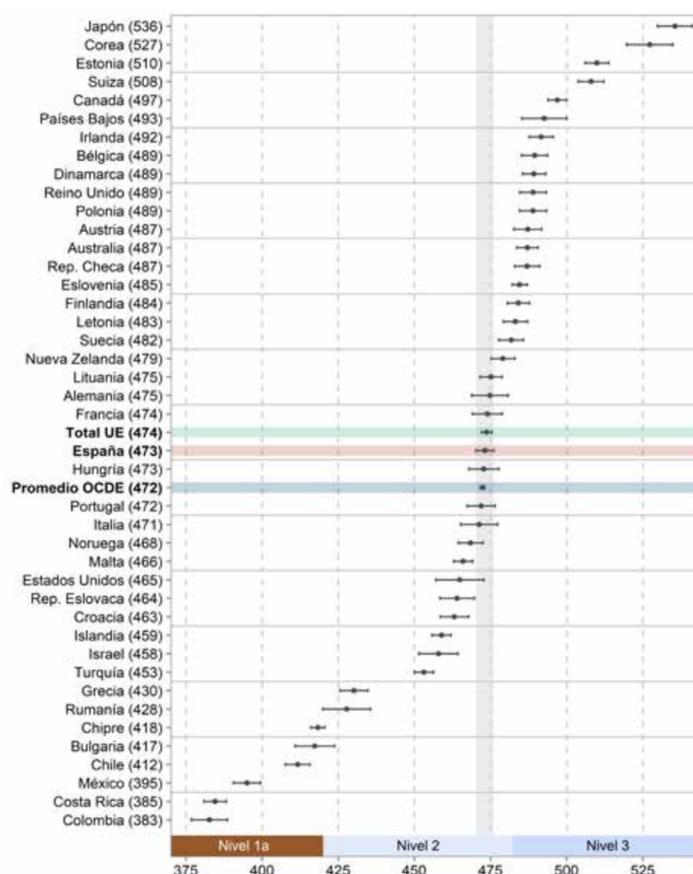


Figura 5.1: Rendimientos medios estimados en competencia matemática e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

- Cantidad
- Incertidumbre y datos

En este epígrafe se van a presentar los rendimientos medios estimados en cada una de las subescalas.

## 5.2.1. Rendimientos medios estimados en las subescalas de procesos

### 5.2.1.1. Formular situaciones matemáticamente

La acepción del término "formular" dentro de la definición de competencia matemática alude a la capacidad de los individuos para reconocer y discernir oportunidades que requieran el empleo de las matemáticas, para luego conferir una estructura matemática a un problema presentado en una forma contextualizada. En el proceso de formular situaciones matemáticamente, los individuos determinan dónde pueden extraer las esencias matemáticas cruciales con el fin de analizar, plantear y resolver el problema. Se realiza una transposición desde un entorno del mundo real hacia el dominio matemático, otorgando al problema del mundo real una estructura matemática, representaciones y especificidad. Asimismo, se reflexiona acerca de las res-

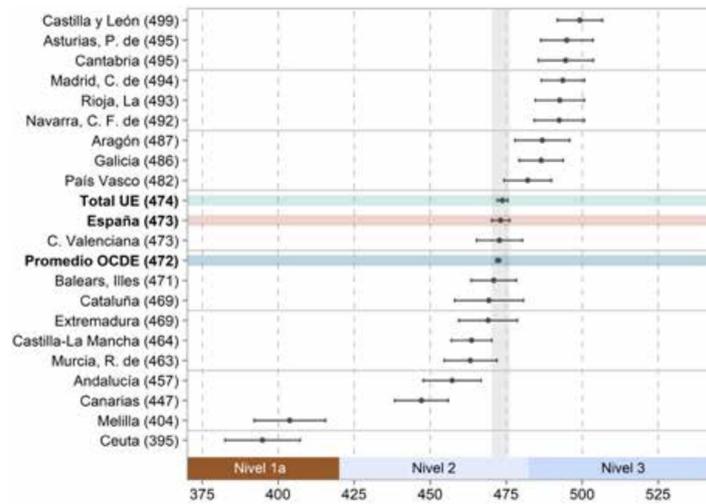


Figura 5.2: Rendimientos medios estimados en competencia matemática e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades autónomas españolas participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

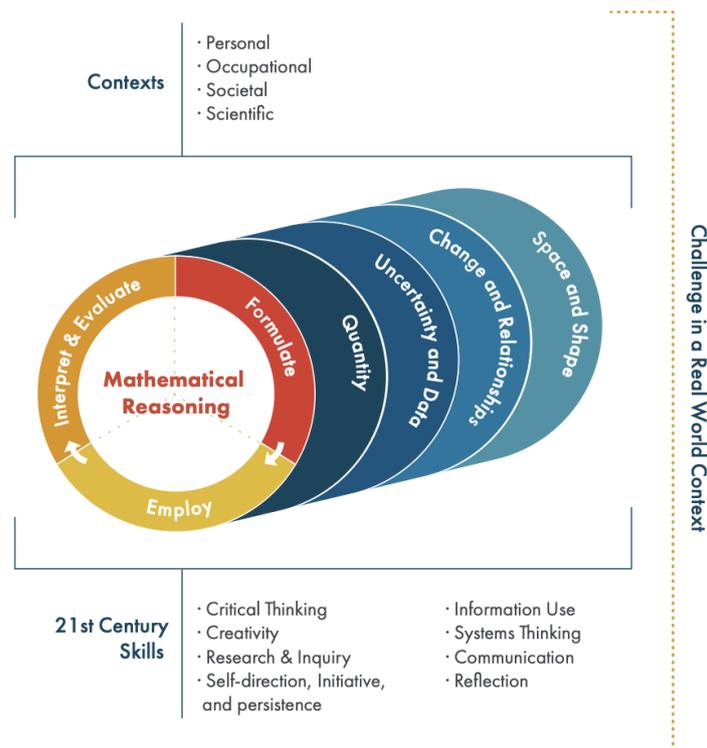


Figura 5.3: Rendimientos medios estimados en competencia matemática e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

tricciones y supuestos inherentes al problema. Específicamente, este procedimiento de formular situaciones matemáticamente abarca actividades tales como:

- Seleccionar un modelo apropiado de una lista.
- Identificar los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto de la vida real, así como identificar las variables significativas.
- Reconocer la estructura matemática, abarcando regularidades, relaciones y patrones, en problemas o situaciones.
- Simplificar una situación o problema para facilitar su análisis matemático.
- Identificar las restricciones y suposiciones subyacentes a cualquier modelado matemático y simplificaciones derivadas del contexto.
- Representar una situación de manera matemática, empleando variables apropiadas, símbolos, diagramas y modelos estandarizados.
- Representar un problema de forma alternativa, incluyendo su organización con base en conceptos matemáticos y realizando suposiciones pertinentes.
- Comprender y explicar las relaciones entre el lenguaje específico del contexto de un problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para su representación matemática.
- Traducir un problema al lenguaje matemático o a una representación matemática.
- Identificar aspectos de un problema que guarden correspondencia con problemas conocidos o conceptos matemáticos, hechos o procedimientos.
- Utilizar tecnología, como hojas de cálculo o funciones de listas en calculadoras gráficas, para representar relaciones matemáticas inherentes a un problema contextualizado.
- Generar una serie ordenada de instrucciones (paso a paso) para la resolución de problemas.

En el contexto internacional recogido en la Figura 5.4 los países que han obtenido los mejores rendimiento en la formulación matemática son Japón (536), Corea (526), Estonia y Suiza (507). En lo que respecta a España (465), está por debajo de la media de la OCDE (469) y la UE (468), España ha obtenido puntuaciones similares a Hungría y Portugal (467), Noruega (465), Malta e Italia (464). Para analizar los resultados de las comunidades autónomas españolas recogidos en la Figura 5.5 las de mayor puntuación son Castilla y León (493) y Madrid (487). Las de peores resultados son Melilla (389) y Ceuta (374). Aunque por debajo de la media están Cataluña y EXtremadura (464) y demás comunidades autónomas del sur.

#### **5.2.1.2. Emplear conceptos**

La utilización del término "emplear" en la definición de competencia matemática hace referencia a la habilidad de los individuos para aplicar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento con el propósito de resolver problemas

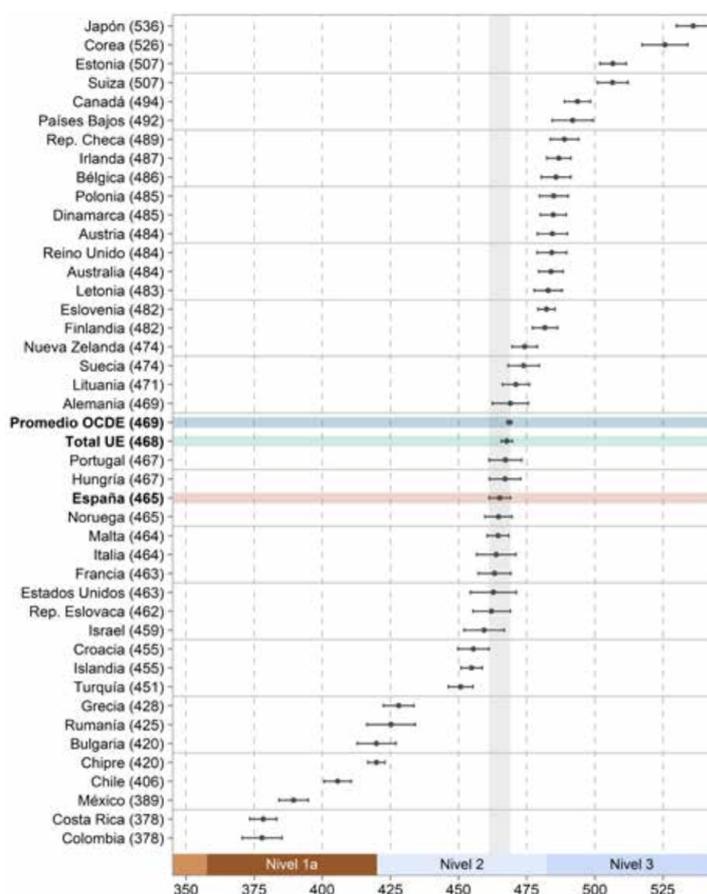


Figura 5.4: Rendimientos medios estimados en formular situaciones matemáticamente e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

formulados matemáticamente y derivar conclusiones matemáticas. En el acto de emplear conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento para la resolución de problemas, los individuos ejecutan los procedimientos matemáticos necesarios para obtener resultados y hallar una solución matemática. Durante este proceso, se trabaja con un modelo de la situación problemática, se establecen regularidades, se identifican conexiones entre entidades matemáticas y se construyen argumentos matemáticos. Específicamente, este proceso de emplear conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento comprende actividades tales como:

- Realizar cálculos simples.
- Derivar conclusiones elementales.
- Seleccionar estrategias apropiadas de una lista.
- Idear e implementar estrategias para hallar soluciones matemáticas.
- Utilizar herramientas matemáticas, incluida la tecnología, para facilitar la obtención de soluciones exactas o aproximadas.

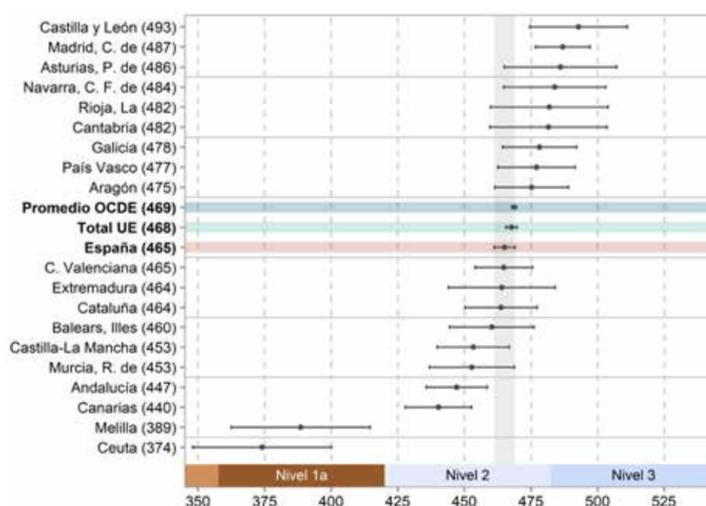


Figura 5.5: Rendimientos medios estimados en formular situaciones matemáticamente e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

- Aplicar hechos, reglas, algoritmos y estructuras matemáticas en el proceso de encontrar soluciones.
- Manipular números, datos e información gráfica y estadística, expresiones y ecuaciones algebraicas, así como representaciones geométricas.
- Elaborar diagramas, gráficos y construcciones matemáticas, y extraer información matemática de los mismos.
- Emplear y alternar entre diversas representaciones en el proceso de búsqueda de soluciones.
- Formular generalizaciones basadas en los resultados de la aplicación de procedimientos matemáticos para hallar soluciones.
- Reflexionar sobre argumentos matemáticos, y explicar y justificar resultados matemáticos.
- Evaluar la relevancia de patrones y regularidades observadas (o propuestas) en los datos.

En la Figura 5.6 se presenta el rendimiento medio estimado de los países participantes de la OCDE y la UE en PISA 2022 en el proceso de "Emplear conceptos, hechos y procedimientos matemáticos". Nuevamente, aquellos países que exhiben un rendimiento más elevado son Japón (536 puntos), Corea (523) y Estonia (513), mientras que aquellos que obtienen puntuaciones más bajas son México (398), Costa Rica (383) y Colombia (381). España (470) se sitúa ligeramente por debajo del Total de la UE (473) y del Promedio de la OCDE (472). Respecto a los resultados de las comunidades y ciudades autónomas españolas en este proceso recogido en la Figura 5.7, se observa que Cantabria (497), Castilla y León (494) y el Principado de Asturias (493) registran los rendimientos más destacados, en contraste con Canarias (444), Melilla (395) y Ceuta (384), que exhiben los resultados más modestos.

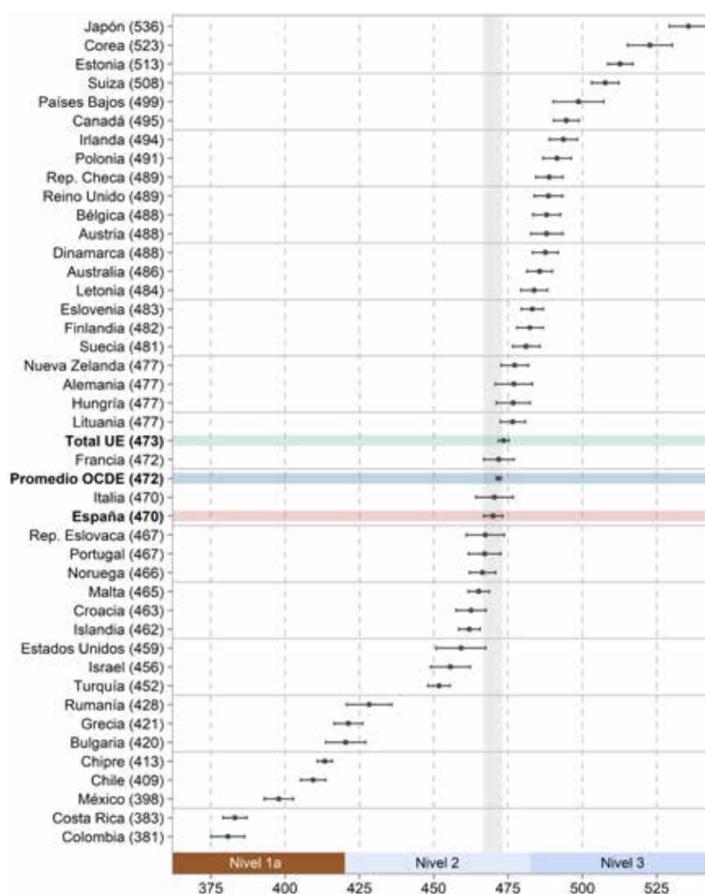


Figura 5.6: Rendimientos medios estimados en empleo de conceptos e intervalos de confianza al 95% de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

### 5.2.1.3. Interpretación y evaluación de resultados matemáticos

La expresión *interpretar y evaluar*, utilizada en la definición de competencia matemática, se enfoca en la habilidad de los individuos para reflexionar sobre soluciones, resultados o conclusiones matemáticas e interpretarlas en el contexto del problema de la vida real que dio inicio al proceso. Esto conlleva a traducir soluciones matemáticas o razonamientos de nuevo al contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y tienen coherencia en el contexto del problema.

En concreto, este proceso de interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos abarca actividades tales como:

- Interpretar información presentada en forma gráfica y/o en diagramas.
- Evaluar un resultado matemático en términos del contexto.
- Interpretar un resultado matemático de nuevo en el contexto del mundo real.
- Evaluar la coherencia de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real.

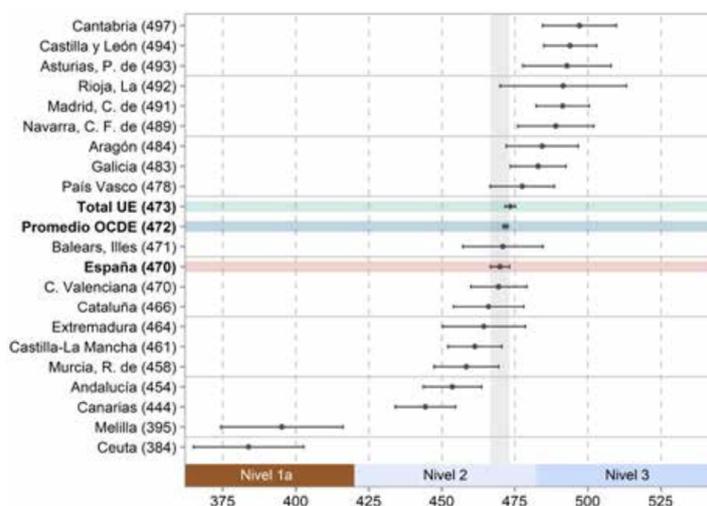


Figura 5.7: Rendimientos medios estimados en empleo de conceptos e intervalos de confianza al 95% de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

- Comprender cómo el mundo real afecta los resultados y cálculos de un procedimiento o modelo matemático para realizar juicios contextuales sobre cómo se deben ajustar o aplicar los resultados.
- Explicar por qué un resultado o conclusión matemática tiene o no tiene sentido dadas las circunstancias de un problema.
- Comprender el alcance y los límites de los conceptos matemáticos y las soluciones matemáticas.
- Criticar e identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema.
- Emplear el pensamiento matemático y el pensamiento computacional para realizar predicciones, proporcionar evidencia para argumentos y poner a prueba y comparar soluciones propuestas.

Los tres países con los rendimientos más destacados vuelven a ser Japón (544), Corea (531) y Estonia (511). Asimismo, persisten como los de rendimientos más modestos los mismos tres países: México (391), Costa Rica (386) y Colombia (384). En esta ocasión, España (477) se posiciona ligeramente por encima del Total de la UE (476) y del Promedio de la OCDE (474). En el ámbito de las comunidades y ciudades autónomas, Castilla y León (502) lidera la lista, seguida por el Principado de Asturias, Cantabria y la Comunidad de Madrid (todas ellas con 500 puntos). Canarias (454), Ceuta (409) y Melilla (401) registran los rendimientos más modestos.

#### 5.2.1.4. Razonamiento matemático

La habilidad para razonar de manera lógica y presentar argumentos de forma honesta y persuasiva constituye una destreza que adquiere creciente relevancia en el panorama contemporáneo. Las matemáticas, como disciplina, versan sobre objetos

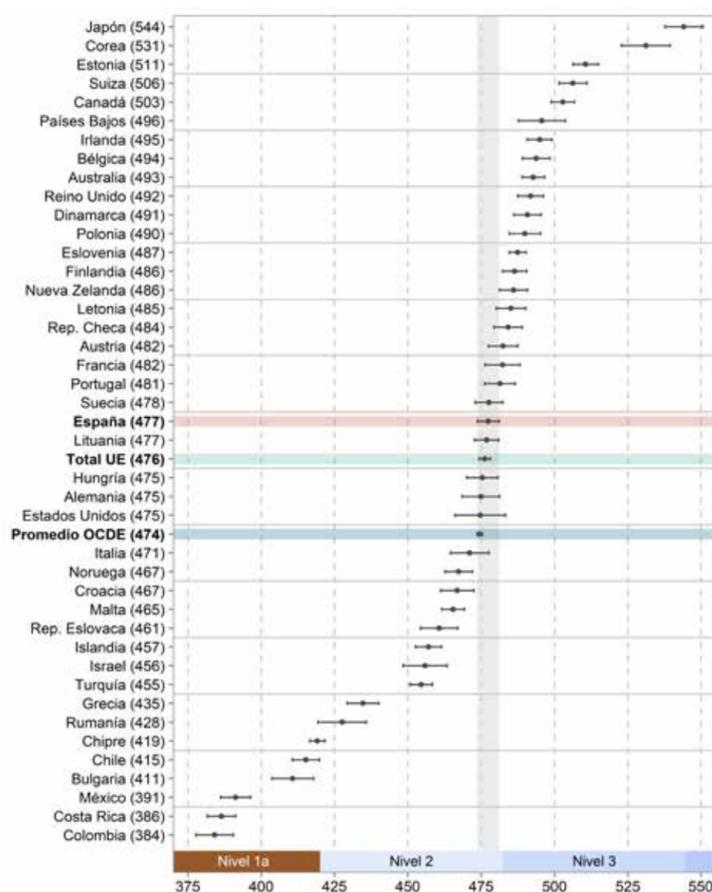


Figura 5.8: Rendimientos medios estimados en interpretación y evaluación de resultados matemáticos e intervalos de confianza al 95% de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

y conceptos rigurosamente definidos susceptibles de ser analizados y transformados mediante el "razonamiento matemático", lo que conduce a conclusiones categóricas e inmutables.

En el ámbito matemático, los estudiantes internalizan que, mediante un razonamiento y supuestos adecuados, pueden derivar resultados que pueden considerar plenamente verídicos en diversos contextos de la vida real. Además, reviste importancia que tales conclusiones sean imparciales y prescindan de la validación por parte de una autoridad externa.

Al menos seis comprensiones fundamentales otorgan estructura y sustento al razonamiento matemático. Estas comprensiones clave abarcan:

- La comprensión de la cantidad, los sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas.
- La apreciación del poder de la abstracción y la representación simbólica.
- La percepción de las estructuras matemáticas y sus regularidades.
- El reconocimiento de las relaciones funcionales entre cantidades.

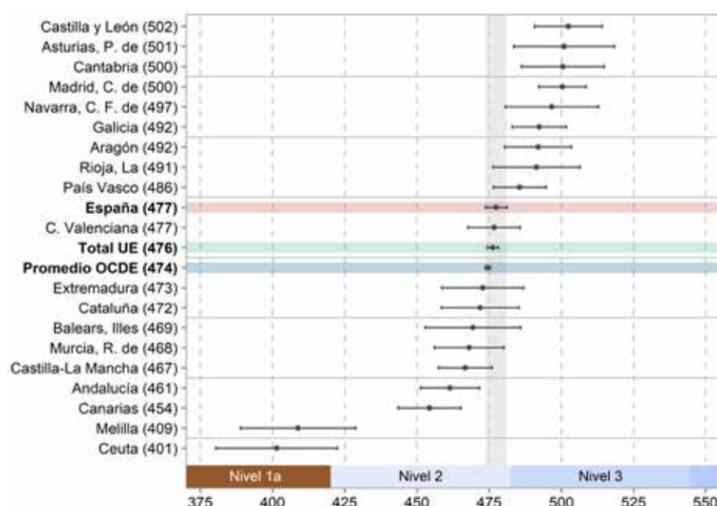


Figura 5.9: Rendimientos medios estimados en interpretación y evaluación de resultados matemáticos e intervalos de confianza al 95% de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

- La utilización del modelado matemático como una lente hacia el mundo real (por ejemplo, aquellas surgidas en las ciencias físicas, biológicas, sociales, económicas y del comportamiento).
- La comprensión de la variación como elemento central en estadística.

En la Figura 5.10 se presentan los rendimientos medios estimados para este proceso de los países de la OCDE y de la UE participantes en PISA 2022. Se tiene que Japón (534 puntos) y Corea (528) vuelven a posicionarse como los países con los rendimientos más destacados, siendo acompañados en esta ocasión por Suiza (513). México (389), Costa Rica (381) y Colombia (375) nuevamente ocupan las últimas posiciones en el listado ordenado por rendimiento de los países. España (477) exhibe un rendimiento claramente superior al Total de la UE (474) y al Promedio de la OCDE (473). Parece evidente, por tanto, que el alumnado en España demuestra una relativa competencia más destacada en procesos cognitivamente más exigentes que en procesos fundamentales, aunque más básicos, necesarios para culminar de manera exitosa el ciclo de resolución de problemas. Al examinar los resultados relativos al proceso de Razonamiento Matemático de las comunidades y ciudades autónomas de España (Figura 5.11), se aprecia que Castilla y León (505 puntos), Comunidad Foral de Navarra (503) y Principado de Asturias (500) registran las puntuaciones más elevadas, mientras que Canarias (452), Melilla (411) y Ceuta (400) son las que obtienen las puntuaciones más reducidas.

### 5.2.2. Rendimientos medios estimados en las subescalas de contenidos

La comprensión del contenido matemático y la capacidad de aplicar dicho conocimiento para resolver problemas significativos contextualizados son aspectos de gran relevancia para los ciudadanos del mundo contemporáneo. En otras palabras, el razonamiento matemático, la resolución de problemas y la interpretación de si-

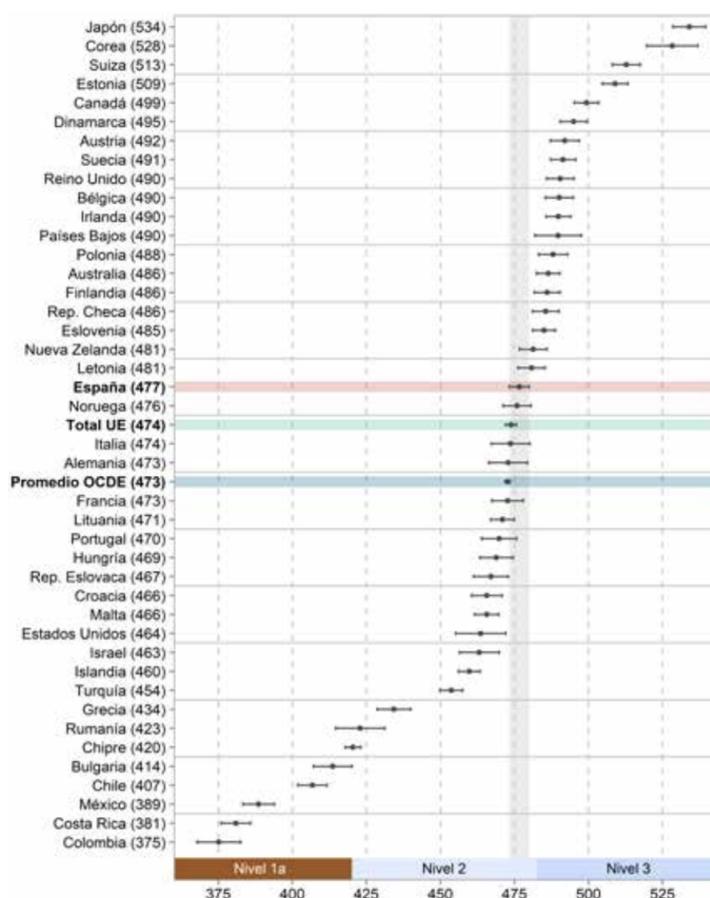


Figura 5.10: Rendimientos medios estimados en razonamiento matemático e intervalos de confianza al 95% de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

tuaciones en contextos personales, laborales, sociales o científicos requieren de un sólido fundamento en conocimientos y comprensión matemáticos.

En virtud del propósito de PISA de evaluar la alfabetización matemática, se propone una estructura organizativa para el conocimiento del contenido matemático, basada en los fenómenos matemáticos subyacentes a amplias categorías de problemas. Dicha estructura, aunque no innovadora, se sustenta en obras de renombre, como "On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy" (Steen, 1990) y "Mathematics: The Science of Patterns" (Devlin, 1994).

Para reflejar los fenómenos matemáticos que subyacen a diversas categorías de problemas, así como la estructura general de las matemáticas y los aspectos fundamentales de los planes de estudio típicos, se han reintroducido en PISA 2022 las siguientes categorías de contenido previamente utilizadas en 2012. Estas cuatro categorías caracterizan el espectro del contenido matemático central para la disciplina e ilustran las amplias áreas de contenido empleadas en las preguntas de la prueba de PISA 2022 (que incluirá preguntas de PISA D para brindar mayores oportunidades a los estudiantes en los niveles más bajos del espectro de rendimiento):

- Cambio y relaciones

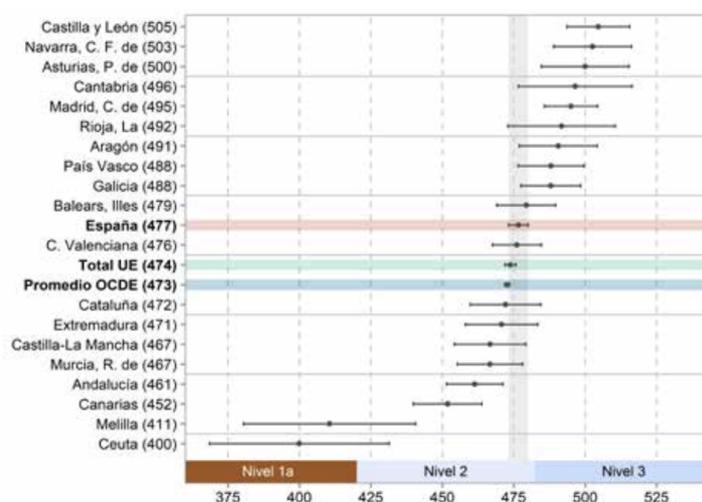


Figura 5.11: Rendimientos medios estimados en razonamiento matemático e intervalos de confianza al 95% de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022. Fuente: [INEE, 2023]

- Espacio y forma
- Cantidad
- Incertidumbre y datos

Con estas cuatro categorías, se puede estructurar el dominio matemático de manera que garantice una distribución equilibrada de preguntas en todo el espectro y se enfoque en fenómenos matemáticos relevantes, evitando al mismo tiempo una clasificación excesivamente detallada que obstaculice el análisis de problemas matemáticos desafiantes basados en situaciones reales.

Si bien la categorización del contenido es crucial para el desarrollo de preguntas y la presentación de resultados de evaluación, es importante tener en cuenta que algunas preguntas podrían ser potencialmente clasificadas en más de una categoría de contenido.

Los currículos de matemáticas en las escuelas nacionales generalmente se estructuran alrededor de líneas de contenido, como números, álgebra, funciones, geometría y manejo de datos, junto con listas detalladas de temas que establecen expectativas claras. Estos currículos están diseñados para proporcionar a los estudiantes el conocimiento y las habilidades necesarias para abordar los mismos fenómenos matemáticos subyacentes que organizan el contenido de PISA. Por ende, el espectro de contenido delineado por PISA está estrechamente alineado con el contenido típicamente encontrado en los currículos nacionales de matemáticas. Este marco enumera una variedad de temas de contenido pertinentes para evaluar la alfabetización matemática de los estudiantes de 15 años, basándose en el análisis de estándares nacionales de once países.

Las amplias categorías de contenido matemático y los temas más específicos apropiados para estudiantes de 15 años descritos en esta sección reflejan el nivel y alcance del contenido elegible para la evaluación PISA 2022. Se proporcionan descripciones detalladas de cada categoría de contenido y su relevancia para el razonamiento y la

resolución de problemas significativos, seguidas de definiciones más específicas de los tipos de contenido apropiados para su inclusión en una evaluación de alfabetización matemática de estudiantes de 15 años y jóvenes fuera del entorno escolar.

Se han identificado cuatro temas para un énfasis especial en la evaluación PISA 2022. Estos temas no son nuevos en las categorías de contenido matemático, sino que representan áreas dentro de las categorías existentes que merecen una atención particular. En cierta literatura estos cuatro temas se presentan no solo como situaciones comúnmente encontradas en la vida adulta en general, sino también como tipos de matemática necesarios en áreas emergentes de la economía, como la fabricación de alta tecnología, entre otras. Los cuatro temas son: fenómenos de crecimiento; aproximaciones geométricas; simulaciones por computadora; y toma de decisiones condicional. Estos temas deben ser abordados en las preguntas de la prueba de manera coherente con la experiencia de los jóvenes de 15 años. Cada tema se discute con el análisis de la categoría de contenido correspondiente de la siguiente manera:

- Fenómenos de crecimiento (cambio y relaciones)
- Aproximación geométrica (espacio y forma)
- Simulaciones por ordenador (cantidad)
- Toma de decisiones condicional (incertidumbre y datos)

### **5.2.2.1. Cambio y relaciones**

Los entornos naturales y artificiales presentan una diversidad de relaciones tanto temporales como permanentes entre objetos y circunstancias, donde los cambios se manifiestan dentro de sistemas de objetos interconectados o en situaciones donde los elementos se influyen mutuamente. En muchos casos, estos cambios son temporales, mientras que en otros, las variaciones en un objeto o cantidad están vinculadas a cambios en otro. Algunas de estas situaciones implican cambios discretos, mientras que otras son continuos. Además, algunas relaciones son de naturaleza constante o invariable. La competencia en la comprensión del cambio y las relaciones implica reconocer los tipos fundamentales de cambio y comprender cuándo ocurren, lo que requiere el uso de modelos matemáticos adecuados para describir y prever dichos cambios. Desde una perspectiva matemática, esto implica modelar el cambio y las relaciones utilizando funciones y ecuaciones apropiadas, así como crear, interpretar y traducir entre representaciones simbólicas y gráficas de dichas relaciones.

El cambio y las relaciones se manifiestan en una amplia gama de entornos, incluyendo el crecimiento de organismos, la música, los patrones climáticos, los ciclos estacionales, los niveles de empleo y las condiciones económicas. Los conceptos matemáticos tradicionales, como las funciones y el álgebra, que incluyen expresiones algebraicas, ecuaciones y desigualdades, junto con representaciones tabulares y gráficas, son esenciales para describir, modelar e interpretar fenómenos de cambio. Además, las herramientas computacionales proporcionan una plataforma para visualizar e interactuar con el cambio y las relaciones. Reconocer cómo y cuándo un dispositivo computacional puede ampliar y complementar los conceptos matemáticos es una habilidad fundamental del pensamiento computacional.

Las representaciones de datos y relaciones utilizando estadísticas también se utilizan para representar e interpretar cambios y relaciones. Por otro lado, una base sólida en conceptos numéricos y unidades es esencial para definir e interpretar cambios y relaciones. Además, algunas relaciones interesantes surgen del ámbito de la medición geométrica, como la relación entre los cambios en el perímetro y el área de figuras geométricas.

La comprensión de los fenómenos de crecimiento es fundamental para abordar desafíos contemporáneos, como las pandemias de gripe y los brotes bacterianos, así como las amenazas del cambio climático. Esto exige una comprensión más allá de las relaciones lineales, reconociendo que tales fenómenos requieren modelos no lineales, como los exponenciales. Si bien las relaciones lineales son fáciles de identificar y comprender, asumir la linealidad puede ser engañoso. Un ejemplo evidente de este fenómeno es la estimación de distancias recorridas durante períodos de tiempo variables a una velocidad constante, una aproximación razonable en condiciones estables pero inapropiada para prever la propagación de epidemias. La identificación de estos fenómenos como puntos focales dentro del contenido de cambio y relaciones en PISA no implica que se requiera un conocimiento profundo de funciones exponenciales, sino que se espera que los estudiantes reconozcan las limitaciones de los modelos lineales y aprecien la importancia del crecimiento no lineal en diversas situaciones.

Entre los países evaluados, Japón destaca por su destacado desempeño con una puntuación de 533 puntos, seguido por Corea con 525 y Estonia con 508. En comparación, España obtiene una puntuación media estimada de 474 puntos, superando tanto al promedio de la Unión Europea (471) como al promedio de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) (470). Por otro lado, los rendimientos más bajos se observan en México (391), Colombia (381) y Costa Rica (380).

En cuanto a las comunidades autónomas españolas, Castilla y León lidera el rendimiento con 500 puntos, seguida de cerca por el Principado de Asturias y Cantabria, ambas con 497 puntos. Por el contrario, las puntuaciones más bajas se registran en Canarias (449), Melilla (400) y Ceuta (391).

#### **5.2.2.2. Espacio y forma**

El ámbito del espacio y la forma abarca una diversidad de fenómenos que se encuentran presentes en todos los aspectos de nuestro entorno visual y físico: desde patrones y propiedades de objetos, hasta posiciones y orientaciones, pasando por la decodificación y codificación de información visual, la navegación y la interacción dinámica con formas reales y sus representaciones. Si bien la geometría constituye una base esencial para este dominio, la categoría se extiende más allá de los límites de la geometría tradicional en términos de contenido, significado y metodología. Se apoya en elementos de otras áreas matemáticas, como la visualización espacial, la medición y el álgebra. Por ejemplo, las formas pueden sufrir transformaciones, y un punto puede desplazarse a lo largo de una trayectoria geométrica, lo que implica el uso de conceptos de función. Las fórmulas de medición juegan un papel fundamental en esta área. El reconocimiento, manejo e interpretación de formas en entornos que requieren el uso de herramientas que van desde el software de geometría dinámica hasta los sistemas de posicionamiento global (GPS) y el software de aprendizaje automático están incluidos en esta categoría de contenido.

PISA asume que la comprensión de un conjunto de conceptos y habilidades cen-

trales es crucial para la alfabetización matemática en el contexto del espacio y la forma. Esta alfabetización implica una diversidad de actividades, como comprender la perspectiva en obras artísticas, crear y leer mapas, transformar formas con y sin tecnología, interpretar vistas tridimensionales desde distintas perspectivas y construir representaciones de formas.

Las aproximaciones geométricas destacan en el mundo contemporáneo lleno de formas que no siguen patrones convencionales de uniformidad o simetría. Dado que las fórmulas simples no son adecuadas para abordar la irregularidad, se vuelve más complejo comprender lo que observamos y calcular el área o el volumen de las estructuras resultantes. Por ejemplo, determinar la cantidad de alfombras necesarias en un edificio con apartamentos que presentan ángulos agudos y curvas estrechas requiere un enfoque diferente al que sería necesario en una habitación típicamente rectangular. La identificación de las aproximaciones geométricas como un punto focal en la categoría de contenido de espacio y forma resalta la importancia de que los estudiantes sean capaces de aplicar su comprensión del espacio y los fenómenos de forma en diversas situaciones típicas.

Como países con mejor rendimiento medio estimado en el dominio de contenido de Espacio y forma (Figura 2.13.a) repiten Japón (541 puntos) y Corea (537), en esta ocasión acompañados de Suiza (518). Cierran el listado de países ordenados por rendimiento México (388), Costa Rica (375) y Colombia (370). En esta ocasión, España (463 puntos) queda significativamente por debajo del Total UE (471) y del Promedio OCDE (471).

En lo referente a las comunidades y ciudades autónomas en el dominio de Espacio y forma, Castilla y León (493) tiene el mayor rendimiento medio estimado (493), seguida de La Rioja (493) y Comunidad Foral de Navarra (485). Los menores rendimientos son los de Canarias (432), Melilla (391) y Ceuta (381).

### 5.2.2.3. Cantidad

La noción de cantidad se erige como uno de los aspectos matemáticos más preponderantes y esenciales de comprender y aplicar en nuestro entorno. Se refiere a la capacidad de cuantificar atributos de objetos, relaciones, situaciones y entidades en el mundo, así como a la habilidad de entender diversas representaciones de estas cuantificaciones, evaluar interpretaciones y argumentos basados en la cantidad. Comprender la cuantificación del mundo implica dominar conceptos como medidas, recuentos, magnitudes, unidades, indicadores, tamaño relativo, tendencias y patrones numéricos. Los aspectos del razonamiento cuantitativo, como el sentido numérico, las representaciones múltiples de los números, la destreza en el cálculo, el cálculo mental, la estimación y la evaluación de la razonabilidad de los resultados, constituyen la esencia de la alfabetización matemática en relación con la cantidad.

La cuantificación representa un método fundamental para describir y medir una amplia gama de atributos de aspectos del mundo. Facilita la modelización de situaciones, el examen del cambio y las relaciones, la descripción y el manejo del espacio y la forma, la organización e interpretación de datos, así como la medición y evaluación de la incertidumbre. Por lo tanto, la alfabetización matemática en el ámbito de la cantidad implica la aplicación del conocimiento sobre números y operaciones numéricas en una diversidad de entornos.

En cuanto a las simulaciones por ordenador, tanto en matemáticas como en estadísticas, se enfrentan problemas que no resultan sencillos de abordar debido a la complejidad matemática requerida o a la gran cantidad de factores que operan en un mismo sistema, o por cuestiones éticas relacionadas con el impacto en los seres vivos o su entorno. Cada vez más en el mundo actual, estos problemas se abordan mediante simulaciones por ordenador impulsadas por algoritmos. Por ejemplo, en la Simulación de Ahorro, el estudiante utiliza una simulación por ordenador como herramienta en la toma de decisiones, delegando los cálculos a la simulación y centrándose en la planificación, la predicción y la resolución de problemas en función de las variables que pueden controlar.

Identificar las simulaciones por ordenador como un punto focal de la categoría de contenido cantidad indica que, en el contexto de la Prueba por Ordenador de PISA utilizada para 2021, existe una amplia categoría de problemas complejos que incluyen presupuestos y planificación que los estudiantes pueden analizar en términos de las variables del problema, utilizando simulaciones por ordenador proporcionadas como parte de las preguntas de la prueba.

Japón (535 puntos), Corea (527) y Estonia (515) son los países con rendimientos medios estimados más altos, mientras que México (397), Costa Rica (385) y Colombia (381) son los de peor rendimiento. España (471) se sitúa aproximadamente al nivel del Total UE (473) y del Promedio OCDE (472). En lo referente a las comunidades y ciudades autónomas, Castilla y León (498), Principado de Asturias (495) y Comunidad de Madrid (492) obtienen las puntuaciones más altas, siendo las más bajas las de Canarias (445), Melilla (396) y Ceuta (388).

#### **5.2.2.4. Incertidumbre y datos**

En ámbitos científicos, tecnológicos y de la vida cotidiana, la variación y la incertidumbre asociada son hechos innegables que constituyen un fenómeno fundamental en la teoría de la probabilidad y la estadística. La categoría de incertidumbre y datos aborda la importancia de reconocer la presencia de la variación en el mundo real, incluyendo la necesidad de cuantificar esta variación y reconocer la incertidumbre y el error asociados en las inferencias realizadas. Además, implica la formulación, interpretación y evaluación de conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre es un factor relevante. La presentación e interpretación de datos son conceptos esenciales en este contexto (Moore, 1997).

Desde las predicciones económicas hasta los pronósticos del tiempo, pasando por los resultados de las votaciones, la variación y la incertidumbre son inherentes a una amplia gama de actividades y procesos, incluidos los procesos de fabricación, las puntuaciones de pruebas, los resultados de encuestas y eventos aleatorios en actividades recreativas. Las áreas tradicionales del currículo relacionadas con la probabilidad y la estadística ofrecen herramientas formales para describir, modelar e interpretar fenómenos en los que la variación juega un papel crucial, así como para realizar las inferencias estocásticas correspondientes. Además, el dominio del número y de aspectos algebraicos, como gráficos y representaciones simbólicas, contribuyen a la resolución de problemas en esta área de contenido.

La toma de decisiones condicional, por otro lado, se fundamenta en las estadísticas para medir la variación característica de muchos aspectos de la vida diaria. La varianza es una medida clave en este sentido. Cuando hay más de una variable,

existe tanto variación en cada variable como covariación que describe las relaciones entre ellas. Estas interrelaciones pueden representarse en tablas de dos vías, proporcionando la base para tomar decisiones condicionadas (inferencias). En una tabla de dos vías para dos variables dicotómicas, existen cuatro combinaciones posibles. Esta tabla ofrece tres tipos de porcentajes, que a su vez brindan estimaciones de las probabilidades correspondientes, incluidas las probabilidades de los eventos conjuntos, marginales y condicionales. La expectativa en las preguntas de la prueba PISA es que los estudiantes sean capaces de leer los datos relevantes de estas tablas con una comprensión profunda de su significado.

En un ejemplo práctico, como el de la Decisión de Compra, se presenta al estudiante un resumen de las calificaciones de los clientes para un producto en una tienda en línea, junto con un análisis detallado de las revisiones de clientes que otorgaron calificaciones bajas. Este análisis establece una tabla de dos vías, desafiando al estudiante a demostrar su comprensión de las diversas estimaciones de probabilidad proporcionadas por dicha tabla.

La identificación de la toma de decisiones condicional como un punto focal de la incertidumbre y la categoría de contenido de datos indica la necesidad de que los estudiantes comprendan cómo la formulación del análisis de un modelo afecta las conclusiones que se pueden extraer, y cómo diferentes suposiciones o relaciones pueden conducir a conclusiones divergentes.

De entre los países, Japón (540 puntos), Corea (524) y Estonia (503) vuelven a obtener los mejores rendimientos, y México (391), Costa Rica (385) y Colombia (385), los peores. España (478) se sitúa por encima tanto del Total UE (475) como del Promedio OCDE (474). Por comunidades y ciudades autónomas, Castilla y León (504 puntos) presenta el mejor rendimiento medio estimado en este dominio de contenido, junto a Cantabria (503) y Comunidad de Madrid (501). Los rendimientos más bajos corresponden a Canarias (452), Melilla (411) y Ceuta (404).

### 5.3. Evolución de los resultados en Matemáticas

Como se ha mencionado previamente, en la edición de PISA 2012, las matemáticas fueron la competencia principal, por lo que los análisis de la evolución de los resultados se basarán en ese año como referencia. La Figura 5.12 ilustra la evolución del rendimiento medio estimado en matemáticas para España, el Promedio OCDE y el Total UE (este último a partir de 2015, que fue el primer ciclo para el cual se publicó el Total UE en el Informe Español de PISA). Si bien se observa una cierta tendencia descendente en el período 2012-2018, es notable la marcada disminución que se ha registrado entre 2018 y 2022. Es probable que la primera hipótesis que surja para explicar tal descenso, especialmente en el Promedio OCDE y en el Total UE, sea atribuirlo a la pandemia de la COVID-19 y sus efectos asociados (confinamientos, cierre de centros educativos, etc).

Haciendo uso de las equivalencias de cursos por puntuación que se hacen en los informes PISA la conclusión más relevante que se puede sacar de la Figura 5.12 es que los estudiantes de quince años de la OCDE, UE y España en 2022 tienen prácticamente un curso escolar menos de competencias que el alumnado de la misma edad en 2012.

A partir del análisis de las variaciones con respecto a 2012 del rendimiento medio

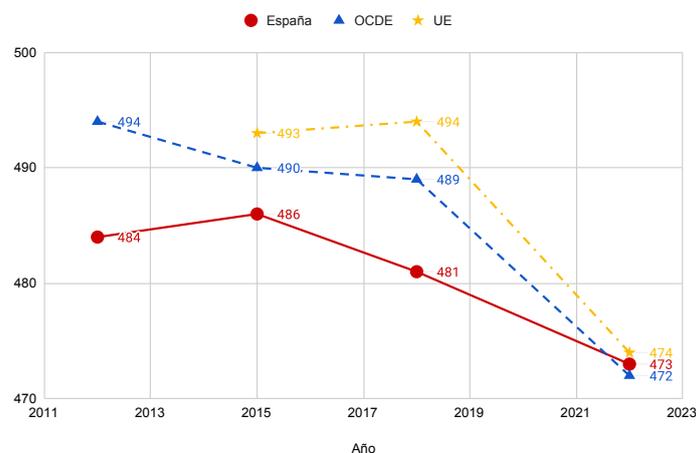


Figura 5.12: Evolución de los rendimientos medios estimados en matemáticas entre 2012 y 2022 para España, el Promedio OCDE y el Total UE. Fuente: [INEE, 2023]

estimado en matemáticas de los territorios considerados en este informe que participaron en ambas ediciones se obtienen las puntuaciones de países y comunidades autónomas, ya que no hay datos para Ceuta y Melilla en PISA 2012. Se observa en la Figura 5.13 que solo dos países muestran un aumento en el rendimiento medio estimado en matemáticas, aunque este no es estadísticamente significativo: Turquía (5 puntos) y Suecia (3 puntos). En Japón (-1 punto), Hungría (-4 puntos), Reino Unido (-5 puntos) e Israel (-9 puntos), las disminuciones no son significativas, pero en el resto de los países, incluyendo a España (-11 puntos), sí lo son. Los descensos más marcados se observan en Islandia (-34 puntos), Finlandia (-35 puntos) y Alemania (-39 puntos). El Promedio OCDE experimentó una reducción de 21 puntos.

La situación es semejante si se presta atención a las comunidades autónomas (Figura 5.14). Tres de ellas presentan incrementos no significativos: Extremadura (8 puntos), Cantabria (3) y Región de Murcia (1); Galicia (-2), Illes Balears (-4), Principado de Asturias (-5), Aragón (-9) y Castilla y León (-10) sufren descensos, pero no son significativos. Sí lo son en el resto de comunidades autónomas, siendo los descensos más importantes los de País Vasco (-23), Cataluña (-24) y Comunidad Foral de Navarra (-24).

Además de los factores explicativos expuestos anteriormente, un nuevo factor a considerar es la pandemia COVID-19. Pero, ¿qué parte de estas variaciones se han producido en el último ciclo de PISA, y, por tanto, podrían ser atribuibles a la pandemia? A continuación se analizan las variaciones producidas entre 2018 y 2022, tanto para los países de la OCDE y de la UE participantes en ambos ciclos (Figura 5.15) como para las comunidades y ciudades autónomas españolas (Figura 2.17.b). De la Figura 5.15 se extrae que Japón ha mejorado significativamente su rendimiento (9 puntos), y que Corea (1) también experimenta una subida, aunque no es significativa. El resto de países ha empeorado el rendimiento; siete de ellos de manera no significativa: Turquía (0), Croacia (-1), Rumanía (-2), Australia (-4), Israel (-5), Chile (-6) y Colombia (-8); el resto, incluyendo España (-8), de forma significativa. La bajada de España, no obstante, es significativamente inferior a la del Promedio OCDE (-17) y a la del Total UE (-20). Los mayores descensos los sufren Polonia (-27), Noruega

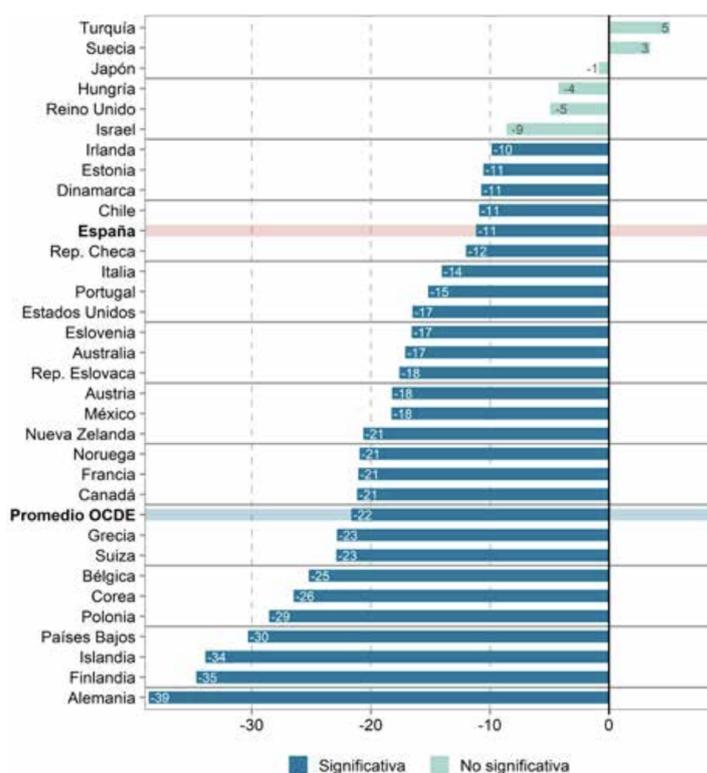


Figura 5.13: Variación de los rendimientos medios estimados en matemáticas entre las ediciones de 2012 y 2022 en los países que participaron en ambas ediciones. Fuente: [INEE, 2023]

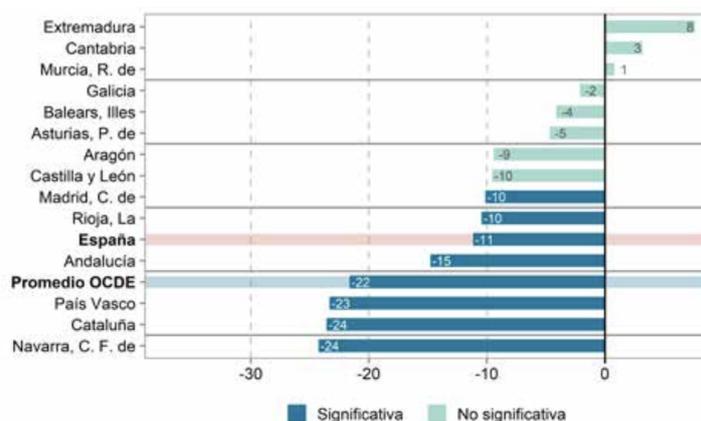


Figura 5.14: Variación de los rendimientos medios estimados en matemáticas entre las ediciones de 2012 y 2022 en las comunidades autónomas que participaron en ambas ediciones. Fuente: [INEE, 2023]

(-33) e Islandia (-36).

En el caso de las comunidades y ciudades autónomas (Figura 5.16), seis sufren un descenso significativo: Galicia (-12), Canarias (-13), Castilla-La Mancha (-16), País Vasco (-17), Cataluña (-21) y Melilla (-28). El resto sufren bajadas no significativas, excepto las dos que experimentan una mejora no significativa: Comunidad de Madrid

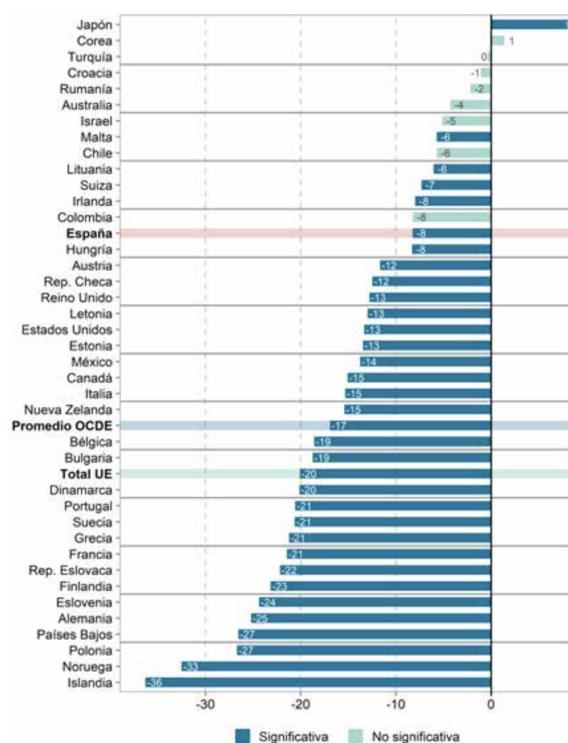


Figura 5.15: Variación de los rendimientos medios estimados en matemáticas entre las ediciones de 2018 y 2022 en los países de la OCDE y UE que participaron en ambas ediciones. Fuente: [INEE, 2023]

(8) y Principado de Asturias (4).

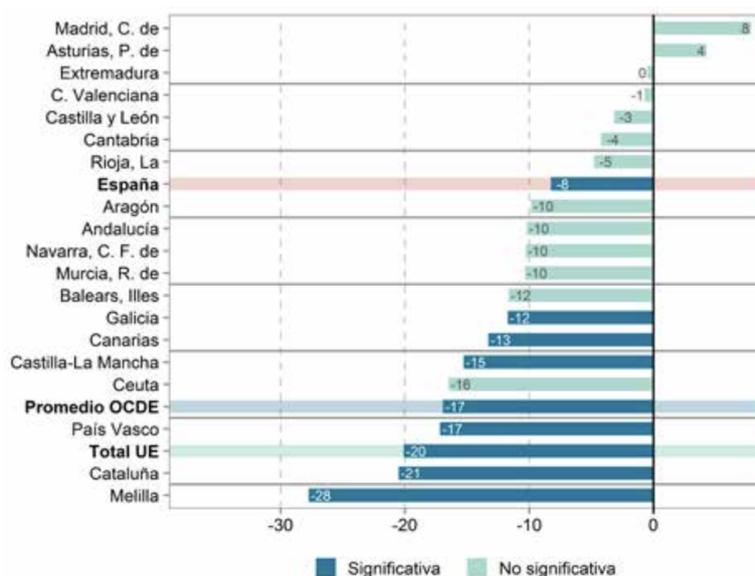


Figura 5.16: Variación de los rendimientos medios estimados en matemáticas entre las ediciones de 2018 y 2022 en las comunidades autónomas que participaron en ambas ediciones. Fuente: [INEE, 2023]

Otro aspecto a tener en cuenta es la evolución del porcentaje de alumnado por niveles de rendimiento. De nuevo se toma como referencia la edición de 2012, y también se analizará lo sucedido desde 2018. En la Figura 5.17 se muestra la variación de porcentaje de alumnado en los niveles altos de rendimiento (5 y 6) para España y el Promedio OCDE. En ambos casos se observa que gran parte del descenso en el porcentaje de alumnado en estos niveles ocurrido entre 2012 y 2022 se debe a la disminución que se da entre 2018 y 2022. Así, de los 2,1 puntos porcentuales de bajada en España entre 2012 y 2022, 1,4 se deben al periodo 2018-2022, y de los 3,9 del Promedio OCDE entre 2012 y 2022, al periodo 2018-2022 corresponden 2,2. En cualquier caso, los descensos experimentados en el Promedio OCDE casi duplican los producidos en España.



Figura 5.17: Variación de porcentaje de alumnado en los niveles altos de rendimiento (5 y 6) para España y el Promedio OCDE entre 2012 y 2022, y entre 2018 y 2022. Fuente: [INEE, 2023]

De igual forma, la Figura 5.18 refleja el aumento del porcentaje de alumnado en niveles bajos de rendimiento (1 y <1). De manera análoga al caso anterior, cabe destacar el peso del periodo 2018-2022 sobre la variación total entre 2012 y 2022. En España, el porcentaje entre 2012 y 2022 aumentó en 3,7 puntos porcentuales, debiéndose 2,6 al periodo 2018-2022, y en el Promedio OCDE, cuyo incremento entre 2012 y 2022 fue de 8,1 puntos porcentuales, la variación entre 2018 y 2022 asciende a 7,1. De nuevo, la variación en el Promedio OCDE prácticamente duplica a la de España. Como ya se comentó anteriormente, este acusado empeoramiento puede deberse a los efectos de la pandemia en los sistemas educativos: no obstante, será necesario esperar a los datos de los próximos ciclos de PISA para confirmar esta hipótesis pues resulta demasiado prematuro plantear los efectos directos de la pandemia COVID-19 con una serie temporal tan corta.

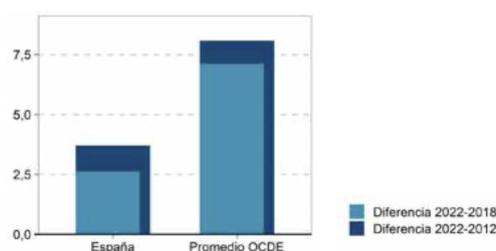


Figura 5.18: Variación de porcentaje de alumnado en los niveles bajos de rendimiento (1 y <1) para España y el Promedio OCDE entre 2012 y 2022, y entre 2018 y 2022. Fuente: [INEE, 2023]

## Capítulo 6

# Modelos estadísticos para el rendimiento educativo

En el ámbito de la investigación educativa, la comprensión de los factores que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes es fundamental para el desarrollo de políticas eficaces y prácticas pedagógicas mejoradas. Para abordar esta compleja cuestión, los modelos estadísticos ofrecen herramientas robustas para analizar datos educativos. En este estudio, empleamos dos enfoques metodológicos clave: modelos de sección cruzada y modelos de series temporales.

Los modelos de sección cruzada nos permiten examinar las variaciones en el rendimiento educativo en un punto específico del tiempo entre diferentes unidades, como estudiantes, aulas o escuelas. Esta metodología es particularmente útil para identificar factores contextuales y estructurales que puedan influir en el rendimiento académico. Por ejemplo, podemos analizar cómo variables como el gasto público por alumno, el tipo de centro educativo o el nivel socioeconómico de los estudiantes impactan en sus resultados educativos.

Por otro lado, los modelos de series temporales se centran en el análisis de datos a lo largo del tiempo, permitiéndonos observar tendencias y patrones en el rendimiento educativo. Este enfoque es esencial para evaluar el efecto de cambios en políticas educativas, reformas curriculares o innovaciones pedagógicas implementadas en diferentes periodos. Al analizar datos longitudinales, podemos identificar no solo los efectos inmediatos de estas intervenciones, sino también su impacto a largo plazo en el rendimiento académico.

Combinando estos dos enfoques, nuestro estudio proporciona una visión panorámica del rendimiento educativo. Mientras que los modelos de sección cruzada nos ayudan a entender las diferencias y disparidades actuales, los modelos de series temporales nos ofrecen una perspectiva dinámica, revelando cómo estas diferencias evolucionan y responden a intervenciones específicas a lo largo del tiempo.

### **6.1. Modelo de sección cruzada para las Comunidades Autónomas en PISA 2022**

Los datos de sección cruzada, también conocidos como datos transversales, son un tipo de datos recopilados en un solo punto en el tiempo y que provienen de múlti-

ples unidades de observación, en este caso Comunidades Autónomas. Cada unidad de observación en los datos de sección cruzada proporciona una instantánea de múltiples variables en un momento específico.

En otras palabras, los datos de sección cruzada consisten en observaciones recopiladas de múltiples unidades en un momento dado, donde cada observación representa un conjunto de mediciones o características tomadas simultáneamente para cada unidad de observación. Por ejemplo, en esta sección se recopilan los datos de sección cruzada sobre los factores explicativos enunciados previamente en la fecha del último examen PISA, cada fila de datos representaría a una CCAA diferente, y las columnas representarían las variables de interés (ISEC, PIB per cápita, etc.).

Se define el *modelo lineal general* como una relación estadística lineal entre una variable dependiente y una o más variables explicativas. En este apartado se van a analizar distintos modelos econométricos de regresión lineal múltiple para las variables dependientes: nota media de la prueba de matemáticas y nota media de la prueba de ciencias por CCAA obtenidas del Informe PISA 2022. El objetivo es tratar de determinar qué variables, de las analizadas en el apartado anterior, permiten explicar y predecir mejor las diferencias regionales en los resultados de estas pruebas. Un modelo de regresión lineal múltiple es aquel que "permite estimar el efecto sobre  $Y_i$  de la variación de una variable  $X_{1i}$ , ceteris paribus, es decir, manteniendo constantes el resto de los regresores  $X_{2i}, X_{3i}, \dots, X_{ki}$ " (Stock y Watson, 2012, p.134).

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i.$$

El modelo de este trabajo tendrá como variable dependiente  $Y_i$  el resultado medio de la prueba de Matemáticas por CCAA en el informe PISA 2022, las variables explicativas serán los diferentes factores explicativos estudiados previamente en este trabajo, las  $\beta_0, \beta_1, \dots$  serán los coeficientes de los regresores y serán estimados mediante el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) y por último,  $\varepsilon_i$  es el término de error.

Asimismo, hay que indicar dos cuestiones relevantes sobre los modelos de regresión lineal. En primer lugar, estos modelos tienen unas características óptimas para predecir el comportamiento de la variable dependiente cuando cumplen las Hipótesis Clásicas, por ello, se analizará posteriormente sobre los modelos estimados la concurrencia de estos presupuestos. En segundo lugar, los estimadores MCO, si cumplen las condiciones del teorema de Gauss-Markov son ELIO (estimadores lineales, insesgados y óptimos), consistentes y eficientes (Stock y Watson, 2012, p.115). Esto supone que son los mejores estimadores posibles para explicar el comportamiento de las variables dependientes.

El método de *Mínimos Cuadrados Ordinarios* (MCO) si se reemplazan los parámetros desconocidos  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  por las estimaciones de los mismos denominadas como  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$  se obtiene el *modelo estimado*

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{\varepsilon}_i.$$

Se denomina *valor ajustado*  $\hat{Y}_i$  a la combinación lineal

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki}.$$

El *residuo*  $\hat{\varepsilon}_i$  es la diferencia entre el valor observado y el valor ajustado,  $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ . En la estimación de los parámetros del modelo lineal general se descompone cada

observación  $Y_i$  en la suma del valor ajustado y el error de predicción asociado

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i, i = 0, \dots, n.$$

Las *estimaciones minimocuadráticas* de los parámetros  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  son los valores  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$  que minimizan la *suma cuadrática residual* SCR, es decir, minimiza la suma de los cuadrados de los residuos

$$\text{SCR} = \sum_{i=0}^n \hat{\varepsilon}_i^2.$$

Como, SCR es una función cuadrática de  $\hat{\beta}_i, i = 0, \dots, n$  es una función diferenciable. En virtud del teorema de los multiplicadores de Lagrange, los valores  $\hat{\beta}_i, i = 0, \dots, n$  que minimizan SCR son los que cumplen las condiciones de primer orden correspondientes a  $\frac{\partial \text{SCR}}{\partial \hat{\beta}_i} = 0$  y tras algunas transformaciones se obtienen las denominadas *ecuaciones normales*.

Algunas características clave de los datos de sección cruzada incluyen: que la medición es instantánea en el tiempo. Los datos se recopilan en un solo punto en el tiempo y no proporcionan información sobre cambios a lo largo del tiempo.

Los datos proceden de múltiples unidades de observación, que pueden ser países, CCAA u otras entidades.

Además, se recopilan múltiples variables para cada unidad de observación, lo que permite el análisis de relaciones entre diferentes características.

El motivo de emplear datos de sección cruzada es porque se quieren realizar análisis transversales, como estudios comparativos entre diferentes grupos de observación en un momento dado, y para investigar relaciones entre variables en un momento específico, en este caso las CCAA en 2022.

El  $R^2$  de la regresión (coeficiente de determinación) es “la proporción de la varianza muestral de  $Y_i$  que está explicada (o predicha) por los regresores” [Stock y Watson, 2012, p.139], por lo que un mayor valor de este indicador supone un mejor ajuste. Sin embargo, esta medida no es la más adecuada para comparar unos modelos con otros, puesto que su valor se incrementa por la mera adición de variables explicativas, sin que estas supongan realmente un mejor ajuste. Por ello, para corregir esta imperfección, se deflacta el  $R^2$  y así se obtiene el  $R^2$  ajustado, que solo aumenta si el regresor adicional es significativo. Esta medida, junto con el criterio de Akaike, son los indicadores utilizados para comparar los modelos obtenidos y determinar cuál es el mejor modelo de regresión lineal. En relación con los modelos obtenidos y recogidos en la tabla A.8 y tabla A.9, atendiendo al valor del  $R^2$  ajustado, el mayor valor lo presenta el modelo 1. Además, conforme al criterio de Akaike, el modelo con el menor valor es también el mismo.

El primer modelo es por tanto el elegido por poseer las condiciones más favorables. Su formulación es:

$$\begin{aligned} \text{NOTA\_MAT}_i = & \beta_0 + \beta_1 \text{GPUB\_alum}_i + \beta_2 \text{PIB\_per\_cap}_i + \beta_3 \text{Paro}_i + \beta_4 \text{ISEC}_i \\ & + \beta_5 \text{Aislamiento}_i + \beta_6 \text{Publicos}_i + \beta_7 \text{RAIm\_Prof}_i + \beta_8 \text{Inmigrantes}_i \end{aligned}$$

donde:

- NOTA\_MAT es la nota de Matemáticas en el informe PISA.

- GPUB\_alum es el gasto público destinado a educación por alumno.
- PIB\_per\_cap es el PIB per cápita.
- Paro es el índice de desempleo.
- ISEC hace referencia al ISEC previamente explicado.
- Aislamiento es el índice de aislamiento.
- Públicos representa a la proporción de centros públicos con respecto al total.
- RAlm\_Prof es el ratio de alumnos por profesor en el aula.
- Inmigrantes es la proporción de alumnado inmigrante desde el extranjero en proporción con respecto al total.
- Constant es la constante del modelo representada por  $\beta_0$ .

Elegido el modelo se comprobará ahora si el modelo satisface las hipótesis clásicas que son la linealidad, normalidad y homocedasticidad.

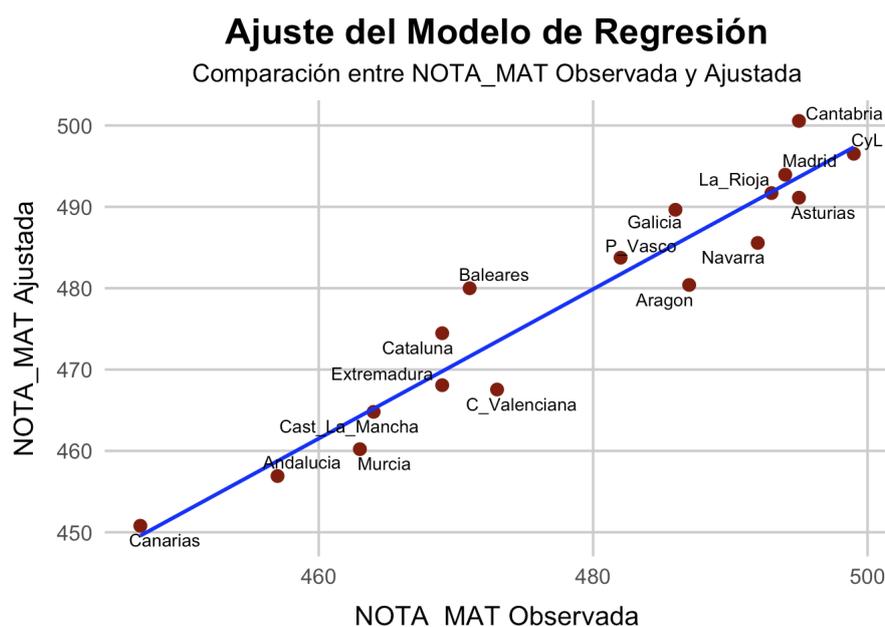


Figura 6.1: Modelo de regresión de la nota de Matemáticas por Comunidad Autónoma

Los estimadores conjuntamente son significativos para explicar la nota de matemáticas que es la variable dependiente o endógena pues el p-valor del estadístico  $F$  es menor que 0.05, se observa que la variable Inmigrantes no es significativa individualmente pues su p-valor no es menor que 0.05, esto puede deberse a una cierta multicolinealidad imperfecta entre ellas. Dicho esto, se mantendrá el modelo como el elegido pues todos los parámetros son mejores que el resto de modelos que no contemplan dicha variable. Sin embargo, es imperativo realizar la comprobación de las hipótesis ya mencionadas pues de no cumplirlas los contrastes de significación individual y conjunta no serían válidos.

### 6.1.1. Linealidad del modelo

La hipótesis de linealidad en un modelo de regresión de sección cruzada es fundamental por varias razones. Los modelos lineales son más fáciles de interpretar que los modelos no lineales. En un modelo lineal, el coeficiente de cada variable independiente representa el cambio esperado en la variable dependiente por cada unidad de cambio en la variable independiente, manteniendo constantes las demás variables. La linealidad permite el uso de técnicas de estimación eficientes, como el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO). El método MCO proporciona estimadores que son insesgados, eficientes y consistentes bajo ciertas condiciones (normalidad, homocedasticidad, y ausencia de multicolinealidad perfecta). Esto garantiza que los estimadores sean los mejores posibles en términos de varianza mínima.

El contraste RESET de Ramsey (Regression Equation Specification Error Test) es una prueba de especificación de modelos en econometría. Su objetivo es detectar la presencia de errores de especificación en un modelo de regresión lineal, tales como la omisión de variables relevantes, la incorrecta forma funcional, o la presencia de variables irrelevantes. El test examina si las potencias o los términos no lineales de las variables predichas (ajustadas) son significativos, lo que podría indicar problemas con la especificación del modelo.

Primero, se estima el modelo de regresión lineal original:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon \quad (6.1)$$

Después, se calculan los valores ajustados (predicciones) del modelo

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k \quad (6.2)$$

Se extiende el modelo original añadiendo potencias de los valores ajustados. Por ejemplo, se pueden agregar  $\hat{y}^2$  y  $\hat{y}^3$ :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \gamma_1 \hat{y}^2 + \gamma_2 \hat{y}^3 + \epsilon \quad (6.3)$$

y posteriormente se estima este nuevo modelo extendido.

Por último, se realiza un test de hipótesis para comprobar si los coeficientes  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son conjuntamente iguales a cero:

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (6.4)$$

$$H_1 : \gamma_1 \neq 0 \text{ o } \gamma_2 \neq 0 \quad (6.5)$$

Si los coeficientes  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  no son significativos, no se rechaza la hipótesis nula y se concluye que no hay indicios de errores de especificación en el modelo.

Dado que el p-value (0.8291) es mucho mayor que 0.05, no se rechaza la hipótesis nula. Esto sugiere que no hay suficiente evidencia para afirmar que el modelo original esté mal especificado y, por lo tanto, se considera que el modelo es lineal y adecuadamente especificado.

En R, el contraste RESET de Ramsey se puede realizar usando la función `resettest` del paquete `lmtest`.

### 6.1.2. Normalidad de la perturbación aleatoria

En esta subsección se pretende estudiar la normalidad de la perturbación aleatoria que es un aspecto relevante para que se satisfagan las propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud, en concreto la de ser un estimador eficiente. Para ello se empleará el estadístico de Jarque-Bera.

El estadístico de Jarque-Bera es una medida utilizada para evaluar la normalidad de una serie de datos o de los residuos de un modelo de regresión. La prueba de Jarque-Bera (JB) se basa en dos momentos de la distribución: la asimetría (skewness) y la curtosis (kurtosis).

La fórmula del estadístico de Jarque-Bera se calcula usando la siguiente fórmula:

$$JB = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

donde  $n$  es el número de observaciones (o el tamaño de la muestra),  $S$  es el coeficiente de asimetría (skewness) de los datos, y  $K$  es el coeficiente de curtosis de los datos.

La asimetría mide la simetría de la distribución de los datos. Para una distribución normal, la asimetría es 0. Se calcula como:

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}}$$

La curtosis mide la "altura" y "anchura" de la distribución de los datos. Para una distribución normal, la curtosis es 3. Se calcula como:

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}$$

El estadístico de Jarque-Bera sigue una distribución chi-cuadrado ( $\chi^2$ ) con 2 grados de libertad. Se compara el valor del estadístico JB con el valor crítico de la distribución chi-cuadrado a un nivel de significación dado (por ejemplo, 0.05).

Para realizar la prueba de Jarque-Bera en R, primero ajustamos el modelo de regresión y obtenemos los residuos (residuals). Luego, calculamos la estadística de JB usando la función `jarque.bera.test` del paquete `tseries`. Finalmente, comparamos el p-value obtenido con el nivel de significación ( $\alpha = 0.05$ ).

La formulación del contraste es la siguiente:

$$H_0 : \text{Normalidad,}$$

$$H_1 : \text{No Normalidad.}$$

Dado que el p-value (0.7534) es mucho mayor que el nivel de significación (0.05), no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto sugiere que los residuos del modelo de regresión siguen una distribución normal. En otras palabras, la suposición de normalidad de los residuos no se viola, y puedes asumir que los residuos se distribuyen normalmente en el contexto de tu modelo de regresión.

En la Figura 6.2 se tiene el clásico histograma que superpone una curva de la normal es una herramienta visual utilizada para comparar la distribución de un conjunto de datos con la distribución normal teórica. Este gráfico es útil para evaluar visualmente si los datos siguen una distribución aproximadamente normal.

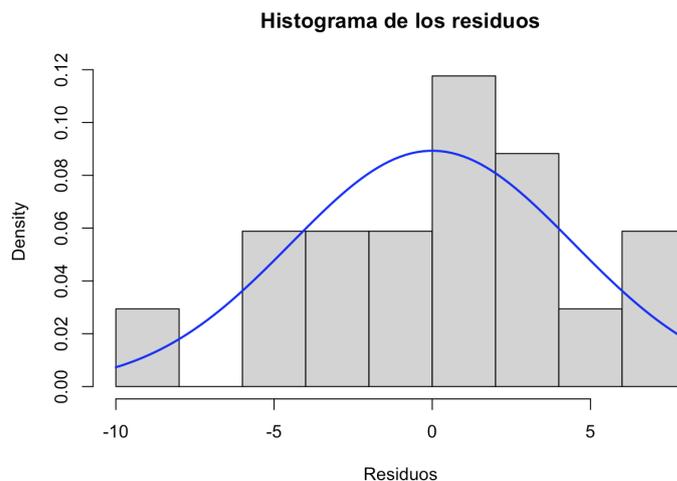


Figura 6.2: Gráfico del contraste de normalidad

Se usan los residuos del modelo porque se quieren evaluar la normalidad de los errores del modelo, es decir, la diferencia entre los valores observados y los valores predichos por el modelo.

Cuando se ajusta un modelo estadístico a datos observados, se asume que el modelo captura la relación sistemática entre las variables explicativas y la variable dependiente. Sin embargo, también existen otros factores aleatorios que afectan a la variable dependiente y que no están incluidos en el modelo. Estos factores aleatorios se denominan errores o residuos.

Al evaluar la normalidad de los residuos, se está verificando si los errores del modelo se distribuyen aproximadamente de manera normal alrededor de cero. Si los residuos se desvían significativamente de una distribución normal, puede indicar que el modelo no está capturando completamente la estructura de los datos o que hay una violación de las suposiciones del modelo.

En el modelo que estamos siguiendo los residuos siguen una distribución normal.

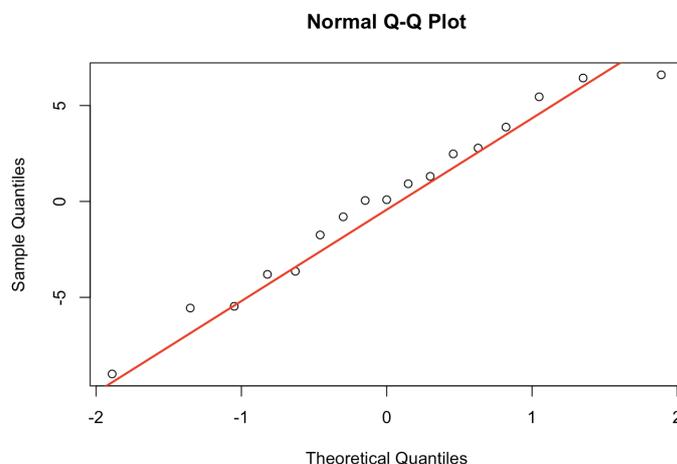


Figura 6.3: Diagrama Quantile-Quantile

El diagrama Q-Q (Quantile-Quantile) es una herramienta gráfica utilizada para comparar la distribución de una muestra de datos con una distribución teórica, como la distribución normal. La idea principal es comparar los cuantiles empíricos de los datos con los cuantiles teóricos de la distribución de referencia.

En el caso específico de `qqnorm` en R, se utiliza para crear un gráfico Q-Q normal, donde los cuantiles empíricos de los residuos (o cualquier otro conjunto de datos) se comparan con los cuantiles teóricos de una distribución normal estándar. Esto significa que si los datos se distribuyen normalmente, los puntos en el gráfico deberían caer aproximadamente sobre una línea recta que pasa por el origen. En este caso se puede afirmar de nuevo que los residuos siguen una distribución normal.

### 6.1.3. Homocedasticidad de las perturbaciones

La homocedasticidad se refiere a una propiedad deseable en la que la varianza de los errores (o perturbaciones) en un modelo estadístico es constante en todas las observaciones. En otras palabras, la homocedasticidad implica que la dispersión de los errores alrededor de la línea de regresión es constante en todos los niveles de la variable independiente.

La homocedasticidad garantiza que las estimaciones de los coeficientes del modelo sean eficientes y no sesgadas. Cuando los errores tienen una varianza constante, los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) son los mejores estimadores lineales insesgados.

La homocedasticidad es necesaria para que los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis basadas en los coeficientes del modelo sean válidos. Si los errores no son homocedásticos, los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis pueden ser incorrectos.

El test de Breusch-Pagan es una prueba estadística utilizada para evaluar la homocedasticidad de los errores en un modelo de regresión. El test de Breusch-Pagan permite determinar si la suposición de homocedasticidad es válida o si existe evidencia de heterocedasticidad, donde la varianza de los errores varía con respecto a los valores de las variables independientes. La fórmula es la siguiente:

$$\text{test de Breusch-Pagan} = n \cdot R^2,$$

donde  $n$  es el número de observaciones y  $R^2$  es el coeficiente de determinación.

El estadístico de test de White sigue una distribución chi-cuadrado bajo la hipótesis nula de homocedasticidad. Por lo tanto, cuanto mayor sea el valor del estadístico, mayor será la evidencia en contra de la hipótesis nula de homocedasticidad. El contraste de hipótesis es:

$$H_0 : \text{Homocedasticidad,}$$

$$H_1 : \text{Heterocedasticidad.}$$

Si el valor p (0.347) es mayor que el nivel de significación 0.05, no se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad. En otras palabras, no hay suficiente evidencia para concluir que hay heterocedasticidad en los errores del modelo. Por lo tanto, con un nivel de significación de 0.05, las conclusiones que se pueden obtener son que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de homocedasticidad en

los errores del modelo. Esto sugiere que los errores en el modelo de regresión tienen una varianza constante a lo largo de los valores de las variables independientes.

#### **6.1.4. Conclusiones del modelo de sección cruzada**

El modelo de regresión satisface las hipótesis de linealidad, normalidad de la perturbación aleatoria y homocedasticidad de la perturbación aleatoria, se obtienen varios beneficios ya mencionados.

En conjunto, cuando un modelo de regresión cumple con estas tres hipótesis, se obtiene un marco sólido y confiable para el análisis de datos y la toma de decisiones. Las inferencias derivadas del modelo son más precisas y válidas, lo que permite una comprensión más profunda de las relaciones entre las variables y una mayor confianza en las predicciones realizadas por el modelo.

Por todo lo explicado, el modelo explica con precisión la nota de Matemáticas en el examen de PISA 2022 y permite entender cuales son los factores relevantes que influyen sobre ella.

Las conclusiones que se pueden obtener de este modelo son bastante relevantes para el diseño de políticas educativas. La primera es que un nivel elevado de paro afecta muy negativamente al rendimiento educativo del país. Segundo, que exista una baja proporción de centros concertados/privados afecta de manera negativa. Esto tiene una explicación sencilla, si la proporción de centros privados es pequeña, los centros públicos se verán saturados por la gran cantidad de alumnos que acudirían a estos centros. Eso derivaría en un aumento de alumnos por profesor y como el modelo refleja el que existan demasiados alumnos por profesor afecta de manera negativa pues el docente no podrá atender con detenimiento a cada alumno.

Tiene algunas limitaciones, la primera es que se han eliminado del análisis estadístico las Ciudades Autónomas de Ceuta y Melilla por la imposibilidad de obtener determinados datos de las variables explicativas pues como se ha explicado en anteriores capítulos el sistema educativo de estas dos ciudades presenta peculiaridades. Otra limitación es que no se tiene una medición desglosada por Comunidades Autónomas del índice de aislamiento desde antes de 2022. Este último impedimento no es realmente relevante pues como variable explicativa no es especialmente significativa y de quitarla se obtendría un modelo de regresión prácticamente idéntico que no alteraría ni las hipótesis ya verificadas ni las conclusiones obtenidas.

## **6.2. Modelos de series temporales para el rendimiento educativo**

Una serie temporal se puede definir matemáticamente como una sucesión de observaciones  $\{y_t\}_{t=0}^T$ , donde  $t$  representa el tiempo y  $y_t$  es el valor observado en el tiempo  $t$ . Matemáticamente, una serie temporal puede expresarse como  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_T$ , donde  $T$  es el último período de tiempo en la serie temporal. Cada  $y_t$  puede ser un número real, un valor discreto o incluso un vector de valores, dependiendo del contexto y la naturaleza de los datos observados.

### 6.2.1. Modelos Autoregresivos

Un modelo AR( $p$ ) (AutoRegresivo de orden  $p$ ) es un modelo estadístico utilizado para describir una serie temporal. En un modelo AR( $p$ ), el valor actual de la serie temporal se expresa como una combinación lineal de sus valores pasados más un término de error. El término  $p$  representa el número de retardos (lags) incluidos en el modelo.

La ecuación general de un modelo AR( $p$ ) es:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad (6.6)$$

donde:

- $Y_t$  es el valor de la serie temporal en el tiempo  $t$ .
- $c$  es una constante.
- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  son los coeficientes del modelo que representan la influencia de los valores pasados  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}$  en el valor actual  $Y_t$ .
- $\epsilon_t$  es un término de error aleatorio en el tiempo  $t$ .

En el caso de la nota de Matemáticas la serie temporal es muy corta pues el exámen PISA es una iniciativa reciente en términos históricos y se mide cada tres años. Por ello, se usará un modelo  $AR(1)$ , es decir,

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

En la Figura 6.4 se puede observar la predicción considerando un intervalo de confianza del 95 %. Se observa un claro descenso debido al COVID-19 y la predicción manifiesta que es altamente probable una mejoría en los años venideros, en el peor de los casos podría mantenerse.

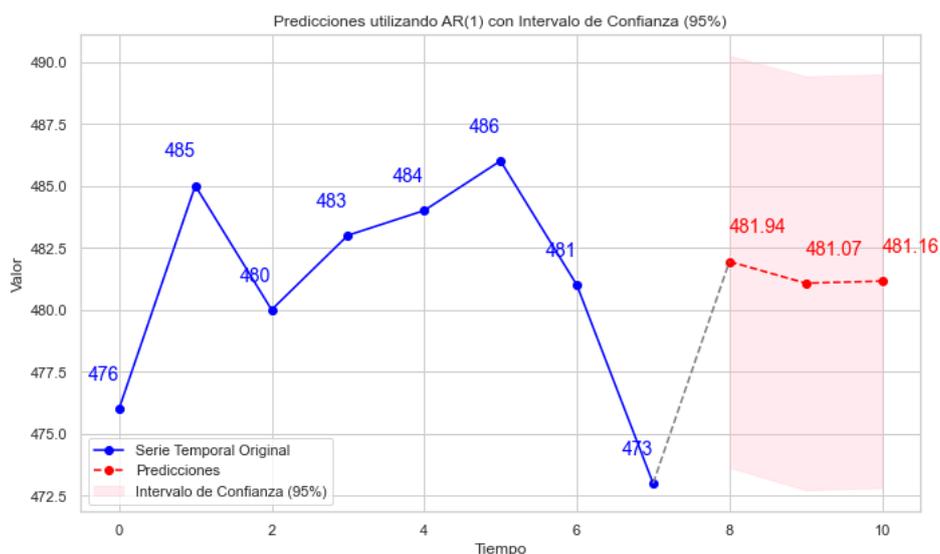


Figura 6.4: Predicción de la nota de Matemáticas mediante AR(1)

### 6.2.2. Modelos de Media Móvil

Un modelo  $MA(q)$  (Media Móvil de orden  $q$ ) es un modelo de series temporales, donde el valor actual se expresa como una combinación lineal de errores pasados (también llamados términos de ruido blanco o residuales).

La ecuación general de un modelo  $MA(q)$  es:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (6.7)$$

donde:

- $Y_t$  es el valor de la serie temporal en el tiempo  $t$ .
- $c$  es una constante.
- $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$  son los términos de error aleatorio en los tiempos  $t, t-1, t-2, \dots, t-q$ .
- $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  son los coeficientes del modelo que representan la influencia de los errores pasados  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$  en el valor actual  $Y_t$ .

Se empleará ahora un modelo  $MA(1)$ , es decir,

$$Y_t = \mu + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

En la Figura 6.5 se puede observar la predicción considerando un intervalo de confianza del 95%. La predicción presenta que es altamente probable una mejoría en los años venideros, de hecho muestra una brusca subida en el próximo examen PISA pero es poco probable pues pronostica que en el próximo examen PISA la nota en el examen de Matemáticas será el máximo histórico siendo esto extraño pues los alumnos que hagan dicho examen van a arrastrar los efectos de la pandemia.

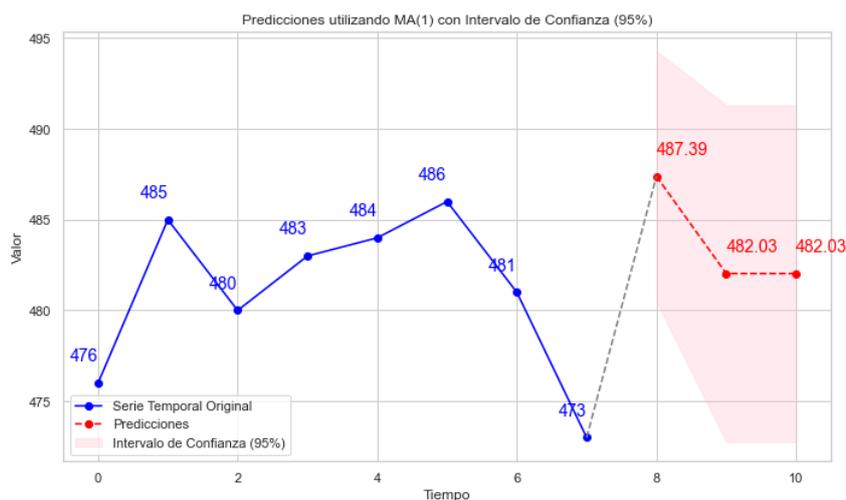


Figura 6.5: Predicción de la nota de Matemáticas mediante  $MA(1)$

### 6.2.3. Modelos ARIMA(p,d,q)

El modelo ARIMA (AutoRegresivo Integrado de Media Móvil) es una combinación de los modelos AR y MA que también incluye una parte de diferenciación para hacer que una serie temporal no estacionaria sea estacionaria. El modelo ARIMA se denota comúnmente como  $ARIMA(p, d, q)$ , donde  $p$  es el orden del componente auto-regresivo (AR),  $d$  es el número de diferencias necesarias para hacer que la serie sea estacionaria y  $q$  es el orden del componente de media móvil (MA).

Se define un modelo  $ARIMA(p, d, q)$  como:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(1 - L)^d Y_t = c + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \epsilon_t$$

donde  $L$  es el operador de retardos (lag), definido como  $LY_t = Y_{t-1}$ .

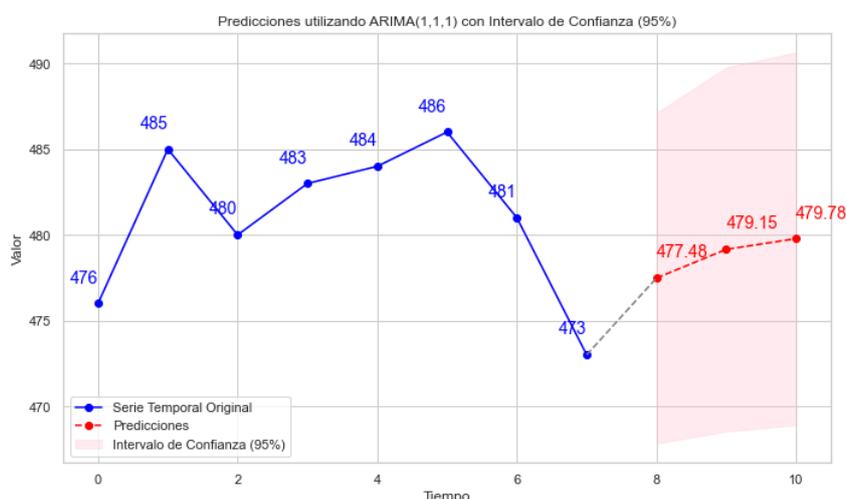


Figura 6.6: Predicción de la nota de Matemáticas mediante  $ARIMA(1, 1, 1)$

En la Figura 6.6 se puede observar la predicción considerando un intervalo de confianza del 95%. La predicción presenta una mejoría progresiva en los próximos años. Parece una explicación sensata pues se tomarán medidas en materia de política educativa que tendrán efecto en el largo plazo y desde luego no de manera inmediata.

### 6.2.4. Random Forest

El método de Random Forest es una técnica de aprendizaje automático que se utiliza tanto para clasificación como para regresión. Se basa en el concepto de "ensamble", donde múltiples modelos más simples se combinan para formar un modelo más robusto y generalizable. Random Forest pertenece a la familia de métodos de ensamble conocidos como métodos de "bagging" (bootstrap aggregating).

Random Forest utiliza un conjunto de árboles de decisión como modelos base. Cada árbol de decisión se entrena con una muestra aleatoria de los datos de entrenamiento y un subconjunto aleatorio de características. Los árboles de decisión se construyen de forma recursiva, dividiendo el espacio de características en regiones más pequeñas basadas en las características que mejor separan las clases o explican la variabilidad en la variable objetivo. El algoritmo de entrenamiento para Random

Forest aplica la técnica general de "bootstrap aggregating" o bagging a los árboles de decisión. Bagging selecciona repetidamente una muestra aleatoria con reemplazo del conjunto de entrenamiento y ajusta árboles a estas muestras.

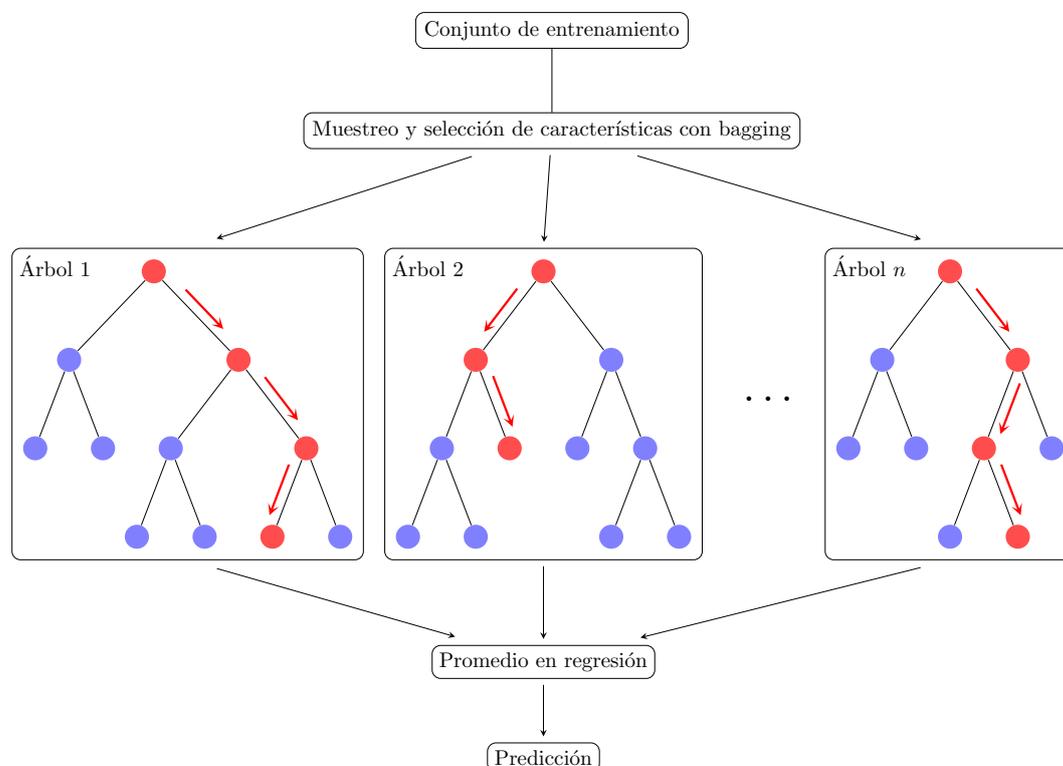


Figura 6.7: Representación del método Random Forest

El método de Random Forest es un algoritmo de aprendizaje automático utilizado tanto para clasificación como para regresión. Se basa en la construcción de múltiples árboles de decisión durante el entrenamiento y la salida es el promedio (en regresión) o la moda (en clasificación) de las predicciones individuales de los árboles. A continuación se explica el método utilizando la notación y el procedimiento mencionado:

Dado un conjunto de entrenamiento  $X = x_1, \dots, x_n$  con respuestas  $Y = y_1, \dots, y_n$ , donde  $X$  representa las características y  $Y$  las etiquetas o valores objetivo.

Posteriormente se hace uso del Bagging (Bootstrap Aggregating). El bagging es una técnica que consiste en crear múltiples subconjuntos de datos de entrenamiento mediante el muestreo con reemplazo. En el contexto de Random Forest, se realiza de la siguiente manera:

- Repetidamente ( $B$  veces) se selecciona una muestra aleatoria con reemplazo del conjunto de entrenamiento.
- Para  $b = 1, \dots, B$ :
  - Se selecciona, con reemplazo,  $n$  ejemplos de entrenamiento de  $X$  e  $Y$ , denominados  $X_b$  e  $Y_b$ .

Posteriormente se realiza el entrenamiento. En esta fase se entrena un árbol de clasificación o regresión  $f_b$  en cada subconjunto de datos  $X_b$  e  $Y_b$ . Este árbol  $f_b$  es una

estructura de decisión que se ajusta a los datos  $X_b$  y sus correspondientes etiquetas  $Y_b$ .

Por último, se procede al objetivo del método, la predicción. Después del entrenamiento, las predicciones para muestras no vistas  $x'$  se pueden hacer tomando el promedio de las predicciones de todos los árboles de regresión individuales sobre  $x'$ :

$$\hat{f} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B f_b(x').$$

Este método proporciona múltiples ventajas. En primer lugar una reducción del sobreajuste. El bagging reduce la variabilidad de las predicciones al promediar múltiples modelos. En segundo lugar, al combinar varios árboles, el modelo se vuelve más robusto a la variabilidad de los datos y al ruido. Por último, aunque no haya sido necesario en el caso de este trabajo el método del Random Forest permite manejar grandes conjuntos de datos y capturar relaciones complejas entre las características y el objetivo.

En resumen, este método proporciona una poderosa herramienta para la predicción y la clasificación, combinando la simplicidad de los árboles de decisión con la potencia del bagging para mejorar la precisión y la robustez del modelo.

La predicción de la serie temporal es la siguiente:

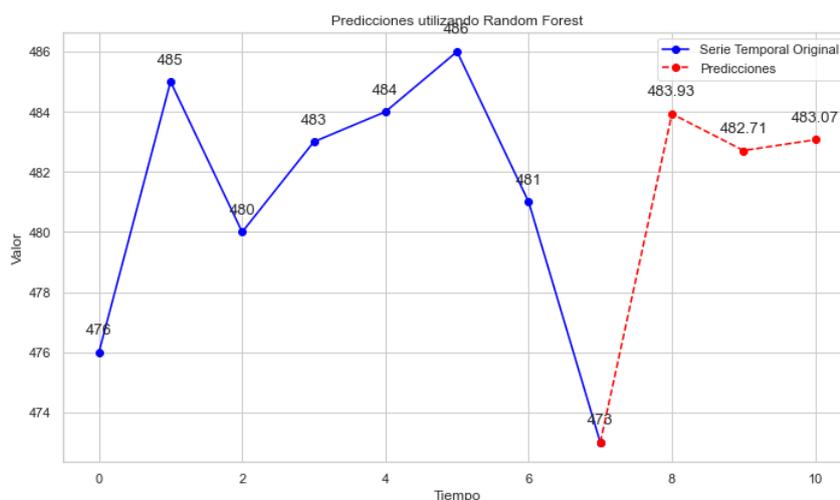


Figura 6.8: Predicción de la nota de Matemáticas mediante Random Forest

La predicción mediante Random Forest presentada en la Figura 6.8 proporciona una subida algo brusca del rendimiento educativo en Matemáticas a los momentos previos al COVID y una estabilidad en el tiempo una vez que se recupere el nivel.

### 6.2.5. Redes Neuronales

Una Red Neuronal Artificial (RNA) es un modelo compuesto por unidades básicas llamadas neuronas, organizadas en capas y conectadas entre sí mediante conexiones llamadas sinapsis. Cada neurona realiza operaciones simples, como sumar entradas ponderadas y aplicar una función de activación para producir una salida.

El objetivo es aproximar una función desconocida  $y = f(x)$  donde  $y$  es un escalar,  $\mathbf{x} = \{x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_N\}$  un vector que ha de incluir una constante y  $N$  un número lo suficientemente grande.

Primero se considera el vector de entrada  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  compuesto de  $N$  características o variables. Los parámetros (o pesos) de la red neuronal, denotados como  $\theta$ , incluyen todos los pesos y sesgos del modelo. El sesgo del modelo,  $\theta_0$ , se incluye para ajustar el resultado de la combinación lineal antes de que se aplique la función de activación.

Para cada neurona  $m$  en la capa oculta, se calcula una combinación lineal de las entradas  $x_n$ , ponderada por los pesos  $\theta_{n,m}$

$$\sum_{n=0}^N \theta_{n,m} x_n.$$

incluye el sesgo  $\theta_{0,m}$  cuando  $n = 0$ .

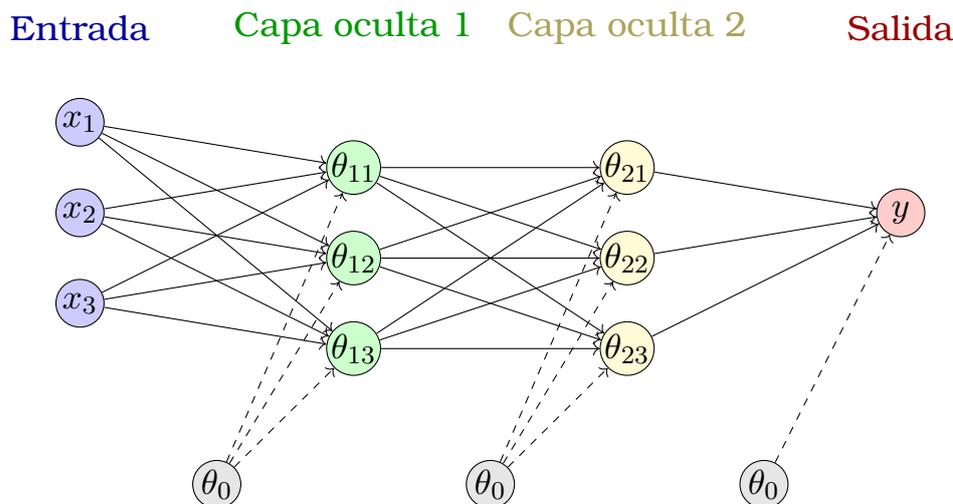
Después, la función de activación  $\phi$  introduce no linealidad en el modelo, y puede ser una función sigmoide, ReLU (Rectified Linear Unit), tanh, entre otras. Los pesos  $\theta_m$  conectan la salida de la neurona  $m$  de la capa oculta con la salida final  $y$  donde todo esto se representa en la siguiente ecuación:

$$\sum_{m=1}^M \theta_m \phi \left( \sum_{n=0}^N \theta_{n,m} x_n \right)$$

Finalmente, una *red neuronal* es una aproximación de  $f$  de la forma:

$$y = f(\mathbf{x}) \cong g^{NN}(\mathbf{x}; \theta) = \theta_0 + \sum_{m=1}^M \theta_m \phi \left( \sum_{n=0}^N \theta_{n,m} x_n \right). \quad (6.8)$$

En lo referente a entrenar la red neuronal consiste en seleccionar un  $\theta$  tal que  $g^{NN}(\mathbf{x}; \theta)$  es una aproximación lo suficientemente cercana a  $f(\mathbf{x})$  en una métrica determinada.



En una capa densa, cada neurona está conectada a todas las neuronas de la capa anterior y de la siguiente. Esto significa que cada neurona en una capa densa recibe una entrada de todas las neuronas de la capa anterior y envía su salida a todas las neuronas de la capa siguiente. Una Red Neuronal Densamente Conectada (DNN) es un tipo de RNA en el que las neuronas están organizadas en capas densamente conectadas. Matemáticamente, una capa densa realiza la operación de transformación lineal seguida de una función de activación no lineal. La transformación lineal se representa mediante una multiplicación matricial de las entradas por una matriz de pesos, seguida de la adición de un sesgo. La función de activación introduce la no linealidad en la red, permitiendo que la red aprenda relaciones no lineales en los datos.

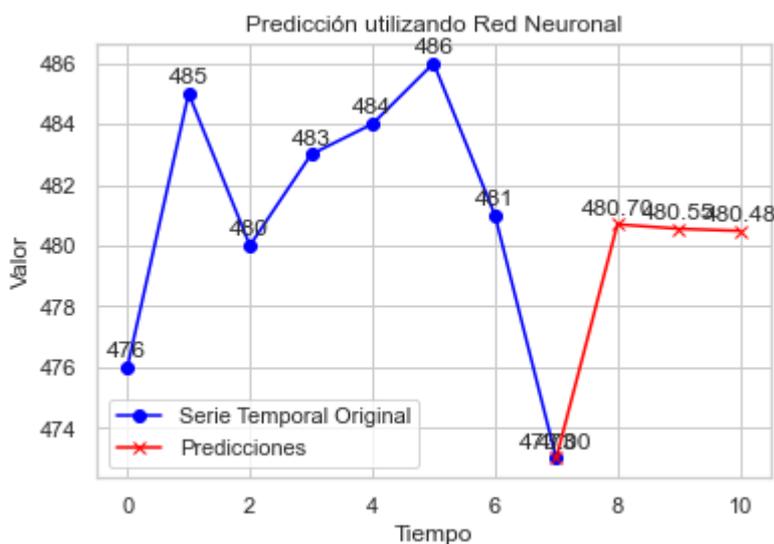


Figura 6.9: Predicción de la nota de Matemáticas mediante Redes Neuronales

La predicción mediante redes neuronales puede ser una estimación sensata pues dice que en tres años se alcanzará un nivel similar al que se tenía tres años atrás. Puede ser factible pues las medidas que se tomen pueden causar mejorías en tres años.

## Capítulo 7

# Delineación de políticas públicas

El objetivo de este trabajo de investigación no es solo descriptivo, sino profundamente propositivo. En este capítulo se aspira a delinear las políticas públicas óptimas que deberían de implementarse para mejorar el sistema educativo español. Con esto se pretende proporcionar una guía para la toma de decisiones y lograr que el sistema educativo español sea sinónimo de excelencia.

### 7.1. La innovación educativa como solución

En este trabajo se ha comprobado que el rendimiento educativo en España es inferior a la media de la OCDE, y se ha estancado e incluso empeorado en los últimos años destacando que el efecto de la pandemia COVID-19 ha tenido un efecto devastador. No obstante, esta realidad no es uniforme en todo el territorio español.

En primer lugar, se han apreciado fuertes diferencias intercomunitarias en el rendimiento educativo en Matemáticas que corrobora la denominada España a dos velocidades, puesto que las comunidades autónomas más septentrionales en su mayoría han obtenido unos resultados superiores a los de las comunidades más meridionales. Esta gran disparidad educativa entre comunidades autónomas se explica por diferencias socioeconómicas estructurales entre ellas que ya han sido comprobadas empíricamente en anteriores capítulos.

En segundo lugar, del análisis estadístico se extrae la relevancia de determinadas variables a la hora de entender el rendimiento educativo en España y las diferencias intercomunitarias existentes. Este es el caso del gasto público, que ha permitido concluir que no es el volumen sino de la eficiencia del mismo.

Como se ha comentado anteriormente, el informe PISA para profundizar en los resultados en Matemáticas se dividen en subescalas de procesos y de contenidos.

#### 7.1.1. Innovación en subescalas de procesos

El Aprendizaje Basado en Problemas (PBL) permite a los estudiantes enfrentarse a situaciones matemáticas diversas a la par que desafiantes. Los profesores pueden presentar a los estudiantes problemas del mundo real que requieran la formulación de situaciones matemáticas y la aplicación de conceptos.

El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) implica la realización de proyectos a largo plazo que integran múltiples conceptos matemáticos. Los estudiantes pueden

diseñar y llevar a cabo proyectos que requieran la formulación de situaciones matemáticas, el uso de conceptos y el razonamiento matemático para analizar y presentar resultados.

El aprendizaje cooperativo fomenta la colaboración entre los estudiantes para resolver problemas matemáticos. Los profesores pueden organizar actividades en las que los estudiantes trabajen en equipos para entrenar las subescalas de procesos.

Otro de los métodos que sería muy efectivo para incrementar el rendimiento en Matemáticas es el flipped classroom, o aula invertida, es un enfoque pedagógico que cambia la dinámica tradicional de la enseñanza. En lugar de que los estudiantes adquieran nuevos conocimientos durante la clase y realicen ejercicios prácticos en casa, el flipped classroom invierte este proceso. Los estudiantes estudian el material por su cuenta antes de la clase, generalmente a través de videos, lecturas u otros recursos digitales proporcionados por el maestro. Luego, en la clase, se dedica tiempo a actividades prácticas, discusiones grupales y resolución de problemas.

Este enfoque tiene varios beneficios. En primer lugar, permite a los estudiantes avanzar a su propio ritmo y revisar el material tantas veces como sea necesario para comprenderlo. Además, al dedicar tiempo en clase a la aplicación práctica del conocimiento, los maestros pueden proporcionar apoyo individualizado y resolver dudas en tiempo real.

Además, al utilizar recursos digitales para el aprendizaje fuera del aula, se pueden integrar una variedad de herramientas multimedia y actividades interactivas para enriquecer la experiencia de aprendizaje. Hay que recalcar que todo el software que se quiera emplear implicaría un gasto por parte de las familias y los centros.

### **7.1.2. Innovación en subescalas de contenidos**

Fomentar la creación de modelos matemáticos para comprender y predecir relaciones en situaciones de cambio. Los estudiantes pueden explorar cómo diferentes variables están relacionadas y cómo cambian con el tiempo.

Utilizar software de simulación para que los estudiantes exploren fenómenos de cambio y relaciones en entornos virtuales. Emplear herramientas de geometría dinámica para visualizar y explorar conceptos geométricos permite a los estudiantes manipular figuras y experimentar con propiedades geométricas para desarrollar una comprensión más profunda del espacio y la forma, como Geogebra.

Presentar problemas que involucren mediciones, estimaciones y comparaciones de cantidades en contextos significativos para los estudiantes.

Uno de los métodos que más puede influir en la mejora del rendimiento matemático en las subescalas de contenidos es el método Montessori. Utilizar materiales educativos específicamente diseñados para el método Montessori, que están estructurados para fomentar la exploración sensorial y el aprendizaje práctico. Estos materiales suelen ser manipulativos y están diseñados para ayudar a los alumnos a comprender conceptos abstractos a través de la experiencia práctica. En concreto, estos materiales permitirán a los estudiantes explorar conceptos de cambio y relaciones de manera concreta. Por ejemplo, enseñar conceptos de geometría y espacio donde los estudiantes pueden explorar formas geométricas tridimensionales utilizando dichos materiales.

### 7.1.3. El plan de mejora en Castilla y León

Puesto que según las predicciones presentadas los resultados han sido el mínimo histórico y que en unos años puede existir una mejoría progresiva, es imperativo tomar medidas en materia de política educativa. Se ha de tener en cuenta que "el impacto socio-económico del éxito y del fracaso académico es difícil de medir y de comprender, sobre todo en términos de rentabilidad para quienes tienen la responsabilidad de elaborar e implementar las políticas públicas y las directrices de gasto público" [Marbán et al., 2022]. El célebre economista, James Heckman, Premio Nobel de Economía en el año 2000, afirma que los individuos que recibieron educación temprana tienen unas posibilidades de éxito en el plano personal, social y profesional son mayores, así como un alto beneficio social alcanzado al disminuirse indicadores negativos de criminalidad, delincuencia, violencia y fracaso escolar. El efecto es que una sociedad bien educada y que consiga un alto rendimiento educativo en Matemáticas tendrá como resultado un incremento en su productividad.

Sin duda, el referente en España es la Comunidad Autónoma de Castilla y León que siempre encabeza el ranking de rendimiento educativo. En palabras de la Consejera de Educación en Castilla y León, Rocío Lucas, "en las últimas ediciones de PISA, en el año 2018 y TIMSS, en 2019, tenemos un rendimiento en Matemáticas a la cabeza de las comunidades autónomas y equiparable a países como Finlandia. Pero no nos conformamos con estos buenos resultados. Por ello, se diseñó el Plan para la mejora de las matemáticas y, tras este proceso, llega el momento de reflexionar" [Junta de Castilla y León and Asociación Miguel de Guzmán, 2022].

La Consejería de Educación puso en marcha en el año 2018 un Plan para la mejora del Rendimiento en Matemáticas en la etapa de Primaria, combinando la innovación, la investigación y la evaluación. Dentro de esta iniciativa, se han desarrollado cinco experiencias piloto con metodologías innovadoras en 49 centros públicos de Castilla y León. En total, 182 docentes ha implementado los proyectos 'JUMP-Math', 'Piensa Infinito', 'NUMICON', 'ABN' y 'Smartick'. Tal y como se dice en [Marbán et al., 2022] "La Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León lanzó en 2018 su Plan para la Mejora de las Matemáticas (PMM), combinando de forma notable tres ingredientes que, cada día bajo un consenso más amplio, es imprescindible considerar en todo proyecto educativo de calidad, a saber: innovación, investigación y evaluación."

El Grupo de Investigación Reconocido (GIR) 'Educación Matemática' de la Universidad de Valladolid (UVA) ha sido el encargado de evaluar estas primeras experiencias y concluye que los resultados obtenidos muestran tendencias muy positivas en todos y cada uno de los pilotajes. Destacan especialmente las mejoras en resolución de problemas, en el uso de estrategias más complejas y diversas, en el razonamiento y la expresión oral de los mismos, y en la comprensión de lo que se hace. Asimismo han observado mejoras en la motivación, el clima de aula, la participación activa, el trabajo cooperativo y la autopercepción de eficacia.

Entre las medidas que conforman el mencionado plan se encuentra la que hace referencia al impulso de la formación de los docentes en metodologías innovadoras que impulsen el desarrollo de la competencia matemática. En particular, en el periodo comprendido entre el curso 2018-2019 y el curso 2020-2021 se pusieron en marcha cuatro experiencias de innovación en Infantil y Primaria (en casi todos los casos solo en sus dos primeros cursos), a las que hemos convenido en denominar "pilotajes".

Entre las conclusiones de este plan "destacan especialmente las mejoras en re-



Figura 7.1: Plan de Mejora de los Resultados Académicos. Fuente: (Junta de Castilla y León)

solución de problemas, en el uso de estrategias más complejas y diversas, en los procesos de razonamiento y en su verbalización, en la comprensión de lo “que se hace”, en motivación, en clima de aula, en los niveles de participación activa, en capacidad para llevar a cabo trabajo cooperativo y en autopercepción de eficacia” [Marbán et al., 2022].

Para la correcta implantación de este plan es fundamental el apoyo por parte de la Administración, en particular la educativa. En una primera fase es necesario formar a los docentes en innovación educativa y en sus principios pedagógicos subyacentes. Se enfatiza en [Marbán et al., 2022] sobre la importancia en la “formación en la aplicación del Diseño Universal del Aprendizaje (DUA) al aula de matemáticas, en el conocimiento de las diferentes Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas (DAM), incluyendo trastornos del aprendizaje como la discalculia, y en el diseño de actividades interdisciplinares como, por ejemplo, las propias de enfoques STEAM”.

Otras Comunidades Autónomas que han obtenido grandes resultados han implantado planes similares. Por ejemplo las Comunidades de Galicia y Madrid han implementado planes similares que han derivado en un rendimiento académico alto.

#### 7.1.4. Una alternativa en la financiación de los centros

Como se puede observar por lo mencionado en este capítulo es de vital importante la innovación docente. Esto en ocasiones choca con la rigidez administrativa. Como se ha comentado los centros concertados (y privados) gozan de cierta flexibilidad que debería de aprovecharse para poder implementar métodos de innovación docente. Estas innovaciones educativas requieren de recursos, entre ellos económicos.

Es por ello que debe de fomentarse la educación privada y concertada. En particular, conviene repensar el sistema del concierto educativo que en ciertos casos lleva a situaciones precarias a los centros educativos. Una alternativa al sistema de los centros concertados es el sistema del cheque escolar.

El denominado *cheque escolar* o también llamado *voucher escolar* es un sistema propuesto por Milton Friedman en la década de 1950. Propuso la idea de crear sistemas de financiamiento público que les permitieran a todos los ciudadanos -y no sólo a los más pudientes- la libertad de elección escolar (Friedman, 1955). La reforma estructural en materia educativa del cheque escolar sería una medida que bien podría garantizar la libertad de las familias en la elección de un centro docente para sus hijos, este modelo está ya instaurado en países como Suecia. La medida conocida como cheque escolar se traduce en que a cada familia se le entregaría el importe de una plaza escolar en la Escuela Pública y la familia en cuestión una vez obtenido el cheque debe de escoger entre matricular a su hijo en una escuela pública o privada. En el caso de que la familia decida matricular a su hijo en una escuela pública no tendría ningún coste para la familia dado que el cheque estaría dotado de una cuantía equivalente al coste de una plaza en la educación pública. En el caso de que la familia decidiese matricular a su hijo en la educación privada el cheque no podría cubrir el coste total de la plaza en dicha escuela privada por lo que la familia debería de pagar la diferencia del coste de la plaza que el propio centro privado haya fijado.

Este modelo tiene múltiples ventajas en comparación con el sistema de conciertos, ventajas para las familias y para los centros. En cuanto a ventajas para los centros privados concertados, con el sistema de conciertos la Educación Concertada pasa ciertas dificultades con el importe proporcionado por la Administración, teniendo que recurrir los centros concertados a medidas adicionales de financiación, este problema quedaría solventado por el cheque escolar pues es el propio centro es el que fijaría el importe necesario para que pueda desarrollar sus funciones con total normalidad.

Respecto a ventajas para las familias, en la actualidad existe el sistema de puntos para acudir a uno u otro centro concertado que causa serias dificultades a las familias que quieran acudir a un determinado centro concertado pues se requieren de ciertos puntos que en ocasiones carecen de sentido, sometiendo el poder legislativo a una presión a las familias que quieren acceder a unos servicios a los que todo ciudadano español tiene derecho. De hecho, el cheque escolar facilitaría el acceso de familias de menos recursos a la Educación Privada pues en la actualidad estas familias sólo pueden acceder a los centros públicos (y como mucho, a los concertados) pues es la Administración quién a través de nuestros impuestos paga los costes de esas plazas pero no cubre absolutamente nada de una plaza de un centro privado limitando por tanto la capacidad de elección de las familias.

Es más, que las familias pasen a ser los pagadores les dará mucho más control y habrá un incremento de la calidad educativa pues los centros competirán por tener más alumnos frente a los pequeños monopolios geográficos que se generan por el cuál una familia solo puede llevar a sus hijos a los centros públicos o concertados de la zona en la que reside la familia. Lógicamente el cheque podría modularse en función de la renta familiar.

Analizando el caso de Suecia, los resultados y los datos que estos reflejan son excelentes. “De esta manera se ha llevado a cabo lo que Duncan Currie, en la National Review de septiembre de 2010 llamó la Sweden’s quiet revolution, la misma que The Economist (3/2/2013) puso como base de los éxitos suecos para enfrentar los retos

de la reciente crisis europea y transformarse, junto a otros países nórdicos, en el supermodelo del futuro” (Rojas, 2014).

El incremento de estudiantes inscritos en centros de educación privada conlleva que el rendimiento educativo aumentara de manera considerable, según se desprende del informe PISA: al llegar a los 15 años, los alumnos de colegios públicos obtienen de media 489 puntos en la prueba de competencias, mientras que los de centros privados logran una puntuación de 517. La diferencia de 28 puntos equivale a, prácticamente, un año entero de escolarización.

En las calificaciones de los países donde está implantado el cheque escolar "los resultados de las escuelas independientes, que son, especialmente al nivel básico, superiores a los de las escuelas municipales. En 2013 las calificaciones de los alumnos que terminaban sus estudios básicos en escuelas independientes aventajaban a las de las escuelas municipales en un 10 %."(Rojas, 2014)

En lo respectivo a materia de competencia, si se incrementa el número de clientes para la educación privada, es decir un incremento de la demanda, lo hará también la oferta educativa y, para la atracción de esos clientes, los colegios tratarán de diferenciarse, especializándose en determinadas áreas o materias en las que serán más competentes, lo que incrementará exponencialmente el rendimiento educativo y la variedad de oferta educativa en el sistema educativo nacional. Esto derivará en una amplia gama de metodologías e innovaciones docentes.

## 7.2. Los Objetivos de Desarrollo Sostenible y la excelencia educativa

Los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) son una serie de metas establecidas por las Naciones Unidas en 2015 como parte de la Agenda para el Desarrollo Sostenible. Estos objetivos fueron diseñados para abordar los desafíos globales más urgentes que enfrenta la humanidad y para guiar a los países hacia un futuro más sostenible en términos económicos, sociales y ambientales.

Los ODS constan de 17 objetivos, cada uno con metas específicas, que abarcan una amplia gama de áreas temáticas, como la erradicación de la pobreza, la igualdad de género, la educación de calidad, la acción climática, la paz y la justicia, entre otros. Estos objetivos buscan abordar las interconexiones entre los desafíos mundiales, reconociendo que no se pueden lograr avances significativos en un área sin abordar simultáneamente otros aspectos relacionados.

La mejora en el rendimiento educativo está estrechamente relacionada con varios Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) establecidos por las Naciones Unidas:

- **ODS 4, Educación de calidad:** Este objetivo se centra específicamente en garantizar una educación inclusiva y de calidad para todos. Mejorar el rendimiento educativo contribuye directamente a este objetivo al asegurar que todos los estudiantes tengan acceso a una educación que promueva el aprendizaje efectivo y el desarrollo de habilidades relevantes para la vida y el trabajo.
- **ODS 1, Erradicación de la pobreza:** La educación juega un papel fundamental en la reducción de la pobreza al proporcionar a las personas las habilidades y el conocimiento necesarios para acceder a oportunidades económicas y mejorar

sus medios de vida. Un mejor rendimiento educativo puede ayudar a disminuir la pobreza al ofrecer a los estudiantes una base sólida para su futuro profesional.

- **ODS 3, Salud y bienestar:** Una educación de calidad también está vinculada a mejores resultados de salud y bienestar. Los individuos con mayor nivel educativo tienden a tomar decisiones más saludables, acceder a mejores servicios de atención médica y tener una mayor conciencia sobre prácticas saludables, lo que contribuye a una población más saludable en general.
- **ODS 5, Igualdad de género:** La educación es un vehículo importante para promover la igualdad de género al brindar a las mujeres las mismas oportunidades de aprendizaje que a los hombres. Estrechar la brecha de género educativa puede ayudar a que las mujeres participen plenamente en la sociedad.
- **ODS 8, Trabajo decente y crecimiento económico:** Un mejor rendimiento educativo puede conducir a mejores oportunidades de empleo y crecimiento económico. Los individuos con una educación más sólida tienen más probabilidades de acceder a empleos bien remunerados y satisfactorios, lo que a su vez contribuye al desarrollo económico y al bienestar general de la sociedad.



# Apéndice A

## Tablas

<b>Año</b>	<b>Lectura</b>	<b>Matemáticas</b>	<b>Ciencias</b>	<b>Media</b>
2000	493	476	491	487
2003	481	485	487	484
2006	480	480	488	483
2009	483	483	488	485
2012	488	484	496	489
2015	496	486	493	492
2018	477	481	483	482

Cuadro A.1: Resultados del informe PISA en España entre 2000 y 2018.

<b>Año</b>	<b>Lectura</b>	<b>Matemáticas</b>	<b>Ciencias</b>	<b>Media</b>
2000	500	500	500	500
2003	494	500	500	498
2006	492	498	500	497
2009	494	496	501	497
2012	496	494	501	497
2015	493	490	493	492
2018	487	489	489	489

Cuadro A.2: Resultados del informe PISA en la OCDE entre 2000 y 2018.

<b>Año</b>	<b>Galicia</b>	<b>CyL</b>	<b>Navarra</b>	<b>Cantabria</b>	<b>Aragón</b>	<b>Asturias</b>
2015	505	516	515	497	505	497
2018	504	502	498	497	495	494

Cuadro A.3: Puntuaciones por Comunidad Autónoma (Año) - Parte 1

Año	P.Vasco	Rioja	Cataluña	Madrid	Baleares	España
2015	489	498	501	513	482	492
2018	493	492	490	487	483	482

Cuadro A.4: Puntuaciones por Comunidad Autónoma (Año) - Parte 2

Año	C.Mancha	Murcia	C.Valenciana	Extremadura	Andalucía	Canarias
2015	499	480	499	474	473	470
2018	482	482	477	476	472	469

Cuadro A.5: Puntuaciones por Comunidad Autónoma (Año) - Parte 3

Año	Melilla	Ceuta
2015	0	0
2018	465	436

Cuadro A.6: Puntuaciones por Comunidad Autónoma (Año) - Parte 4

Comunidad Autónoma	Índice de Aislamiento
Melilla	0,27
Madrid	0,17
Ceuta	0,17
España	0,16
Andalucía	0,16
Islas Baleares	0,14
Murcia	0,14
País Vasco	0,14
Asturias	0,14
Castilla-La Mancha	0,13
Extremadura	0,13
Navarra	0,12
Canarias	0,12
Cataluña	0,12
Comunidad Valenciana	0,12
Aragón	0,10
Castilla y León	0,10
Galicia	0,10
La Rioja	0,09
Cantabria	0,08

Cuadro A.7: Índice de Aislamiento por Comunidad Autónoma

	Dependent variable: NOTA_MAT		
	(1)	(2)	(3)
GPUB_alum	-0.010** (0.003)	-0.006* (0.003)	-0.001 (0.002)
PIB_per_cap	-0.0001 (0.001)	-0.001 (0.001)	-0.001 (0.001)
Paro	-367.563** (149.828)	-206.101 (144.778)	-209.933 (171.837)
ISEC	8.559 (39.598)	72.724** (26.257)	98.090*** (28.164)
Aislamiento	138.762 (135.351)	48.540 (146.753)	-117.555 (150.684)
Publicos	-171.278** (60.106)	-114.150* (60.725)	-13.620 (48.965)
RAIm_Prof	-13.455** (4.386)	-10.882* (4.824)	
Inmigrantes	-189.784* (95.742)		
Constant	862.613*** (99.385)	766.830*** (99.987)	577.903*** (64.837)
AIC	118	123	129
Observations	17	17	17
R <sup>2</sup>	0.918	0.878	0.809
Adjusted R <sup>2</sup>	0.837	0.784	0.695
Residual Std. Error	6.317 (df = 8)	7.273 (df = 9)	8.633 (df = 10)
F Statistic	11.247*** (df = 8; 8)	9.274*** (df = 7; 9)	7.077*** (df = 6; 10)

Note: \*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Cuadro A.8: Modelos de Regresión

Cuadro A.9

	<i>Dependent variable:</i>		
	NOTA_MAT		
	(4)	(5)	(6)
GPUB_alum	-0.001 (0.002)	-0.006 (0.004)	-0.009** (0.004)
PIB_per_cap	-0.002 (0.001)		
Paro	-313.308** (107.443)		
ISEC	94.151*** (27.211)		
Publicos	-6.308 (47.197)	-233.386*** (52.792)	-283.146*** (54.793)
RAIm_Prof		-17.317*** (4.516)	-17.750*** (4.125)
Inmigrantes			-135.740* (71.305)
Constant	579.371*** (63.646)	868.304*** (102.274)	942.107*** (101.026)
Observations	17	17	17
R <sup>2</sup>	0.798	0.682	0.756
Adjusted R <sup>2</sup>	0.706	0.609	0.674
Residual Std. Error	8.478 (df = 11)	9.781 (df = 13)	8.922 (df = 12)
F Statistic	8.680*** (df = 5; 11)	9.291*** (df = 3; 13)	9.281*** (df = 4; 12)

Note: \*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

# Bibliografía

- [Aguiló, 2016] Aguiló, A. (2016). ¿hay mucha diferencia en los resultados académicos entre chicos y chicas? *Interrogantes*.
- [Aguiló, 2021] Aguiló, A. (2021). Educar en una sociedad plural. *Editorial Palabra*.
- [Beneyto Berenguer, 2005] Beneyto Berenguer, R. (2005). El ideario de los centros docentes privados. *Universidad Cardenal Herrera-CEU, Madrid. Lección Magistral leída en la apertura del curso 2005-2006, pp.17*.
- [Campoamor, 1988] Campoamor, A. F.-M. (1988). De la libertad de enseñanza al derecho a la educación. *Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, p. 82*.
- [Casado, 2020] Casado, J. (2020). Análisis estadístico de las diferencias en el nivel educativo de las comunidades autónomas basadas en el informe pisa. *Universidad de Valladolid*.
- [Coleman, 1966] Coleman, Campbell, H. M. y. M. (1966). Equality of educational opportunity. *Civil Rights Act*.
- [Delgado, 2023] Delgado, S. (2023). La imparable victoria de la educación privada sobre la pública explicada en 7 cifras. *El Blog Salmón*.
- [Domínguez-Berrueta de Juan, 2005] Domínguez-Berrueta de Juan, M y Sendín García, M. A. (2005). Derecho y educación: Régimen jurídico de la educación. *Ediciones Universidad de Salamanca, 2005, pp.99*.
- [Eiros Bachiller, 2020] Eiros Bachiller, M. (2020). Educación diferenciada, derechos y la administración. *Universidad de Salamanca*.
- [Eisenkopf, 2015] Eisenkopf, G., H. Z. F. U. y. U. H. W. (2015). Academic performance and single-sex schooling: Evidence from a natural experiment in switzerland. *Journal of economic behavior and organization, 115, p.123-143*.
- [Esteban, 2020] Esteban, R. (2020). 6,17 millones: las cifras reales de la concertada. *La Razón*.
- [Fernández Miranda Campoamor, 1988] Fernández Miranda Campoamor, A. y Sánchez Navarro, A. (1988). Artículo 27. *Comentarios a la Constitución Española de 1978, Tomo III m Edersa, p.157-272*.
- [Florentino Felgueroso and Jiménez-Martín, 2013] Florentino Felgueroso, M. G.-D. and Jiménez-Martín, S. (2013). ¿por qué el abandono escolar se ha mantenido

tan elevado en España en las últimas dos décadas? el papel de la ley de educación (logse). *Fundación de Estudios de Economía Aplicada (FEDEA), Colección de Estudios Económicos*.

- [Friedman, 1955] Friedman, M. (1955). El papel del gobierno en la educación.
- [García, 2018] García, N. (2018). España es el sexto país de la UE con el menor gasto público para educación. *El Economista*.
- [García Pérez, 2012] García Pérez, J.I. y Robles Zurita, J. A. (2012). Diferencias regionales en el rendimiento educativo: ¿qué ha cambiado entre 2009 y 2012?
- [Gonzalvo Cirac, 2023] Gonzalvo Cirac, M. (2023). Educación diferenciada: un reto para la lucha por la igualdad en la educación. *Nuevos Horizontes del Derecho Constitucional*.
- [González-Varas Ibáñez, 2015] González-Varas Ibáñez, A. (2015). Legitimidad de los colegios de un solo sexo y de su derecho a concierto en condiciones de igualdad. *Iustel*, p.215.
- [Guardia Hernández, 2019] Guardia Hernández, J. (2019). Marco constitucional de la enseñanza privada española sostenida con fondos públicos: recorrido histórico y perspectivas a futuro. *Estudios Constitucionales*.
- [Heckman, 2008] Heckman, J. (2008). Schools skills and synapses. *NBER Working Papers 14064*.
- [INEE, 2012] INEE (2012). Publicación nº2, ocupaciones de los padres y PISA 2012: el caso de las CCAA. *Publicaciones del Instituto Nacional de Evaluación*.
- [INEE, 2017] INEE (2017). Análisis de los factores asociados al rendimiento de los alumnos en PISA en las comunidades autónomas. *Ministerio de Educación y Formación Profesional*.
- [INEE, 2018a] INEE (2018a). Informe PISA 2018. *Publicaciones del Instituto Nacional de Evaluación*.
- [INEE, 2018b] INEE (2018b). Informe TALIS 2018. *Publicaciones del Instituto Nacional de Evaluación*.
- [INEE, 2019] INEE (2019). Sistema estatal de indicadores de la educación para 2019. *Ministerio de Educación y Formación Profesional*.
- [INEE, 2023] INEE (2023). Informe PISA 2022. *Publicaciones del Instituto Nacional de Evaluación*.
- [Junta de Castilla y León, 2024] Junta de Castilla y León (2024). Plataforma datos abiertos. <https://datosabiertos.jcyl.es>. Última versión del 9 de junio de 2024.
- [Junta de Castilla y León and Asociación Miguel de Guzmán, 2022] Junta de Castilla y León and Asociación Miguel de Guzmán (2022). Actas XV Congreso regional de matemáticas de Castilla y León. *Consejería de Educación de la Junta de Castilla*

y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

- [Lorenzo Vázquez, 2001] Lorenzo Vázquez, P. (2001). Libertad religiosa y enseñanza en la constitución. *Centro de Estudios Políticos y Constitucionales*, p.79.
- [Marbán et al., 2022] Marbán, J. M., Arce, M., Conejo, L., Cuida, M. A., Maroto, A. I., Novo, M. L., Palacios, A., and Palop, B. (2022). Plan de mejora de las matemáticas en castilla y león: Ofreciendo respuestas desde la innovación, la formación, la investigación y la dinamización de las familias. *Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 24 - 32). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.*
- [Martínez López-Muñiz, 1979] Martínez López-Muñiz, J. (1979). La educación en la constitución española. *Persona y Derecho*, p.217.
- [Martínez López-Muñiz, 2004] Martínez López-Muñiz, J. (2004). Autonomía de los centros escolares y derecho a la educación en libertad. *Persona y Derecho*, núm 50, p.488.
- [Martínez López-Muñiz, 2007] Martínez López-Muñiz, J. (2007). La educación escolar, servicio esencial: Implicaciones jurídico-públicas. *Cuadernos de Derecho Judicial*, núm 11, p.33-34.
- [Martínez Pisón, 2003] Martínez Pisón, J. (2003). El derecho a la educación y la libertad de enseñanza. *Dykinson*, p.139-141.
- [Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2023] Ministerio de Educación y Formación Profesional (2023). Datos y cifras, curso escolar 2023/2024. *Catálogo de publicaciones del Ministerio de Educación y Formación Profesional.*
- [OCDE, 2011a] OCDE (2011a). Pisa in focus nº11, ¿cómo se están adaptando los sistemas escolares al creciente número de estudiantes inmigrantes? *Ministerio de Educación y Formación Profesional.*
- [OCDE, 2011b] OCDE (2011b). Pisa in focus nº47, ¿cómo ha evolucionado el rendimiento de los alumnos a lo largo del tiempo? *Ministerio de Educación y Formación Profesional.*
- [OCDE, 2011c] OCDE (2011c). Pisa in focus nº7, centros privados: ¿a quién benefician? *Ministerio de Educación y Formación Profesional.*
- [OCDE, 2012] OCDE (2012). Pisa in focus nº13, ¿se compran con dinero los buenos resultados en pisa? *Ministerio de Educación y Formación Profesional.*
- [OCDE, 2013a] OCDE (2013a). Pisa in focus nº22, ¿cómo les va a los alumnos inmigrantes de los centros escolares desfavorecidos? *Ministerio de Educación y Formación Profesional.*
- [OCDE, 2013b] OCDE (2013b). Pisa in focus nº28, ¿qué hace diferentes a las escuelas urbanas? *Ministerio de Educación y Formación Profesional.*

- [OCDE, 2014a] OCDE (2014a). Pisa in focus nº36, ¿las ocupaciones de los padres tienen un impacto en el rendimiento del estudiante? *Ministerio de Educación y Formación Profesional*.
- [OCDE, 2014b] OCDE (2014b). Pisa in focus nº44, ¿cómo se relaciona la asignación de recursos con el rendimiento de los estudiantes? *Ministerio de Educación y Formación Profesional*.
- [OCDE, 2018] OCDE (2018). Marco teórico de lectura pisa 2018. *Ministerio de Educación y Formación Profesional*.
- [OCDE, 2019] OCDE (2019). Pisa in focus nº94, ¿estudiar en un centro rural supone alguna diferencia en el método y el contenido del aprendizaje? *Ministerio de Educación y Formación Profesional*.
- [Ortiz Díaz, 1980] Ortiz Díaz, J. (1980). La libertad de enseñanza. *Universidad de Málaga*.
- [Pérez Tremps, 2013] Pérez Tremps, P. (2013). Los derechos fundamentales. *El ordenamiento constitucional. Derechos y deberes de los ciudadanos. Tirant lo Blanc, Valencia, p.128*.
- [Rojas, 2014] Rojas, M. (2014). Suecia y la reforma de la educación. *La Ilustración liberal: revista española y americana*.
- [Silió, 2019] Silió, E. (2019). Boicots, escuelas fantasma y errores informáticos: las anomalías que encontró pisa en otros países.
- [Simón Yarza, 2017] Simón Yarza, F. (2017). Lineamientos de derechos fundamentales. *Inédito*.
- [Stock and Watson, 2012] Stock, J. H. and Watson, M. M. (2012). *Introducción a la Econometría*.
- [Tribunal Supremo, 1981a] Tribunal Supremo (1981a). Sentencia del tribunal constitucional 31/2018, de 10 de abril.
- [Tribunal Supremo, 1981b] Tribunal Supremo (1981b). Sentencia del tribunal constitucional 5/1981, de 13 de febrero.
- [Tribunal Supremo, 1981c] Tribunal Supremo (1981c). Sentencia del tribunal constitucional 77/1985, de 27 de junio.
- [Tribunal Supremo, 1985] Tribunal Supremo (1985). Sentencia del tribunal constitucional 86/1985, de 10 de julio.
- [Yao, 2016] Yao, F. (2016). Los factores que influyen en la calidad de la educación. *Itinerario Educativo, 67*.
- [Zumaquero, 1984] Zumaquero, J. (1984). Los derechos educativos en la constitución española de 1978. *Ediciones Universidad de Navarra, Pamplona, p. 249-250*.