Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo Fin de Grado

Grado en Economía

Reglas de reparto para el problema de bancarrota

Presentado por:

Carlos Furones Hierro

Tutelado por:

Carlos Rodríguez Palmero

Valladolid, 26 de junio de 2025

RESUMEN

Un problema de bancarrota surge cuando un grupo de agentes reclama una cantidad total superior al presupuesto disponible, el cual es un bien perfectamente divisible. Con el fin de resolver esta situación, se describen cinco reglas de reparto, desde un enfoque tanto matemático como gráfico, que son: las cuatro reglas clásicas (la regla proporcional, la regla de igual ganancia, la regla de igual pérdida y la regla del Talmud) y la regla del orden de llegada. La elección de la regla más adecuada se fundamenta en el estudio de nueve propiedades que permiten caracterizar y comparar las reglas clásicas de reparto.

Estas cinco reglas se han implementado en el lenguaje de programación Python para facilitar su aplicación práctica a problemas de bancarrota concretos y obtener soluciones de forma rápida y precisa.

Palabras clave: *problema de bancarrota*, *reglas de reparto*, *propiedades*, *Python*.

ABSTRACT

A bankruptcy problem arises when a group of agents claims a total amount that exceeds the available budget, which is considered a perfectly divisible good. In order to address this situation, five allocation rules are described from both a mathematical and graphical perspective: the four classical rules (proportional rule, constrained equal-awards rule, constrained equal-losses rule, and the Talmud rule) and the random arrival rule. The choice of the most appropriate rule is based on the study of nine properties that allow for the characterization and comparison of the classical allocation rules.

These five rules have been implemented in the Python programming language to facilitate their practical application to specific bankruptcy problems and to obtain solutions quickly and accurately.

Keywords: *bankruptcy problem*, *allocation rules*, *properties*, *Python*.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Un problema de bancarrota surge cuando un grupo de agentes reclama una cantidad total superior al presupuesto disponible, el cual es un bien perfectamente divisible. Esta situación concuerda con la definición de economía propuesta por Robbins (1932), quien la entendió como una ciencia que estudia el comportamiento humano en relación con fines y medios escasos, poniendo énfasis en la escasez, la elección y el uso adecuado de los recursos.

De acuerdo con estas características, la idea de la escasez (es decir, el hecho de tener que elegir renunciando a algo) está estrechamente relacionada con el coste de oportunidad, entendido como el valor de la mejor alternativa a la que se renuncia al tomar una decisión. En esencia, la solución al problema económico de bancarrota se presenta como un ejercicio de optimización con restricciones, en el que se busca obtener el mejor resultado posible dentro de un conjunto limitado de opciones.

Esta formulación abarca tanto problemas de decisión individual (por ejemplo, la distribución del tiempo entre las distintas actividades del día) como problemas de decisión social, que son más complejos (determinar cuánto dinero destinar a la educación es un ejemplo de ello). En estos casos, el tipo de bien que se busca repartir resulta determinante, ya que, si no puede dividirse en partes tan pequeñas como se desee (sea el caso de un automóvil), no se trataría de un problema de bancarrota.

El objetivo de este trabajo es definir formalmente el concepto del problema de bancarrota y describir cinco reglas de reparto que permiten resolverlo: la regla proporcional, la regla de igual ganancia, la regla de igual pérdida, la regla del Talmud (o del bien disputado) y la regla del orden de llegada.

Para ello, en el primer apartado se explica el concepto de problema de bancarrota y se define matemática y gráficamente. En el segundo apartado, se describen las cinco reglas de reparto, acompañadas de un ejemplo práctico que complementa cada explicación. En el tercer apartado, se desarrollan las representaciones gráficas de estas reglas a partir de los datos del ejemplo. En el cuarto apartado, se plantea un símil con la escasez hídrica como enfoque alternativo para resolver problemas de bancarrota mediante las cuatro reglas clásicas. En el quinto apartado, se analizan algunas propiedades de las cuatro reglas clásicas, con el fin de caracterizarlas. En el sexto apartado, se presentan los programas implementados en Python para resolver un problema de bancarrota mediante cualquiera de las cinco reglas. En el séptimo apartado, se aplican estas reglas a un caso real de bancarrota, como podría ser el generado tras una reordenación presupuestaria realizada por el Gobierno de España con el objetivo de aumentar la financiación del Ministerio de Defensa. Finalmente, se exponen las conclusiones del trabajo y las referencias bibliográficas.

1. PROBLEMA DE BANCARROTA

Un problema de bancarrota surge cuando un conjunto de agentes realizan reclamaciones sobre un bien perfectamente divisible[1] (*Estate*), del que se tiene una cantidad inferior al total de las demandas realizadas (*Claims*).

Esta situación ya aparece representada en la Biblia con el juicio de Salomón (véase Brams (1980)), donde el rey, para descubrir a la verdadera madre entre dos mujeres que reclamaban al mismo niño, sugirió dividirlo en dos. Así mismo, en el Talmud[2] se recogen discusiones y explicaciones a la regla de reparto que presenta la Mishná, cuyas situaciones de bancarrota han sido objeto de investigación (véanse Aumann y Maschler (1985)). En este sentido, la distribución que plantea la Mishná resulta poco intuitiva; véase mediante un problema planteado en el Talmud, en el tratado de Ketubot 93a: *La Mishná describe la situación en la que un hombre fallece dejando deudas con tres acreedores. Sus reclamaciones son, respectivamente,* 100*,* 200 *y* 300 *unidades monetarias, y se consideran tres casos distintos del total del patrimonio a dividir, que son, respectivamente,* 100*,* 200 *y* 300 *unidades monetarias*. Según la Mishná, la división ha de hacerse de la forma que aparece en la siguiente tabla:

		Claims		
		100	**200**	**300**
Estate	**100**	33,33	33,33	33,33
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Tabla 1.1: Solución de la Mishná a un problema de bancarrota descrito en el Talmud.

Como se puede apreciar en la Tabla 1.1, cuando la cantidad total del patrimonio a repartir es de 100 unidades monetarias, cada uno de los acreedores se lleva $1/3$ del mismo. Cuando se consideran 200 unidades monetarias, el acreedor que reclama 100 unidades monetarias se lleva 50 y los otros dos, 75 cada uno. Para el caso en el que se repartan 300 unidades monetarias, a cada acreedor le corresponde 50, 100 y 150 unidades monetarias, respectivamente.

En la actualidad, se pueden encontrar múltiples problemas de bancarrota, como los que se detallan a continuación:

[1]Algunos ejemplos de bienes perfectamente divisibles son el dinero, la tierra, el agua y el tiempo, ya que pueden fraccionarse en partes arbitrariamente pequeñas.

[2]Un antiguo documento que constituye la base del derecho civil, penal y religioso judíos, según lo descrito en la Mishná, el texto fundamental en el que se basan las discusiones contenidas en el Talmud.

- Empresa en quiebra. La empresa no puede hacer frente a los pagos que adeuda, por lo que se inicia el procedimiento legal de concurso de acreedores, con el fin de que estos satisfagan sus créditos, dentro de lo posible. El problema surge, claro está, porque la cantidad total demandada por los acreedores excede a la ofrecida por dicha empresa.

- Reparto presupuestario. Cuando un gobierno recauda menos impuestos, dada una situación de recesión económica, por ejemplo, el presupuesto del Estado disminuye, pero las necesidades de los diferentes sectores (salud, educación, infraestructura, etc.) siguen siendo las mismas o incluso aumentan (por ejemplo, más gente puede necesitar ayuda social). De esta manera, se debe decidir quién recibe más y quién menos, pues el dinero disponible no es suficiente para atender todas las necesidades. Por tanto, se lleva a cabo un reparto de pérdidas, ya que cada organismo recibe menos de lo que pide.

- Herencias. Se dan luego del fallecimiento de una persona, momento en el que se procede a su reparto entre los herederos legítimos o designados. Hablamos de un conjunto de bienes que, en ocasiones, puede ser inferior a la reclamación conjunta de los beneficiarios.

- Reparto del agua. Está regulado por las Confederaciones Hidrográficas, que toman las correspondientes decisiones de reparto en base a las necesidades para sus diversos usos (urbanos, industriales, agrícolas, etc.), pues pueden ser superiores a la cantidad total de agua disponible.

Con estos ejemplos se ponen de manifiesto que los problemas de bancarrota son recurrentes en diferentes escenarios de la vida real y, en consecuencia, las reclamaciones de los agentes pueden tener distinta naturaleza (activos, recursos financieros, bienes y derechos, y agua, en el caso de dichos ejemplos). De esta forma, la solución a un problema de bancarrota debe ser una distribución razonable del bien a repartir entre los agentes, en función de sus demandas, para cada caso concreto. Así, el análisis económico moderno ha estudiado diversas soluciones a este problema desde dos enfoques: el proporcionado por la teoría de juegos cooperativos y el axiomático. Este último enfoque es el que se desarrolla en este trabajo, a partir del análisis de cinco reglas de reparto para el problema de bancarrota.

1.1. Planteamiento y notación

Sea $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ un conjunto de agentes (*Society*). Cada agente $i \in M$ realiza una reclamación (*Claim*) $c_i > 0$ sobre un presupuesto disponible (*Estate*) $E > 0$, de manera que $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in (0, \infty)^m$ es el vector de reclamaciones y $C = \sum_{i \in M} c_i$ es la reclamación agregada. Entonces, un problema de bancarrota surge cuando $C > E$, es decir, cuando hay un déficit dado por $C - E > 0$. Así pues, formalmente, el problema de bancarrota a resolver se representa mediante el par $(E, \boldsymbol{c})$.

La solución al problema de bancarrota trata de satisfacer, al menos parcialmente, la reclamación del agente $i \in M$, de tal forma que se le asigne una cantidad x_i^*, que es parte del presupuesto $E > 0$ (insuficiente para atender a todas las demandas). Para ello, es necesario encontrar un criterio de reparto con el que ningún agente reciba más de lo que solicita y que permita repartir toda la cantidad disponible, es decir, que sea eficiente (Espinel (2007)). De verificarse estas dos condiciones, la solución del problema de bancarrota es una regla de reparto.

Formalmente, una regla de reparto F asocia a cada problema de reparto $(E, \boldsymbol{c})$ una única asignación

$$F(E, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in \mathbb{R}_+^m,$$

tal que $0 \leq x_i^* \leq c_i$ y $\sum_{i \in M} x_i^* = E$. La primera restricción garantiza que ningún agente recibirá más de lo que reclama, mientras que la segunda asegura que la suma de las asignaciones de todos los agentes será igual al presupuesto total disponible.

Gráficamente, un problema de bancarrota se compone de dos elementos: un conjunto factible en el primer ortante del espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, tal que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i \in M} x_i = E\}$, y un punto $\boldsymbol{c} \in (0, \infty)^m$, que no pertenece al conjunto factible. En la Figura 1.1 se ilustra esta idea para el caso de dos agentes.

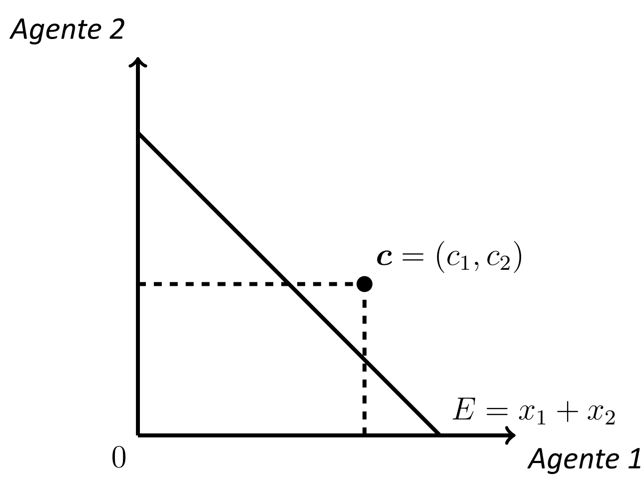

Figura 1.1: Representación gráfica de un problema de bancarrota con dos agentes.

La ecuación $E = x_1 + x_2$ representa todas las posibles asignaciones del presupuesto total $E > 0$ entre los dos agentes. Los puntos por debajo de la línea corresponden a asignaciones en las que no se distribuye todo el presupuesto, por lo que son ineficientes. Los puntos sobre la línea representan asignaciones en las que el presupuesto se reparte exactamente entre los dos agentes, por lo que son factibles. Los puntos por encima de la línea implican asignaciones imposibles, como el vector $\boldsymbol{c}$ de reclamaciones de los agentes, ya que su suma excede el presupuesto.

2. REGLAS DE REPARTO

En este apartado se describen cinco reglas de reparto para dar solución a un problema de bancarrota, que son: la regla proporcional, la regla de igual ganancia, la regla de igual pérdida, la regla del Talmud y la regla del orden de llegada. Las cuatro primeras constituyen las soluciones clásicas a este problema. Para ello, se hace uso de un ejemplo práctico común a todos los casos.

Ejemplo. Un gobierno ha decidido expropiar terrenos para la construcción de una nueva autopista. Para compensar a los propietarios afectados, ha destinado un total de 100 hectáreas ($E = 100$). No obstante, la cantidad total reclamada por los propietarios supera esta cifra (véase en la lista adjunta):

- "Unión de Agricultores" S. A.: 50 hectáreas ($c_1 = 50$).
- Cooperativa "Los Campesinos": 20 hectáreas ($c_2 = 20$).
- Fundación "Tierra y Futuro": 60 hectáreas ($c_3 = 60$).
- "Familia Huerta": 90 hectáreas ($c_4 = 90$).

2.1. Regla proporcional

La regla proporcional P, atribuida a Aristóteles (Villar (2005)), es probablemente la forma más común de resolver un problema de bancarrota. Esta regla distribuye el presupuesto de forma proporcional a las reclamaciones:

$$P(E, \boldsymbol{c}) = \lambda \cdot \boldsymbol{c}, \quad \text{donde } \lambda = \frac{E}{C} \leq 1.$$

Con los datos del Ejemplo. Dado que $\lambda = \frac{100}{50+20+60+90} = \frac{5}{11} \approx 0{,}4545$, el presupuesto cubre aproximadamente el $45\,\%$ del total de hectáreas reclamadas ($C = 220$). Aplicando la regla proporcional, se tiene que:

$$P(100, (50, 20, 60, 90)) = \frac{5}{11} \cdot (50, 20, 60, 90) \approx (22{,}73,\ 9{,}09,\ 27{,}27,\ 40{,}91),$$

es decir, la cantidad de hectáreas que recibe aproximadamente cada propietario es:

- "Unión de Agricultores" S. A., $x_1^* \approx 22{,}73$ hectáreas.
- Cooperativa "Los Campesinos", $x_2^* \approx 9{,}09$ hectáreas.
- Fundación "Tierra y Futuro", $x_3^* \approx 27{,}27$ hectáreas.
- "Familia Huerta", $x_4^* \approx 40{,}91$ hectáreas.

2.2. Regla de igual ganancia

La regla de igual ganancia IG distribuye el presupuesto equitativamente entre todos los agentes, con la restricción de que ningún agente reciba una cantidad superior a la que demanda:

$$IG_i(E, \boldsymbol{c}) = \min\{\lambda, c_i\},$$

donde λ es solución del problema $\sum_{i \in M} \min\{\lambda, c_i\} = E$.
Con los datos del Ejemplo. Como λ es solución de $\sum_{i \in M} \min\{\lambda, c_i\} = 100$, cada agente recibiría 35 hectáreas. Sin embargo, la Cooperativa "Los Campesinos" obtendría una cantidad superior a su reclamación de 20 hectáreas, por lo que se le otorga únicamente la totalidad de su petición, repartiéndose el resto de las hectáreas entre los agentes restantes. De este modo, $\lambda = \frac{100-20}{3} = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$ y cada propietario recibe:

- "Unión de Agricultores" S. A., $x_1^* = IG_1(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{80}{3}, 50\} = \frac{80}{3}$ hectáreas.
- Cooperativa "Los Campesinos", $x_2^* = IG_2(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{80}{3}, 20\} = 20$ hectáreas.
- Fundación "Tierra y Futuro", $x_3^* = IG_3(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{80}{3}, 60\} = \frac{80}{3}$ hectáreas.
- "Familia Huerta", $x_4^* = IG_4(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{80}{3}, 90\} = \frac{80}{3}$ hectáreas.

2.3. Regla de igual pérdida

La regla de igual pérdida IP distribuye el déficit de manera equitativa entre los agentes, bajo la condición de que ningún agente obtenga una asignación negativa:

$$IP_i(E, \boldsymbol{c}) = \max\{0, c_i - \mu\},$$

donde μ es solución del problema $\sum_{i \in M} \max\{0, c_i - \mu\} = E$.
Con los datos del Ejemplo. Ya que μ es solución de $\sum_{i \in M} \max\{0, c_i - \mu\} = 100$, cada agente perdería $\frac{220-100}{4} = 30$ hectáreas. No obstante, la Cooperativa "Los Campesinos" recibiría una cantidad negativa, de manera que no obtiene asignación alguna. Así, la reclamación total disminuye en 20 hectáreas y el nuevo déficit se reparte entre los demás agentes. Así pues, $\mu = \frac{220-20-100}{3} = \frac{100}{3} \approx 33{,}33$ y a cada propietario se le asigna:

- "Unión de Agricultores" S. A., $x_1^* = IP_1(100, (50, 20, 60, 90)) = \max\{0, 50 - \frac{100}{3}\} = \frac{50}{3} \approx 16{,}67$ hectáreas.
- Cooperativa "Los Campesinos", $x_2^* = IP_2(100, (50, 20, 60, 90)) = \max\{0, 20 - \frac{100}{3}\} = 0$ hectáreas.
- Fundación "Tierra y Futuro", $x_3^* = IP_3(100, (50, 20, 60, 90)) = \max\{0, 60 - \frac{100}{3}\} = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$ hectáreas.
- "Familia Huerta", $x_4^* = IP_4(100, (50, 20, 60, 90)) = \max\{0, 90 - \frac{100}{3}\} = \frac{170}{3} \approx 56{,}67$ hectáreas.

2.4. Regla del Talmud

La regla del Talmud (o del bien disputado) T establece que ningún agente puede recibir más de la mitad de su reclamación si el presupuesto disponible es menor a la mitad de la reclamación total; asimismo, ningún agente puede perder más de la mitad de su reclamación cuando el presupuesto disponible supera dicha cantidad:

$$T_i(E, \boldsymbol{c}) = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{c_i}{2}, \lambda\right\} & \text{si } E \leq \dfrac{C}{2}, \\ \\ \max\left\{\dfrac{c_i}{2}, c_i - \mu\right\} & \text{si } E \geq \dfrac{C}{2}, \end{cases}$$

donde λ y μ son soluciones de los problemas $\sum_{i \in M} \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\} = E$ y $\sum_{i \in M} \max\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\} = E$, respectivamente.

De este modo, T reparte igualando ganancias cuando $E \leq \frac{C}{2}$ e igualando pérdidas cuando $E \geq \frac{C}{2}$. Esta idea se sustenta en que, psicológicamente, los agentes tienden a enfocarse en sus expectativas de ganancia cuando el presupuesto disponible es pequeño ($E \leq \frac{C}{2}$) y en sus pérdidas cuando es grande ($E \geq \frac{C}{2}$) (Espinel (2007)).

Esta definición de Aumann y Maschler (1985) permitió explicar las asignaciones aparentemente paradójicas estipuladas en el Talmud (véase la Tabla 1.1). En su estudio, estos autores demostraron que la regla del Talmud es una combinación de las tres reglas clásicas de reparto restantes: la regla proporcional, la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida. Así, la solución dada por la regla del Talmud coincide con:

- La regla proporcional cuando $E = \frac{C}{2}$.

  En esta situación, es indiferente que T reparta igualando ganancias o pérdidas, porque en ambos casos cada agente recibe la mitad de su reclamación:

  - Cuando T reparte igualando ganancias, el objetivo es que todos los agentes ganen lo mismo, sin que ninguno obtenga más de la mitad de su reclamación. En este sentido, se observa que $\sum_{i\in M} \frac{c_i}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i\in M} c_i = \frac{C}{2} = E$, es decir, E alcanza para que cada agente gane exactamente la mitad de su reclamación.
  - Cuando T reparte igualando pérdidas, el objetivo es que todos los agentes pierdan lo mismo, sin que ninguno obtenga menos de la mitad de su reclamación. Por lo tanto, el déficit total a repartir es $C - E = C - \frac{C}{2} = \frac{C}{2} = \sum_{i\in M} \frac{c_i}{2}$, por lo que cada agente pierde $\frac{c_i}{2}$ y la cantidad final que recibe cada uno es $x_i^* = c_i - \frac{c_i}{2} = \frac{c_i}{2}$.

  Esta solución coincide con la obtenida mediante P: $\lambda = \frac{E}{C} = \frac{C/2}{C} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_i^* = \frac{1}{2} \cdot c_i$.

- La regla de igual ganancia cuando $E < \frac{C}{2}$ y $\frac{E}{m} \leq \frac{\min\{c_i\}}{2}$.

  Si $E < \frac{C}{2}$, entonces T reparte igualando ganancias; si además $\frac{E}{m} \leq \frac{\min\{c_i\}}{2}$, cada agente recibe $\frac{E}{m} = \lambda$, una cantidad que no supera la mitad de ninguna de las reclamaciones y, por tanto, es la misma solución que se obtiene con IG.

- La regla de igual pérdida cuando $E > \frac{C}{2}$ y $\frac{C-E}{m} \leq \frac{\min\{c_i\}}{2}$.

  Si $E > \frac{C}{2}$, entonces T reparte igualando pérdidas; si además $\frac{C-E}{m} \leq \frac{\min\{c_i\}}{2}$, cada agente pierde $\frac{C-E}{m} = \mu$, una cantidad que no supera la mitad de ninguna de las reclamaciones y, por tanto, $x_i^* = c_i - \frac{C-E}{m} > 0$ es la solución, que coincide con la de IP.

Con los datos del Ejemplo. El presupuesto disponible es inferior a la mitad de la reclamación total, ya que $100 < \frac{220}{2} = 110$, pero $\frac{100}{4} = 25 > \frac{20}{2} = 10$ (siendo 20 hectáreas la reclamación más baja). Por lo tanto, hay que calcular el valor de λ, solución de $\sum_{i\in M} \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\} = 100$. Inicialmente, cada agente recibiría 25 hectáreas, pero la Cooperativa "Los Campesinos" obtendría más de la mitad de su reclamación, por lo que solo se le asigna la mitad de su reclamación y el excedente se redistribuye entre los demás agentes. En este nuevo reparto, cada agente recibiría 30 hectáreas, pero esta cantidad seguiría superando la mitad de la reclamación de la "Unión de Agricultores" S. A., por lo que se le asigna únicamente la mitad de su reclamación y el remanente se reparte entre los dos agentes restantes.

Tras este ajuste, cada agente recibiría $32{,}5$ hectáreas, pero esto superaría la mitad de la reclamación de la Fundación "Tierra y Futuro", por lo que se le asigna solo la mitad de su reclamación y el sobrante se otorga a la "Familia Huerta", que finalmente recibe 35 hectáreas. En consecuencia, $\lambda = 35$ y a cada propietario se le asigna:

- "Unión de Agricultores" S. A., $x_1^* = T_1(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{50}{2}, 35\} = 25$ hectáreas.
- Cooperativa "Los Campesinos", $x_2^* = T_2(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{20}{2}, 35\} = 10$ hectáreas.
- Fundación "Tierra y Futuro", $x_3^* = T_3(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{60}{2}, 35\} = 30$ hectáreas.
- "Familia Huerta", $x_4^* = T_4(100, (50, 20, 60, 90)) = \min\{\frac{90}{2}, 35\} = 35$ hectáreas.

2.5. Regla del orden de llegada

La regla del orden de llegada OL consiste en que los agentes van llegando de uno en uno al centro de pago, donde se distribuye el presupuesto, sin un orden predefinido. Dado que todos los órdenes de llegada de los agentes son igualmente válidos y cada agente ocupa una posición al momento de recibir su parte del presupuesto, el número de posibles ordenaciones corresponde al cálculo de las permutaciones. Es decir, existen $m!$ órdenes de llegada posibles.

De este modo, el primer agente en llegar recibe la cantidad mínima entre su reclamación y el total del presupuesto disponible, y lo mismo ocurre con cada uno de los agentes siguientes, con la diferencia de que el presupuesto disponible se va reduciendo a medida que se realizan los pagos, hasta que se agote.

Para evitar que los agentes que llegan primero al centro resulten beneficiados sobre los demás, esta regla asigna a cada agente el promedio de lo que recibiría en todas las posibles ordenaciones.

En términos formales, esta regla puede expresarse como

$$OL_i(E, \boldsymbol{c}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m!} x_{ik}}{m!},$$

siendo x_{ik} la asignación del agente i en función del orden de llegada, para cada una de las $m!$ permutaciones.

Con los datos del Ejemplo. Como los cuatro agentes pueden llegar al centro de pago en un orden no definido, es necesario considerar todas las posibles secuencias de llegada. Para ello, basta con calcular las permutaciones del grupo de los cuatro agentes, lo que da un total de $4! = 24$ posibles órdenes de llegada. Una vez considerados todos estos escenarios, en cada uno de ellos el presupuesto se distribuye según el orden de llegada de los agentes. Finalmente, se calcula para cada agente la media de todas las asignaciones que recibe en cada uno de los distintos escenarios. Una parte de este proceso se ilustra en la Tabla 2.1:

	1 2 3 4	1 2 4 3	1 3 2 4	1 3 4 2	1 4 2 3	1 4 3 2	2 1 3 4	2 1 4 3	2 3 1 4	2 3 4 1	2 4 1 3	2 4 3 1	3 1 2 4	3 1 4 2	3 2 1 4	3 2 4 1	3 4 1 2	3 4 2 1	4 1 2 3	4 1 3 2	4 2 1 3	4 2 3 1	4 3 1 2	4 3 2 1	**Total**
x_1	50	50	50	50	50	50	50	50	20	0	0	0	40	40	20	0	0	0	10	10	0	0	0	0	540
x_2	20	20	0	0	0	0	20	20	20	20	20	20	0	0	20	20	0	0	0	0	10	10	0	0	220
x_3	30	0	50	50	0	0	30	0	60	60	0	0	60	60	60	60	60	60	0	0	0	0	10	10	660
x_4	0	30	0	0	50	50	0	30	0	20	80	80	0	0	0	20	40	40	90	90	90	90	90	90	980

Tabla 2.1: Asignaciones acumuladas por agente en todos los escenarios de orden de llegada con los datos del Ejemplo.

Entonces, cada propietario recibe:

- "Unión de Agricultores" S. A., $x_1^* = OL_1(100, (50, 20, 60, 90)) = \frac{540}{24} = 22{,}5$ hectáreas.
- Cooperativa "Los Campesinos", $x_2^* = OL_2(100, (50, 20, 60, 90)) = \frac{220}{24} = \frac{55}{6} \approx 9{,}17$ hectáreas.
- Fundación "Tierra y Futuro", $x_3^* = OL_3(100, (50, 20, 60, 90)) = \frac{660}{24} = 27{,}5$ hectáreas.
- "Familia Huerta", $x_4^* = OL_4(100, (50, 20, 60, 90)) = \frac{980}{24} = \frac{245}{6} \approx 40{,}83$ hectáreas.

Finalmente, en la Tabla 2.2 se recogen las asignaciones (en hectáreas) obtenidas por cada uno de los cuatro propietarios tras aplicar las cinco reglas de reparto a la situación descrita en el Ejemplo, donde

$$E = 100 < 220 = C, \quad c_1 = 50, \quad c_2 = 20, \quad c_3 = 60 \quad \text{y} \quad c_4 = 90:$$

	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{IG}$	$\boldsymbol{IP}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{OL}$
x_1^*	22,73	26,67	16,67	25	22,5
x_2^*	9,09	20	0	10	9,17
x_3^*	27,27	26,67	26,67	30	27,5
x_4^*	40,91	26,67	56,67	35	40,83

Tabla 2.2: Soluciones para el Ejemplo mediante cinco reglas de reparto diferentes.

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS REGLAS DE REPARTO

En este apartado se representan gráficamente las cinco reglas de reparto, con el objetivo de completar su estudio más allá de la perspectiva matemática. Para ello, se recurre al Ejemplo, a partir del cual se obtienen las distintas representaciones gráficas correspondientes a cada regla.

Una manera gráfica de describir los repartos que proponen las diferentes reglas, ante un problema de bancarrota, es haciendo variar el presupuesto desde 0 hasta el valor de la reclamación agregada C, dado un vector de reclamaciones fijo $\boldsymbol{c}$. Para lograr una representación más óptima, esta relación se traduce al porcentaje de las reclamaciones obtenidas por cada agente (eje de ordenadas), respecto al porcentaje de la reclamación agregada disponible para repartir (eje de abscisas).

Así, el caso de la regla proporcional resulta trivial, pues ambos porcentajes coinciden.[3] Ahora bien, esto no tiene porqué suceder con el resto de reglas.

De esta manera, tomando como base los datos del Ejemplo, se van a mostrar los distintos gráficos correspondientes al comportamiento de las soluciones obtenidas mediante las reglas de reparto, con el vector de reclamaciones dado $\boldsymbol{c} = (50, 20, 60, 90)$ y la cantidad variable de hectáreas a repartir $E \in [0, 220]$. En esencia, esto es comparar respecto al reparto propuesto por la regla proporcional.[4]

[3] El eje de abscisas representa $\frac{E}{C}$, con $E \in [0, C]$, y el de ordenadas $\frac{x_i}{c_i}$. Según P, $\lambda = \frac{E}{C}$, de tal forma que $x_i = \lambda \cdot c_i$. Entonces, $\frac{x_i}{c_i} = \frac{\lambda \cdot c_i}{c_i} = \frac{E}{C}$. Se observa que para cualquier agente i, el punto $(\frac{E}{C}, \frac{x_i}{c_i})$ siempre satisface la ecuación de la bisectriz; es decir, P siempre asigna a cada agente el mismo porcentaje del presupuesto disponible en relación con su reclamación.

[4] Aunque estas representaciones obedecen a un vector de reclamaciones concreto, las relaciones gráficas obtenidas son similares para otros vectores.

3.1. Comportamiento gráfico de la regla de igual ganancia

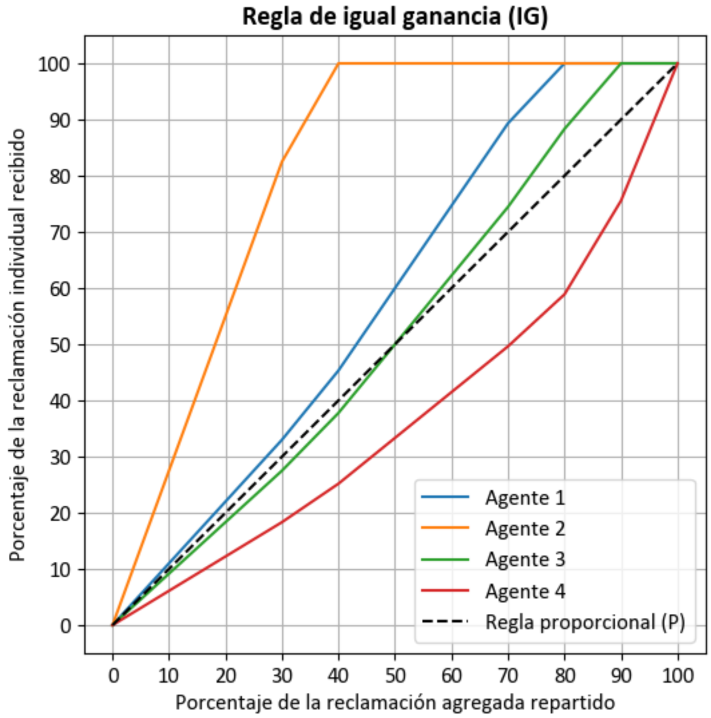

Figura 3.1: Comportamiento gráfico de la solución de la regla de igual ganancia con los datos del Ejemplo.

En la Figura 3.1 se muestra la relación existente entre el porcentaje del presupuesto disponible para repartir y los porcentajes de las reclamaciones individuales recibidos por cada uno de los cuatro agentes, cuando se considera la regla de igual ganancia (IG).

Como se puede observar, esta regla favorece a las reclamaciones más bajas, ya que c_1 y c_2 están siempre por encima de la bisectriz, de tal forma que los agentes 1 y 2, cuyas demandas son menores, perciben mayores cantidades de hectáreas de las que recibirían si se aplicara la regla proporcional; en cuanto al agente 3, estaría en una situación similar a partir del momento en el que el presupuesto a repartir supone el $50\,\%$ de la reclamación agregada, pues su reclamación es mayor a la de los otros dos. Entonces, con la regla de igual ganancia, se puede concluir que cuanto más pequeñas sean las reclamaciones, más fácil será que se satisfagan íntegramente. Véase, por ejemplo, que el agente 2 recibiría el total de su demanda cuando se reparte solo el $40\,\%$ del total de la reclamación agregada, mientras que el 1 y el 3 lo harían al alcanzar el $80\,\%$ y $90\,\%$, respectivamente.

Por su parte, los agentes que demandan grandes cantidades resultan perjudicados por esta regla, como es el caso del agente 4, que nunca recibe el total de su reclamación, al estar siempre c_4 por debajo de la bisectriz.

3.2. Comportamiento gráfico de la regla de igual pérdida

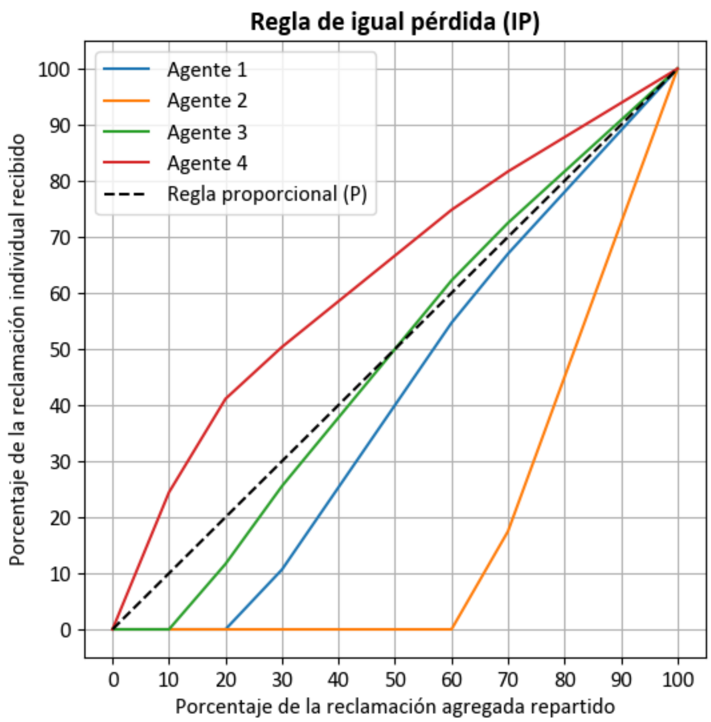

Figura 3.2: Comportamiento gráfico de la solución de la regla de igual pérdida con los datos del Ejemplo.

En la Figura 3.2 se muestra la relación existente entre el porcentaje del presupuesto disponible para repartir y los porcentajes de las reclamaciones individuales recibidos por cada uno de los cuatro agentes, cuando se considera la regla de igual pérdida (IP).

Su comportamiento es dual al de la regla de igual ganancia, de manera que esta regla beneficia a las reclamaciones más grandes. Como resultado, cuanto más pequeñas sean las reclamaciones, más probable será que estos agentes no reciban nada. En este caso, el agente 4, que es el que reclama una cantidad de hectáreas mayor, obtiene mayores asignaciones que si se aplicara la regla proporcional, pues c_4 siempre está sobre la bisectriz. En lo que respecta al resto de agentes, el más perjudicado resulta ser el 2, cuya reclamación es la más pequeña, dado que no empezaría a percibir asignación alguna hasta que se reparte el $60\,\%$ del total de la reclamación agregada (mientras que para el 1 y el 3 sería en el $10\,\%$

y $20\,\%$, respectivamente). Se observa que el agente 3, al igual que en el caso de la regla de igual ganancia, comenzaría a recibir asignaciones mayores a las obtenidas mediante la regla proporcional cuando el presupuesto disponible suponga el $50\,\%$ de la reclamación total.

3.3. Comportamiento gráfico de la regla del Talmud

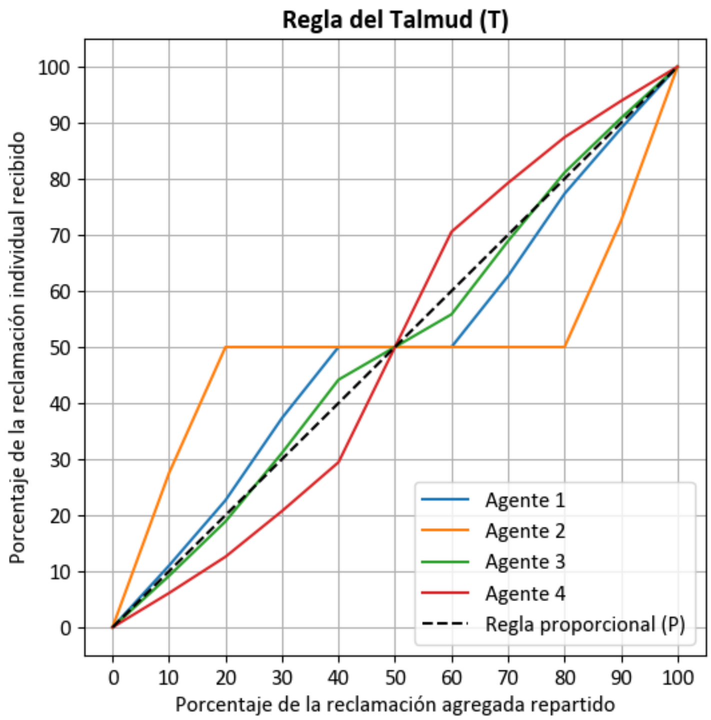

Figura 3.3: Comportamiento gráfico de la solución de la regla del Talmud con los datos del Ejemplo.

En la Figura 3.3 se muestra la relación existente entre el porcentaje del presupuesto disponible para repartir y los porcentajes de las reclamaciones individuales recibidos por cada uno de los cuatro agentes, cuando se considera la regla del Talmud (T).

Esta regla es una combinación de la regla de igual ganancia y de la regla de igual pérdida, por lo que el comportamiento de sus soluciones es antisimétrico respecto a la vertical que supone la parte media de la gráfica, es decir, cuando el porcentaje del presupuesto a repartir es del $50\,\%$. De esta forma, cuando el presupuesto supone un porcentaje menor del $50\,\%$ sobre la reclamación total, las reclamaciones menores resultan ser las beneficiadas, con la restricción de que ningún agente obtenga más del $50\,\%$ de su demanda. Por el contrario, cuando el presupuesto es mayor al $50\,\%$ del total a repartir, las demandas más grandes son las favorecidas, con la restricción de que ningún agente pierda más del $50\,\%$ de su reclamación.

3.4. Comportamiento gráfico de la regla del orden de llegada

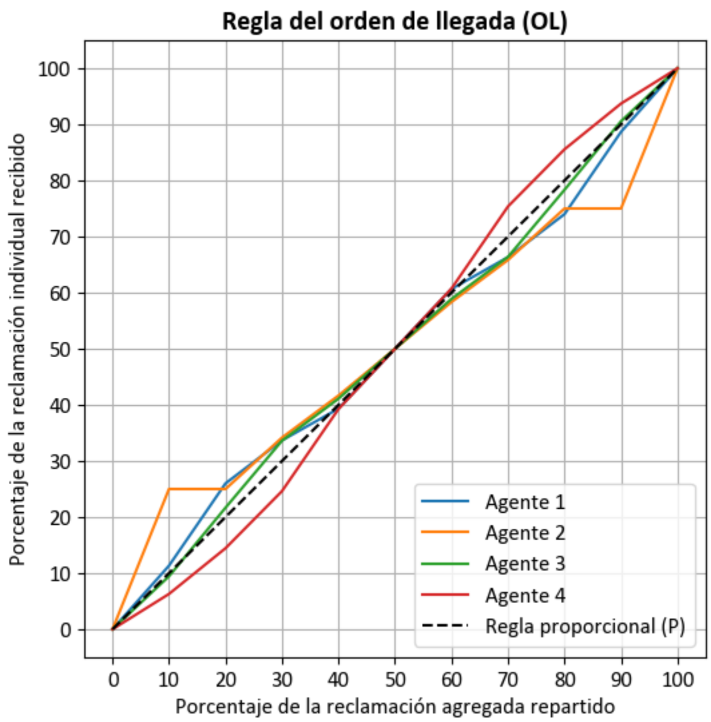

Figura 3.4: Comportamiento gráfico de la solución de la regla del orden de llegada con los datos del Ejemplo.

En la Figura 3.4 se muestra la relación existente entre el porcentaje del presupuesto disponible para repartir y los porcentajes de las reclamaciones individuales recibidos por cada uno de los cuatro agentes, cuando se considera la regla del orden de llegada (OL).

La regla del orden de llegada beneficia a los agentes con demandas más bajas cuando el total de hectáreas reclamadas es inferior al 50 % de la reclamación agregada, ya que c_1, c_2 y c_3 están generalmente por encima de la bisectriz (a diferencia de c_4, la mayor reclamación, que siempre se encuentra por debajo). No obstante, existen dos casos atípicos: cuando se reparte el 10 % del total de las reclamaciones, el agente 3 obtiene una cantidad de hectáreas menor a la que obtendría con la regla proporcional; mientras que, cuando se distribuye el 40 %, es el agente 1 quien resulta perjudicado.

A partir de este 50 %, el comportamiento de la regla se invierte, favoreciendo a los agentes con demandas más altas (en este caso, al agente 4),con dos nuevos casos atípicos: cuando se reparte el 60 % de la demanda total, el agente 1 recibe una asignación mayor que la que correspondería según la regla proporcional; en cambio, cuando se distribuye el 90 %, el beneficiado es el agente 3.

Se observa, entonces, que las reclamaciones extremas no presentan casos atípicos.

Por último, las Figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 muestran una recopilación de las relaciones previamente analizadas entre el presupuesto disponible y la asignación obtenida, aplicando las reglas de reparto para cada uno de los cuatro agentes de forma individual.

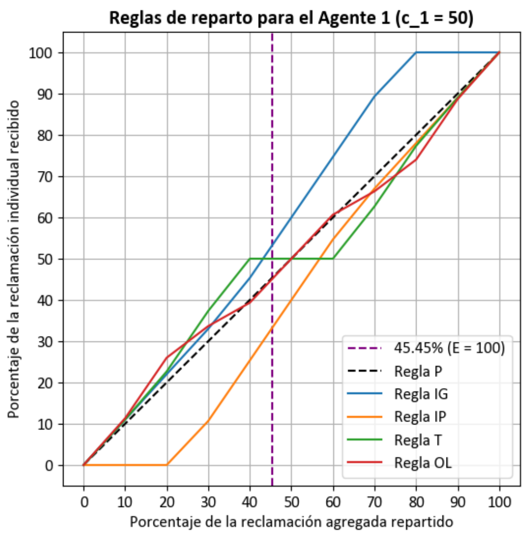

Figura 3.5: Comportamiento gráfico de las soluciones de las reglas de reparto para el primer agente con los datos del Ejemplo.

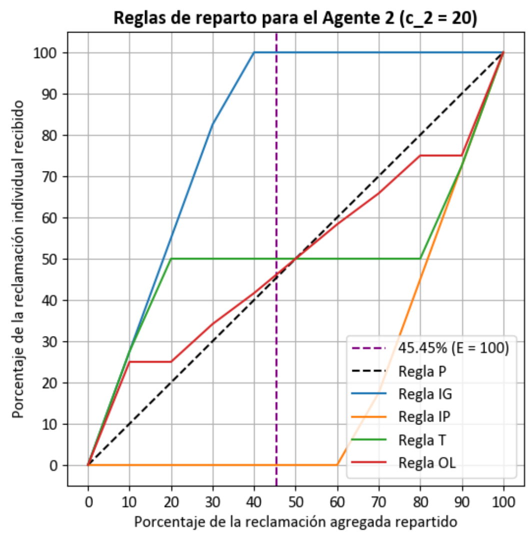

Figura 3.6: Comportamiento gráfico de las soluciones de las reglas de reparto para el segundo agente con los datos del Ejemplo.

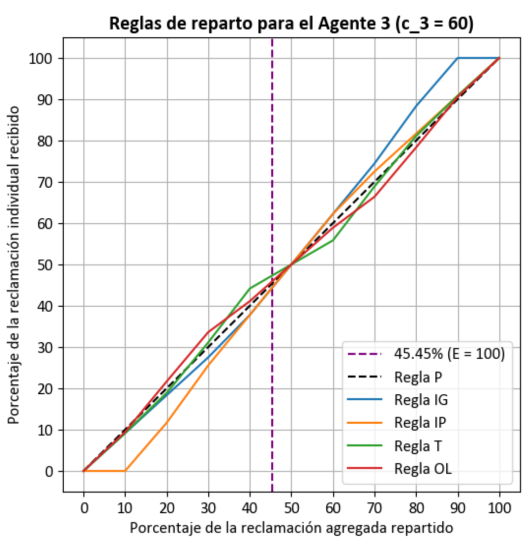

Figura 3.7: Comportamiento gráfico de las soluciones de las reglas de reparto para el tercer agente con los datos del Ejemplo.

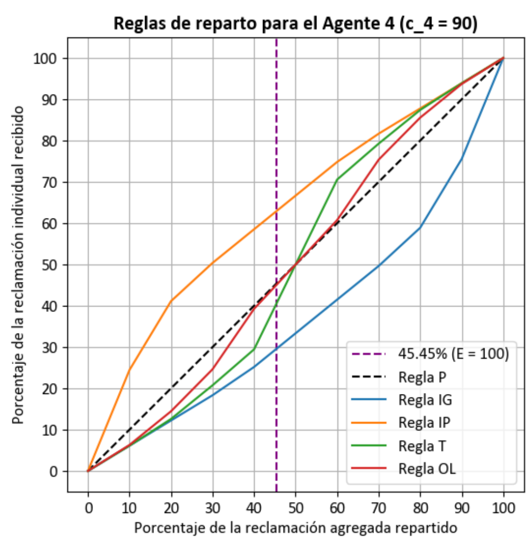

Figura 3.8: Comportamiento gráfico de las soluciones de las reglas de reparto para el cuarto agente con los datos del Ejemplo.

A la vista de estos resultados gráficos, el agente 2, que reclama la menor cantidad, siempre preferirá que el reparto de las hectáreas se realice según la regla de igual ganancia. En contraste, el agente 4, con la reclamación más alta, optará por la regla de igual pérdida. En cuanto a los dos agentes restantes, considerando el total de hectáreas disponibles para repartir ($E = 100$), el agente 1 mostrará preferencia por la regla de igual ganancia, mientras que el agente 3 se inclinará por la regla del Talmud.

4. INTERPRETACIÓN HIDRÁULICA DE LAS REGLAS CLÁSICAS DE REPARTO

En este apartado se presenta un método alternativo para aplicar las reglas clásicas de reparto a un problema de bancarrota, utilizando la escasez hídrica como símil.

Fleiner y Sziklai (2011) se basaron en la idea original de Kaminski (2000) para construir un sistema hidráulico específico con el que demostrar el teorema de Aumann y Maschler (1985).

De esta manera, la reclamación del agente i se representa mediante un recipiente cilíndrico cuya base es circular, con un área de 1 unidades cuadradas, y cuya altura h_i es igual al valor de dicha reclamación.

Fleiner y Sziklai (2011) definieron dos configuraciones principales en los sistemas hidráulicos. Un sistema hidráulico es conectado cuando el líquido se distribuye manteniendo un nivel común en todos los recipientes.[5] En cambio, es desconectado cuando los recipientes reciben líquido de forma independiente, lo que permite que los niveles de líquido sean distintos en cada uno.[6]

El *Estate* se equipara con un volumen total de líquido que se vierte en los recipientes a través de capilares situados en la parte inferior, cuyo volumen es despreciable. Dado que los recipientes están conectados mediante estos capilares, el sistema es hidráulico y conectado. Dependiendo de la regla de reparto que se desee modelar, la forma y la conexión de los recipientes varían, lo que da lugar a distintas distribuciones del líquido y, por tanto, a distintas soluciones del problema.[7]

Con estas premisas, Fleiner y Sziklai (2011) representaron hidráulicamente tres de las cuatro reglas clásicas de reparto: la regla de igual ganancia, la regla de igual pérdida y la regla del Talmud. En las figuras siguientes se ilustran directamente las soluciones correspondientes

[5]Este fenómeno corresponde a un sistema de vasos comunicantes, un conjunto de recipientes interconectados en los que un líquido homogéneo en reposo alcanza el mismo nivel en todos ellos, sin importar la forma o el volumen de los recipientes.

[6]La regla del orden de llegada se representa mediante un sistema hidráulico desconectado, ya que, durante el proceso de distribución inicial, cada recipiente se llena de forma independiente, siguiendo el orden en que los agentes llegan hasta agotar el *Estate*.

[7]Una regla de reparto que puede representarse como un sistema de vasos conectados se denomina hidráulica (Kaminski (2000)).

a los datos del Ejemplo. No obstante, la estructura de los distintos sistemas hidráulicos es la clave para aplicar estas reglas a cualquier otro problema de bancarrota con datos distintos.

4.1. Representación hidráulica de la regla de igual ganancia

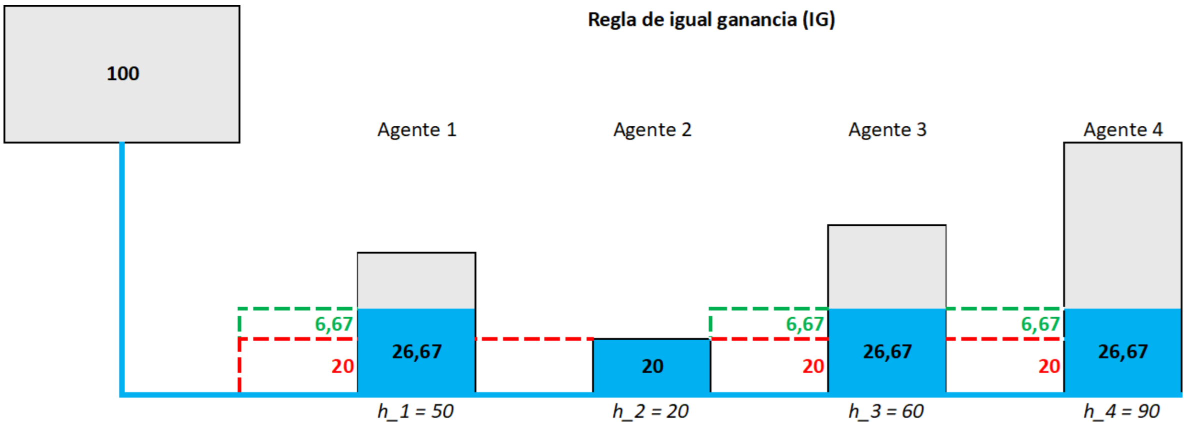

Figura 4.1: Solución hidráulica de la regla de igual ganancia para el Ejemplo.

Como se observa en la Figura 4.1, los cuatro recipientes están situados en la parte inferior. Cuando el líquido sale del tanque, se distribuye equitativamente entre ellos a través de los capilares. Si un recipiente se llena, como ocurre en el caso del agente 2, el exceso de líquido se redistribuye entre los demás. De este modo, el reparto se mantiene equitativo, con la única restricción de que ningún recipiente puede recibir más líquido una vez alcanzada su capacidad máxima.

Es evidente que, cuanto más pequeño sea el recipiente, más rápido se llenará. Por lo tanto, se concluye que esta regla favorece a las reclamaciones más bajas.

4.2. Representación hidráulica de la regla de igual pérdida

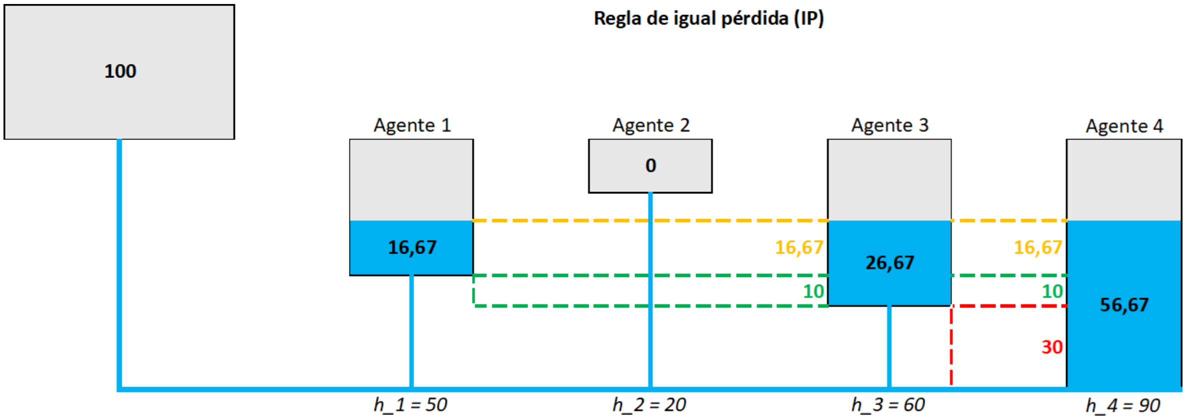

Figura 4.2: Solución hidráulica de la regla de igual pérdida para el Ejemplo.

En la Figura 4.2, solo el recipiente de mayor altura, correspondiente al agente 4, está situado en la parte inferior. Así, cuanto más grande sea el recipiente, más rápido se llenará, lo que pone de manifiesto que esta regla favorece a las reclamaciones más altas. Además, dado que el volumen de los capilares es despreciable, puede ocurrir que algún agente no reciba asignación, como sucede en el caso del agente 2.

4.3. Representación hidráulica de la regla del Talmud

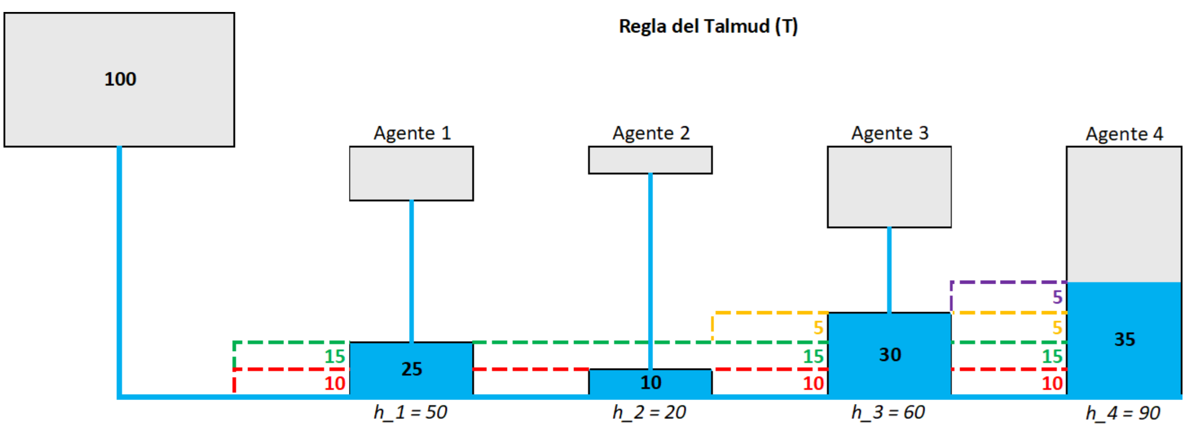

Figura 4.3: Solución hidráulica de la regla del Talmud para el Ejemplo.

La Figura 4.3 muestra tres recipientes con forma de reloj de arena (mitad inferior y superior), cada uno con un capilar en el centro, mientras que el recipiente de mayor altura, correspondiente al agente 4, no sigue esta disposición. En términos generales, esta regla favorece inicialmente a las reclamaciones más bajas. Sin embargo, una vez que el nivel de líquido supera la mitad del recipiente, las reclamaciones más altas resultan beneficiadas, debido a la peculiar estructura de los recipientes.

En cuanto a la regla proporcional, Martínez y Meneses (2011) señalan que, bajo los supuestos previamente mencionados, su representación hidráulica es la que toma como base la solución mostrada en la Figura 4.4. Como se puede apreciar, los recipientes están tumbados en la parte inferior, manteniendo sus dimensiones originales. En consecuencia, se llenan proporcionalmente a su tamaño, es decir, de acuerdo con la reclamación de cada agente.

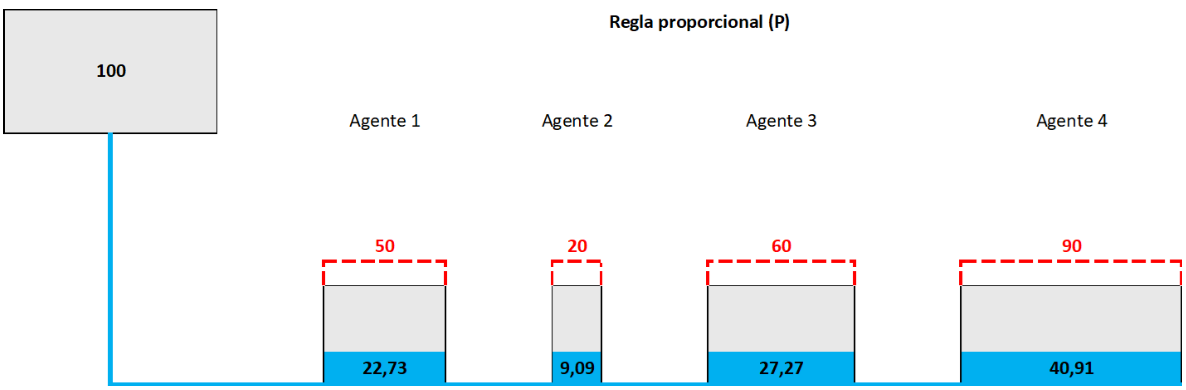

Figura 4.4: Solución hidráulica de la regla proporcional para el Ejemplo.

5. PROPIEDADES DE LAS REGLAS DE REPARTO Y CARACTERIZACIÓN DE LAS REGLAS CLÁSICAS

En este apartado se estudian nueve propiedades de las reglas de reparto que llevarán a los agentes a decantarse por una u otra, dependiendo del problema de bancarrota en cuestión. Estas propiedades permiten caracterizar las cuatro reglas clásicas de reparto, como se verá más adelante.[8]

Siguiendo la clasificación de Villar (2005), estas propiedades se agrupan en tres categorías: cinco son básicas, pues las cumplen las tres soluciones igualitarias: la

[8] Adicionalmente, otra propiedad relevante a considerar es la de **no manipulabilidad**, introducida por O'Neill (1982), según la cual ningún agente puede mejorar su situación al unirse a otros (manipulación por coalición) o al dividir su reclamación en partes más pequeñas (manipulación por escisión).
Según de Frutos (1999), la regla proporcional es la única regla de reparto no manipulable. La regla de igual ganancia no es manipulable por coalición (pero sí por escisión), mientras que la regla de igual pérdida no es manipulable por escisión (pero sí por coalición). Por otro lado, la regla del Talmud no es manipulable por coalición (pero sí por escisión) si y solo si $E \leq \frac{C}{2}$, y no es no manipulable por escisión (pero sí por coalición) si y solo si $E \geq \frac{C}{2}$.

proporcional, la de igual ganancia y la de igual pérdida; una es simétrica, ya que un problema de bancarrota también se puede entender como el reparto de la pérdida $C - E$ en función de las reclamaciones $\boldsymbol{c}$; y tres son de compensación, pues dependen de la relación entre la magnitud de las reclamaciones de los agentes y la cantidad disponible E.

5.1. Tratamiento igualitario (TI): Básica

Esta propiedad se refiere a que si distintos agentes realizan las mismas reclamaciones, obtienen las mismas asignaciones; es decir, si reclaman lo mismo, no se distinguen en términos de asignación. Esto es:

$$c_i = c_j \Rightarrow F_i(E, \boldsymbol{c}) = F_j(E, \boldsymbol{c}).$$

5.2. Independencia de escala (IE): Básica

Esta propiedad garantiza que es equivalente repartir entre agentes con diferentes reclamaciones o multiplicar la cantidad a repartir por una constante, siempre que las reclamaciones también se multipliquen por el mismo valor. Formalmente, esta propiedad se cumple si, para todo $\lambda > 0$,

$$F(\lambda \cdot E, \lambda \cdot \boldsymbol{c}) = \lambda \cdot F(E, \boldsymbol{c}).$$

Por tanto, en base a esta propiedad, se concluye que las asignaciones no dependen de la unidad de medida.

5.3. Composición hacia arriba (CAR): Básica

Se parte de la situación en la que se ha realizado un reparto y se aumenta el presupuesto disponible, de tal manera que $E' > E$. Esta propiedad asegura que dicha situación se puede resolver de dos maneras: cancelando el reparto inicial y realizando un nuevo reparto con E', o distribuyendo el excedente $E' - E$, una vez que se hayan ajustado las reclamaciones de los agentes, restando a cada reclamación inicial su asignación correspondiente, después de repartir E. Formalmente:

$$E < E' \Rightarrow F(E', \boldsymbol{c}) = F(E, \boldsymbol{c}) + F(E' - E, \boldsymbol{c} - F(E, \boldsymbol{c})).$$

Respecto a la regla del orden de llegada, usando los datos del Ejemplo, se demuestra, mediante contraejemplos, que esta regla es manipulable tanto por coalición como por escisión. En particular, el agente 2 puede mejorar su asignación si se une al agente 1 (manipulación por coalición). Asimismo, si el agente 2 divide su demanda en dos partes iguales, la suma de sus nuevas asignaciones resulta mayor que la asignación original (manipulación por escisión).

Así, de un modo u otro, el reparto debe ser el mismo.

5.4. Composición hacia abajo (CAB): Básica

Esta propiedad es homóloga a la anterior, ahora con ajuste a la baja. En este caso, $E' < E$. Al igual que antes, esta situación se puede resolver de dos maneras, que dan lugar a un mismo reparto: anulando el reparto inicial y llevando a cabo un nuevo reparto con E', o manteniendo las asignaciones iniciales como demandas sobre E'. Con la notación ya introducida:

$$E > E' \Rightarrow F(E', \boldsymbol{c}) = F(E', F(E, \boldsymbol{c})).$$

5.5. Consistencia (CO): Básica

Esta propiedad señala que las asignaciones recibidas por una parte de los agentes son las mismas que las que obtendrían en un nuevo reparto para ellos solos, en el que las reclamaciones serían las iniciales y la cantidad a repartir sería la suma de las asignaciones que recibieron en el reparto inicial. Esto es:

$$S \subseteq M \Rightarrow F_i(M, E, \boldsymbol{c}) = F_i\left(S, \sum_{i \in S} F_i(M, E, \boldsymbol{c}), (c_i)_{i \in S}\right),$$

siendo $(M, E, \boldsymbol{c})$ el problema original con m agentes.

Con esto, se evitan discusiones entre los demandantes, pues el resultado final no se altera.

5.6. Autodualidad (AD): De simetría

Un problema de bancarrota también se puede estudiar procediendo al reparto de las pérdidas, $C - E$, entre los agentes que realizan sus respectivas reclamaciones en base a este déficit, resultando las asignaciones finales de restar a la reclamación del agente la asignación que obtiene en el reparto de pérdidas. De esta forma, se cumple que:

$$\boldsymbol{c} - F(C - E, \boldsymbol{c}) = F(E, \boldsymbol{c}).$$

Así, dado un problema de reparto, $(E, \boldsymbol{c})$, y su solución, F, la solución dual F^* del correspondiente problema de reparto del déficit $(C - E, \boldsymbol{c})$ se define como $F^*(E, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} - F(C - E, \boldsymbol{c})$.

En consecuencia, una regla de reparto es autodual si, para cada $(E, \boldsymbol{c})$, se tiene que:

$$F^*(E, \boldsymbol{c}) = F(E, \boldsymbol{c}).$$

5.7. Exención (EXE): De compensación

Esta propiedad establece que las reclamaciones que no superan una cantidad mínima α deben ser íntegramente atendidas, de tal forma que:

$$c_i \leq \alpha \Rightarrow F_i(E, \boldsymbol{c}) = c_i.$$

Según Villar (2005), $\alpha = \frac{E}{m}$ (el umbral del presupuesto per cápita).

El principio ético subyacente en esta propiedad es favorecer a las reclamaciones más pequeñas. Las indemnizaciones por despido, por ejemplo, están exentas de tributar en el IRPF hasta la cuantía establecida como obligatoria en el Estatuto de los Trabajadores (Agencia Estatal de Administración Tributaria (2023)).

5.8. Exclusión (EXC): De compensación

Al contrario que la anterior, esta propiedad alude a que las reclamaciones que no superan una cantidad mínima α deben ser rechazadas íntegramente, de tal manera que:

$$c_i \leq \alpha \Rightarrow F_i(E, \boldsymbol{c}) = 0.$$

Según Villar (2005), $\alpha = \frac{C-E}{m}$ (el umbral del déficit per cápita).

En este caso, el principio ético que prevalece es el de favorecer a las reclamaciones más grandes. Un ejemplo de ello es la franquicia fija en los seguros, que establece un umbral mínimo que el asegurado debe asumir antes de que la aseguradora cubra los gastos. Si el coste del servicio no supera dicha franquicia, el asegurado debe hacerse cargo del pago íntegro.

5.9. Aseguramiento (AS): De compensación

Esta propiedad exige que cada agente reciba como mínimo una cierta cantidad independientemente de las reclamaciones del resto; es decir, los agentes tienen una garantía mínima. De esta manera, si un agente reclama una cantidad superior al presupuesto disponible, su asignación será, como mínimo, el presupuesto disponible dividido entre el número de agentes; en el caso contrario, la asignación será, al menos, la reclamación dividida entre el número de agentes. Dicho de otro modo, formalmente:

$$F_i(E, \boldsymbol{c}) \geq \frac{1}{m}\text{min}\{c_i, E\}.$$

Una vez definidas las nueve propiedades que se pueden exigir a una regla de reparto, la Tabla 5.1 muestra cuáles de ellas cumple cada una de las reglas clásicas, lo que da lugar a sus correspondientes caracterizaciones.

	Proporcional	**Igual ganancia**	**Igual pérdida**	**Talmud**
Tratamiento igualitario (TI)	✓	✓	✓	✓
Independencia de escala (IE)	✓	✓	✓	✓
Composición hacia arriba (CAR)	✓	✓	✓	
Composición hacia abajo (CAB)	✓	✓	✓	
Consistencia (CO)	✓	✓	✓	✓
Autodualidad (AD)	✓ ✓			✓
Exención (EXE)		✓		
Exclusión (EXC)			✓	
Aseguramiento (AS)		✓		✓

✓ Moulin (2000)

Young (1988)
Herrero y Villar (2001)
Herrero y Villar (2001)
Thomson (2003)
Moreno-Ternero y Villar (2004)

Código de colores para la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Caracterización de las reglas clásicas de reparto mediante las combinaciones de nueve propiedades.
Fuente: Martínez y Meneses (2011).

Como puede observarse, Young (1988) probó que solamente la regla proporcional satisface simultáneamente las propiedades de CAR y AD.

Por su parte, Moulin (2000) demostró que la regla proporcional, la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida son las únicas que cumplen simultáneamente las propiedades de TI, IE, CAR, CAB y CO.

Además, Herrero y Villar (2001) verificaron que solo la regla de igual ganancia satisface al mismo tiempo las propiedades de CAB, CO y EXE, mientras que la regla de igual pérdida es la única que cumple con CAB, CO y EXC.

Por otro lado, Thomson (2003) estableció que la regla proporcional es la única que cumple simultáneamente las propiedades de CAB y AD.

Por último, Moreno-Ternero y Villar (2004) probaron que una regla de reparto es la regla del Talmud si y solo si satisface las propiedades de CO, AD y AS.

6. IMPLEMENTACIÓN DE LAS REGLAS DE REPARTO MEDIANTE PYTHON

En este apartado se implementan las reglas de reparto en Python, con el objetivo de resolver problemas de bancarrota de manera más rápida y eficaz. Para ilustrar su correcto funcionamiento, se recurre al Ejemplo, aunque cualquier otro problema de bancarrota sería igualmente válido.

Todas las funciones de reparto implementadas reciben dos parámetros: `E`, que representa el presupuesto disponible, y `reclamaciones`, que es un vector con las demandas de cada agente. Además, comparten los mismos casos base: si el presupuesto disponible es negativo o nulo, o si alguna de las reclamaciones es negativa o nula, la función devuelve un vector de asignaciones compuesto por ceros, con una entrada para cada agente; si el vector de reclamaciones está vacío, la función devuelve una lista vacía, ya que no hay agentes a los que asignar recursos. Por otro lado, si el presupuesto es suficiente para cubrir el total de las demandas, la función devuelve directamente el propio vector de reclamaciones.

Una vez superados estos casos base, el vector `asignaciones` puede contener valores decimales, que se redondean a dos cifras mediante la función `round(número, 2)`. Si una asignación `x` resulta ser un número entero (`x.is_integer()`), se convierte en un entero utilizando `int(x)`, de modo que no aparezcan decimales innecesarios en el resultado final.

En cuanto al funcionamiento de cada programa, la regla proporcional, implementada en la función `P` (véase el Código 1), se basa en el cálculo de la variable `lambda_value`, que se multiplica por cada reclamación `c` del vector `reclamaciones`. Los resultados obtenidos se almacenan en el vector `asignaciones`.

```python
def P(E, reclamaciones):
    if E <= 0 or not reclamaciones or any(c <= 0 for c in reclamaciones):
        return [0] * len(reclamaciones)

    total_reclamaciones = sum(reclamaciones)

    if E >= total_reclamaciones:
        return reclamaciones

    lambda_value = E / total_reclamaciones

    asignaciones = [round(lambda_value * c, 2) for c in reclamaciones]

    return [int(x) if x.is_integer() else x for x in asignaciones]
```

Código 1: Definición de la regla proporcional en Python.

Por su parte, la regla de igual ganancia, implementada en la función `IG` (véase el Código 2), también se basa en el cálculo de la variable `lambda_value`. Para ello, primero se ordenan los elementos del vector `reclamaciones` de menor a mayor, con `sorted(reclamaciones)`, almacenándolos en el vector `reclamaciones_ordenadas`. A continuación, se recorre este vector ordenado mediante un bucle `for` en combinación con la función `enumerate`, que asocia un índice `i` (desde `0` a `m-1`, donde `m` es el número total de reclamaciones, obtenido con `len(reclamaciones)`) a cada `reclamacion`.

En cada iteración, se calcula `lambda_value`. Si este valor es menor o igual que la `reclamacion` actual (en el vector ordenado), se detiene el bucle y se calculan las asignaciones finales como el mínimo entre `lambda_value` y cada elemento `c` del vector original `reclamaciones`. Si no se cumple esta condición, se resta el valor de la `reclamacion` actual al presupuesto `E_disponible` y se continúa con la siguiente iteración.

```python
def IG(E, reclamaciones):
    if E <= 0 or not reclamaciones or any(c <= 0 for c in reclamaciones):
        return [0] * len(reclamaciones)

    total_reclamaciones = sum(reclamaciones)

    if E >= total_reclamaciones:
        return reclamaciones

    m = len(reclamaciones)
    E_disponible = E
    reclamaciones_ordenadas = sorted(reclamaciones)

    for i, reclamacion in enumerate(reclamaciones_ordenadas):
        lambda_value = E_disponible / (m - i)
        if lambda_value <= reclamacion:
            asignaciones = [round(min(lambda_value, c), 2) for c in
                            reclamaciones]
            return [int(x) if x.is_integer() else x for x in asignaciones]

        E_disponible -= reclamacion
```

Código 2: Definición de la regla de igual ganancia en Python.

Respecto a la regla de igual pérdida, implementada en la función `IP` (véase el Código 3), sigue una lógica similar a la de la regla de igual ganancia, pero basada en el cálculo de la variable `mu_value`.

```python
def IP(E, reclamaciones):
    if E <= 0 or not reclamaciones or any(c <= 0 for c in reclamaciones):
        return [0] * len(reclamaciones)

    total_reclamaciones = sum(reclamaciones)

    if E >= total_reclamaciones:
        return reclamaciones

    m = len(reclamaciones)
    deficit_total = total_reclamaciones - E
    reclamaciones_ordenadas = sorted(reclamaciones)

    for i, reclamacion in enumerate(reclamaciones_ordenadas):
        mu_value = deficit_total / (m - i)
        if reclamacion - mu_value >= 0:
            asignaciones = [max(0, round(c - mu_value, 2)) for c in
                            reclamaciones]
            return [int(x) if x.is_integer() else x for x in asignaciones]

        deficit_total -= reclamacion
```

Código 3: Definición de la regla de igual pérdida en Python.

En lo que se refiere a la regla del Talmud, implementada en la función `T` (véase el Código 4), combina elementos de la regla de igual ganancia y de la regla igual pérdida. Solo considera la mitad de cada reclamación, que se almacena en el vector `mitad_reclamaciones`, y su comportamiento depende del valor del presupuesto `E` en relación con la mitad del total reclamado.

```python
def T(E, reclamaciones):
    if E <= 0 or not reclamaciones or any(c <= 0 for c in reclamaciones):
        return [0] * len(reclamaciones)

    total_reclamaciones = sum(reclamaciones)

    if E >= total_reclamaciones:
        return reclamaciones

    m = len(reclamaciones)
    mitad_total = total_reclamaciones / 2
    mitad_reclamaciones = [c / 2 for c in reclamaciones]
    reclamaciones_ordenadas = sorted(mitad_reclamaciones)
```

```
    if E <= mitad_total:
        E_disponible = E
        for i, reclamacion in enumerate(reclamaciones_ordenadas):
            lambda_value = E_disponible / (m - i)
            if lambda_value <= reclamacion:
                asignaciones = [round(min(c / 2, lambda_value), 2) for c
                                in reclamaciones]
                return [int(x) if x.is_integer() else x for x in
                        asignaciones]
            E_disponible -= reclamacion

    else:
        deficit_total = total_reclamaciones - E
        for i, reclamacion in enumerate(reclamaciones_ordenadas):
            mu_value = deficit_total / (m - i)
            if reclamacion * 2 - mu_value >= reclamacion:
                asignaciones = [round(max(c / 2, c - mu_value), 2) for c
                                in reclamaciones]
                return [int(x) if x.is_integer() else x for x in
                        asignaciones]
            deficit_total -= reclamacion
```

Código 4: Definición de la regla del Talmud en Python.

En relación a la regla del orden de llegada se define en la función `OL` (véase el Código 5).[9] En primer lugar, se inicializa el vector `asignaciones_totales`, que sirve para acumular las asignaciones finales de cada agente a lo largo de todas las permutaciones. A continuación, mediante un bucle `for`, se recorren todas las permutaciones de los agentes (calculadas con `permutations(range(m))`). Dentro de este bucle externo, se inicializa en cada iteración el vector `asignaciones`, que representa cómo se reparte el presupuesto en ese orden concreto de llegada. Luego, mediante otro bucle anidado, se recorre dicha permutación: a cada agente `i` (según el orden actual) se le asigna el mínimo entre su reclamación y `E_disponible`. Esta cantidad se almacena en la posición correspondiente del vector `asignaciones` y se descuenta del presupuesto disponible.

Una vez completado el reparto para una permutación concreta, los valores de `asignaciones` se suman al vector `asignaciones_totales`, acumulando así las asignaciones obtenidas en cada una de las permutaciones. Finalmente, tras recorrer

[9] Para implementar esta regla, se utilizan dos paquetes de la biblioteca estándar de Python: `permutations`, del módulo `itertools` (para generar todas las permutaciones), y `factorial`, del módulo `math` (para calcular el número total de permutaciones).

todas las permutaciones, se divide cada valor del vector `asignaciones_totales` entre el número total de permutaciones (calculado mediante `factorial(m)`).

```
from itertools import permutations
from math import factorial

def OL(E, reclamaciones):
    if E <= 0 or not reclamaciones or any(c <= 0 for c in reclamaciones):
        return [0] * len(reclamaciones)

    total_reclamaciones = sum(reclamaciones)

    if E >= total_reclamaciones:
        return reclamaciones

    m = len(reclamaciones)
    asignaciones_totales = [0] * m

    for orden in permutations(range(m)):
        E_disponible = E
        asignaciones = [0] * m

        for i in orden:
            asignaciones[i] = min(reclamaciones[i], E_disponible)
            E_disponible -= asignaciones[i]

        asignaciones_totales = [asignaciones_totales[i] + asignaciones[i]
                                for i in range(m)]

    num_permutaciones = factorial(m)
    asignaciones_finales = [round(asignaciones_totales[i] /
                            num_permutaciones, 2) for i in range(m)]

    return [int(x) if x.is_integer() else x for x in asignaciones_finales]
```

Código 5: Definición de la regla del orden de llegada en Python.

Por último, para aplicar las distintas funciones de reparto a unos datos concretos, basta con incorporar, al final del programa, las líneas de código representadas en el Código 6. Únicamente es necesario modificar el valor de `E` y los valores del vector `reclamaciones`, así como el mensaje de salida, que en este caso hace referencia a la función proporcional.

```python
E = 100
reclamaciones = [50, 20, 60, 90]

asignaciones = P(E, reclamaciones)
print("Asignaciones de P:", asignaciones)
```

Código 6: Aplicación de la regla propocional a los datos del Ejemplo en Python.

De manera adicional, en la Tabla 6.1 se recogen los resultados obtenidos al ejecutar cada una de las funciones de reparto con los datos del Ejemplo, verificándose que coinciden con los ya conocidos.

Salidas	
`Asignaciones de P:`	`[22.73, 9.09, 27.27, 40.91]`
`Asignaciones de IG:`	`[26.67, 20, 26.67, 26.67]`
`Asignaciones de IP:`	`[16.67, 0, 26.67, 56.67]`
`Asignaciones de T:`	`[25, 10, 30, 35]`
`Asignaciones de OL:`	`[22.5, 9.17, 27.5, 40.83]`

Tabla 6.1: Resultados de la ejecución de las reglas de reparto en Python para los datos del Ejemplo.

7. APLICACIÓN DE LAS REGLAS DE REPARTO A UN CASO REAL

Dado el actual contexto de inestabilidad geopolítica, la Unión Europea está reforzando su apuesta por el rearme y por una mayor inversión en defensa. Según Carpio (2025), este cambio en el escenario geoestratégico responde tanto a la amenaza que representa Rusia como a las exigencias de la nueva presidencia de Donald Trump en Estados Unidos, quien insiste en que los países europeos no invierten lo suficiente en defensa y no pueden garantizar la seguridad estadounidense (lo que lleva a Europa a cuestionar la fiabilidad de su relación militar con el país norteamericano).

La Organización del Tratado del Atlántico Norte (OTAN)[10] es la alianza establecida por un total de 32 países, de Europa y Norteamérica (de los cuales 23 pertenecen a la Unión Europea), que les permite cooperar en materia de defensa y llevar a cabo operaciones multinacionales conjuntas de gestión de crisis.

En la Cumbre de Gales de 2014, se acordó que los Aliados que destinaban menos del $2\,\%$ de su Producto Interior Bruto (PIB) en defensa debían aspirar a alcanzar este

[10]Tiene su origen en la firma del Tratado del Atlántico Norte (más conocido como Tratado de Washington), el 4 de abril de 1949, y opera conforme al principio de defensa colectiva, establecido en su Artículo 5, en virtud del cual un ataque contra uno o varios de sus miembros se considera un ataque contra todos (North Atlantic Treaty Organization (s.f.)).

objetivo en el plazo de una década (North Atlantic Treaty Organization (2014)). No obstante, según los datos de North Atlantic Treaty Organization (2024), ocho países miembros no lograron cumplirlo: España ($1{,}28\,\%$), Eslovenia ($1{,}29\,\%$), Luxemburgo ($1{,}29\,\%$), Bélgica ($1{,}30\,\%$), Canadá ($1{,}37\,\%$), Italia ($1{,}49\,\%$), Portugal ($1{,}55\,\%$) y Croacia ($1{,}81\,\%$). De este modo, España se ha comprometido a alcanzar el $2\,\%$ del PIB destinado a defensa en 2025 (La Moncloa (2025)).

Dada esta situación, puede plantearse un escenario ficticio en el que España logra dicho objetivo reordenando todas las partidas presupuestarias que componen el Estado de gastos.[11] Teniendo en cuenta que en España no se aprueba una Ley de Presupuestos desde el año 2023, los Presupuestos de 2025 son los prorrogados de 2024, que a su vez fueron una prórroga de los de 2023.

Para ello, se pueden aplicar las reglas de reparto a los datos presupuestarios proporcionados por el Ministerio de Hacienda (2024) para el año 2025. De esta forma, en la Tabla 7.1 se recogen las distintas secciones presupuestarias que conforman el Estado de gastos español para este año, con la salvedad de que no aparece dato alguno asignado al Ministerio de Defensa, ya que habría recibido parte del presupuesto del resto de partidas.

Según La Moncloa (2025), España llevará a cabo en 2025 una inversión adicional de 10.471 millones de euros en defensa, con lo que se alcanzará el $2\,\%$ del PIB (lo que supone un total de 33.123 millones de euros).

Si esta inversión se descontara del presupuesto total destinado al resto de secciones, se reduciría hasta los $357.524.232{,}97$ miles de euros. Con esto, se generaría un problema de bancarrota, pues el gasto total se habría redistribuido a favor del Ministerio de Defensa, mientras que el resto de partidas seguirían reclamando el mismo presupuesto anterior. Así, el presupuesto disponible no podría cubrir por completo todas las demandas.

Entonces, las soluciones que proporcionaría cada regla de reparto a este problema de bancarrota se muestran en la Tabla 7.1. Cabe destacar que, en el caso de la regla del orden de llegada, el problema se ha planteado únicamente utilizando los tres ministerios con mayor presupuesto, debido a la elevada complejidad computacional que supondría generar las $36!$ posibles permutaciones.

[11]Realmente, según La Moncloa (2025), el dinero provendrá de algunas partidas del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia (es decir, de una reasignación de los fondos Next Generation de la Unión Europea); de los ahorros generados por la economía española en 2024; y del margen ofrecido por ciertas partidas incluidas en los Presupuestos Generales de 2023 que ya no se consideran necesarias.

Secciones Presupuestarias	*Importe (miles €)*	*Importe, P (miles €)*	*Importe, IG (miles €)*	*Importe, IP (miles €)*	*Importe, T (miles €)*	*Importe, OL (miles €)*
01. Casa de su Majestad el Rey	8.431,15	8.191,25	8.431,15	0,00	4.215,57	
02. Cortes Generales	268.007,17	260.381,25	268.007,17	0,00	134.003,58	
03. Tribunal de Cuentas	78.372,36	76.142,34	78.372,36	0,00	39.186,18	
04. Tribunal Constitucional	30.486,00	29.618,55	30.486,00	0,00	15.243,00	
05. Consejo de Estado	14.686,84	14.268,94	14.686,84	0,00	7.343,42	
06. Deuda Pública	128.796.841,10	125.132.033,51	118.325.841,10	128.457.047,61	128.421.597,59	
07. Clases Pasivas	20.499.792,31	19.916.487,67	20.499.792,31	20.159.998,82	20.124.548,80	
08. Consejo General del Poder Judicial	78.333,80	76.104,88	78.333,80	0,00	39.166,90	
09. Aportaciones al Mutualismo Administrativo	2.379.467,55	2.311.761,77	2.379.467,55	2.039.674,06	2.004.224,04	
10. Contratación Centralizada	317.071,70	308.049,69	317.071,70	0,00	158.535,85	
12. Ministerio de Asuntos Exteriores, Unión Europea y Cooperación	1.941.192,48	1.885.957,45	1.941.192,48	1.601.398,99	1.565.948,97	
13. Ministerio de la Presidencia, Justicia y Relaciones con las Cortes	2.487.237,22	2.416.464,94	2.487.237,22	2.147.443,73	2.111.993,71	
15. Ministerio de Hacienda	19.238.035,90	18.690.633,50	19.238.035,90	18.898.242,41	18.862.792,39	15.747.702,57
16. Ministerio del Interior	10.259.247,95	9.967.329,53	10.259.247,95	9.919.454,46	9.884.004,44	
17. Ministerio de Transportes y Movilidad Sostenible	11.450.635,87	11.124.817,50	11.450.635,87	11.110.842,38	11.075.392,36	7.960.302,54
18. Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes	6.730.813,30	6.539.293,57	6.730.813,30	6.391.019,81	6.355.569,79	
19. Ministerio de Trabajo y Economía Social	476.788,62	463.221,99	476.788,62	136.995,13	238.394,31	
20. Ministerio de Industria y Turismo	8.422.273,26	8.182.624,44	8.422.273,26	8.082.479,77	8.047.029,75	
21. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación	1.079.852,46	1.049.126,15	1.079.852,46	740.058,97	704.608,95	
22. Ministerio de Política Territorial y Memoria Democrática	411.378,89	399.673,44	411.378,89	71.585,40	205.689,45	
23. Ministerio para la Transición Ecológica y el Reto Demográfico	11.302.121,89	10.980.529,36	11.302.121,89	10.962.328,40	10.926.878,38	
24. Ministerio de Cultura	1.043.425,86	1.013.736,04	1.043.425,86	703.632,37	668.182,35	
25. Ministerio de Vivienda y Agenda Urbana	3.484.533,43	3.385.383,91	3.484.533,43	3.144.739,94	3.109.289,92	
26. Ministerio de Sanidad	1.271.959,23	1.235.766,68	1.271.959,23	932.165,74	896.715,72	
27. Ministerio de Economía, Comercio y Empresa	2.511.824,00	2.440.352,13	2.511.824,00	2.172.030,51	2.136.580,49	
28. Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades	7.448.274,87	7.236.340,37	7.448.274,87	7.108.481,38	7.073.031,36	
29. Ministerio de Derechos Sociales, Consumo y Agenda 2030	4.241.125,79	4.120.448,06	4.241.125,79	3.901.332,30	3.865.882,28	
30. Ministerio de Igualdad	502.931,70	488.621,19	502.931,70	163.138,21	251.465,85	
31. Ministerio de Juventud e Infancia	161.393,39	156.801,07	161.393,39	0,00	80.696,70	
32. Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones	45.613.608,22	44.315.710,72	45.613.608,22	45.273.814,73	45.238.364,71	42.123.274,89
33. Ministerio para la Transformación Digital y de la Función Pública	5.476.281,86	5.320.458,79	5.476.281,86	5.136.488,37	5.101.038,35	
34. Relaciones Financieras con la Unión Europea	18.042.850,00	17.529.455,63	18.042.850,00	17.703.056,51	17.667.606,49	
35. Fondo de Contingencia	3.964.420,00	3.851.615,71	3.964.420,00	3.624.626,51	3.589.176,49	
36. Fondos de Compensación Interterritorial	582.430,00	565.857,44	582.430,00	242.636,51	291.215,00	
37. Otras Relaciones Financieras con Entes Territoriales	2.291.136,27	2.225.943,88	2.291.136,27	1.951.342,78	1.915.892,76	
38. Sistemas de Financiación de Entes Territoriales	45.087.970,53	43.805.029,62	45.087.970,53	44.748.177,04	44.712.727,02	
Total	**367.995.232,97**	357.524.232,96	357.524.232,97	357.524.232,84	357.524.232,92	65.831.280,00

Tabla 7.1: Aplicación de las reglas de reparto a los Presupuestos Generales del Estado español 2024-P.
Nota. *Las dos primeras columnas fueron tomadas de Ministerio de Hacienda (2024). El resto de la tabla es elaboración propia.*

Como se puede apreciar en la Tabla 7.1, mediante la regla de igual ganancia todas las reclamaciones serían atendidas íntegramente, a excepción de la correspondiente a la Deuda Pública. Esta solución resultaría poco realista, dado que el valor de dicha partida se basa en la previsión del gasto destinado al pago de los intereses de la deuda que adquiere el Estado, lo que implica una obligación legal y prioritaria[12].

En lo que respecta a la regla de igual pérdida, se puede concluir que, al igual que ocurre con la regla de igual ganancia, la solución no sería fiel a la realidad, puesto que ocho partidas presupuestarias quedarían sin asignación alguna.

En definitiva, el Gobierno de España debería estudiar la viabilidad de reordenar el presupuesto y proceder a su posterior aprobación aplicando la regla proporcional, la regla del Talmud o la regla del orden de llegada. La elección de una u otra podría sustentarse en el cumplimiento de ciertas propiedades.

Dado que esta situación alude a los Presupuestos Generales del Estado, es esencial garantizar las propiedades de: Tratamiento Igualitario (no debe haber distinción entre partidas si reclaman lo mismo), Consistencia (evita posibles conflictos ante cambios en los presupuestos recibidos por cada sección), Exención (permite priorizar aquellas partidas con un presupuesto menor respecto al resto) y Aseguramiento (garantiza que ninguna partida se quede completamente sin presupuesto). Además, dada la situación que se describe en este problema, se tiene que cumplir la propiedad de Composición hacia abajo (asegurando la coherencia ante la rebaja presupuestaria).

De entre las reglas mencionadas, la regla del Talmud sería la elegida, al verificar un mayor número de estas propiedades. Sin embargo, la regla del orden de llegada no debería descartarse en base a este criterio, debido a que no ha sido caracterizada según las mismas propiedades que se han utilizado para caracterizar las reglas clásicas de reparto. Por ello, esta regla podría ser válida dependiendo del criterio que el Gobierno de España decida aplicar.

8. CONCLUSIONES

Es evidente que los problemas de bancarrota son recurrentes en la sociedad y pueden referirse a temáticas muy diversas, en cuanto al grado de dificultad. Ante la imposibilidad de satisfacer por completo todas las reclamaciones, se recurre a las reglas de reparto, que permiten obtener soluciones lógicas. En este sentido, destaca la regla proporcional, la regla de igual ganancia, la regla de igual pérdida, la regla del Talmud (o del bien disputado) y la regla del orden de llegada, siendo las cuatro primeras conocidas como las reglas clásicas.

[12] El artículo 135 de la Constitución Española de 1978 establece que “los créditos para satisfacer los intereses y el capital de la deuda pública de las Administraciones se entenderán siempre incluidos en el estado de gastos de sus presupuestos y su pago gozará de prioridad absoluta”.

La decisión de escoger una de estas reglas depende de las características específicas del problema, ya que cada situación puede requerir del cumplimiento de diferentes propiedades que la regla en cuestión puede verificar o no. En concreto, a través de nueve propiedades es posible caracterizar las reglas clásicas y determinar cuál resulta más adecuada en cada caso.

Cabe destacar que la regla de igual ganancia favorece a las reclamaciones más bajas y la de igual pérdida a las más altas. La regla del Talmud, por su parte, ofrece una solución intermedia: beneficia a las reclamaciones más bajas cuando el presupuesto es pequeño y a las más altas cuando es grande. Ahora bien, cuando el presupuesto coincide con la mitad de la suma de las reclamaciones, su solución coincide con la de la regla proporcional.

En definitiva, un individuo familiarizado con la naturaleza de las reglas de reparto y con las propiedades que verifican, puede establecer una solución adecuada a un problema de bancarrota concreto, desde la total imparcialidad. En este contexto, las herramientas tecnológicas demuestran ser de gran utilidad, al proporcionar de manera rápida y precisa las soluciones que se esperan ante la aplicación de una regla de reparto. Un ejemplo de ello es el uso de Python para la implementación de estas reglas.

BIBLIOGRAFÍA

Agencia Estatal de Administración Tributaria. (2023, marzo). *Indemnizaciones por despido o cese del trabajador* [Acceso: 2025-03-28]. https://sede.agenciatributaria.gob.es/Sede/ayuda/manuales-videos-folletos/manuales-practicos/irpf-2020/capitulo-2-impuesto-renta-personas-generales/sujecion-irpf-aspectos-materiales/delimitacion-negativa-hecho-imponible-rentas-sujetas/rentas-exentas-articulo-7-ley-irpf/indemnizaciones-despido-cese-trabajador.html

Aumann, R. J., & Maschler, M. (1985). Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, (36), 195-213.

Brams, S. J. (1980). *Biblical Games: A Strategic Analysis of Stories in the Old Testament*. MIT Press.

Carpio, J. Á. (2025, marzo). *Gasto militar de los países de la Unión Europea: España, por detrás de la media, promete llegar al 2 % del PIB* [Acceso: 2025-04-21]. https://www.rtve.es/noticias/20250326/gasto-militar-defensa-espana-union-europea/16508212.shtml

de Frutos, M. Á. (1999). Coalitional manipulations in a bankruptcy problem. *Review of Economic Design*, *4*(3), 255-272.

Espinel, M. C. (2007). El reparto de lo escaso. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (10), 95-108.

Fleiner, T., & Sziklai, B. (2011). *Notes on the Bankruptcy Problem: an Application of Hydraulic Rationing* (IEHAS Discussion Papers N.º MT-DP - 2011/23). Hungarian Academy of Sciences, Institute of Economics, Budapest. https://hdl.handle.net/10419/108227

Herrero, C., & Villar, A. (2001). The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. *Mathematical Social Sciences*, *42*(3), 307-328.

Kaminski, M. M. (2000). 'Hydraulic' rationing. *Mathematical Social Sciences*, (40), 131-155.

La Moncloa. (2025, abril). *Pedro Sánchez anuncia que España destinará ya este año el 2 % del PIB a Seguridad y Defensa* [Acceso: 2025-04-23]. https://www.lamoncloa.gob.es/presidente/actividades/Paginas/2025/220425-sanchez-plan-seguridad-defensa.aspx

Martínez, M., & Meneses, L. C. (2011). Propuesta para seleccionar una solución en un problema de bancarrota. *Anales de ASEPUMA*, (19), 1-25.

Ministerio de Hacienda. (2024). Presupuestos Generales del Estado 2024-P: Resumen general por servicios y capítulos del presupuesto de gastos. https://www.sepg.pap.hacienda.gob.es/Presup/PGE2024Prorroga/MaestroDocumentos/PGE-ROM/doc/2/1/1/1/1/N_24P_E_V_1_101_1_1_2_A_1.PDF

Moreno-Ternero, J. d. D., & Villar, A. (2004). The Talmud rule and the securement of agents' awards. *Mathematical Social Sciences*, *47*(2), 245-257.

Moulin, H. (2000). Priority Rules and Other Asymmetric Rationing Methods. *Econometrica*, *68*(3), 643-684.

North Atlantic Treaty Organization. (2014, septiembre). *Wales Summit Declaration* [Acceso: 2025-04-21]. https://www.nato.int/cps/en/natohq/official_texts_112964.htm

North Atlantic Treaty Organization. (2024, junio). Defence Expenditure of NATO Countries (2014-2024). https://www.nato.int/nato_static_fl2014/assets/pdf/2024/6/pdf/240617-def-exp-2024-en.pdf

North Atlantic Treaty Organization. (s.f.). *What is NATO?* [Acceso: 2025-04-21]. https://www.nato.int/nato-welcome/index.html

O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences*, (4), 345-371.

Robbins, L. C. (1932). *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*. Macmillan.

Thomson, W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. *Mathematical Social Sciences*, *45*(3), 249-297.

Villar, A. (2005). Cómo repartir cuando no hay bastante. *Lecturas de Economía*, (62), 9-34.

Young, H. P. (1988). Distributive justice in taxation. *Journal of Economic Theory*, *44*(2), 321-335.