Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo Fin de Grado

Grado en Administración y Dirección de empresas

TEORÍA DE JUEGOS: PROBLEMAS DE BANCARROTA

Presentado por:

Sofía González Hurtado

Valladolid, xx de xxx de 20xx

RESUMEN

Los problemas de bancarrota se presentan cuando los recursos disponibles no alcanzan para cubrir la totalidad de las reclamaciones realizadas por un conjunto de agentes. En estas situaciones, es necesario establecer criterios justos para distribuir el recurso escaso, lo que convierte su estudio en parte fundamental de la teoría de juegos. Este trabajo analiza cuatro reglas clásicas de reparto (proporcional, igual ganancia, igual pérdida y Talmud), además de tres soluciones propias de la teoría de juegos cooperativos: el núcleo, el nucleolo y el valor de Shapley. Cada método presenta propiedades diferentes que influyen en el reparto final. El análisis se aplica a un caso real, el concurso de acreedores de Martinsa-Fadesa, utilizando herramientas computacionales en Python. La simulación de resultados permite comparar visualmente los efectos de cada regla y facilita la elección del criterio más adecuado.
Palabras clave: Problemas de bancarrota, teoría de juegos, reglas de reparto, asignación de recursos.

ABSTRACT

Bankruptcy problems arise when the available resources are not sufficient to cover the total claims of a group of agents. In such situations, it is necessary to establish fair criteria for distributing the scarce resource, which makes this topic a fundamental part of game theory. This paper analyzes four classical allocation rules —proportional, equal awards, equal losses, and the Talmud rule— along with three cooperative game theory solutions: the core, the nucleolus, and the Shapley value. Each method satisfies different formal properties that significantly affect the final distribution.
The analysis is applied to a real case: the bankruptcy of the Spanish company Martinsa-Fadesa. Python programming tools were used to simulate and visualize the outcomes of each rule. The comparison highlights how each rule influences the allocation of resources and helps identify the most suitable.
Keywords: Bankruptcy problems, game theory, allocation rules, resource allocation.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCION

La bancarrota plantea uno de los dilemas económicos más antiguos y universales: cómo repartir de manera justa un recurso escaso entre varios agentes cuyas reclamaciones superan la cantidad disponible. Este tipo de problemas ha acompañado a la humanidad desde la Antigüedad (como ejemplifica el reparto en el Talmud) hasta nuestros días, donde aparecen en contextos tan diversos como concursos de acreedores, presupuestos públicos o herencias.

El trabajo toma como punto de partida este enfoque axiomático, que caracteriza las reglas de reparto según propiedades como la eficiencia, el trato igualitario o la autodualidad. En primer lugar, se estudian tres soluciones fundamentales de los juegos cooperativos: el núcleo, el nucleolo y el valor de Shapley, que ofrecen respuestas matemáticamente sólidas y éticamente defendibles. Posteriormente, se analizan cuatro reglas clásicas de reparto aplicadas específicamente a problemas de bancarrota: proporcional, igual ganancia, igual pérdida y la regla del Talmud. Cada una de estas propuestas genera un reparto diferente y responde a prioridades distintas en materia de justicia distributiva.

El objetivo principal es comparar dichas soluciones y reglas tanto desde un punto de vista teórico como aplicado. Para ello, se analiza un caso real: el concurso de acreedores de la promotora Martinsa-Fadesa, una de las mayores quiebras empresariales en la historia reciente de España. La metodología empleada combina revisión bibliográfica y simulación computacional, utilizando Python en Google Colab® para calcular y representar gráficamente las asignaciones que resultan de cada método de reparto.

El trabajo se estructura en ocho apartados. Tras esta introducción, se presentan los fundamentos de la teoría de juegos cooperativos y del problema de bancarrota. A continuación, se explican las reglas de reparto y sus propiedades, y se estudian combinaciones que permiten su caracterización. Posteriormente, se aplica el análisis a un caso práctico y se realiza una comparativa visual de los resultados. Finalmente, se recogen las conclusiones más relevantes y las referencias bibliográficas utilizadas.

2. TEORIA DE JUEGOS

La Teoría de Juegos es una rama de la matemática y de la economía que analiza situaciones en las que múltiples individuos, conocidos como jugadores, interactúan y toman decisiones que pueden influir en los resultados o beneficios de los demás, con la finalidad de maximizar su beneficio o minimizar su pérdida.

Tradicionalmente, los juegos se dividen en dos grandes categorías: juegos cooperativos y juegos no cooperativos.En los juegos no cooperativos cada jugador persigue su propio beneficio, sin comprometerse mediante acuerdos vinculantes con los demás. Este tipo de juegos se caracteriza por la existencia de intereses en conflicto, donde las acciones de cada jugador afectan directamente a los resultados del resto.

Por otro lado, los juegos cooperativos surgen cuando los jugadores tienen la posibilidad de comunicarse y establecer acuerdos vinculantes para coordinar sus decisiones. En este contexto, el análisis se centra en cómo se distribuyen los beneficios derivados de la cooperación entre los participantes, incentivando alianzas y estrategias conjuntas.

2.1 JUEGOS COOPERATIVOS CON UTILIDAD TRANSFERIBLE

En el contexto de los juegos cooperativos con utilidad transferible, cualquier reparto del beneficio total entre los jugadores es posible, lo que permite analizar cómo distribuir de manera óptima los recursos o pagos. El objetivo principal de estos juegos es identificar soluciones que maximicen el beneficio colectivo respetando ciertos principios de equidad y racionalidad.

Antes de analizar las posibles soluciones, se establecen los siguientes conceptos:

Definición 1. Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par (N, v), donde N representa al conjunto de n jugadores $N = \{1,2,\ldots,n\}$ y v es la función característica, $v : 2^N \to \mathbb{R}$, tal que v asigna cero al conjunto vacío $v(\emptyset) = 0$ y donde 2^N son todos los subconjuntos de N que podrían ser coaliciones.

Definición 2. El conjunto de todos los juegos con utilidad transferible se representa como G, mientras que G_N se refiere específicamente a los juegos con utilidad transferible en los que el conjunto de jugadores está definido como N. En situaciones donde el conjunto de jugadores esté claro o implícito, nos referiremos al juego únicamente mediante su función característica v.

Definición 3. Cada coalición $S \subseteq N$ tiene un beneficio asociado $v(S)$ que se calcula con la función característica e indica cuánto puede ganar cada coalición. Si todos los jugadores se unen, se forma la gran coalición N, y su beneficio total es $v(N)$. Este beneficio total $v(N)$ se reparte entre todos los jugadores usando un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde x_i es lo que recibe el jugador i.

Definición 4. Dada una función característica $v : 2^N \to \mathbb{R}$, un vector de pagos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ representa una posible distribución del valor total entre los jugadores del juego cooperativo. Este reparto de pagos cumple dos condiciones fundamentales:

a) Se dice que x es <u>eficiente</u> si reparte exactamente el valor total generado por la gran coalición N, es decir,

$$\sum_{i \in N} xi = v(N).$$

Esto garantiza que no se pierde ni se crea valor en la distribución: todo lo que puede obtenerse colectivamente se reparte entre los jugadores.

b) Se dice que x es <u>individualmente racional</u> si a cada jugador se le asigna al menos el valor que podría obtener actuando por su cuenta, es decir,

$$x_i \geq v(\{i\}), para\ todo\ i \in N.$$

Este criterio asegura que ningún jugador esté peor que si decidiera no cooperar con el resto.

El conjunto de todos los vectores de pagos que satisfacen ambas condiciones se denomina conjunto de imputaciones, y se denota por $I(v)$. Formalmente,

$$I(v) = \{\, x \in \mathbb{R}^n\ tal\ que\ x(N) = v(N)\ y\ x_i \geq v(\{i\}),\ para\ todo\ i \in N \,\}.$$

Definición 5. Un juego cooperativo (N, v) es:

a) Monótono cuando, al aumentar el número de jugadores en una coalición, el valor asociado a esta no disminuye. Formalmente, para cualquier $S, T \subseteq N$, si $S \subseteq T$, entonces $v(S) \leq v(T)$. Esto implica que añadir jugadores a una coalición no reduce su beneficio, garantizando que la incorporación de nuevos miembros no disminuya el valor total de la coalición.

b) Superaditivo si, cuando dos coaliciones disjuntas S y T deciden unirse, el beneficio obtenido al formar la nueva coalición $S \cup T$ es igual o mayor que la suma de los beneficios originales de las coaliciones. Es decir, para cualquier $S, T \subseteq N,\ con\ S \cap T = \emptyset$, se cumple que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$. En términos prácticos, esto significa que trabajar juntos siempre es al menos tan beneficioso como trabajar por separado.

c) Subaditivo si, al unir dos coaliciones disjuntas, el valor de la coalición formada es menor o igual a la suma de los valores de las coaliciones individuales. Matemáticamente, para cualquier $S, T \subseteq N, con\ S \cap T = \emptyset$, se cumple que $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$.
Esto refleja que, en este caso, unirse no siempre resulta en un mayor beneficio.

d) Convexo si la utilidad conjunta obtenida al unirse dos coaliciones siempre es mayor o igual a la suma de las utilidades que obtendrían por separado, menos lo que comparten. En términos matemáticos, esto se expresa como $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$, para cualquier par de coaliciones $S\ y\ T$ del conjunto de jugadores N.

Una vez definidos los conceptos clave de los juegos cooperativos, el desafío es determinar un reparto de pagos aceptado por todos los jugadores. Para ello existen dos enfoques principales, las soluciones tipo conjunto y las soluciones tipo puntual. Las primeras proponen un conjunto de repartos viables, como por ejemplo el Núcleo, que garantiza estabilidad en las coaliciones, mientras que las de tipo puntual seleccionan un único reparto específico, como el Nucleolo o el valor de Shapley, que se consideran óptimos según ciertos criterios.

2.2 NÚCLEO

El núcleo (o *core*) es un concepto clave en los juegos cooperativos, introducido por Gillies (5), que representa un conjunto de formas de repartir los beneficios entre los jugadores. Una solución está en el núcleo si reparte el total del beneficio disponible (eficiencia), asegura que cada jugador o grupo recibe al menos lo que podrían obtener actuando por su cuenta (racionalidad individual) y garantiza que ningún subconjunto de jugadores tenga incentivos para abandonar la coalición principal, ya que no obtendrían más beneficio formando su propio acuerdo (racionalidad coalicional).

Definición 6. Dado $v \in G_N$, se define el núcleo de v, y se denota por $C(v)$, al siguiente conjunto de repartos de pagos:

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S)\ \forall\ S \subseteq N\}.$$

Sin embargo, el *core* puede ser vacío, único o tener infinitos elementos, lo que plantea desafíos en la elección de un vector de pago específico. Una clase importante de juegos para los que el núcleo es no vacío es la clase de juegos convexos, definida anteriormente, ya que para esta clase se verifica que todo juego convexo tiene núcleo no vacío. (Ver Shapley (9)).

2.3 NUCLEOLO

El nucléolo, introducido por Schmeidler (7), es una solución en juegos cooperativos que busca minimizar la insatisfacción de las coaliciones con respecto a un reparto de pagos. El concepto clave en el análisis del nucleolo es el de exceso, que representa la diferencia entre el valor que una coalición puede obtener por sí sola y la suma de los pagos que se le asignan bajo una determinada imputación. Dado un juego $v \in G_N$ y una distribución de pagos $x \in \mathbb{R}^N$, el exceso de valor de una coalición $S \subset N$ respecto a x se define como

$$e(S,x) = v(S) - x(S) = v(S) - \textstyle\sum_{i \in S} xi.$$

Cuanto mayor sea este exceso, mayor será la insatisfacción de los miembros de la coalición respecto a esa distribución de pagos. A partir de estos excesos, se construye un vector de repartos de excesos, denotado como:

$$\theta(x) = \big(e(S_1,x), \dots, e(S_{2^n},x)\big) \in \mathbb{R}^{2^n},$$

cuyas componentes son los excesos de todas las coaliciones posibles, ordenadas de forma no creciente. Este vector permite comparar dos repartos x e y viendo cuál tiene menores excesos en el primer valor, luego en el segundo, y así sucesivamente. Si el reparto x tiene excesos más pequeños (en sentido lexicográfico) que y, se considera que x genera menos insatisfacción total.

Definición 7. Se define el nucléolo de un juego $v \in G_N$ como el conjunto de distribuciones de pagos (o imputaciones) $\eta(v)$ que cumplen:

$$\eta(v) = \{x \in I(v): \theta(x) \ \leq \_L \ \theta(y), \forall y \ \in I(v)\} \ ,$$

donde $I(v)$ es el conjunto de imputaciones válidas del juego, $\theta(x) \ y \ \theta(y)$ son los vectores de excesos asociados a x e y, respectivamente y $\leq_L$ representa el orden lexicográfico. Esto significa que el nucléolo contiene aquellas imputaciones que minimizan, en orden lexicográfico, los excesos de valor de todas las coaliciones, lo que equivale a reducir al máximo posible la insatisfacción entre las coaliciones.

2.4 VALOR DE SHAPLEY

El valor de Shapley, propuesto por Shapley (8), es uno de los métodos más utilizados en juegos cooperativos con utilidad transferible. Este concepto surge de la formulación de cuatro axiomas fundamentales que deben cumplir los repartos óptimos de pagos, y Shapley demostró que existe una única asignación que satisface todos ellos.

Las cuatro propiedades que debe cumplir esta asignación son: eficiencia, al asegurar que el valor total generado por el juego se distribuye completamente entre los jugadores; simetría, que otorga pagos iguales a los jugadores que realizan contribuciones idénticas; pago nulo, asignando cero a aquellos jugadores cuya participación no afecta al resultado de ninguna coalición; y aditividad, donde la suma de los valores de dos juegos por separado coincide con el valor del juego combinado, reflejando una coherencia matemática en la asignación de pagos.

Definición 8. El valor de Shapley se define como una función que, para un juego dado, asigna a cada jugador un pago proporcional a su contribución marginal promedio al unirse a distintas coaliciones. Formalmente, para el jugador i, el valor de Shapley se define como:

$$\varphi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\{i\}} \frac{|T|!\,(|N|-|T|-1)!}{|N|!}.\left(v(T\cup\{i\}) - v(T)\right),$$

donde T representa todas las coaliciones posibles que excluyen al jugador i.

3. PROBLEMA DE BANCARROTA

El estudio del problema de bancarrota forma parte de la Teoría de la Elección Social, la cual se enfoca en diseñar y analizar reglas justas para distribuir recursos limitados entre diferentes individuos o entidades.

Un problema de bancarrota ocurre cuando un grupo de personas o instituciones reclaman una cantidad de un bien, pero la cantidad disponible es menor que la suma de todas las reclamaciones. En este escenario, un juez imparcial debe decidir cómo repartir el recurso utilizando criterios éticos y operativos que sean razonables y justos.

Estos problemas no se limitan al ámbito financiero, sino que pueden presentarse en situaciones cotidianas. A continuación, se detallan algunos ejemplos.

-Empresas en quiebra: Es el caso más común y conocido. Ocurre cuando una empresa no tiene suficiente capital para pagar a todos sus acreedores. En estos casos, el dinero disponible debe distribuirse entre los distintos acreedores de una manera justa. Las razones por las cuales una empresa puede llegar a esta situación son diversas, como una mala gestión administrativa, falta de inversión, pérdida de clientes, baja productividad o problemas financieros prolongados. También puede darse en situaciones de concurso de acreedores, cuando la empresa no puede hacer frente a todas sus deudas y se requiere un proceso legal para distribuir los fondos disponibles.

-Recortes presupuestarios: Cuando el Estado enfrenta una crisis económica y los ingresos fiscales disminuyen, se hace necesario reducir el gasto público. Esto genera un problema de bancarrota, ya que los diferentes sectores del gobierno (educación, sanidad, infraestructuras, etc.) demandan más fondos de los que realmente hay disponibles. En este caso, el gobierno debe repartir el presupuesto reducido entre los organismos de manera equitativa, buscando minimizar el impacto de los recortes.

-Herencias: Se presenta cuando una persona fallece y los bienes que deja (dinero, propiedades, terrenos, etc.) no son suficientes para cubrir las reclamaciones de todos los herederos legítimos. En estos casos, es necesario establecer un criterio para distribuir los bienes de manera justa, respetando lo máximo posible los derechos de cada heredero.

En todas estas situaciones, el problema de bancarrota surge debido a la desproporción entre lo que se reclama y lo que realmente está disponible, lo que hace imprescindible establecer reglas de reparto que permitan una distribución justa y razonable de los recursos.

A nivel matemático, se define E (*Estate*) como el presupuesto o cantidad total del bien disponible para repartir. Existen n agentes (personas o entidades) que tienen derecho a reclamar una parte de ese bien, cada agente i hace una reclamación individual representada como c_i (*claims*). La reclamación total se obtiene al sumar todas las demandas individuales c_i, es decir, $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$. Cuando esta supera el recurso disponible, $C > E$ estamos ante un problema de bancarrota. En tal caso, la diferencia entre lo que se reclama y lo que realmente hay se denomina déficit, y se define como: $D = C - E > 0$. Este déficit representa cuánto se debe recortar para hacer un reparto equitativo.

Para resolver un problema de bancarrota, se establece una regla de reparto (R), que define cómo se distribuirá el recurso entre los agentes. Cada agente recibirá una cantidad x_i^* que debe cumplir ciertas condiciones: no puede recibir más de lo que reclamó ($x_i^* \leq c_i$), no puede recibir una cantidad negativa ($x_i^* \geq 0$), y la suma de todas las asignaciones debe ser igual al presupuesto total disponible $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = E$.

En conclusión expresamos la regla de reparto como: $x^* = R(E, C)$, donde R es la función que calcula cuánto debe recibir cada agente según las reglas establecidas.

4. REGLAS DE REPARTO

Las reglas clásicas de reparto son aquellas que han sido ampliamente estudiadas y utilizadas para resolver problemas de bancarrota. Estas son: la regla proporcional, la regla de igual ganancia, la regla de igual pérdida y la regla del Talmud.
Cada una de estas reglas tiene ventajas y desventajas, dependiendo del criterio de equidad que se quiera aplicar. A continuación, se explicará en detalle cada una de ellas, junto con ejemplos prácticos que ilustran su funcionamiento.

4.1 REGLA DE REPARTO PROPORCIONAL

La regla de reparto proporcional, propuesta por Aumann y Maschler (2), es uno de los métodos más empleados para distribuir un recurso limitado entre varios agentes que presentan reclamaciones. Este criterio asigna los fondos disponibles de manera proporcional a las demandas de cada acreedor, asegurando que todos reciban una parte equitativa en función de sus solicitudes.

Para aplicar esta regla, se calcula un coeficiente de proporcionalidad (λ), que se obtiene dividiendo el monto total disponible (E) entre la suma de todas las reclamaciones (C):

$$\lambda = \frac{E}{C}.$$

Cada acreedor recibe una cantidad proporcional a su reclamación original, multiplicando su demanda por el coeficiente calculado:

$$P(E, c_i) = \lambda \cdot c_{i\,.}$$

4.2 REGLA DE REPARTO DE IGUAL GANANCIA

La regla de reparto de igual ganancia establece que todos los agentes involucrados en un problema de bancarrota reciben la misma cantidad, siempre que esta no supere la cuantía reclamada por cada uno. En caso de que un agente tenga una reclamación menor a la cantidad asignada equitativamente, este recibirá el total de su reclamación y el resto del presupuesto se repartirá de manera equitativa entre los demás acreedores. Ver Thomson (10).

Para implementarlo, se determina un valor (denominado α) de tal forma que, al asignar a cada agente la cantidad mínima entre α y su demanda c_i , se agota el recurso total E. Es decir, α se elige de modo que se cumpla la ecuación:

$$\sum_{i\in N} \min\{c_i, \alpha\} = E.$$

Luego, cada agente i recibe: $IG(E, c_i) = \min\{c_i, \alpha\}$.

4.3 REGLA DE REPARTO DE IGUAL PERDIDA

La regla de igual pérdida distribuye el déficit total entre todos los acreedores de manera equitativa, asegurando que ningún agente pierda más de lo que originalmente reclamó. Es decir, todos contribuyen a la reducción del monto reclamado con la misma cantidad, pero si algún acreedor ha solicitado menos que esa cantidad, simplemente recibe su reclamación total o nada si su pérdida superara su demanda.

Para ello, se define un valor β de tal forma que, al restar a cada agente la cantidad máxima entre β y su demanda c_i , el presupuesto disponible E se distribuya correctamente de la siguiente manera:

$$\sum_{i\in N} \max\{0, c_i - \beta\} = E.$$

Por lo tanto, cada agente i recibe: $IP(E, c_i) = \max\{0, c_i - \beta\}$.

4.4 REGLA DE REPARTO DEL TALMUD

La Regla del Talmud es un método de reparto basado en principios que aparecen en la tradición judía. Su nombre proviene del Talmud, un texto que recopila dos tipos de escritos: Mishna, que recoge las leyes y normas de tradición oral; y Gerema, que interpreta y amplía esas normas para aplicarlas a casos prácticos.

Lo que distingue a la Regla del Talmud de otras reglas de reparto es que tiene en cuenta tanto las ganancias como las pérdidas de los agentes involucrados. En términos psicológicos, este criterio se basa en dos observaciones: cuando hay poco dinero disponible, los agentes se preocupan más por cuánto pueden ganar; y cuando hay más dinero para repartir, los agentes piensan más en cuánto pueden perder.
Este comportamiento lleva a que el reparto se haga de forma distinta dependiendo del monto disponible en relación con la deuda total.

La Regla del Talmud combina las otras tres reglas de reparto previamente vistas, dependiendo de la cantidad de recursos disponibles. Para aplicarla, se comparan el presupuesto disponible (E) y la deuda total (C):

-Si el presupuesto es menor a la mitad de la deuda total $\left(E < \frac{C}{2}\right)$, se usa la regla de igual ganancia, es decir, se reparte la misma cantidad a cada acreedor, siempre que no supere lo que ha reclamado.

-Si el presupuesto es exactamente la mitad de la deuda total $\left(E = \frac{C}{2}\right)$, se aplica la regla proporcional, por lo que se divide el presupuesto de manera proporcional a las reclamaciones de cada agente.

-Por último, si el presupuesto es mayor a la mitad de la deuda total $\left(E > \frac{C}{2}\right)$, se combina la regla de igual ganancia con la regla de igual pérdida: primero, a cada agente se le asigna la mitad de lo que reclamó. Luego, el déficit restante se reparte entre los agentes que aún tienen deudas pendientes (demostrado por Aumann y Maschler (2)).

De esta forma se define la regla del Talmud como:

$$T_i(E,d) = \begin{cases} \min\left(\frac{c_i}{2}, \alpha\right) & si\ E \leq \frac{C}{2}, \\ \min\left(\frac{c_i}{2}, c_i - \beta\right) & si\ E \geq \frac{C}{2}, \end{cases}$$

siendo α solución de $\sum_{i\in N} \min\left\{\frac{c_i}{2}, \alpha\right\} = E$, y β solución de $\sum_{i\in N} \max\left\{\frac{c_i}{2}, c_i - \beta\right\} = E$.

5. PROPIEDADES DE LAS REGLAS DE REPARTO

Existen unas propiedades básicas que deben cumplir todas las reglas de reparto para garantizar un reparto justo y coherente con las restricciones del problema. Estas propiedades incluyen la viabilidad, que establece que la suma de las asignaciones no debe superar la cantidad disponible; la eficiencia, que exige que todo el presupuesto se distribuya sin dejar excedentes; la no negatividad, que impide que un agente reciba una cantidad negativa y limita su asignación al máximo de su reclamación; y el límite inferior, que asegura que cada agente reciba al menos la diferencia entre el presupuesto total y la suma de las reclamaciones de los demás, siempre que esta diferencia sea positiva, en caso contrario, su asignación será cero.

Además de estas propiedades básicas, en este apartado se analizarán otras propiedades de las reglas de reparto que permitirán al juez imparcial determinar qué regla de reparto es más adecuada según el contexto del problema.

5.1 ASEGURAMIENTO

La propiedad de aseguramiento en problemas de bancarrota garantiza que cada agente reciba al menos una cantidad mínima, independientemente de las demandas de los demás. Esta cantidad depende de la cantidad total a repartir (E), la demanda del agente (c_i) y el número de participantes (n). Si la demanda del agente supera la cantidad disponible, su asignación mínima será el total disponible dividido entre el número de agentes, mientras que si su demanda es menor, su asignación mínima será su propia demanda dividida entre el número de agentes, para así asegurar una distribución equitativa y evitar que algún agente reciba una cantidad excesivamente baja.

Formalmente: Sea (E, c) un problema de bancarrota y R una regla de reparto, R verifica la propiedad del aseguramiento si $R_i(E, c) \geq \frac{1}{n}\min(c, E)$, para todo $i \in N$.

5.2 TRATAMIENTO IGUALITARIO

Esta propiedad establece que los jugadores con la misma demanda deben recibir la misma cantidad, garantizando un reparto equitativo sin privilegios. Matemáticamente, si $c_i = c_j$, entonces $R_i(E, c) = R_j(E, c)$.

No obstante, en la realidad, esta norma suele romperse cuando ciertas reclamaciones tienen prioridad, como sucede en procesos de bancarrota donde algunos acreedores son preferidos sobre otros.

5.3 INDEPENDENCIA DE ESCALA

La independencia de escala asegura que el reparto no cambia si tanto la cantidad total a repartir como las demandas de los jugadores se multiplican por el mismo factor λ. Es decir, si el problema de bancarrota se expresa en una unidad diferente (por ejemplo, en euros en lugar de dólares), las asignaciones simplemente se ajustan proporcionalmente sin alterar la distribución relativa.

Formalmente, para $\lambda > 0$, se cumple que $R(\lambda E, \lambda c) = \lambda R(E, c)$, lo que indica que la regla de reparto es homogénea de grado uno. En la práctica, esto garantiza que la elección de la unidad de medida, como el tipo de divisa o escala utilizada, no influye en el resultado del reparto.

5.4 CONSISTENCIA

La propiedad de consistencia en problemas de bancarrota establece que el reparto debe ser el mismo tanto si se aplica a todos los agentes como si se aplica a un subgrupo de ellos con el presupuesto que les correspondía inicialmente. Es decir, si un grupo de jugadores se separa con sus asignaciones y el resto sigue con sus demandas originales pero con un nuevo presupuesto ajustado, la distribución debe mantenerse inalterada. Esto evita incentivos a cambiar la agrupación de reclamaciones y previene disputas entre los agentes, ya que el resultado del reparto no varía.

Por lo tanto, sea (E, c) un problema de bancarrota, $S \subset N$, entonces para $i \in N \setminus S$,

$$R\ es\ consistente \Leftrightarrow R_i(N, E, c) = R_i\left(N \setminus S, E - \sum_{i \in S} R_i(N, E, c), (c_i)_{i \in N \setminus S}\right).$$

5.5 AUTODUALIDAD

La dualidad en problemas de bancarrota significa que se puede repartir el recurso disponible E o, alternativamente, distribuir la pérdida total $C - E$ entre los agentes. Cada regla de reparto tiene una regla dual, donde las pérdidas asignadas coinciden con las ganancias otorgadas por su dual.

La autodualidad es una propiedad especial que garantiza que el resultado final es el mismo tanto si se reparte E entre los jugadores como si se distribuye la pérdida $C - E$. Es decir, la forma de calcular la asignación no cambia si en lugar de repartir lo disponible, se distribuye lo que falta, es decir, si $R(C - E, c) = C - R(E, c)$.

Esto significa que las reglas autoduales tratan de manera equitativa tanto los pagos como las pérdidas, asegurando que el reparto sea consistente sin importar la perspectiva desde la que se aborde.

5.6 COMPOSICIÓN HACIA ARRIBA

Esta propiedad garantiza que si inicialmente se sobreestima el presupuesto disponible $(E' > E)$, el reparto puede corregirse de dos maneras sin alterar el resultado final: cancelando el reparto inicial y aplicando la regla con el presupuesto real, o manteniendo las asignaciones ya realizadas y distribuyendo la diferencia $E' - E$ entre los jugadores. Matemáticamente, se expresa como:

$$R(E', c) = R(E, c) + R\big(E' - E, c - R(E, c)\big).$$

Esto significa que el reparto es independiente del orden en que se realice: repartir todo el presupuesto de una vez o hacerlo en dos fases (primero E y luego $E' - E$) da el mismo resultado.

5.7 COMPOSICIÓN HACIA ABAJO

La propiedad de composición hacia abajo establece que si el presupuesto disponible resulta ser menor de lo estimado $(E' < E)$, hay dos formas de ajustar el reparto: recalcular desde cero o usar las asignaciones anteriores como nuevas demandas y repartir nuevamente. Lo clave es que, independientemente del método elegido, el resultado final será el mismo, asegurando coherencia en la distribución. Formalmente, esta propiedad se verifica si se tiene:

$$R(E', c) = R\big(E', R(E, c)\big).$$

5.8 CARACTERIZACIÓN DE LAS REGLAS DE REPARTO

A la hora de elegir una regla de reparto, es fundamental conocer las propiedades que cumple cada una, ya que esto permite reducir las opciones y tomar una decisión más informada. Algunas propiedades, como el trato igualitario, están presentes en todas las reglas, pero otras son más específicas y pueden ser clave según el criterio del decisor.
A lo largo del tiempo, diversos estudios han demostrado que ciertas combinaciones de propiedades caracterizan reglas particulares, lo que facilita su identificación en función de las necesidades del reparto.

La regla proporcional es la única regla que verifica las propiedades de trato igualitario, independencia de escala, composición hacia arriba y autodualidad (demostrado por Young (12), Herrero y Villar (6)).

La regla de reparto de igual ganancia verifica las propiedades de aseguramiento, tratamiento igualitario, independencia de escala, composición hacia arriba, composición hacia abajo y consistencia (ver Dagan (4), Herrero y Villar (6), Yeh (11) y Chun (3)).

Herrero y Villar (6) también demostraron que la regla de reparto de igual pérdida es la única regla que verifica las propiedades de tratamiento igualitario, independencia de escala, composición hacia arriba, composición hacia abajo y consistencia.

Por último, la regla del talmud verifica las propiedades de aseguramiento, tratamiento igualitario, independencia de escala, autodualidad y consistencia (ver Herrero y Villar (6) y Chun (3)).

La siguiente tabla resume las propiedades que cumple cada regla de reparto clásica:

Propiedad	Proporcional (P)	Igual Ganancia (IG)	Igual Pérdida (IP)	Talmud (T)
Aseguramiento	No	Sí	No	Sí
Trato igualitario	Sí	Sí	Sí	Sí
Independencia de escala	Sí	Sí	Sí	Sí
Consistencia	No	Sí	Sí	Sí
Autodualidad	Sí	No	No	Sí
Composición hacia abajo	No	Sí	Sí	No
Composición hacia arriba	Sí	Sí	Sí	No

Figura 1: Caracterización de las reglas de reparto.

6. CASO REAL

En este apartado se presenta un caso real y muy claro de problema de bancarrota aplicado a la quiebra de una empresa: el concurso de acreedores de la empresa española **Martinsa-Fadesa**, ocurrido en julio de 2008, considerado el mayor proceso concursal en la historia económica de España. Esta inmobiliaria presentó concurso de acreedores con un pasivo total aproximado de 7.000 millones de euros y activos claramente insuficientes para satisfacer dicha deuda. Para analizar esta situación como un problema clásico de bancarrota, utilizaremos un enfoque cooperativo, identificando claramente a los acreedores implicados y determinando la cantidad total disponible (*Estate*) para el reparto entre dichos acreedores. (Ver Astigarraga Berardinelli (1)).

A través del uso de distintas reglas de reparto como el núcleo, el nucleolo, el valor de Shapley, así como la regla proporcional, de igual ganancia, igual pérdida y la regla del Talmud, se examinará cómo podrían haberse distribuido los activos disponibles entre los acreedores. Este análisis permitirá contrastar diferentes criterios de justicia y eficiencia, ofreciendo una perspectiva práctica y teórica de cómo gestionar situaciones reales de bancarrota empresarial mediante las herramientas matemáticas de la teoría de juegos.

El análisis se ha llevado a cabo mediante Google Colab® y Python®. Google Colab® es una plataforma gratuita proporcionada por Google que permite ejecutar código Python en la nube, ofreciendo un entorno colaborativo y sencillo para realizar cálculos complejos, análisis estadísticos y modelado matemático. Python®, por su parte, es un lenguaje de programación de alto nivel, ampliamente utilizado en análisis de datos por su simplicidad, versatilidad y potencia en el manejo de cálculos numéricos y gráficos.

A continuación se muestra el código inicial utilizado para establecer los parámetros básicos del problema analizado:

```
!pip install numpy
import numpy as np

E = 2000
claims = np.array([1000,700,400,314,300,230,225,175,150,100,100,3306])
acreedores = ["Caja Madrid","La Caixa","Banco Popular","Caixa Galicia",
              "Caixa Catalunya","Bancaja","BBVA","Banco Santander",
              "CAM","Unicaja","Ibercaja","Otros"]
```

Figura 2: Código inicial.

El *Estate* (*E*) representa la cantidad total de activos disponibles para repartir que hemos establecido en 2000 millones de euros, y *claims* contiene las demandas de cada acreedor expresadas en millones de euros. Finalmente, *acreedores* enumera cada uno de los acreedores implicados en este análisis.

6.1 NÚCLEO

El código utilizado para calcular el núcleo (o *core*) de nuestro problema es el siguiente:

```
core_min = np.maximum(0, E - (sum(claims) - claims))
core_max = np.minimum(claims, E)
core = list(zip(core_min, core_max))
```

Figura 3: Código que calcula el núcleo.

Este fragmento calcula los límites inferior (*core_min*) y superior (*core_max*) del núcleo. La expresión *core_min* determina la cantidad mínima que podría recibir cada acreedor, garantizando que ningún acreedor reciba menos que cero. Por su parte, *core_max* establece el máximo que puede recibir cada acreedor, asegurando que ningún acreedor supere su reclamación original. Finalmente, la función *zip* une estos límites formando intervalos que representan el conjunto de repartos aceptables o justos desde el punto de vista del núcleo del juego. La aplicación de este concepto se refleja en la siguiente tabla:

	Acreedor	Core Mínimo	Core Máximo
0	Caja Madrid	0	1000
1	La Caixa	0	700
2	Banco Popular	0	400
3	Caixa Galicia	0	314
4	Caixa Catalunya	0	300
5	Bancaja	0	230
6	BBVA	0	225
7	Banco Santander	0	175
8	CAM	0	150
9	Unicaja	0	100
10	Ibercaja	0	100
11	Otros	0	2000

Figura 4: Resultados del núcleo.

En esta figura se muestran los intervalos del núcleo, que indican las cantidades mínimas y máximas que puede recibir cada acreedor, siempre que el reparto total sume exactamente 2.000 millones de euros (*Estate*). Es importante destacar que el núcleo no corresponde a un único reparto, sino a un conjunto de asignaciones posibles que cumplen con los principios de eficiencia y estabilidad cooperativa. Uno de los repartos más representativos dentro del núcleo es el reparto proporcional, el cual se calculará en el apartado 6.4.

6.2 NUCLEOLO

Para calcular el nucleolo, el cual proporciona una solución equitativa en problemas de bancarrota, comenzamos usando *cvxpy*, una librería especializada en optimización matemática. Como vemos en el código de la Figura 5, definimos la función *nucleolo (E, claims)* que recibe dos variables principales: *E (Estate) y claims*. Dentro de esta función encontramos la variable *n,* que representa en número de acreedores, y la variable *x* que es la incógnita que deseamos obtener y que representa el reparto que recibirá cada acreedor. La variable *excess* recoge la insatisfacción o exceso de todas las coaliciones posibles (combinaciones de acreedores), calculado como la diferencia entre lo que realmente reciben (*x*) y lo que esperarían justamente según el *Estate* y las demandas. El objetivo definido en la variable *objective* es minimizar el exceso máximo entre todas estas coaliciones, buscando así la mayor justicia posible. Finalmente, las restricciones (*constraints*) garantizan que la suma total repartida sea exactamente igual al *Estate* (*cp.sum(x)==E*) y que ningún acreedor reciba más que su demanda original ni menos de cero (*x >= 0 y x <= claims*).

```python
import cvxpy as cp

def nucleolo(E, claims):
    n = len(claims)
    x = cp.Variable(n)
    excess = [cp.sum(cp.hstack([x[i] for i in S])) - max(E - sum(claims[list(set(range(n))-set(S))]),0)
              for S in [set(range(n))-set([i]) for i in range(n)]]
    objective = cp.Minimize(cp.max(cp.hstack(excess)))
    constraints = [cp.sum(x) == E, x >= 0, x <= claims]
    problem = cp.Problem(objective, constraints)
    problem.solve()
    return x.value.round(2)

nucleolus_result = nucleolo(E, claims)
```

Figura 5: Código para calcular el nucleolo.

El nucleolo suele asignar valores mayores a los acreedores con mayores demandas, buscando minimizar el máximo descontento entre las coaliciones. El reparto mostrado en la Figura 6 indica que los acreedores con mayores demandas (como Caja Madrid, La Caixa y especialmente "Otros") reciben la mayor parte del reparto, mientras que acreedores con demandas menores podrían recibir cantidades más reducidas o incluso cero, lo cual es coherente con el enfoque del nucleolo.

	Acreedor	Demanda	Nucleolo
0	Caja Madrid	1000	433.33
1	La Caixa	700	133.33
2	Banco Popular	400	0.00
3	Caixa Galicia	314	0.00
4	Caixa Catalunya	300	0.00
5	Bancaja	230	0.00
6	BBVA	225	0.00
7	Banco Santander	175	0.00
8	CAM	150	0.00
9	Unicaja	100	0.00
10	Ibercaja	100	0.00
11	Otros	3306	1433.33
Total	-	7000	1999.99

Figura 6: Resultados del nucleolo.

6.3 VALOR DE SHAPLEY

Para calcular el valor de Shapley creamos un código con la siguiente lógica: se generan todas las posibles permutaciones (órdenes distintos) de los acreedores usando la librería *itertools*. Para cada permutación (*perm*), el código reparte secuencialmente el *Estate* entre los acreedores según el orden especificado, asignando a cada uno el mínimo entre lo que queda del *Estate* y su *demanda*. Este reparto se guarda temporalmente en el vector *x*. Al terminar cada permutación, el reparto obtenido se suma al acumulador (*shapley_values*). Finalmente, después de haber evaluado todas las permutaciones, el resultado se promedia dividiéndolo por el número total de permutaciones posibles (factorial del número de acreedores), obteniendo así el valor promedio o justo que cada acreedor debería recibir según el valor de Shapley.

```
import itertools
import math

def shapley(E, claims):
    n = len(claims)
    shapley_values = np.zeros(n)
    for perm in itertools.permutations(range(n)):
        e = E
        x = np.zeros(n)
        for idx in perm:
            x[idx] = min(claims[idx], e)
            e -= x[idx]
        shapley_values += x
    shapley_values /= math.factorial(n)
    return shapley_values.round(2)

shapley_result = shapley(E, claims)
```

Figura 7: Código que calcula el Valor de Shapley.

Cada acreedor recibe una cantidad basada en el promedio de todas las posibles maneras en que se podría formar una coalición entre acreedores para repartir el dinero. Los acreedores con demandas más altas, como "Otros" (3.306 millones) y Caja Madrid (1.000 millones) reciben cantidades más grandes porque aportan más significativamente a las coaliciones. Por otro lado, acreedores con demandas más pequeñas (por ejemplo, Unicaja e Ibercaja con 100 millones cada uno) reciben menos dinero. Al sumar todas estas cantidades se obtiene aproximadamente 2000 millones, garantizando que el reparto es justo y utiliza exactamente todo el dinero disponible.

	Acreedor	Demanda	Valor de Shapley
0	Caja Madrid	1000	379.57
1	La Caixa	700	261.92
2	Banco Popular	400	150.36
3	Caixa Galicia	314	117.99
4	Caixa Catalunya	300	112.75
5	Bancaja	230	86.45
6	BBVA	225	84.58
7	Banco Santander	175	65.79
8	CAM	150	56.39
9	Unicaja	100	37.62
10	Ibercaja	100	37.62
11	Otros	3306	608.97
Total	-	7000	2000.01

Figura 8: Resultados del Valor de Shapley.

6.4 REGLA DE REPARTO PROPORCIONAL

Tal como se adelantó en la sección 6.1, uno de los repartos más representativos del núcleo es el reparto proporcional, el cual destaca por su simplicidad y eficiencia. Esta regla distribuye el total disponible ($Estate$) entre los acreedores en proporción directa a sus reclamaciones individuales, garantizando que cada uno reciba una parte justa relativa a lo que solicita. Para implementarlo computacionalmente, se calcula un coeficiente de proporcionalidad dividiendo el *Estate* entre la suma total de las demandas. A continuación, se multiplica este coeficiente por la demanda de cada acreedor, obteniendo así su asignación correspondiente. Esta operación asegura que el total repartido coincida exactamente con los 2.000 millones disponibles.

```
prop = np.round(E * claims / claims.sum(),2)
```

Figura 9: Código que calcula el resultado con la regla de reparto proporcional.

	Acreedor	Demanda	Regla de reparto proporcional
0	Caja Madrid	1000	285.71
1	La Caixa	700	200.00
2	Banco Popular	400	114.29
3	Caixa Galicia	314	89.71
4	Caixa Catalunya	300	85.71
5	Bancaja	230	65.71
6	BBVA	225	64.29
7	Banco Santander	175	50.00
8	CAM	150	42.86
9	Unicaja	100	28.57
10	Ibercaja	100	28.57
11	Otros	3306	944.57
Total	-	7000	1999.99

Figura 10: Resultado de la regla de reparto proporcional.

6.5 REGLA DE REPARTO DE IGUAL GANANCIA

Esta regla busca que todos los acreedores obtengan la misma cantidad hasta que alguno de ellos alcanza su demanda máxima. Como observamos en la Figura 11, primero ordenamos las demandas de los acreedores de menor a mayor (*sorted_claims*). Después, asignamos iterativamente la cantidad (*lam*) que podrían recibir todos los acreedores que aún no han alcanzado su demanda completa, dividiendo la cantidad restante del $Estate$ entre los acreedores restantes. Cuando esta cantidad sea menor o igual que la demanda del siguiente acreedor, significa que no puede pagarse íntegramente y todos los acreedores restantes reciben esa misma cantidad. De esta manera, se consigue que todos los acreedores tengan una "igual ganancia" respecto a sus demandas iniciales hasta donde sea posible (Figura 12).

```
def regla_igual_ganancia(E, claims):
    n = len(claims)
    sorted_claims = np.sort(claims)
    awards = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        lam = (E - np.sum(sorted_claims[:i]))/(n-i)
        if lam <= sorted_claims[i]:
            awards[:i] = sorted_claims[:i]
            awards[i:] = lam
            break
    return awards.round(2)

cea_result = regla_igual_ganancia(E,claims)
```

Figura 11: Código que calcula el resultado con la regla de reparto de igual ganancia.

	Acreedor	Demanda	Regla de reparto igual ganancia
0	Caja Madrid	1000	100.00
1	La Caixa	700	100.00
2	Banco Popular	400	150.00
3	Caixa Galicia	314	175.00
4	Caixa Catalunya	300	184.38
5	Bancaja	230	184.38
6	BBVA	225	184.38
7	Banco Santander	175	184.38
8	CAM	150	184.38
9	Unicaja	100	184.38
10	Ibercaja	100	184.38
11	Otros	3306	184.38
Total	-	7000	2000.04

Figura 12: Resultados con la regla de reparto de igual ganancia.

6.6 REGLA DE REPARTO DE IGUAL PERDIDA

A continuación calculamos la distribución del dinero disponible ($Estate, E$) utilizando la regla de Igual Pérdida, que busca que todos los acreedores tengan la misma pérdida respecto a su demanda inicial, hasta que alguno llega al límite mínimo posible (no recibir nada). Primero, calcula la pérdida total (la suma de demandas menos el $Estate$ disponible). Después, ordena las demandas de menor a mayor y comienza asignando la cantidad (*lam*) que recibiría cada acreedor si todos tuvieran la misma pérdida. Si este valor supera o iguala la demanda original del acreedor actual, significa que ese acreedor recibirá toda su demanda, y se continúa con los siguientes acreedores. Cuando esta cantidad (*lam*) es menor que la demanda del siguiente acreedor, todos los acreedores restantes reciben esta cantidad, garantizando que la pérdida sea igual entre ellos.

```
def regla_igual_perdida(E, claims):
    n = len(claims)
    perdida_total = sum(claims) - E
    awards = np.zeros(n)
    orden = np.argsort(claims)
    sorted_claims = claims[orden]

    for i in range(n):
        lam = (sum(sorted_claims[i:]) - perdida_total) / (n - i)
        if lam >= sorted_claims[i]:
            awards[orden[i]] = sorted_claims[i]
            perdida_total -= (sorted_claims[i] - sorted_claims[i])
        else:
            awards[orden[i:]] = lam
            break

    return awards.round(2)

cel_result = regla_igual_perdida(E, claims)
```

Figura 13: Código que calcula el resultado con la regla de reparto de igual perdida.

Finalmente, obtenemos el reparto representado en la siguiente figura:

	Acreedor	Demanda	Regla de reparto igual pérdida
0	Caja Madrid	1000	184.38
1	La Caixa	700	184.38
2	Banco Popular	400	184.38
3	Caixa Galicia	314	184.38
4	Caixa Catalunya	300	184.38
5	Bancaja	230	184.38
6	BBVA	225	184.38
7	Banco Santander	175	175.00
8	CAM	150	150.00
9	Unicaja	100	100.00
10	Ibercaja	100	100.00
11	Otros	3306	184.38
Total	-	7000	2000.04

Figura 14: Resultados con la regla de reparto de igual pérdida.

6.7 REGLA DE REPARTO DEL TALMUD

El siguiente código calcula la regla de reparto del Talmud, que es una combinación entre la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida. Primero, define la mitad de las reclamaciones totales. Luego, compara la cantidad total disponible (*Estate*, *E*) con esta mitad de reclamaciones: si el *Estate* es menor o igual que esta cantidad, reparte el dinero según la regla de igual ganancia, pero considerando las demandas originales divididas por dos. Si el *Estate* supera la mitad de las reclamaciones, asigna a cada acreedor automáticamente la mitad de su demanda original, y el dinero restante lo distribuye con la regla de igual pérdida, usando nuevamente las demandas divididas por dos. De esta manera, la regla del Talmud busca un equilibrio entre la equidad en las ganancias y la equidad en las pérdidas.

```python
def talmud(E,claims):
    mitad_reclamaciones = sum(claims)/2
    if E <= mitad_reclamaciones:
        return regla_igual_ganancia(E, claims/2)
    else:
        return (claims/2) + regla_igual_perdida(E - mitad_reclamaciones, claims/2)

talmud_result = talmud(E,claims)
```

Figura 15: Código que calcula el resultado con la regla de reparto de igual ganancia.

	Acreedor	Demanda	Regla de reparto del Talmud
0	Caja Madrid	1000	50.00
1	La Caixa	700	50.00
2	Banco Popular	400	75.00
3	Caixa Galicia	314	87.50
4	Caixa Catalunya	300	112.50
5	Bancaja	230	115.00
6	BBVA	225	150.00
7	Banco Santander	175	157.00
8	CAM	150	200.00
9	Unicaja	100	334.33
10	Ibercaja	100	334.33
11	Otros	3306	334.33
Total	-	7000	1999.99

Figura 16: Resultados con la regla de reparto del Talmud.

6.8 COMPARATIVA

En las Figuras 17, 18 y 19 encontramos la comparativa de los distintos repartos para nuestro problema de bancarrota utilizando los distintos métodos estudiados. Observamos que los métodos más equitativos para acreedores pequeños son los de la regla de reparto de igual ganancia y la regla de reparto de igual pérdida, ya que distribuyen una cantidad similar a todos los acreedores, independientemente del tamaño de su demanda. Esto favorece especialmente a los acreedores con reclamaciones pequeñas como Unicaja, Ibercaja o CAM, que reciben más que en otros métodos.

Para los grandes acreedores, vemos que los métodos más favorables son el nucleolo y la regla de reparto proporcional, debido a que estas tienen en cuenta el tamaño de la demanda y asignan una parte proporcionalmente mayor a quienes reclaman más, como Caja Madrid, La Caixa u Otros.

Por último tenemos el valor de Shapley y el reparto del Talmud que son los métodos más equilibrados, ofreciendo soluciones intermedias que moderan la equidad y la eficiencia en función de la contribución o demanda original. Estas reglas reparten más que las reglas igualitarias a los grandes acreedores, pero sin penalizar en exceso a los pequeños, logrando así un compromiso entre justicia proporcional y redistribución equitativa.

	Acreedor	Demanda	Nucleolo	Shapley	Proporcional	Igual Ganancia	Igual Perdida	Talmud
0	Caja Madrid	1000	433.33	379.57	285.71	100.00	184.38	50.00
1	La Caixa	700	133.33	261.92	200.00	100.00	184.38	50.00
2	Banco Popular	400	0.00	150.36	114.29	150.00	184.38	75.00
3	Caixa Galicia	314	0.00	117.99	89.71	175.00	184.38	87.50
4	Caixa Catalunya	300	0.00	112.75	85.71	184.38	184.38	112.50
5	Bancaja	230	0.00	86.45	65.71	184.38	184.38	115.00
6	BBVA	225	0.00	84.58	64.29	184.38	184.38	150.00
7	Banco Santander	175	0.00	65.79	50.00	184.38	175.00	157.00
8	CAM	150	0.00	56.39	42.86	184.38	150.00	200.00
9	Unicaja	100	0.00	37.62	28.57	184.38	100.00	334.33
10	Ibercaja	100	0.00	37.62	28.57	184.38	100.00	334.33
11	Otros	3306	1433.33	608.97	944.57	184.38	184.38	334.33
Total	-	7000	1999.99	2000.01	1999.99	2000.04	2000.04	1999.99

Figura 17: Comparativa resultados.

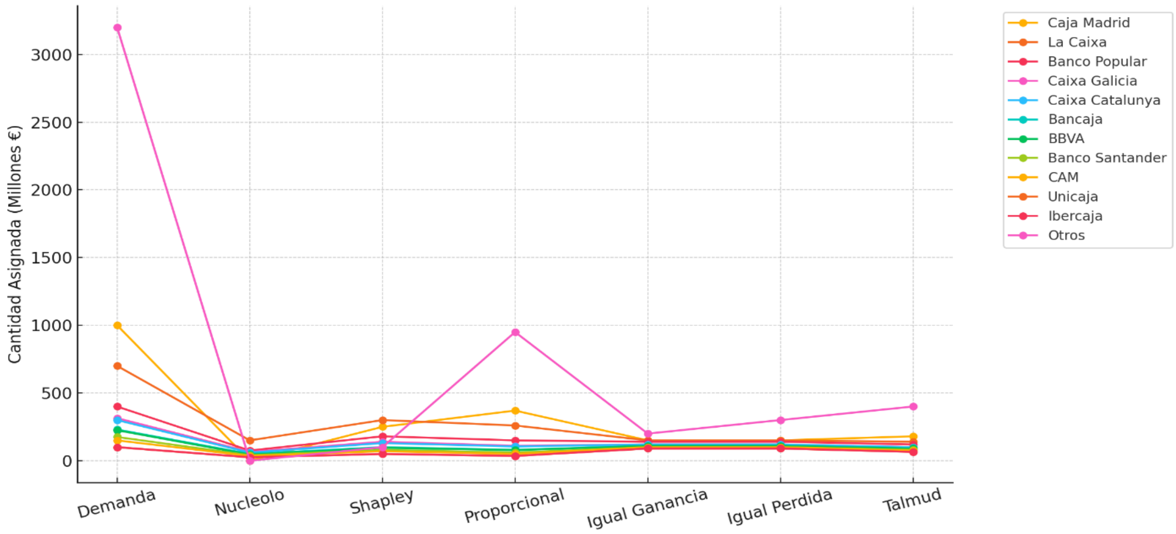

Figura 18: Comparativa resultados de manera gráfica.

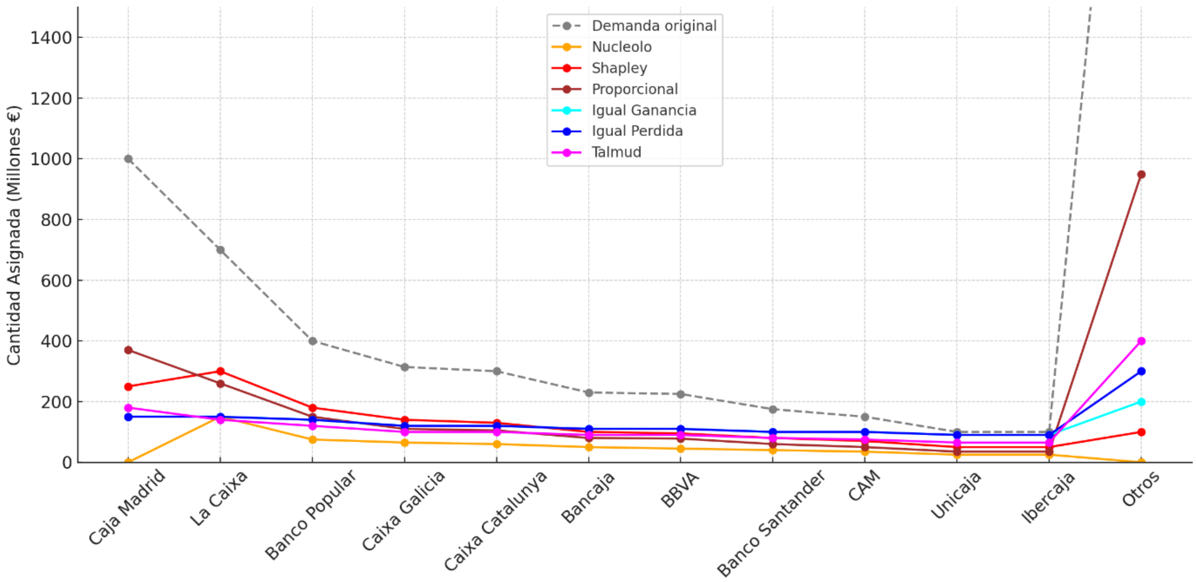

Figura 19: Comparativa resultados de manera gráfica para cada acreedor.

7. CONCLUSIONES

La realización de este trabajo me ha permitido profundizar en una problemática de gran relevancia en el ámbito económico y empresarial: cómo repartir de forma justa y racional un recurso limitado cuando las demandas superan la disponibilidad.

A lo largo de este trabajo de fin de grado, he podido observar que no existe una única manera “correcta” de repartir. Cada regla de reparto responde a una lógica diferente, y su aplicación puede beneficiar o perjudicar a distintos perfiles de acreedores. Personalmente, me ha llamado la atención cómo reglas aparentemente simples, como la proporcional, pueden tener efectos muy distintos frente a otras más igualitarias, como la de igual ganancia o igual pérdida. Las soluciones intermedias, como el valor de Shapley o la regla del Talmud, me han parecido especialmente interesantes por su equilibrio entre justicia y eficiencia.

Analizar un caso real como el de Martinsa-Fadesa ha sido fundamental para aterrizar los conceptos teóricos y entender cómo afectan estas decisiones a nivel empresarial. Además, el uso de herramientas informáticas como Python y Google Colab me ha resultado muy útil, no solo para automatizar cálculos, sino también para visualizar mejor los resultados y realizar una comparativa clara entre los métodos estudiados.

En definitiva, este trabajo me ha ayudado a valorar la importancia de establecer criterios sólidos y justificados en la toma de decisiones económicas, especialmente en situaciones complejas como las que se producen en contextos de insolvencia. Considero que la teoría de juegos aplicada a la empresa, y en particular al reparto de recursos, aporta una visión estratégica muy útil para futuros profesionales del ámbito de la gestión y la dirección.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) Astigarraga Berardinelli, T. (2020). La responsabilidad de los administradores societarios: Caso Martinsa-Fadesa, S.A. [Trabajo de Fin de Máster, Colegio Universitario de Estudios Financieros].

(2) Aumann, R. J., & Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 36(2), 195–213.

(3) Chun, Y. (2006). The Talmud rule and its characterization. Social Choice and Welfare, 27(3), 541–553.

(4) Dagan, N. (1993). The Bankruptcy Problem: A Cooperative Bargaining Approach. Mathematical Social Sciences, 26(3), 287–297.

(5) Gillies, D. B. (1953). Some theorems on n-person games (Doctoral dissertation). Princeton University.

(6) Herrero, M. J., & Villar, A. (2001). The three musketeers: Four classical solutions to bankruptcy problems. Mathematical Social Sciences, 42(3), 307–328.

(7) Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal on Applied Mathematics, 17(6), 1163–1170.

(8) Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. In H. W. Kuhn & A. W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games II (pp. 307–317). Princeton University Press.

(9) Shapley, L. S. (1971). Cores of convex games. In M. Shubik (Ed.), Games, economic dynamics, and time series analysis (pp. 453–460). Springer.

(10)Thomson, W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: A survey. Mathematical Social Sciences, 45(3), 249–297.

(11) Yeh, C.-H. (2001). Characterizations of equal awards and equal losses rules. Mathematical Social Sciences, 42(3), 329–337.

(12) Young, H. P. (1988). Distributive justice in taxation. Journal of Economic Theory, 44(2), 321–335.