

Universidad de Valladolid

**Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales**

Trabajo Fin de Grado

**Grado en Administración y Dirección de
Empresas**

**Duopolio en la explotación forestal: Un análisis
desde la teoría de juegos y dinámica de sistemas**

Presentado por:

Yefrey Jordan Montes Velasquez

Tutelado por:

Francisco José Cabo García

Valladolid, 2 de Julio de 2025

Resumen:

Este trabajo de fin de grado se centra en el estudio de las interacciones estratégicas entre dos empresas que compiten en la explotación forestal. A través de la teoría de juegos y dinámica de sistemas se estudia cómo distintas estructuras de costes influyen en la explotación de un recurso forestal. Se introducen variables como la capacidad de carga, la inversión, la tasa de regeneración del bosque y el grado de conciencia ambiental. La simulación se desarrolla con PowerSim, permitiendo obtener datos de la evolución del stock forestal, precio, cantidad y stock de capital acumulado en el tiempo. El objetivo es evaluar cómo interactúan estas variables y qué escenarios conducen a una explotación sostenible, o bien a la sobreexplotación del recurso.

Palabras claves: Teoría de juegos; Equilibrio de Nash; Dinámica de sistemas.

Abstract:

This Final Degree Project focuses on the study of the strategic interactions between two companies that compete to exploit a forest. Using Game Theory and Systems Dynamics, the study explores how different cost structures influence the exploitation of the forest. The model introduces variables such as carrying capacity, investment, forest regeneration rate, and environmental awareness. The simulation is developed using PowerSim, providing data on the evolution of forest stocks, price, quantity, and accumulated capital stock over time. The aim is to evaluate how these variables interact and what scenarios lead to sustainable exploitation or overexploitation of the resource.

Keyword: Games Theory; Nash Equilibrium; System Dynamics.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	3
2. METODOLOGÍA	4
3. LA TEORIA DE JUEGOS Y EL DUOPOLIO DE COURNOT	4
3.1. Breve recorrido a la teoría de juegos	4
3.2. Los elementos de un juego	5
3.3. Clasificación de Juegos	6
3.4. Duopolio de Cournot y Equilibrio de Nash	8
3.5. Cálculo del equilibrio Cournot-Nash en un modelo estático	9
3.6. Equilibrio Cournot-Nash en un modelo dinámico de extracción forestal	11
3.6.1 Modelo de costes lineales.....	12
3.6.2 Modelo de costes cuadráticos.....	13
3.6.3 Modelo de crecimiento logístico.....	14
3.6.4 Stock de capital de las empresas	15
3.7. Dinámica de sistemas	15
4. APLICACIONES Y ANÁLISIS DEL MODELO	17
4.1. Análisis del modelo con costes lineales	17
4.1.1. Evolución del stock forestal	18
4.1.2. Evolución de las cantidades.....	19
4.1.3. Evolución del precio	21
4.2. Análisis del modelo con costes cuadráticos	22
4.2.1. Evolución stock forestal.....	23
4.2.2. Evolución de las cantidades.....	24
4.2.3. Evolución del precio	25
4.3. Análisis de sensibilidad de las variables con costes cuadráticos	27
4.4. Análisis de la influencia de la inversión	29
5. CONCLUSIÓN	31
6. BIBLIOGRAFÍA	33

ÍNDICE GRAFICAS E ILUSTRACIONES.

Ilustración 1. Representación de la matriz de pagos	8
Grafica 1. Equilibrio Cournot-Nash.....	10
Grafica 2. Evolución del stock forestal en el modelo lineal	18
Grafica 3. Evolución de la cantidad en el modelo lineal	20
Grafica 4. Evolución del precio en el modelo lineal.....	21
Grafica 5. Evolución del stock forestal en el modelo cuadrático	23
Grafica 6. Evolución de la cantidad en el modelo cuadrático.....	24
Grafica 7. Evolución del precio en el modelo cuadrático	26
Grafica 8. Evolución del stock forestal ante cambio de las variables.....	27
Grafica 9. Influencia de la inversión en el stock forestal.....	29
Grafica 10. Influencia de la inversión en el capital acumulado	30
Grafica 11. Influencia de la inversión en el precio	31

1. INTRODUCCIÓN

El equilibrio entre el desarrollo económico y la preservación del medioambiente ha sido un tema de discusión política/económica, al que se han buscado diversas soluciones. En un contexto globalizado, caracterizado por el cambio climático y la creciente sobreexplotación de los recursos naturales, tenemos que entender cómo actúan e intervienen los distintos agentes económicos que explotan los recursos naturales del planeta.

La Teoría de Juegos, se define como: la metodología que analiza la toma de decisiones en el que participan varios agentes decisores y donde las decisiones de cada jugador tienen efectos sobre los otros. El nacimiento de la Teoría de Juegos puede asociarse a Von Neumann y Morgenstern (1944), obra que sentó las bases de esta disciplina, como rama de las Matemáticas y la Economía.

Asimismo, existieron precedentes significativos que servirían como pilares fundamentales para esta disciplina, como la planteada en el modelo de duopolio por Antonie Cournot (1838), que nos permitirá estudiar la competencia oligopolista. Este modelo introduce, ya, algunos principios básicos que posteriormente se formalizarían en el equilibrio de Nash.

En este Trabajo de fin de Grado haremos un análisis empleando el programa PowerSim, que nos permitirá simular distintos escenarios y observar la evolución del área forestal con el transcurso del tiempo. Gracias a estas simulaciones obtendremos distintas conclusiones, que nos permitirán determinar si la explotación forestal es sostenible, o bien, qué políticas ambientales podríamos implementar para llegar a un equilibrio ambiental.

La elección de este tema se debe al interés por analizar el comportamiento estratégico de los distintos agentes decisores, al competir por un recurso limitado. Es importante buscar modelos que permitan explicar cómo el comportamiento de agentes que buscan maximizar su beneficio económico influye en la preservación de los recursos limitados del planeta. Asimismo, el objeto de este trabajo no es el de profundizar en los aspectos formales de la teoría de juegos, sino aplicar los principios fundamentales de la misma, en un caso concreto: la gestión de un bosque. La revisión teórica en este trabajo se

abordará de manera breve y estará orientada exclusivamente en proporcionar un marco teórico útil para entender el modelo.

2. METODOLOGÍA

Este trabajo combina un enfoque teórico con la aplicación práctica mediante la simulación, a través de la dinámica de sistemas. Se partirá del modelo clásico de Cournot, en particular, un duopolio adaptado al contexto de la explotación forestal. Este modelo nos permitirá representar el contexto en el que dos empresas compiten por la extracción de madera. Cada empresa decide, de manera racional e independientemente, qué cantidad de madera talar. Esta decisión afectará al precio de mercado y, por ende, al beneficio propio, pero también al beneficio del competidor. Además, se introduce una función de crecimiento logístico para la regeneración del área forestal. Dicha función representa el comportamiento del ecosistema, introduciendo dos conceptos claves, como la capacidad de carga y la tasa de crecimiento natural.

Para la interpretación y la aplicación se empleará el software de simulación PowerSim, herramienta que nos permitirá modelar este sistema dinámico de manera clara y simple. Se simulará un entorno forestal que se verá determinado por las estrategias de extracción y variables exógenas introducidas en el modelo. Analizaremos su evolución a lo largo del tiempo mediante gráficas y tablas de datos. PowerSim nos permitirá trabajar de una manera sencilla, simulando la evolución del sistema descrito a través de ecuaciones en diferencias, acumulaciones de flujo o las distintas relaciones que existen entre las variables. Gracias a PowerSim es sencillo pasar de un modelo teórico estático a un modelo dinámico que nos permitirá analizar la evolución del stock de madera en el tiempo.

3. LA TEORIA DE JUEGOS Y EL DUOPOLIO DE COURNOT

3.1. Breve recorrido a la teoría de juegos

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas aplicadas que se encarga de estudiar las decisiones estratégicas de los agentes económicos. Ésta puede datarse en el año 1713 con el trabajo del matemático francés James Waldegrave, que escribió una carta en la que planteaba una solución de estrategias mixtas para un juego de cartas de 2

jugadores. Posteriormente, Antoine Augustin Cournot publica, en 1838, el libro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. En este libro se plantea un modelo de duopolio en el que dos empresas deciden cuánto producir para obtener su máximo beneficio. La solución del modelo será el predecesor del equilibrio de Nash.

La publicación de Von Neumann y Morgenstern del libro *Theory of Games and Economic Behaviour*, puede definirse como el primer trabajo en el que se define, de forma rigurosa el marco teórico de la Teoría de Juegos. Un hito esencial en la teoría de juegos se consiguió con la publicación en 1951 de *Non-Cooperative games*. En este trabajo, John Nash, estudiante de Princeton, propone el famoso concepto del equilibrio de Nash, aplicándolo en juegos no cooperativos.

Los años siguientes a la década de los 50, fueron años clave para la disciplina, debido a la gran aportación de distintos autores, de las que destacaremos obras como:

- *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Parts I-III* de Harsanyi (1967): formula un modelo de teoría de juegos con información incompleta.
- *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games* de Selten (1975): introduce el concepto del equilibrio perfecto en subjuegos en juegos dinámicos.
- *Who Gets What and Why: The New Economics of Matchmaking and Market Design* de Roth (2015): aplica la teoría de juegos a problemas reales que nos competen día a día.

La teoría de juegos nace por la necesidad de intentar predecir y explicar el comportamiento de los distintos agentes que interactúan en los ámbitos políticos, sociales y económicos.

3.2. Los elementos de un juego

Un juego se define por los siguientes elementos:

- **Jugadores:** Son las distintas entidades que han de tomar decisiones en los juegos. Abarcan desde personas, empresas, países, etc. Un juego puede tener dos o más jugadores.

- **Estrategia y perfiles estratégicos:** Son las acciones o comportamientos que deben decidir los jugadores. Estas acciones se situarán dentro de un abanico de posibilidades. Un Perfil estratégico será la suma de todo este conjunto de estrategias. Un jugador elegirá la estrategia que le dé el mejor resultado.
- **Entorno:** es el medio en el que tiene lugar el juego y donde interactúan los jugadores.
- **Información:** conocimiento sobre el juego al que tienen acceso los jugadores.
- **Pagos:** recompensa o resultados que obtienen los jugadores, teniendo en cuenta las estrategias empleadas por cada jugador y las decisiones del resto.
- **Resultado:** se define como el pago que recibe finalmente cada jugador.

3.3. Clasificación de Juegos

La clasificación de los juegos es diversa y extensa. Por un lado, podemos encontrar juegos cooperativos o no cooperativos; juegos estáticos o dinámicos; juegos con información perfecta o imperfecta; juegos en variable continua o discreta.

A continuación, se explicará de manera resumida cada variante o clasificación de tipo de juegos. Teniendo en cuenta la relación que tienen los jugadores podemos clasificar los juegos en cooperativos o no cooperativos:

- **Los juegos cooperativos:** son aquellos juegos en los que los jugadores tienen relación de colaboración o actúan de manera conjunta, con la finalidad de lograr beneficios conjuntamente.
- **Los Juegos no cooperativos:** son aquellos en los que los jugadores no tienen ningún tipo de colaboración. Cada jugador maximizara su propio beneficio.

Teniendo en cuenta la visión temporal de los jugadores podemos distinguir entre juegos dinámicos o estáticos.

- **Los juegos estáticos:** Se caracterizan porque los jugadores únicamente tienen en cuenta el efecto instantáneo de sus decisiones y las de otros jugadores.
- **los juegos dinámicos:** En ellos, los jugadores tienen en cuenta en qué medida las decisiones actuales tendrán efectos en el futuro.

Según la información de que dispongan los jugadores del mercado o entorno, podemos distinguir entre juegos con información completa o incompleta.

- **Juegos con información completa:** son aquellos juegos en los que todos los jugadores tienen acceso a información, sobre las estrategias, pagos y preferencias de todos los jugadores
- **juegos con información incompleta:** son aquellos en los que los jugadores no conocen toda la información acerca de las estrategias como pagos o preferencias de otros jugadores.

El equilibrio de Nash es un concepto clave en la teoría de juegos no cooperativos tanto de un punto de vista estático como dinámico. La base de este equilibrio es que cada jugador elegirá la estrategia más conveniente teniendo en cuenta al resto de jugadores. Este equilibrio tiene la peculiaridad de que ningún jugador tendría incentivos para cambiar sus estrategias o jugar de distinta forma unilateralmente. La mejor respuesta será aquella estrategia que maximiza su beneficio teniendo en cuenta las estrategias de los demás jugadores.

Tras haber hecho un breve recorrido histórico y explicar los principales componentes de un juego, así como sus distintas variantes, explicaré lo que es un juego a través de un ejemplo sencillo. Para ello, utilizaremos una variante del famoso juego del dilema del prisionero.

El dilema del prisionero es un juego simple no cooperativo, que nos permite entender con mayor facilidad qué es un juego y la finalidad de éste. Adaptaremos dicho juego a nuestro contexto, la gestión forestal.

Para ello representaremos el juego de manera estratégica/normal. Tenemos dos empresas que talar una misma área forestal. Ambas empresas decidirán:

- Talar de manera excesiva, consiguiendo una elevada renta, pero reduciendo el área forestal, lo que perjudica a ambos jugadores.
- Talar de manera respetuosa con el medio ambiente teniendo menos renta, pero permitiendo que el área forestal se regenere y que el recurso natural no se vuelva escaso.

La matriz de pagos puede escribirse como:

Ilustración 1. Representación de la matriz de pagos

	Empresa 2: Excesiva	Empresa 2: Respetuosa
Empresa 1: Excesiva	5,5	8,3
Empresa 1: Respetuosa	3,8	6,6

Llegaremos a la siguiente conclusión:

El equilibrio de Nash se alcanzará cuando ambas empresas talen de manera excesiva, ya que es la mejor respuesta a cada situación. El óptimo social se alcanza cuando ambas son respetuosas con el medio ambiente, si bien no es alcanzable cuando se juega de forma no cooperativa. Esta es una mejor situación ya que la cantidad ofertada sería menor provocando que los precios en este escenario sean mayores consiguiendo unos mayores beneficios y mejor conservación del medio ambiente. Sin embargo, el equilibrio de Nash estará situado en la tala excesiva de ambas empresas, debido a que:

- Si una empresa espera que la otra modere su tala, esto incentivará una tala excesiva.
- Si una empresa espera que la otra tale de manera excesiva, también talará de forma excesiva.
- Ambas empresas no cooperan por lo que no pueden ponerse de acuerdo.

En este planteamiento, el equilibrio de Nash, que obedece a un comportamiento racional y egoísta de los jugadores, no tiene en cuenta el agotamiento de los recursos naturales, produciendo un gran impacto ambiental, abocando a la famosa “tragedia de los comunes”

Este dilema será la base fundamental de este Trabajo de Fin de Grado, que nos permitirá gracias a PowerSim, ver cómo distintos factores afectan al comportamiento estratégico de los distintos jugadores y al área forestal.

3.4. Duopolio de Cournot y Equilibrio de Nash

El modelo de Cournot es un modelo matemático que nos permite estudiar la competencia en mercados oligopolísticos, donde la variable clave es la cantidad producida por las empresas. Las empresas determinan la cantidad a producir, teniendo en cuenta que el precio de venta depende de la suma de las ofertas. Este modelo se formuló en 1838 por Auguste Cournot, donde se describe un escenario en el que las

empresas compiten para obtener el máxima beneficio posible con una estratégica óptima.

El modelo de Cournot parte de una serie de supuestos: Las empresas deben de producir un producto homogéneo en el que no determinan el precio, sino las cantidades a producir; dichas cantidades se producen de manera simultánea e independiente; los costes marginales son iguales para cada empresa; se asume que no existen restricciones de capacidad, por lo que las empresas podrán cubrir toda la demanda generada por el mercado. En nuestro modelo nos centraremos en el modelo con dos empresas en el mercado, denominado duopolio de Cournot. En el modelo de Cournot las empresas buscan maximizar su beneficio suponiendo que las decisiones del resto de empresas se mantienen constantes. Se trata de un precedente de lo que hoy se conoce como equilibrio de Nash.

3.5. Cálculo del equilibrio Cournot-Nash en un modelo estático

Para el cálculo del equilibrio de Cournot-Nash, partiremos de una función inversa de demanda que define el precio equilibrio como una función lineal decreciente de la producción total:

$$P(Q) = a - Q, a > 0, Q = q_1 + q_2.$$

- El coste de producción de la empresa i, se supone lineal: $c_i(q_i) = c_i * q_i, c_i > 0$.
- Las estrategias de los jugadores vienen dadas por las cantidades producidas:
 $q_1 \in [0, \infty), q_2 \in [0, \infty)$.
- Los beneficios de cada empresa son función de las estrategias de ambos jugadores:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1 * (a - (q_1 + q_2)) - c * q_1$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2 * (a - (q_1 + q_2)) - c * q_2$$

Para calcular el equilibrio de Nash, primero deberemos calcular las funciones de mejor respuesta de cada empresa. El equilibrio de Nash, serán aquellas cantidades q_1^N y q_2^N , que satisfacen que la cantidad q_1^N es la mejor respuesta de la empresa 1 frente a q_2 y que la cantidad q_2^N es la mejor respuesta de la empresa 2 frente a q_1 .

Para determinar cada función de mejor respuesta derivaremos cada función de beneficio respecto de las cantidades de cada una e igualaremos a cero. Por lo que obtendremos que:

$$q_1^{MR}(q_2) = \frac{a - q_2 - c}{2} \quad q_2^{MR}(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

La función de beneficio de la empresa i es cóncava respecto a su producción, ya que la segunda derivada es negativa respecto de q_i .

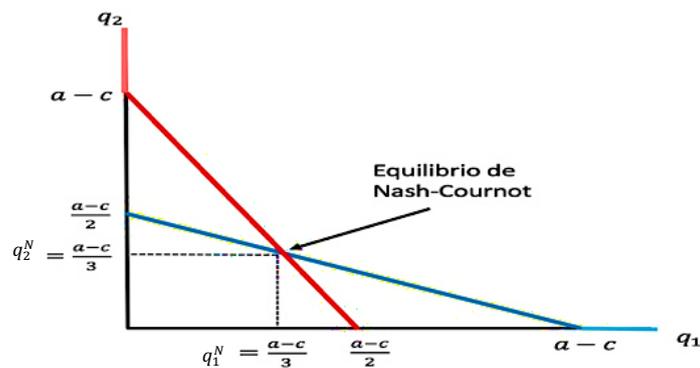
$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} = -2 < 0; i \in \{1, 2\}.$$

Resolvemos el sistema, $q_1 = q_1^{MR}(q_2)$ y $q_2 = q_2^{MR}(q_1)$, para determinar su punto de corte, denominado equilibrio de Cournot-Nash:

$$q_1^N = q_2^N = \frac{a - c}{3}.$$

Supondremos que $a > c$, ya que de no ser así se producirían cantidades negativas cosa ilógica. A continuación, se mostrará gráficamente el equilibrio de Cournot-Nash, así como las distintas funciones $q_1^{MR}(q_2)$ y $q_2^{MR}(q_1)$.

Grafica 1. Equilibrio Cournot-Nash



Fuente. Apuntes de Teoría de Juegos de la U. Carlos III

Las rectas ilustradas en este gráfico representan la mejor respuesta de ambas empresas en un modelo de duopolio de Cournot con costes marginales constantes. En el eje horizontal y vertical tenemos la cantidad producida por q_1 y q_2 respectivamente.

En este modelo cada empresa elegirá la cantidad que producirá, dependiendo de la producción de la otra empresa. El equilibrio se alcanza en (q_1^N, q_2^N) , donde ninguna de ellas tiene incentivos a cambiar su decisión unilateralmente.

Ambas curvas de mejor respuesta tienen pendiente negativa debido a que, si alguna de ellas produce más, reduce el precio y, por tanto, el incentivo de la otras para producir. El punto de corte entre ambas rectas será el equilibrio de Cournot-Nash, punto que indica que ambas empresas actuarán de manera racional, eligiendo la misma cantidad a producir.

3.6. Equilibrio Cournot-Nash en un modelo dinámico de extracción forestal

Introduciremos en el modelo básico de Cournot-Nash, la idea de que la conciencia ambiental de los consumidores incrementa el precio, tanto más cuanto más grave sea el problema ambiental. Así el precio se describe como:

$$P(t) = a - \alpha * (CC - A(t)) - (q_1(t) - q_2(t)). \quad (1)$$

Introduciremos variables clave para generalizar nuestro estudio:

- **A(t)**: Es el área forestal de la zona estudiada. Cuya medida será en m^3 .
- **CC**: Es la capacidad de carga a la que puede llegar el área forestal en el caso de que no hubiese intervención humana. Cuya medida será en m^3 .
- $\alpha * (CC - A(t))$: recoge la presión ambiental del modelo y describe en qué medida la demanda disminuye con la gravedad del problema ambiental. Viene definida por el producto entre el nivel que alcanza el problema ambiental, $(CC - A(t))$, por el nivel de conciencia ambiental de la población, $\alpha \in (0; 0,6)$.
- $\frac{c}{K_i(t)}$: Es el coste por unidad extraída. Donde c será un parámetro que determina el coste de extracción y $K_i(t)$ es el capital acumulado, o nivel tecnológico de extracción a lo largo del tiempo, creciendo en cada período gracias a la inversión fija. El coste real por unidad extraída disminuye a medida que aumenta el capital.

A partir, de estas variables, se construye un modelo dinámico de Cournot para la gestión forestal, con la finalidad de analizar el comportamiento estratégico de las empresas que compiten por la extracción de madera. El modelo representado permite determinar las

decisiones de tala que afectan al área forestal e influyen en la rentabilidad de la empresa a largo plazo.

Se plantearán dos modelos dinámicos con distinta función de costes.

En primer lugar, un modelo con costes lineales (es decir, con un coste marginal de extracción constante) y en segundo lugar otro modelo con costes cuadráticos (incorporando un coste marginal creciente), resultando más caro para la empresa, el extraer grandes cantidades.

Las comparaciones entre ambos modelos permiten entender cómo la función de costes condiciona no sólo a las decisiones estratégicas de las empresas, sino también a la evolución del stock de madera y por ende a la sostenibilidad del sistema.

3.6.1 Modelo de costes lineales

Para nuestro estudio, construiremos un modelo de Cournot. Suponiendo, en primer lugar, una función lineal de costes de extracción.

Las funciones de beneficio de las empresas serán:

$$\pi_1(q_1(t), q_2(t)) = q_1(t) * \left(a - \alpha * (CC - A(t)) - (q_1(t) + q_2(t)) \right) - \frac{c}{K_1(t)} * q_1(t).$$

$$\pi_2(q_1(t), q_2(t)) = q_2(t) * \left(a - \alpha * (CC - A(t)) - (q_1(t) + q_2(t)) \right) - \frac{c}{K_2(t)} * q_2(t).$$

A partir de aquí, se omitirá de manera explícita la dependencia temporal de las variables. No se indicará que $q_1(t)$, $q_2(t)$, $A(t)$ y $K_i(t)$ dependan del tiempo, aunque dicha dependencia esté de manera implícita. Se realizará esto para conseguir una notación más limpia. Asimismo, partimos del supuesto en el que ambas empresas tienen las mismas estrategias de inversión de capital, por ende, $K_1 = K_2 = K$.

Aplicando las condiciones de primer orden y despejando respecto a q_i , obtendremos las funciones de mejor reacción, $q_1^{MR}(q_2)$ y $q_2^{MR}(q_1)$. Se trata de funciones simétricas.

$$q_1^{MR}(q_2) = \frac{a - q_2 - \frac{c}{K} - \alpha * (CC - A)}{2} \quad q_2^{MR}(q_1) = \frac{a - q_1 - \frac{c}{K} - \alpha * (CC - A)}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $q_1^{MR}(q_2) = q_1$, $q_2^{MR}(q_1) = q_2$. Se determina, su punto de corte, denominado equilibrio de Cournot-Nash.

$$q_1^N = q_2^N = \frac{a - \frac{c}{K} - \alpha * (CC - A)}{3}$$

Si la presión ambiental es elevada, reflejado en el término $\alpha * (CC - A(t))$, o si el capital acumulado es bajo, lo que produce que el costo unitario sea más alto, la cantidad óptima que considera cada empresa será reducida.

El modelo con coste lineal, aunque resulta bastante útil como una primera aproximación, no refleja con exactitud el comportamiento de los costes de explotación de recursos naturales. Por norma general, los costes por unidad extraída aumentan en el margen debido a diversos factores como el agotamiento del suelo, la búsqueda de áreas fértiles, el encarecimiento de los procesos de extracción etc. Los costes marginales no permanecen constantes, sino que, debido a estos factores entre otros, se incrementan. Así, en la siguiente sección suponemos costes cuadráticos.

3.6.2 Modelo de costes cuadráticos

Para reflejar más fielmente la realidad introducimos costes cuadráticos a nuestro modelo. El coste marginal se incrementa con la cantidad extraída. La modificación de la función de beneficio de cada empresa hace que la derivada se vea afectada, así como las mejores respuestas de cada jugador y el equilibrio de Cournot-Nash.

Las funciones de beneficio se pueden escribir:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1 * (a - \alpha * (CC - A) - (q_1 + q_2)) - \frac{c}{K} * \frac{q_1^2}{2}$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2 * (a - \alpha * (CC - A) - (q_1 + q_2)) - \frac{c}{K} * \frac{q_2^2}{2}$$

Suponiendo el mismo razonamiento que previamente hemos utilizado para la función de costes lineales, las funciones de mejor respuesta serán:

$$q_1^{MR}(q_2) = \frac{a - q_2 - \alpha * (CC - A)}{2 + \frac{c}{K}} \quad q_2^{MR}(q_1) = \frac{a - q_1 - \alpha * (CC - A)}{2 + \frac{c}{K}}$$

Y el nuevo equilibrio de Cournot-Nash será:

$$q_2^N = q_1^N = \frac{(a - \alpha * (CC - A)) * \left(1 + \frac{c}{K}\right)}{\left(2 + \frac{c}{K}\right)^2 - 1}$$

A diferencia del modelo lineal, donde los costes marginales son constantes, en este modelo se penaliza a las empresas que quieren extraer más cantidad de árboles ya que cada unidad adicional extraída sería más cara.

3.6.3 Modelo de crecimiento logístico

En la explotación forestal no solo nos tendremos que preocupar de cómo la cantidad extraída afecta al stock de recurso natural renovable, que representa la masa forestal. En nuestro modelo se ha introducido la función de crecimiento logístico, que nos refleja la capacidad de regeneración del área forestal. Describe cómo se regenera una población o recurso renovable como es, en nuestro caso, el bosque.

Al igual que en la función de costes, se podría haber optado por una función de regeneración o crecimiento lineal, pero dicho comportamiento no refleja el comportamiento real del ecosistema. La regeneración del área forestal es más lenta cuando esta se encuentra en niveles bajos o muy cercanos a su capacidad de carga. Por el contrario, esta regeneración es más rápida en niveles intermedios.

La función del Crecimiento logístico utilizada será:

$$\dot{A}(t) = r * A(t) * \left(1 - \frac{A(t)}{CC}\right). \quad (2)$$

Donde:

- Con $A(0) = A_0$, el stock inicial de madera o área forestal.
- r : Es la tasa intrínseca de crecimiento del bosque, que influirá indirectamente en las empresas a la hora de elegir sus estrategias.

Esta función refleja que el bosque no puede crecer indefinidamente y que existe un límite natural de regeneración. Si la extracción o la tala de las dos empresas supera la capacidad de regeneración del área forestal, el stock del bosque irá disminuyendo a lo largo del tiempo y podría llegar a una situación que sea insostenible y en la que el bosque sufra una degradación total. Sería deseable que el área forestal no llegase hasta este equilibrio

La teoría sobre la explotación de recursos naturales define el concepto del rendimiento máximo sostenible (MSY), que será el máximo nivel o rendimiento que podemos sacar del área forestal sin comprometer su sostenibilidad y que se alcanza en nuestra formulación cuando el área forestal se encuentre en el 50% de su capacidad de carga.

3.6.4 Stock de capital de las empresas

El capital acumulado crecerá con la inversión y disminuirá con la depreciación. La depreciación de capital representa la pérdida del valor del stock de capital de las empresas a lo largo del tiempo, bien sea por desgaste u obsolescencia. Se incorporará en el modelo dinámico mediante un parámetro denominado tasa de depreciación, $\delta \in (0,1)$, que reducirá el capital existente. Refleja que el capital acumulado pierde valor y eficiencia con el tiempo. Se requiere una inversión continua, I , para que el stock de capital se incremente o mantenga, de lo contrario cualquier maquinaria, infraestructura o vehículos se deteriora.

La gestión forestal se caracteriza por un uso extensivo de equipos pesados, genera un desgaste mecánico continuo. Cada año parte del valor del capital se consume en distintas obras de reparación y mantenimiento con la finalidad de que dichos equipos estén en correcto funcionamiento. Asimismo, el cambio tecnológico también afecta al stock de madera debido a que se implementan mejoras a la hora de la extracción o transporte.

La fórmula del stock de capital acumulado es:

$$\dot{K}(t) = K(t) + I(t) - \delta * K(t), K(0) = K_0 > 0. \quad (3)$$

Donde, $I(t)$ es la inversión en cada instante t , $K(t)$ el stock de capital en cada instante de tiempo.

3.7. Dinámica de sistemas.

Para analizar los resultados de nuestro modelo nos apoyamos en la dinámica de sistemas. Se trata de una metodología que tiene como finalidad construir modelos dinámicos que puedan explicar el comportamiento real de aspectos industriales socioeconómicos, ambientales, etc. Un sistema no es más que un conjunto de partes que están interrelacionadas entre sí, las variables que lo componen sufrirán cambios a lo largo del tiempo debido a estas interacciones. Mediante un diagrama causal reflejaremos nuestro modelo como un conjunto de relaciones entre cada variable. Podemos analizar las relaciones entre las variables con el fin de identificar las distintas retroalimentaciones que determinan el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo. Con el fin de interpretar los resultados de forma fácil y sencilla, se empleará el software PowerSim, debido a la facilidad de dicho programa para generar gráficas de la

evolución del sistema. Gracias a PowerSim, podemos simular este modelo dinámico matemático, obteniendo resultados numéricos y gráficos que podemos interpretar.

Las variables principales usadas en el modelo serán:

- Niveles: representados por rectángulos, acumulan magnitudes cuantitativas que cambian debido a las diferencias entre los flujos de entrada y salida a lo largo del tiempo. Lo son el área forestal y el stock de capital de las empresas. En cada unidad de tiempo, PowerSim actualiza el incremento/decremento del nivel mediante las siguientes fórmulas:

La ecuación del nivel del área o stock forestal será:

$$A(t + 1) = A(t) + Regeneracion(t) - Tala_total(t)$$

con $A(t)$, el nivel acumulado del área forestal en el momento t . La regeneración es la función de crecimiento logístico en (2) y la tala total son las cantidades extraídas por ambas empresas.

La ecuación de nivel del stock de capital será:

$$K(t + 1) = K(t) + Inversion(t) - Depreciacion_Capital(t)$$

con $K(t)$, el nivel acumulado del stock de capital en el momento t . La inversión representará lo que las empresas destinan en cada período de tiempo para aumentar su capacidad productiva y la depreciación son las pérdidas del valor de capital debido al desgaste u obsolescencia tecnológica.

- Flujos: representados por flechas, transmiten los incrementos o disminuciones que sufren los niveles, mediante flujos de entrada o salida. Son flujos, la regeneración forestal que incrementa el nivel de área forestal, mientras que el flujo de tala lo reduce. También son flujos la inversión de capital y su depreciación. Los flujos se definen mediante las distintas relaciones matemáticas con las variables auxiliares, constantes y niveles.
- Variables auxiliares: representadas por círculos, sirven para introducir en el modelo parámetros que se pueden modificar, como el índice de la conciencia ambiental, la capacidad de carga o la tasa de regeneración.
- Parámetros: representados por rombos, cuya finalidad será la de albergar constantes, que modificaremos para hacer un análisis de sensibilidad.

PowerSim realiza la simulación en periodos consecutivos de un año.

4. APLICACIONES Y ANÁLISIS DEL MODELO

La teoría de juegos y la dinámica de sistemas ofrecen marcos útiles para estudiar la gestión de recursos naturales. En nuestro estudio modelamos el área forestal como un recurso cuyo stock crece de forma natural a través de la función crecimiento logístico y cuya extracción corre a cargo de las empresas. La teoría de juegos nos permite plasmar las interacciones estratégicas, donde cada empresa toma decisiones en base a sus intereses. La dinámica de sistemas incorpora la evolución del stock de madera, así como la evolución del stock de capital. En un contexto en el que no existe cooperación, cada empresa decidirá maximizar su beneficio explotando el área forestal, lo que puede conducir a una sobreexplotación de los recursos naturales. Dicho escenario se asemeja a la tragedia de los comunes descrita por Hardin, “la tendencia de las personas a tomar decisiones basadas en sus necesidades personales, sin importar el impacto negativo que puedan tener en los demás. En algunos casos, la creencia de que otros no actuarán en el mejor interés del grupo puede llevarlas a justificar comportamientos egoístas”. El stock del área forestal puede agotarse con el tiempo, debido a que ninguna de las empresas asume el coste total del daño ambiental, que se produce a talar por encima de la regeneración del bosque. Para este análisis, tenemos unos valores de los parámetros de referencia, que serán nuestros valores de referencia tanto para el modelo lineal como para el cuadrático, los cuales nos garantizan un nivel estable del área forestal.

Los valores de referencia son:

$$A(0) = CC = 15, c=5 \text{ (lin.)}, c=15 \text{ (cuadr.)}, I=0.1, K(0) = 1, \sigma=10, \delta = 0.1, r = 0.2. \quad (4)$$

Teniendo en cuenta los valores en (4) y la fórmula (3), obtendremos que el capital no varía del nivel inicial y se mantiene en $K(t) = 1$. Este, es por tanto el escenario de partida equivalente a no tener en cuenta el efecto del capital. Inversiones superiores incrementarán dicho stock e inversiones inferiores lo reducirán.

4.1. Análisis del modelo con costes lineales

En este apartado abordaremos la evolución del área forestal bajo la hipótesis de costes lineales. A partir del equilibrio de Cournot-Nash, ya introducido en el punto 3, y teniendo en cuenta las relaciones dinámicas, se analizan las decisiones de extracción de ambas empresas.

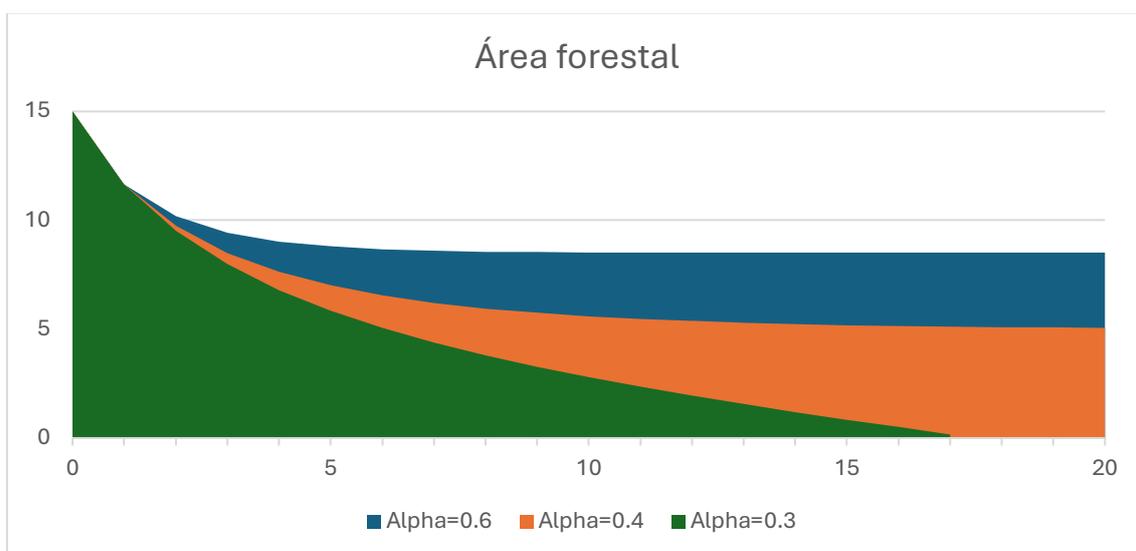
En el modelo inicial, veremos cómo afecta la conciencia ambiental a 3 factores claves que son: el área, el precio y la cantidad extraída por cada empresa.

4.1.1. Evolución del stock forestal

En el caso inicial con un $\alpha = 0.4$, el área forestal se reduce desde su nivel inicial, $A(0) = 15$, debido a la importante tala por parte de ambas empresas. Durante los primeros años el área forestal cae de forma notable porque la tasa de extracción es muy superior a la regeneración del bosque. A medida que el stock forestal va disminuyendo, el crecimiento logístico del bosque crece debido a que se aleja de la capacidad de carga. Además, las empresas moderan su producción en respuesta a la presión ejercida por el coste ambiental sobre el precio. Se observa cómo el ecosistema tiende a un equilibrio, donde la extracción se equilibra con la regeneración natural. Esta convergencia se logra en el año 15, cuando $A \approx 5$. El bosque se degrada hasta 1/3 de su capacidad original y se estabiliza alrededor de ese nivel, representando un equilibrio de explotación moderada, donde el área forestal queda significativamente mermada, pero logra resistir en el tiempo con un stock de 5 unidades y un crecimiento igual a cero.

Cabe destacar que el nivel en el que se estabiliza el modelo está por debajo del MSY, lo que indica que aun teniendo en cuenta la conciencia ambiental de los consumidores, las empresas pueden sobreexplotar el recurso más allá de lo óptimo, debido a la falta de coordinación al actuar de forma no-cooperativa.

Grafica 2. Evolución del stock forestal en el modelo lineal



Con un $\alpha = 0.6$, la trayectoria del stock forestal es más conservadora. El área desciende desde 15 unidades, pero lo hace de forma lenta y moderada. Un mayor valor de α implica que las empresas soportan un mayor coste por talar, ya sea por la presión social, regulaciones, impuesto, etc. El resultado es una disminución del stock forestal menos pronunciada con una regeneración natural que equilibra la pérdida con mayor facilidad. El bosque desciende hasta estar cerca de $A \approx 8.5$, donde alcanza el estado estacionario. Este punto estará por debajo del nivel inicial y por encima del MSY. Cuando existe una elevada conciencia ambiental podría llevar a una explotación cercana del máximo sostenible.

Con un escenario de $\alpha = 0.3$, se muestra una evolución alarmante ya que las empresas no sienten mucho coste ambiental por extraer. Esto implica unos niveles de tala mayor que en los otros dos casos, provocando una caída pronunciada del área forestal, donde la regeneración no puede compensar estas pérdidas. El área disminuye pasando de 15 unidades a 0 en un período 17 años, produciéndose una extinción del stock forestal, no pudiendo recuperarse, por lo que evidentemente es un escenario insostenible. Este resultado ilustra, que, si la extracción excede a la capacidad de regeneración del bosque, debido a una baja conciencia ambiental el recurso renovable se consume más rápido de lo que puede regenerarse. Tras el colapso del área la producción de madera cesa forzosamente ya que no queda recursos por explotar, provocando la desaparición de las empresas.

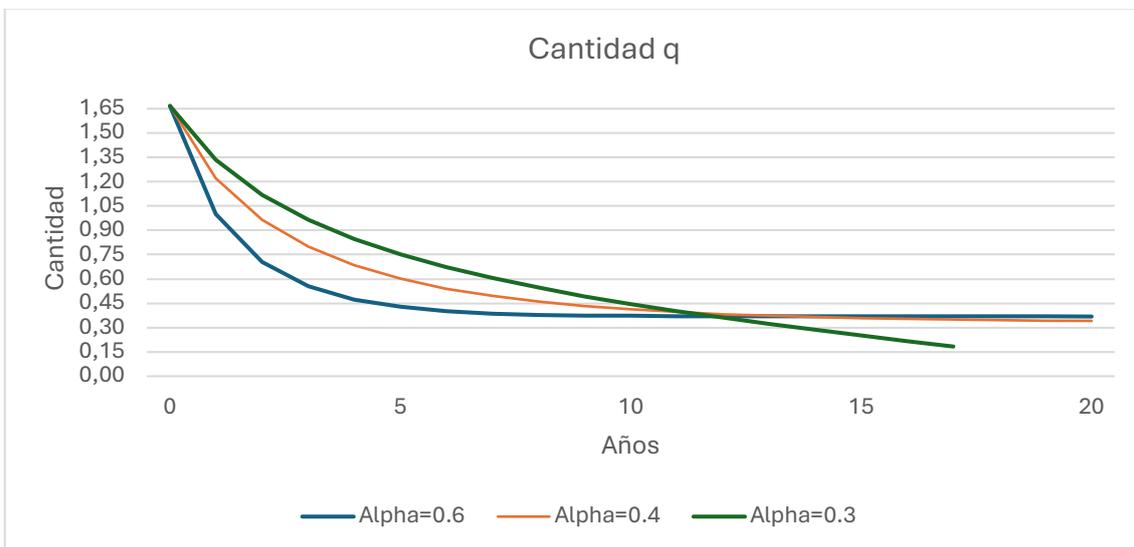
En conclusión, el comportamiento del área forestal en los 3 escenarios confirma que, a menor conciencia ambiental, mayor es la degradación del stock forestal pudiendo llegar a su extinción, mientras que una mayor conciencia ambiental preserva mejor el stock forestal.

4.1.2. Evolución de las cantidades

El comportamiento de las cantidades extraídas y el precio, q y P respectivamente, está estrechamente vinculado con la evolución del stock forestal. Cada empresa talará de manera inicial aproximadamente 1.67 unidades, sumando entre ambas 3.33 unidades. La evolución de la cantidad varía según el valor de α .

Con $\alpha = 0.4$, la extracción total se reduce respecto a su valor de partida, debido a que tras la primera tala el stock forestal cae. Cuando existe conciencia ambiental, la presión ambiental reduce el precio y con él la rentabilidad, ajustando las cantidades taladas a la baja. Conforme el bosque desciende gradualmente las empresas siguen moderando su extracción, acercándose a un nivel de extracción sostenible de largo plazo. Cuando se aproxima al punto de convergencia, $A \approx 5$, la cantidad extraída por año converge a $Q \approx 0.67$. Eso sería el nivel de tala que iguala exactamente la regeneración natural del bosque manteniendo el stock constante. En este punto, cada empresa termina extrayendo alrededor de 0.33 unidades por período en equilibrio, siendo menor a lo que extraían al principio, pero manteniendo un stock sostenible en el tiempo.

Grafica 3. Evolución de la cantidad en el modelo lineal



Con $\alpha = 0.6$, el ajuste de la extracción es más drástico desde el inicio. Tras los primeros períodos, la cantidad extraída Q cae por debajo de 2, reflejando que cada empresa optará por talar menos debido al coste ambiental percibido. Conforme el bosque se estabiliza en $A \approx 8,5$, la extracción total se asienta en torno a $q \approx 0,37$. Cabe destacar que este nivel de extracción resulta superior al que teníamos con $\alpha = 0.4$, debido a que, al conservar un stock de bosque mayor, la tasa de regeneración natural es mayor, lo que conlleva que el bosque dé un mayor rendimiento a largo plazo sin reducir su nivel de stock. Este escenario de alta conciencia ambiental no solo protege mejor el recurso, sino que permite, a largo plazo, más extracción gracias a que el bosque se mantiene más productivo al conservar un mayor nivel de stock.

Con un escenario de $\alpha = 0.3$, la extracción inicial se mantiene alta y decae más lentamente, debido a que las empresas sienten poca penalización al extraer el recurso. La moderación en la tala llega demasiado tarde, y no se consigue evitar el colapso del stock forestal. En el año 17, la extracción cae a cero, no quedando nada por extraer. Con un nivel de conciencia bajo, las empresas extraen mucho al principio y únicamente reducen la tala cuando la naturaleza impone un límite real, desafortunadamente para entonces el bosque ya está esquilado.

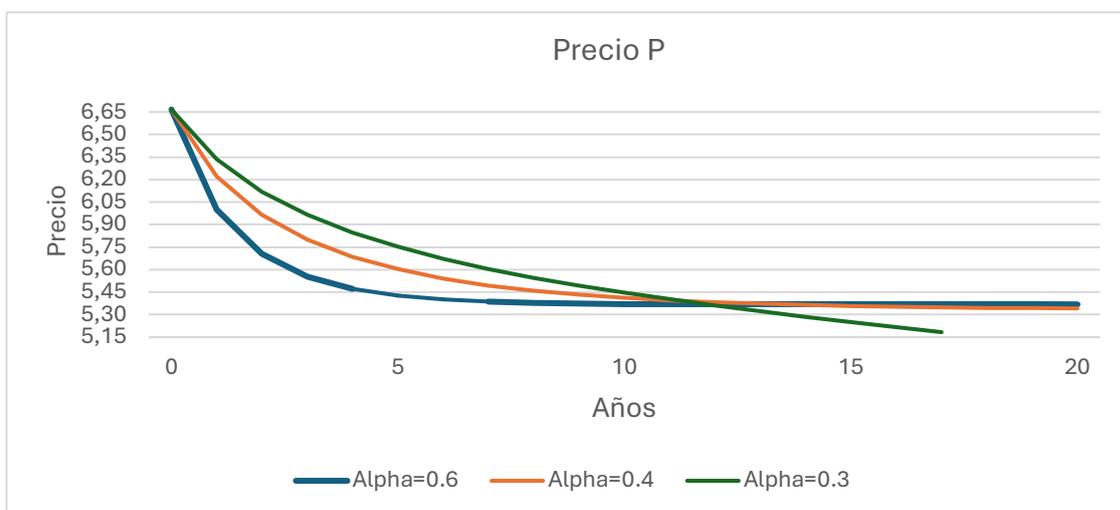
4.1.3. Evolución del precio

El precio P , evoluciona en el mismo sentido que la cantidad, ya que no nos estamos moviendo sobre la misma curva de demanda, sino que la curva se desplaza hacia abajo cada año debido al aumento de la presión ambiental. A medida que aumenta la presión ambiental por un menor stock de bosque) la demanda disminuye y el nuevo equilibrio resultante tendrá un precio más bajo y una cantidad menor.

En el momento inicial, con un $Q \approx 3.3$, el precio en todos los casos se sitúa en $P \approx 6,67$ u. m.

Con un $\alpha = 0.4$, el nivel de conciencia ambiental es moderado, el precio se reduce de manera más pronunciada situándose en un $P \approx 5.97$ en el año 2 y ya en el año 5 en un $P \approx 5.6$. Las cantidades por extraer caen más rápidamente que en el caso anterior debido al menor precio por el aumento de la presión ambiental. En el largo plazo podemos observar cómo en el punto de convergencia se alcanza el equilibrio del precio con un $P \approx 5.34$.

Grafica 4. Evolución del precio en el modelo lineal



Con un escenario de $\alpha = 0.6$, estaremos en un contexto en la que la conciencia ambiental es alta, lo que implica una muy rápida reducción del precio, obligando a reducir las cantidades extraídas. En este escenario el precio cae de niveles iniciales hasta situarse en un $P \approx 5.70$ en el año 2 y ya en el año 5 en un $P \approx 5.43$. En los siguientes años converge hacia un $P \approx 5.4$. Con una alta conciencia ambiental, la cantidad extraída disminuye bruscamente, conservándose en mayor medida el stock forestal. En el largo plazo se conserva una mayor proporción del bosque con un mayor precio y mayores cantidades taladas.

Con un $\alpha = 0.3$, las empresas tienen pocas restricciones y costes ambientales por lo que extraen más cantidades. A partir del precio inicial, este caerá de manera suave en cada año situándose $P \approx 6.12$ en el año 2 y ya para el año 5 $P \approx 5.85$. Esta suave tendencia descendente del precio implica una moderada caída de las cantidades extraídas en cada año. Cabe destacar que, en el año 17, ya no existiría stock forestal ni cantidades demandadas.

En términos de política y estrategias estos análisis sugieren que elevar la conciencia ambiental, mediante distintos mecanismos políticos, educativos, sociales o económicos, tiene un efecto positivo en la sostenibilidad del sistema, reduciendo inicialmente las cantidades extraídas a niveles compatibles con la regeneración del bosque y evitando que el área forestal colapse. Por contra, ignorar la presión ambiental incrementa la extracción a corto plazo y compromete la viabilidad del stock en el tiempo.

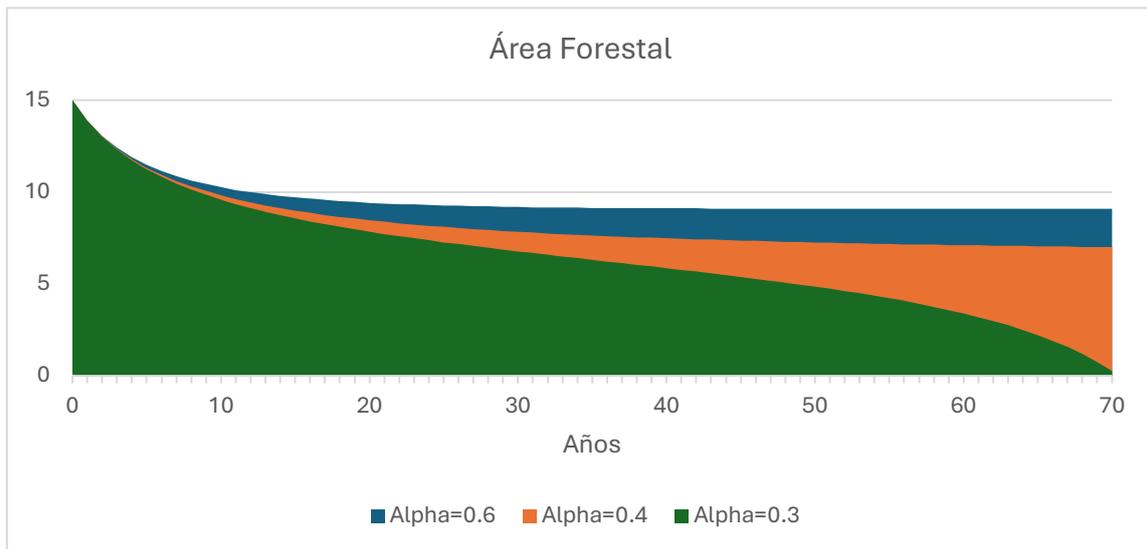
4.2. Análisis del modelo con costes cuadráticos

En esta sección, analizaremos la simulación en el modelo de costes cuadráticos. Se consideran los mismos valores de los parámetros que en el caso anterior, con la excepción de $c=15$. En el modelo de referencia, veremos cómo afecta la conciencia ambiental a 3 factores claves: área, precio y cantidad extraída por cada empresa.

4.2.1. Evolución stock forestal

En el escenario de referencia, con un $\alpha = 0.4$, se observa una caída notable del stock forestal durante las primeras décadas, pero conforme este stock disminuye, las empresas moderan su extracción y el sistema tiende a un nivel de estado estacionario, que se alcanza en el año 70, con $A \approx 7$. Este equilibrio representa un compromiso sostenible, donde no se tala en la misma medida que se regenera el bosque permitiendo mantener el stock forestal, asegurando así una explotación sostenible en el tiempo. Este escenario conserva el bosque de un nivel muy cercano a la MSY, dado por $\frac{CC}{2} = 7.5$, por lo que se tala una cantidad muy cercana a la máxima compatible con el mantenimiento del bosque.

Grafica 5. Evolución del stock forestal en el modelo cuadrático



Con un $\alpha = 0.6$, se percibe un mayor coste de tala, lo que resulta en una trayectoria del stock forestal conservadora, desciende desde su nivel inicial de forma moderada, más lenta que con $\alpha = 0.4$, reflejando que las empresas se enfrentan a una penalización mayor y por tanto talan menos intensamente en esta primera fase. De hecho, la disminución del bosque es mucho menos pronunciada que en los otros dos escenarios, aproximándose década tras década hacia este equilibrio estacionario, en el año 70, con $A \approx 9.04$. Al comparar el estado estacionario alcanzado con $\alpha = 0.4$, este escenario es un escenario conservador, manteniendo un stock forestal mayor, la tasa de crecimiento es menor lo que conlleva a un rendimiento más bajo a largo plazo sin reducir el stock aun no teniendo cooperación entre las empresas.

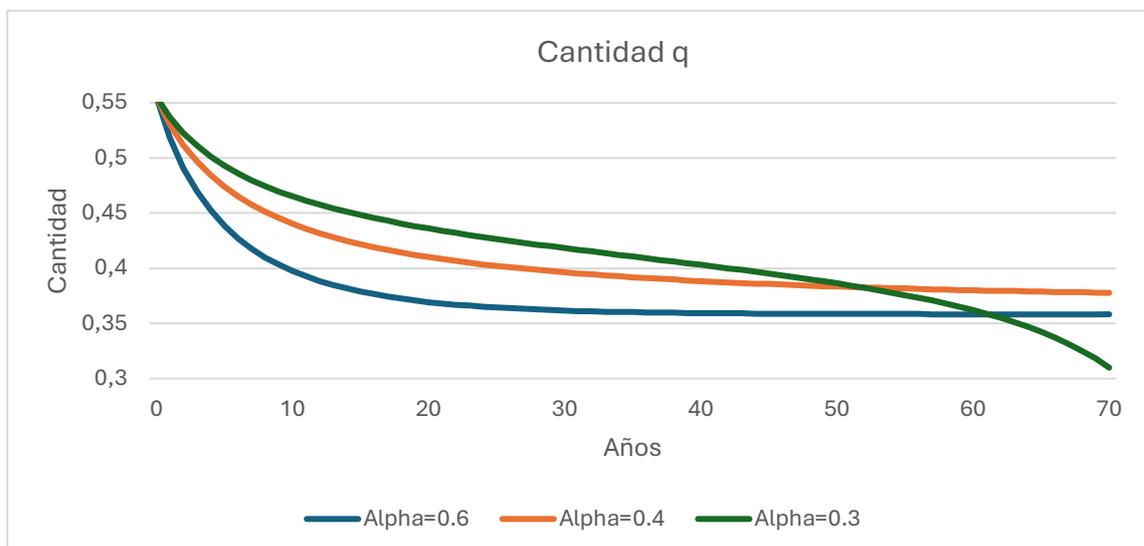
Con un $\alpha = 0.3$, la evolución del stock forestal resulta algo más preocupante debido a que en este caso las empresas no sienten tanto el coste ambiental. Los niveles de tala son mucho mayores que en los otros dos escenarios, provocando una caída mucho más rápida y pronunciada del stock forestal. Comparándolo con el modelo de costes lineales la desaparición del bosque se ralentiza, ya que los costes crecientes frenan parte de esta sobreexplotación. Sin embargo, a pesar de que tras un par de décadas el sistema parece estabilizarse, este tiende a esquilmarse en el año 70. Por lo que, en ambos modelos se llega a un stock nulo, en el lineal ocurre en el año 17 y en cuadrático en el año 70.

El comportamiento del área forestal en estos 3 escenarios muestra que, a menor conciencia ambiental, mayor es la degradación del stock forestal, pudiendo llegar a la extinción completa del bosque en varias décadas. El coste marginal creciente penaliza cada unidad adicional extraída, obligando a las empresas a moderar la tala. La introducción de estos costes ambientales proporciona un efecto ralentizador en el bosque retrasando el peor de los escenarios con la posibilidad de emplear medidas protectoras.

4.2.2. Evolución de las cantidades

En el caso base, con un $\alpha = 0.4$. Durante las cinco primeras décadas a medida que el bosque se estabiliza en el nivel estacionario, la trayectoria de extracción disminuye, situándose en un nivel intermedio respecto a los otros dos escenarios. Las cantidades en estado estacionario se alcanzan en el año 70, con un $q \approx 0.38$. A partir del año 60,

Grafica 6. Evolución de la cantidad en el modelo cuadrático



se observa como las cantidades en este escenario son superiores respecto a los otros dos.

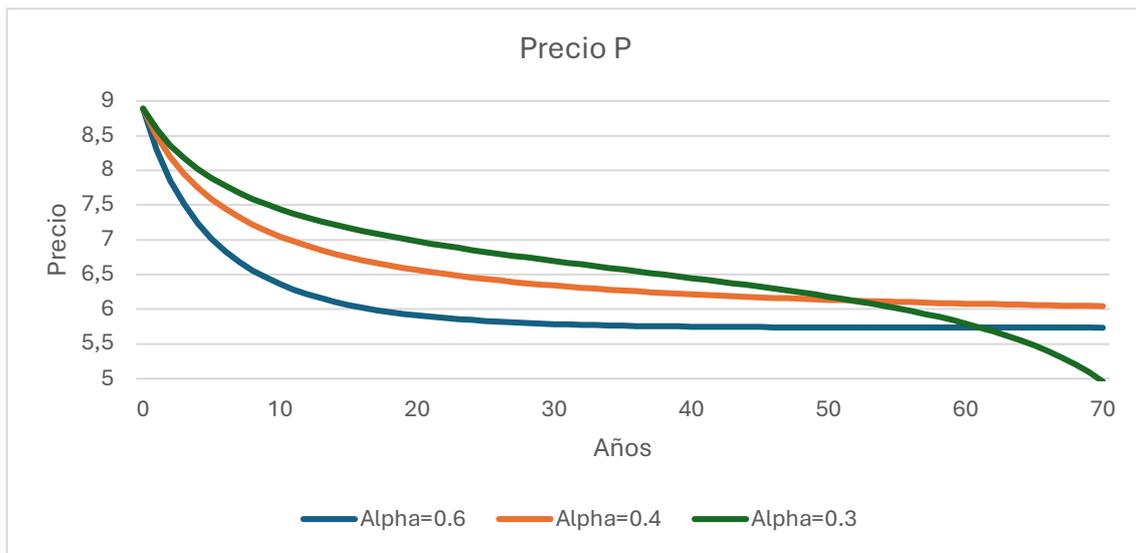
Con un $\alpha = 0.6$, la extracción de cada empresa se reduce ligeramente en la primera década, pasando de un nivel inicial $q \approx 0.55$ a $q \approx 0.39$, debido a que tras la primera tala el stock forestal cae. A medida que el stock forestal va disminuyendo gradualmente, las empresas siguen moderando su extracción acercándose a un nivel estacionario de tala en el año 70, con $q \approx 0.35$. Estas cantidades en equilibrio están por debajo del nivel de tala inicial, ya que lo que se pretende es mantener stock forestal. Una alta conciencia ambiental hace que las empresas sacrifiquen su extracción a cambio de tener una sostenibilidad a largo plazo, con una mayor área forestal conservada. De hecho, el área forestal se conserva en niveles excesivamente altos, muy por encima del MSY, lo que implica una lenta regeneración y por ende pequeña extracción.

Con un $\alpha = 0.3$, las empresas no reducen significativamente su nivel de tala inicial, continúan extrayendo lo máximo posible cerca del nivel de tala inicial. Se continúa talando por encima de los escenarios anteriores hasta el año 50, a partir de aquí, el sistema intenta corregir esa tala excesiva debido a la disminución del stock forestal. Esta corrección llega tarde lo que hace que, en el año 70, las empresas talen el último árbol.

4.2.3. Evolución del precio

En el escenario base, con un $\alpha = 0.4$, el precio desciende desde $P \approx 8.89$ a $P \approx 7.06$, la primera década. A largo plazo, el precio se sitúa en un nivel estacionario con un $P \approx 6.04$. La demanda no se contrae con la sobreexplotación tanto como con alta conciencia ambiental, lo que da como resultado un precio de equilibrio superior al de $\alpha = 0.6$. Al haber menos restricciones ambientales, las empresas extraen un poco más y no se reduce tanto el consumo.

Grafica 7. Evolución del precio en el modelo cuadrático



Con un $\alpha = 0.6$, se representa una mayor caída del precio, que desciende desde $P \approx 8.89$ a $P \approx 6.36$ tras la primera década, un nivel por debajo de los otros escenarios, debidos a la reducción de la rentabilidad a causa de la presión ambiental. A largo plazo, se alcanza en el año 70, un precio estacionario, $P \approx 5.51$, más bajo que en los otros escenarios, ya que los consumidores penalizan muy fuertemente la sobreexplotación.

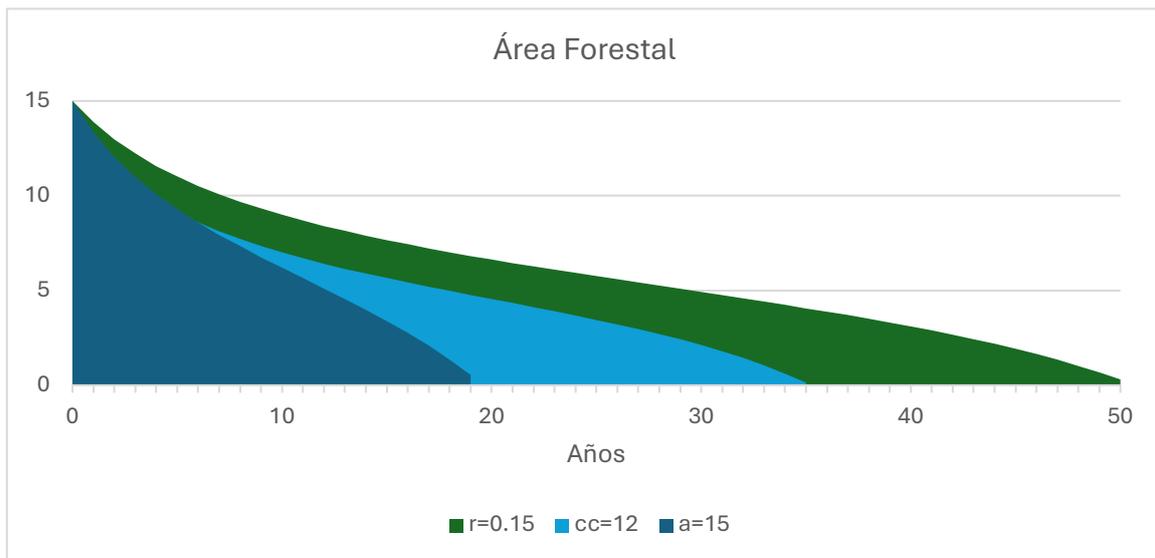
Con un $\alpha = 0.3$, en este escenario no se consigue un equilibrio estacionario. El precio se sitúa por encima de los anteriores escenarios hasta el año 50 con un $P \approx 5$. Las empresas talan inicialmente más madera a causa del mayor precio por la menor presión ambiental, lo que explica que obtengan unos mayores beneficios.

La comparación entre ambos modelos evidencia la importancia de considerar costes cuadráticos en la explotación de recursos naturales. En el modelo con costes cuadráticos, la presencia de un coste marginal de tala creciente actúa como mecanismo de frenado que mejora la sostenibilidad del stock forestal. Sin embargo, en un escenario con baja conciencia ambiental, vemos cómo el escenario es igual de restrictivo que con costes lineales. Por otro lado, al incorporar la influencia de la conciencia ambiental se observa que mayor conciencia ambiental, conserva una mayor proporción del stock forestal. El modelo con costes cuadráticos penaliza la sobreexplotación ralentizando el esquilmo cuando la conciencia ambiental es baja.

4.3. Análisis de sensibilidad de las variables con costes cuadráticos

En esta sección realizaremos un análisis de sensibilidad en el modelo de costes cuadráticos que, como hemos comentado previamente, consideramos más fiel a la realidad. El análisis parte de los valores base del modelo cuadrático. Se estudia el efecto de una reducción en los valores de r o CC , así como un incremento de a . En todos los casos una variación suficientemente grande puede llevar a esquilmar el bosque.

Grafica 8. Evolución del stock forestal ante cambio de las variables



Efecto de la capacidad de carga (CC):

Pasar de una $CC = 15$ a $CC = 12$, no solo implica un límite más bajo para el stock, sino que también afecta negativamente al ritmo del crecimiento del bosque, ya que está asociado a la función del crecimiento logístico. Aunque la pérdida del stock no es tan intensa, se observa una trayectoria hacia la tala total del bosque en el año 30. Si bien a partir del año 13, la curva moderar su caída, no tiende a una estabilización, sino que el bosque continúa talándose a mayor velocidad de lo que puede regenerarse llegando a su total esquilma al rededor del año 35.

Efecto de la constante a :

Al incrementarse a de 10 a 15, se produce un desplazamiento hacia arriba de la función de demanda, lo que implica que ambas empresas parten de un precio inicial más alto para cualquier nivel de extracción. Aumenta el incentivo económico a talar, debido a que la rentabilidad de extraer es mayor. En la curva azul marino podemos ver cómo el área se reduce significativamente dado que las cantidades extraídas aumentan desde el

principio. En los primeros años la trayectoria de la curva no se diferencia visualmente respecto del escenario anterior, lo que induce a pensar que el efecto es similar. Sin embargo, en el año 10, el stock forestal acelera su agotamiento hasta el año 20, sin mostrar ningún signo de estabilización. El sistema ofrece menor margen para una posible corrección si pretendiéramos revertir los efectos de la constante α . La presión es tan intensa desde el principio que el ecosistema entra en una senda irreversible mucho antes que en los otros escenarios. Conforme la tala se incrementa, el stock forestal se reduce, lo que provoca que aumente la presión ambiental y una caída del precio más pronunciada que en los otros casos que, sin embargo, no consigue parar el colapso del bosque.

Efecto tasa de crecimiento (r):

Una menor tasa de regeneración de $r = 0.2$ a $r = 0.15$ implica que el stock forestal crece más despacio en cada nivel. La curva verde muestra cómo el área forestal se reduce de forma continua, pero menos brusca que en los anteriores escenarios. No se alcanza ningún punto de equilibrio estacionario, pero sí se tiene un tiempo de tala mayor respecto a los otros escenarios. La regeneración del bosque es un factor fundamental a la hora de mantener el stock forestal, incrementar esta tasa implica tener mayores niveles de stock forestal.

Las distintas simulaciones confirman que variaciones en distintos parámetros generan distintas trayectorias en el stock forestal. Con un incremento de α se tiene un escenario más agresivo, ya que un precio inicial alto ocasiona una extracción desde el primer momento más intensa provocando a una pérdida total del bosque en un periodo corto de tiempo. Reflejando así los efectos reales del incentivo económico que tiene un efecto perjudicial sobre el recurso. La reducción de la capacidad de carga también produce agotamiento del stock forestal, pero por una vía más natural ya que al limitar el máximo crecimiento del bosque, incluso con una extracción moderada, dicha extracción supera a la regeneración del bosque. Finalmente, el escenario con menor tasa de regeneración nos proporciona una mayor capacidad de respuesta, ya que en el caso de que se redujese esta tasa natural de crecimiento se podrían implementar otras medidas que harían que el bosque pudiese llegar a un estado estacionario. En ninguno de los

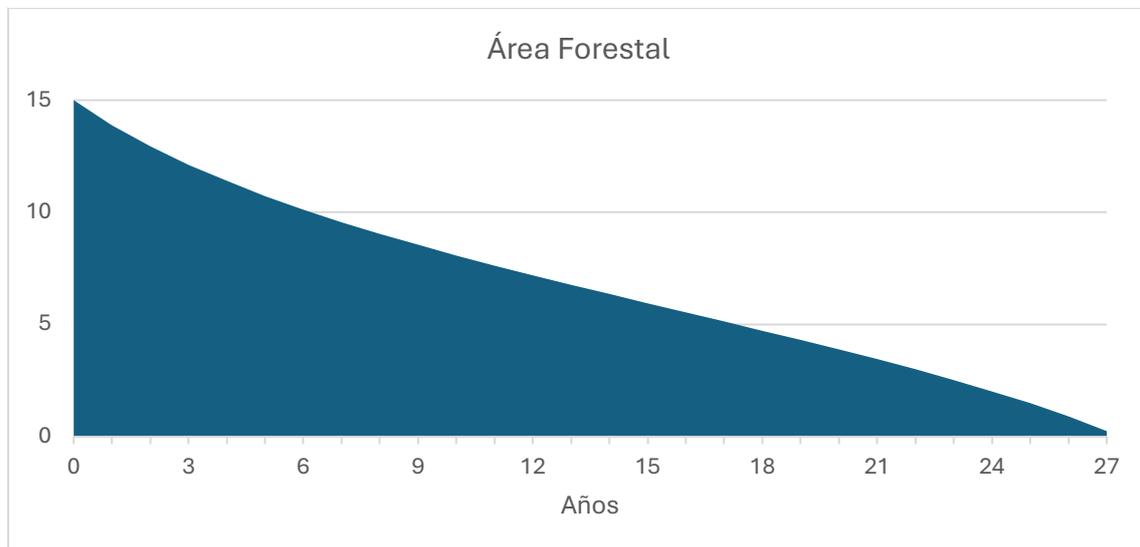
escenarios se consigue llegar a un estado estacionario, difieren en el tiempo en el que llegan a la deforestación total del bosque.

4.4. Análisis de la influencia de la inversión

Hasta esta sección, se ha supuesto que el capital acumulado es constante e igual a 1 en toda la simulación. En este apartado estudiaremos cómo varían los resultados en el modelo cuadrático, al introducir una evolución creciente del stock de capital. Este análisis nos permite incorporar un entorno más realista, ya que, en contextos económicos, el stock de capital no es constante, sino que puede variar con el tiempo. También permite introducir cómo la depreciación de capital condiciona los costes de extracción influyendo en las decisiones estratégicas de las empresas. Por lo que cambiaremos el flujo constante I , de $I = 0.1$ a $I = 0.2$.

El incremento de la inversión y el consiguiente incremento del stock de capital hace que se abarate la extracción del recurso y que el stock forestal se agote de progresiva. A diferencia del modelo de referencia, donde se alcanzaba el estado estacionario en el año 70, en este escenario el bosque colapsa por completo en casi tres décadas.

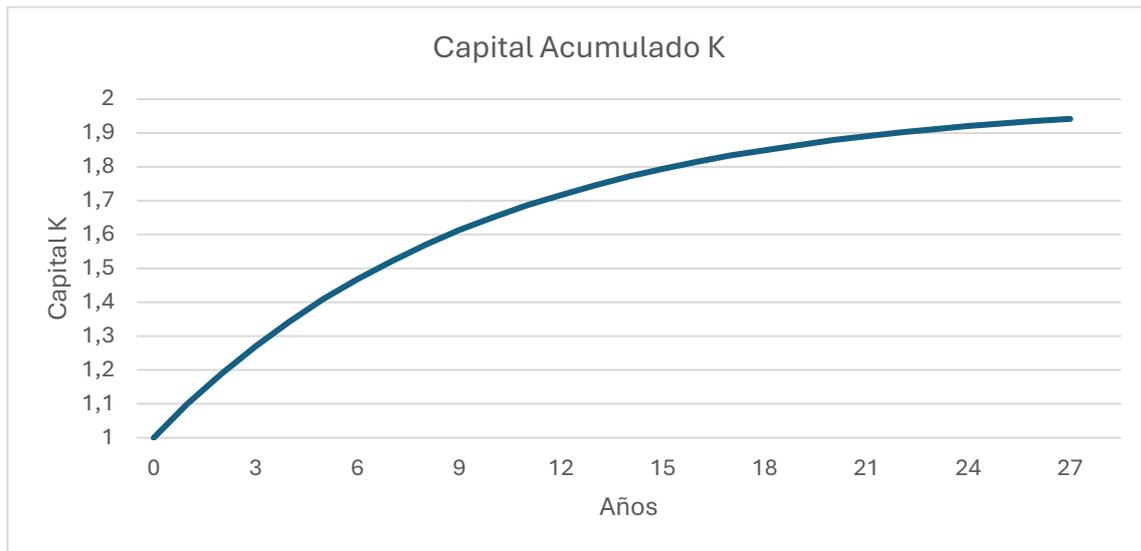
Grafica 9. *Influencia de la inversión en el stock forestal*



El stock de capital aumenta con la inversión y disminuye con la depreciación. En la gráfica se observa cómo el stock de capital refleja una tendencia creciente, con un valor inicial en el año cero de $K = 1$ hasta $K \approx 1.94$ en casi tres décadas. El capital tiende hacia un estado estacionario de $K = \frac{I}{\delta} = 2$, que casi logra en el año 27, pero no lo hace debido a

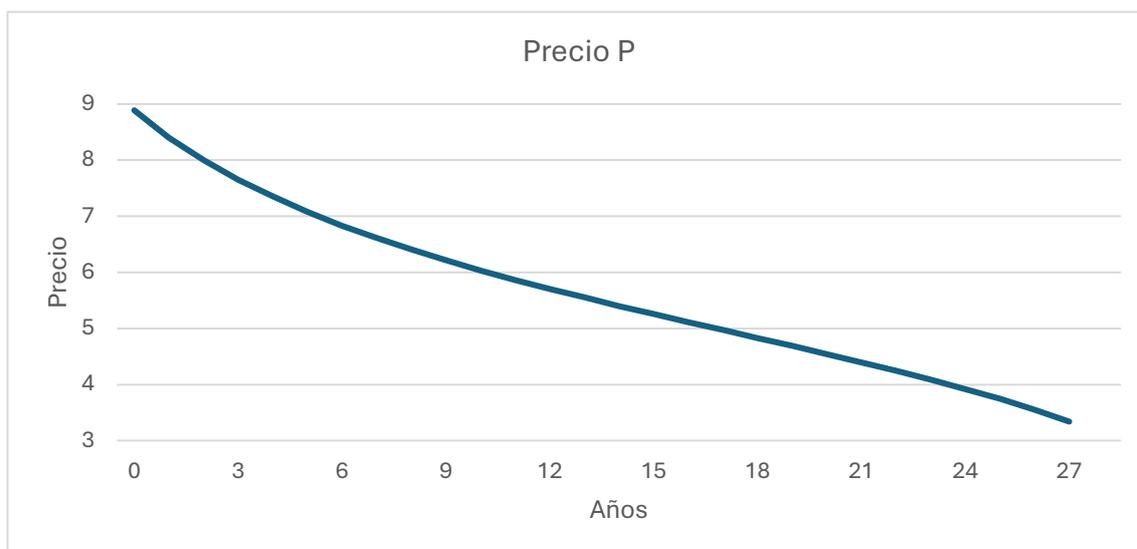
la esquilmación del bosque. El aumento del capital implica una reducción progresiva de la ratio coste unitario de extracción, lo que hace que exista un mayor incentivo de tala. Un mayor stock de capital permite extraer más, barato lo que hará que las empresas talen más. Nótese que se trata de un modelo muy sencillo con una inversión constante sin vinculación con el recurso. El único mecanismo de freno es la de depreciación que, siguiendo la dinámica definida en (3), lleva a un stock de capital constante en $K = 2$.

Grafica 10. *Influencia de la inversión en el capital acumulado*



El aumento de la inversión ocasiona un cambio en la evolución del precio, respecto al modelo de referencia. Como se aprecia en el gráfico, el precio parte de un $P \approx 8.88$ hasta situarse en $P \approx 3.33$, cuando el bosque se esquilma por completo sin que alcance en ningún estado estacionario. La fuerte reducción del stock forestal incrementa la presión ambiental en la función del precio, a su vez la reducción en el coste de extracción permite seguir extrayendo a un precio más bajo. La combinación de ambas fuerzas, es decir un coste decreciente y una presión ambiental creciente provoca una caída progresiva del precio durante toda la simulación. A diferencia del modelo base donde convergía hacia un estado estacionario, en este caso no se alcanza ninguno equilibrio en el precio, la explotación forestal se acelera tanto que el mercado no puede estabilizarse.

Grafica 11. *Influencia de la inversión en el precio*



El análisis en conjunto de estos 3 gráficos permite determinar que el aumento de la inversión tiene un efecto perjudicial en el stock forestal, rompiendo con la estabilidad de este a largo plazo. Que el capital acumulado aumente la productividad de las empresas hace que el precio caiga y el bosque se esquilme sin opción a alcanzar un equilibrio a largo plazo. La bajada en el coste de extracción por unidad actúa como un acelerador de la sobreexplotación. La presión ambiental resulta insuficiente para frenar esta deriva. El incremento de la inversión provoca, a corto plazo, un aumento de la rentabilidad, pero a costa de una insostenibilidad y agotamiento del stock a largo plazo. La mayor eficiencia en términos de productivos acelera la tala.

5. CONCLUSIÓN

Se ha utilizado la teoría de juegos y la dinámica de sistemas (a través de PowerSim) para analizar cómo dos empresas compiten en la extracción forestal en el marco del duopolio de Cournot. En este marco, se introduce el efecto negativo que la explotación abusiva del recurso tiene sobre el precio de la madera, cuando se tiene en cuenta consumidores con conciencia ambiental. Partiendo de un mismo modelo base, pero con distinta estructura de costes, se han simulado distintos escenarios con la finalidad de observar cómo evolucionan las decisiones de extracción de las empresas y el impacto en el stock forestal, precio y cantidad.

Modelo costes lineales:

Con costes lineales el parámetro de conciencia ambiental α , penaliza la tala forestal. Incrementar dicho parámetro, hace que las empresas tengan una actitud conservadora, preservando un mayor nivel del stock forestal. En cambio, una menor conciencia ambiental se traduce en una tala sin control, donde el bosque se acerca rápidamente a su agotamiento. Si α es lo suficientemente pequeño se produce la esquilmación total del bosque. Por lo que, la conciencia ambiental actúa como un factor de preservación ya que, incentiva la sostenibilidad del bosque al reducir las tasas de extracción.

Modelo costes cuadráticos:

Con costes cuadráticos, el coste marginal creciente encarece cada unidad adicional talada y suaviza el nivel de extracción. De nuevo, un α elevado implica una actitud conservadora con mejores resultados de stock en equilibrio respecto del modelo lineal. Con un α menor, los niveles de tala aumentan y el stock forestal se reduce, pero con mejores resultados respecto que el lineal. Los costes marginales retrasan el colapso del bosque cuando α es lo suficientemente pequeño.

Sensibilidad de los parámetros:

Partiendo del escenario base en el que el bosque se conserva indefinidamente, reducir la capacidad de carga o la tasa de crecimiento conlleva al colapso del bosque, debido a que el stock forestal soporta menos tala y se regenera en menor intensidad. Asimismo, el aumento del parámetro α acelera extracción y aumenta el precio de la madera, incentivando talas intensas. Por lo que la modificación de estos parámetros siempre conduce al mismo resultado, al agotamiento del bosque.

Influencia inversión:

Una mayor inversión aumentará el capital acumulado, hará que los costes de extracción se reduzcan, incentivando una mayor tala. Por consiguiente, el bosque colapsará con una mayor intensidad. Con unos niveles altos de inversión las empresas extraen más barato y, por ello, en mayor cantidad.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Cerdá, E., Jimeno, J. L., & Pérez, J. (2003). Teoría de juegos. Pearson Educación.
<https://elvisjblog.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/02/teorc3ada-de-juegos-joaqu3adn-pc3a9rez-2004.pdf>
- Córdova, F., & Pinto, M. (2002). Bioeconomía matemática, explotación y preservación.
<https://cubo.ufro.cl/index.php/cubo/article/view/1722/1574>
- Del Pilar Trujillo Cabrera, M. (2016). Recursos Naturales de Uso Común: aproximaciones teóricas para su análisis. Mundo Amazónico, 71. <https://doi.org/10.15446/ma.v7.57253>
- Ferreira, J. L. (2019). *Game Theory: An Applied Introduction*.
- Gibbons, R. (2011). Un primer curso de teoría de juegos. Antoni Bosch editor.
- Gracián, E. (2013). Von Neumann, la teoría de los juegos: piedra, papel, teorema.
https://www.eco.uc3m.es/docencia/new_juegos/notas.html
- Santiago, A. M. J. *Dilemas sociales de la pesca en el pacífico colombiano: un análisis desde la teoría de juegos*.
- Seijo, J. C., Defeo, O., & Salas, S. (1997). Bioeconomía pesquera Teoría, modelación y manejo.
<https://www.fao.org/4/w6914s/W6914S00.htm#TOC>
- Tirole, J. (1988). The Theory of Industrial Organización. The MIT Press.
<https://external.dandelon.com/download/attachments/dandelon/ids/DE0108916F5A49262E07FC1257432002D6609.pdf>
- Vela Meléndez, L. (2011). Teoría de juegos y modelos de oligopolio. Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. <https://web.ua.es/es/giecryal/documentos/teoria-juegos.pdf>
- Villalón, Á. F., & Caraballo, A. M. (2015). Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos. Boletín de matemáticas.
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7184663.pdf>
- Vives, X., Ferreira, J. L., & Corchón, L. C. (2014) Aplicaciones de la teoría de juegos a la economía industrial (nº 393, 3º Trimestre). Ministerio de Industria, Energía y Turismo.
<https://presidencia.gva.es/documents/166658342/166724108/Ejemplar+393/2472481e-05dd-47d8-bd1d-89c3e5703748>
- Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic. Princeton University Press.