UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

DPTO. ANALISIS MATEMATICO Y DIDACTICA DE LA MATEMATICA

FUNCIONES C^∞ ENTRE ESPACIOS DE BANACH CON DERIVADAS EN UN PUNTO FRONTERA

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por:

ESPERANZA ALARCIA ESTEVEZ

D. FELIX LOPEZ FERNANDEZ-ASENJO, Catedrático del Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA: Que la presente memoria, " Funciones C^{∞} entre espacios de Banach con derivadas en un punto frontera.", ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática, por la Licenciada en Ciencias Matemáticas Dña. María Esperanza Alarcia Estévez, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a siete de Mayo de mil novecientos noventa.

Fdo.: Félix López Fernández-Asenjo

Quiero expresar mi gratitud a los miembros del Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática por la ayuda que me han prestado y, especialmente, al profesor D. Félix López Fernández-Asenjo por haberme dedicado parte de su tiempo y por sus consejos, sin los cuales este proyecto no hubiese llegado a su fin.

INTRODUCCION

A finales del siglo pasado, M. Volterra inicia el estudio de las funciones holomorfas y diferenciables entre espacios infinito dimensionales. El estudio de tales funciones está íntimamente relacionado con el concepto de polinomio entre espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita, concepto al que Hilbert y Fréchet, separada y simultáneamente, dieron forma a principios de este siglo.

La teoría de funciones diferenciables entre espacios de dimensión infinita se desarrolla ya entrado el presente siglo y actualmente se aprecia un considerable interés por la misma. Restringiéndonos al marco de espacios normados y con el concepto de diferencial de Fréchet, en las dos últimas décadas es significativo el desarrollo de la teoría debido a las nuevas técnicas de trabajo que proporciona el Análisis Funcional. En este sentido es interesante hacer notar que un elevado número de problemas de la teoría clásica de funciones diferenciables, al formularse en el contexto indicado, da origen a múltiples situaciones dependiendo de las distintas topologías localmente convexas que se consideren sobre los espacios de aplicaciones n-lineales continuas.

En la memoria, salvo mención expresa, se trabajará con funciones de clase C^∞ en el sentido de Fréchet entre espacios de Banach reales.

Observemos que para una función real de clase C^∞ en un abierto convexo de $\mathbb{R}^2$, la existencia de límite de la función y todas sus derivadas en un punto frontera del abierto a través de sectores cerrados con vértice en el punto, es equivalente a la existencia del límite de la función y todas sus derivadas a través de conjuntos estrellados, respecto del citado punto frontera, de conjuntos compactos del abierto.

Consideremos ahora una función $f \in C^\infty(U,F)$, donde U es un *abierto convexo de un espacio de Banach real E y F es otro espacio de Banach, y fijemos un punto frontera de U. En la memoria generalizaremos la situación anterior tomando compactos de U y sus estrellados respecto del punto frontera, y estudiando la existencia de límites de la función y sus derivadas a través de este tipo de conjuntos. No existe inconveniente en formular el problema sustituyendo la clase de los conjuntos compactos del abierto por la clase de los conjuntos U-acotados [Ba]. Para estudiar estos límites es preciso considerar las distintas topologías que pueden definirse en el espacio de las aplicaciones n-lineales continuas: en particular, se analizan la topología de la norma en* $L_s(^nE,F)$ *y la topología compacta abierta. Se estudian también topologías localmente convexas, definidas sobre los espacios formados por las funciones mencionadas anteriormente.*

En el capítulo 0 se enuncian las propiedades básicas sobre los espacios de aplicaciones n-lineales y de polinomios n-homogéneos definidos entre espacios de Banach, que se utilizarán en el desarrollo de la memoria. En un segundo apartado se estudian propiedades de conjuntos U-acotados en abiertos convexos, propiedades que jugarán un papel fundamental en el estudio que se va a realizar.

El capítulo 1 se inicia con la demostración de la existencia de una función de clase C^∞*, definida en un abierto de los considerados, que no posee límite en el origen , pero tal que ella y sus derivadas sí tienen límite cuando se la considera restringida a los estrellados de los conjuntos U-acotados. Este hecho motiva la introducción de los espacios* $E_b(U,F)$ *y* $E_c(U,F)$ *(1.9). La parte central del capítulo la constituye la demostración, mediante dos técnicas completamente diferentes, de una variación del clásico teorema de Borel, para funciones* C^∞*, en el contexto de los espacios anteriormente definidos (proposición 1.15). Ambas demostraciones son constructivas, es decir, en ambos casos se construye una función que verifica las propiedades requeridas. En el primer caso se utilizan únicamente técnicas de analísis real, basándose la demostración en las pruebas clásicas del teorema de Borel para funciones* C^∞ *en* $\mathbb{R}$*, mientras que en el segundo caso se utilizan técnicas de análisis complejo, obteniéndose resultados sobre desarrollos asíntóticos de una función holomorfa en un espacio de Banach complejo y junto con las propiedades del complexificado de un espacio* *de Banach real, nos llevan a la demostración del resultado. Se incluye en el capítulo una prueba del teorema clásico de Borel, en el marco de espacios de Banach que verifican la condición impuesta por Kurzweil en [Ku.1]. Se concluye el capítulo con la resolución de algunos problemas de aproximación por funciones de clase* C^∞.

En el capítulo 2 se definen topologías localmente convexas sobre los espacios $E_b(U,F)$ *(la topología* β *) y* $E_c(U,F)$ *(las topologías* τ_0 *y* u *), relacionadas con las topologías compacta abierta y normada en* $L_s({}^nE,F)$. *Las citadas topologías dotan a estos espacios de estructura de espacio localmente convexo y completo. El espacio* $(E_b(U,F),\beta)$ *es de Fréchet; no ocurre lo mismo con* $(E_c(U,F),\tau_0)$, *si* E *es de dimensión infinita, Se caracterizan los conjuntos acotados de* $(E_c(U,F),\tau_0)$ *así como el espacio bornológico asociado. Damos también en el capítulo una nueva prueba de (1.15), basándose la demostración en las propiedades del espacio* $(E_b(U,F),\beta)$. *Por último, se obtienen representaciones como* ε*-productos de algunos de los espacios mencionados.*

En el capítulo 3 se estudian algunas clases de funciones C^∞ *entre espacios de Banach. En primer lugar se introducen las clases casi-analíticas, dándose condiciones necesarias y suficientes para que una clase tenga esta propiedad. Estas condiciones coinciden con las clásicas para funciones definidas en intervalos de la recta. Se caracterizan dos clases particulares:* $C_{E,F}\{n!\}$ *y* $C_{E,F}\{n!\}_K$. *Terminamos el capítulo analizando las condiciones sobre una sucesión de números reales estrictamente positivos,* $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, *para que exista una función de la correspandiente clase* $C_{U,F}\{M_n\}$ *(3.1), con derivadas prefijadas en el origen. También se resuelve un problema similar para funciones del espacio* $E_b(U,F)$.

0. NOTACIONES Y TERMINOLOGIA

En este capítulo, y a modo de preliminar, realizaremos un breve recordatorio de algunas cuestiones de la teoría de aplicaciones n-lineales continuas entre espacios de Banach y cuyo estudio detallado puede verse en [Ba], [B-S-1], [Di] y [Mu]. El capítulo se completa con un apartado dedicado al análisis de determinadas propiedades de conjuntos U-acotados en abiertos convexos de un espacio de Banach, propiedades que como veremos, jugarán un papel fundamental en el desarrollo de la memoria.

Representaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ los conjuntos de los números enteros no negativos, reales y complejos, respectivamente. Los espacios normados que estudiaremos en este capítulo, salvo mención expresa, estarán definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o de los números complejos. Si a es un elemento de un espacio normado y r es un número real positivo, la bola abierta (resp. cerrada) en este espacio, de centro a y radio r, será representada por $\overset{\circ}{B}(a,r)$ (resp. $B(a,r)$).

1.- Aplicaciones n-lineales continuas entre espacios de Banach.

En este apartado E y F designarán espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$.

0.1.Definiciones.- Sea n un número natural:
a) Si $n > 0$, se representará por $L(^nE,F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones n-lineales y continuas de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$ en F, cuando en $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$ se considera la topología producto. Para el caso $n = 0$, $L(^0E,F)$ se identificará con F como espacio vectorial.

Si $x \in E$ y $A \in L(^nE,F)$, Ax^n será el elemento de F definido por

$$Ax^n = \begin{cases} A(x, \overset{n)}{\dots}, x) & , \text{si } n > 0 \\ A & , \text{si } n = 0 \end{cases}$$

b) El subespacio vectorial de $L(^nE,F)$, $n > 0$, formado por las aplicaciones n-lineales continuas y simétricas de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$ en F, se denotará por $L_s(^nE,F)$. Para el caso $n = 0$, $L_s(^0E,F)$ se identificará con F como espacio vectorial.

c) Un polinomio n-homogéneo continuo de E en F es una aplicación P de E en F, para la que existe $A \in L(^nE,F)$ tal que

$$P(x) = Ax^n,$$

cualquiera que sea $x \in E$. Se escribe entonces $P = \hat{A}$.

El espacio vectorial de los polinomios n-homogéneos continuos de E en F, se designará por $P(^nE,F)$.

d) Una aplicación P de E en F se dice que es un polinomio continuo, si

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_m$$

donde $P_j \in P(^jE,F)$ para $j = 0, 1, \dots, m$. Se representará por $P(E,F)$ el espacio vectorial de los polinomios continuos de E en F.

0.2.Observaciones.-

i) Sea $A \in L(^nE,F)$, $n \geq 1$. La aplicación sym (A) de $E\times \overset{n)}{\dots} \times E$ en F, definida por

$$\text{sym}(A)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

es una aplicación n-lineal continua y simétrica. (S_n representa el grupo simétrico de orden n).

La aplicación

$$A \in L(^nE,F) \longrightarrow \text{sym}(A) \in L_s(^nE,F)$$

es una proyección.

ii) La aplicación

$$A \in L_s(^nE,F) \longrightarrow \hat{A} \in P(^nE,F)$$

es lineal y biyectiva[1].

iii) Sean $p, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq p \leq n$. Si $x \in E$ y $A \in L_s(^nE,F)$, se designará por Ax^{n-p} la aplicación de $E\times \overset{p)}{\dots} \times E$ en F, definida por:

[1] La inyectividad se prueba a partir de la fórmula de polarización [Mu,6]:
Sean $A \in L_s(^nE,F)$, $n \geq 1$, y $a, x_1, x_2, \dots, x_n$ elementos de E, entonces

$$A(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq n}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \hat{A}(a + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)$$

$$Ax^{n-p}(h_1, h_2, ..., h_p) = A(x, \overset{n-p)}{...}, x, h_1, h_2, ..., h_p).$$

Se verifica que

$$A\,x^{n-p} \in L_s(^pE,F)$$

0.3. El espacio normado $L(^nE,F)$.

Sea n un número natural, $n \geq 1$. La aplicación

$$A \in L(^nE,F) \longrightarrow \|A\| = \sup\{\|A(x_1, x_2, ..., x_n)\| \;/\; x_j \in E, \|x_j\| \leq 1\} \in [0,\infty),$$

es una norma sobre $L(^nE,F)$. El espacio normado así obtenido,satisface las siguientes propiedades:

i) Es un espacio de Banach.

ii) $L_s(^nE,F)$ es un subespacio cerrado.

iii) $\|\mathrm{sym}(A)\| \leq \|A\|$, para cada $A \in L(^nE,F)$.

La topología sobre $L(^nE,F)$ (resp. $L_s(^nE,F)$) definida por la norma anterior se denotará por β.

Para el caso $n = 0$, β designará la topología del espacio normado F.

0.4. El espacio normado $P(^nE,F)$.

Sea n un número natural, $n \geq 1$. La aplicación

$$P \in P(^nE,F) \longrightarrow \|P\| = \sup\{\|P(x)\| \;/\; x \in E, \|x\| \leq 1\} \in [0,\infty), \quad (1)$$

es una norma. La topología sobre $P(^nE,F)$ definida por la norma anterior se representará por β.

Se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|\hat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{n^n}{n!}\|\hat{A}\|, \text{ para cada } A \in L_s(^nE,F).$$

A partir de la desigualdad anterior, resultan inmediatas las siguientes propiedades:

i) La aplicación

$$A \in \left(L_s(^nE,F), \beta\right) \longrightarrow \hat{A} \in \left(P(^nE,F), \beta\right)$$

es un homeomorfismo topológico.

ii) El espacio $P(^nE,F)$ junto con la norma (1) es un espacio de Banach.

Para el caso $n = 0$, β denotará la topología del espacio normado F.

0.5.Topología compacta abierta en $L(^nE,F)$.

Sea n un número natural, $n \geq 1$. Para cada compacto H de $E \times \overset{n)}{...} \times E$, se tiene que la aplicación q_H de $L(^nE,F)$ en $[0,\infty)$, definida por

$$q_H(A) = \sup \{ \| A(x) \| \ / \ x \in H \}$$

es una seminorma . La topología sobre $L(^nE,F)$ definida por la familia de seminormas

$$\{ q_H / \ H \text{ es un compacto de } Ex\overset{n)}{\ldots}xE \}$$

se designará por τ_0.

Se verifican las siguientes propiedades:

i) El espacio localmente convexo $(L(^nE,F), \tau_0)$ es separado y completo. [B1, 282].

ii) La topología τ_0 también se puede definir por la familia de seminormas

$$\{ q_{Kx\overset{n)}{\ldots}xK} \ / \ K \text{ es un compacto de } E \}$$

iii) $L_s(^nE,F)$ es subespacio lineal cerrado del espacio $(L(^nE,F), \tau_0)$ y por consiguiente, el espacio $(L_s(^nE,F), \tau_0)$ es completo.

iv) La topología τ_0 es menos fina que la topología β.

v) Si dim (E) es finita, las topologías τ_0 y β coinciden en $L(^nE,F)$.

Para el caso n = 0, τ_0 será la topología del espacio normado F.

0.6. Topología compacta abierta en $P(^nE,F)$.

Sea n un número natural, $n \geq 1$. Para cada compacto K de E, se tiene que la aplicación q_K de $P(^nE,F)$ en $[0,\infty)$ definida por

$$q_K(P) = \sup \{ \|P(x)\| \ / \ x \in K \}$$

es una seminorma. La topología localmente convexa sobre $P(^nE,F)$ definida por la familia de seminormas

$$\{ q_K \ / \ K \text{ es un compacto de } E \}$$

se representará por τ_0.

Se verifican las siguientes propiedades:

i) La aplicación

$$A \in (L_s(^nE,F), \tau_0) \longrightarrow \hat{A} \in (P(^nE,F),\tau_0)$$

es un homeomorfismo topológico. (La demostración de este resultado se basa en la fórmula de polarización).

ii) El espacio $(P(^nE,F), \tau_0)$ es completo.

iii) Los espacios $(P(^nE,F), \tau_0)$ y $(P(^nE,F), \beta)$ tienen los mismos conjuntos acotados y por consiguiente, también tienen los mismos conjuntos acotados los espacios $(L_s(^nE,F), \tau_0)$ y $(L_s(^nE,F), \beta)$ [Di, 24].

2.- Propiedades de conjuntos U-acotados en abiertos convexos.

En esta sección E será un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y U un abierto convexo de E tal que $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$.

0.7.Definición.- Un subconjunto B de U se dice que es un conjunto U-acotado, cuando B es un acotado de E y $d(B, Fr(U)) > 0$.

0.8.Proposición.- Existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos U-acotados que satisface las siguientes propiedades:

i) $B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n+1}$, $n = 1, 2, ...,$ y $B_1 \neq \emptyset$.

ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = U$.

iii) Para cada subconjunto B de U, U-acotado, existe un número natural n, tal que $B \subset B_n$.

iv) Para cada $n = 1, 2, ...,$ existe $\alpha_n > 0$ tal que para cada $x \in B_n$,

$$B(x, \alpha_n) \subset B_{n+1}.$$

v) Para cada $n = 1, 2, ...,$ existe $\gamma_n > 0$ tal que para cada $x \in B_n$, se tiene

$$B(x, \gamma_n \|x\|) \subset B_{n+1}.$$

vi) B_n es convexo, $n = 1, 2, ...$

Demostración.- Para cada $n = 1, 2, ...,$ sea

$$B_n = \{ x \in U / \| x \| \leq n, d(x, Fr(U)) \geq 1/n \}$$

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que B_{n_0} es no vacío. Sin dificultad se comprueba que la sucesión $\{B_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ verifica las propiedades i), ii) y iii) [Ba, 81].

iv) Si $n \geq n_0$, para cada $x \in B_n$ se verifica

$$B(x, \frac{1}{n(n+1)}) \subset B_{n+1}.$$

En efecto, sean $x \in B_n$ y $w \in B(x, \frac{1}{n(n+1)})$, entonces

$$w \in \overset{\circ}{B}(x, \frac{1}{n}) \subset U,$$

$$\| w \| \leq \| w - x \| + \| x \| < \frac{1}{n(n+1)} + n \leq 1 + n$$

y

$$d(w, Fr(U)) \geq d(x, Fr(U)) - d(w, x) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

v) Si $n \geq n_0$, para cada $x \in B_n$ se tiene

$$B(x, \frac{\|x\|}{n^2(n+1)}) \subset B_{n+1}.$$

Observemos, en primer lugar que $x \neq 0$, para cada $x \in U$. Sean $x \in B_n$ y $w \in B(x, \frac{\|x\|}{n^2(n+1)})$, se verifica

$$\| w - x \| \leq \frac{\|x\|}{n^2(n+1)} \leq \frac{n}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

y se ha demostrado en iv) que

$$B(x, \frac{1}{n(n+1)}) \subset B_{n+1}.$$

vi) Veamos que cada B_n es un conjunto convexo.

Demostración.- Sean $x, y \in B_n$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta = 1$. Entonces $\alpha x + \beta y \in U$, ya que U es convexo. Por otra parte:

$$\| \alpha x + \beta y \| \leq \alpha\|x\| + \beta\|y\| \leq \alpha n + \beta n = n.$$

Sea ahora $z \in \mathring{B}(\alpha x + \beta y, 1/n)$, existe $h \in E$ con $\|h\| < 1/n$, tal que

$$z = \alpha x + \beta y + h = \alpha x + \beta y + \alpha h + \beta h = \alpha(x + h) + \beta(y + h)$$

Como $d(B_n, E \sim U) = d(B_n, Fr(U))$ (por ser E un espacio normado), se tiene que $\mathring{B}(x,1/n) \subset U$ y $\mathring{B}(y, 1/n) \subset U$, deduciéndose:

$$z \in \alpha \mathring{B}(x,1/n) + \beta \mathring{B}(y,1/n) \subset \alpha U + \beta U \subset U,$$

y por tanto

$$\mathring{B}(\alpha x + \beta y, 1/n) \subset U.$$

0.9.Notación.- Si M es un subconjunto de U, se denotará por $\tilde{M}$ al conjunto

$$\{ \lambda x \ / \ \lambda \in (0,1], x \in M \}.$$

Se verifican las siguientes propiedades respecto de un subconjunto no vacío M de U:

0.9.1.-$\tilde{M}$ es un subconjunto de U, ya que U es abierto convexo y $0 \in \overline{U}$.

0.9.2.-$\tilde{\tilde{M}} = \tilde{M}$.

0.9.3.-Si H es otro subconjunto de U con $M \subset H$, entonces $\tilde{M} \subset \tilde{H}$.

0.9.4.- Si M es un subconjunto abierto de U,entonces $\tilde{M}$ es un conjunto abierto.

Demostración.- Basta observar que

$$\tilde{M} = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda M.$$

0.9.5.-Si M es un acotado de E, también lo es $\tilde{M}$.

0.9.6.-Si M es convexo, el conjunto $\tilde{M}$ es convexo.

Demostración.- Sean $x, y \in \tilde{M}$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta = 1$. Existen $\lambda,\mu \in (0,1]$ y $x_1,y_1 \in M$ tales que $x=\lambda x_1$, $y=\mu y_1$. Entonces:

$$\alpha x + \beta y = \alpha\lambda x_1 + \beta\mu y_1 = (\alpha\lambda + \beta\mu)\left(\frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda + \beta\mu} x_1 + \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda + \beta\mu} y_1\right).$$

Como $\alpha\lambda + \beta\mu \in (0,1]$ y M es convexo, $\alpha x + \beta y \in \tilde{M}$.

0.9.7.- Si M es un subconjunto de U, U-acotado, para cada $\rho > 0$ los conjuntos

$$\tilde{M} - B(0,\rho) \qquad y \qquad \tilde{M} - \mathring{B}(0,\rho)$$

son U-acotados.

Demostración.- Obviamente, el conjunto $\tilde{M} - \mathring{B}(0,\rho)$ es un acotado de E. Por otra parte, existen $R > 0$ y $r > 0$ tales que

$$\|x\| \leq R \quad y \quad d(x, Fr(U)) \geq r, \quad x \in M.$$

Sea $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq R/\rho r$ y $z \in \tilde{M} - \mathring{B}(0,\rho)$. Veamos que $\mathring{B}(z, 1/p) \subset U$. En efecto, existen $\lambda \in (0,1]$ y $x \in M$ tales que $z = \lambda x$. Sea $w \in \mathring{B}(z,1/p)$; existe $h \in E$ con $\|h\| <1/p$ y tal que

$$w = z + h = \lambda x + h = \lambda(x + \frac{h}{\lambda}).$$

Como $\lambda \geq \rho/\|x\|$, se tiene

$$\left\| \frac{h}{\lambda} \right\| < \frac{\|x\|}{p\rho} \leq \frac{\rho r}{R}\frac{R}{\rho} = r$$

y por consiguiente

$$w \in \lambda \mathring{B}(x,r) \subset \lambda U \subset U.$$

0.9.8.- Si M es un subconjunto de U, acotado y cerrado en E, se tiene que $\tilde{M} \cup \{0\}$ es cerrado en E.

Demostración.- Sea $x \neq 0$ un punto de la adherencia de $\tilde{M} \cup \{0\}$. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\tilde{M}$ que converge hacia x. Para cada n = 1, 2, ..., sean $\lambda_n \in (0,1]$ e $y_n \in M$ con $x_n = \lambda_n y_n$. Como M es acotado, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|y\| \leq \gamma, \qquad y \in M.$$

Entonces

$$\frac{\| x_n \|}{\gamma} \leq \frac{\| x_n \|}{\| y_n \|} = \lambda_n \leq 1$$

y como

$$0 < \frac{\| x \|}{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{\| x_n \|}{\gamma} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_n \leq 1;$$

existe una subsucesión $\{\lambda_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge hacia $\lambda \in (0,1]$. Por otra parte, para cada $j=1,2,\ldots,$

$$y_{n_j} = \frac{1}{\lambda_{n_j}} x_{n_j} \in M,$$

y la sucesión $\{ x_{n_j} / \lambda_{n_j} \}_{j=1}^{\infty}$ converge hacia $x / \lambda \in M$ (M es cerrado en E), luego

$$x = \lambda \frac{x}{\lambda} \in \tilde{M}.$$

0.9.9.- Si K es un compacto de U, se tiene que $\tilde{K} \cup \{0\}$ es un compacto de E. Además, para cada $\rho > 0$, $\tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\rho)$ es un compacto de U.

Demostración.- Basta observar que $\tilde{K} \cup \{0\}$ es la imagen de $[0,1] \times K$, mediante la aplicación

$$(t,x) \longrightarrow t\,x,$$

y si $\rho > 0$, $\tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\rho)$ es un subconjunto cerrado de $\tilde{K} \cup \{0\}$.

0.10.Proposición.- Existe una sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de U que verifican las siguientes propiedades:

i) Para cada n = 1, 2, ... existe un subconjunto U-acotado B_n, tal que $\tilde{B}_n = L_n$.

ii) $L_n \subset \mathring{L}_{n+1}$, n = 1, 2, ...

iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = U$.

iv) L_n es convexo, n = 1, 2, ...

v) Para cada subconjunto U-acotado B existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{B} \subset L_n$.

vi) Para cada n = 1, 2, ..., existe $\gamma_n > 0$ tal que para cada $x \in L_n$ se tiene

$$B(x, \gamma_n \|x\|) \subset L_{n+1}.$$

Demostración.- Si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos U-acotados que verifican las propiedades de la proposición 0.8, en virtud de (0.9.1) a (0.9.8), la sucesión

$\{\tilde{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface i), ii), iii), iv) y v).

Veamos que se verifica vi). En la proposición 0.8, se ha demostrado que existe $\gamma_n > 0$, tal que para cada $x \in B_n$, se tiene

$$B(x, \gamma_n \|x\|) \subset B_{n+1}. \qquad (1)$$

Basta probar que

$$B(z, \gamma_n \|z\|) \subset \tilde{B}_{n+1}, \qquad z \in \tilde{B}_n.$$

En efecto, sea $z \in \tilde{B}_n$ y sea $w \in B(z, \gamma_n \|z\|)$. Como $z \in \tilde{B}_n$, existen $\lambda \in (0,1]$, $x \in B_n$ tales que $z = \lambda x$. Por otra parte

$$\left\| \frac{w}{\lambda} - x \right\| = \left\| \frac{w}{\lambda} - \frac{z}{\lambda} \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \gamma_n \| z \| = \gamma_n \| x \|;$$

por (1), se obtiene

$$\frac{w}{\lambda} \in B(x, \gamma_n \| x \|) \subset B_{n+1},$$

lo que implica

$$w = \lambda \frac{w}{\lambda} \in \tilde{B}_{n+1} = L_{n+1}.$$

0.11.Observación.- Como estamos suponiendo que U es un abierto convexo de E tal que $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$, en virtud del teorema de Hahn-Banach, existe un elemento $\varphi \in E'$ con $\|\varphi\| = 1$, y

α) Si E es real, $\varphi(x) > 0$ para cada $x \in U$.

β) Si E es complejo, $\mathrm{Re}\, \varphi(x) > 0$ para cada $x \in U$.

0.12.Proposición.- Sea E un espacio normado real. Si $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(x) > 0$ para cada $x \in U$, entonces para cada subconjunto B, U-acotado, existe un número real $\mu \geq 1$, tal que para cada $x \in \tilde{B}$ se verifica

$$\mu\varphi(x) \geq \| x \|.$$

Demostración.- Se tiene

$$d(B, Fr(U)) = d(B, E \sim U) = \rho > 0,$$

ya que E es un espacio normado. Por otra parte, para cada $x \in E$,

$$d(x, \mathrm{Ker}\, \varphi) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} = |\varphi(x)| \qquad [Si,254]$$

Por ser B un subconjunto acotado de E, existe $M > 0$ tal que

$$\|x\| \leq M, \quad x \in B.$$

Como Ker $\varphi \subset E\sim U$,

$$\varphi(x) = d(x,\mathrm{Ker}\,\varphi) \geq d(x,E\sim U) \geq \rho, \qquad x \in B$$

luego

$$\varphi(x)\frac{M}{\rho} \geq \varphi(x)\frac{\|x\|}{\rho} \geq \|x\|, \qquad x \in B. \qquad (1)$$

Ahora bien,

$$\varphi(x) \leq \|x\|\ , \qquad x \in B. \qquad (2)$$

De (1) y de (2) se sigue que $\mu = \frac{M}{\rho} \geq 1$. Entonces, si $y \in \tilde{B}$, existen $\lambda \in (0,1]$, $x \in B$, tales que $y = \lambda x$; por consiguiente:

$$\mu\,\varphi(y) = \mu\,\varphi(\lambda x) = \mu\,\lambda\varphi(x) \geq \lambda\,\|x\| = \|y\|.$$

0.13.Proposición.- Sea E un espacio normado complejo. Si $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$ y $\mathrm{Re}\,\varphi(x) > 0$ para cada $x \in U$, entonces para cada subconjunto U-acotado B, existe un número real $\mu \geq 1$, tal que para cada $x \in \tilde{B}$ se verifica

$$\|x\| \leq \mu\,|\,\varphi(x)\,|.$$

Demostración.- Designemos por $E_{\mathbb{R}}$ el espacio normado real subyacente. La aplicación

$$\Psi(x) = \mathrm{Re}\,\varphi(x), \quad x \in E,$$

es un elemento de $(E_{\mathbb{R}})'$. Aplicando la proposición anterior, existe $\lambda \geq 1$ tal que

$$\|x\| \leq \lambda\frac{\Psi(x)}{\|\Psi\|}\ , \quad x \in \tilde{B},$$

y por consiguiente

$$\|x\| \leq \frac{\lambda}{\|\Psi\|}\,\Psi(x) = \frac{\lambda}{\|\Psi\|}\,\mathrm{Re}\,\varphi(x) \leq \frac{\lambda}{\|\Psi\|}\,|\varphi(x)|, \quad x \in \tilde{B}.$$

Como

$$|\varphi(x)| \leq \|x\|, \quad x \in E,$$

se obtiene

$$\frac{\lambda}{\|\Psi\|} \geq 1.$$

0.14.Notaciones.- Sea M es un subconjunto de U, se denotará por M_c al conjunto

$$\{\ tx + (1-t)y\ /\ t \in [0,1],\ x, y \in M\ \}$$

Se verifican las siguientes propiedades respecto de un subconjunto no vacío M de U:

0.14.1.- $M_c \subset U$.

0.14.2- Si M es convexo, $M_c = M$.

0.14.3.- Si H es otro subconjunto de U con $H \subset M$, $H_c \subset M_c$.

0.14.4.- Si M es compacto, M_c es compacto.

Demostración.- Basta observar que M_c es la imagen del conjunto $[0,1] \times M \times M$, mediante la aplicación

$$(t,x,y) \longrightarrow t\,x + (1-t)\,y$$

0.14.5.- Si M es un subconjunto acotado, M_c también lo es.

0.14.6.- Si M es un subconjunto U-acotado, M_c también lo es.

Demostración.- En virtud de 0.14.5, M_c es un conjunto acotado. Por otra parte, existe $\rho > 0$ tal que

$$d(M,Fr(U)) \geq \rho.$$

Sea $x \in M_c$, demostraremos que $\overset{\circ}{B}(x,\rho) \subset U$. En efecto: si $x \in M_c$, existen $y, z \in M$ y $t \in [0,1]$, tales que $x = ty + (1-t)z$. Entonces, si $w \in \overset{\circ}{B}(x,\rho)$, existe $h \in E$ con $\|h\| < \rho$ y $w = x + h$, luego

$$w = x + h = ty + (1-t)z + h = t\,(y + h) + (1-t)\,(z + h)$$

y

$$w \in t\,\overset{\circ}{B}(y,\rho) + (1-t)\,\overset{\circ}{B}(z,\rho) \subset t\,U + (1-t)\,U \subset U.$$

0.14.7.- $(\tilde{M})_c \subset \widetilde{M_c}$.

Demostración.- Sean $x, y \in \tilde{M}$; existen $\lambda, \mu \in (0,1]$, $x_1, y_1 \in M$ con $x = \lambda x_1$, $y = \mu y_1$. Si $t \in [0,1]$,

$$tx + (1-t)y = t\lambda x_1 + (1-t)\mu y_1 = (t\lambda + (1-t)\mu)\left(\frac{t\lambda}{t\lambda + (1-t)\mu}x_1 + \frac{(1-t)\mu}{t\lambda + (1-t)\mu}y_1\right)$$

y por tanto,

$$tx + (1-t)y \in (t\lambda + (1-t)\mu)\,M_c \subset \widetilde{M_c}.$$

0.15.Notaciones.- Sea M un subconjunto de U, se denotará por M_r al conjunto

$$\{\ \lambda x \,/\, \lambda > 0,\ x \in M\ \}$$

Se verifican las siguientes propiedades respecto de un subconjunto no vacío M de U:

0.15.1.- Si M es un conjunto convexo, M_r también es convexo.

Demostración.- Sean $x, y \in M_r$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta = 1$. Existen $\lambda,\mu > 0$ y $x_1, y_1 \in M$, tales que $x = \lambda x_1$, $y = \lambda y_1$. Entonces

$$\alpha x + \beta y = \alpha\lambda x_1 + \beta\mu y_1 = (\alpha\lambda + \beta\mu)\,(\frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda + \beta\mu} x_1 + \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda + \beta\mu} y_1).$$

Como $\alpha\lambda + \beta\mu > 0$ y M es convexo, $\alpha x + \beta y \in M_r$.

0.15.2.- Si M es un conjunto abierto de U, entonces M_r es un abierto de E.

Demostración.- Basta observar que

$$M_r = \bigcup_{0<\lambda<+\infty} \lambda M$$

0.15.3.- Si $\dim(E) \geq 2$, el conjunto U_r tiene un punto frontera $x \neq 0$.

Demostración.- Se tiene que $0 \in Fr(U_r)$. Teniendo en cuenta (0.15.1), (0.15.2) y el teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano cerrado H de E con $H \cap U_r = \emptyset$. Consideremos un punto $w \in H$ con $w \neq 0$ y un punto $b \in U_r$. El segmento que une w y b, corta a U_r y a su complementario, por tanto, cortará también a $Fr(U_r)$ en un punto x, que podemos escribir como

$$x = tw + (1-t)b$$

para un cierto $t \in (0,1)$. Si x fuese el vector cero, se tendría

$$b = \frac{t}{t-1}\, w \in H$$

lo cual es absurdo.

0.15.4.- Si M es un subconjunto U-acotado y cerrado en E, entonces $M_r \cup \{0\}$ es cerrado en E.

Demostración.- Sea $x \neq 0$ un punto de la adherencia de $M_r \cup \{0\}$; existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de M_r que converge hacia x. Para cada n = 1, 2, ..., sean $\lambda_n > 0$ e $y_n \in M$, con $x_n = \lambda_n y_n$. Como M es U-acotado, existen $\alpha, \gamma > 0$ tales que

$$\alpha \leq \|y\| \leq \gamma, \qquad y \in M.$$

Por tanto

$$0 < \frac{\|x\|}{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{\gamma} \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{\|y_n\|} = \varliminf_{n\to\infty} \lambda_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{\alpha} = \frac{\|x\|}{\alpha},$$

deduciéndose que existe una subsucesión $\{\lambda_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge hacia un número real $\lambda > 0$, y por consiguiente la sucesión $\{x_{n_j} / \lambda_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge hacia $x / \lambda \in M$, luego

$$x = \lambda \frac{x}{\lambda} \in M_r.$$

0.15.5.- Si $\dim(E) \geq 2$ y M es un subconjunto U-acotado y cerrado en E, se tiene $U_r \neq M_r$.

Demostración.- Si se supone $U_r = M_r$, por (0.15.2) y (0.15.4) se tiene que U_r es abierto en E y $U_r \cup \{0\}$ es cerrado en E y por consiguiente el vector cero será el único punto frontera de U_r, lo que contradice (0.15.3).

0.16.Proposición.- Si dim (E) ≥ 2 y M un subconjunto U-acotado y cerrado en E , para cada un número real δ estrictamente positivo, existe $a \in U$ tal que

$$\|a\| < \delta \quad y \quad a \notin \tilde{M}.$$

Demostración.- Razonaremos por reduccción al absurdo. Supongamos que para cada $a \in \mathring{B}(0,\delta) \cap U$ se tiene que $a \in \tilde{M}$ y veamos que $U_r = M_r$, lo que contradice (0.15.5). Es obvio que $M_r \subset U_r$. Por otra parte, si $b \in U_r$ existen $\lambda > 0$, $x \in U$ con $b = \lambda x$; consideremos $\mu \in (0,1)$ tal que $\|\mu x\| < \delta$. Se tiene

$$\mu x \in U \cap \tilde{M},$$

y por tanto, existen $\alpha \in (0,1]$, $y \in M$ con

$$\mu x = \alpha y,$$

de donde se deduce

$$b = \lambda x = \frac{\lambda \alpha}{\mu} y \in M_r.$$

0.17.Proposición.- Si dim(E) ≥ 2 y M es un subconjunto U-acotado y cerrado en E, para cada número real δ estrictamente positivo, existen $a \in U$ y $r > 0$ tales que

i) $B(a, r) \subset U$.

ii) $\|a\| < \delta$ y $r < \delta$.

iii) $\tilde{M} \cap \bar{B}(a, r) = \emptyset$.

Demostración.- Consideremos un número real $\gamma > 0$, verificando

$$\gamma \leq \inf \{ \|x\| / x \in M \}.$$

En virtud de (0.16), existe $a \in U$ tal que

$$\|a\| < \text{mín} \{ \frac{\gamma}{2}, \delta \} \quad y \quad a \notin \tilde{M} \cup \{0\}.$$

Como $\tilde{M} \cup \{0\}$ es cerrado en E (0.9.8), se obtiene que

$$d(a, \tilde{M} \cup \{0\}) > 0,$$

luego existe $r > 0$, $r < \text{mín} \{ \gamma/2, \delta \}$, de forma que

$$B(a, r) \subset U \quad y \quad B(a, r) \cap \tilde{M} = \emptyset.$$

Veamos, por último que $\tilde{B}(a, r) \cap \tilde{M} = \emptyset$. En caso contrario, existen $\lambda, \mu \in (0,1]$, $x \in B(a, r)$, $b \in M$, con

$$\lambda x = \mu b.$$

Entonces, $x = \frac{\mu}{\lambda} b$, y por consiguiente,

$$\frac{\mu}{\lambda} \| b\| = \| x \| \leq \| x - a \| + \| a \| \leq r + \| a \| \leq \gamma \leq \| b\|,$$

por tanto, $\frac{\mu}{\lambda} \lneq 1$, y se obtiene que $x \in B(a, r) \cap \tilde{M}$.

1. FUNCIONES DE CLASE C^∞ CON DERIVADAS PREFIJADAS EN EL ORIGEN A TRAVES DE CONJUNTOS U-ACOTADOS.

En este capítulo E y F representarán, salvo mención expresa, espacios de Banach reales y U será un abierto convexo de E tal que $0 \notin U$ y $0 \in \overline{U}$.

Las propiedades (y notaciones) que utilizaremos de las funciones diferenciables Fréchet en un abierto de un espacio de Banach y con valores en otro espacio de Banach, son las clásicas y pueden verse fundamentalmente en [D], [C], [Mu], [Ya] y [A-M-R].

Como se ha indicado en la introducción, el objetivo de la memoria es el estudio de propiedades de espacios de funciones $f \in C^\infty(U,F)$, tales que para cada subconjunto U-acotado (resp. compacto) B de U y para cada n = 0, 1, 2, ..., existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s({}^nE,F)$ (0.3) ó por la topología compacta abierta τ_0 en $L_s({}^nE,F)$ (0.5).

Observemos que si $g \in C^\infty(E,F)$, la aplicación

$$g|_U = f$$

es del tipo considerado. De hecho, para cada n = 0, 1, 2, ..., existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s({}^nE,F)$ y como $\beta \geq \tau_0$, también existe límite por la topología compacta abierta. Ahora bien, si $\dim(E) \geq 2$, existen funciones $f \in C^\infty(U,F)$, tales que

1º) Para cada n = 0, 1, 2, ..., no existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in U}} D^n f(x)$$

en $(L_s(^nE,F), \tau_0)$ y por tanto en $(L_s(^nE,F), \beta)$.

2º) Para cada subconjunto U-acotado (resp. compacto) B de U y para cada n=0, 1, ..., existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{B}}} D^n f(x)$$

en $(L_s(^nE,F), \beta)$ y por consiguiente en $(L_s(^nE,F), \tau_0)$.

La primera parte del capítulo la dedicaremos a la prueba de esta última afirmación. Demostraremos el resultado cuando el espacio E es de dimensión finita y F = $\mathbb{R}$, lo que permitirá obtener el resultado con toda generalidad.

1.1.- Lema.- Si dim(E) $\geq$ 2, existe una sucesión $\{B(a_j,r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de bolas cerradas en E, tal que:

i) $B(a_j,r_j) \subset U$, $\quad j = 1, 2, ...$

ii) $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ y $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$, $j = 1, 2, ...$

iii) $\tilde{B}(a_j, r_j) \cap \tilde{B}(a_k, r_k) = \emptyset$ para $j \neq k$.

iv) Para cada subconjunto B de E, U-acotado,existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \geq j_0$,

$$\tilde{B} \cap \tilde{B}(a_j,r_j) = \emptyset.$$

Demostración.-Sea $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos U-acotados y cerrados en E, verificando i), ii) y iv) de la proposición 0.8.

En virtud de (0.17) existe una bola cerrada $B(a_1,r_1) \subset U$, que se puede suponer U-acotada , tal que

$$\| a_1 \| \leq 1, \qquad r_1 \leq 1, \qquad \tilde{B}(a_1,r_1) \cap \tilde{H}_1 = \emptyset.$$

Pongamos $p_1 = 1$ y sea $p_2 \in \mathbb{N}$, con

$$B(a_1,r_1) \subset H_{p_2} ;$$

existe una bola cerrada y U-acotada $B(a_2,r_2)$, que verifica:

$$\| a_2 \| \leq 1/2, \qquad r_2 \leq 1/2, \qquad \tilde{B}(a_2,r_2) \cap \tilde{H}_{p_2} = \emptyset.$$

Por recurrencia se prueba la existencia de una subsucesión $\{H_{p_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ y de una sucesión $\{B(a_j,r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de bolas cerradas en E, tales que

$$B(a_j,r_j) \subset U, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

$$\tilde{B}(a_j,r_j) \cap \tilde{H}_{p_j} = \emptyset, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

$$B(a_j,r_j) \subset H_{p_{j+1}}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

$$\| a_j \| \leq 1/j, \quad y \quad r_j \leq 1/j, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

No ofrece dificultad comprobar que la sucesión $\{B(a_j,r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ verifica las condiciones del enunciado.

1.2.Proposición.- Sea $\{B(a_j,r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de bolas cerradas de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ que verifica las condicciones del lema anterior. Existe una función $f \in C^{\infty}(U)$ que satisface:

i) Para cada compacto K de U y para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in K}} D^{\alpha} f(x) = 0$$

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y para cada $j = 1, 2, \ldots$

$$D^{\alpha} f(a_j) = j.$$

Demostración.- Para cada $j = 1, 2, \ldots$, sea $f_j \in C^{\infty}(U)$, tal que

- $f_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots$
- sop $f_j \subset B(a_j,r_j/2)$, $j = 1, 2, \ldots$
- $D^{\alpha} f_j(a_j) = j$, $j = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Tales funciones existen, en virtud del teorema de Borel [Tr,390].

Sea B una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ con $B \subset U$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tilde{B} \cap \tilde{B}(a_m,r_m) = \emptyset, \qquad \text{para } m > n_0,$$

luego

$$f_m(x) = 0, \qquad \text{para cada } x \in \tilde{B} \text{ y } m > n_0.$$

Este hecho prueba que la serie funcional

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m$$

converge en B. Además, si f es la función suma, para cada $x \in \mathring{B}$, se tiene

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n_0} f_j(x)$$

lo que prueba que f es de clase C^{∞} en $\mathring{B}$, y por tanto en U. Es claro que para cada

$\alpha \in \mathbb{N}^n$ y para cada j = 1, 2, ...

$$D^{\alpha}f(a_j) = j.$$

Veamos que f también verifica i). Sea K un compacto de U; consideremos un compacto H de U, de interior no vacío, tal que $K \subset \mathring{H}$. Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ con

$$\tilde{H} \cap \tilde{B}(a_m, r_m) = \emptyset, \qquad \text{para } m > n_1.$$

luego

$$f_m(x) = 0, \qquad \text{para cada } x \in \tilde{H} \text{ y } m > n_1$$

Entonces, si $x \in \mathring{H}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n_1} f_j(x)$$

y por tanto, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{K}}} D^{\alpha}f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{K}}} \sum_{j=1}^{n_1} D^{\alpha}f_j(x) = 0.$$

Observaciones.-

1.3.- La función f del ejemplo verifica que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, no existe límite de la función $D^{\alpha}f$ en 0 (x permanece en U).

1.4.- La prueba realizada en el ejemplo es independiente de la norma considerada en $\mathbb{R}^n$.

1.5.- La función del ejemplo verifica:

i) Para cada compacto K de U y para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{K}}} D^p f(x) = 0$$

en $L_s({}^p(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$.

ii) Para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\sup \{ \|D^p f(a_j)\| \ / \ j = 1, 2, ... \} = +\infty.$$

En efecto, fijada una norma en $\mathbb{R}^n$, basta tener en cuenta:

a) Para cada $x \in U$ y para cada $p \in \mathbb{N}$, existe una costante $M_p > 0$, tal que

$$\| D^p f(x) \| \leq M_p \sum_{|\alpha| = p} | D^{\alpha}f(x) |$$

b) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, con $|\alpha| = p$, y para cada $x \in U$,

$$\| D^{\alpha}f(x) \| \leq \| D^{p}f(x)\|.$$

1.6.- Sea E un espacio normado de dimensión finita, dim $E \geq 2$. Si $\{B(a_j,r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de bolas cerradas en E que verifica las condiciones del lema 1.1 , existe una función $f \in C^{\infty}(U)$, que satisface:

i) Para cada compacto K de U y para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{K}}} D^{p}f(x) = 0$$

por la topología del espacio normado $L_s({}^pE,\mathbb{R})$.

ii) Para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\sup \{ \| D^{p}f(a_j) \| \,/\, j = 1, 2, ... \} = \infty.$$

En efecto, si dim E = n, basta considerar una aplicación φ de E en $\mathbb{R}^n$, lineal y biyectiva. Se define

$$\|x\| = \| \varphi^{-1}(x) \|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Es claro que

$$B(x,r) = \varphi\, (B(\varphi^{-1}(x),r))$$

Por las observaciones 1.4, 1.5, existe una función $f \in C^{\infty}(\varphi(U))$ que verifica i), ii) de la observación anterior. La aplicación $f \circ \varphi \in C^{\infty}(U)$ y satisface las condiciones exigidas.

Pasemos ahora a estudiar el caso general. De hecho, se verifica la siguiente proposición:

1.7.Proposición.- Si dim (E) ≥ 2, existe una función $f \in C^{\infty}(U)$, que verifica:

1) Para cada conjunto U-acotado B de E y para cada n = 0, 1, 2, ...,

$$\sup \{ \| D^{n}f(x) \| \,/\, x \in \tilde{B} \} < \infty.$$

2) Para cada subconjunto U-acotado B de E,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{B}}} D^{n}f(x) = 0 , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

cuando en $L_S({}^nE,\mathbb{R})$ se considera la topología β.

3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, no existe el límite de D^nf, cuando x tiende hacia 0 (x permaneciendo en U).

Demostración.- En virtud del teorema de Hahn-Banach, existe un subespacio lineal cerrado M, de E, tal que

$$\text{codim}(M) = 2 \quad \text{y} \quad U \cap M = \emptyset.$$

Consideremos el espacio cociente E/M, provisto de la norma cociente. Designaremos por φ la aplicación canónica suprayectiva de E en E/M. Si $x \in E$, el elemento $\varphi(x)$ será también denotado por $\dot{x}$. El conjunto U+M es abierto convexo de E y obviamente se verifica

$$0 \in Fr(U+M) \quad \text{y} \quad \varphi(U+M) = \varphi(U).$$

Se tiene que $\varphi(U)$ es abierto convexo en E/M, ya que φ es lineal y abierta. Sin dificultad se comprueba que $0 \in Fr(\varphi(U))$.

La demostración de la existencia de la función requerida, la realizaremos en varias etapas.

a) Para cada conjunto B que sea U-acotado, se tiene que $\varphi(B)$ es $\varphi(U)$-acotado (es decir, $\overline{\varphi(B)}$ es un compacto de $\varphi(U)$).

Veamos, en primer lugar, que para cada conjunto B, (U+M)-acotado, se tiene que $\varphi(B)$ es un conjunto $\varphi(U)$-acotado. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe un conjunto B, (U+M)-acotado y tal que

$$d(\varphi(B), (E/M) \sim \varphi(U)) = 0,$$

entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existen $\dot{x} \in \varphi(B)$, $\dot{y} \in (E/M) \sim \varphi(U)$, verificando:

$$\| \dot{x} - \dot{y} \| < \varepsilon$$

y por consiguiente, existe $h \in M$ tal que

$$\| x - y + h \| < \varepsilon.$$

Como $\dot{x} \in \varphi(B)$, existen $b \in B$ y $m \in M$ con $x = b + m$, luego

$$\| b - y + h + m \| < \varepsilon \qquad (1)$$

Ahora bien, $y - h - m \notin U+M$, (en caso contrario, $\varphi(y - h - m) = \varphi(y) = \dot{y} \in \varphi(U)$). De (1) se obtiene que

$$d(B, E \sim (U+M)) < \varepsilon,$$

y al ser ε arbitrario,

$$d(B, E \sim (U+M)) = 0.$$

Si B es un conjunto U-acotado, también es (U+M)-acotado, ya que $U \subset U+M$ y por tanto,

$$d(B, E \sim U) \leq d(B, E \sim (U+M))$$

b) Para cada compacto K de $\varphi(U)$ y para cada $\delta > 0$, existe un elemento $a \in U$ tal que

$$\|a\| < \delta \quad \text{y} \quad \varphi(a) \notin \tilde{K}.$$

Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que existe un $\delta > 0$, tal que para cada $a \in U$ con $\|a\| < \delta$, $\varphi(a) \in \tilde{K}$, y veamos que

$$K_r = \varphi(U)_r,$$

lo que es absurdo, en virtud de (0.15.5). Es claro que $K_r \subset \varphi(U)_r$. Por otra parte, sea $\dot{z} \in \varphi(U)_r$, existen $\lambda \in (0,\infty)$ y $u \in U$ con

$$\dot{z} = \lambda\, \varphi(u).$$

Sea $\delta_1 > 0$, verificando

$$\delta_1 u \in U \quad \text{y} \quad \|\delta_1 u\| < \delta,$$

se tiene entonces que $\varphi(\delta_1 u) \in \tilde{K}$, luego

$$\delta_1\, \varphi(u) = \mu\dot{x}, \quad \text{donde } \dot{x} \in K \text{ y } \mu \in (0,1],$$

y por tanto,

$$\dot{z} = \lambda\, \varphi(u) = \frac{\lambda\mu}{\delta_1}\, \dot{x} \in K_r.$$

c) Para cada compacto K de $\varphi(U)$ y cada $\delta > 0$, existen $a \in U$ y $r > 0$, tales que

α) $\| a \| \le \delta$ y $r \le \delta$

β) $B(\, \varphi(a), r\,) \subset \varphi(U)$

χ) $\tilde{K} \cap \tilde{B}(\, \varphi(a), r\,) = \emptyset$.

Sea $\gamma = \inf \{\, \|\dot{x}\| \;/\; \dot{x} \in K \,\}$, por el apartado anterior, existe $a \in U$ con

$$\| a \| < \text{mín}\,(\frac{\gamma}{2}, \delta) \quad \text{y} \quad \varphi(a) \notin \tilde{K}.$$

Como

$$d(\tilde{K} \cup \{0\}, \varphi(a)\,) > 0,$$

existe $r > 0$, $r < \text{mín}\,\{\, \gamma/2, \delta \,\}$, de forma que

$$B(\dot{a}, r\,) \subset \varphi(U) \quad \text{y} \quad B(\dot{a}, r\,) \cap \tilde{K} = \emptyset.$$

Veamos que $\tilde{B}(\dot{a}, r\,) \cap \tilde{K} = \emptyset$. En efecto, en caso contrario, existen $\lambda, \mu \in (0,1]$, $\dot{x} \in B(\dot{a}, r\,)$, $\dot{b} \in K$, tales que

$$\lambda\dot{x} = \mu\dot{b},$$

entonces $\dot{x} = \frac{\mu}{\lambda}\dot{b}$, luego

$$\frac{\mu}{\lambda}\, \| \dot{b} \| = \| \dot{x} \| \le \| \dot{a} \| + r < \gamma \le \| \dot{b} \|,$$

de donde se deduce que $\mu / \lambda \le 1$ y $\dot{x} \in B(\dot{a}, r\,) \cap \tilde{K}$.

d) Sea $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de compactos de $\varphi(U)$ que verifica:

- $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$, $\quad p = 1, 2, \dots$
- $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = \varphi(U)$.

Por el apartado anterior, existen $a_1 \in U$ y $r_1 > 0$, tales que:

$$B(\dot{a}_1, r_1) \subset \varphi(U)$$

$$\|a_1\| \leq 1, \qquad r_1 \leq 1, \qquad \tilde{K}_1 \cap \tilde{B}(\dot{a}_1, r_1) = \emptyset.$$

Pongamos $p_1 = 1$ y sea $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(\dot{a}_1, r_1) \subset K_{p_2};$$

existen $a_2 \in U$ y $r_2 > 0$, que verifican:

$$B(\dot{a}_2, r_2) \subset \varphi(U)$$

$$\|a_2\| \leq 1/2, \qquad r_2 \leq 1/2, \qquad \tilde{B}(\dot{a}_2, r_2) \cap \tilde{K}_{p_2} = \emptyset.$$

Por recurrencia se prueba la existencia de una subsucesión $\{K_{p_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, de una sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos de U y de una sucesión $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ de números reales positivos, que satisfacen:

α) $B(\dot{a}_j, r_j) \subset \varphi(U)$, $\quad j = 1, 2, \dots$

β) $\tilde{B}(\dot{a}_j, r_j) \cap \tilde{K}_{p_j} = \emptyset$, $\quad j = 1, 2, \dots$

χ) $B(\dot{a}_j, r_j) \subset K_{p_{j+1}}$, $\quad j = 1, 2, \dots$

δ) $\|a_j\| \leq 1/j$, y $r_j \leq 1/j$, $\quad j = 1, 2, \dots$

Sin dificultad se comprueba que la sucesión de bolas $\{B(\dot{a}_j, r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ verifica las condiciones del lema 1.1. Por la observación 1.6, existe una función $f \in C^{\infty}(\varphi(U))$ tal que

- Para cada compacto K de $\varphi(U)$ y para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{\dot{x} \to 0 \\ \dot{x} \in K}} D^p f(\dot{x}) = 0$$

por la topología del espacio normado $L_s({}^pE/M), \mathbb{R})$).

- Para cada $p \in \mathbb{N}$

$$\sup \{ \|D^p f(\dot{a}_j)\| \;/\; j = 1, 2, \dots\} = \infty. \qquad (1)$$

Veamos por último que la aplicación $f \circ \varphi$ resuelve la cuestión. Observemos que para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, para cada $x \in U$, y para cada $h_1, h_2, \dots, h_n \in E$, se tiene:

$$D^n(f \circ \varphi)(x)(h_1, h_2, \dots h_n) = D^n f(\varphi(x))(\varphi(h_1), \varphi(h_2), \dots, \varphi(h_n))$$

entonces:

1) Si B es un conjunto U-acotado, por el apartado a), $\overline{\varphi(B)}$ es un conjunto compacto de $\varphi(U)$, luego

$$\sup_{x \in B} \{ \sup \{ | D^n(f \circ \varphi)(x)(h_1, h_2, ..., h_n)| / \| h_i \| \leq 1 \quad i = 1, 2, ..., n \} \} \leq$$

$$\leq \|\varphi\|^n \sup \{ \| D^n f(\varphi(x)) \| / \quad x \in B \} \leq \|\varphi\|^n \sup \{ \| D^n f(\dot{y}) \| \ / \dot{y} \in \overline{\varphi(B)} \}$$

2) Si B es un conjunto U-acotado, por el apartado a), para cada n = 0, 1, ... y para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\dot{y} \in B(0,\delta) \cap \widetilde{\varphi(B)})$, se tiene

$$\| D^n f(\dot{y}) \| < \varepsilon.$$

luego si $x \in B(0,\delta) \cap \tilde{B}$, se verifica:

$$\| \dot{x} \| = \| \varphi(x) \| \leq \| x \| < \delta \quad y \quad \varphi(x) \in \widetilde{\varphi(B)},$$

por tanto

$$\| D^n(f \circ \varphi)(x) \| =$$

$$= \sup \{ | D^n(f \circ \varphi)(x)(h_1, h_2, ..., h_n) | / \| h_i \| \leq 1, i = 1, 2, ..., n \} \leq \varepsilon \| \varphi \|^n$$

3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $\delta > 0$ y para cada $\gamma > 0$, por (1) existen un número natural $j \geq 1$ con $a_j \in \overset{\circ}{B}(0,\delta) \cap U$ e $y_1, y_2, ..., y_n \in E/M$ con $\| y_i \| < 1$, i = 1, 2, ..., n, tales que

$$| D^n f(\dot{a}_j)(y_1, y_2, ..., y_n) | \geq \gamma.$$

Por consiguiente, si $h_1, ..., h_n \in E$ con $\dot{h}_p = y_p$, $\| h_p \| < 1$, p = 1, 2, ..., n, entonces

$$| D^n(f \circ \varphi)(a_j)(h_1, h_2, ..., h_n) | = | D^n f(\dot{a}_j)(y_1, y_2, ..., y_n) | \geq \gamma.$$

1.8.Corolario.- Si dim (E) ≥ 2, existe una función $f \in C^\infty(U,F)$, que verifica:

1) Para cada conjunto U-acotado B de E y para cada n = 0, 1, 2, ...,

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| / x \in \tilde{B} \} < \infty.$$

2) Para cada subconjunto U-acotado B de E,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} D^n f(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

cuando en $L_s(^nE,F)$ se considera la topología β.

3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, no existe el límite de $D^n f$, cuando x tiende hacia 0 (x permaneciendo en U).

Demostración.- Sean f una función de $C^\infty(U)$, que cumpla 1), 2) y 3) de la proposición anterior y b un elemento de F con $b \neq 0$. La función f.b, definida por:

$$(f.b)(x) = f(x)\, b, \qquad x \in U,$$

verifica 1), 2) y 3).

1.9.Definiciones.- En lo que sigue denotaremos por:

a) E_b (U,F) el espacio vectorial de las funciones $f \in C^\infty(U,F)$, tales que para cada conjunto B, U-acotado, y para cada n = 0, 1, 2, ... , se tiene:

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in B \} < \infty$$

y existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \bar{B}}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s({}^nE,F)$.

b) E_c (U,F) será el espacio vectorial de las funciones $f \in C^\infty(U,F)$, tales que para cada compacto K de U y para cada n = 0, 1, 2, ..., existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \bar{K}}} D^n f(x)$$

por la topología compacta- abierta en $L_s({}^nE,F)$.

Observaciones.-

1.10.- Se verifica:

$$E_b(U,F) \subset E_c(U,F)$$

1.11.- Si E es de dimensión finita, los espacios definidos anteriormente coinciden.

1.12.- Si E es un espacio de Banach de dimensión no finita, los espacios E_b (U,F) y E_c (U,F) son distintos.

Demostración.- a) Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E' que converge débilmente hacia 0 y tal que $\| \varphi_n \| = 1$, n = 1, 2, ... [Jo].

La serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n)^{2n}$$

define una función real f, de clase C^∞ en E. Veamos que f no está acotada en B(0,2).

Para cada n = 1, 2,..., y fijado $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{2}{3} < 1 - \varepsilon$, existe $x_n \in E$ con $\|x_n\| = 1$ y

$$|\varphi_n(x_n)| > 1 - \varepsilon > \frac{2}{3}.$$

Los puntos $y_n = 2\, x_n$, n = 1, 2, ..., están en B(0,2) y para cada n = 1, 2, ...

$$(\varphi_n(y_n))^{2n} > (\tfrac{4}{3})^{2n}.$$

Por tanto,

$$f(y_n) = \sum_{m=1}^{\infty}(\varphi_m(y_n))^{2m} \geq (\tfrac{4}{3})^{2n}$$

b) Sean $a \in U$ y $r > 0$ tales que $\overset{\circ}{B}(a,2r) \subset U$; consideremos la aplicación g de U en E, definida por:

$$x \in U \longrightarrow (x\text{-}a)\frac{2}{r}$$

Dicha aplicación es bicontinua, de clase C^{∞} en U y aplica homeomórficamente B(a,r) en B(0,2). Se tiene que la función $f\circ g \in E_c(U,\mathbb{R})$ y

$$\sup\{ \| f\circ g(x) \| / x \in B(a,r) \} = \infty.$$

Si $b \in F$, con $b \neq 0$, la función f.b, de U en F, definida por:

$$(f.b)(x) = f(x)b,$$

resuelve la cuestión.

1.13.Notaciones.- Si $f \in E_c(U,F)$, (resp. $f \in E_b(U,F)$) se verifica que el elemento de $L_s(^nE,F)$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} D^n f(x) \qquad (\text{resp.}, \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{B}}} D^n f(x))$$

es independiente del compacto elegido (resp. del U-acotado elegido). El citado elemento de $L_s(^nE,F)$ se denotará por $D^nf(0)$.

1.14.Proposición.- Sea f una aplicación de U en F. Las propiedades siguientes son equivalentes:

α) $f \in E_c(U,F)$ (resp. $f \in E_b(U,F)$).

β) Para cada $\varphi \in F'$, se tiene que $\varphi\circ f \in E_c(U,\mathbb{R})$ (resp. $\varphi\circ f \in E_b(U,\mathbb{R})$).

Demostración.- α) ⇒ β). Sea $\varphi \in F'$; se tiene que $\varphi\circ f \in C^{\infty}(U)$. Por otra parte, para cada $x \in U$ y para cada $n = 0, 1, 2, ...$,

$$D^n(\varphi\circ f)(x) = \varphi\circ D^nf(x).$$

i) Supongamos que $f \in E_c(U,F)$. Sean $\varphi \in F'$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, K un compacto de U y H un compacto de E; existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \tilde{K} \cap \overset{\circ}{B}(0,\delta)$,

$$\sup\{ \|D^nf(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^nf(0)(h_1, h_2, ..., h_n)\| / h_j \in H \} < \varepsilon$$

y por consiguiente, si $x \in \tilde{K} \cap \mathring{B}(0,\delta)$ y $h_1, h_2, ..., h_n \in H$,

$$| D^n(\varphi o f)(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n(\varphi o f)(0)(h_1, h_2, ..., h_n) | \leq$$

$$\leq \|\varphi\| \; \| D^n f(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n f(0)(h_1, h_2, ..., h_n) \| \leq \|\varphi\| \; \varepsilon.$$

lo que demuestra que $\varphi o f \in E_c(U, \mathbb{R})$.

ii) Si $f \in E_b(U,F)$, para cada conjunto B, U-acotado, y para cada $n \geq 0$, se tiene

$$\sup \{ \| D^n(\varphi o f)(x) \| \; / \; x \in B \} =$$

$$= \sup_{x \in B} \{ \sup \{ | D^n(\varphi o f)(x)(h_1, h_2, ..., h_n) | \; / \|h_i\| \leq 1 \} \} =$$

$$= \sup_{x \in B} \{ \sup \{ |\varphi(D^n f(x)(h_1, h_2, ..., h_n)| \; / \; \|h_i\| \leq 1 \} \} \leq$$

$$\leq \|\varphi\| \; \sup \{ \|D^n f(x)\| \; / \; x \in B \} < \infty.$$

Un razonamiento análogo al realizado en i), prueba que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{B}}} D^n(\varphi o f)(x) = \varphi o D^n f(0).$$

por la topología β en $L_s({}^nE,F)$.

$\beta) \Rightarrow \alpha)$. La función $f \in C^\infty(U,F)$ [B.2,21].

iii) Supongamos que para cada $\varphi \in F'$, $\varphi o f \in E_c(U, \mathbb{R})$ y veamos que para cada $n = 0, 1, 2, ...$ y para cada compacto K de U, existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{K}}} D^n f(x)$$

por la topología compacta abierta.

Sea K un compacto de U; en virtud de la completitud del espacio $L_s({}^nE,F)$, bastará demostrar que para cada sucesión $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$, de elementos de $\tilde{K}$, que converge hacia 0, la sucesión $\{D^n f(x_p)\}_{p=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(L_s({}^nE,F), \tau_0)$. En efecto, sea $n = 0, 1, 2, ..., \{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\tilde{K}$ que converge hacia 0 y H un compacto de E. Designaremos por

$$K_c = \{ tx + (1-t)y \; / \; x, y \in K, \; t \in [0,1] \};$$

se tiene que K_c es un compacto de U. Si

$$L = \{ x_n \, / \, n = 1, 2, ... \} \cup \{0\}$$

se define

$$K^* = L - L;$$

se verifica que K^* es un compacto de E.

Sea $\varphi \in F'$; como $\varphi o f \in E_c(U,\mathbb{R})$, existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \widetilde{K}_c}} D^{n+1}(\varphi_o f)(x)$$

por la topología τ_0 en $L_s({}^nE,\mathbb{R})$, luego existe $\delta > 0$ (que depende de n, H, $\widetilde{K}_c$ y L), tal que si $z \in \overset{\circ}{B}(0,\delta) \cap \widetilde{K}_c$, se tiene

$$|\, D^{n+1}(\varphi o f)(z)(x, h_1, ..., h_n)\,| \leq 1, \qquad (1)$$

$x \in L$, $h_i \in H$, $i = 1, 2, ..., n$.

Por otra parte, el conjunto $\widetilde{K}_c \sim \overset{\circ}{B}(0,\delta)$ es un compacto de U, luego

$$\sup \{|\, D^{n+1}(\varphi o f)(z)(x, h_1, ..., h_n)\,| \,/\, z \in \widetilde{K}_c \sim \overset{\circ}{B}(0,\delta), x \in L, h_i \in H \} < +\infty \qquad (2)$$

De (1) y de (2) se sigue que existe $M_{\varphi,n} > 0$, tal que:

$$\sup \{|\, D^{n+1}(\varphi o f)(z)(x, h_1, ..., h_n)\,| \,/\, z \in \widetilde{K}_c, x \in L, h_i \in H \} \leq M_{\varphi,n}$$

Como $(\widetilde{K})_c \subset \widetilde{K}_c$ (0.14.7),

$$\sup \{|\, D^{n+1}(\varphi o f)(tx_p + (1-t)x_q)(x_p - x_q, h_1, ..., h_n)\,| \,/\, p,q \in \mathbb{N}, h_i \in H, t \in [0,1]\} \leq M_{\varphi,n}$$

Por otra parte, en virtud del teorema del valor medio, si $p, q \in \mathbb{N}$ y $h_1, h_2, ..., h_n \in H$,

$$|\, \varphi(D^n f(x_p)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n f(x_q)(h_1, h_2, ..., h_n))\,| =$$

$$= |D^n(\varphi o f)(x_p)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n(\varphi o f)(x_q)(h_1, h_2, ..., h_n)\,| \leq M_{\varphi,n} \|x_p - x_q\|.$$

Así hemos demostrado que para cada $\varphi \in F'$, el conjunto

$$\left\{ \varphi\left(\frac{D^n f(x_p)(h_1,...,h_n) - D^n f(x_q)(h_1,...,h_n)}{\|x_p - x_q\|}\right) / \ p, q \in \mathbb{N}, x_p \neq x_q, h_i \in H \right\}$$

es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$, y por consiguiente, el conjunto

$$\left\{ \frac{D^n f(x_p)(h_1,...,h_n) - D^n f(x_q)(h_1,...,h_n)}{\|x_p - x_q\|} \ / \ p, q \in \mathbb{N}, x_p \neq x_q, h_i \in H \right\}$$

es un acotado de F. Luego existe una costante $\gamma_n > 0$ tal que

$$\|D^n f(x_p)(h_1, ..., h_n) - D^n f(x_q)(h_1,..., h_n)\| \leq \gamma_n \|x_p - x_q\|, \qquad h_1, h_2, ..., h_n \in H,$$

lo que implica que

$$\sup \{ \| (D^n f(x_p) - D^n f(x_q)) (h_1, ..., h_n) \| \ / \ h_i \in H \} \leq \gamma_n \|x_p - x_q\|, \qquad p,q \in \mathbb{N}.$$

iv) Supongamos que para cada $\varphi \in F'$, $\varphi o f \in E_b(U,\mathbb{R})$. Para cada n = 0, 1, 2, ..., para cada subconjunto U-acotado B y para cada $\varphi \in F'$, el conjunto

$$\{ \varphi(D^n f(x) (h_1, h_2, ..., h_n)) \ / \ x \in B, \|h_i\| \leq 1 \}$$

es un acotado de $\mathbb{R}$, y por tanto, el conjunto

$$\{ D^n f(x) (h_1, h_2, ..., h_n) \ / \ x \in B \ \ \|h_i\| \leq 1 \}$$

es un acotado de F, luego

$$\sup \{ \|D^n f(x)\| \ / \ x \in B \} < \infty.$$

Para demostrar que existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{B}}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$, se razona como en iii), con mínimas variantes, teniendo en cuenta las propiedades (0.9.7) y (0.14.7).

En [Co-2] se demuestra que " si E es un espacio de Hilbert real, dada una sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $A_n \in L_s(^nE,F)$, n = 0, 1, 2, ..., existe una aplicación f de clase C^{∞} de E en F, tal que

$$D^n f(0) = A_n, \qquad n = 0, 1, 2, ..."$$

Pensamos que el teorema de Borel cuando E es un espacio de Banach de dimensión infinita está todavía sin resolver. Nuestro próximo objetivo consistirá en dar una variante del citado teorema. En particular se verifica el siguiente resultado:

1.15.Proposición.- Sea $A_n \in L_s(^nE,F)$, n = 0, 1, 2, ... Existe una función $f \in E_b(U,F)$, tal que

$$D^n f(0) = A_n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Antes de pasar a la prueba de la proposición, realizaremos algunas observaciones y demostraremos algunos lemas previos.

Observaciones.-

1.16.- Como la topología compacta abierta en $L_s(^nE,F)$ es menos fina que la topología β, en virtud de la observación 1.10, si la proposición 1.15 es cierta, existe una función

$f \in E_c(U,F)$, tal que

$$D^n f(0) = A_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1.17.- Si $\phi \in E'$ y $n \in \mathbb{N}$, se designará por ϕ^n el elemento de $L_s(^nE,\mathbb{R})$ dado por:

$$\phi^n(h_1, \ldots, h_n) = \phi(h_1) \ldots \phi(h_n), \qquad h_i \in E.$$

1.18.Lema.- Sean $\phi \in E'$, $A \in L_s(^nE,F)$, $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ y λ un número real positivo. Se considera la función f de E en F, definida por:

$$f(x) = \alpha(\lambda\, \phi(x))\, \hat{A}(x).$$

Entonces f es de clase C^∞ en E y para cada $k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k \geq 1$,

$$D^k f(x)\, (h_1, \ldots, h_k) =$$

$$= \operatorname{sym}_k\Big(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}\, \alpha^{k-p)}(\lambda\phi(x))\, \lambda^{k-p}\, \phi^{k-p}\, \frac{1}{(n-p)!}\, A(x)^{n-p}\Big)\, (h_1, \ldots, h_k),$$

$h_1, \ldots, h_k \in E$.

Demostración.- En virtud de la regla de la cadena y de la fórmula de Leibnitz se tiene que f es de clase C^∞ en E. La expresión para las derivadas se obtiene a partir de los siguientes resultados:

α) Para cada $n \geq 1$ y $h_1, h_2, \ldots, h_n \in E$, aplicando la regla de la cadena, [A-M-R,91]

$$D^n[\alpha(\lambda\, \phi(x))]\, (h_1, \ldots, h_n) = \lambda^n\, \alpha^{n)}(\lambda\, \phi(x))\, \phi(h_1) \ldots \phi(h_n).$$

β) Para cada $p \geq 1$, $x, h_1, \ldots, h_p \in E$ [B-S.1,73]

$$D^p\hat{A}(x)\, (h_1, \ldots, h_p) = \frac{n!}{(n-p)!}\, A(x)^{n-p}(h_1, \ldots, h_p) \qquad \text{si } n \geq p$$

$$\text{y} \quad D^p\hat{A}(x)\, (h_1, \ldots, h_p) = 0 \qquad \text{si } n < p.$$

Como consecuencia de α) y β) y de la fórmula de Leibnitz

$$D^k f(x)\, (h_1, \ldots, h_k) =$$

$$= \operatorname{sym}_k\Big(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}\, \alpha^{k-p)}(\lambda\phi(x))\, \lambda^{k-p}\, \phi^{k-p}\, \frac{1}{(n-p)!}\, A(x)^{n-p}\Big)\, (h_1, \ldots, h_k).$$

1.19.Observación.- Si f es la función definida en (1.18) y $n \geq k \geq 1$,

$$\|D^k f(x)\| \leq \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \mid \alpha^{k-p)}(\lambda\, \phi(x)) \mid \lambda^{k-p} \|\phi\|^{k-p} \frac{\|A\|}{(n-p)!} \|x\|^{n-p}$$

En particular, si α es una función de soporte compacto en $\mathbb{R}$ y

$$M = \sup_{0\leq j\leq k} [\sup \{ \mid \alpha^{j)}(t) \mid / \ t \in \mathbb{R} \}]$$

se tiene:

$$\|D^k f(x)\| \leq M \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \lambda^{k-p} \|\phi\|^{k-p} \frac{\|A\|}{(n-p)!} \|x\|^{n-p}$$

La observación resulta inmediata a partir del lema anterior y del hecho de que:

$$\|sym_k (A)\| \leq \|A\|, \qquad A \in L(^nE,F).$$

Demostración de la proposición 1.15.- Sea α una función real de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y verificando:

- sop $(\alpha) \subset (-2, 2)$
- $\alpha(t) = 1, \ t \in [-1, 1]$.

Para cada n = 0, 1, 2, ..., se consideran los números reales

$$M_n = \sup_{0\leq j\leq n} [\sup \{ |\alpha^{j)}(t)| / \ t \in \mathbb{R} \}].$$

Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales, tal que

$$\lambda_n \geq \text{máx} \{ M_n \|A_n\| \, n! \ 2^{2n}, n! \}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Por último, sea $\phi \in E'$ con $\|\phi\| = 1$ y $\phi(x) > 0$ para cada $x \in U$. Se define, para cada n = 0,1,2, ..., la aplicación f_n de E en F, por:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \alpha(\lambda_n \phi(x)) \ \hat{A}_n(x).$$

En virtud de (1.18), las funciones $f_n \in C^\infty(E,F)$. Resulta inmediato que para cada conjunto B, acotado de E y para cada n, k $\in \mathbb{N}$

$$\sup \{ \|D^k f_n(x)\| \ / x \in B \} < +\infty.$$

a) Sea B un subconjunto U-acotado; existe una serie convergente de números reales positivos, $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$, que depende de B, tal que

$$\|f_n(x)\| \leq \phi(x)\, a_n, \qquad n \geq 3 \quad y \quad x \in \tilde{B}.$$

En efecto, en virtud de la proposición 0.12, existe una costante $\mu \geq 1$ con

$$\mu\, \phi(y) \geq \|y\|, \qquad y \in \tilde{B}.$$

Sea $x \in \tilde{B}$; para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, puede ocurrir:

i) $\phi(x) \geq \frac{2}{\lambda_n}$, en cuyo caso $\alpha(\lambda_n\, \phi(x)) = 0$, y por tanto, $f_n(x) = 0$.

ii) $\phi(x) < \frac{2}{\lambda_n}$; entonces

$$\|f_n(x)\| \leq \frac{1}{n!}\, |\alpha(\lambda_n \phi(x))|\, \|\hat{A}_n\|\, \|x\|^n \leq \frac{1}{n!}\, M_n\, \|\hat{A}_n\|\, \mu^n\, (\phi(x))^n \leq$$

$$\leq M_n\, \|A_n\|\, \mu^n\, \frac{2^{n-1}}{\lambda_n^{n-1}}\, \phi(x) \leq M_n\, \|A_n\|\, \mu^n\, \frac{2^n}{\lambda_n^{n-1}}\, \phi(x) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_n}{2^n}\, \mu^n\, \frac{1}{\lambda_n^{n-1}}\, \phi(x) \leq \phi(x)\, \frac{\mu^n}{2^n\, \lambda_n^{n-2}} \leq$$

$$\leq \phi(x)\, \frac{\mu^n}{2^n\, n!} \leq \phi(x)\, \frac{e^{\mu}}{2^n}$$

En ambos casos, si $x \in \tilde{B}$ y $n \geq 3$, se tiene

$$\|f_n(x)\| \leq \phi(x)\, \frac{e^{\mu}}{2^n}.$$

b) Sea B un conjunto U-acotado y $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$; existe una serie convergente de números reales positivos, $\sum_{n=k+3}^{\infty} a_n$, (depende de B y de k), tal que

$$\|D^k f_n(x)\| \leq \phi(x)\, a_n, \qquad x \in \tilde{B} \quad \text{y} \quad n \geq k+3.$$

En efecto, sea $\mu \geq 1$ tal que

$$\mu\, \phi(x) \geq \|x\|, \qquad x \in \tilde{B}.$$

Si $x \in \tilde{B}$ y $n \geq k + 3$, por (1.18)

$$D^k f_n(x)\, (h_1, ..., h_k) =$$

$$= \operatorname{sym}_k \Big(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}\, \alpha^{k-p)}(\lambda_n\, \phi(x))\, \lambda_n^{k-p}\, \phi^{k-p}\, \frac{1}{(n-p)!}\, A_n(x)^{n-p)} \Big)(h_1, ..., h_k).$$

Puede ocurrir:

i) $\phi(x) \geq \frac{2}{\lambda_n}$, en cuyo caso $\alpha^{k-p)}(\lambda_n \phi(x)) = 0$, $p = 0, 1, ..., k$, y por tanto

$$D^k f_n(x)\,(h_1, ..., h_k) = 0.$$

ii) $\phi(x) < \frac{2}{\lambda_n}$; entonces

$$\|D^k f_n(x)\| \;\le\; \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \,|\, \alpha^{k-p)}(\lambda_n \phi(x)) \,|\, \lambda_n^{k-p} \;\|\phi\|^{k-p} \frac{\|A_n\| \;\|x\|^{n-p}}{(n-p)!} \;\le$$

$$\le \;\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} M_n \lambda_n^{k-p} \frac{\|A_n\|}{(n-p)!}\, \mu^{n-p} (\phi(x))^{n-p} \;\le^{1}$$

$$\le \;\phi(x) \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} M_n \lambda_n^{k-p} \|A_n\|\, \mu^{n-p} \frac{2^{n-p-1}}{\lambda_n^{n-p-1}} \;\le$$

$$\le \;\phi(x) \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} M_n\, 2^n\, \|A_n\| \frac{\mu^{n-p}}{\lambda_n^{n-k-1}} \;\le^{2}$$

$$\le \;\phi(x)\, n!\, M_n\, 2^n\, \|A_n\| \;\frac{\mu^n}{\lambda_n^{n-k-1}} \;\le\; \phi(x) \frac{\lambda_n}{2^n} \frac{\mu^n}{\lambda_n^{n-k-1}} \;\le$$

$$\le \;\phi(x) \frac{\mu^n}{2^n\, n!} \;\le\; \phi(x) \frac{e^{\mu}}{2^n}.$$

En cualquier caso, si $x \in \tilde{B}$ y $k \ge 1$,

$$\|D^k f_n(x)\| \;\le\; \phi(x) \frac{e^{\mu}}{2^n}, \qquad n \ge k + 3.$$

c) Para cada $k \ge 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in E}} \|D^k f_k(x) - A_k\| = 0$$

i) Si $k = 0$,

$$\| f_0 (x) - A_0 \| = \| \alpha(\lambda_0 \phi(x))\, A_0 - A_0 \| = \|A_0\| \,|\, \alpha(\lambda_0 \phi(x)) - 1 \,|$$

Ahora bien, como

---

1 Si $p \in \{0, 1, 2, ..., k\}$, se tiene que $n - p \ge n - k \ge 3$.

2 Como $\mu \ge 1$ y $n - p \ge 1$ se tiene $\mu^{n-p} \le \mu^n$. Por otra parte, como $n > k$,

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \;\le\; (k + 1)\, k! \;\le\; n!.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \alpha(\lambda_0\phi(x)) = 1$$

se verifica que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \|f_0(x) - A_0\| = 0.$$

ii) Si $x \in E$ y $k \geq 1$,

$$\|D^k f_k(x) - A_k\| \leq \Big\| \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \alpha^{k-p)}(\lambda_k\phi(x))\, \phi^{k-p} \lambda_k^{k-p} \frac{1}{(k-p)!} A_k(x)^{k-p} - A_k \Big\| =$$

$$= \Big\| [\, \alpha(\lambda_k\phi(x)) - 1\,]\, A_k + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} \alpha^{k-p)}(\lambda_k\phi(x))\, \lambda_k^{k-p} \phi^{k-p} A_k(x)^{k-p} \frac{1}{(k-p)!} \Big\| \leq$$

$$\leq \|A_k\|\, |\alpha(\lambda_k\phi(x)) - 1| + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} |\alpha^{k-p)}(\lambda_k\phi(x))| \frac{\|A_k\|\, \|x\|^{k-p}}{(k-p)!} \lambda_k^{k-p}$$

y como

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \alpha^{k-p)}(\lambda_k\phi(x)) = 0, \quad p = 0, 1, 2, ..., k-1, \quad \text{y}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \alpha(\lambda_k\phi(x)) = 1$$

se obtiene

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \|D^k f_k(x) - A_k\| = 0.$$

d) Sean n y k números naturales con $n < k$. Entonces

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \|D^k f_n(x)\| = 0.$$

En efecto, si $n < k$, $x \in E$

$$\|D^k f_n(x)\| \le \Big\| \sum_{p=0}^{n} \binom{k}{p} \alpha^{k-p)}(\lambda_n\phi(x))\, \lambda_n^{k-p} \phi^{k-p} \frac{A_n(x)^{n-p}}{(n-p)!} \Big\| \le^3$$

$$\le \sum_{p=0}^{n} \binom{k}{p} \,|\alpha^{k-p)}(\lambda_n\phi(x))|\, \lambda_n^{k-p} \frac{\|A_n\| \, \|x\|^{n-p}}{(n-p)!}$$

y como

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \alpha^{k-p)}(\lambda_n\phi(x)) = 0, \qquad p = 0, 1, 2, ..., n,$$

se deduce que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \|D^k f_n(x)\| = 0.$$

e) Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $n > k$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \|D^k f_n(x)\| = 0.$$

i) Si $k = 0$, $n > k$ y $x \in E$,

$$\|f_n(x)\| = \Big\| \alpha(\lambda_n\phi(x)) \frac{\hat{A}_n(x)}{n!} \Big\| \le \|x\|^n \frac{\|\hat{A}_n\|}{n!} M_n.$$

Como $n \ge 1$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \|f_n(x)\| = 0.$$

ii) Si $k \ge 1$, $n > k$ y $x \in E$

$$\|D^k f_n(x)\| \le \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \,|\alpha^{k-p)}(\lambda_n\phi(x))|\, \lambda_n^{k-p} \|\phi\|^{k-p} \frac{\|A_n\|}{(n-p)!} \|x\|^{n-p} \le^4$$

$$\le \|x\| \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} M_k \lambda_n^{k-p} \frac{\|A_n\|}{(n-p)!} \|x\|^{n-p-1}$$

y por consiguiente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} \|D^k f_n(x)\| = 0.$$

---

[3] $D^p\hat{A}_n(x) = 0$ si $p > n$.

[4] Si $n > k \ge 1$, $n - p \ge n - k \ge 1$

f) Para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$ y para cada conjunto U-acotado B, la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} D^k f_n$$

converge normalmente en $\tilde{B}$.

Por a) y c), existe una serie $\sum_{n=k+3}^{\infty} a_n$, convergente, de números positivos, tal que

$$\|D^k f_n(x)\| \leq \phi(x)\, a_n, \quad n \geq k+3, \quad x \in \tilde{B}.$$

Por ser $\tilde{B}$ un subconjunto acotado de E, existe $M > 0$ tal que

$$\sup \{ \phi(x) \,/\, x \in \tilde{B} \} \leq M,$$

luego

$$\|D^k f_n(x)\| \leq M\, a_n, \quad n \geq k+3, \quad x \in \tilde{B}. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que las funciones $D^k f_n$ son acotadas en los acotados de E,

$$\sum_{n=0}^{k+2} \sup \{ \|D^k f_n(x)\| : x \in \tilde{B} \} < \infty. \tag{2}$$

(1) y (2) implican el resultado.

g) Si f es la aplicación de U en F definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

f es de clase C^∞ en U y, además, para cada conjunto U-acotado B

$$\sup \{ \|D^k f(x)\| \,/\, x \in \tilde{B} \} < +\infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

En efecto, como los compactos de U son subconjuntos U-acotados, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} D^k f_n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos de U. Aplicando el clásico resultado de convergencia de una sucesión de funciones de clase C^∞ [Mu,104] se obtiene que f es de clase C^∞ en U y además,

$$D^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D^k f_n(x), \quad x \in U \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Como en f) se ha demostrado la convergencia normal de la serie (4) en los conjuntos $\tilde{B}$, donde B es un conjunto U-acotado, (3) resulta inmediato.

h) Para cada conjunto U-acotado B y para cada número natural k,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{B}}} D^k f(x) = A_k.$$

Sean $k \geq 0$ y B un conjunto U-acotado. Por a) y b) existe una serie, $\sum_{n=k+3}^{\infty} a_n$, de números positivos tal que

$$\|D^k f_n(x)\| \leq \phi(x)\, a_n, \qquad n \geq k+3, \qquad x \in \tilde{B}.$$

Entonces si $x \in \tilde{B}$, se tiene

$$\|D^k f(x) - A_k\| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{k-1} \|D^k f_n(x)\| + \|D^k f_k(x) - A_k\| + \|D^k f_{k+1}(x)\| + \|D^k f_{k+2}(x)\| + \sum_{n=k+3}^{\infty} \|D^k f_n(x)\| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{k-1} \|D^k f_n(x)\| + \|D^k f_k(x) - A_k\| + \|D^k f_{k+1}(x)\| + \|D^k f_{k+2}(x)\| + \phi(x) \sum_{n=k+3}^{\infty} a_n.$$

Por d)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in E}} \sum_{n=0}^{k-1} \| D^k f_n(x) \| = 0.$$

Por e)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in E}} \| D^k f_p(x) \| = 0, \qquad p = k+1, k+2.$$

Por c)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in E}} \|D^k f_k(x) - A_k\| = 0.$$

Por último,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in E}} \phi(x) \sum_{n=k+3}^{\infty} a_n = 0.$$

Esto concluye la demostración.

1.20.Notación.- Sea U un abierto convexo de un espacio de Banach E sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y a un punto de Fr(U). Se denotará por $\tilde{B}_a$ al conjunto

$$\{ a + \lambda(z - a) \,/\, \lambda \in (0,1] \}.$$

Es inmediato probar:

α) Si B es un subconjunto de E, B es U-acotado si, y sólo si, B-{a} es (U-{a})-acotado.

β) Si B es un subconjunto de U, $\tilde{B}_a$-{a} = $\widetilde{B\text{-}\{a\}}$.

1.21.Observación.- El clásico teorema de Borel para funciones definidas en intervalos de la recta, se puede obtener a partir del resultado de Carleman sobre la existencia de funciones analíticas con desarrollo asintótico prefijado. En [Ca,31], se prueba que si D es una bola abierta del plano complejo, dados n puntos $z_1, z_2, ..., z_n$, distintos dos a dos, de su frontera y n series de potencias numéricas

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{p,\nu} (z - z_p)^\nu, \qquad p = 1, 2, ..., n, \qquad (1)$$

existe una función compleja f, analítica en D y admitiendo (1) como desarrollos asintóticos. A partir de [Wa,40], se obtiene que para cada compacto K de D, cada p = 1, 2, ..., n, y cada m = 0, 1, 2, ...,

$$\lim_{\substack{z \to z_p \\ z \in \tilde{K}_p}} D^m f(z) = m!\, c_{p,m}$$

Las proposiciones (1.25) y (1.26) de esta memoria, generalizarán los dos resultados anteriores en el contexto de espacios de Banach complejos, hecho que nos va a permitir demostrar la proposición (1.15) cuando U es un abierto convexo y acotado de E, para n puntos distintos de su frontera.

1.22.Lema.- Sea E un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sean $a_1, a_2, ..., a_p$, elementos de E, distintos dos a dos. Existen un polinomio $Q \in P(E,\mathbb{K})$ y una costante $M > 0$, tales que

$$Q(a_1) = 1, \quad Q(a_j) = 0 \text{ para } j = 2, 3, ..., p,$$

$$|Q(z)| \leq M \prod_{j=2}^{p} \| z - a_j \|.$$

Demostración.- Para cada $j = 2, 3, ..., p$, existe $\chi_j \in E'$ con $\chi_j(a_1 - a_j) \neq 0$. Se define

$$Q(z) = \frac{\chi_2(z - a_2) \dots \chi_p(z - a_p)}{\chi_2(a_1 - a_2) \dots \chi_p(a_1 - a_p)}, \qquad z \in E.$$

Obviamente, $Q(a_1) = 1$, $Q(a_j) = 0$ para $j = 2, 3, ..., p$. Además, si $z \in E$

$$|Q(z)| \leq \frac{\|\chi_2\| \dots \|\chi_p\|}{\prod_{j=2}^{p} |\chi_j(a_1 - a_j)|} \prod_{j=2}^{p} \| z - a_j\|.$$

y ésto demuestra el lema.

1.23.Lema.- Sean E un espacio de Banach complejo, U un abierto convexo de E.

α) Si $a \in Fr(U)$ y $\varphi \in E'$son tales que $\| \varphi \| = 1$ y para cada $x \in U$, $Re(\varphi(x - a)) > 0$, entonces para cada subconjunto U-acotado B, existe $\mu \geq 1$ con

$$\| x - a \| \leq \mu |\varphi(x - a)|, \qquad x \in \tilde{B}_a.$$

β) Sean $a_1, , a_2, ..., a_p$, elementos de Fr(U); existen $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in E'$, tales que:

$$\| \varphi_j \| = 1, \qquad j = 1, 2, ..., p.$$

$$Re(\varphi_j(x - a_j)) > 0, \text{ para cada } x \in U, \quad j = 1, 2, ..., p.$$

Demostración.- α) El conjunto $V = U - \{a\}$ es un abierto convexo de E y $0 \in Fr(V)$. Por (0.13), para cada subconjunto V-acotado H, existe $\mu \geq 1$ tal que para cada $x \in \tilde{H}$ se tiene que:

$$\| x \| \leq \mu |\varphi(x)|.$$

Sea B un subconjunto U-acotado; por (1.20), B-{a} es V-acotado. Además, si $x \in \tilde{B}_a$, $x-a \in \tilde{B}_a-\{a\} = \widetilde{B-\{a\}}$, luego

$$\| x - a \| \leq \mu |\varphi(x - a)|$$

β) Basta considerar, para $j = 1, 2, ..., p$, el abierto $U_j - \{a_j\}$ y aplicar (0.11).

1.24.Proposición.- Sean E y F espacios de Banach complejos, U un abierto convexo y acotado de E y $a_1, a_2, ..., a_p$ elementos de Fr (U), distintos dos a dos. Para cada $j = 1, 2, ..., p$, y para cada $n = 0, 1, 2, ...$, sea $\overset{j}{A_n} \in L_s(^nE,F)$. Si $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$, son elementos de E' que verifican las condiciones del lema 1.23, existe una función $f \in \mathcal{H}_B(U,F)$ [5], tal que para cada $j = 1, 2, ..., p$, y para cada $m = 0,1,2,...$,

[5] $\mathcal{H}_B(U,F)$ denota el espacio vectorial de las funciones holomorfas y acotadas de U en F.

se tiene

$$\lim_{z \to a_j} \frac{\| f(z) - \sum_{l=0}^{m} \varphi(z) \hat{A}_l^j (z - a_j) \|}{|\chi_j(z)| \, \| z - a_j \|^{m + s_j}} = 0,$$

donde:

1) s_j designa el cardinal del conjunto $\{ h \in \mathbb{N} / 1 \le h \le p, \varphi_h(a_j) = \varphi_h(a_h) \}$.

2) $\varphi(z) = \prod_{h=1}^{p} \varphi_h(z - a_h), \quad z \in U.$

3) χ_j es la función definida en U por

$$\chi_j(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } s_j = p \\ \prod_{\varphi_h(a_h) \ne \varphi_h(a_j)} \varphi_h(z - a_h), & \text{si } s_j < p. \end{cases}$$

Demostración.- Supongamos en primer lugar, que el resultado es cierto para abiertos contenidos en la bola $\mathring{B}(0,1/2)$, y sean U un abierto convexo y acotado de E, $a_1, a_2, ..., a_p$, puntos de Fr (U), distintos dos a dos y $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$, elementos de E´, que verifican el lema 1.23; para cada j = 1, 2, ..., p y cada n = 0, 1, 2, ..., sean $A_n^j \in L_s(^nE,F)$. Por ser U un abierto acotado, existe R > 0 con $U \subset \mathring{B}(0,R)$. El abierto convexo $V = \frac{1}{2R} U$, está contenido en la bola $\mathring{B}(0,1/2)$. Para cada j = 1, 2, ..., p, sean

$$b_j = \frac{a_j}{2R};$$

los puntos $b_1, b_2, ..., b_p$, están en Fr (V). Por otra parte, para cada j = 1,2,..., p, y para cada n = 0, 1, 2, ..., consideremos el elemento B_n^j de $L_s(^nE,F)$ definido por

$$B_n^j = (2R)^n A_n^j;$$

1) Los funcionales $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$, verifican las condiciones del lema para el abierto V y los puntos $b_1, b_2, ..., b_p$.
2) Para cada j = 1, 2, ..., p, el cardinal del conjunto

$$\{ h \in \mathbb{N} / 1 \le h \le p, \ \varphi_h(b_j) = \varphi_h(b_h) \},$$

es precisamente s_j.

Como estamos suponiendo que el resultado es cierto para abiertos contenidos en la bola $\overset{\circ}{B}(0,1/2)$, existe una función $g \in \mathcal{H}_B(V,F)$, tal que

$$\lim_{\substack{z \to b_j \\ z \in V}} \frac{\| g(z) - \sum_{k=0}^{m} \varphi(z)\, \hat{B}_k^j (z - b_j) \|}{|\chi_j(z)|\ \| z - b_j \|^{m+s_j}} = 0.$$

Sea f la función definida en U por

$$f(z) = 2R\, g\left(\frac{z}{2R}\right)$$

La función $f \in \mathcal{H}_B(U,F)$ y si $z \in U$,

$$\frac{\| f(z) - \sum_{k=0}^{m} \varphi(z)\, \hat{A}_k^j (z - a_j) \|}{|\chi_j(z)|\ \| z - a_j \|^{m+s_j}} =$$

$$= \frac{2R \| g(\frac{z}{2R}) - \sum_{k=0}^{m} \varphi(\frac{z}{2R})\, \hat{A}_k^j (\frac{z - a_j}{2R})(2R)^k \|}{(2R)^{p-s_j} |\chi_j(\frac{z}{2R})|\ \| \frac{z}{2R} - b_j \|^{m+s_j} (2R)^{m+s_j}} =$$

$$= \frac{1}{(2R)^{m+p-1}} \frac{\| g(\frac{z}{2R}) - \sum_{k=0}^{m} \varphi(\frac{z}{2R})\, \hat{B}_k^j (\frac{z}{2R} - b_j) \|}{|\chi_j(\frac{z}{2R})|\ \| \frac{z}{2R} - b_j \|^{m+s_j}},$$

de donde se deduce que f verifica la proposición.

Demostraremos ahora el resultado para abiertos U contenidos en $\overset{\circ}{B}(0,1/2)$.

Por el lema 1.22, existen $Q_1, Q_2, ..., Q_p \in P(E,\mathbb{C})$ y costantes positivas $M_1, M_2, ..., M_p$, tales que:

$$Q_i(a_h) = \delta_{ih}, \quad i, h = 1, 2, ..., p, \quad \text{y}$$

$$|Q_i(z)| \le M_i \prod_{\substack{h=1 \\ h \ne i}}^{p} \| z - a_h \|, \quad z \in E, \quad i = 1, 2, ..., p.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, se define el conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{p} \{ z \in E \ / \ \varphi_k(z - a_k) \neq -\varepsilon \}$$

Se tiene que Ω_ε es un abierto de E y $U \subset \Omega_\varepsilon$. Además, si $h, k \in \{ 1, 2, ..., p \}$,

$$\mathrm{Re}\ \varphi_k(a_h - a_k) \geq 0$$

ya que $a_h \in \mathrm{Fr}\,(U)$, deduciéndose que $a_h \in \Omega_\varepsilon$.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ una serie convergente de números reales estrictamente positivos.

i) Por inducción sobre n, vamos a demostrar que para cada $n \geq 0$, existe un abierto U_n de E y una función $G_n \in \mathcal{H}(U_n,F)$, verificando:

α) $U \cup \{ a_1, a_2, ..., a_p \} \subset U_n$.

β) Para cada $j = 1, 2, ..., p$, el desarrollo de Taylor de G_n en a_j es de la forma

$$\sum_{k=n}^{\infty} \hat{A}^{j}_{n,k}\,(z - a_j)$$

siendo

$$\hat{A}^{j}_{0,0} = \hat{A}^{j}_{0} \quad \text{y} \quad \hat{A}^{j}_{n,n} = \hat{A}^{j}_{n} - \hat{A}^{j}_{0,n} - \hat{A}^{j}_{1,n} - \dots - \hat{A}^{j}_{n-1,n} \qquad \text{para } n \geq 1.$$

γ) $\sup \{ \| \varphi(z)\, G_n(z) \| \ / \ z \in U \} \leq \alpha_n$.

δ) Para cada $z \in U$, $j = 1, 2, ..., p$, y $n \geq 0$

$$\| \varphi(z)\, G_n(z) \| \leq \alpha_n \| z - a_j \|^{n + s_j - 1}$$

En efecto, sea $0 < \varepsilon_0 < 1$, tal que

$$\varepsilon_0 \| \hat{A}^{h}_{0} \| M_h^2 \leq \frac{\alpha_0}{p}, \qquad h = 1, 2, ..., p.$$

En el abierto $U_0 = \Omega_{\varepsilon_0}$, se define la función G_0 como sigue:

$$G_0(z) = \sum_{h=1}^{p} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varphi_h(z - a_h)} (Q_h(z))^2 \hat{A}^{h}_{0}$$

Si $z \in U$, $\mathrm{Re}\ \varphi_h(z - a_h) > 0$ y por tanto,

$$|\varphi_h(z - a_h)| \leq |\varepsilon_0 + \varphi_h(z - a_h)|,$$

luego

$$\sup \{ \| \varphi(z)\, G_0(z) \| \ / \ z \in U \} \leq^{6}$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_{h=1}^{p} \left| \prod_{k=1}^{p} (\varphi_k(z - a_h)) \right| \left| \frac{\varepsilon_0\, \varphi_h(z - a_h)}{\varepsilon_0 + \varphi_h(z - a_h)} \right| \| \hat{A}_0^{h} \| \, | Q_h(z) |^2 \ / \ z \in U \right\},$$

$$\leq \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_0 \| \hat{A}_0^{h} \| M_h^2 \leq \alpha_0 .$$

Analicemos el desarrollo de Taylor de G_0 en el punto a_j. Se verifica que

$$G_0(a_j) = \hat{A}_0^{j},$$

y por consiguiente, en un entorno de a_j, se puede escribir:

$$G_0(z) = \hat{A}_0^{j} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_{0,k}^{j} (z - a_j),$$

donde para cada $k = 1, 2, ...,$ $\hat{A}_{0,k}^{j} \in P(^kE,F)$.

Veamos que se verifica δ). Sean $z \in U$, $j \in \{ 1, 2, ..., p\}$. Puede ocurrir:

- $1 < s_j < p$.
- $s_j = 1$.
- $s_j = p$.

Estudiaremos el caso $1 < s_j < p$; los otros dos casos se razonan de forma semejante. Se tiene:

$$\varphi(z)\, G_0(z) = \varphi(z) \Bigg(\sum_{\varphi_h(a_h) \neq \varphi_h(a_j)} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varphi_h(z - a_h)} (Q_h(z))^2 \hat{A}_0^{h} +$$

$$+ \sum_{\substack{\varphi_h(a_j) = \varphi_h(a_h) \\ h \neq j}} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varphi_h(z - a_h)} (Q_h(z))^2 \hat{A}_0^{h} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varphi_j(z - a_j)} ((Q_j(z))^2 \hat{A}_0^{j})$$

---

6 Como $U \subset \mathring{B}(0,1/2)$, si $z \in U$ se tiene $| \varphi_j(z - a_j) | \leq \| \varphi_j \| \, \| z - a_j \| \leq 1$, y

$$| Q_j(z) | \leq M_j^2 \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{p} \| z - a_j \|^2 \leq M_j^2.$$

luego

$$\| \varphi(z)\, G_0(z) \| \leq$$

$$\leq \sum_{\varphi_h(a_h)\neq\varphi_h(a_j)} \Big| \prod_{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j)} \varphi_i(z - a_i) \Big| \, \Big| \frac{\varepsilon_0\, \varphi_h(z - a_h)}{\varepsilon_0 + \varphi_h(z - a_h)} \Big| \, M_h^2 \, \| z - a_j \|^2 \, \| \hat{A}_0^h \| \, +$$

$$+ \sum_{\substack{\varphi_h(a_j)=\varphi_h(a_h) \\ h\neq j}} \Big| \prod_{\substack{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j) \\ i\neq h}} \varphi_i(z - a_i) \Big| \, \Big| \frac{\varepsilon_0\, \varphi_h(z - a_h)}{\varepsilon_0 + \varphi_h(z - a_h)} \Big| \, M_h^2 \, \| z - a_j \|^2 \, \| \hat{A}_0^h \| \, +$$

$$+ \Big| \prod_{\substack{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j) \\ i\neq j}} \varphi_i(z - a_i) \Big| \, \Big| \frac{\varepsilon_0\, \varphi_j(z - a_j)}{\varepsilon_0 + \varphi_j(z - a_j)} \Big| \, M_j^2 \, \| \hat{A}_0^j \| \leq$$ [7]

$$\leq \sum_{\varphi_h(a_h)\neq\varphi_h(a_j)} \frac{\alpha_0}{p} \, \| z - a_j \|^{s_j + 2} \, +$$

$$+ \sum_{\substack{\varphi_h(a_j)=\varphi_h(a_h) \\ h\neq j}} \frac{\alpha_0}{p} \, \| z - a_j \|^{s_j + 1} + \frac{\alpha_0}{p} \, \| z - a_j \|^{s_j - 1} \leq$$ [8]

$$\leq \alpha_0 \, \| z - a_j \|^{s_j - 1}.$$

Supongamos que para $n \geq 0$ hemos determinado un abierto U_n de E y una función $G_n \in \mathcal{H}(U_n,F)$, verificando α), β), γ) y δ).

Sea $0 < \varepsilon_{n+1} < 1$, tal que

$$\varepsilon_{n+1} \, \| \hat{A}_{n+1}^h - \hat{A}_{0,n+1}^h - \hat{A}_{1,n+1}^h - \dots - \hat{A}_{n,n+1}^h \| \, M_h^{n+2} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, , \quad h = 1, 2, \dots, p.$$

En el abierto $U_{n+1} = \Omega_{\varepsilon_{n+1}}$, se define la función G_{n+1} como sigue:

$$G_{n+1}(z) = \sum_{h=1}^{p} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+1} + \varphi_h(z - a_h)} \Big(\hat{A}_{n+1}^h(z - a_h) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_{k,n+1}^h(z - a_h) \Big) \big(Q_h(z)\big)^{n+2}$$

---

7 Si $\varphi_i(a_i) = \varphi_i(a_j)$, entonces para cada $z \in U$

$$\varphi_i(z - a_i) = \varphi_i(z) - \varphi_i(a_i) = \varphi_i(z - a_j).$$

8 Como $U \subset \mathring{B}(0,1/2)$, si $z \in U$,

$$\| z - a_j \| \leq 1.$$

Se tiene:

$$\sup \{ \| \varphi(z)\, G_{n+1}(z) \| \,/\, z \in U \} \leq$$

$$\leq \{ \sup_{z \in U} \sum_{h=1}^{p} | \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{p} \varphi_k (z - a_k) | \; | \frac{\varepsilon_{n+1}\, \varphi_h(z - a_h)}{\varepsilon_{n+1} + \varphi_h(z - a_h)} | \; \| \hat{A}^{h}_{n+1} - \hat{A}^{h}_{0,n+1} - \dots - \hat{A}^{h}_{n,n+1} \| \, M_h^{n+2} \} \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_{n+1} \| \hat{A}^{h}_{n+1} - \hat{A}^{h}_{0,n+1} - \dots - \hat{A}^{h}_{n,n+1} \| \, M_h^{n+2} \leq \alpha_{n+1}.$$

Analicemos el desarrollo de Taylor de G_{n+1} en el punto a_j:

Para cada $h \in \{ 1, 2, ..., p \}$, consideremos la función L_h definida en U por:

$$L_h(z) = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+1} + \varphi_h(z - a_h)} \left(\hat{A}^{h}_{n+1}(z - a_h) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}^{h}_{k,n+1}(z - a_h) \right) \left(Q_h(z)\right)^{n+2}.$$

La función L_h es holomorfa en un entorno de a_j. Si $h \neq j$, la función L_h admite en $z = a_j$, un desarrollo de Taylor del tipo

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \hat{C}_k (z - a_j)$$

La función L_j admite en $z = a_j$ un desarrrollo de Taylor de la forma:

$$L_j(z) = \left(\hat{A}^{j}_{n+1}(z - a_j) - \hat{A}^{j}_{0,n+1}(z - a_j) - \dots - \hat{A}^{j}_{n,n+1}(z - a_j) \right) + \sum_{k=n+2}^{\infty} \hat{H}_k (z - a_j).$$

Se concluye que en un entorno de a_j,

$$G_{n+1}(z) = \left(\hat{A}^{j}_{n+1} - \hat{A}^{j}_{0,n+1} - \dots - \hat{A}^{j}_{n,n+1} \right) (z - a_j) + \sum_{k=n+2}^{\infty} \hat{A}^{j}_{n+1,k}(z - a_j).$$

Veamos que se verifica δ). Sean $z \in U$, $j \in \{ 1, 2, ..., p \}$. Puede ocurrir:

- $1 < s_j < p$.
- $s_j = 1$.
- $s_j = p$.

Estudiaremos el caso $1 < s_j < p$, los otros dos casos se razonan de forma semejante. Se tiene:

$$\varphi(z)\, G_{n+1}(z) = \varphi(z) \Big(\sum_{\varphi_h(a_j) \neq \varphi_h(a_h)} L_h(z) + \sum_{\substack{\varphi_h(a_j) = \varphi_h(a_h) \\ h \neq j}} L_h(z) + L_j(z) \Big).$$

Ahora bien:

$$(1) \quad \| \varphi(z) \sum_{\varphi_h(a_j)\neq\varphi_h(a_h)} L_h(z) \| \leq$$

$$\leq \sum_{\varphi_h(a_j)\neq\varphi_h(a_h)} \Big| \prod_{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j)} \varphi_i(z-a_i) \Big| \Big| \frac{\varepsilon_{n+1}\, \varphi_h(z-a_h)}{\varepsilon_{n+1} + \varphi_h(z-a_h)} \Big| \, \| \hat{A}^h_{n+1} - \hat{A}^h_{0,n+1} - \dots - \hat{A}^h_{n,n+1} \| \, M_h^{n+2} \, \|z-a_j\|^{n+2} \leq$$

$$\leq \sum_{\varphi_h(a_j)\neq\varphi_h(a_h)} \Big| \prod_{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j)} \varphi_i(z - a_i) \Big| \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j\|^{n+2} =$$

$$= \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j\|^{n+2} \sum_{\varphi_h(a_j)\neq\varphi_h(a_h)} \Big| \prod_{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j)} \varphi_i(z - a_i) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\varphi_h(a_j)\neq\varphi_h(a_h)} \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j \|^{n+2+s_j} \leq$$

$$\leq \sum_{\varphi_h(a_j)\neq\varphi_h(a_h)} \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j\|^{(n+1)+s_j-1}$$

$$(2) \quad \| \varphi(z) \sum_{\substack{\varphi_h(a_j)=\varphi_h(a_h) \\ h\neq j}} L_h(z) \| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\varphi_h(a_j)=\varphi_h(a_h) \\ h\neq j}} \Big| \prod_{\substack{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j) \\ i\neq h}} \varphi_i(z-a_i) \Big| \Big| \frac{\varepsilon_{n+1}\, \varphi_h(z-a_h)}{\varepsilon_{n+1} + \varphi_h(z-a_h)} \Big| \, \| \hat{A}^h_{n+1} - \hat{A}^h_{0,n+1} - \dots - \hat{A}^h_{n,n+1} \| \, M_h^{n+2} \, \|z-a_j\|^{n+2} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\varphi_h(a_j)=\varphi_h(a_h) \\ h\neq j}} \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j\|^{n+2+s_j-1} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\varphi_h(a_j)=\varphi_h(a_h) \\ h\neq j}} \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j\|^{(n+1)+s_j-1}$$

$$(3)\quad \| \varphi(z)\, L_j(z) \| \le$$

$$\le \Big| \prod_{\substack{\varphi_i(a_i)=\varphi_i(a_j)\\ i\neq j}} \varphi_i(z-a_i) \Big| \, \Big| \frac{\varepsilon_{n+1}\, \varphi_j(z-a_j)}{\varepsilon_{n+1} + \varphi_j(z-a_j)} \Big| \, \| \hat{A}^j_{n+1}(z-a_j) - \big(\hat{A}^j_{0,n+1} + \ldots + \hat{A}^j_{n,n+1} \big)(z-a_j) \| \, M_j^{n+2} \le$$

$$\le \Big| \prod_{\substack{\varphi_i(a_i)\neq\varphi_i(a_j)\\ i\neq j}} \varphi_i(z-a_j) \Big| \, \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j \|^{n+1} \le$$

$$\le \frac{\alpha_{n+1}}{p} \, \| z - a_j \|^{(n+1)+s_j-1} .$$

De (1), (2) y (3) se obtiene:

$$\| \varphi(z)\, G_{n+1}(z) \| \le \alpha_{n+1} \, \| z - a_j \|^{(n+1)+s_j-1} .$$

ii) Veamos que la función definida en U por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z)\, G_n(z)$$

verifica la proposición.

En virtud de γ), es claro que $f \in \mathcal{H}_B(U,F)$. Sean $j \in \{ 1, 2, ..., p \}$ y $m \in \mathbb{N}$ con $m \ge 0$. Como $G_0, G_1, ..., G_m, G_{m+1}$ son funciones holomorfas en a_j, existe $\delta > 0$ tal que para cada $z \in \mathring{B}(a_j,\delta)$,

$$G_0(z) = \hat{A}^j_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}^j_{0,k}\,(z-a_j),$$

$$G_1(z) = \big(\hat{A}^j_1(z-a_j) - \hat{A}^j_{0,1}(z-a_j) \big) + \sum_{k=2}^{\infty} \hat{A}^j_{1,k}(z-a_j)$$

....

$$G_m(z) = \big(\hat{A}^j_m(z-a_j) - \hat{A}^j_{0,m}(z-a_j) - \ldots - \hat{A}^j_{m-1,m}(z-a_j) \big) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \hat{A}^j_{m,k}(z-a_j),$$

$$G_{m+1}(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \hat{A}^j_{m+1,k}(z-a_j).$$

Si $z \in U \cap \overset{\circ}{B}(a_j,\delta)$, se tiene

$$f(z) - \sum_{k=0}^{m} \varphi(z)\, \overset{j}{\hat{A}}_k(z - a_j) =$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{m+1} \varphi(z)\, G_k(z) - \sum_{k=0}^{m} \varphi(z)\, \overset{j}{\hat{A}}_k(z - a_j) \Big) + \sum_{k=m+2}^{\infty} \varphi(z)\, G_k(z) =$$

$$=\varphi(z)\Big(\sum_{h=m+1}^{\infty} \overset{j}{\hat{A}}_{0,h}(z-a_j)+\sum_{h=m+1}^{\infty} \overset{j}{\hat{A}}_{1,h}(z-a_j)+ \ldots +\sum_{h=m+1}^{\infty} \overset{j}{\hat{A}}_{m,h}(z-a_j)+\sum_{h=m+1}^{\infty}\overset{j}{\hat{A}}_{m+1,h}(z-a_j)\Big) + \sum_{h=m+2}^{\infty}\varphi(z)G_h(z).$$

(4) Sea $0 < r < \delta$; definimos la función F_{m+1} en $\overset{\circ}{B}(a_j,r)$ por

$$F_{m+1}(z) = \sum_{h=m+1}^{\infty} \overset{j}{\hat{A}}_{0,h}(z-a_j)+\sum_{h=m+1}^{\infty} \overset{j}{\hat{A}}_{1,h}(z-a_j)+ \ldots +\sum_{h=m+1}^{\infty} \overset{j}{\hat{A}}_{m,h}(z-a_j)+\sum_{h=m+1}^{\infty}\overset{j}{\hat{A}}_{m+1,h}(z-a_j)$$

El desarrollo de Taylor de F_{m+1} en a_j será de la forma:

$$F_{m+1}(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \hat{B}_k(z - a_j), \qquad \hat{B}_k \in P({}^kE,F).$$

Existen $0 < \alpha < r$ y $H > 0$ tales que

$$\|F_{m+1}(z)\| \leq H \quad \text{si } z \in B(a_j,\alpha)$$

aplicando [Ba,37], resulta que:

$$\| F_{m+1}(z) \| \leq \frac{H \| z - a_j\|^{m+1}}{\alpha^m(\alpha - \| z - a_j\|)}, \qquad z \in \overset{\circ}{B}(a_j, \alpha),$$

luego en $\overset{\circ}{B}(a_j,\alpha) \cap U$,

$$\| \varphi(z)\, F_{m+1}(z) \| \leq$$

$$\leq H\, |\chi_j(z)|\, \Big| \prod_{\varphi_h(a_h)=\varphi_h(a_j)} \varphi_h(z - a_h) \Big| \frac{\| z - a_j\|^{m+1}}{\alpha^m(\alpha - \| z - a_j\|)} \leq$$

$$\leq H\, |\chi_j(z)|\, \frac{\| z - a_j\|^{m + s_j + 1}}{\alpha^m(\alpha - \| z - a_j\|)}, \qquad z \in \overset{\circ}{B}(a_j,\alpha)$$

y por consiguiente

$$\lim_{z\to a_j} \frac{\| \varphi(z)\, F_{m+1}(z) \|}{|\chi_j(z)|\ \| z - a_j\|^{m+s_j}} = 0.$$

(5) Si $z \in U$ y $h \geq m + 2$, en virtud de δ),

$$\| \varphi(z)\, G_h(z) \| \leq \alpha_h \| z - a_j \|^{h+s_j-1} \leq \alpha_h \| z - a_j\|^{m+1+s_j},$$ [9]

deduciéndose que

$$\lim_{\substack{z\to a_j \\ z\in U}} \frac{\| \sum_{h=m+2}^{\infty} \varphi(z)\, G_h(z) \|}{|\chi_j(z)|\ \| z - a_j\|^{m+s_j}} \leq \lim_{\substack{z\to a_j \\ z\in U}} \frac{\| z - a_j\|}{|\chi_j(z)|} \left(\sum_{h=m+2}^{\infty} \alpha_h \right) = 0.$$

De (4) y de (5) se obtiene finalmente

$$\lim_{\substack{z\to a_j \\ z\in U}} \frac{\| f(z) - \sum_{h=0}^{m} \varphi(z)\, \hat{\overset{j}{A}}_h(z - a_j) \|}{|\chi_j(z)|\ \| z - a_j\|^{m+s_j}} = 0.$$

1.25.Proposición.- Sean E y F espacios de Banach complejos, U un abierto convexo y acotado de E y $a_1, a_2, ..., a_p$ elementos de Fr (U), distintos dos a dos. Para cada j = 1, 2, ..., p y para cada n = 0, 1, 2, ..., sea $\overset{j}{A}_n \in L_s(^nE,F)$. Existe una función $f \in \mathcal{H}_b(U,F)$ [10] tal que para cada j = 1, 2, ..., p, cada m = 0, 1, 2, ..., y para cada conjunto B, U-acotado, se tiene:

$$\lim_{\substack{z\to a_j \\ z\in B_{a_j}}} \frac{\| f(z) - \sum_{h=0}^{m} \hat{\overset{j}{A}}_h(z - a_j) \|}{\| z - a_j\|^{m}} = 0.$$

Demostración.- Por la proposición anterior y utilizando la misma notación, si

[9] Si $z \in U$, $\| z - a_j \| \leq 1$.

[10] $\mathcal{H}_b(U,F)$ denota el espacio vectorial de las funciones f holomorfas de U en F, tales que para cada conjunto B, U-acotado, se verifica

$$\sup \{ \| f(z) \| : z \in B \} < +\infty.$$

El estudio de tales funciones puede encontrarse en [Ba].

$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ son elementos de E´ que verifican las condiciones del lema 1.23, existe una función $f \in \mathcal{H}_B(U,F)$, tal que para cada j = 1, 2, ..., p, y para cada m = 0, 1, 2, ..., se tiene:

$$\lim_{\substack{z \to a_j \\ z \in U}} \frac{\| f(z) - \sum_{h=0}^{m} \varphi(z) \hat{A}_h^j (z - a_j) \|}{| \chi_j(z) | \, \| z - a_j \|^{m + s_j}} = 0.$$

Se define

$$g(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}, \qquad z \in U.$$

i) Sea B un subconjunto U-acotado, existe una costante $\mu > 0$ tal que

$$\| z - a_h \| \leq \mu \, | \varphi_h(z - a_h) |, \quad z \in B, \quad h = 1, 2, ..., p.$$

Por otra parte, existe $\rho > 0$ con

$$\rho < d\,(B, E \sim U) \leq \| z - a_h \|, \quad z \in B, \quad h = 1, 2, ..., p.$$

Así, obtenemos

$$\sup \{ \| g(z) \| \, / \, z \in B \} \leq \frac{\mu^p}{\rho^p} \sup \{ \| f(z) \| \, / \, z \in U \} < +\infty.$$

ii) Sean $j \in \{ 1, 2, ..., p \}$ y B un conjunto U-acotado. Si $h \in \{ 1, 2, ..., p \}$ y $\varphi_h(a_h) = \varphi_h(a_j)$, para cada $z \in U$ se tiene

$$\mathrm{Re}\, \varphi_h(z - a_j) = \mathrm{Re}\, \varphi_h(z - a_h) > 0.$$

Aplicando el lema 1.23, existe una costante $\mu_h > 0$ tal que

$$\| z - a_j \| \leq \mu_h \, | \varphi_h(z - a_j) | = \mu_h \, | \varphi_h(z - a_h) |, \quad z \in \tilde{B}_{a_j}.$$

Si m = 0, 1, 2, ... y $z \in \tilde{B}_{a_j}$,

$$\frac{\| f(z) - \sum_{i=0}^{m} \varphi(z) \hat{A}_i^j (z - a_j) \|}{| \chi_j(z) | \, \| z - a_j \|^{m + s_j}} =$$

$$= \frac{\| \varphi(z) \left(\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i^j (z - a_j) \right) \|}{| \chi_j(z) | \, \| z - a_j \|^{m + s_j}} =$$

$$= \frac{\left|\prod_{h=1}^{p}\varphi_h(z - a_h)\right| \left\| g(z) - \sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i^j (z - a_j) \right\|}{|\chi_j(z)| \, \|z - a_j\|^{m+s_j}} =$$

$$= \frac{\left|\prod_{\varphi_h(a_h)=\varphi_h(a_j)} \varphi_h(z - a_j)\right| \left\| g(z) - \sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i^j (z - a_j) \right\|}{\|z - a_j\|^{m+s_j}} \geq$$

$$\geq \left(\prod_{\varphi_h(a_h)=\varphi_h(a_j)} \frac{1}{\mu_h} \right) \frac{\left\| g(z) - \sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i^j (z - a_j) \right\|}{\|z - a_j\|^{m}}$$

De donde se concluye que:

$$\lim_{\substack{z \to a_j \\ z \in \tilde{B}_{a_j}}} \frac{\left\| g(z) - \sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i^j (z - a_j) \right\|}{\|z - a_j\|^{m}} = 0.$$

1.26.Proposición.- Sean E y F espacios de Banach complejos, U un abierto convexo de E y a un elemento de Fr(U). Se supone que f es una función holomorfa de U en F y $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n(z - a)$ una serie entera de E en F (en z = a), tales que para cada conjunto B, U-acotado, y para n = 0, 1, 2, ...,

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in \tilde{B}_a}} \frac{\left\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z - a) \right\|}{\|z - a\|^{n}} = 0, \qquad (1)$$

entonces, para cada conjunto B, U-acotado, y para cada n = 0, 1, ..., se tiene:

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in \tilde{B}_a}} D^n f(z) = n! \, A_n,$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$.

Demostración.- Sin pérdida de generalidad se puede suponer a = 0. Sea B un subconjunto U-acotado, aplicando la proposición 0.10, existen un conjunto P, U-acotado y un número real $\gamma > 0$, tales que para cada $z \in \tilde{B}$, se verifica:

$$B(z,\gamma \|z\|) \subset \tilde{P}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, como se verifica (1), existe un número real $\delta > 0$, tal que para cada $z \in B(0,\delta) \cap \tilde{P}$, se tiene

$$\frac{\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) \|}{\| z \|^n} \leq \varepsilon.$$

Pongamos $\alpha = \frac{\delta}{1+\gamma}$ y sea $w \in \tilde{B} \cap \mathring{B}(0,\alpha)$. Si λ es un número complejo con $|\lambda| \leq \gamma \|w\|$ y $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, se verifica

$$\| w + \lambda x - w \| = | \lambda | \|x\| \leq \gamma \|w\|$$

y

$$\| w + \lambda x \| \leq \|w\| + | \lambda | \|x\| \leq \|w\| + \gamma \|w\| = \|w\| \ (1 + \gamma) \leq \alpha (1 + \gamma) = \delta,$$

por tanto,

$$w + \lambda x \in B(0,\delta) \cap B(w, \gamma \|w\|) \subset B(0,\delta) \cap \tilde{P},$$

y en consecuencia

$$\frac{\| f(w + \lambda x) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(w + \lambda x) \|}{\| w + \lambda x \|^n} \leq \varepsilon \qquad (2)$$

Por otra parte, si $x \in E$ con $\| x \| \leq 1$, aplicando las fórmulas integrales de Cauchy [Ba,32],

$$\frac{1}{n!} \widehat{D^n f(w)} (x) - \hat{A}_n(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \gamma \|w\|} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (f(w + \lambda x) - \lambda^n \hat{A}_n(x)) \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \gamma \|w\|} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (f(w + \lambda x) - \hat{A}_n(\lambda x)) \, d\lambda$$

El desarrollo de Taylor de $\hat{A}_n$ en $z = w$, viene dado por

$$\hat{A}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_n w^{n-k} (z - w)^k,$$

haciendo $z = w + \lambda x$, resulta

$$\hat{A}_n(w + \lambda x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_n\, w^{n-k} (\lambda x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_n\, w^{n-k} (\lambda x)^k + \hat{A}_n (\lambda x)$$

y por tanto,

$$\hat{A}_n (\lambda x) = \hat{A}_n(w + \lambda x) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_n\, w^{n-k} (\lambda x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k(w + \lambda x) - \sum_{k=0}^{n-1} \hat{A}_k (w + \lambda x) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\lambda),$$

donde

$$P_k(\lambda) = \lambda^k \binom{n}{k} A_k\, w^{n-k} x^k = \lambda^k b_k,$$

con $b_k \in F$. Se deduce entonces que

$$\frac{1}{n!} \hat{D}^n f(w)(x) - \hat{A}_n(x) =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \gamma \|w\|} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \left(f(w + \lambda x) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k(w + \lambda x) \right) d\lambda$$

ya que al ser $\hat{A}_k(w + \lambda x)$ y $P_k(\lambda)$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, polinomios de $\mathbb{C}$ en F de grado $k \leq n-1$, resulta

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{|\lambda| = \gamma \|w\|} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \left(\hat{A}_k (w + \lambda x) + P_k(\lambda)\right) d\lambda = 0.$$

Finalmente, si $|\lambda| = \gamma \|w\|$, en virtud de (2), se obtiene

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+1}} \left(f(w + \lambda x) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k(w + \lambda x) \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \frac{\left\| f(w + \lambda x) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k (w + \lambda x) \right\|}{\| w + \lambda x \|^n} \| w + \lambda x \|^n \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\gamma \|w\|)^{n+1}} \varepsilon (1 + \gamma)^n \|w\|^n = \frac{\varepsilon (1 + \gamma)^n}{\gamma^{n+1} \|w\|},$$

y por consiguiente

$$\| \frac{1}{n!}\, \hat{D}^n f(w)(x) - \hat{A}_n(x) \| \leq \frac{1}{2\pi} \, \frac{\varepsilon (1+\gamma)^n}{\gamma^{n+1} \|w\|} \, 2\pi\gamma \|w\| =$$

$$= \varepsilon \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)^n,$$

desigualdades válidas para cada $w \in \tilde{B} \cap \mathring{B}(0,\alpha)$ y para cada $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, de donde se obtiene

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{B}}} \hat{D}^n f(z) = n!\, \hat{A}_n$$

por la topología β en $P(^nE,F)$, lo que implica que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{B}}} D^n f(z) = n!\, A_n$$

. por la topología β en $L_s(^nE,F)$.

1.27.Proposición.- Sean E y F espacios de Banach complejos, U un abierto convexo y acotado de E, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, puntos distintos dos a dos de Fr(U), y para cada $p = 1, 2, \ldots, n$ y cada $j = 0, 1, 2, \ldots,$ $A_j^p \in L_s(^jE,F)$; entonces, existe $f \in \mathcal{H}_b(U,F)$ tal que para cada subconjunto U-acotado B de E,

$$\lim_{\substack{z \to a_p \\ z \in \tilde{B}^p_{a_p}}} D^j f(z) = A_j^p, \qquad p = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostración.- Resulta inmediata a partir de las proposiciones anteriores.

1.28.Observación.- Tal como indicábamos en (1.20), vamos a aplicar las proposiciones anteriores en la prueba del siguiente resultado:

1.29.Proposición.- Sean E y F espacios de Banach reales, U un abierto convexo y acotado de E, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, puntos, distintos dos a dos , de Fr(U) y para cada $p = 1, 2, \ldots, n$, y para cada $j = 0, 1, 2, \ldots,$ $A_j^p \in L_s(^nE,F)$. Entonces, existe una función $f \in C^\infty(U,F)$, tal que para cada subconjunto U-acotado B,

$$\lim_{\substack{x \to a_p \\ x \in \mathring{B}_{a_p}}} D^j f(x) = A_j^p, \qquad p = 1, 2, ..., n, \quad j = 0, 1, 2, ...,$$

por la topología β en $L_s(^jE,F)$.

Antes de pasar a la demostración de la proposición, veamos algunas notaciones y lemas previos:

1.30.Notación.- Sea E un espacio de Banach real; se denotará por $E_{\mathbb{C}}$ el complexificado de E. La norma en $E_{\mathbb{C}}$, será la definida por:

$$\| x + iy \|_{E_{\mathbb{C}}} = \inf \{ \sum | \lambda_j | \| z_j \| : x + iy = \sum \lambda_j z_j, \ z_j \in E, \lambda_j \in \mathbb{C} \}.$$

Las propiedades relativas al complexificado que se utilizarán en la memoria pueden encontrarse en [B-S.1,69] y en [Ru,7].

1.31.Lema.- Sean E un espacio de Banach real, U un abierto convexo y acotado de E, w un punto frontera de U y R un número real positivo tal que $U \subset \mathring{B}(0,R)$. Entonces:

i) $U + i\,\mathring{B}(0,R)$ es un abierto convexo de $E_{\mathbb{C}}$ y $w \in Fr\,(U + i\,\mathring{B}(0,R))$.

ii) Si B es un subconjunto U-acotado de E, B es $(U + i\,\mathring{B}(0,R))$-acotado en $E_{\mathbb{C}}$.

Demostración.- i) Es obvio que $U + i\,\mathring{B}(0,R)$ es abierto y convexo; además, en virtud de la desigualdad

$$\| x + iy \|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \|x\|_E + \|y\|_E, \qquad x, y \in E,$$

se tiene que $U + i\,\mathring{B}(0,R)$ es acotado. Por último, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de U que converge hacia w en E. Entonces la sucesión converge hacia w en $E_{\mathbb{C}}$, y $w \in Fr\,(U + i\,\mathring{B}(0,R))$.

ii) Sea B un subconjunto U-acotado en E. Existe $\rho > 0$ tal que

$$d(B, Fr\,(U)) > \rho.$$

Por tanto, si $x \in B$ se tiene que $\mathring{B}(x,\rho) \subset U$. Como $x \neq 0$ y $U \subset \mathring{B}(0,R)$, ha de ser $\rho \leq R$. Veamos que

$$\mathring{B}_{E_{\mathbb{C}}}(x,\rho) \subset U + i\,\mathring{B}(0,R).$$

Sea $a + ib \in \mathring{B}_{E_{\mathbb{C}}}(x,\rho)$:

$$\| x - a - ib \| < \rho$$

lo que implica

$$\| x - a \| < \rho \qquad y \qquad \|b\| < \rho,$$

luego $a \in \mathring{B}(x,\rho) \subset U$ y $b \in \mathring{B}(0,\rho) \subset \mathring{B}(0,R)$, y por tanto

$$a + ib \in \mathring{B}(x,\rho) + i\,\mathring{B}(0,\rho) \subset U + i\,\mathring{B}(0,R).$$

1.32.Lema.- Sean E y F espacios de Banach reales, U y V abiertos convexos de E tales que $0 \in V$. Si $\hat{f} \in \mathcal{H}(U + iV, F_{\mathbb{C}})$, la función

$$f_1 = (\pi_1 o \hat{f})|_U$$

es analítica en U (π_1 y π_2 denotan las proyecciones de $F_{\mathbb{C}}$ en F).

Demostración.- Si $a \in U$, por ser $\hat{f}$ holomorfa en $U + iV$, existe una bola $\mathring{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,r) \subset U + iV$, tal que

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n\hat{f}(a)}{n!} (z - a)^n, \qquad z \in \mathring{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,r)$$

y la serie converge uniformemente hacia $\hat{f}$ en la bola $\mathring{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,\rho)$, $0 < \rho < r$.

Para cada n = 1, 2, ..., $D^n\hat{f}(a) \in L_{\mathbb{C}}({}^nE_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$. Como

$$F_{\mathbb{C}} = F + iF \cong F \times F$$

y puesto que la proyección π_1 de $F_{\mathbb{C}}$ en F es continua, se tiene que $\pi_1 o D^n\hat{f}(a)$ es continua en $E_{\mathbb{C}} x \overset{n)}{\ldots} x E_{\mathbb{C}}$. Por otra parte, la aplicación $\pi_1 o D^n\hat{f}(a)$ es n-lineal real de $E_{\mathbb{C}} x \overset{n)}{\ldots} x E_{\mathbb{C}}$ en F. Consideremos ahora la aplicación g_n^a, definida en $E\ x \overset{n)}{\ldots} x\ E$, como sigue:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow \pi_1 o D^n\hat{f}(a)\,(x_1, x_2, ..., x_n) \in F$$

Se verifica entonces que $g_n^a \in L_{\mathbb{R}}({}^nE,F)$ y si $x \in \mathring{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,r) \cap U$,

$$\hat{f}(x) = \pi_1 o \hat{f}(x) + \pi_2 o \hat{f}(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\pi_1 o \frac{D^n\hat{f}(a)}{n!} (x - a)^n + i\,\pi_2 o \frac{D^n\hat{f}(a)}{n!} (x - a)^n \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n^a (x - a)^n}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \pi_2 o \frac{D_n\hat{f}(a)}{n!} (x - a, \overset{n)}{\ldots}, x - a),$$

Se deduce que para cada $x \in \overset{\circ}{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,r) \cap U$

$$f_1(x) = \pi_1 \circ \hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n^a (x-a)^n}{n!}$$

y que $D^n f_1(a) = \pi_1 \circ D^n \hat{f}(a)|_{Ex \overset{n)}{\ldots} xE}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. No ofrece dificultad comprobar que la última serie converge uniformemente en cada $\overset{\circ}{B}(a,\rho) \subset E$, $0 < \rho < r$.

Demostración de la proposición 1.29.- Existe $R > 0$ tal que $U \subset \overset{\circ}{B}(0,R)$. Consideremos el abierto $\hat{U} = U + i\overset{\circ}{B}(0,R)$ de $E_{\mathbb{C}}$. Se tiene que $\hat{U}$ es un abierto convexo y acotado, además, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son puntos de $Fr(\hat{U})$ (1.31).

Para cada $p = 1, 2, \ldots, n$ y para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$, existe $\widetilde{A}_j^p \in L_s({}^jE_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$, tal que

$$\widetilde{A}_j^p|_{Ex \overset{j)}{\ldots} xE} = A_j^p \text{ [B-S.1,70].}$$

Como consecuencia de las proposiciones (1.25) y (1.27), existe una función $\hat{f} \in \mathcal{H}_b(U,F)$, verificando que para cada $p = 1, 2, \ldots, n$, cada $j = 0, 1, \ldots$, y cada subconjunto H, $\hat{U}$-acotado, se tiene

$$\lim_{\substack{x \to a_p \\ x \in H_{a_p}}} D^j\hat{f}(z) = \widetilde{A}_j^p$$

por la topología β en $L_s({}^jE_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$.En particular, si B es un subconjunto U-acotado, es $\hat{U}$-acotado, luego

$$\lim_{\substack{x \to a_p \\ x \in B_{a_p}}} D^j\hat{f}(z) = \widetilde{A}_j^p$$

por la topología β en $L_s({}^jE_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$.

Por otra parte (1.32), la función $f = (\pi_1 \circ \hat{f})|_U$ es analítica en U y para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$, $D^j f(x) = \pi_1 \circ D^j \hat{f}(x)|_{Ex \overset{j)}{\ldots} xE}$, $x \in U$. Teniendo en cuenta que se verifica:

$$\pi_1 \circ \widetilde{A}_j^p|_{Ex \overset{j)}{\ldots} xE} = A_j^p,$$

$$\text{y} \qquad \| \pi_1 \circ D^j\hat{f}(x) - \pi_1 \circ \widetilde{A}_j^p \| \leq \| \pi_1 \| \, \| D^j\hat{f}(x) - \widetilde{A}_j^p \|_{E_{\mathbb{C}}},$$

se obtiene el resultado.

J. Kurzweil, en [Ku.1] demuestra un teorema de aproximación en espacios reales de Banach separables, para los que existe un polinomio real continuo P, que verifica:

$$P(0) = 0 \quad \text{e} \quad \inf \{ \mid P(x) \mid : \|x\| = 1 \} > 0.$$

Utilizando una técnica semejante a la dada en [Na,28] para funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ y en [Co.2] para funciones definidas en un espacio de Hilbert, vamos a demostrar que el teorema de Borel se verifica en espacios de Banach, sujetos a la condición impuesta por J. Kurzweil.

1.33.Proposición.- Sea E un espacio de Banach real para el que existe un polinomio real P que satisface:

$$P(0) = 0 \quad \text{e} \quad \inf \{ \mid P(x) \mid : \|x\| = 1 \} > 0. \qquad (1)$$

Si $A_n \in L_s({}^nE,F)$, n = 0, 1, 2, ..., existe una función $f \in C^\infty(E,F)$ tal que

$$D^n f(0) = A_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si el espacio de Banach E satisface (1), entonces se verifican los siguientes lemas:

1.34.Lema.- Existe un polinomio real Q, tal que

$$Q(0) = 0 \quad \text{y} \quad Q(x) \geq 1 \quad \text{si} \quad \|x\| \geq 1.$$

Demostración.- Como P(0) = 0, podemos escribir

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_m(x), \qquad x \in E$$

donde $P_i \in P({}^iE,F)$, i = 1, 2, ..., m. Se tiene que:

$$\inf \{ P_1(x)^2 + \ldots + P_m(x)^2 , \ \|x\| = 1 \} = \chi > 0.$$

El polinomio

$$Q(x) = \frac{1}{\chi} (P_1(x)^2 + \ldots + P_m(x)^2)$$

verifica las condiciones, ya que si $x \in E$ y $\|x\| \geq 1$,

$$Q(x) = Q(\|x\| \frac{x}{\|x\|}) =$$

$$= \frac{1}{\chi} \Big(\|x\|^2 P_1(\frac{x}{\|x\|})^2 + \ldots + \|x\|^{2m} P_m(\frac{x}{\|x\|})^2 \Big) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\chi} Q(\frac{x}{\|x\|}) \geq 1.$$

1.35.Lema.- Sea $f \in C^{\infty}(E,F)$ con $D^p f(0) = 0$, $0 \le p \le n$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $g \in C^{\infty}(E,F)$, que se anula en un entorno de 0, y tal que

$$\sup_{x \in E} \{ \sup \{ \| D^p f(x) - D^p g(x) \| / \ p = 0, 1, 2, ..., n \} \} \le \varepsilon$$

Demostración.- Sea α una función real, de clase C^{∞} en $\mathbb{R}$ y verificando:

i) $\alpha(x) = 0$ si $|x| \le 1/2$.

ii) $\alpha(x) = 1$ si $|x| \ge 1$.

iii) $\alpha(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Para cada $\delta > 0$, se considera la función h_δ, definida en E como sigue:

$$h_\delta(x) = \alpha\left(Q\left(\frac{x}{\delta} \right) \right),$$

donde el polinomio Q verifica las condiciones del lema anterior. Si $\|x\| \ge 1$, $\alpha \circ Q(x) = 1$ y como Q es un polinomio continuo, sus derivadas sucesivas están acotadas en B(0,2); en virtud de la regla de la cadena, se obtiene que

$$\sup \{ \| D^p(\alpha \circ Q)(x) \| / \ x \in E \} = M_p < +\infty, \ p = 0, 1, 2, ..., n.$$

a) La función h_δ se anula en el abierto

$$\{ x \in E / \ Q(\frac{x}{\delta}) < \frac{1}{2} \}.$$

Si $\|x\| \ge \delta$, $Q(\frac{x}{\delta}) \ge 1$, luego $h_\delta(x) = 1$. Se deduce entonces que para cada $p = 1, 2, ..., n$, y para cada $x \in E$ con $\|x\| \ge \delta$,

$$D^p h_\delta(x) = 0.$$

b) Para cada $\delta > 0$ se define la función g_δ en E, por

$$g_\delta(x) = h_\delta(x) f(x).$$

Se tiene

$$D^p g_\delta(x) = \mathrm{sym}_p \left(\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} D^j h_\delta(x) D^{p-j} f(x) \right), \quad p = 0, 1, ..., n, \quad x \in E.$$

Llamando

$$M = \sup_{0 \le p \le n} \left\{ \sup \left\{ \binom{p}{j} M_j / \ j = 0, 1, ..., p \right\} \right\},$$

para cada $x \in E$ con $\|x\| \le \delta$, se verifica:

$$\| D^p g_\delta(x) \| \le \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \| D^j h_\delta(x) \| \, \| D^{p-j} f(x) \| \le$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p} \frac{M}{\delta^j} \| D^{p-j} f(x) \| .$$

c) Como $D^p f(0) = 0$, $p = 0, 1, 2, ..., n$, por la fórmula de Taylor, para cada $\varepsilon > 0$, existe $r \in (0,1]$, tal que si $\|x\| \leq r$,

$$\| D^p f(x) \| \leq \varepsilon \|x\|^{n-p} \leq \varepsilon r^{n-p}, \qquad p = 0, 1, 2, ..., n,$$

y por b)

$$\| D^p g_r(x) \| \leq M \sum_{j=0}^{p} \varepsilon \frac{r^{n-(p-j)}}{r^j} =$$

$$= p \varepsilon M r^{n-p} \leq p \varepsilon M, \qquad \text{para } \|x\| \leq r.$$

Así se ha demostrado que

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \{ \| D^p g_\delta(x) \|, \|x\| \leq \delta \ / \ p = 0, 1, 2, ..., n \} = 0.$$

d) Si $p \in \{ 0, 1, 2, ..., n \}$

$$\sup \{ \| D^p f(x) - D^p g_\delta(x) \| \ / \ x \in E \} =$$

$$= \sup \{ \| D^p f(x) - D^p g_\delta(x) \| \ / \ \|x\| \leq \delta \} \leq$$

$$\leq \sup \{ \| D^p f(x) \| \ / \ \|x\| \leq \delta \} + \sup \{ \| D^p g_\delta(x) \| \ / \ \|x\| \leq \delta \}$$

y puesto que ambos sumandos tienden a cero cuando δ tiende a cero, existe un $\delta > 0$ tal que la correspondiente función g_δ verifica las condiciones del lema.

Demostración de la proposición 1.33.- Para cada $m = 0, 1, 2, ...,$ se considera la función f_m, definida en E por:

$$f_m(x) = \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{p!} \hat{A}_p(x).$$

Se tiene que $f_m \in C^\infty(E,F)$, y

$$f_{m+1}(x) - f_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} \hat{A}_{m+1}(x),$$

luego,

$$D^p(f_{m+1} - f_m)(0) = 0, \qquad p = 0, 1, 2, ..., m.$$

Por el lema 1.35, existe una función $g_m \in C^\infty(E,F)$, que se anula en un entorno de 0 en E, y tal que

$$\sup_{x \in E} \{ \sup \{ \| D^p(f_{m+1} - f_m)(x) - D^p g_m(x) \| \ / \ p = 0, 1, ..., m \} \} \le \frac{1}{2^m} .$$

No ofrece dificultad demostrar que la serie

$$f_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (f_{m+1} - f_m - g_m)$$

define una función $f \in C^{\infty}(E,F)$. [Mu,104].

Además, para cada $p \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$,

$$D^p f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D^p(f_{m+1} - f_m - g_m)(x),$$

y como

$$D^p(f_{m+1} - f_m - g_m)(0) = 0 \quad \text{si } m \ge p, \quad \text{y}$$

$$D^{p+1}(f_{p+1} - f_p - g_p)(0) = A_{p+1},$$

se concluye que

$$D^p f(0) = A_p, \quad p \ge 0.$$

Observaciones.- Sea E un espacio de Banach real, que verifica las hipótesis de la proposición 1.33. Si U es un abierto convexo de E, con $0 \in \mathrm{Fr}\,(U)$ y k es un número natural, la demostración del lema 1.35. se puede adaptar para obtener los siguientes resultados:

1.36.- Sea $f \in C^k(U,F)$ y tal que para cada subconjunto U-acotado B,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} D^j f(x) = 0, \qquad j = 0, 1, ..., k,$$

por la topología β en $L_s(^jE,F)$. Entonces, para cada conjunto U-acotado B y para cada $\varepsilon > 0$, existen $g \in C^k(U,F)$ y $\delta > 0$, tales que g se anula en $\mathring{B}(0,\delta) \cap U$ y

$$\sup \{ \| D^j g(x) - D^j f(x) \| \ / \ x \in \tilde{B} \} \le \varepsilon, \quad j = 0, 1, ..., k.$$

1.37.- Sea $f \in C^k(U,F)$. Se supone que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^j f(x) = 0, \quad j = 0, 1, ..., k,$$

por la topología β en $L_s(^j(E,F)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existen $g \in C^k(U,F)$ y $\delta > 0$, tales que g se anula en $\mathring{B}(0,\delta) \cap U$ y

$$\sup \{ \| D^j g(x) - D^j f(x) \| \ / \ x \in U \} \leq \varepsilon, \quad j = 0, 1, ..., k.$$

1.38.- Todo espacio normado real de dimensión finita verifica las condiciones de 1.33. (pues el espacio $\mathbb{R}^n$ las verifica) y por tanto, en un espacio normado de dimensión finita son ciertos los resultados 1.33, 1.35, 1.36 y 1.37. Además, si U es un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$, $0 \in Fr(U)$ y k es un número natural, se demuestran teoremas análogos a 1.35 y 1.37 sustituyendo las derivadas totales por derivadas parciales hasta orden k.

Como consecuencia de estos resultados se obtienen los siguientes teoremas de aproximación, en un espacio de Banach, real y separable E, para el que existe un polinomio continuo P, verificando las condiciones de 1.32. En el resto del capítulo, E será un espacio de Banach real y separable y U un abierto convexo de E con $0 \in Fr(U)$.

1.39. Proposición.- Sea f una función de C(U,F), para la que existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} f(x)$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $g \in C^{\infty}(U,F)$, verificando:

α) $\sup\limits_{x \in U} \{ \| f(x) - g(x) \| \ / \ x \in U \} \leq \varepsilon$

β) Existe $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^p g(x), \quad p = 0, 1, 2, ...$

Además, si f es acotada en los conjuntos U-acotados, también lo es g.

Demostración.- Sea $\varepsilon > 0$; en virtud de (1.37), existen una función $G \in C(U,F)$ y $r > 0$, tales que G se anula en $\mathring{B}(0,r) \cap U$ y

$$\sup_{x \in U} \| G(x) - f(x) \| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definimos en $\mathring{B}(0,r/2) \cup U$, la función

$$h(x) = \begin{cases} G(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in \mathring{B}(0,\frac{r}{2}) \end{cases}$$

Obviamente, la función h es continua en $U \cup \mathring{B}(0,r/2)$. En virtud de [Ku.1], existe una función g, analítica en $U \cup \mathring{B}(0,r/2)$, tal que

$$\sup \{ \| h(x) - g(x) \| \ / \ x \in U \cup \mathring{B}(0, \tfrac{r}{2}) \} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es inmediato comprobar que la función g verifica el teorema.

1.40. Proposición.- Sea $f \in C(U,F)$; se supone que para cada U-acotado B, existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{B}}} f(x)$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ y para cada U-acotado B existe una función $g \in C^\infty(U,F)$, verificando:

α) $\sup \{ \| f(x) - g(x) \|, \ x \in \tilde{B} \} \leq \varepsilon$

β) Existe $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{B}}} D^j g(x)$, $j = 0, 1, \ldots$

Demostración.- Sea B un subconjunto U-acotado y $\varepsilon > 0$.

a) Supondremos, en primer lugar, que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{B}}} f(x) = 0$$

Como consecuencia de la observación 1.36, existen una función $h \in C(U,F)$ y una bola abierta $\mathring{B}(0,r)$ tales que h se anula en $\mathring{B}(0,r) \cap U$, y

$$\sup \{ \| f(x) - h(x) \| \ / \ x \in \tilde{B} \} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La función h verifica las condiciones de la proposición anterior, y por tanto, existe una función $g \in C^\infty(U,F)$, verificando

1) $\sup \{ \| g(x) - h(x) \| \ / \ x \in U \} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

2) Existe $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^j g(x)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Entonces:

$$\sup \{ \| f(x) - g(x) \| \ / \ x \in \tilde{B} \} \leq$$

$$\leq \sup \{ \| f(x) - h(x) \| \ / \ x \in \tilde{B} \} + \sup \{ \| g(x) - h(x) \| \ / \ x \in U \} \leq \varepsilon$$

b) Si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in B}} f(x) = b,$$

la función F(x) = f(x) - b está en las condiciones de apartado a), luego existe una función $G \in C^{\infty}(U,F)$ verificando que:

$$\sup \{ \| F(x) - G(x) \| / \ x \in \tilde{B} \} \leq \varepsilon$$

y existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in B}} D^j G(x), \qquad j = 0, 1, ...$$

La función g(x) = G(x) + b resuelve la cuestión.

1.41. Proposición.- Sean U un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$, con $0 \in Fr(U)$, y f una función real de clase C^k en U verificando que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leq |\alpha| \leq k$, existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in U}} D^{\alpha} f(x)$$

Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función g, analítica en U, tal que:

1) Existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in U}} D^{\alpha} g(x), \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n$$

2) $\sup\limits_{|\alpha|\leq k} \{ | D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}g(x)| / x \in U \} \leq \varepsilon.$

Demostración.-El resultado se demostrará en dos etapas.

i) Se supone, en primer lugar, que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in U}} D^{\alpha} f(x) = 0, \qquad 0 \leq |\alpha| \leq k.$$

Sea $\varepsilon > 0$, con $\frac{1}{\varepsilon} > k$. Por la observación 1.38, existe $g \in C^k(U)$ que se anula en $\mathring{B}(0,\delta) \cap U$, verificando

$$\sup_{|\alpha|\leq k} \{ | D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}g(x) | / \ x \in U \} < \varepsilon$$

Consideremos la función G, definida en $\Omega = U \cup \mathring{B}(0,\delta/2)$ por:

$$G(x) = g(x) \qquad \text{si } x \in U.$$

$$G(x) = 0 \qquad \text{si } x \in \overset{\circ}{B}(0,\delta/2).$$

La función G es de clase C^k en Ω. Sea ζ la función definida en Ω por $\zeta(x) = \frac{1}{\varepsilon}$. En virtud del teorema de aproximación de Whitney [Na,34], existe una función h, real y analítica en Ω, tal que

$$\sup \{ | D^\alpha G(x) - D^\alpha h(x) | \ / \ x \in \Omega \} < \varepsilon, \qquad \text{si } 0 \leq |\alpha| \leq k.$$

Entonces, la función h es analítica en U, existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^\alpha h(x), \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad \text{y}$$

$$\| D^\alpha f(x) - D^\alpha h(x) \| \leq \| D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x) \| + \| D^\alpha g(x) - D^\alpha h(x) \| =$$

$$= \| D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x) \| + \| D^\alpha G(x) - D^\alpha h(x) \| \leq 2\varepsilon, \qquad x \in U.$$

ii) Supongamos ahora que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^\alpha f(x) = A_\alpha, \qquad 0 \leq |\alpha| \leq k.$$

Aplicando el resultado obtenido en i) a la función

$$F(x) = f(x) - \left(A_0 + \sum_{|\alpha|=1} A_\alpha x^\alpha + \dots + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} A_\alpha x^\alpha \right)$$

existe una función h, analítica en U, verificando que

a) Existe $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^\alpha h(x), \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n.$

b) $\sup \{ \| D^\alpha F(x) - D^\alpha h(x) \| / \ x \in U \} < \varepsilon, \qquad \text{si } 0 \leq |\alpha| \leq k$

La función

$$g(x) = h(x) + A_0 + \sum_{|\alpha|=1} A_\alpha x^\alpha + \dots + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} A_\alpha x^\alpha$$

es analítica en U, existe el límite en 0 de todas sus derivadas y

$$\sup \{ \| D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x) \| / \ x \in U \} < \varepsilon, \qquad \text{si } 0 \leq |\alpha| \leq k.$$

2. TOPOLOGIAS SOBRE LOS ESPACIOS $E_b(U,F)$ Y $E_c(U,F)$.

En este capítulo E y F representarán espacios de Banach reales y U denotará un abierto convexo de E tal que $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$.

En 1.8 hemos introducido los espacios vectoriales E_b (U,F) y E_c (U,F). Las topologías que usualmente se consideran sobre espacios vectoriales de funciones de clase C^∞ [A], [Bt],[Lla] y [Me], llevan de forma natural a la definición de topologías localmente convexas sobre los espacios E_b (U,F) y E_c (U,F). El objetivo del capítulo, una vez definidas las topologías localmente convexas sobre los citados espacios, será el estudio de determinadas propiedades de las mismas.

En primer lugar, y puesto que va a ser un resultado de uso constante en el desarrollo del capítulo daremos, a modo de observación, una aplicación del clásico teorema del valor medio para funciones diferenciables Fréchet entre espacios de Banach.

2.1. Observación.- Sea $f \in C^\infty(U,F)$ y M un subconjunto de U. Supongamos que:

a) $\sup \{ \| f(x) \| \ / \ x \in \tilde{M} \} < \infty$.

b) Para cada número natural $n \geq 1$ y cada compacto K de $E \times \overset{n)}{\cdots} \times E$,

$$\sup_{x \in \tilde{M}} \{ \sup \{ \| D^n f(x)(y) \| / \ y \in K \} \} < +\infty$$

c) Para cada número natural $n \geq 0$, existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{M}}} D^n f(x) = A_n.$$

por la topología compacta abierta en $L_s({}^nE,F)$.

Entonces:

1) Para cada $x \in \tilde{M}$,

$$\| f(x) - A_0 \| \leq \sup \{ \| Df(y) \| \, / \, y \in \tilde{M} \} \, \| x \|.$$

2) Para cada $x \in \tilde{M}$, cada número natural $n \geq 1$ y cada compacto K de $Ex \overset{n)}{\ldots} xE$,

$$\sup_{x \in K} \| D^n f(x)(h) - A_n(h) \| \leq L \, \|x\|,$$

siendo

$$L = \sup \{ \| D^{n+1} f(y) \| \, / \, y \in \tilde{M} \} \, \sup \{ \|h_1\| \ldots \|h_n\| \, / \, h \in K \}.$$

Demostración.- Para cada número natural $n \geq 0$, el conjunto

$$\{ D^n f(x) \, / \, x \in \tilde{M} \}$$

es acotado en $(L_s(^nE,F), \tau_0)$ y por consiguiente, es acotado por la topología β en $L_s(^nE,F)$ (0.5), luego

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \, / \, x \in \tilde{M} \} < +\infty, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

1) Si x es un elemento de $\tilde{M}$, la aplicación $g_{0,x}$, de [0,1] en F, definida por

$$g_{0,x}(t) = f(tx), \qquad t \in (0,1]$$
$$g_{0,x}(0) = A_0$$

es obviamente continua en [0,1] y derivable en (0,1]. Aplicando el teorema del valor medio [D,156] a la función $g_{0,x}$, se obtiene:

$$\| f(x) - A_0 \| = \| g_{0,x}(1) - g_{0,x}(0) \| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in (0,1]} \| Df(tx)(x) \| \leq \sup \{ \| Df(y) \| \, / \, y \in \tilde{M} \} \, \| x \|.$$

2) Si $n \geq 1$, h es un elemento de $Ex \overset{n)}{\ldots} xE$ y x es un elemento de M, la aplicación $g_{n,x,h}$ de [0,1] en F, definida por

$$g_{n,x,h}(t) = D^n f(tx)(h), \qquad t \in (0,1]$$
$$g_{n,x,h}(0) = A_n(h)$$

es continua en [0,1] y diferenciable en (0,1]. Además, para cada $t \in (0,1]$

$$Dg_{n,x,h}(t) = D^{n+1} f(tx)(x,h).$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $g_{n,x,h}$, resulta:

$$\| D^n f(x)(h) - A_n(h) \| = \| g_{n,x,h}(1) - g_{n,x,h}(0) \| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in(0,1]} \| D^{n+1}f(tx)(x,h) \| \leq$$

$$\leq \sup \{ \| D^{n+1}f(tx) \| / \ t \in (0,1] \} \|x\| \|h_1\| \|h_2\| \dots \|h_n\| \leq$$

$$\leq \sup \{ \| D^{n+1}f(y) \| \ / \ y \in \tilde{M} \} \|x\| \|h_1\| \dots \|h_n\|$$

donde $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Sea K un compacto de $Ex \overset{n)}{\dots} xE$, entonces

$$\sup_{h\in K} \| D^n f(x)(h) - A_n(h) \| \leq L \|x\|, \qquad x \in \tilde{M},$$

siendo

$$L = \sup \{ \| D^{n+1}f(y) \| \ / \ y \in \tilde{M} \} \ \sup \{ \|h_1\| \dots \|h_n\| \ / \ h \in K \}.$$

2.2.Definición de la topología β en E_b (U,F).- Sean $f \in E_b$ (U,F), B un subconjunto U-acotado y n un número natural. Como existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{B}}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \|, \ \ x \in \tilde{B} \cap \overset{\circ}{B}(0,\delta) \} < +\infty \qquad (1)$$

Por otra parte, el conjunto $\tilde{B} \sim \overset{\circ}{B}(0,\delta)$ es un conjunto U-acotado (0.9.7), luego

$$\sup \{ \|D^n f(x)\| \ / x \in \tilde{B} \sim \overset{\circ}{B}(0,\delta) \} < +\infty \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in \tilde{B} \} < +\infty.$$

Resulta inmediato probar que para cada conjunto U-acotado y para cada número natural $n \geq 0$, la aplicación $p_{\tilde{B},n}$ de E_b (U,F) en $[0,+\infty)$ definida por

$$p_{\tilde{B},n}(f) = \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / x \in \tilde{B} \}$$

es una seminorma.

La topología β en E_b (U,F) será la definida por la familia de seminormas:

$$\{ p_{\tilde{B},n} \ / \ \text{B es un subconjunto U-acotado y } n \geq 0 \}$$

Obviamente, el espacio vectorial topológico así obtenido es separado y en virtud de (0.8) es también metrizable.

2.3.Definición de la topología τ_0 en E_c (U,F).- Sea $f \in E_c$ (U,F), K un conjunto compacto de U y n un número natural . Como existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} D^n f(x)$$

por la topología τ_0 en $L_s(^nE,F)$, se tiene:

i) Existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup \{ \| f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \cap \mathring{B}(0,\delta) \} < \infty \qquad (1)$$

como el conjunto $\tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\delta)$ es un compacto de U (0.9.9),

$$\sup \{ \| f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\delta) \} < +\infty \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\sup \{ \| f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} < +\infty$$

ii) Si $n \geq 1$ y H es un compacto de $E x \overset{n)}{\dots} x E$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup \{ q_H(D^n f(x)) \ / \ x \in \tilde{K} \cap \mathring{B}(0,\delta) \} =$$

$$= \sup_{x\in \tilde{K}\cap\mathring{B}(0,\delta)} \{ \sup \{ \| D^n f(x) (h) \| \ / \ h \in H \} \} < 1 \qquad (3)$$

Por otra parte, el conjunto $\tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\delta)$ es un compacto de U y como la topología β en $L_s(^nE,F)$ es más fina que la topología τ_0, resulta que la aplicación

$$x \in \tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\delta) \longrightarrow D^n f(x) \in (L_s(^nE,F) , \tau_0)$$

es continua y por tanto

$$\sup \{ q_H(D^n f(x)) \ / \ x \in \tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\delta) \} =$$

$$= \sup_{x\in \tilde{K}\sim\mathring{B}(0,\delta)} \{ \sup \{ \| D^n f(x) (h) \| \ / \ h \in H \} \} < \infty \qquad (4)$$

De (3) y (4) se obtiene que

$$\sup \{ \| D^n f(x) (h) \| \ / \ x \in \tilde{K}, \ \ h \in H \} \} < \infty.$$

iii) Si K es un compacto de U, la aplicación $p_{\tilde{K}}$ de E_c (U,F) en $[0,\infty)$, definida por:

$$p_{\tilde{K}}(f) = \sup \{ \| f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \}$$

es una seminorma.

iv) Si K es un compacto de U, $n \geq 1$ y H un compacto de $E x \overset{n)}{\dots} x E$, la aplicación $p_{\tilde{K},n,H}$ de E_c (U,F) en $[0,\infty)$, definida por:

$$p_{\tilde{K},n,H}(f) = \sup \{ \| D^n f(x)(h) \| \ / \ x \in \tilde{K},\ \ h \in H \}$$

es una seminorma.

La topología τ_0 en E_c (U,F) será la definida por la familia de seminormas

$$\{ p_{\tilde{K}} / K \text{ compacto de } U \} \cup \{ p_{\tilde{K},n,H} / K \text{ compacto de } U,\ n \geq 1,\ H \text{ compacto de } E x \overset{n)}{\ldots} x E \}$$

Es inmediato que el espacio vectorial topológico así obtenido es separado.

2.4.Observación.- Si E es un espacio normado de dimensión finita, los espacios E_b (U,F) y E_c (U,F) coinciden como espacios vectoriales (1.11) y las topologías τ_0 y β coinciden en E_b (U,F).

2.5.Proposición.- Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, la topología que induce τ_0 sobre E_b (U,F) es estrictamente menos fina que la topología β en E_b (U,F).

Demostración.- Es obvio que el espacio E_b (U,F) es un subespacio vectorial de E_c (U,F) y que la topología β en E_b (U,F) es más fina que la topología inducida por τ_0 en E_b (U,F).

Veamos que existe una sucesión de elementos de E_b (U,F) que converge hacia 0 por la topología τ_0 y no converge hacia 0 por la topología β.

Por ser E un espacio de Banach de dimensión infinita, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, de elementos de E´, verificando:

α) $\| \varphi_n \| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$

β) La sucesión converge débilmente hacia 0 en E´.

Puesto que la topología débil $\sigma(E',E)$ en E´ y la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de E inducen la misma topología sobre los acotados de E´ [Sch,88,90], la sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia 0 en la topología compacta abierta de E´. Por otra parte,

$$D\varphi_n(x) = \varphi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad x \in E$$

$$D^j\varphi_n(x) = 0, \qquad j > 1, \ \ n = 1, 2, \ldots, \quad x \in E$$

y por tanto, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de E_b $(U,\mathbb{R})$ que converge hacia 0 por la topología τ_0.

Sin embargo, la sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge hacia cero por la topología β de

$E_b(U,\mathbb{R})$, pues para cada subconjunto U-acotado B,

$$p_{B,1}(\varphi_n) = \sup \{ \| D\varphi_n(x) \| : x \in \tilde{B} \} = \|\varphi_n\| = 1, \qquad n = 1, 2, ...$$

Sea $b \in F$ con $b \neq 0$; la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, de funciones de E_b (U,F), definidas por:

$$f_n(x) = \varphi_n(x)\, b, \qquad n = 1, 2, ..., \; x \in U$$

resuelve la cuestión.

De la identidad de los conjuntos acotados en los espacios $(L_s(^nE,F),\tau_0)$ y $(L_s(^nE,F),\beta)$, se obtiene la siguiente proposición:

2.6.Proposición.- El espacio E_c (U,F) coincide con el espacio vectorial de las funciones $f \in C^{\infty}(U,F)$ tales que para cada compacto K de U y cada n = 0, 1, 2, ..., existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$.

Demostración.- Es prácticamente inmediato demostrar que el espacio vectorial definido anteriormente, es un subespacio del espacio vectorial E_c (U,F).

Recíprocamente, sea $f \in E_c$ (U,F) y veamos que para cada compacto K de U y cada número natural n,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} D^n f(x) = D^n f(0)$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$.

Sea $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\tilde{K}$ que converge hacia 0 y consideremos el conjunto

$$C = \left\{ \frac{D^n f(x_p) - D^n f(0)}{\|x_p\|}, \quad p = 1, 2, ... \right\}$$

Si H un compacto de $Ex\overset{n+1)}{\dots}xE$, como $f \in E_c$ (U,F),

$$p_{\tilde{K},n+1,H}(f) = \sup \{ \| D^{n+1}f(x)(h) \| \;/\; x \in \tilde{K},\ h \in H \} < +\infty,$$

luego el conjunto

$$\{ D^{n+1}f(x) \;/\; x \in \tilde{K} \}$$

es τ_0-acotado en $L_s(^{n+1}E,F)$ y por tanto,

$$\sup \{ \| D^{n+1}f(x) \| \;/\; x \in \tilde{K} \} < +\infty.$$

En virtud de la observación 2.1., si T es un compacto de $E \times \overset{n)}{\cdots} \times E$, como $x_m \in \tilde{K}$, $m = 1, 2, ...,$

$$\sup_{h\in T} \{ \| D^n f(x_m)(h) - D^n f(0)(h) \| \} \leq L \|x_m\|,$$

siendo

$$L = \sup \{ \| D^{n+1}f(y) \| \;/\; y \in \tilde{K} \} \sup \{ \|h_1\| \ldots \|h_n\| \;/\; h \in T \}.$$

Así hemos demostrado que el conjunto C es acotado en $L_s(^nE,F)$ por la topología compacta abierta y por consiguiente, acotado por la topología β. Existe entonces $H > 0$ con:

$$\| D^n f(x_m) - D^n f(0) \| \leq H \|x_m\|, \qquad m = 1, 2, ...,$$

deduciéndose que

$$\lim_{m\to\infty} D^n f(x_m) = D^n f(0)$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$, lo que implica que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\tilde{K}}} D^n f(x) = D^n f(0)$$

por la topología β.

Por la proposición anterior, en el espacio E_c (U,F) se puede introducir una nueva topología localmente convexa, íntimamente relacionada con la topología τ_u^∞ sobre $C^\infty(U,F)$. [Lla,65].

2.7.Introducción de la topología u en E_c (U,F).- Sean $f \in E_c$ (U,F), K un conjunto compacto de U y n un número natural. Como existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\tilde{K}}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \;/\; x \in \tilde{K} \cap \mathring{B}(0,\delta) \} < +\infty \qquad (1)$$

Por otra parte, el conjunto $\tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\delta)$ es un subconjunto compacto de U, luego

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \;/\; x \in \tilde{K} \sim \mathring{B}(0,\delta) \} < +\infty \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} < +\infty.$$

Para cada subconjunto compacto K de U y para cada número natural $n \geq 0$, la aplicación $p_{\tilde{K},n}$ de E_c (U,F) en $[0,\infty)$, definida por:

$$p_{\tilde{K},n}(f) = \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \}$$

es una seminorma.

La topología u en E_c (U,F) será la definida por la familia de seminormas

$$\{ p_{\tilde{K},n} \ / \ K \text{ compacto de } U \text{ y } n \geq 0 \}.$$

El espacio vectorial topológico así obtenido es separado.

2.8.Observación.- Si E es un espacio normado de dimensión finita, las topologías u y τ_0 coinciden en E_c (U,F).

2.9.Observación.- Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, la topología u en E_c (U,F) es estrictamente más fina que la topología τ_0.

Demostración.- Resulta inmediato demostrar que la topología u es más fina que la topología τ_0. Veamos que es estrictamente más fina.

Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E´, de norma 1, y tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0, \qquad \text{para cada } x \in E.$$

En (2.4) se ha demostrado que dicha sucesión converge hacia 0 en E_c (U,$\mathbb{R}$) por la topología τ_0. Ahora bien, para cada compacto K de U,

$$p_{\tilde{K},1}(\varphi_n) = \sup \{ \| D^n \varphi_n (x) \| / \ x \in \tilde{K} \} = \|\varphi_n\| = 1, \quad n = 1, 2, ...$$

lo que demuestra que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E_c (U,$\mathbb{R}$) no converge hacia 0 por la topología u.

Sea $b \in F$ con $b \neq 0$; la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, de funciones de E_c (U,F), definidas por:

$$f_n(x) = \varphi_n(x)\, b, \qquad n = 1, 2, ..., \ x \in U$$

resuelve la cuestión.

2.10.Proposición.- Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. La topología que induce u en E_b (U,F) es estrictamente menos fina que la topología β.

Demostración.- Es obvio que la topología β es más fina que la topología u en

E_b (U,F). Veamos que β es estrictamente más fina que u en E_b (U,F). Realizaremos la demostración en varias etapas.

i) Los espacios (E_c (U,F),τ_0) y (E_c (U,F), u) tienen los mismos conjutnos acotados.

Es inmediato probar que todo conjunto acotado en (E_c (U,F), u) es acotado en (E_c (U,F),τ_0) . Recíprocamente, sea $\mathfrak{M} \subset E_c$ (U,F) , un conjunto acotado por la topología τ_0.

α) Para cada compacto K de U existe una constante $M_K > 0$, tal que

$$p_K(f) = \sup \{ \| f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} \leq M_K, \qquad f \in \mathfrak{M}.$$

β) Para cada compacto K de U, cada número natural $n \geq 1$ y cada compacto H de $E\times \overset{n)}{\dots} \times E$, existe $M_{K,n,H} > 0$, tal que

$$p_{K,n,H}(f) = \sup \{ \| D^n f(x)(y) \| \ / \ x \in \tilde{K}, \ y \in H \} \leq M_{K,n,H}, \qquad f \in \mathfrak{M},$$

deduciéndose que el conjunto

$$\{ D^n f(x) \ / \ x \in \tilde{K}, \ f \in \mathfrak{M} \}, \qquad n \geq 1$$

es acotado en $(L_s(^nE,F),\tau_0)$; por tanto, es acotado por la topología β en $L_s(^nE,F)$. Existe $L_{K,n} > 0$, verificando:

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K}, f \in \mathfrak{M} \} \leq L_{K,n},$$

luego

$$p_K(f) \leq M_{K,0}, \qquad f \in \mathfrak{M}$$

$$p_{K,n}(f) = \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} \leq L_{K,n}, \qquad f \in \mathfrak{M}$$

ii) Existe un subconjunto acotado de (E_b (U,F), τ_0) que no es acotado en E_b (U,F) por la topología β.

Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de E´, de norma 1, verificando:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$$

cualquiera que sea $x \in E$ y sean $a \in U$ y $r > 0$ tales que $\overset{\circ}{B}(a,2r) \subset U$.

Consideremos la función f de E en $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(x))^{2n},$$

y sea g la función de U en E definida por

$$g(x) = (x - a) \frac{2}{r}.$$

En (1.11) se demostró que $f_o g \in E_c$ (U,$\mathbb{R}$). Para cada n = 1, 2, ..., consideremos la función g_n de E en $\mathbb{R}$, definida por:

$$g_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(x))^{2j}.$$

Para cada n = 1, 2, ..., $g_n \in P(E,\mathbb{R})$. Además, la función $g_n o g \in E_b(U,\mathbb{R})$. La sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en $E_c(U,\mathbb{R})$. Por tanto, el conjunto

$$\mathcal{M} = \{ g_n / n = 1, 2, ... \}$$

es un acotado en $(E_b(U,\mathbb{R}),\tau_0)$, sin embargo, para cada $n \geq 1$, existe $x_n \in B(a,r)$ (1.12), tal que:

$$\| g_n o g(x_n) \| \geq (\frac{4}{3})^{2n},$$

lo que prueba que $\mathcal{M}$ no es acotado en $(E_b(U,\mathbb{R}),\beta)$.

Por último, se prueba sin dificultad que el conjunto $\{ h_n / n = 1, 2, ... \}$ es acotado en $(E_b(U,F),\tau_0)$, pero no es acotado en $(E_b(U,F),\beta)$, donde

$$h_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(\frac{2}{r}(x-a)))^{2j} b,$$

siendo $b \in F$, con $b \neq 0$.

Se demostrará a continuación que los espacios $(E_c(U,F),\tau_0)$, $(E_c(U,F), u)$ y $(E_b(U,F), \beta)$ son completos. La prueba se basa en la completitud del espacio $(C^\infty(U,F), \tau_c^\infty)$. La completitud del espacio $(C^\infty(U,F), \tau_c^\infty)$, se puede obtener como una consecuencia de las proposiciones 5, [Me,273] y 3.2.10 de [Lla,74]; la demostración no la hemos encontrado en la bibliografía manejada. Por este motivo se incluye en la memoria una prueba basada en el artículo [Me].

Observaciones.

2.11.- Sea $f \in E_c(U,F)$, K un compacto de U, $n \geq 1$ y H un compacto de $E \times \overset{n)}{\ldots} \times E$. La aplicación de $(\tilde{K} \cup \{0\}) \times H$ en F, definida por:

$$(x, h) \longrightarrow D^n f(x)(h)$$

es continua.

2.12. Sean E y F espacios de Banach reales y U un abierto de E.

i) Si K es un compacto de U, denotaremos por p_K la seminorma en $C^\infty(U,F)$, definida por:

$$p_K(f) = \sup \{ \| f(x) \| \ / \ x \in K \}, \qquad f \in C^\infty(U,F).$$

ii) Si K es un compacto de U, $n \geq 1$ y H un compacto de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$, denotaremos por $p_{K,n,H}$ la seminorma definida en $C^\infty(U,F)$, por:

$$p_{K,n,H}(f) = \sup \{ \| D^n f(x)(y) \| \ / \ x \in K, \ y \in H \}, \qquad f \in C^\infty(U,F).$$

La familia de seminormas

$\{p_K / K \text{ compacto de } U\} \cup \{p_{K,n,H} / K \text{ compacto de } U, n \geq 1, H \text{ compacto de } E \times \overset{n)}{\dots} \times E\}$,

define la topología τ_c^∞ en el espacio $C^\infty(U,F)$.

2.13.- Para el caso particular de ser E y F espacios de Banach reales y U un abierto de E, el espacio $C^\infty_{c_0}(U,F)$ definido en [Me, 272] coincide con el espacio de las funciones f de U en F, para las que existe una sucesión $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ de funciones, verificando:

1) $f_j \in C(U,(L(^nE,F),\tau_0))$.
2) $f_0 = f$.
3) f_j es Gâteaux diferenciable y $Df_j = f_{j+1}$.

De forma semejante a la observación 2.13, al espacio $C^\infty_{c_0}(U,F)$ se le dota de una topología localmente convexa, dada por las seminormas:

$$p_{K,n,H}(f) = \sup \{ \| D^n f(x)(y) \| \ / \ x \in K, \ y \in H \},$$

cuando K varía en los compactos de U, $n \geq 1$ y H es un compacto de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$.

En la proposición 5, [Me,273], se prueba que el espacio localmente convexo definido anteriormente es completo.

2.14.Proposición.- El espacio $(C^\infty(U,F), \tau_c^\infty)$ es completo.

Demostración.- Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red de Cauchy en $(C^\infty(U,F), \tau_c^\infty)$. Aplicando [Me,273], la red converge hacia un elemento $f \in C^\infty_{c_0}(U,F)$.
Veamos que para cada $j = 0, 1, 2, \dots$, la aplicación

$$D^j f : U \longrightarrow (L_s(^jE,F),\beta)$$

es diferenciable Fréchet en U. Realizaremos la demostración en dos etapas.

i) Para cada $j = 0, 1, 2, \dots$, la aplicación

$$D^j f : U \longrightarrow (L_s(^jE,F),\beta)$$

es localmente acotada, para lo cual, basta ver que para cada compacto K de U,

$$\sup \{ \| D^j f(x) \| \ / \ x \in K \} < +\infty.$$

Teniendo en cuenta (0.6), es suficiente demostrar que el conjunto $\{D^j f(x) / \ x \in K\}$ es acotado en $L_s\,({}^jE,F)$ por la topología compacta abierta.

La aplicación de $U \times E \times \overset{j)}{\ldots} \times E$ en F, definida por

$$(x, y_1, \ldots, y_j) \longrightarrow D^j f(x)\,(y_1, \ldots, y_j)$$

resulta ser límite uniforme en los compactos de $U \times E \times \overset{j)}{\ldots} \times E$, de una red de aplicaciones continuas, y por tanto, continua; luego si H es un compacto de $E \times \overset{j)}{\ldots} \times E$,

$$\sup \{ \| D^j f(x)\,(y_1, \ldots, y_j) \| \ / \ x \in K, \ (y_1, \ldots, y_j) \in H \} < +\infty.$$

ii) Para cada j = 0, 1, 2, ..., la aplicación

$$D^j f : U \longrightarrow (L_s({}^jE,F),\beta)$$

es diferenciable Fréchet.

Sean $x_0 \in U$, $\delta > 0$, tales que $\mathring{B}(x_0,\delta) \subset U$. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $\mathring{B}(x_0,\delta)$ que converge hacia x_0, tal que $x_n \neq x_0$, n = 1, 2, ... Sea

$$C = \left\{ \frac{D^j f(x_n) - D^j f(x_0) - D^{j+1} f(x_0)\,(x_n - x_0)}{\| x_n - x_0 \|^2} \ , \quad n = 1, 2, \ldots \right\},$$

C es un subconjunto de $L_s({}^jE,F)$ y demostraremos que C es acotado por la topología compacta-abierta. Aplicando (0.6), resultará acotado por la topología fuerte.

Consideremos H un compacto de $E \times \overset{j)}{\ldots} \times E$ y los conjuntos:

$$K_1 = \{ x_0 \} \cup \{ x_p \ / \ p = 1, 2, \ldots \}$$
$$K_1^* = \{ tx \cancel{+ (1 - t)y \ / \ x, y \in K_1}, \ t \in [0,1] \}$$
$$K_c = \{ tx + (1 - t)y \ / \ x, y \in K_1^*, \ t \in [0,1] \}$$
$$K_2 = \{ x_p - x_0 \ / \ p = 1, 2, \ldots \} \cup \{0\}$$
$$K_3 = \{ x - x_0 \ / \ x \in K_c \}.$$

Obviamente, estos conjuntos son compactos en E. En particular K_c es un compacto de $\mathring{B}(x_0,\delta)$.

El conjunto $H \times K_2 \times K_3$ es un compacto de $E \times \overset{j+2)}{\ldots} \times E$, luego para cada $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, se tiene que

$$\| D^{j+2} f_\lambda(x)\,(h, x_p - x_0, \ \tilde{x} - x_0) - D^{j+2} f(x)\,(h, x_p - x_0, \ \tilde{x} - x_0) \| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

para cualesquiera $h \in H$, $x, \tilde{x} \in K_c$, p = 1, 2, ...

Como $D^{j+2}f$ es localmente acotada en U, sin pérdida de generalidad se puede suponer que existe $M > 0$ tal que

$$\| D^{j+2} f(x) \| \leq M, \quad x \in \mathring{B}(x_0,\delta).$$

De (1) se sigue que

$$\| D^{j+2} f_\lambda(x) (h, x_p - x_0, \tilde{x} - x_0) \| \leq \varepsilon + M \|h_1\| \|h_2\| \dots \|h_j\| \|x_p - x_0\| \|\tilde{x} - x_0\|,$$

para cada $h = (h_1, h_2, \dots, h_j) \in H$, $x, \tilde{x} \in K_c$, $p = 1, 2, \dots,$ y $\lambda \geq \lambda_0$.

Sea $p \in \mathbb{N}$ y $\Lambda' = \{ \lambda \in \Lambda \ / \ \lambda \geq \lambda_0 \}$; si $h \in H$ se tiene

$$\frac{\| D^j f(x_p)(h) - D^j f(x_0)(h) - D^{j+1} f(x_0)(x_p - x_0, h) \|}{\| x_p - x_0 \|^2} =$$

$$= \lim_{\lambda \in \Lambda'} \frac{\| D^j f_\lambda(x_p)(h) - D^j f_\lambda(x_0)(h) - D^{j+1} f_\lambda(x_0)(x_p - x_0, h) \|}{\| x_p - x_0 \|^2}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función

$$t \in [0,1] \longrightarrow D^j f_\lambda (tx_p + (1 - t) x_0)(h) - D^{j+1} f_\lambda(x_0) (tx_p + (1 - t) x_0, h)$$

para $\lambda \geq \lambda_0$, se obtiene que:

$$\| D^j f_\lambda(x_p)(h) - D^j f_\lambda(x_0)(h) - D^{j+1} f_\lambda(x_0)(x_p - x_0, h) \| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} \| D^{j+1} f_\lambda(tx_p + (1 - t)x_0)(h, x_p - x_0) - D^{j+1} f_\lambda(x_0)(h, x_p - x_0) \|.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función

$$s \in [0,1] \longrightarrow D^{j+1} f_\lambda(s [tx_p + (1 - t) x_0] + (1 - s) x_0)(h, x_p - x_0) \in F, \ (t \in [0,1]),$$

se obtiene:

$$\| D^{j+1} f_\lambda(tx_p + (1 - t)x_0)(h, x_p - x_0) - D^{j+1} f_\lambda(x_0)(h, x_p - x_0) \| \leq$$

$$\leq \sup_{s \in [0,1]} \| D^{j+2} f_\lambda(s [tx_p - (1 - t)x_0] + (1 - s)x_0)(h, x_p - x_0, tx_p + (1 - t)x_0 - x_0) \| \leq$$

$$\leq \sup_{s \in [0,1]} \| D^{j+2} f_\lambda(s [tx_p + (1 - t)x_0] + (1 - s)x_0)(h, x_p - x_0, x_p - x_0) \| \leq$$

$$\leq M \|h_1\| \|h_2\| \dots \|h_j\| \|x_p - x_0\|^2 + \varepsilon.$$

donde $h = (h_1, h_2, \dots, h_j)$.

Se deduce entonces que:

$$\frac{\| D^j f(x_p)(h) - D^j f(x_0)(h) - D^{j+1} f(x_0)(x_p - x_0, h) \|}{\| x_p - x_0 \|^2} =$$

$$= \lim_{\lambda\in\Lambda'} \frac{\| D^j f_\lambda(x_p)(h) - D^j f_\lambda(x_0)(h) - D^{j+1} f_\lambda(x_0)(x_p - x_0, h) \|}{\| x_p - x_0 \|^2} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon + M \|h_1\| \ldots \|h_j\| \; \| x_p - x_0 \|^2}{\| x_p - x_0 \|^2}, \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

y como ε es arbitrario, se deduce finalmente que

$$\frac{\| D^j f(x_p)(h) - D^j f(x_0)(h) - D^{j+1} f(x_0)(x_p - x_0, h) \|}{\| x_p - x_0 \|^2} \leq$$

$$\leq M \|h_1\| \, \|h_2\| \ldots \|h_j\| \leq M \sup \{ \|h_1\| \, \|h_2\| \ldots \|h_j\| \; / \; h \in H \} < \infty,$$

y por consiguiente,

$$\sup \left\{ \frac{\| D^j f(x_p)(h) - D^j f(x_0)(h) - D^{j+1} f(x_0)(x_p - x_0, h) \|}{\| x_p - x_0 \|^2} \; / \, h \in H \right\} < \infty,$$

lo que prueba que el conjunto C es acotado por la topología compacta-abierta en $L_s({}^jE,F)$ y, por tanto, por la topología fuerte en $L_s({}^jE,F)$. Existe entonces $L > 0$, tal que

$$\frac{\| D^j f(x_p) - D^j f(x_0) - D^{j+1} f(x_0)(x_p - x_0) \|}{\| x_p - x_0 \|} \leq L \, \| x_p - x_0 \|, \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

lo que implica la diferenciabilidad de $D^j f$ en x_0

2.15.Proposición.- El espacio $(E_c(U,F), \tau_0)$ es completo.

Demostración.- Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red de Cauchy en $(E_c(U,F), \tau_0)$. Entonces la red es de Cauchy en $C^\infty(U,F)$ por la topología τ_c^∞. Por la proposición anterior, la red converge hacia una función $f \in C^\infty(U,F)$ por a topología τ_c^∞. Veamos que la función f está en el espacio considerado. Basta demostrar que para cada compacto K de U y para cada número natural n, existe

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in K}} D^n f(x)$$

por la topología compacta abierta en $L_s({}^nE,F)$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, pongamos

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} D^n f_\lambda(x) = A_{n,\lambda} \in L_s({}^nE,F).$$

a) La red $\{A_{n,\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es de Cauchy en $(L_s({}^nE,F), \tau_0)$.

En efecto, si $n = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ y cada compacto K de U, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda,\mu \geq \lambda_0,$ se tiene

$$\| f_\lambda(x) - f_\mu(x) \| < \varepsilon, \qquad x\in\tilde{K}.$$

y por tanto,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} \| f_\lambda(x) - f_\mu(x) \| = \| A_{0,\lambda} - A_{0,\mu} \| \leq \varepsilon.$$

Si $n \geq 1$, K es un compacto de U y H es un compacto de $E\times \overset{n)}{\ldots} \times E$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que si $\lambda,\mu\geq \lambda_0,$ se tiene

$$\| D^n f_\lambda(x)(h) - D^n f_\mu(x)(h) \| < \varepsilon, \qquad x \in \tilde{K}, \quad h \in H.$$

Entonces,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} \| D^n f_\lambda(x)(h) - D^n f_\mu(x)(h) \| = \| A_{n,\lambda}(h) - A_{n,\mu}(h) \| \leq \varepsilon, \qquad h \in H.$$

Como la red $\{A_{n,\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es de Cauchy en $(L_s({}^nE,F), \tau_0)$, converge hacia un elemento $A_n \in L_s({}^nE,F)$, por la topología τ_0.

b) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} D^n f(x) = A_n.$

Sean K un compacto de U y H un compacto de $E \times \overset{n)}{\ldots} \times E$; existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\| D^n f(x)(h) - D^n f_{\lambda_0}(x)(h) \| \leq \varepsilon \tag{1}$$

para todo $x \in \tilde{K}$, $h \in H$ y

$$\| A_{n,\lambda_0}(h) - A_n(h) \| \leq \varepsilon \tag{2}$$

para todo $h \in H$. Como

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{K}}} D^n f_{\lambda_0}(x) = A_{n,\lambda_0}$$

en la topología compacta abierta en $L_s({}^nE,F)$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x\in\tilde{K}\cap\mathring{B}(0,\delta)$ y $h \in H$, se tiene que

$$\| D^n f_{\lambda_0}(x)(h) - A_{n,\lambda_0}(h) \| \leq \varepsilon \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) se concluye que:

$$\| D^n f(x)(h) - A_n(h) \| \leq 3\varepsilon$$

para cada $x \in \tilde{K} \cap \overset{\circ}{B}(0,\delta)$ y $h \in H$.

c) La red $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge hacia f en E_c (U,F) por la topología τ_0.

Sea K un compacto de U y $\varepsilon > 0$; existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda, \mu \geq \lambda_0$,

$$\| f_\lambda(x) - f_\mu(x) \| < \varepsilon, \qquad x\in\tilde{K},$$

luego

$$\| f_\lambda(x) - f(x) \| \leq \varepsilon, \qquad \text{para } \lambda \geq \lambda_0 \text{ y } x\in\tilde{K}.$$

Por otra parte, si $n \geq 1$ y H es un compacto de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$, existe λ_1 verificando que si $\lambda, \mu \geq \lambda_1$, se tiene

$$p_{\tilde{K},n,H}(f_\lambda - f_\mu) < \varepsilon.$$

Entonces, para cada $x \in \tilde{K}$, $h \in H$,

$$\| D^n f_\lambda(x)(h) - D^n f_\mu(x)(h) \| < \varepsilon,$$

lo que implica

$$p_{\tilde{K},n,H}(f_\lambda - f) \leq \varepsilon,$$

y esto concluye la prueba.

2.16.Corolario.- El espacio (E_c (U,F), u) es completo.

Demostración.- Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red de Cauchy en (E_c (U,F), u). La topología u es más fina que la topología τ_0 en E_c (U,F) (2.8 y 2.9), por tanto, $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red de Cauchy en (E_c (U,F), τ_0) y en virtud de la proposición anterior, converge hacia una función $f \in E_c$ (U,F) por la topología τ_0.
Veamos que la red $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge hacia f por la topología u. Basta demostrar que para cada compacto K de U, cada $n \geq 1$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$,

$$p_{\tilde{K},n}(f_\lambda - f) \leq \varepsilon.$$

Sean K un compacto de U, $n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda, \mu \geq \lambda_0$, se tiene

$$\| D^n f_\lambda(x) - D^n f_\mu(x) \| < \varepsilon, \qquad x \in \tilde{K}.$$

Entonces, si $h_1, h_2, ..., h_n \in E$ y $\|h_i\| \leq 1$,

$$\| D^n f_\lambda(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n f_\mu(x)(h_1, h_2, ..., h_n) \| < \varepsilon.$$

Sea $\Lambda' = \{ \mu \in \Lambda \,/\, \mu \geq \lambda_0 \}$. Para cada $h_1, h_2, ..., h_n \in E$ con $\|h_i\| \leq 1$,

$$\| D^n f_\lambda(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n f(x)(h_1, h_2, ..., h_n) \| =$$

$$= \lim_{\mu \in \Lambda'} \| D^n f_\lambda(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n f_\mu(x)(h_1, h_2, ..., h_n) \| \leq \varepsilon,$$

de donde se concluye que

$$p_{\tilde{K},n}(f_\lambda - f) \leq \varepsilon \qquad \text{si } \lambda \geq \lambda_0.$$

2.17.Corolario.- El espacio (E_b (U,F), β) es completo.

Demostración.- Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en (E_b (U,F), β). La topología β en E_b (U,F) es más fina que la topología inducida en E_b (U,F) por τ_0 (2.4) y (2.5), por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (E_c (U,F), τ_0), y en virtud de (2.17), converge hacia una función $f \in E_c$ (U,F) por dicha topología. Veamos que $f \in E_b$ (U,F). Sea B un subconjunto U-acotado:

i) Si n = 0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada n, m $\geq n_0$, se tiene:

$$\sup_{x \in \tilde{B}} \| f_n(x) - f_m(x) \| \leq 1.$$

Por consiguiente,

$$\| f_{n_0}(x) - f(x) \| \leq 1$$

cualquiera que sea $x \in B$, y se deduce que

$$\sup \{ \| f(x) \| \,/\, x \in B \} \leq 1 + \sup \{ \| f_{n_0}(x) \| \,/\, x \in B \} < +\infty.$$

ii) Si n $\geq$ 1, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cualesquiera p, q $\geq n_0$, se tiene:

$$\| D^n f_p(x) - D^n f_q(x) \| \leq 1, \qquad x \in \tilde{B},$$

luego

$$\| D^n f_{n_0}(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n f(x)(h_1, h_2, ..., h_n) \| =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \| D^n f_{n_0}(x)(h_1, h_2, ..., h_n) - D^n f_p(x)(h_1, h_2, ..., h_n) \| \leq 1,$$

$x \in \tilde{B}$, $h_1, h_2, ..., h_n \in E$ con $\|h_i\| \leq 1$.

Por tanto,

$$\| D^n f(x) - D^n f_q(x) \| \leq 1, \quad x \in \tilde{B},$$

y se deduce que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \,/\, x \in B \} \leq 1 + \sup \{ \| D^n f_{n_0}(x) \| \,/\, x \in B \} < +\infty.$$

Por último, veamos que para cada conjunto U-acotado B y para cada número natural n $\geq$ 0, existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \tilde{B}}} D^n f(x)$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$.

Sea $A_{n,m} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{B}}} D^n f_m(x)$.

La sucesión $\{A_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(L_s(^nE,F), \beta)$.

Un razonamiento análogo al realizado en (2.17) prueba que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{B}}} D^n f(x) = A_n$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$ y que la sucesión converge hacia f en E_b (U,F) por la topología β.

Nuestro próximo objetivo consistirá en dar una demostración alternativa al teorema (1.15), basada en la estructura topológica del espacio (E_b (U,F), β).

2.18.Lema.- a) $P(^nE,F)$ es un subespacio cerrado de (E_c (U,F), τ_0).

b) Para cada n = 1, 2, ..., la topología que induce τ_0 en $P(^nE,F)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme en los compactos de E.

Demostración.- a) Sea $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de elementos de $P(^nE,F)$, tal que $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge por la topología τ_0 de E_c (U,F) hacia una función f. Es claro que la red $\{P_\lambda|_U\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente en los compactos de U. Sean $a \in U$ y $\delta > 0$ tales que $\mathring{B}(a,\delta) \subset U$.

i) La red $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, de elementos de $L_s(^nE,F)$, donde $\hat{A}_\lambda = P_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, converge uniformemente en los compactos de $\frac{1}{n}\mathring{B}(0,\delta) \times \overset{n)}{\dots} \times \frac{1}{n}\mathring{B}(0,\delta)$.

En virtud de la fórmula de polarización [Mu,6], se tiene:

$$A_\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_n \; P_\lambda \; (a + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + ... + \varepsilon_n x_n),$$

$x_1, x_2, ..., x_n \in E$.

Si $K_1, K_2, ..., K_n$ son compactos de $\frac{1}{n}\mathring{B}(0,\delta)$ y $x_i \in K_i$, i = 1, 2, ..., n, se verifica:

$$a + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + ... + \varepsilon_n x_n \in a + \bigcup_{\varepsilon_i = \pm 1} (\varepsilon_1 K_1 + \varepsilon_2 K_2 + ... + \varepsilon_n K_n).$$

Para una elección de la n-upla $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$, se tiene que:

$$a + \varepsilon_1 K_1 + \varepsilon_2 K_2 + ... + \varepsilon_n K_n \subset \mathring{B}(a,\delta),$$

de donde se sigue que la red $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge uniformemente en K_1 x...x K_n.

ii) La red $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge uniformemente en los compactos de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$.

Basta demostrar que la red $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es uniformemente de Cauchy en los compactos de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$.

Sean $K_1, K_2, ..., K_n$ subconjuntos compactos de E. Existe $0 < t_0 \le 1$ con

$$t_0 K_i \subset \frac{1}{n} \mathring{B}(0,\delta) \text{ , } i = 1, 2, ..., n,$$

luego

$$(t_0K_1) \times (t_0K_2) \times ... \times (t_0K_n) \subset \frac{1}{n} \mathring{B}(0,\delta) \times \overset{n)}{\dots} \times \frac{1}{n} \mathring{B}(0,\delta).$$

Si $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K_1$ x...x K_n,

$$A_\lambda(t_0x_1, t_0x_2, ..., t_0x_n) = t_0^n A_\lambda(x_1, x_2, ..., x_n),$$

lo que prueba la convergencia uniforme de la red en K_1 x...x K_n.

En virtud de i) e ii), existe un polinomio $P \in P(^nE,F)$, tal que $P|_U = f$.

b) Sean n un número natural, $n \ge 1$ y $P \in P(^nE,F)$. Se verifican las siguientes desigualdades:

i) Si K es un compacto de U, llamando $H = \tilde{K} \cup \{0\}$, resulta

$$p_K(P|_U) = q_H(P).$$

ii) Si K es un compacto de U, m un número natural con $1 \le m \le n$ y G un compacto de $E \times \overset{m)}{\dots} \times E$, llamando $H = (\tilde{K} \cup \{0\}) \times \overset{n-m)}{\dots} \times (\tilde{K} \cup \{0\}) \times G$, se obtiene:

$$p_{K,m,G}(P|_U) =$$

$$= \sup \{ \frac{n!}{(n-m)!} \| A(x,..., x, h_1, h_2, ..., h_m) \| / x \in \tilde{K} \cup \{0\}, h_1, h_2, ..., h_m \in G \} \le$$

$$\le \frac{n!}{(n-m)!} \sup \{ \| A(y) \| / y \in H \},$$

siendo $\hat{A} = P$.

iii) Sea H un compacto de E. Entonces:

$$q_H(P) = \sup \{ \| A(x, ..., x) \| / x \in H \} \le$$

$$\le \sup \{ \| A(x_1, ..., x_n) \| / x_1, ..., x_n \in H \} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sup \{ \| n! A(x_1, ..., x_n) \| / x_1, ..., x_n \in H \} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sup \{ \| D^nP(0)(x_1, ..., x_n) \| \ / \ x_1, ..., x_n \in H \} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n!} p_{K,n,H\overset{n)}{x\ldots x}H} (P|_U),$$

donde K es un compacto cualquiera de U y $\hat{A} = P$.

2.19.Corolario.- a) $P(^nE,F)$ es subespacio cerrado de $(E_b(U,F), \beta)$.
b) La topología que induce β en $P(^nE,F)$ coincide con la topología fuerte.

Demostración.- a) Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $P(^nE,F)$, tal que $\{P_n|_U\}_{n=1}^{\infty}$ converge por la topología β de $E_b(U,F)$ hacia una función f. Puesto que la topología β es más fina que la topología τ_0 en $E_b(U,F)$, la sucesión $\{P_n|_U\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en $E_c(U,F)$ y como consecuencia de la proposición anterior, existe un polinomio $P \in P(^nE,F)$, tal que $P|_U = f$.

b) Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $P \in P(^nE,F)$; se verifican las siguientes desigualdades entre seminormas:

i) Si B es un subconjunto U-acotado, se tiene

$$p_B(P|_U) \leq \| P \| \sup \{ \| x \|^n / x \in \tilde{B} \}.$$

ii) Si B es un subconjunto U-acotado y m un número natural con $1 \leq m \leq n$, resulta:

$$p_{B,m}(P|_U) = \sup \{ \frac{n!}{(n-m)!} \| Ax^{n-m} \| , \ x \in \tilde{B} \} \leq$$

$$\leq \frac{n!}{(n-m)!} \| A \| \sup \{ \| x \|^{n-m} / \ x \in \tilde{B} \},$$

siendo $\hat{A} = P$.

iii) Por último,

$$\| A \| = \frac{1}{n!} \| n! A \| = \frac{1}{n!} \| D^nP(0) \| = \frac{1}{n!} p_{B,n}(P|_U).$$

2.20.Proposición.- Sea L un elemento del dual algebraico del espacio $E_b(U,F)$ y B un subconjunto U-acotado. Se supone que:

α) Para cada $f \in E_b(U,F)$ con $D^nf(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, se tiene que $L(f) = 0$.

β) Existen un número natural p y $M > 0$, tales que

$$| L(f) | \leq M \sup_{0 \leq j \leq p} \{ \| D^jf(x) \| \ / \ x \in \tilde{B} \}, \qquad f \in E_b(U,F).$$

Entonces, para cada elemento f de E_b (U,F) con

$$f(0) = 0,\ Df(0) = 0, \dots, D^p f(0) = 0,$$

se verifica que L(f) = 0.

Demostración.- Observemos en primer lugar que $L \in (E_b\ (U,F), \beta)'$. Sea g una función real de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, tal que

α) sop (g) ⊂ (-1,1).

β) g(x) = 1 si $x \in (-1/2, 1/2)$.

Para cada n = 0, 1, 2, ..., se designa por

$$\alpha_n = \sup \{ \mid t^n g^{n)}(t) \mid / \ t \in \mathbb{R} \}$$

$$\beta_n = \sup \{ \mid g^{n)}(t) \mid / \ t \in \mathbb{R} \}.$$

Consideremos un elemento φ de E´, de norma 1, con φ(x) > 0 si x ∈ U.

Para cada n = 1, 2, ..., se define

$$f_n(x) = f(x)\, g(n\, \varphi(x)), \qquad x \in U.$$

Se tiene:

i) $f_n \in E_b$ (U,F), n = 1, 2, ... En efecto, si x ∈ U, teniendo en cuenta [A.M.R,91],

$$\| D^k f_n(x) \| \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \| g^{k-j)}(n\, \varphi(x))\ n^{k-j}\ \varphi^{k-j}\ D^j f(x) \|$$

luego, si H es un subconjunto U-acotado,

$$\sup \{ \| D^k f_n(x) \| \ / \ x \in H \} \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \beta_{k-j}\ n^{k-j}\ p_{\tilde{H},j}(f) < +\infty.$$

Por otra parte,

$$\| D^k f_n(x) - D^k f(0) \| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \mid g^{k-j)}(n\, \varphi(x)) \mid n^{k-j}\ \| D^j f(x) \| +$$

$$+ \mid g(n\, \varphi(x)) - 1 \mid \| D^k f(x) \| + \| D^k f(x) - D^k f(0) \|.$$

Como $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} g^{k-j)}(n\, \varphi(x)) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \dots, k-1$

y $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} g(n\, \varphi(x)) = 1,$

resulta que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathring{H}}} \| D^k f_n(x) - D^k f(0) \| \le$$

$$\le \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathring{H}}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \mid g^{k-j)}(n\,\varphi(x)) \mid n^{k-j}\, p_{\mathring{H},j}(f) +$$

$$+ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathring{H}}} \mid g(n\,\varphi(x)) - 1 \mid p_{\mathring{H},k}(f) + \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathring{H}}} \| D^k f(x) - D^k f(0) \| = 0.$$

Así se ha demostrado que para cada $n = 1, 2, ...,$ y cada $k = 0, 1, 2, ...,$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathring{H}}} D^k f_n(x) = D^k f(0).$$

ii) $\lim_{n\to\infty} L(f_n) = 0.$

En efecto, por (0.9) existe $\mu \in (0,1)$ que verifica:

$$\varphi(x) \ge \mu \, \|x\|, \qquad x \in \tilde{B}$$

Sean $j \in \{0, 1, 2, ..., p\}$ y $\varepsilon > 0$. Como

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathring{B}}} D^j f(x) = 0,$$

existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \le \delta$ y $x \in \tilde{B}$, se tiene

$$\| D^j f(x) \| \le \frac{\varepsilon\, \mu^k}{\alpha_k\, 2^j}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., j.$$

Por otra parte, si $x \in \tilde{B}$

$$\| D^{j-k} f(x) \| \le \sup_{0\le t\le 1} \| D^{j-k+1} f(tx) \| \, \|x\|,$$

y aplicando sucesivamente el teorema del valor medio, resulta que

$$\| D^{j-k} f(x) \| \le \frac{\varepsilon\, \mu^k}{\alpha_k\, 2^j} \|x\|^k, \qquad k = 0, 1, 2, ..., j.,$$

luego si $\|x\| \le \delta$ y $x \in \tilde{B}$,

$$\| D^j f_n(x) \| \le \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \| D^{j-k} f(x)\, n^k\, \varphi^k\, g^{k)}(n\,\varphi(x)) \| =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \| D^{j-k}f(x) \| \frac{n^k \, | g^{k)}(n\,\varphi(x)) \, (\varphi(x))^k \, |}{|\varphi(x)|^k} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \alpha_k \frac{1}{\mu^k \|x\|^k} \| D^{j-k}f(x) \| \leq$$

$$\leq \alpha_0 \| D^j f(x) \| + \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} \alpha_k \frac{1}{\mu^k \|x\|^k} \| D^{j-k}f(x) \| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2^j} + \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} \alpha_k \frac{1}{\mu^k \|x\|^k} \frac{\varepsilon \mu^k}{\alpha_k 2^j} \|x\|^k = \varepsilon.$$

Se deduce entonces que:

$$\sup \{ \| D^j f_n(x) \| \;/\; x \in \tilde{B}, \; \|x\| \leq \delta \} \leq \varepsilon. \qquad (1)$$

Si $x \in \tilde{B}$ y $\|x\| \geq \delta$, se tiene

$$n\,\varphi(x) \geq n\,\mu\delta, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Por otra parte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$n\,\mu\,\delta > 1,$$

luego,

$$D^k g(\, n\,\varphi(x)) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, p. \qquad (2)$$

De (1) y (2), si $n \geq n_0$, se tiene:

$$p_{B,j}\,(f_n) \leq \varepsilon, \qquad j = 0, 1, \ldots, p,$$

deduciéndose, por la hipótesis realizada, que:

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = 0.$$

iv) La sucesión $\{ f - f_n \}_{n=1}^{\infty}$, por i), verifica que

$$D^k (f - f_n)(0) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

luego $L(f - f_n) = 0$ y por tanto,

$$L(f) = L(f_n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

lo que implica, en virtud de ii), que $L(f) = 0$.

2.21.Proposición.- Sea $L \in (E_b(U,F), \beta)'$, tal que para cada $f \in E_b(U,F)$ con $D^n f(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene que $L(f) = 0$. Existe entonces un elemento

$\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ del espacio $\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)'$ de forma que para cada función $f \in E_b(U,F)$, se verifica que

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\hat{D}^k f(0)).$$

En $P(^nE,F)$ se considera la topología fuerte.

Demostración.- Existen un subconjunto U-acotado B, un número natural p, con $p \geq 1$ y $M > 0$, tales que:

$$|L(f)| \leq M \sup_{0 \leq j \leq p} \{ \|D^j f(x)\| \;/\; x \in \tilde{B} \}, \qquad f \in E_b(U,F).$$

Si $f \in E_b(U,F)$, se define la función:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{\hat{D}^n f(0)(x)}{n!}, \qquad x \in U.$$

h es un polinomio y

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} D^n h(x) = D^n f(0), \qquad n = 0, 1, 2, ..., p,$$

luego $f - h \in E_b(U,F)$ y $D^n(f - h)(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, ..., p$.
Aplicando la proposición anterior se obtiene que $L(f) = L(h)$.
En virtud de (2.19), la resticción v_n de L a $P(^nE,F)$ es un elemento de $P(^nE,F)'$, $n = 0, 1, 2, ..., p$. Si se define:

$$u_n = \frac{1}{n!} v_n \qquad 0 \leq n \leq p,$$

$$u_n = 0 \qquad \text{si } n > p,$$

se tiene que $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un elemento de $\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)'$. Además:

$$L(h) = L\Big(\sum_{n=0}^{p} \frac{\hat{D}^n f(0)}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{p} L\Big(\frac{\hat{D}^n f(0)}{n!}\Big) =$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} v_n(\hat{D}^n f(0)) = \sum_{n=0}^{p} u_n(\hat{D}^n f(0)).$$

2.22.Prueba alternativa de la proposición (1.15).

Consideremos la aplicación ψ de $E_b(U,F)$ en $\prod_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)$, definida por:

$$\psi(f) = (f(0), \hat{D}f(0), ..., \hat{D}^n f(0), ...).$$

Obviamente, la aplicación ψ es lineal y continua cuando en $E_b(U,F)$ se considera la topología β y en $P(^nE,F)$ se considera la topología fuerte. Teniendo en cuenta que los citados espacios son de Fréchet, por [Ho, 308], si se demuestra que ${}^t\psi$ es inyectiva y ${}^t\psi(\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)')$ es débilmente cerrado en $(E_b(U,F), \beta)'$, resultará que ψ es sobre y la proposición estará terminada.

i) ${}^t\psi$ es inyectiva .

En efecto, si

$$P = A_0 + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + ... + \hat{A}_n$$

donde $A_j \in L_s(^jE,F)$, $j = 0, 1, ..., n$, y

$$Q = A_0 + \hat{A}_1 + \frac{1}{2!}\hat{A}_2 + ... + \frac{1}{n!}\hat{A}_n$$

se tiene que:

$$D^jQ(0) = A_j, \qquad j = 0, 1, ..., n,$$

y como $Q|_U \in E_b(U,F)$, se obtiene que

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F) \subset \psi(E_b(U,F)).$$

Ahora bien, $\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)$ es denso en $\prod_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)$, luego también lo será $\psi(E_b(U,F))$, lo que implica que ${}^t\psi$ es inyectiva .

ii) ${}^t\psi(\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)')$ es débilmente cerrado en $(E_b(U,F), \beta)'$.

Para cada $k = 0, 1, 2, ...$, consideremos la aplicación ψ_k de $E_b(U,F)$ en $P(^kE,F)$, definida por

$$\psi_k(f) = \hat{D}^k f(0).$$

Sea L un elemento de la adherencia débil de ${}^t\psi(\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)')$ en $(E_b(U,F), \beta)'$; veamos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \psi_k \subset \operatorname{Ker} L.$$

Sea $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \psi_k$. Para cada $n = 1, 2, ...$, el conjunto

$$V_p = \{ \varphi \in (E_b(U,F), \beta)' \; / \; |\varphi(f) - L(f)| < \frac{1}{p} \}$$

es un entorno de L por la topología débil. Existe entonces $\{h_n^p\}_{n=0}^{\infty} \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)'$ tal que

$$ {}^t\psi(\{h_n^p\}_{n=0}^{\infty}) \in V_p $$

y por tanto,

$$ \left| \sum_{n=0}^{\infty} h_n^p \circ \psi_n(f) - L(f) \right| < \frac{1}{p}, $$

luego $| L(f) | < \frac{1}{p}$, $p = 1, 2, \ldots$, y se deduce que $f \in \operatorname{Ker} L$.

Aplicando (2.21), existe un elemento $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\bigoplus_{n=0}^{\infty} P(^nE,F)'$ tal que

$$ L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\hat{D}^n f(0)) = {}^t\psi(\{u_n\}_{n=0}^{\infty})(f), $$

obteniéndose ii).

Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, el espacio $(E_c(U,F), \tau_0)$ no es metrizable (basta observar que la topología que induce $(E_c(U,F), \tau_0)$ sobre $L_s(^nE,F)$ coincide con la topología compacta abierta (2.15), [Di,25]). Caracterizaremos los subconjuntos acotados en el espacio $(E_c(U,F),\tau_0)$ siguiendo el método dado por Nachbin para espacios de funciones holomorfas [Ba].

2.23.Definición de los espacios $E_{\mathcal{F}}(U,F)$.

Sea $\mathcal{F} = \{ F_{n,m} \,/\, n = 0, 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots \}$ una familia de subconjuntos cerrados de U que verifican:

α) Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$ U = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m}. $$

β) Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, y cada compacto K de U, existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tal que $\tilde{K} \subset F_{n,m}$.

Observemos que tales familias existen. Basta considerar, por ejemplo, una familia $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ de conjuntos U-acotados y cerrados en U, verificando las propiedades i), ii) e iii) de (0.8); entonces, si se define

$$ F_{n,m} = \tilde{B}_m, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, $$

teniendo en cuenta las propiedades (0.8.3) y (0.8.8), la familia:

$$ \mathcal{F} = \{F_{n,m} \,/\, n \in \mathbb{N},\ m \geq 1\} $$

verifica α) y β).

Se define el espacio:

$$E_{\mathcal{F}}(U,F) = \{ f \in E_c(U,F) \ / \ \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in F_{n,m} \} < +\infty, \ n \geq 0, m \geq 1 \}.$$

Resulta inmediato probar que para cada par de números $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, 2, ...\}$, la aplicación $p_{n,m}$ de $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ en $[0,+\infty)$, definida por:

$$p_{n,m}(f) = \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in F_{n,m} \}, \qquad f \in E_{\mathcal{F}}(U,F)$$

es una seminorma.

La topología $\tau_{\mathcal{F}}$ en $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ será la definida por la familia de seminormas

$$\{ p_{n,m} \ / \ n \in \mathbb{N}, \ m = 1, 2, ... \}$$

El espacio vectorial topológico así obtenido es separado y metrizable.

2.24.Lema.- La topología $\tau_{\mathcal{F}}$ en $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ es más fina que la topología inducida en dicho espacio por τ_0.

Demostración.- Si $n = 0$ y K es un compacto de U, existe $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, tal que $\tilde{K} \subset F_{0,m}$. Entonces:

$$p_{\tilde{K}}(f) \leq p_{0,m}(f).$$

Si $n \geq 1$, K es un compacto de U y H es un compacto de $E \times \overset{n)}{\dots} \times E$, existe $m \geq 1$ con $\tilde{K} \subset F_{n,m}$; entonces:

$$p_{\tilde{K},n,H}(f) = \sup \{ \| D^n f(x)(h) \| \ / \ x \in \tilde{K}, \ h \in H \} \leq$$

$$\leq \sup_{x \in \tilde{K}} \{ \| D^n f(x) \| \} \sup \{ \|h_1\| ... \|h_n\| \ / \ (h_1, ..., h_n) \in H \} \leq$$

$$\leq M \, p_{n,m}(f),$$

siendo

$$M = \sup \{ \|h_1\| ... \|h_n\| \ / \ (h_1, ..., h_n) \in H \}.$$

2.25.Proposición.- El espacio $(E_{\mathcal{F}}(U,F), \tau_{\mathcal{F}})$ es completo.

Demostración.- Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(E_{\mathcal{F}}(U,F), \tau_{\mathcal{F}})$. En virtud del lema anterior, la sucesión es de Cauchy en $(E_c(U,F), \tau_0)$ y por (2.15), converge hacia una función $f \in E_c(U,F)$ por la topología τ_0.

i) $f \in E_{\mathcal{F}}(U,F)$.

Sean $n = 0, 1, 2, ..., m \geq 1$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j, p \geq k_0$, se tiene:

$$\sup \{ \| D^n f_p(x) - D^n f_j(x) \| : \ x \in F_{n,m} \} < 1.$$

Entonces para cada $x \in F_{n,m}$, $h_1, ..., h_n \in E$ con $\|h_i\| \leq 1$,

$$\| D^n f(x)(h_1, ..., h_n) - D^n f_{k_0}(x)(h_1, ..., h_n) \| =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \| (D^n f_p(x) - D^n f_{k_0}(x))(h_1, ..., h_n) \| \leq 1$$

y se deduce que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in F_{n,m} \} < 1 + p_{n,m}(f_{k_0}) < +\infty.$$

ii) La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f por la topología $\tau_{\mathcal{F}}$.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $\varepsilon > 0$: existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j, p \geq k_0$, se tiene:

$$p_{n,m}(f_p - f_j) \leq \varepsilon.$$

Entonces, para cada $x \in F_{n,m}$, $h_1, ..., h_n \in E$ con $\|h_i\| \leq 1$ y $j \geq k_0$

$$\| D^n f(x)(h_1, ..., h_n) - D^n f_j(x)(h_1, ..., h_n) \| =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \| (D^n f_p(x) - D^n f_j(x))(h_1, ..., h_n) \| \leq \varepsilon,$$

lo que prueba que

$$p_{n,m}(f - f_j) \leq \varepsilon, \qquad \text{si } j \geq k_0.$$

Observaciones.- Sea $\mathcal{J}$ el conjunto de todas las familias de cerrados de U que verifican α) y β) de (2.23).

2.26.- Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son elementos de $\mathcal{J}$, diremos que la familia $\mathcal{F}_1$ es más fina que la familia $\mathcal{F}_2$ y lo denotaremos por $\mathcal{F}_1 \geq \mathcal{F}_2$, si para cada n = 0, 1, 2, ..., y cada $F_{n,m} \in \mathcal{F}_1$ existe $G_{n,j} \in \mathcal{F}_2$ con $F_{n,m} \subset G_{n,j}$.

2.27.- Dados $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, elementos de $\mathcal{J}$, existe $\mathcal{F}_3 \in \mathcal{J}$ tal que $\mathcal{F}_3$ es más fina que $\mathcal{F}_1$ y que $\mathcal{F}_2$. Basta considerar:

$$\mathcal{F}_3 = \{ F_{n,m} \cap G_{n,j} \ / \ F_{n,m} \in \mathcal{F}_1, \ G_{n,j} \in \mathcal{F}_2, \ n \geq 0, \ j, m \geq 1 \}.$$

Como consecuencia de ésto, la relación definida en (2.26) sobre $\mathcal{J}$ es una relación de preorden filtrante.

2.28.Proposición.- a) Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{J}$ y $\mathcal{F}_1 \geq \mathcal{F}_2$, entonces

$$E_{\mathcal{F}_2}(U,F) \subset E_{\mathcal{F}_1}(U,F).$$

b) Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{J}$ y $\mathcal{F}_1 \geq \mathcal{F}_2$, la inyección canónica de $E_{\mathcal{F}_2}(U,F)$ en $E_{\mathcal{F}_1}(U,F)$ es continua cuando en dichos espacios se consideran las topologías $\tau_{\mathcal{F}_1}$ y $\tau_{\mathcal{F}_2}$, respectivamente.

c) $E_c(U,F) = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{I}} E_{\mathcal{F}}(U,F)$.

Demostración.- a) Sea $f \in E_{\mathcal{F}_2}(U,F)$; para cada $F_{n,m} \in \mathcal{F}_1$, $n \geq 0$ y $m \geq 1$, por (2.26) existe $G_{n,j} \in \mathcal{F}_2$, $j \geq 1$ tal que

$$F_{n,m} \subset G_{n,j},$$

luego

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in F_{n,m} \} \leq \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in G_{n,j} \} < +\infty,$$

y se obtiene que $f \in E_{\mathcal{F}_1}(U,F)$.

b) Sean $n \geq 0$, $m \geq 1$ y $p_{n,m}$ la seminorma en $(E_{\mathcal{F}_1}(U,F), \tau_{\mathcal{F}_1})$, definida por:

$$p_{n,m}(f) = \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in F_{n,m} \}, \qquad f \in E_{\mathcal{F}_1}(U,F)$$

En virtud de (2.26), existe $G_{n,j} \in E_{\mathcal{F}_2}(U,F)$ con $F_{n,m} \subset G_{n,j}$, luego:

$$p_{n,m}(f) = \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in F_{n,m} \} \leq$$
$$\leq \sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in G_{n,j} \}, \qquad f \in E_{\mathcal{F}_2}(U,F),$$

lo que prueba la continuidad.

c) Es obvio que $\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{I}} E_{\mathcal{F}}(U,F) \subset E_c(U,F)$. Recíprocamente, sea f un elemento de $E_c(U,F)$ y consideremos, para cada par de números $n \geq 0$ y $m \geq 1$, el conjunto

$$F_{n,m} = \{ x \in U \ / \ \| D^n f(x) \| \leq m \}.$$

$F_{n,m}$ es un subconjunto cerrado de U. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m} = U.$$

Sean K un compacto de U y $n \in \{ 0, 1, 2, ...\}$. En virtud de (2.9) i), existe un número natural $m \geq 1$, tal que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} \leq m,$$

y por consiguiente, $\tilde{K} \subset F_{n,m}$.

Llamando

$$\mathcal{F} = \{ F_{n,m} \ / \ n \geq 0, m \in \mathbb{N} \}$$

se tiene que $\mathcal{F} \in \mathcal{I}$ y la función f es un elemento de $E_{\mathcal{F}}(U,F)$.

2.29.Definición.- Representaremos por τ_δ la más fina de las topologías localmente convexas en $E_c(U,F)$ para las cuales las inyecciones canónicas de $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ en $E_c(U,F)$ son continuas, cuando $\mathcal{F}$ recorre el conjunto $\mathcal{I}$ y en cada espacio $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ se considera la topología $\tau_{\mathcal{F}}$.

Observaciones.-

2.30.- La topología τ_δ es Hausdorff; basta observar que la topología τ_0 hace continuas las inyecciones de $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ en E_c (U,F), para la topología $\tau_{\mathcal{F}}$ en $E_{\mathcal{F}}(U,F)$, y por tanto, que τ_δ es más fina que τ_0.

2.31.- La topología τ_δ coincide con la topología límite inductivo de $(E_{\mathcal{F}}(U,F),\tau_{\mathcal{F}}, i_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}\in\mathcal{J}}$, donde $i_{\mathcal{F}}$ denota la inyección de $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ en E_c (U,F).

2.32.- La topología τ_δ es bornológica (es límite inductivo de topologías bornológicas).

2.33.Proposición.- $\mathfrak{M}$ es un subconjunto de E_c (U,F) acotado por la topología τ_0 si, y sólo si, es acotado por la topología τ_δ.

Demostración.- La topología τ_δ es más fina que la topología τ_0, por tanto, todo conjunto τ_δ-acotado es acotado por la topología τ_0. Veamos que todo subconjunto $\mathfrak{M}$ de E_c (U,F) que sea τ_0-acotado es acotado por τ_δ. Por la proposición 2.10, i), $\mathfrak{M}$ es un conjunto acotado por la topología u. Consideremos, para cada par de números naturales $n \geq 0$ y $m \geq 1$, el conjunto

$$F_{n,m} = \bigcap_{f\in\mathfrak{M}} \{ x \in U \;/\; \| D^n f(x) \| \leq m \}.$$

Se verifica que:

i) Para cada $n \geq 0$ y $m \geq 1$, $F_{n,m}$ es un subconjunto cerrado de U.

ii) Para cada $n \geq 0$, $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m}$.

En efecto, para cada punto $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tal que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \;/\; f \in \mathfrak{M} \} < m,$$

por tanto, $x \in F_{n,m}$.

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada compacto K de U, existe $m \in \{ 1, 2, ... \}$ tal que $\tilde{K} \subset F_{n,m}$.

En efecto, el conjunto

$$\{ D^n f(x) \;/\; x \in \tilde{K},\ f \in \mathfrak{M} \}$$

es acotado en $(L_s(^nE,F), \tau_0)$ y por tanto, acotado en norma, luego existe $m \geq 1$, que verifica:

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \;/\; x \in \tilde{K}, f \in \mathfrak{M} \} < m.$$

Entonces, llamando

$$\mathcal{F} = \{ F_{n,m} \;/\; n \geq 0,\ m \geq 1 \},$$

se verifica que $\mathcal{M}$ es un subconjunto de $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ y para cada par de números naturales $n \geq 0$, $m \geq 1$ y cada función $f \in \mathcal{M}$

$$p_{n,m}(f) \leq m.$$

2.34.Corolario.- En E_c (U,F) se tiene:

α) $\tau_0 \leq u \leq \tau_\delta$.

β) La topología τ_δ es la topología bornológica asociada a τ_0.

Demostración.- α) Por las proposiciones 2.8 y 2.9, se tiene que $\tau_0 \leq u$. Veamos que $u \leq \tau_\delta$. Para ello es suficiente demostrar que para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{J}$, la inyección canónica de $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ en E_c (U,F) es continua cuando en $E_{\mathcal{F}}(U,F)$ se considera la topología $\tau_{\mathcal{F}}$ y en E_c (U,F) se considera la topología u. Ahora bien, si K es un compacto de U y $n \geq 0$, existe $m \geq 1$ tal que

$$\tilde{K} \subset F_{n,m}, \qquad F_{n,m} \in \mathcal{F},$$

luego

$$p_{\tilde{K},n}(f) = \sup \{ \|D^n f(x)\| \ / \ x \in \tilde{K} \} \leq p_{n,m}(f), \qquad f \in E_{\mathcal{F}}(U,F),$$

lo que prueba la continuidad.

β) Es consecuencia de que la topología τ_δ es bornológica (2.32) y tiene los mismos conjuntos acotados en E_c (U,F) que la topología τ_0 (2.33).

2.35.Notaciones.- Sea G un espacio localmente convexo y separado. Por $\tau_{c_0}(G', G)$ se denota la topología en G´ de la convergencia uniforme en los subconjuntos absolutamente convexos y compactos de G. El espacio localmente convexo así obtenido se representará por G'_{c_0}. Si el espacio G es completo, la topología $\tau_{c_0}(G', G)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre las partes precompactas de G [Ho, 235] y por consiguiente, con la topología τ_0 sobre G´ (es decir, con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de G). Además, si G es un espacio completo, se tiene que:

$$\sigma(G', G) \leq \tau_{c_0}(G', G) \leq \tau(G', G),$$

donde $\tau(G', G)$ denota la topología de Mackey sobre G´, y por tanto, el dual de G'_{c_0} es el espacio G. [Ho, 235].

Si H es un nuevo espacio localmente convexo y separado, por τ_e se denota la topología sobre $L(G'_{c_0},H)$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos de G'. El espacio vectorial topológico ($L(G'_{c_0},H)$, τ_e) se denota por $G\varepsilon H$ [Ko,268].

2.36.Proposición.- Los espacios $(E_c\,(U,F),\tau_0)$ y $(E_c\,(U,\mathbb{R}),\tau_0)\varepsilon F$ son linealmente isomorfos.

Demostración.- Basta demostrar que ($E_c\,(U,F)$, τ_0) es linealmente isomorfo a $F\varepsilon(\,E_c\,(U,\mathbb{R}),\,\tau_0)$ [Ja, 349].

La demostración se realizará en varias etapas.

i) Se define la aplicación de $F\varepsilon(\,E_c\,(U,\mathbb{R}),\,\tau_0)$ en $E_c\,(U,F)$, de la forma siguiente:

Para cada $T \in L(\,F'_{c_0},\,(\,E_c\,(U,\mathbb{R}),\,\tau_0)\,)$ y cada $x \in U$, la aplicación T_x de F' en $\mathbb{R}$, definida por:

$$T_x(\varphi) = T(\varphi)\,(x), \qquad \varphi \in F',$$

es lineal. Veamos que es continua cuando en F' se considera la topología τ_{c_0}. En virtud de la continuidad de T, existen un compacto K de F y M > 0, tales que

$$p_{\{x\}}(\,T(\varphi)\,) \leq M \sup \{\, |\varphi(y)| \,/\, y \in K \,\}, \qquad \varphi \in F',$$

luego

$$|T_x(\varphi)| \leq M \sup \{\, |\varphi(y)| \,/\, y \in K \,\}, \qquad \varphi \in F'.$$

Se ha demostrado así que T_x es un elemento del dual topológico de F'_{c_0}, y teniendo en cuenta los comentarios hechos en (2.35), T_x es un elemento de F.

Veamos que la aplicación

$$g_T:\ x \in U \longrightarrow T_x \in F,$$

es un elemento de $E_c\,(U,F)$. Basta demostrar que para cada $\varphi \in F'$, $\varphi \circ g_T \in E_c\,(U,\mathbb{R})$ (1.14). Puesto que la topología $\tau_{c_0}(F', F)$ es compatible con la dualidad, para cada $\varphi \in F'$,

$$\varphi(T_x) = T_x(\varphi) = T(\varphi)\,(x),$$

luego $\varphi \circ g_T(x) = \varphi(T_x) = T(\varphi)\,(x)$, para cada $x \in U$ y $\varphi \in F'$, obteniéndose que:

$$\varphi \circ g_T = T(\varphi) \in E_c\,(U,\mathbb{R}).$$

Se define entonces la aplicación g de $F\varepsilon(\,E_c\,(U,\mathbb{R}),\,\tau_0)$ en $E_c\,(U,F)$, por: $g(T) = g_T$.

ii) g es lineal e inyectiva.

Es obvio que la aplicación g es lineal. Por otra parte, si $g(T) = 0$ para algún

$T \in F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0)$, entonces para cada $\varphi \in F'$ y cada $x \in U$,

$$T(\varphi)(x) = \varphi \circ g_T(x) = \varphi(0) = 0,$$

luego $T(\varphi) = 0$ para cada $\varphi \in F'$, lo que prueba que $T = 0$.

iii) La aplicación g es continua cuando en $L(F'_{c_0}, (E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0))$ se considera la topología τ_e (topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos equicontinuos de F').

Sea $\varepsilon > 0$;

a) Si $n = 0$ y K es un compacto de U, el conjunto

$$\{ T \in F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0) \ / \ \sup \{ p_{\tilde{K}}(T(\varphi)) \ / \ \varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ \} < 1 \}$$

es un entorno de 0 en $F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0)$.

Ahora bien, si

$$\sup \{ | T(\varphi)(x) | \ / \ x \in \tilde{K}, \ \varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ \} < 1,$$

para cada $x \in \tilde{K}$ se tiene que:

$$| \varphi \circ g_T (x) | \leq 1$$

cualquiera que sea $\varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ$. Por tanto, $g_T(x)$ es un elemento de $B(0,\varepsilon)^{\circ\circ}$, $x \in \tilde{K}$ y se obtiene:

$$p_{\tilde{K}}(g_T) = \sup \{ \| g_T (x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} \leq \varepsilon.$$

b) Si $n \geq 1$, K es un compacto de U y H un compacto de $E \times \overset{n)}{\cdots} \times E$, el conjunto

$$\{ T \in F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0) \ / \ \sup \{ p_{\tilde{K},n,H}(T(\varphi)) \ / \ \varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ \} < 1 \}$$

es un entorno de 0 en $F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0)$.

Si $\sup \{ p_{\tilde{K},n,H}(T(\varphi)) \ / \ \varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ \} < 1$, se tiene que para cada $x \in \tilde{K}$, $h \in H$ y $\varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ$,

$$| D^n(T(\varphi))(x)(h) | = | \varphi \circ D^n g_T(x)(h) | < 1.$$

Por tanto, $D^n g_T (x)(h) \in B(0,\varepsilon)^{\circ\circ}$, cualquiera que sean $x \in \tilde{K}$, $h \in H$, y se deduce que

$$p_{\tilde{K},n,H}(g_T) = \sup_{x \in \tilde{K}} \{ \sup \{ \| D^n g_T (x)(h) \| \ / \ h \in H \} \} \leq \varepsilon.$$

iv) Se obtiene la función inversa de g del siguiente modo:

Para cada $f \in E_c (U,F)$, la aplicación L_f de F' en $E_c (U,\mathbb{R})$, definida por:

$$L_f(\varphi) = \varphi \circ f,$$

es lineal. Veamos que es continua cuando en F' se considera la topología $\tau_{c_0}(F', F)$ y en $E_c(U,F)$ se considera la topología τ_0.

a) Si K es un compacto de U,

$$\sup_{x\in\tilde{K}} \{ | L_f(\varphi)(x) | \} = \sup_{x\in\tilde{K}} |\varphi\circ f(x)| \leq \sup\{ |\varphi(y)| \,/\, y \in \tilde{K} \cup \{0\} \}.$$

b) Si K es un compacto de U, $n \geq 1$ y H es un compacto de $E \,x\overset{n)}{\cdots}x\, E$, puesto que la aplicación h_n de $(\tilde{K} \cup \{0\}) \times H$ en F, definida por:

$$(x, y) \longrightarrow D^n f(x)(y)$$

es continua (2.11), el conjunto $G = h_n((\tilde{K} \cup \{0\}) \times H)$ es un compacto de F y

$$p_{\tilde{K},n,H}(\varphi\circ f) \leq \sup\{ |\varphi(y)| \,/\, y \in G \}$$

Entonces, la aplicación L de $E_c(U,F)$ en $F\varepsilon(E_c(U,\mathbb{R}), \tau_0)$, definida por $L(f) = L_f$ es lineal.

c) Si $f \in E_c(U,F)$, $g\circ L(f) = f$.

En efecto, para cada $x \in U$ y $\varphi \in F'$,

$$\varphi((g\circ L(f))(x)) = \varphi((g(L_f))(x)) = \varphi(g_{L_f}(x)) =$$

$$= \varphi((L_f)_x) = L_f(\varphi)(x) = \varphi\circ f(x),$$

luego para cada $x \in U$,

$$(g\circ L)(f)(x) = f(x).$$

d) Si $T \in F\varepsilon(E_c(U,\mathbb{R}), \tau_0)$, $L\circ g(T) = T$.

En efecto, si $\varphi \in F'$,

$$(L\circ g(T))(\varphi) = (L(g_T))(\varphi) = L_{g_T}(\varphi) = g_T\circ\varphi = T(\varphi).$$

v) La aplicación L es continua cuando en $E_c(U,F)$ se considera la topología τ_0.

Si se consideran las aplicaciones de $L(F'_{c_0}, (E_c(U,\mathbb{R}), \tau_0))$ en $[0,+\infty)$:

$$p_{K,V}(T) = \sup\{ |(T(\varphi))(x)| \,/\, \varphi \in V^\circ,\ x \in \tilde{K} \},$$

donde K es un compacto de U y V un entorno de 0 en F,

$$p_{K,n,H,V}(T) = \sup\{ |D^n(T(\varphi))(x)(y)| \,/\, \varphi \in V^\circ,\ x \in \tilde{K},\ y \in H \},$$

donde K es un compacto de U, $n \geq 1$, H es un compacto de $E \,x\overset{n)}{\cdots}x\, E$ y V es un entorno de 0 en F, la familia de seminormas

$$\{ p_{K,V} \,/\, \text{K compacto de U, V entorno de 0 en F} \} \cup$$

$$\cup \{ p_{K,n,H,V} \,/\, \text{K compacto de U, } n \geq 1, \text{ H compacto de } Ex\overset{n)}{\cdots}xE, \text{ V entorno de } 0_F \},$$

dota a $L(F'_{c_0}, (E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0))$ de la topología τ_e.

Sean, entonces, V un entorno de 0 en F y K un compacto de U. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset V$, luego $V^\circ \subset B(0,\varepsilon)^\circ \subset B_{F'}(0,\frac{1}{\varepsilon})$ [1]. Se verifican las siguientes desigualdades:

a)
$$p_{K,V} (L_f) = \sup \{ | L_f (\varphi) (x) | \ / \ x \in \tilde{K}, \ \varphi \in V^\circ \} =$$
$$= \sup \{ | \varphi(f(x)) | \ / \ x \in \tilde{K}, \ \varphi \in V^\circ \} \leq$$
$$\leq \sup \{ \| \varphi \| \ / \ \varphi \in V^\circ \} \, p_{\tilde{K}}(f) \leq \frac{1}{\varepsilon} \, p_{\tilde{K}}(f).$$

b) Si $n \geq 1$ y H es un compacto de $E x \overset{n)}{\dots} x E$,
$$p_{K,n,H,V}(L_f) = \sup \{ | D^n(L_f (\varphi)) (x) (y) | \ / \ x \in \tilde{K}, y \in H, \varphi \in V^\circ \} =$$
$$= \sup \{ | D^n(\varphi \circ f) (x) (y) | \ / \ x \in \tilde{K}, y \in H, \ \varphi \in V^\circ \} =$$
$$= \sup \{ | \varphi(D^n f(x) (y)) | \ / \ x \in \tilde{K}, y \in H, \ \varphi \in V^\circ \} \leq$$
$$\leq \sup \{ \| \varphi \| \ / \ \varphi \in V^\circ \} \, p_{\tilde{K},n,H}(f) \leq \frac{1}{\varepsilon} \, p_{\tilde{K},n,H}(f).$$

2.37.Notaciones.- Para cada $n \geq 0$ denotaremos por $P_K(^nE,F)$ el espacio de los polinomios n-homogéneos continuos P de E en F, que verifican la siguiente condición: para cada $x \in E$ existe un entorno V de x en E tal que P(V) es relativamente compacto en F. Si n = 0, $P_K(^nE,F)$ coincide con F como espacio vectorial. [A.2, 216].

$P_K(^nE,F)$ es un subespacio vectorial de $P(^nE,F)$.

2.38.Definición.- Se define el espacio $E_c^K(U,F)$ como el espacio vectorial de las funciones $f \in E_c (U,F)$ tales que para cada $x \in U$ y cada número natural $n \geq 0$, $D^n f(x) \in P_K(^nE,F)$.

2.39.Observación.- $E_c^K(U,F)$ es un subespacio vectorial de $E_c (U,F)$. Denotaremos por u la topología que induce en $E_c^K(U,F)$ el espacio $(E_c (U,F), u)$ y el espacio localmente convexo así obtenido se representará por $(E_c^K(U,F), u)$.

[1] $B_{F'}(0,\frac{1}{\varepsilon})$ denota la correspondiente bola cerrada en F´, cuando en este espacio se considera la topología de la norma.

2.40.Lema.- Si $f \in E_c^K(U,F)$, para cada $n \geq 0$ se tiene que $D^n f(0) \in P_K(^nE,F)$.

Demostración.- Nos basta ver que para cada $n \geq 1$, $D^n f(0)$ ($B(0,1) \times \overset{n)}{\ldots} \times B(0,1)$) es relativamente compacto en F. En efecto: supongamos que $\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $D^n f(0)$ ($B(0,1) \times \overset{n)}{\ldots} \times B(0,1)$); entonces para cada $p = 1, 2, \ldots$, existe $h_p \in B(0,1) \times \overset{n)}{\ldots} \times B(0,1)$ tal que $D^n f(0)(h_p) = y_p$.

Sea K un compacto de U y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $\tilde{K}$ que converge hacia 0. Un proceso diagonal prueba que existe una subsucesión $\{h_{p_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{h_p\}_{p=1}^{\infty}$ tal que $\{D^n f(x_i)(h_{p_j})\}_{j=1}^{\infty}$ converge hacia un elemento $e_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots$ Como

$$\lim_{i \to \infty} D^n f(x_i) = D^n f(0)$$

por la topología de la norma en $L_s(^nE,F)$, resulta que la sucesión $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es de Cauchy en F, luego converge hacia un elemento $e \in F$. Por último,

$$\| D^n f(0)\,(h_{p_j}) - e \| \leq \| D^n f(0)\,(h_{p_j}) - D^n f(x_i)(h_{p_j}) \| + \| D^n f(x_i)(h_{p_j}) - e_i \| + \| e_i - e \|$$

deduciéndose que $\{D^n f(0)(h_{p_j})\}_{j=1}^{\infty}$ converge en F.

2.41.Proposición.- Los espacios $(E_c(U,\mathbb{R}),u)\varepsilon F$ y $(E_c^K(U,F),u)$ son linealmente isomorfos.

Demostración.- Basta demostrar que $F\varepsilon(E_c(U,\mathbb{R}), u)$ y $(E_c^K(U,F), u)$ son linealmente isomorfos.

La demostración se hará en diversas etapas.

i) Puesto que la topología u en $E_c(U,\mathbb{R})$ es más fina que la topología τ_0, se tiene que:

$$L(F'_{c_0}, (E_c(U,\mathbb{R}), u)) \subset L(F'_{c_0}, (E_c(U,\mathbb{R}), \tau_0)),$$

luego la restricción de la función g, definida en (2.36) i), a $L(F'_{c_0}, (E_c(U,\mathbb{R}), u))$ es una aplicación lineal de este último espacio en $E_c(U,F)$. Llamaremos también g a dicha restricción.

ii) Para cada $T \in L(F'_{c_0}, (E_c(U,\mathbb{R}), u))$, $g_T \in E_c^K(U,F)$.

Basta demostrar que si $n \geq 1$ y $x \in U$, $D^n g_T(x)$ ($\overset{\circ}{B}(0,1)$) es relativamente compacto en F.

Sean $n \geq 1$ y $x \in U$; en virtud de la continuidad de T, existen un compacto, convexo y equilibrado J de F y $\delta > 0$, tales que si $\varphi \in F'$ y

$$\sup \{ | \varphi(y) | \, / \, y \in J \} \leq \delta,$$

se tiene que:

$$p_{\widetilde{\{x\}},n}(T(\varphi)) = \sup \{ \| D^n(T(\varphi)) (\lambda x) \| \, / \, \lambda \in (0,1] \} \leq 1.$$

El conjunto $M = \frac{1}{\delta} J$ es compacto, convexo y equilibrado en F. Además, si $\varphi \in M^\circ$, se verifica:

$$\| D^n(T(\varphi)) (x) \| \leq 1. \qquad (1)$$

Veamos que si $y \in E$, con $\|y\| \leq 1$, $D^n g_T (x) (y) \in M$. En otro caso, existe $\varphi \in M^\circ$ tal que: [2]

$$| \varphi(D^n g_T(x) (y) | > 1, \qquad (2)$$

pero

$$\varphi(D^n g_T(x) (y)) = D^n(\varphi \circ g_T) (x) (y) = D^n(T(\varphi)) (x) (y),$$

luego (2) contradice (1).

iii) La aplicación g es continua cuando en $L(F'_{c_0}, (E_c (U,F), u))$ se considera la topología τ_e y en $E_c^K (U,F)$ se considera la topología u.

Sean $\varepsilon > 0$ y K un compacto de U;

a) Si $n = 0$, el conjunto

$$V = \{ T \in F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), u) \, / \, \sup \{ p_K(T(\varphi)) \, / \, \varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ \} < 1 \}$$

es un entorno de 0 en $F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), u)$.

Para cada $x \in \tilde{K}$ y cada $T \in V$,

$$| (T(\varphi)) (x) | = | \varphi(g_T (x)) | \leq 1,$$

cualquiera que sea $\varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ$, por tanto, $g_T(x) \in B(0,\varepsilon)^{\circ\circ}$, $x \in \tilde{K}$ y se deduce que:

$$p_K(g_T) = \sup \{ \| g_T(x) \| \, / \, x \in \tilde{K} \} \leq \varepsilon.$$

b) Si $n \geq 1$, el conjunto

$$V = \{ T \in F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), u) \, / \, \sup \{ p_{K,n}(T(\varphi)) \, / \, \varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ \} < 1 \}$$

es un entorno de 0 en $F\varepsilon(E_c (U,\mathbb{R}), u)$.

---

[2] $M = M^{\circ\circ}$.

Para cada $T \in V$, $x \in \tilde{K}$, $(h_1, ..., h_n) \in E \times \overset{n)}{\cdots} \times E$ con $\|h_i\| \leq 1$, $i = 1, 2, ..., n$, se tiene que:

$$| D^n(T(\varphi)) (x) (h_1, h_2, ..., h_n) | = | \varphi(D^n g_T(x) (h_1, h_2, ..., h_n) | \leq 1,$$

cualquiera que sea $\varphi \in B(0,\varepsilon)^\circ$.

Se deduce entonces que $D^n g_T(x) (h_1, h_2, ..., h_n) \in B(0,\varepsilon)^{\circ\circ}$, para cada $x \in \tilde{K}$, $h_1, h_2, ..., h_n \in \overset{\circ}{B}(0,1)$, obteniéndose que:

$$p_{K,n}(g_T) = \sup \{ | D^n g_T(x) (h_1, h_2, ..., h_n) | \,/\, x \in \tilde{K}, h_i \in \overset{\circ}{B}(0,1) \} \leq \varepsilon.$$

a) y b) prueban la continuidad de g.

iv) La aplicación g es suprayectiva.

En virtud de (2.36) iv), es suficiente demostrar que si se considera la aplicación L de $E_c(U,F)$ en $L(F'_{c_0}, (E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0))$, definida por $L(f) = L_f$, para cada $f \in E^K_c(U,F)$ $L_f \in L(F'_{c_0}, (E_c (U,\mathbb{R}), u))$.

Sean $f \in E^K_c(U,F)$, K un compacto de U y $n \geq 0$.

a) La imagen de $(\tilde{K} \cup \{0\}) \times B(0,1) \times \overset{n)}{\cdots} \times B(0,1)$ por la aplicación H_n, definida por:

$$(x,h_1, h_2, ..., h_n) \longrightarrow D^n f(x) (h_1, h_2, ..., h_n) \in F$$

es un subconjunto relativamente compacto de F.

En efecto, sea $\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $H_n((\tilde{K}\cup\{0\}) \times B(0,1)^n)$ y consideremos, para cada $p \in \mathbb{N}$, $(x_p,h^p) \in (\tilde{K}\cup\{0\}) \times B(0,1) \times \overset{n)}{\cdots} \times B(0,1)$, tales que:

$$H_n((x_p,h^p)) = y_p.$$

Existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ que converge hacia un punto $x \in \tilde{K}\cup\{0\}$.

En virtud del lema 2.40, el conjunto

$$\{ D^n f(x) (y) \,/\, y \in B(0,1) \times \overset{n)}{\cdots} \times B(0,1) \}$$

es relativamente compacto y por tanto, existe una subsucesión $\{h_{p_{j_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{h_{p_j}\}_{j=1}^{\infty}$, verificando que $\{D^n f(x) (h_{p_{j_l}})\}_{l=1}^{\infty}$ converge hacia un elemento e de F.

Entonces:

$$\| D^n f(x_{p_{j_l}}) (h_{p_{j_l}}) - e \| \leq \| D^n f(x_{p_{j_l}}) (h_{p_{j_l}}) - D^n f(x) (h_{p_{j_l}}) \| + \| D^n f(x) (h_{p_{j_l}}) - e \| \leq$$

$$\leq \| D^n f(x_{p_{j_l}}) - D^n f(x) \| + \| D^n f(x) (h_{p_{j_l}}) - e \|,$$

deduciéndose a).

Existe un compacto G de F tal que $H_n((\tilde{K}\cup\{0\}) \times B(0,1) \times \overset{n)}{\cdots} \times B(0,1)) \subset G$, luego:

$$\sup \{ \| D^n(L_f(\varphi))(x) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} = \sup \{ \| \varphi(D^nf(x)) \| \ / \ x \in \tilde{K} \} =$$
$$= \sup \{ | \varphi(D^nf(x)(y)) | \ / \ x \in \tilde{K}, \ y \in B(0,1) \times \overset{n)}{\cdots} \times B(0,1) \} \leq$$
$$\leq \sup \{ | \varphi(y) | \ / \ y \in G \},$$

y se obtiene que L_f es continua cuando en $E_c(U,F)$ se considera la topología u.

v) La restricción de L a $E_c^K(U,F)$ es continua cuando en $E_c^K(U,F)$ se considera la topología u y en $L(F'_{c_0}, (E_c(U,\mathbb{R}), u))$ se considera la topología τ_e.

La topología de $F\varepsilon(E_c(U,\mathbb{R}), u)$ viene dada por la familia de seminormas

$$\{ p_{K,V} \ / \ K \text{ compacto de } U, V \text{ entorno de } 0 \text{ en } F \} \cup$$
$$\cup \{ p_{K,n,V} \ / \ K \text{ compacto de } U, \ n \geq 1, V \text{ entorno de } 0 \text{ en } F \},$$

definidas por:

$$p_{K,V}(T) = \sup \{ | (T(\varphi))(x) | \ / \ \varphi \in V^\circ, \ x \in \tilde{K} \}$$

$$p_{K,n,V}(T) = \sup \{ \| D^n(T(\varphi))(x) \| \ / \ \varphi \in V^\circ, \ x \in \tilde{K} \}.$$

Sea V un entorno de 0 en F y K un compacto de U. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset V$, luego $V^\circ \subset B(0,\varepsilon)^\circ \subset B_{F'}(0,\frac{1}{\varepsilon})^\circ$.

a) Se tiene:

$$p_{K,V}(L_f) = \sup \{ | L_f(\varphi)(x) | \ / \ x \in \tilde{K}, \ \varphi \in V^\circ \} =$$
$$= \sup \{ | \varphi(f(x)) | \ / \ x \in \tilde{K}, \ \varphi \in V^\circ \} \leq$$
$$\leq \sup \{ \| \varphi \| \ / \ \varphi \in V^\circ \} \, p_K(f) \leq \frac{1}{\varepsilon} \, p_K(f).$$

b) Si $n \geq 1$,

$$p_{K,n,V}(L_f) = \sup \{ \| D^n(\varphi \circ f)(x) \| \ / \ x \in \tilde{K}, \ \varphi \in V^\circ \} =$$
$$= \sup \{ \| \varphi(D^nf(x)) \| \ / \ x \in \tilde{K}, \ \varphi \in V^\circ \} \leq \frac{1}{\varepsilon} \, p_{K,n}(f).$$

2.42.Corolario.- $(E_c^K(U,F),u)$ (resp. $(E_c(U,F),\tau_0)$) tiene la propiedad de aproximación si, y sólo si, $(E_c^K(U,\mathbb{R}),u) \otimes F$ es denso en $(E_c^K(U,F),u)$, (resp. $(E_c(U,\mathbb{R}),\tau_0) \otimes F$) es denso en $(E_c(U,F),\tau_0)$) para cada espacio de Banach F [Ja,400].

3.DETERMINACION DE FUNCIONES C^{∞}

CON COTAS PREFIJADAS

En este capítulo E y F serán espacios de Banach reales y U un abierto conexo de E. Si $E = F = \mathbb{R}$, I es un intervalo cualquiera de $\mathbb{R}$ y $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números reales estrictamente positivos, se define la clase $C\{M_n\}$ sobre el intervalo I como el conjunto de todas las funciones f de clase C^{∞} en I, que verifican la siguiente propiedad: existen constantes k y β positivas (que dependen de f), tales que:

$$|f^{n)}(x)| \leq \beta k^n M_n \qquad x \in I,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ [R,359] y [Ma,100].}$$

En 1.912, Hadamard plantea el siguiente problema: determinar condiciones necesarias y suficientes sobre la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ para que toda función de clase C^{∞} perteneciente a $C\{M_n\}$ sobre un intervalo I, que se anulase, junto con sus derivadas, en un punto x_0 de I, fuese idénticamente nula. Una clase que verifique esta propiedad se denomina casi-analítica. Carleman resolvió completamente el problema, dando una condición necesaria y suficiente [Ca]. Posteriormente, Mandelbrojt [Ma], Bang [Bg] y Ostrowski [O], dieron nuevas condiciones. Kopeć extendió el problema a funciones $C^{\infty}(I,F)$, donde F es un espacio de Banach y lo resolvió obteniendo las mismas condiciones [Ko]. Cuando F es un espacio de Banach, cada una de las condiciones siguientes es necesaria y suficiente para que la clase $C\{M_n\}$ sea casi-analítica:

1) Si $\beta_n = \inf_{k \geq n} M_k^{1/k}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = +\infty$.

2) $\underline{\lim}_{n \to \infty} M_n^{1/n} < +\infty$ ó si $\lim_{n \to \infty} M_n^{1/n} = +\infty$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} \right) = +\infty$$

donde $\{M_n^c\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión regularizada por medio del logarítmo de la sucesión

$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ [Ma,17].

3) $\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n^{1/n} < +\infty$ ó si $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = +\infty$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(M_n^c)^{1/n}} = +\infty.$$

4) Si $T(r) = \sup_{n\geq 1} \frac{r^n}{M_n}$, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty.$

En lo que sigue, llamaremos condición (c.a) a una de las cuatro condiciones anteriores.

En este capítulo se abordará el problema de las clases casi-analíticas cuando E y F son espacios de Banach reales y U es un abierto conexo de E. Asimismo, se resuelven ciertas cuestiones relativas a las clases casi-analíticas en el contexto indicado.

3.1.Definición.- Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Denotaremos por:

1.- $C_{U,F}\{M_n\}$ a la clase de las funciones $f \in C^{\infty}(U,F)$ tales que existen constantes $k > 0$ y $\beta > 0$, que dependen de f, con

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| / \ x \in U \} \leq \beta\ k^n M_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2.- $C_{U,F}\{M_n\}_K$ a la clase de las funciones $f \in C^{\infty}(U,F)$ verificando que para cada compacto K de U, existen constantes $k > 0$ y $\beta > 0$, que dependen de f y de K, tales que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| / \ x \in K \} \leq \beta\ k^n M_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Cuando F sea el cuerpo de los números reales, se escribirá $C_U\{M_n\}$ y $C_U\{M_n\}_K$, en lugar de $C_{U,\mathbb{R}}\{M_n\}$ y $C_{U,\mathbb{R}}\{M_n\}_K$, respectivamente.

Observaciones.-

3.2.- $C_{U,F}\{M_n\} \subset C_{U,F}\{M_n\}_K$.

3.3.- En general, $C_{U,F}\{M_n\}$ y $C_{U,F}\{M_n\}_K$ son distintos.

En efecto, la función e^x está en $C_{\mathbb{R}}\{1\}_K$, pero no pertenece a la clase $C_{\mathbb{R}}\{1\}$.

3.4.- La clase $C_{U,F}\{M_n\}_K$ se puede definir también como la clase de las funciones $f \in C^{\infty}(U,F)$ tales que para cada punto $x \in U$ existe una bola abierta $\mathring{B}(x,\delta)$, contenida en U, con $f \in C_{\mathring{B}(x,\delta),F}\{M_n\}$.

Resulta evidente que toda función que cumpla la condición anterior está en $C_{U,F}\{M_n\}_K$, puesto que todo compacto de U está recubierto por un número finito de tales bolas abiertas.

Por otra parte, si $f \in C_{U,F}\{M_n\}_K$ y se supone que existe un punto $x_0 \in U$ tal que $f \notin C^{\circ}_{B(x_0,\delta),F}\{M_n\}$ para cada $\delta > 0$ con $\mathring{B}(x_0,\delta) \subset U$, tendríamos para cada $r > 0$

$$\sup \left\{ \frac{\| D^n f(x) \|}{M_n r^n} \;/\; \|x - x_0\| < \delta ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \right\} = +\infty, \qquad \delta > 0.$$

Sea entonces $\rho > 0$ tal que $\mathring{B}(x_0,\rho) \subset U$; para cada $m = 1, 2, \ldots$, existe $n(m) \in \mathbb{N}$ y $x_m \in U$ con $\|x - x_0\| < \rho/m$ y tal que

$$\frac{\| D^{n(m)} f(x_m) \|}{M_{n(m)}\, m^{n(m)}} > m \tag{1}$$

El conjunto $K = \{ x_m, m = 1, 2, \ldots \} \cup \{x_0\}$ es un compacto de U, por tanto, existen $q, m \in \{ 1, 2, \ldots \}$, verificando:

$$\frac{\| D^n f(x) \|}{M_n q^n} \leq m, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

lo que está en contradicción con (1).

3.5.Definición.- Sea U un abierto conexo de E. Se dice que la clase $C_{U,F}\{M_n\}_K$ (respec. $C_{U,F}\{M_n\}$) es casi-analítica si para cada función $f \in C_{U,F}\{M_n\}_K$ (respec. $f \in C_{U,F}\{M_n\}$) para la que existe un punto $a \in U$ con

$$f(a) = 0, \quad Df(a) = 0, \quad \ldots, \quad D^n f(a) = 0, \ldots$$

se tiene que f es idénticamente nula en U.

3.6.Lema.- Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos e I un intervalo de $\mathbb{R}$. Son equivalentes:

α) $C_{I,F}\{M_n\}_K$ es casi-analítica.

β) La sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica la condición (c.a.).

Demostración.- $\alpha) \Rightarrow \beta$) Si $C_{I,F}\{M_n\}_K$ es casi-analítica, también lo es la clase $C_{I,F}\{M_n\}$ y en virtud de [Ko], la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica la condición (c.a.).

$\beta) \Rightarrow \alpha$) Sea f una función de $C_{I,F}\{M_n\}_K$ para la que existe un punto $a \in I$ con

$$f(a) = 0, \quad Df(a) = 0, \quad \ldots, \quad D^n f(a) = 0, \ldots$$

Para cada intervalo compacto J contenido en I, tal que $a \in J$, se tiene $f \in C_{J,F}\{M_n\}$ y puesto que la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ cumple la condición (c.a.), f es idénticamente nula en J [Ko]. Como I es unión de intervalos compactos conteniendo al punto a, f es idénticamente nula en I y se deduce la casi-analiticidad de la clase $C_{I,F}\{M_n\}_K$.

3.7.Teorema.- Si $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números reales estrictamente positivos y U un abierto conexo de E, son equivalentes:

α) $C_{U,F}\{M_n\}_K$ es casi-analítica.

β) $C_{U,F}\{M_n\}$ es casi-analítica.

γ) La sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ cumple la condición (c.a.).

Demostración.- Se demostrará que α) ⇛ β) ⇛ γ) ⇛ α).

α) ⇛ β) Puesto que $C_{U,F}\{M_n\} \subset C_{U,F}\{M_n\}_K$, la casi-analiticidad de la clase $C_{U,F}\{M_n\}_K$ implica trivialmente la casi-analiticidad de $C_{U,F}\{M_n\}$.

β) ⇛ γ) Sea $\varphi \in E'$ con $\|\varphi\| = 1$; $\varphi(U)$ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Veamos que la clase $C_{\varphi(U),F}\{M_n\}$ es casi-analítica. En efecto, sea g una función de la clase $C_{\varphi(U),F}\{M_n\}$, tal que existe un punto $b \in \varphi(U)$, con

$$g(b) = 0, \quad Dg(b) = 0, \quad ..., \quad D^n g(b) = 0, \quad ...$$

La función $g\circ\varphi \in C^\infty(U,F)$. Además, para cada $n \geq 0$,

$$\| D^n(g\circ\varphi)(x) \| = \| D^n g(\varphi(x))\circ\varphi^n \| \leq \| D^n g(\varphi(x)) \|$$

por tanto, $g\circ\varphi \in C_{U,F}\{M_n\}$. Sea a un punto de U con $\varphi(a) = b$. Entonces:

$$g\circ\varphi(a) = 0, \quad D(g\circ\varphi)(a) = 0, \quad ..., \quad D^n(g\circ\varphi)(a) = 0, \quad ...$$

En virtud de β), $g\circ\varphi$ es idénticamente nula en U, por consiguiente, g es idénticamente nula en $\varphi(U)$. Se deduce que la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica la condición (c.a.) [Ko].

γ) ⇛ α) Sea f una función de $C_{U,F}\{M_n\}_K$ tal que existe un punto $a \in U$ con

$$f(a) = 0, \quad Df(a) = 0, \quad ..., \quad D^n f(a) = 0, ...$$

Veamos que f es nula en U. Realizaremos la demostración en dos etapas.

i) Si U es un abierto convexo de un espacio de Banach E, para cada $h \in E$, de norma 1, el conjunto:

$$U_h = \{ \lambda \in \mathbb{R} \ / a + \lambda h \in U \}$$

es un abierto convexo de $\mathbb{R}$ y por tanto, un intervalo. Si J es un intervalo compacto de U_h, el conjunto

$$\{ a + \lambda h \ / \ \lambda \in J \}$$

es un compacto de U.

La función f_h definida en U_h por:

$$\lambda \longrightarrow f(a + \lambda h)$$

es de clase C^∞ en U_h. Además, si $\lambda \in U_h$ y $n \geq 1$,

$$\| D^n f_h(\lambda) \| = \| D^n f(a + \lambda h)(h, ..., h) \| \leq \| D^n f(a + \lambda h) \|.$$

Entonces, $f_h \in C_{U_h,F}\{M_n\}_K$ y puesto que $D^n f_h(0) = 0$, $n = 1, 2, ...,$ en virtud de (3.7) se tiene que la función f_h es idénticamente nula en U_h. (1)

Por otra parte,

$$U = \cup \{ U_h \ / \ h \in E, \|h\| = 1 \} \qquad (2)$$

En efecto, si $x \in U$ y $x \neq a$,

$$x = a + (x - a) = a + \| x - a \| \frac{x - a}{\| x - a \|}$$

Como consecuencia de (1) y (2), f es la función nula en U.

ii) Si U es un abierto conexo de E, existe una bola abierta, $\overset{\circ}{B}(a,r) \subset U$. La función f está en $C_{\overset{\circ}{B}(a,r),F}\{M_n\}_K$; en virtud de i), f es idénticamente nula en $\overset{\circ}{B}(a,r)$.

Consideremos el conjunto

$$D = \{ z \in U / \text{ existe } \overset{\circ}{B}(z,\delta) \subset U \text{ y } f|_{\overset{\circ}{B}(z,\delta)} = 0 \}.$$

D es abierto en U y no vacío. Veamos que D es cerrado en U; si z_0 es un punto de la adherencia de D en U, existe $\overset{\circ}{B}(z_0,\delta_1) \subset U$ y un punto z de $\overset{\circ}{B}(z_0,\delta_1) \cap D$. Entonces, $f \in C_{\overset{\circ}{B}(z_0,\delta_1),F}\{M_n\}$ y

$$D^n f(z) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Como consecuencia de i), $f|_{\overset{\circ}{B}(z_0,\delta_1)} = 0$ y por tanto, $z_0 \in D$.

Se ha demostrado así que D = U, luego f es idénticamente cero en U.

3.8.Teorema.- Sean U un abierto convexo de E y $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números reales estrictamente positivos verificando la condición (c.a.). Si f es una función de $E_c(U,F)$ con $D^n f(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, ...,$ y tal que para cada compacto H de U existen constantes estrictamente positivas β y k (que dependen de H) verificando

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \ / x \in \tilde{H} \} \leq \beta k^n M_n,$$

entonces f es idénticamente nula en U.

Demostración.- Sean $x \in U$ y f_x la función definida en [0,1] por

$$f_x(\lambda) = f(\lambda x), \quad \lambda \neq 0$$
$$f_x(0) = f(0)$$

la función f_x es de clase C^∞ en $(0,1]$ y para cada $n \geq 0$,

$$D^n f_x(\lambda) = D^n f(\lambda x)(x, \overset{n)}{\dots}, x), \qquad \lambda \in (0,1].$$

Se tiene entonces que

$$\lim_{\lambda \to 0} D^n f_x(\lambda) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \{\tilde{x}\}}} D^n f(y)(x, \overset{n)}{\dots}, x) = 0,$$

deduciéndose que $f_x \in C^\infty([0,1],F)$. (1)

Por otra parte, existen constantes $\beta(x) > 0$ y $k(x) > 0$, tales que

$$\| D^n f(\lambda x) \| \leq \beta(x)\, k(x)^n M_n, \qquad n = 0,1,2,\dots, \quad \lambda \in (0,1]$$

luego para cada $n \geq 0$, $\lambda \in (0,1]$, se tiene

$$\| D^n f_x(\lambda) \| \leq \| D^n f(\lambda x) \| \, \|x\|^n \leq \beta(x)\, k(x)^n M_n \|x\|^n \qquad (2)$$

lo que implica que:

$$\| D^n f_x(0) \| \leq \beta(x)\, k(x)^n M_n \|x\|^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3) se sigue que $f_x \in C_{[0,1],F}\{M_n\}$. Como la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ verifica la condición (c.a.) y para cada $n \geq 0$ y cada $x \in U$

$$D^n f_x(0) = 0,$$

resulta que f_x es idénticamente nula en $[0,1]$. En particular, $f_x(1) = f(x) = 0$.

Observaciones.-

3.9.- Es conocido [R,361] que la clase $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ es no casi-analítica si, y sólo si, existe una función de la clase, no idénticamente nula, de soporte compacto. Aún más, si $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ es no casi-analítica, para cada abierto acotado U de $\mathbb{R}$, existe una función de la clase, de soporte compacto y tal que $f|_U = 1$.

3.10.- La clase $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}_K$ es casi-analítica si, y sólo si, la única función de soporte compacto contenida en $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}_K$ es la función nula.

Demostración.- Es obvio que si la clase $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}_K$ es casi-analítica y f es una función de la clase, de soporte compacto, entonces f es nula en $\mathbb{R}$. El resultado recíproco es consecuencia de que las funciones de $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ de soporte compacto están en $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}_K$ y de la observación anterior.

3..11.- Por las observaciones anteriores, se tiene que la clase $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ (respec. $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}_K$) es no casi-analítica si, y sólo si, existe una función de la clase, anulándose en un abierto de $\mathbb{R}$ y no idénticamente nula.

3.12.Proposición.- $C_{E,F}\{M_n\}$ (respec. $C_{E,F}\{M_n\}_K$) es casi-analítica si, y sólo si, para cada función $f \in C_{E,F}\{M_n\}$ (respec. $C_{E,F}\{M_n\}_K$) tal que existe un abierto V de E con $f|_V = 0$, es f idénticamente nula en E.

Demostración.- Es evidente que si la clase $C_{E,F}\{M_n\}$ (respec. $C_{E,F}\{M_n\}_K$) es casi-analítica y f es una función de $C_{E,F}\{M_n\}$ (respec. $C_{E,F}\{M_n\}_K$) tal que existe un abierto V de E con $f|_V = 0$, por la definición de casi-analiticidad es $f = 0$ en E.

Veamos la otra implicación; si $C_{E,F}\{M_n\}$ (respec. $C_{E,F}\{M_n\}_K$) no es casi-analítica, tampoco lo es $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$. Existe $f \in C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$, de soporte compacto y no idénticamente nula. Sea $\varphi \in E'$ con $\|\varphi\| = 1$; la función $f\circ\varphi \in C_{E,\mathbb{R}}\{M_n\}_K$, se anula en un abierto de E y no es idénticamente nula en E. Por último, si b es un elemento de F con $b \neq 0$, la función h, definida de E en F, por:

$$h(x) = (f\circ\varphi)(x)\, b,$$

pertenece a $C_{E,F}\{M_n\}$, se anula en un abierto de E y no es la función nula, obteniéndose una contradición.

3.13.Notaciones.- Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números reales estictamente positivos; sin pérdida de generalidad se puede suponer que $M_0 = 1$. Se denotará por $\{M_n^c\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión regularizada por medio del logaritmo de la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$. La sucesión $\{M_n^c\}_{n=0}^{\infty}$ verifica las siguientes propiedades:

(3.11.1) $M_0^c = 1$. [Ma, 3]

(3.11.2) $M_n^c \leq M_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ [Ma,4,17]

(3.11.3) $C_{\mathbb{R}}\{M_n^c\} = C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ [Bg].

(3.11.4) $M_{n-p}^c M_p^c \leq M_n^c$, $n = 0, 1, 2, \ldots,\ 0 < p < n$ [R,359].

3.14.Observación.- Si U es un abierto conexo de un espacio de Banach E,

$$C_{U,F}\{M_n^c\} \subset C_{U,F}\{M_n\}.$$

Es consecuencia de (3.11.2).

3.15.Proposición.- Si E es un espacio normado de dimensión finita, se verifica que $C_E\{M_n\}$ (respec. $C_E\{M_n\}_K$) es casi-analítica si, y sólo si, la única función de soporte compacto contenida en la clase es la idénticamente nula.

Demostración.- Una implicación es trivial. La otra la demostraremos en dos etapas:

i) Si $E = \mathbb{R}^p$ y la clase $C_{\mathbb{R}^p}\{M_n\}$ no fuese casi-analítica, no lo sería $C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$; por tanto, existiría una función $f \in C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ de soporte compacto contenido en $(-1,1)$ y tal que f es idénticamente 1 en $(-1/2,1/2)$. Sea g la función definida en $\mathbb{R}^p$ por:

$$g(x) = \prod_{i=1}^{p} f(x_i), \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_p).$$

La función g es de clase C^∞ y de soporte compacto en $\mathbb{R}^p$. Veamos que $g \in C_{\mathbb{R}^p}\{M_n\}$.

En virtud de la observación 3.14., basta demostrar que $g \in C_{\mathbb{R}^p}\{M_n^c\}$. Ahora bien, como $C_{\mathbb{R}}\{M_n^c\} = C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$, f es una función de la clase $C_{\mathbb{R}}\{M_n^c\}$. Para cada $1 \le q \le p$, sea

$$h_q(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{q} f(x_i), \qquad \underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_p).$$

Sean $\beta > 0$ y $k > 0$ tales que

$$\sup \{ \| f^{n)}(x) \| \;/\; x \in \mathbb{R} \} \le \beta k^n M_n^c, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Para $q = 2$ y $j = 0, 1, 2, ...$

$$D^j h_2(\underline{x}) = \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} f^{j-s)}(x_1)\, f^{s)}(x_2).$$

Entonces, se tiene que

$$\| D^j h_2(\underline{x}) \| \le \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} |f^{j-s)}(x_1)|\, |f^{s)}(x_2)| \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} \beta k^{j-s} M_{j-s}^c \,\beta k^s M_s^c \le \beta^2 M_j^c\, (2k)^j.$$

Por recurrencia se prueba que si $\underline{x} \in \mathbb{R}^p$ y $j = 0, 1, 2, ...$

$$\| D^j h_p(\underline{x}) \| \le \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} \| D^{j-s} h_{p-1}(x_1, ..., x_{p-1}) \| \,| D^s f(x_p) | \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} \beta^{p-1} (p-1)^{j-s} k^{j-s} M_{j-s}^c \,\beta k^s M_s^c \le M_j \beta^p k^j p^j.$$

Por último, como $h_p(\underline{x}) = g(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^p$, se tiene que

$$\| D^j g(\underline{x}) \| \leq \beta^j (pk)^j M_j, \qquad j = 0, 1, 2, ...$$

Como $g(\underline{0}) = 1$, se obtiene una contradicción.

ii) Si E es un espacio normado de dimensión p y φ una aplicación lineal y biyectiva de E en $\mathbb{R}^p$, si la clase $C_E\{M_n\}$ no fuese casi-analítica, no lo sería $C_{\mathbb{R}^p}\{M_n\}$ y en virtud de i), existiría una función $g \in C_{\mathbb{R}^p}\{M_n\}$, no trivial, de soporte compacto. Entonces, la función $g o \varphi \in C_E\{M_n\}$, tiene soporte compacto y no es idénticamente nula.

El mismo resultado para la clase $C_E\{M_n\}_K$ se obtiene teniendo en cuenta que las funciones de soporte compacto pertenecientes a las clases $C_E\{M_n\}$ y $C_E\{M_n\}_K$ son las mismas.

3.16.Observación.- Si E es un espacio normado de dimensión finita y U es un abierto conexo de E, la clase $C_U\{M_n\}$ (respec. $C_U\{M_n\}_K$) es casi-analítica si, y sólo si, la única función de soporte compacto contenida en la clase es la idénticamente nula. La demostración es semejante a la realizada en (3.15).

En espacios de dimensión infinita, en general, no existen funciones C^∞ con soporte acotado [B-F.1 y 2], salvo la idénticamente nula. Nuestro próximo objetivo, basándonos en el hecho de que en C_0 si existen tales funciones, es demostrar un análogo del resultado anterior para el caso $E = C_0$. Este resultado se va a obtener a partir del ejemplo dado en [B-F.1,395]. Queda planteado entonces el problema de determinar si el resultado sigue siendo válido para espacios de Banach de dimensión infinita que contengan funciones de clase C^∞ de soporte acotado.

3.17.Proposición.- Sea C_0 el espacio de las sucesiones de números reales convergentes hacia 0, dotado de la norma del superior y $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Entonces $C_{C_0}\{M_n\}_K$ es casi-analítica si, y sólo si, la única función de soporte acotado contenida en la clase es la idénticamente nula.

Demostración.- Si la clase $C_{C_0}\{M_n\}_K$ es casi-analítica y f es una función de soporte acotado contenida en la clase, existe un punto de C_0 en el que f y sus derivadas se anulan y por tanto, f es idénticamente nula en C_0.

Recíprocamente, si la clase $C_{C_0}\{M_n\}_K$ no fuese casi-analítica, no lo sería la clase

$C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ y en virtud de (3.9), existiría una función $f \in C_{\mathbb{R}}\{M_n\}$ de soporte contenido en (-1,1) e idénticamente 1 en un intervalo abierto $(-\delta,\delta)$, con $0 \leq f(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Sea g la función definida en C_0 por:

$$g(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{\infty} f(x_i), \qquad \underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...).$$

La función g verifica las siguientes propiedades:

i) Para cada vector $\underline{x}^0 \in C_0$ existen una bola abierta $\mathring{B}(\underline{x}^0,r)$ y un número natural n, tales que para cada $\underline{x} \in \mathring{B}(\underline{x}^0,r)$, se tiene

$$g(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad \underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...).$$

En efecto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i > n$,

$$x_i^0 \in (-\delta/2,\delta/2).$$

Si $\underline{x} \in \mathring{B}(\underline{x}^0,\delta/2)$ e $i > n$,

$$|x_i| \leq |x_i^0| + |x_i - x_i^0| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Entonces, si $\underline{x} \in \mathring{B}(\underline{x}^0,\delta/2)$, $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ e $i > n$, $f(x_i) = 1$ y por tanto,

$$g(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

ii) Con un razonamiento semejante al realizado en la proposición 3.15, se prueba que para cada n = 1, 2, ..., la función h_n definida en C_0 por:

$$h_n(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad \underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...),$$

pertenece a la clase $C_{C_0}\{M_n\}$.

iii) Para cada $\underline{x}^0 \in C_0$, la función $g \in C_{\mathring{B}(\underline{x}_0,\delta/2)}\{M_n\}$.

En efecto, por i), existe un número natural n tal que si $\underline{x} \in \mathring{B}(\underline{x}^0,\delta/2)$, es

$$g(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Por tanto, $g|_{\mathring{B}(\underline{x}_0,\delta/2)}$ es de clase C^∞ en $\mathring{B}(\underline{x}^0,\delta/2)$ y aplicando ii), está en $C_{\mathring{B}(\underline{x}_0,\delta/2)}\{M_n\}$.

iv) g tiene soporte contenido en B(0,1) y $g(\underline{0}) = 1$.

Si $\underline{x} \in C_0$, $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, y $\| \underline{x} \| > 1$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $|x_j| > 1$. Entonces $f(x_j) = 0$ y

$$g(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 0.$$

Se ha demostrado que g es una función C^{∞} de soporte acotado no idénticamente nula en C_0. Por iii) y como consecuencia de (3.5), se tiene que $g \in C_0\{M_n\}_K$.

A continuación se hace un estudio de las clases $C_{E,F}\{n!\}_K$ y $C_{E,F}\{n!\}$. Para ello utilizaremos propiedades del complexificado de un espacio de Banach.

3.18.Notaciones.-

a) Por $G^{\infty}(E,F)$ se denotará el espacio de las funciones f de E en F que tienen diferencial de Gâteaux de cualquier orden.

b) Si $f \in G^{\infty}(E,F)$ y $x \in E$, para cada $n \geq 0$, por $\delta_x^n f$ se denotará la diferencial de Gâteaux de orden n de f en el punto x.

Las propiedades que utilizaremos sobre la diferencial de Gâteaux de una función definida entre espacios de Banach, pueden encontrarse en [B-S.1 y 2].

3.19.Proposición.- La clase $C_{E,F}\{n!\}_K$ es la clase de todas las funciones analíticas en E.

Demostración.- Sea $f \in C_{E,F}\{n!\}_K$; veamos que f es analítica en E. Es suficiente demostrar que f es continua, $f \in G^{\infty}(E,F)$ y para cada par de puntos $a, b \in E$, llamando

$$I = \{ a + t\,(b - a) \,/\, t \in [0,1] \},$$

existe un subconjunto absorbente $A \subset E$, verificando que para cada $x \in I$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta_x^n f$$

converge en A [B-S.2,109].

Como $f \in C^{\infty}(E,F)$, se tiene que f es un elemento continuo de $G^{\infty}(E,F)$ y para cada n = 0, 1, 2, ..., y cada $x \in E$,

$$\delta_x^n f = \hat{D}^n f(x).$$

Sean a y b puntos de E y consideremos el conjunto

$$I = \{ a + t\,(b - a) \,/\, t \in [0,1] \}.$$

Para cada $x_0 \in E$ con $x_0 \neq 0$, el conjunto

$$H(x_0) = \{ y + \lambda x_0 \,/\, 0 \leq \lambda \leq 1, y \in I \},$$

es un compacto de E. Existen constantes $\beta(x_0) > 0$ y $k(x_0) > 0$, que dependen de $H(x_0)$, tales que

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \,/\, x \in H(x_0) \} \leq \beta(x_0)\, k(x_0)^n\, n!, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Si $y \in I$ y $\lambda \in [0,1]$, aplicando la fórmula de Taylor con resto integral [C,77], se tiene que:

$$\| f(y + \lambda x_0) - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j f(y) (\lambda x_0 , \overset{j)}{\ldots} , \lambda x_0) \| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{n!} \| D^{n+1} f(y + t\lambda x_0) (\lambda x_0 , \overset{n+1)}{\ldots}, \lambda x_0) \| \, dt \leq$$

$$\leq \beta(x_0)\, (k(x_0))^{n+1}\, (n + 1)!\, \| \lambda x_0 \|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{n!} dt =$$

$$= \beta(x_0)\, (k(x_0))^{n+1}\, \| \lambda x_0 \|^{n+1}$$

y por consiguiente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{D}^n f(y)}{n!}, \qquad y \in I,$$

converge en

$$L_{x_0} = \{ \lambda x_0 \,/\, \lambda \in [0, \text{mín} \{ 1, \frac{1}{2\, k(x_0) \|x_0\|} \}) \} \tag{1}$$

Sea $A = \cup \{ L_x \,/\, x \in E \sim \{0\} \}$; A es un subconjunto absorbente de E. De (1) se obtiene que para cada $y \in I$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{D}^n f(y)}{n!}$$

converge en A.

Recíprocamente, si f es analítica en E, veamos que para cada punto $x_0 \in E$ existe $\overset{\circ}{B}(x_0,r)$ tal que $f \in C^{\circ}_{\overset{\circ}{B}(x_0,r),F}\{n!\}$.

Como f es analítica en E, existe un abierto $\hat{U}$ de $E_{\mathbb{C}}$ y una función $\hat{f}$ de $\hat{U}$ en $F_{\mathbb{C}}$, analítica en $\hat{U}$, tal que $E \subset \hat{U}$ y $\hat{f}|_E = f$ [B-S.2,103].

Sea $x_0 \in E$; existe $B_{E_{\mathbb{C}}}(x_0,r) \subset \hat{U}$, tal que:

$$\sup \{ \| \hat{f}(x) \| \ / \ x \in B_{E_{\mathbb{C}}}(x_0, r) \} = \beta < +\infty.$$

Sea $x \in B_{E_{\mathbb{C}}}(x_0, r/4)$, entonces $B_{E_{\mathbb{C}}}(x, r/2) \subset B_{E_{\mathbb{C}}}(x_0, r)$ y aplicando las desigualdades de Cauchy [Ba,35], se obtiene:

$$\| \hat{D}^n f(x) \| \le \left(\frac{2}{r}\right)^n n!\, \beta,$$

Entonces,

$$\| D^n \hat{f}|_E (x) \| \le \frac{n^n}{n!} \| \hat{D}^n \hat{f}|_E(x) \| \le \frac{n^n}{n!} \| \hat{D}^n \hat{f}(x) \| \le \beta \left(\frac{2e}{r}\right)^n n!,$$

$x \in B_{E_{\mathbb{C}}}(x_0, r/4)$.

Se deduce, por (3.4), que $f \in C_{E,F}\{n!\}_K$.

3.20.Proposición.- $C_{E,F}\{n!\}$ es la clase de todas las funciones f de E en F para las cuales existe un abierto $E + i\overset{\circ}{B}(0,\delta)$ de $E_{\mathbb{C}}$ y una función $\hat{f} \in \mathcal{H}(E + i\overset{\circ}{B}(0,\delta), F_{\mathbb{C}})$, acotada y tal que $\hat{f}|_E = f$ (π_1 y π_2 denotan las proyecciones de $F_{\mathbb{C}}$ en F).

Demostración.- Sean $\delta > 0$ y $\hat{f} \in \mathcal{H}(E + i\overset{\circ}{B}(0,\delta), F_{\mathbb{C}})$ una función acotada tal que $\hat{f}(E) \subset F$. Sea

$$M = \sup \{ \| \hat{f}(z) \|_{F_{\mathbb{C}}} \ / \ z \in E + i\overset{\circ}{B}(0,\delta) \}.$$

Para cada $a \in E + i\overset{\circ}{B}(0,\delta)$ existe $\delta_a > 0$, tal que

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{D}^n \hat{f}(a)}{n!} (z - a),$$

uniformemente en $\overset{\circ}{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,\delta_a)$. En particular, si $a \in E$ y $x \in \overset{\circ}{B}(a,\delta_a)$, se tiene que $x \in \overset{\circ}{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,\delta_a)$ y:

$$f(x) = \hat{f}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{D}^m \hat{f}(a)}{m!} (x - a) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \pi_1\left(\frac{\hat{D}^m \hat{f}(a)}{m!} (x - a) \right) + i\, \pi_2\left(\frac{\hat{D}^m \hat{f}(a)}{m!} (x - a) \right).$$

Teniendo en cuenta que

$$\| \pi_i\left(\hat{f}(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{\hat{D}^m \hat{f}(a)}{m!} (x - a) \right) \| \le \| \hat{f}(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{\hat{D}^m \hat{f}(a)}{m!} (x - a) \|,$$

$i = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene que las series

$$\sum_{m=0}^{\infty} \pi_i\left(\frac{\hat{D}^m \hat{f}(a)}{m!} (x - a) \right), \quad i = 1, 2,$$

convergen uniformemente en $\overset{\circ}{B}(a,\delta_a)$, y por tanto,

$$\pi_1 o \hat{f}(x) = f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_1\left(\frac{\hat{D}^m \hat{f}(a)}{m!} (x - a) \right),$$

uniformemente en $\overset{\circ}{B}(a,\delta_a)$.

Se deduce que f es analítica en E y por [B.2,30], $f \in C^\infty(E,F)$.

Por otra parte, si $a \in E$, $\overset{\circ}{B}_{E_{\mathbb{C}}}(a,\delta) \subset E + i\overset{\circ}{B}(0,\delta)$. Las desigualdades de Cauchy en $B_{E_{\mathbb{C}}}(a,\delta/2)$ implican que:

$$\| \hat{D}^n \hat{f}(a) \|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^m m!\ M, \qquad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Para cada $m = 0, 1, 2, \dots$, $\hat{D}^m(\hat{f}|_E)(a) = \pi_1 o \hat{D}^m \hat{f}(a)$, y se tiene

$$\| D^m(\hat{f}|_E)(a) \| \leq \frac{m^m}{m!} \| \hat{D}^m(\hat{f}|_E)(a) \| = \frac{m^m}{m!} \| \pi_1 o \hat{D}^m \hat{f}(a) \| \leq$$

$$\leq \frac{m^m}{m!} \| \hat{D}^m \hat{f}(a) \|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \left(\frac{2e}{\delta}\right)^m M\, m!,$$

luego $\hat{f}|_E \in C_{E,F}\{n!\}$.

Sea ahora $f \in C_{E,F}\{n!\}$; existen constantes $\beta > 0$ y $k > 0$ tales que:

$$\| D^n f(a) \| \leq \beta k^n n!, \qquad a \in E, \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Para cada $a \in E$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n f(a) (x - a, \overset{n)}{\dots}, x - a)$$

converge uniformemente hacia f en B(a,1/2k). En efecto, en virtud de la fórmula de Taylor con resto integral, si $x \in E$, se tiene:

$$\| f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} D^n f(a) (x - a, \overset{n)}{\dots}, x - a) \| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \| D^{m+1} f(a + t(x - a)) (x - a, \overset{m+1)}{\dots}, x - a) \| dt \leq$$

$$\leq \beta k^{m+1} \| x - a \|^{m+1}.$$

Ahora bien, si $x \in \overset{\circ}{B}(a,1/2k)$, se tiene que $k\| x - a \| < 1/2$, luego

$$\| f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} D^n f(a)(x-a, \overset{n)}{\ldots}, x-a) \| \leq \beta \frac{1}{2^{m+1}}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

En las condiciones anteriores [B-S.2,103], existen un abierto $\hat{U}$ de $E_{\mathbb{C}}$, con

$$\bigcup_{a \in E} (a + \overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{2k}\frac{1}{4e}) + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{2k}\frac{1}{4e})) \subset \hat{U}$$

y una función $\hat{f} \in \mathcal{H}(\hat{U}, F_{\mathbb{C}})$, tal que $\hat{f}|_E = f$. (1)

Además, si $a \in E$ y $\tilde{D}^n f(a)$ denota el polinomio n-homogéneo y continuo en $E_{\mathbb{C}}$ que prolonga $\hat{D}^n f(a)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{D}^n f(a)(x-a)$$

cuando $x \in a + \overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{2k}\frac{1}{4e}) + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{2k}\frac{1}{4e})$.

Por otra parte,

$$\bigcup_{a \in E} (a + \overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{2k}\frac{1}{4e}) + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{2k}\frac{1}{4e})) =$$

$$= \bigcup_{a \in E} (\overset{\circ}{B}(a, \frac{1}{8ke}) + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{8ke})) = E + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{8ke}).$$

Sea $\delta \in \mathbb{R}$ con $0 < \delta < \frac{1}{k}$. Para cada $a \in E$ y $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{\hat{D}^m f(a)}{m!} (\overset{\circ}{B}(0,\delta)) \subset \overset{\circ}{B}(0, (\delta k)^m \beta).$$

Se tiene entonces [B-S.1,72], que para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, y $a \in E$,

$$\frac{\tilde{D}^m f(a)}{m!} (\overset{\circ}{B}(0, \frac{\delta}{8e}) + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{\delta}{8e})) \subset \overset{\circ}{B}(0, (k\delta)^m \beta) + i\,\overset{\circ}{B}(0, (k\delta)^m \beta).$$

Sea $x + iy \in \overset{\circ}{B}(a, \frac{\delta}{8e}) + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{\delta}{8e}) \subset \overset{\circ}{B}(a, \frac{1}{8ke}) + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{8ke})$:

$$\| \hat{f}(x+iy) \|_{F_{\mathbb{C}}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| \frac{1}{n!} \tilde{D}^n f(a)(x+iy-a) \|_{F_{\mathbb{C}}} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\beta (k\delta)^n + \beta (k\delta)^n) = \frac{2\beta}{1 - k\delta}$$

y por consiguiente, $\hat{f}$ está acotada en $E + i\,\overset{\circ}{B}(0, \frac{\delta}{8e})$. (2)

De (1) y de (2) se deduce que existe un abierto $E + i\mathring{B}(0, \frac{\delta}{8e})$ y una función $\hat{f} \in \mathcal{H}(E + i\mathring{B}(0, \frac{\delta}{8e}), F_{\mathbb{C}})$ con $\hat{f}|_E = f$.

Sea U un abierto convexo de E, con $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$. Supongamos que $f \in C^{\infty}(U,F)$, tal que

i) $\sup \{ \| D^n f(x) \| / x \in U \} \leq M_n < +\infty, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

ii) Para cada n = 0, 1, 2, ..., existe por la topología β en $L_s(^nE,F)$,

$$\lim_{x \to 0} D^n f(x) = A_n.$$

Teniendo en cuenta (3.1), si la clase $C_{U,F}\{M_n\}$ es casi-analítica, la función f es la única que pertenece a $C_{U,F}\{M_n\}$ y satisface ii). Nuestro próximo objetivo consistirá en, dada una sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $A_n \in L_s(^nE,F)$, n = 0, 1, 2, ..., estudiar qué condiciones debe satisfacer una sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números esrictamente positivos, para que exista una función $f \in C^{\infty}(U,F)$ que verifique i) e ii).

El problema lo resolveremos siguiendo el método dado por San Juan en [SJ], cuando U es un abierto convexo y acotado de un espacio de Banach separable y $F = \mathbb{R}$.

En lo que sigue se supondrá que E es un espacio de Banach separable y U un abierto convexo de E, con $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$.

3.21.Observación.- Sea M un espacio métrico separable y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en M. Supongamos que la sucesión es equicontinua en M y que

$$\sup\{ | f_n(x) | / n = 1, 2, \ldots \} < +\infty,$$

cualquiera que sea $x \in M$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la dada que converge uniformemente en los compactos de M hacia una función f [Ba,151].

3.22.Proposición.- Sea U un abierto convexo de un espacio de Banach separable E, tal que $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $E_b(U,\mathbb{R})$ acotada por la topología β, existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, que converge por la topología τ_0 de $E_c(U,\mathbb{R})$ hacia una función f de $E_b(U,\mathbb{R})$.

Demostración.- Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos U-acotados verificando las propiedades de la proposición (0.8). Para cada n = 0, 1, 2, ... , y cada p = 0, 1, 2, ..., designemos por:

$$M_{n,p} = \sup \{ \| D^p f_j(x) \| / x \in \tilde{B}_n, j = 1, 2, \dots \}$$

Consideremos la función

$$F_{n,j} : (U \cup \{0\}) \times E \times \overset{n)}{\dots} \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, h_1, \dots, h_n) \longrightarrow D^n f_j(x)(h_1, \dots, h_n)$$

Para cada q = 1, 2, ..., esta función es continua en $(\tilde{B}_q \cup \{0\}) \times E \times \overset{n)}{\dots} \times E$.

Demostraremos que la sucesión $\{F_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ es equicontinua en dicho conjunto, para lo cual observemos que:

$$\begin{aligned}
&| D^n f_j(x)(h_1, \dots, h_n) - D^n f_j(x_0)(h_1^0, \dots, h_n^0) | \leq \\
&\leq | D^n f_j(x)(h_1, \dots, h_n) - D^n f_j(x_0)(h_1, \dots, h_n) | + \\
&+ | D^n f_j(x_0)(h_1, \dots, h_n) - D^n f_j(x_0)(h_1^0, \dots, h_n^0) | \leq \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} | D^n f_j(tx + (1-t)x_0)(x - x_0, h_1, \dots, h_n) | + \\
&+ | D^n f_j(x_0)(h_1, \dots, h_n) - D^n f_j(x_0)(h_1^0, h_2, \dots, h_n) | + \\
&+ | D^n f_j(x_0)(h_1^0, h_2, \dots, h_n) - D^n f_j(x_0)(h_1^0, h_2^0, \dots, h_n) | + \dots + \\
&+ | D^n f_j(x_0)(h_1^0, h_2^0, \dots, h_{n-1}^0, h_n) - D^n f_j(x_0)(h_1^0, \dots, h_n^0) | \leq \\
&\leq M_{q,n+1} \| x - x_0 \| \|h_1\| \dots \|h_n\| + \\
&+ M_{q,n} (\| h_1 - h_1^0 \| \|h_2\| \dots \|h_n\| + \dots + \| h_1^0 \| \dots \| h_{n-1}^0 \| \| h_n - h_n^0 \|),
\end{aligned}$$

desigualdades válidas para todo $x, x_0 \in \tilde{B}_q \cup \{0\}$ y $(h_1, \dots, h_n), (h_1^0, \dots, h_n^0) \in E \times \overset{n)}{\dots} \times E$, lo que prueba la equicontinuidad de la sucesión.

Resulta inmediato que

$$\sup \{ | F_{n,j}(x, h_1, \dots, h_n) | / j = 1, 2, \dots \} < +\infty,$$

para cada $(x, h_1, \dots, h_n) \in (U \cup \{0\}) \times E \times \overset{n)}{\dots} \times E$.

Consideremos q = 1; aplicando el resultado al que hemos hecho referencia, existe una subsucesión $\{F_{0,j}\}_{j \in I_0}$, donde I_0 es un subconjunto (estrictamente creciente) de los números naturales, que converge uniformemente en los compactos de $(\tilde{B}_1 \cup \{0\})$.

La sucesión $\{F_{1,j}\}_{j \in I_0}$, es una subsucesión de $\{F_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ y por tanto, es equicontinua en $(\tilde{B}_1 \cup \{0\}) \times E$ y puntualmente acotada en $(U \cup \{0\}) \times E$. Existe entonces una subsucesión $\{F_{1,j}\}_{j \in I_1}$, con $I_1 \subset I_0$, que converge uniformemente en los compactos de $(\tilde{B}_1 \cup \{0\}) \times E$.

Por inducción se prueba la existencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, de una subsucesión $\{F_{n,j}\}_{j \in I_n}$, con $I_n \subset I_{n-1}$, de la sucesión $\{F_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$, que converge uniformemente en los compactos de $(\tilde{B}_1 \cup \{0\}) \times E \overset{n)}{\ldots} \times E$.

Definamos i_k como el k-ésimo elemento de I_k y consideremos la subsucesión de la sucesión natural:

$$J_1 = \{ i_0, i_1, ..., i_k, ... \}.$$

Se prueba sin dificultad que para cada $n = 0, 1, 2, ...,$ $\{F_{n,i_k}\}_{k=0}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de $(\tilde{B}_1 \cup \{0\}) \times E \overset{n)}{\ldots} \times E$.

Realizando un nuevo proceso diagonal como el anterior y razonando por inducción, se prueba la existencia, para cada $m \in \{ 1, 2, ... \}$, de una subsucesión

$$J_m = \{ j_{m_0}, j_{m_1}, ..., j_{m_k}, ... \}$$

de la sucesión J_{m-1}, tal que para cada $n = 0, 1, 2, ...,$ $\{F_{n,j}\}_{j \in J_m}$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $(\tilde{B}_m \cup \{0\}) \times E \overset{n)}{\ldots} \times E$.

Llamemos m_k al k-ésimo elemento de J_k. Se tiene que para cada $n = 0, 1, 2, ...,$ y cada $p = 1, 2, ...,$ la sucesión $\{F_{n,m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $(\tilde{B}_p \cup \{0\}) \times E \overset{n)}{\ldots} \times E$.

Veamos que la sucesión $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0)$. Sean K un compacto de U, $n \geq 0$ y H un compacto de $E \times \overset{n)}{\ldots} \times E$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{K} \cup \{0\}$ es un compacto de $(\tilde{B}_p \cup \{0\})$ y por consiguiente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j, i \geq k_0$, se tiene:

$$\sup \{ \| D^n f_{m_j}(x) (h_1, ..., h_n) - D^n f_{m_i}(x) (h_1, ..., h_n) \| / x \in \tilde{K} , h_1, ..., h_n \in H \} < \varepsilon.$$

Como el espacio $(E_c (U,\mathbb{R}), \tau_0)$ es completo, existe una función $f \in E_c (U,\mathbb{R})$, tal que la sucesión $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia f por la topología τ_0.

Demostremos por último que $f \in E_b (U,\mathbb{R})$; para ello veamos en primer lugar que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \tilde{B}_q}} D^n f(x) = D^n f(0), \qquad q = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

por la topología β de $L_s({}^nE, \mathbb{R})$.

Sea $q \in \{1, 2, \ldots\}$ y $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $\tilde{B}_q$ que converge hacia 0, y consideremos el conjunto

$$C = \left\{ \frac{D^n f(x_p) - D^n f(0)}{\|x_p\|}, \; p = 1, 2, \ldots \right\}$$

Como

$$\| (D^n f(x_p) - D^n f(0)) (y_1, \ldots, y_n) \| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \| (D^n f_{m_k}(x_p) - D^n f_{m_k}(0)) (y_1, \ldots, y_n) \| \leq$$

$$\leq M_{n+1,q} \|x_p\| \, \|y_1\| \ldots \|y_n\|,$$

cualesquiera que sean $y_1, \ldots, y_n \in E$, $p = 1, 2, \ldots$, se obtiene

$$\| D^n f(x_p) - D^n f(0) \| \leq M_{n+1,q} \|x_p\|, \qquad p = 1, 2, \ldots ,$$

de donde se sigue (1).

Por último, veamos que para cada $q = 1, 2, \ldots$,

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \,/\, x \in B_q \} < +\infty, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

para lo cual, si $x \in B_q$ y $h_1, \ldots, h_n \in E$

$$\| D^n f_{m_k}(x) (h_1, \ldots, h_n) \| \leq M_{n,q} \|h_1\| \ldots \|h_n\|, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

luego

$$\| D^n f(x) (h_1, \ldots, h_n) \| \leq M_{n,q} \|h_1\| \ldots \|h_n\|,$$

y por tanto,

$$\sup \{ \| D^n f(x) \| \,/\, x \in B_q \} \leq M_{n,q} < +\infty, \qquad q = 1, 2, \ldots$$

3.23.Proposición.- Sean $m \in \mathbb{N}$, $M > 0$ y $A_n \in L_s({}^nE, \mathbb{R})$, $0 \leq n \leq m$. Supongamos que $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $C^m(U)$, tal que:

1) $\lim_{x\to 0} f_p^{n)}(x) = A_n$, $0 \leq n \leq m$, $p \in \mathbb{N}$, por la topología β de $L_s({}^nE, \mathbb{R})$.

2) $\sup \{ \| f_p^{n)}(x) \| \,/\, x \in U, \; p = 1, 2, \ldots \} \leq M_n < +\infty$, $\quad 0 \leq n \leq m$.

3) $\| f_p^{m)}(x) - f_p^{m)}(x_0) \| \leq M \, \| x - x_0 \|$, $\quad x, x_0 \in U$.

Entonces, existe una subsucesión $\{f_{p_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la dada y una función $f \in C^m(U)$, verificando:

α) Para cada compacto K de U y para cada compacto H de E^n,

$$\lim_{j\to\infty} \sup \{ | f_{p_j}^{n)}(x)(h) - f^{n)}(x)(h) | \ / \ x \in \tilde{K}, \ \ h \in H \} = 0, \ 0 \le n \le m.$$

β) $\lim_{x\to 0} f^{n)}(x) = A_n, \ \ 0 \le n \le m,$ por la topología β de $L_s(^nE,\mathbb{R})$.

γ) $\sup \{ \| f^{n)}(x) \| \ / \ x \in U \} \le M_n, \ \ 0 \le n \le m.$

δ) $\| f^{m)}(x) - f^{m)}(x_0) \| \le M \| x - x_0 \|, \ \ x, x_0 \in U \cup \{0\}.$

Demostración.- Como consecuencia de 1), 2) y 3), se tienen las siguientes desigualdades:

$$\| f_p^{m)}(x) - A_m \| \le M \| x \|, \qquad p \in \{1, 2, ...\}, \ \ x \in U. \qquad \text{(I)}$$

$$\| A_n \| \le M_n, \qquad n = 0, 1, 2, ..., m. \qquad \text{(II)}$$

$$\| f_p^{n)}(x) - f_p^{n)}(x_0) \| \le M_{n+1} \| x - x_0 \|, \ p \in \{1, 2, ...\}, \ x, x_0 \in U \cup \{0\}, n < m \qquad \text{(III)}$$

La demostración se hará en varias etapas.

i) Para cada $k \in \mathbb{N}$ con $0 \le k \le m$, la sucesión de funciones $\{F_{k,j}\}_{j=1}^{\infty}$, definidas por:

$$(x, h_1, ..., h_k) \in (U \cup \{0\}) \times E \times \overset{k)}{\cdots} \times E \longrightarrow D^k f_j(x)(h_1, ..., h_k)$$

es equicontinua en $(U \cup \{0\}) \times E \times \overset{k)}{\cdots} \times E$.

Es obvio que para cada $(x, h_1, ..., h_k) \in (U \cup \{0\}) \times E \times \overset{k)}{\cdots} \times E$,

$$\sup \{ \| D^k f_j(x)(h_1, ..., h_k) \ / \ j = 0, 1, 2, ... \} < +\infty.$$

Por otra parte, llamando $M_{m+1} = M$, se tiene que:

$$| D^k f_j(x)(h_1, ..., h_k) - D^k f_j(\tilde{x})(\tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_k) | \le$$

$$\le | D^k f_j(x)(h_1, ..., h_k) - D^k f_j(\tilde{x})(h_1, ..., h_k) | +$$

$$+ | D^k f_j(\tilde{x})(h_1 - \tilde{h}_1, ..., h_k) | + ... + | D^k f_j(\tilde{x})(\tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_{k-1}, h_k - \tilde{h}_k) | \le$$

$$\le M_{k+1} \| x - \tilde{x} \| \|h_1\| ... \|h_k\| +$$

$$+ M_k [\| h_1 - \tilde{h}_1 \| \|h_2\| ... \|h_k\| + ... + \| \tilde{h}_1 \| ... \| \tilde{h}_{k-1} \| \| h_k - \tilde{h}_k \|],$$

desigualdades válidas para todo $x, \tilde{x} \in U \cup \{0\}$ y $(h_1, ..., h_k)$, $(\tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_k) \in E x \overset{k)}{\ldots} x E$, lo que demuestra la equicontinuidad de la sucesión.

Aplicando la observación (3.21), existe una subsucesión $\{F_{k,j_s}\}_{s=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $(U \cup \{0\}) \times E \times \overset{k)}{\ldots} \times E$.

ii) Con un proceso diagonal, se demuestra que existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la dada, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ con $0 \le k \le m$, la sucesión $\{F_{k,n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de $(U \cup \{0\}) \times E \times \overset{k)}{\ldots} \times E$ hacia una función F_k.

iii) La sucesión $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge en la topología compacta-abierta de $C^m(U)$. Sea f la función definida por

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x), \qquad x \in U.$$

Razonaremos por inducción suponiendo que $f \in C^{k-1}(U)$ para $0 \le k - 1 < m$ y veamos que $f \in C^k(U)$. Sea H_k la función definida de U en $L_s(^kE,F)$, por:

$$H_k(x) = F_k(x, -),$$

donde $F_k(x,-)(h_1, ..., h_k) = F_k(x, h_1, ..., h_k)$.

a) f es k veces derivable y $D^k f = H_k$.

Sea $x_0 \in U$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $U \sim \{x_0\}$ que converge hacia x_0. El conjunto

$$K = \{ x_n / n = 0, 1, 2, ... \}$$

es compacto en U. Se demostrará que el conjunto:

$$C = \left\{ \frac{D^{k-1}f(x_p) - D^{k-1}f(x_0) - H_k(x_0)(x_p - x_0)}{\| x_p - x_0 \|^2} \ / \ p = 1, 2, ... \right\}$$

es acotado en norma.

Sea H un compacto de $E \times \overset{k-1)}{\ldots} \times E$:

$$\frac{| D^{k-1}f(x_p)(h_1, ..., h_{k-1}) - D^{k-1}f(x_0)(h_1, ..., h_{k-1}) - H_k(x_0)(x_p - x_0, h_1, ..., h_{k-1}) |}{\| x_p - x_0 \|^2} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{| D^{k-1}f_{n_j}(x_p)(h) - D^{k-1}f_{n_j}(x_0)(h) - D^k f_{n_j}(x_0)(x_p - x_0, h) |}{\| x_p - x_0 \|^2}, \qquad (4)$$

siendo $h = (h_1, ..., h_{k-1})$.

Ahora bien, aplicando el teorema del valor medio a la función

$$x \longrightarrow D^{k-1}f_{n_j}(x)(h_1, ..., h_{k-1}) - D^kf_{n_j}(x_0)(x, h_1, ..., h_{k-1})$$

se tiene que:

$$|D^{k-1}f_{n_j}(x_p)(h_1, ..., h_{k-1}) - D^{k-1}f_{n_j}(x_0)(h_1, ..., h_{k-1}) - D^kf_{n_j}(x_0)(x_p - x_0, h_1, ..., h_{k-1})| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |D^kf_{n_j}(tx_p+(1-t)x_0)(x_p - x_0, h_1, ..., h_{k-1}) - D^kf_{n_j}(x_0)(x_p - x_0, h_1, ..., h_{k-1})| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \{ M_{k+1} \| tx_p+(1-t)x_0 - x_0 \| \, \| x_p - x_0 \| \, \|h_1\| \, \|h_2\| ... \|h_{k-1}\| \} \leq$$

$$\leq M_{k+1} \| x_p - x_0 \|^2 \|h_1\| \, \|h_2\| ... \|h_{k-1}\| \qquad (5)$$

cualquiera que sea $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$. Por tanto, de (3) y de (4) se deduce:

$$\frac{|D^{k-1}f(x_p)(h_1, ..., h_{k-1}) - D^{k-1}f(x_0)(h_1, ..., h_{k-1}) - H_k(x_0)(x_p - x_0, h_1, ..., h_{k-1})|}{\| x_p - x_0 \|^2} \leq$$

$$\leq M_{k+1} \|h_1\| \, \|h_2\| ... \|h_{k-1}\|,$$

cualquiera que sea $(h_1, ..., h_{k-1}) \in H$.

De esta forma se prueba que C es un subconjunto de $L_s({}^{k-1}E,F)$ τ_0-acotado, y por tanto, será acotado en norma; existe $L > 0$, tal que:

$$\frac{\|D^{k-1}f(x_p) - D^{k-1}f(x_0) - H_k(x_0)(x_p - x_0)\|}{\| x_p - x_0 \|^2} \leq L,$$

de donde se deduce ya que $D^{k-1}f$ es derivable en U y $D^kf = H_k$.

b) D^kf es continua en U.

Sean $x, x_0 \in U$ y $h \in E \times \overset{k)}{\dots} \times E$ con $\|h\| \leq 1$ y $h = (h_1,...,h_k)$

$$|D^kf(x)(h) - D^kf(x_0)(h)| = \lim_{j\to\infty} |D^kf_{n_j}(x)(h) - D^kf_{n_j}(x_0)(h)| \leq$$

$$\leq M_{k+1} \| x - x_0 \| \, \|h_1\| \, \|h_2\| ... \|h_k\|$$

y por tanto,

$$\| D^kf(x) - D^kf(x_0) \| \leq M_{k+1} \| x - x_0 \|,$$

lo cual demuestra la continuidad de D^kf en U. Se ha demostrado, además, que la función f cumple δ), si $x, x_0 \in U$. (1)

iv) De forma inmediata, f cumple α). Veamos que cumple β), γ) y δ).

Si $x \in U$, $0 \le k \le m$ y $h \in E \times \overset{k)}{\dots} \times E$ con $\|h\| \le 1$,

$$| D^k f(x)(h) - A_k(h) | = \lim_{j \to \infty} | D^k f_{n_j}(x)(h) - A_k(h) | \le$$

$$\le M_{k+1} \|x\| \|h_1\| \dots \|h_k\|.$$

Por tanto,

$$\| D^k f(x) - A_k \| \le M_{k+1} \|x\|,$$

lo que demuestra que

$$\lim_{x \to 0} D^k f(x) = A_k,$$

y teniendo en cuenta (1), se verifica δ).

Por último, sea $x \in U$, $0 \le k < m$ y $h \in E \times \overset{k)}{\dots} \times E$ con $\|h\| \le 1$; se tiene:

$$| D^k f(x)(h) | = \lim_{j \to \infty} | D^k f_{n_j}(x)(h) | \le M_k \|h_1\| \dots \|h_k\|,$$

luego

$$\| D^k f(x) \| \le M_k, \quad x \in U, \quad 0 \le k \le m.$$

3.24.Proposición.- Sean U un abierto convexo y acotado de E tal que $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$, $A_n \in L_s({}^n E, \mathbb{R})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, denotemos por $\mathfrak{C}_n$ el conjunto de funciones $f \in C^n(U)$, tales que:

1) $\sup \{ \| D^j f(x) \| \ / \ x \in U \} < +\infty$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

2) $\lim_{x \to 0} D^j f(x) = A_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, por la topología β de $L_s({}^j E, \mathbb{R})$.

3) $\| D^n f(x) - D^n f(x_0) \| \le M_{n+1} \| x - x_0 \|$, $\quad x, x_0 \in U$.

Designemos por $\mathfrak{I}_n$ la aplicación de $\mathfrak{C}_n$ en $\mathbb{R}$, definida por:

$$\mathfrak{I}_n(f) = \sup \left\{ \frac{\| D^j f(x) \|^2}{M_j^2} \ / \ x \in U, \ j = 0, 1, 2, \dots, n \right\},$$

y sea

$$\alpha_n = \inf \{ \mathfrak{I}_n(f) \ / \ f \in \mathfrak{C}_n \}.$$

Entonces:

Si $\alpha_n \le 1$ (para algún $n \in \mathbb{N}$), existe $f \in \mathfrak{C}_n$, tal que:

$$\sup \{ \| D^j f(x) \| \ / \ x \in U \} \le M_j, \qquad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Demostración.- Observemos en primer lugar que, por ser el abierto U acotado, el conjunto $\mathfrak{L}_n$ es no vacío, ya que la función

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \hat{A}_j(x), \qquad x \in U,$$

satisface 1), 2) y 3).

Por otra parte, como $\alpha_n \leq 1$, para cada p = 0, 1, 2, ..., existe $f_p \in \mathfrak{L}_n$, tal que

$$\mathfrak{I}_n(f_p) \leq 1 + \frac{1}{p},$$

luego

$$\frac{\| D^j f_p(x) \|^2}{M_j^2} \leq 1 + \frac{1}{p}, \qquad x \in U,\ j = 0, 1, 2, ..., n,\ p \in \mathbb{N},$$

de donde se sigue que

$$\| D^j f_p(x) \| \leq \sqrt{M_j^2 + \frac{M_j^2}{p}}, \qquad x \in U,\ j = 0, 1, 2, ..., n,\ p \in \mathbb{N}.$$

Aplicando la proposición anterior a la sucesión $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$, existe una subsucesión $\{f_{p_s}\}_{s=1}^{\infty}$ y una función $f \in C^n(U)$, que verifican α), β), γ) y δ).

Para cada $x \in U$, cada j, con $0 \leq j \leq n$ y cada $h_1, ..., h_j \in \overset{\circ}{B}(0,1)$, se tiene:

$$\lim_{s\to\infty} |D^j f_{p_s}(x)(h_1, ..., h_j)| = |D^j f(x)(h_1, ..., h_j)| \leq$$

$$\leq \lim_{s\to\infty} \sqrt{M_j^2 + \frac{M_j^2}{p_s}} = M_j,$$

luego $\| D^j f(x) \| \leq M_j$.

3.25.Proposición.- Con las mismas notaciones que en la proposición anterior, si $\alpha_n \leq 1$, n = 0, 1, 2, ..., existe $f \in C^{\infty}(U)$, tal que:

a) $\lim_{x\to 0} D^n f(x) = A_n$, n = 0, 1, 2, ..., por la topología β de $L_s(^nE,\mathbb{R})$.

b) $\sup \{ \| D^n f(x) \| \ /\ x \in U \} \leq M_n$, n = 0, 1, 2, ...

Demostración.- Por la proposición anterior, para cada n = 0, 1, 2, ..., existe $f_n \in \mathfrak{L}_n$, tal que:

i) $\sup \{ \| D^j f_n(x) \ /\ x \in U \} \leq M_j$, $0 \leq j \leq n$..

Observemos que la función f_n también verifica:

ii) $\lim\limits_{x\to 0} D^j f_n(x) = A_j$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \le j \le n$, por la topología β de $L_s({}^jE,\mathbb{R})$.

iii) $\| D^n f_n(x) - D^n f_n(x_0) \| \le M_{n+1} \| x - x_0 \|$, $\quad x, x_0 \in U$.

Se tiene que la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica las hipótesis de la proposición 3.23, (para $m = 0$ y $M = M_1$), luego existen una subsucesión $\{f_k\}_{k\in I_0}$, $I_0 \subset \mathbb{N}$ y una función $f \in C(U)$, satisfaciendo α), β), γ) y δ) de (3.23) ($m = 0$ y $M = M_1$).

La sucesión $\{f_k\}_{k\in I_0}$ está en las condiciones de (3.23), para $m = 1$ y $M = M_2$. Existen entonces una subsucesión $\{f_k\}_{k\in I_1}$, $I_1 \subset I_0$ e $I_1 \subset \{ 2, 3, \ldots \}$, y una función $g_1 \in C^1(U)$, que verifican α), β), γ) y δ) de (3.23).

Por recurrencia, se demuestra la existencia, para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, de una subsucesión $\{f_k\}_{k\in I_m}$, $I_m \subset I_{m-1}$ e $I_m \subset \{ m+1 , m+2, \ldots \}$, y de una función $g_m \in C^m(U)$ $(g_0 = f)$, tales que satisfacen α), β), γ) y δ) de la proposición 3.23. Llamemos i_k al k-ésimo elemento de I_{k-1} y consideremos la sucesión $\{f_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Veamos que $f \in C^\infty(U)$ y verifica a) y b).

i) Para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, $f \in C^m(U)$.

En efecto, para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\{f_{i_k}\}_{k=m+1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{f_k\}_{k\in I_m}$, y por tanto, converge hacia $g_m \in C^m(U)$ en la topología τ_c^m [1]. Por otra parte, $\{f_{i_k}\}_{k=m+1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{f_k\}_{k\in I_0}$, luego converge hacia f en C(U) por τ_c. En virtud de la unicidad del límite, $f = g_m$ en U, y por consiguiente, $f \in C^m(U)$. Además, para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\{f_{i_k}\}_{k=m+1}^{\infty}$ converge hacia f por τ_c^m.

ii) Para cada $m= 0, 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{x\to 0} D^m f_n(x) = A_m,$$

por la topología β de $L_s({}^mE,\mathbb{R})$.

Para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, como consecuencia de β) de la proposición 3.23,

$$\lim_{x\to 0} D^m g_m(x) = A_m,$$

por la topología β de $L_s({}^mE,\mathbb{R})$. Como $g_m = f$ en U, se deduce ii).

iii) Por el apartado γ) de la proposición 3.23, para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\sup \{ \| D^m g_m(x) \| / \ x \in U \} \le M_m.$$

---

[1] La topología τ_c^m en $C^m(U)$ es la definida por las seminormas

$$p_{K,j,H}(f) = \sup \{ | f^{j)}(x) (h) | / x \in K, h \in H \},$$

donde K varía en los compactos de U, $0 \le j \le m$ y H varía en los compactos de $E \times \overset{j)}{\ldots} \times E$.

Puesto que $g_m = f$ en U, se deduce que

$$\sup \{ \| D^m f(x) \| \,/\, x \in U \} \leq M_m.$$

3.26.Observación.- Si U es un abierto convexo de E, con $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$ y para cada n = 0, 1, 2, ..., $A_n \in L_s({}^nE,F)$, en 1.15 se ha demostrado que el conjunto $\mathcal{R}$ de las funciones $f \in E_b(U,F)$ tales que para cada subconjunto B, U-acotado,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} D^n f(x) = A_n$$

por la topología β en $L_s({}^nE,F)$, es no vacío.

3.27.Proposición.- Sean E un espacio de Banach separable, U un abierto convexo de E, con $0 \in \overline{U}$ y $0 \notin U$, $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\mathcal{R}$ como en la observación anterior, y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos U-acotados, verificando las condiciones de la proposición (0.8). Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos y para cada n = 1, 2, ..., consideremos la aplicación $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}$, definida por:

$$\mathcal{C}_n(f) = \sup \{ \frac{\| D^j f(x) \|^2}{M_j^2} \,/\, x \in \tilde{B}_n,\ j = 0, 1, 2, ... \},$$

Sea

$$\beta_n = \inf \{ \mathcal{C}_n(f) \,/\, f \in \mathcal{R} \}.$$

Entonces, si $\beta_n \leq 1$, n = 1, 2, ..., existe $f \in \mathcal{R}$, tal que

$$\sup \{ \| D^j f(x) \| \,/\, x \in U \} \leq M_j,\ j = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

Demostración.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in \mathcal{R}$, tal que:

$$\sup \{ \frac{\| D^j f_n(x) \|^2}{M_j^2} \,/\, x \in \tilde{B}_n,\ j = 0, 1, 2, ... \} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Consideremos la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $E_b(U,\mathbb{R})$ y veamos que está acotada en $(E_b(U,\mathbb{R}),\beta)$. Sean $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ y $m \geq 0$; para cada $q \geq p$, $\tilde{B}_p \subset \tilde{B}_q$, luego

$$\sup \{ \| D^m f_q(x) \| \,/\, x \in \tilde{B}_p \} \leq \sup \{ \| D^m f_q(x) \| \,/\, x \in \tilde{B}_q \} \leq$$

$$\leq \sqrt{M_m^2 + \frac{M_m^2}{q}} \leq M_m \sqrt{2}$$

Por (3.22), existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge hacia una función $f \in E_b$ (U,F) por la topología τ_0. Veamos que $f \in \mathfrak{R}$ y verifica (1).

Para cada j = 1, 2, ..., cada $m \geq 0$ y cada compacto K de U,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in K}} D^m f_{n_j}(x) = A_m$$

por la topología τ_0 en $L_s(^nE,F)$, por tanto

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in K}} D^m f(x) = A_m$$

por la topología τ_0 en $L_s(^nE,F)$. Como la topología β en $L_s(^nE,F)$ es más fina que la topología τ_0 y para cada subconjunto B, U-acotado, existe

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in B}} D^m f(x) = D^m f(0),$$

por la topología β en $L_s(^nE,F)$, se tiene que

$$D^m f(0) = A_m ,$$

lo que prueba que $f \in \mathfrak{R}$.

Por último, si $x \in U$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \tilde{B}_q$; entonces, para cada $m \geq 0$ y $h_1, ..., h_m \in B(0,1)$,

$$\| D^m f(x) (h_1, ..., h_m) \| = \lim_{\substack{n_j \to \infty \\ n_j \geq q}} \| D^m f_{n_j}(x) (h_1, ..., h_m) \| \leq$$

$$\leq \lim_{\substack{n_j \to \infty \\ n_j \geq q}} \sqrt{M_m^2 + \frac{M_m^2}{n_j}} = M_m,$$

y se obtiene (1).

BIBLIOGRAFIA

ALEXIEWICZ, A. - ORLICZ, W. - Analytic operations in real Banach spaces. Studia Mathematica **14** (1953), 57-78.

[A] ARON, R.M. -

1.Approximation of differentiable functions on a Banach space. Matos M.C. (ed.), Infinite dimensional holomorphy and applications, North-Holland Math. Studies **12**, (1977), 1-17

2. Compact polynomials and compact differentiable mappings between Banach spaces. Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Année 1974/75, Lec. Not. Math. **524**, Springer-Verlag, Berlín - New York - Heidelberg (1976).

[A.M.R] ABRAHAM, R. - HOLMES, P.J. - MARSDEN, J.E. - Manifolds, Tensor Analysis and Applications. Addison-Wesley (1983).

[Bg] BANG. T. - On quasi-analytiske funktioner. Thèse, Kyobenhavn (1946).

[Ba] BARROSO, J.A. - Introduction to Holomorphy. North-Holland Mathematics Studies, **120**. North-Holland - Amsterdam - New York - Oxford (1985).

[Bt] BASTIANI, A. - Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie. J. Anal. Math. **13** (1964), 1-114, MR 31, 1540.

[Bo] BOCHNAK, J. - Analytics functions in Banach spaces. Studia Mathematica **35**, Nº3 (1969), 273-292.

[B-S] BOCHNAK, J. - SICIAK, J. -

1.Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces. Studia Mathematica **39** (1971), 59-76.

2.Analytic functions in topological vector spaces. Studia Mathematica **39** (1971), 77-112.

[B-F] BONIC, R. -FRAMPTON,J. -

1.Differentiable functions on certain Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 393-395.

2.Smooth functions on Banach manifolds. J. Math. Mech. **15**, Nº5 (1966), 877-898.

[B] BOURBAKI, N. -

1. General Topology. Part 2. Elements of Mathematics, Hermann, París (1966).

2. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats, 1-7. Eléments de mathématique XXXIII, Hermann éd., París (1967).

[Ca] CARLEMAN, T - Les fonctions quasi-analytiques. Collection de monographies sur la Théorie des Fonctions. Gauthier-Villars, París (1926).

[C] CARTAN,H. - Cours de calcul différentiel. Hermann, París (1977).

[Co] COLOMBEAU, J.F. -

1.Differentiation et Bornologie. Thèses. Bordeaux (1973).

2.Infinite dimensional C^{∞} mappings with a given sequence of derivatives at a given point. Jour. Math. Anal. Appl.**71** (1979), 95-104.

3.A result of existence of holomorphic maps which admit a given asymptotic expansion. J.A.Barroso (ed.), Advances in Holomorphy, North-Holland Publising Company (1979), 221-231.

4.Differentiable mappings on real nuclear Silva spaces and applications. Rev. Roumaine Math. Pures et appl. Tomo XXV, Nº1, 13-20, Bucarest (1980).

5. A Borel Theorem valid in any real Banach space. Preprint.

DARST, R.B. -

1. Localization properties of basic classes of C^∞ functions. Preceed. Amer. Math. Soc. **46**, Nº1 (1974).

2.Most infinitely differentiable functions are nowhere analiytic. Canad. Math. Bull. Vol. **16** , Nº4 (1973).

[D] DIEUDONNE, J - Fundamentos de Análisis Moderno. Ed. Reverté (1976).

[Di] DINEEN, S. - Complex analysis in locally convex spaces. North-Holland Math. Stu. **57**, Amsterdam - New York - Oxford (1981).

ENFLO, P. - Banach spaces wich can be given an equivalent uniformly convex norm. Israel J. Math.,281-288.

HEBLE, M.P. -

1.Approximation of differentiable functions on a Hilbert space I. C.R.Math.Rep.Acad.Sci.Canada V, Nº4 August (1983), 179-183.

2.Approximation of differentiable functions on a Hilbert space II. Contemporary Math. A.M.S. (1986), 17-33.

3.Approximation problems in analysis and probability. North-Holland Math. Stu. **159**, North-Holland - Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo, (1989).

[Ho] HORVATH, J.- Topological vector spaces and distributions, Vol I, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1966).

[Ja] JARCHOW, H. - Locally convex spaces. B.G.Teubner, Stuttgart (1981).

[Jo] JOSEFSON, B. - Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence. Arkin főr Mathematik, **13**, Nº1 (1975), 79-89.

KELLER, H.H. - Differential calculus in locally convex spaces. Lecture Notes Math. 417, Springer-Verlag, Berlín - Heidelberg - New York (1974).

[K] KÖTHE, G. - Topological vector spaces II, Springer-Verlag, Berlín - Heidelberg - New York (1969).

[Ko] KOPEC, J. - O klasach quasi-analitycznych funkcji wektorowych. Roczniki Polskiego Yowarzystwa Matematycznego, seria I: Prace Matematyczne V (1961), 43-50.

[Ku] KURZWEIL, J.-

1.On approximation in real Banach spaces. Studia Mathematica **14** (1954), 214-231.

2.On approximation in real Banach spaces by analytic operations. Studia Mathematica **16** (1956), 124-129.

3.A characterization of analytic operations in real Banach spaces. Studia Mathematica **14** (1953), 82-83.

LEACH, E.B. - WHITFIELD, J.H.M. - Differentiable functions and rough norms on Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **33**, Nº1 (1972), 120-126.

LEONARD, I.E. - SUNDARESAN, K. - Geometry of Lebesgue-Bochner function spaces-smoothness. Trans. Amer. Math. Soc. **198** (1974), 229-251.

[Lla] LLAVONA, J.G. - Approximation of continuously differentiable functions. L.Nachbin (ed.), North-Holland Mathematics studies **130**, (1986).

[Ma] MANDELBROJT, S. - Séries adhérentes. Régularisation des suites.

Applications. Gauthier-Villars, París (1952).

MATYSZCZYK, C. -

1.Approximation of analytic operators by polinomials in complex B_0-spaces with bounded approximation property. Bull. Acad. Polon. Scien. **XX**, Nº10 (1972), 833-836.

2.Approximation of analytic and continuous mappings by polynomials in Fréchet spaces. Studia Mathematica **60**, Nº3 (1977), 223-

[Me] MEISE - Spaces of differentiable functions and the approximation property. Approximation theory and functional analysis. J.B.Prolla (ed.), North-Holland Publishing Co. (1979), 263-307.

MESHKOV, V.Z. - Smoothness properties in Banach spaces. Studia Mathematica **63** (1978), 111-123.

MONTEL, M.P. - Sur une propriéteé de quasi-analyticité des fonctions de plussieurs variables. Académie des sciences

MOULIS, N. - Approximation de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach. Ann. Inst. Fourier **21**, Nº4 (1971) 293-345.

[Mu] MUJICA, J. - Complex analysis in Banach spaces. North-Holland Math. Stu., **120**, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford (1986).

NACHBIN, L. - Introduction to functional analysis: Banach spaces and differential calculus. Marcel Dekker, INC., New York - Basel (1981).

[Na] NARASIMHAN, R. - Analysis on real and complex manifolds. Masson and Cie, (ed), París (1973).

OLVER, F.W.J. - Asymptotics and special functions. Academic Press, INC., New York - London (1974).

[O] OSTROWSKI, A. - Über quasi-analytische funktionen und bestimmtheit asymptotischer entwickelungen. Acta Math., **53** (1930).

PROLLA, J.B. - Approximation of vector valued functions. North-Holland Math. Stu. North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford (1977).

RESTREPO, G. - Differentiable norms in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 413-414.

[R] RUDIN, W. - Análisis real y complejo. Ed. Alhambra (1985).

[Ru] RUSTON, A.F. - Fredholm theory in Banach spaces. Cambrigde Univ. Press, Cambridge - New York - New Rochelle - Melbourne - Sydney (1986)

[S.J.] SAN JUAN, R. - Sobre la existencia de una función holomorfa que se aproxima asintóticamente a una serie dada con cotas prefijadas, y de una función real indefinidamente derivable en un intervalo con derivadas prefijadas en un punto y acotadas en un intervalo. C.S.I.C. (1951).

[Sch] SCHAEFER, H.H - Espacios vectoriales topológicos. Ed. Teide, Barcelona (1974).

[S] SICIAK, J. - A characterization of analytic functions of n real variables. Studia Mathematica **35**, Nº3 (1969), 293-297.

[Si] SINGER, I. - Bases in Banach spacess I. Springer-Verlag, Berlín - Heidelberg - New York (1970).

SUNDARESAN, K. - Geometry and nonl-inear analysis in Banach spaces. Pacific J.Math. **162** (1982), 487-489.

SUNDARESAN, K. - SWAMINATHAN, S. - Geometry and non-linear analysis in Banach spaces, Pac. J. Math. **102**, Nº1 (1982).

[Tr] TREVES, F. - Topological vector spaces, distributions and kernels. Academic Press, New York - London (1967).

[Wa] WASOW - Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Interscience publ., New York - London - Sydney (1965).

WELLS, J. - Differentiable functions on C_0. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 117-118.

WHITFIELD, J.H.M. - Differentiable functions with bounded nonempty support on Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 145-146.

[Ya] YAMAMURO, S. - Differential calculus in topological lineal spaces. Lec. Not. Math. **374** (1974), Springer-Verlag, Berlín - Heidelberg - New York.

INDICE