



---

# **Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Estadística

**Aplicación Shiny para optimizar carteras de inversión en empresas del IBEX 35**

Autor: Alejandro García Pérez

Tutor: Ricardo Josa Fombellida

Año 2025



## AGRADECIMIENTOS

A los profesores del grado, en especial a mi tutor, Ricardo Josa Fombellida, por los consejos y guías para la elaboración de este trabajo.

A mi familia y amigos por ser un gran apoyo durante todos estos años.



## RESUMEN

En este trabajo se desarrolla una aplicación para optimizar carteras de inversión en empresas del IBEX 35. Esta permite que el usuario decida algunas condiciones que debe cumplir la cartera en la que quiere invertir y después muestra la composición y la proporción a invertir en cada una de las empresas que la conforman.

El punto de partida utilizado es el modelo de Markowitz. Se analizan los modelos: básico, donde las cotizaciones tienen la misma relevancia; corregido, donde las cotizaciones más recientes tienen mayor importancia; con restricción de cardinalidad, estableciendo la cantidad de empresas que forman parte de la cartera; y modificado, donde en lugar de calcular el cuadrado de la desviación media, se utiliza el valor absoluto de la desviación media, y este modelo es conocido como modelo MAD.

Para la elaboración de la aplicación se ha utilizado la librería Shiny de R y para obtener las diferentes carteras se han programado distintos modelos con AMPL.

**Palabras clave:** optimización de carteras, IBEX 35, rendimiento, riesgo, frontera eficiente, modelo MAD, shiny, AMPL.



## ABSTRACT

This Project develops an application for optimizing investment portfolios in IBEX-35 companies. It allows the user to determine the conditions that the portfolio in which they wish to invest must meet and then displays the composition and proportion to be invested in each of the companies within it.

The starting point used is the Markowitz model. The following models are analyzed: basic, where quotes have equal importance; corrected, where the most recent quotes have greater importance; with cardinality restriction, establishing the number of companies included in the portfolio; and modified, where instead of calculating the square of the mean deviation, the absolute value of the mean deviation is used, and this model is known as the MAD model.

The Shiny library of R was used to develop the application, and different models were programmed with AMPL to obtain different portfolios.

Key words: portfolio optimization, IBEX 35, performance, risk, efficient frontier, MAD model, shiny, AMPL.



# Índice

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introducción .....                                           | 1  |
| 1.1 Objetivos.....                                              | 2  |
| 1.2 Estructura .....                                            | 2  |
| 2. Herramientas utilizadas .....                                | 3  |
| 2.1 R .....                                                     | 3  |
| 2.2 RStudio .....                                               | 4  |
| 2.3 AMPL.....                                                   | 5  |
| 2.4 Librerías de R.....                                         | 6  |
| 2.4.1 Shiny.....                                                | 6  |
| 2.4.2 Bslib .....                                               | 6  |
| 2.4.3 rAMPL .....                                               | 6  |
| 3. Marco teórico.....                                           | 7  |
| 3.1 Conceptos básicos en optimización de carteras .....         | 7  |
| 3.2 Modelo de Markowitz .....                                   | 7  |
| 3.2.1 Modelo de Markowitz con corrección de estimadores .....   | 8  |
| 3.2.2 Modelo de Markowitz con restricción de cardinalidad ..... | 9  |
| 3.3 Modelo MAD (Mean Absolute Deviation) .....                  | 9  |
| 4. Descripción de los datos .....                               | 11 |
| 5. Elaboración de la aplicación.....                            | 12 |
| 5.1 Estructura de la aplicación.....                            | 12 |
| 5.2 Funcionalidad implementada .....                            | 14 |
| 5.2.1 Pestaña Lectura .....                                     | 15 |
| 5.2.2 Pestaña Descripción .....                                 | 16 |
| 5.2.3 Pestaña Markowitz corregido .....                         | 17 |
| 5.2.4 Pestaña Markowitz restringido .....                       | 18 |
| 6. Análisis e interpretación de los resultados .....            | 19 |
| 6.1. Evolución temporal de los activos .....                    | 19 |
| 6.2 Modelo de Markowitz .....                                   | 20 |
| 6.3 Modelo de Markowitz con corrección de estimadores .....     | 21 |
| 6.3.1 Valor $p = 0.98$ .....                                    | 21 |
| 6.3.2 Valor $p = 0.94$ .....                                    | 22 |
| 6.3.3 Valor $p = 0.9$ .....                                     | 23 |
| 6.4 Modelo de Markowitz con restricción de cardinalidad .....   | 24 |
| 6.4.1 Cardinalidad 10 y cota 0.01 .....                         | 24 |
| 6.4.2 Cardinalidad 10 y cota 0.03 .....                         | 25 |

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 6.4.3 Cardinalidad 10 y cota 0.04 ..... | 26 |
| 6.4.4 Cardinalidad 10 y cota 0.09 ..... | 27 |
| 6.4.5 Cardinalidad 9 y cota 0.01 .....  | 28 |
| 6.4.6 Cardinalidad 4 y cota 0.01 .....  | 29 |
| 6.4.7 Cardinalidad 2 y cota 0.01 .....  | 30 |
| 6.5 Modelo MAD .....                    | 31 |
| 7. Conclusiones.....                    | 33 |
| 7.1 Comentarios finales .....           | 33 |
| 7.2 Trabajo futuro .....                | 34 |
| 8. Referencias.....                     | 35 |

## Índice de figuras

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 Interfaz de RStudio .....                                                           | 4  |
| Figura 2 Pestaña Lectura de la aplicación .....                                              | 12 |
| Figura 3 Pestaña Descripción de la aplicación.....                                           | 13 |
| Figura 4 Pestaña Markowitz corregido de la aplicación .....                                  | 13 |
| Figura 5 Pestaña Markowitz con restricciones de la aplicación.....                           | 14 |
| Figura 6 Selector del archivo de datos.....                                                  | 15 |
| Figura 7 Marcador de lectura .....                                                           | 15 |
| Figura 8 Selector del carácter decimal .....                                                 | 15 |
| Figura 9 Lector de texto para el separador .....                                             | 15 |
| Figura 10 Lector de fichero .....                                                            | 16 |
| Figura 11 Botones para cambiar de datos.....                                                 | 16 |
| Figura 12 Selector de fechas.....                                                            | 16 |
| Figura 13 Opción individual .....                                                            | 17 |
| Figura 14 Opción grupal .....                                                                | 17 |
| Figura 15 Botón para realizar ejecución.....                                                 | 17 |
| Figura 16 Menú desplegable valor p .....                                                     | 17 |
| Figura 17 Menú desplegable cantidad activos .....                                            | 18 |
| Figura 18 Regulador .....                                                                    | 18 |
| Figura 19 Evolución de los activos durante el periodo establecido .....                      | 19 |
| Figura 20 Frontera eficiente modelo de Markowitz .....                                       | 20 |
| Figura 21 Composición de la cartera modelo Markowitz .....                                   | 20 |
| Figura 22 Frontera eficiente modelo Markowitz estimadores corregidos con valor 0.98 ...      | 21 |
| Figura 23 Composición de la cartera modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.98 ..... | 21 |
| Figura 24 Frontera eficiente modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.94 .....        | 22 |
| Figura 25 Composición de la cartera modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.94 ..... | 22 |
| Figura 26 Frontera eficiente modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.9 .....         | 23 |
| Figura 27 Composición de la cartera modelo Markowitz con valor 0.9 .....                     | 23 |
| Figura 28 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.01 .....              | 24 |
| Figura 29 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.01 .....       | 24 |
| Figura 30 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.03 .....              | 25 |
| Figura 31 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.03.....        | 25 |
| Figura 32 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.04 .....              | 26 |
| Figura 33 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.04.....        | 26 |
| Figura 34 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.09 .....              | 27 |
| Figura 35 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.09.....        | 27 |
| Figura 36 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 9 y cota 0.01 .....               | 28 |
| Figura 37 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 9 y cota 0.01.....         | 28 |
| Figura 38 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 4 y cota 0.01 .....               | 29 |
| Figura 39 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 4 y cota 0.01.....         | 29 |
| Figura 40 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 2 y cota 0.01 .....               | 30 |
| Figura 41 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 2 y cota 0.01.....         | 30 |
| Figura 42 Frontera eficiente modelo MAD.....                                                 | 31 |
| Figura 43 Composición de la cartera modelo MAD .....                                         | 31 |



# 1. Introducción

La optimización de carteras es el proceso de seleccionar la mejora cartera, entendida como una distribución de activos, del conjunto de todas las carteras consideradas, de acuerdo con algún objetivo. El objetivo generalmente maximiza factores como el rendimiento esperado y minimiza costos como el riesgo financiero. Esto lo convierte en un problema de decisiones multiobjetivo.

La teoría moderna de carteras fue introducida en una tesis doctoral de 1952 por Harry Markowitz [1] y se conoce como el modelo de Markowitz. Supone que un inversor desea maximizar el rendimiento esperado de una cartera dependiendo de cualquier cantidad determinada de riesgo. Para las carteras que cumplen con este criterio, conocidas como carteras eficientes, lograr un rendimiento esperado más alto requiere asumir más riesgo, por lo que los inversores se enfrentan a una compensación entre el riesgo y el rendimiento esperado. Esta relación riesgo-rendimiento esperado de las carteras eficientes se representa gráficamente mediante una curva conocida como frontera eficiente. Todas las carteras eficientes, cada una representada por un punto en la frontera eficiente, estarán en principio bien diversificadas.

El problema de optimización de carteras se especifica como un problema de maximización de la utilidad restringida. Las formulaciones comunes de las funciones de utilidad de la cartera lo definen como el rendimiento esperado de la cartera menos un costo de riesgo. El último componente, el costo del riesgo, se define como el riesgo de la cartera multiplicado por un parámetro de aversión al riesgo [2].

En 1991, Hiroshi Konno y Hiroaki Yamazaki [3] propusieron un modelo alternativo al modelo de Markowitz. Este nuevo modelo propone utilizar la desviación media absoluta (mean-absolute deviation) para medir el riesgo. Otra consecuencia de este modelo es que se convierte en un problema de programación lineal en lugar del problema de programación cuadrático que resulta el modelo de Markowitz [4].

La programación no lineal y la programación lineal son herramientas de la investigación operativa para la toma de decisiones. En ellas se optimiza, bien maximizando o bien minimizando, una función objetivo, teniendo en cuenta las diversas restricciones involucradas. En el caso de la programación no lineal, la función objetivo o las restricciones pueden ser no lineales (ver [5], [6], [7]).

El IBEX 35 se creó en 1992 y desde entonces se utiliza como referencia en centenares de productos financieros. Las empresas que forman parte del IBEX 35 son seleccionadas en función de su liquidez y capitalización bursátil. Cada índice de la serie sirve como subyacente para infinidad de productos ligados al mercado español, lo que lo convierte en la insignia de la Bolsa española, BME (Bolsas y Mercados Españoles), en materia de información financiera.

Está compuesto por los 35 valores más líquidos del mercado continuo español. Su composición es revisada trimestralmente por el Comité Asesor Técnico (CAT). Este índice incluye a las empresas más representativas de diversos sectores, como banca, energía, telecomunicaciones, entre otros, [8].

## 1.1 Objetivos

El propósito de este trabajo es crear una aplicación web que permita la interacción con el usuario para después comparar los diferentes resultados obtenidos en la creación de carteras de inversión utilizando el modelo de Markowitz. Respecto de los trabajos anteriormente realizados (ver [9], [10], [11], [12]), en este se incluye el modelo MAD en la aplicación, pasando de un problema cuadrático a un problema lineal. El trabajo también considera los correspondientes modelos variantes del modelo de Markowitz básico: mayor relevancia a los datos más recientes y restringir el número de empresas que forman la cartera de inversión. Para implementar los modelos matemáticos se utiliza AMPL, integrado en R mediante una librería.

## 1.2 Estructura

La memoria del trabajo se desarrolla de la siguiente manera:

- Capítulo 1: Introducción. Contextualización del IBEX 35 y objetivos del proyecto.
- Capítulo 2: Herramientas utilizadas. Explicación de los elementos utilizados para realizar el trabajo.
- Capítulo 3: Marco teórico. Conceptos de optimización de carteras y explicación de los modelos.
- Capítulo 4: Descripción de los datos. Detalles de los datos elegidos.
- Capítulo 5: Elaboración de la aplicación. Explicación de los objetos empleados.
- Capítulo 6: Análisis e interpretación de los resultados. Analizar los resultados obtenidos.
- Capítulo 7: Conclusiones. Comentarios de los resultados y futuro trabajo.
- Referencias

## 2. Herramientas utilizadas

Este capítulo describe las herramientas empleadas para el desarrollo del trabajo. Los gráficos se han realizado con R y la resolución de los modelos se ha conseguido integrando AMPL en R con una librería.

### 2.1 R

R es un lenguaje para el análisis estadístico y gráfico. Se trata de un ambiente de programación formado por un conjunto de herramientas muy flexibles, que pueden ampliarse fácilmente mediante paquetes, librerías o funciones propias. Además, es gratuito y de código abierto (Open Source), parte del proyecto GNU, como Linux o Mozilla Firefox, ver [13].

R se presentó al mercado en 1993 de la mano de sus creadores Robert Gentleman y Ross Ihaka, que desarrollaron la herramienta en el Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland. Sin embargo, la base de sus orígenes se encuentra en el desarrollo del lenguaje S.

Algunas características principales de R

- Lenguaje orientado a objetos: variables, datos y resultados se guardan en memoria como objetos con nombre, lo que facilita aplicar operaciones a conjuntos de valores.
- Lenguaje interpretado: los comandos se ejecutan directamente, sin necesidad de compilación previa, facilitando el trabajo con datos complejos.
- Extensible: posee miles de paquetes que amplían sus capacidades en análisis estadístico, minería de datos, aprendizaje automático, y más.
- Gráficos de alta calidad: permite crear gráficos exportables en formatos como PDF, PNG, JPEG, entre otros.
- Compatible con múltiples sistemas operativos: disponible para Windows, macOS y Linux.
- Interoperabilidad: puede trabajar junto con otros lenguajes y leer datos de software como SPSS, SAS o Excel.
- Capacidad para crear aplicaciones web interactivas: mediante la herramienta Shiny.
- Generación de informes reproducibles y dinámicos: en formatos como PDF, Word o HTML.

## 2.2 RStudio

RStudio es un IDE (entorno de desarrollo integrado) de código abierto, flexible y funcional que se utiliza ampliamente como front-end, es decir, como interfaz gráfico para trabajar con R de la versión 3.0.1 o superior. Además, también se adapta a muchos otros lenguajes de programación como Python o SQL.

Ofrece numerosas funciones útiles como: capacidad para escribir y guardar ficheros reutilizables, fácil acceso a todos los datos importados como a los objetos creados (variables, funciones, etc.), ayuda exhaustiva sobre cualquier objeto; y autocompletado de código, entre otras, ver [14].

Estructura de RStudio:

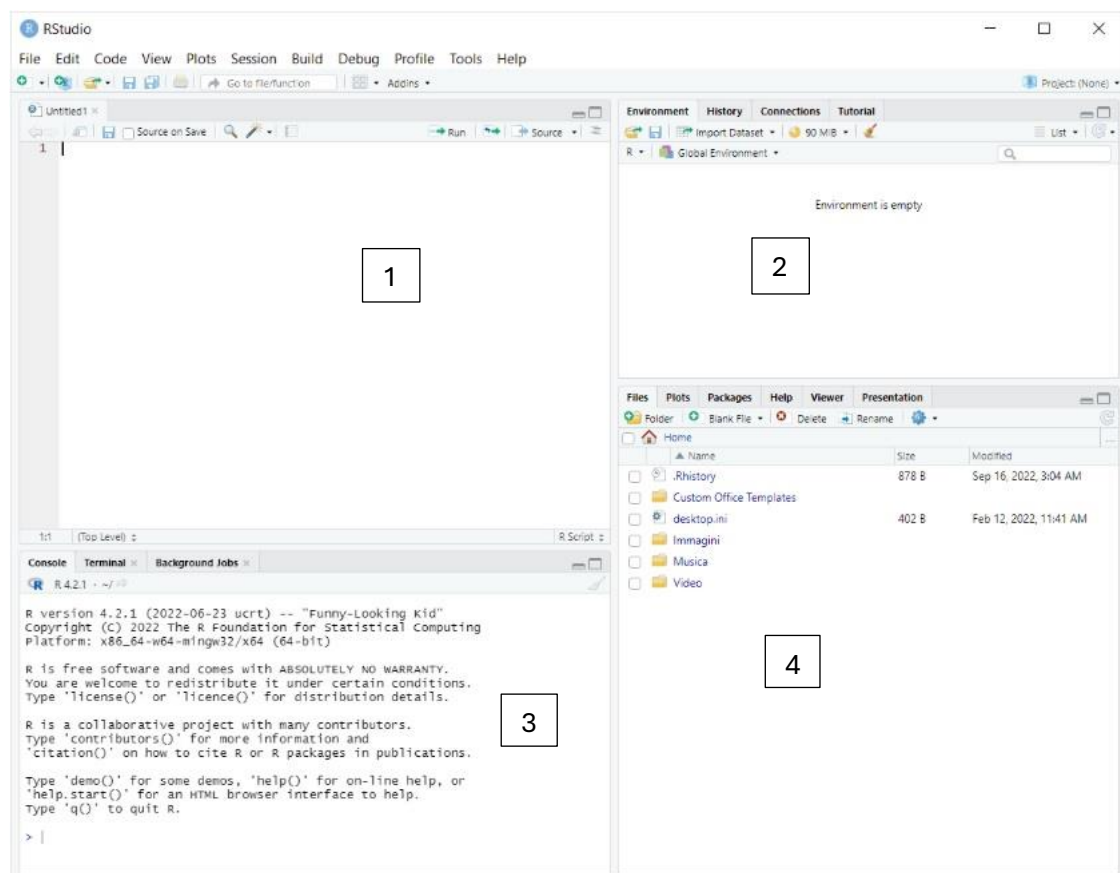


Figura 1 Interfaz de RStudio

Como puede verse en la Figura 1, consta de cuatro paneles:

- 1- El editor, donde se va escribiendo el código y se pueden abrir los ficheros guardados.

2- Aparecen varias pestañas, entre las que destacamos las siguientes:

- (i) Environment: donde se almacenan los objetos creados.
- (ii) History: almacenamiento del historial de órdenes ejecutadas.
- (iii) También destacamos la opción “Import Dataset” que despliega un menú para indicar el tipo de datos que se quieren importar y después muestra una nueva ventana que ayuda en el proceso de importar datos.

3- Aparecen tres pestañas:

- (i) La consola: aparecen las órdenes ejecutadas junto con sus resultados y donde también se puede escribir código.
- (ii) El terminal: para ejecutar comandos.
- (iii) Background Jobs: permite ejecutar otros ficheros en una nueva sesión de RStudio.

4- Aparecen diversas pestañas y se destacan:

- (i) Files: donde se muestran los ficheros.
- (ii) Plots: permite visualizar los gráficos creados.
- (iii) Packages: carga e instala paquetes y librerías.
- (iv) Viewer: aparecen las representaciones interactivas que se realizan.

## 2.3 AMPL

AMPL (A Mathematical Programming Language), (ver [15], [16], [17], [18]), es un lenguaje de programación que proporciona una notación algebraica que permite describir problemas muy complejos de programación matemática de forma muy similar a como se describen matemáticamente. Esto hace que sea sencillo convertir una notación matemática al lenguaje AMPL. Su desarrollo fue posible gracias a Robert Fourer, David Gay y Brian Kernighan.

Soporta diferentes tipos de solvers, es decir, algoritmos para la resolución de los problemas, siendo algunos de ellos de código abierto y otros de software comercial. Habilita una definición concisa y legible de problemas de optimización, abarcando un amplio abanico de estos como pueden ser programación lineal, programación no lineal, programación cuadrática, entre otros.

Esto posibilita construir modelos e integrarlos después en otros lenguajes de programación como R, Python o Matlab.

## 2.4 Librerías de R

A continuación, se explican las librerías y paquetes utilizados para llevar a cabo el desarrollo de este trabajo.

### 2.4.1 Shiny

La estructura de la aplicación se construye en base a las diferentes funcionalidades que permite esta librería.

La librería shiny es un conjunto de paquetes que facilita la creación de aplicaciones web y gráficos interactivos directamente desde R. Toda aplicación shiny está formada por tres componentes que se detallarán en el apartado 5.

### 2.4.2 Bslib

La presentación de la aplicación web puede personalizarse gracias a las varias funcionalidades de las que se dispone en esta librería.

La librería bslib es un conjunto de paquetes con herramientas que permiten personalizar la interfaz de usuario que se quiere generar para la aplicación. Sus componentes están diseñados para funcionar en otros contextos, como por ejemplo en R Markdown.

### 2.4.3 rAMPL

La integración de AMPL en la aplicación se fundamenta en el uso de esta librería, ver [19].

La librería rAMPL proporciona una interfaz que permite acceder a las funciones de AMPL desde R. Para ello hay que tener instalado con anterioridad AMPL y así R puede acceder al directorio donde se ha realizado la instalación.

La generación de modelos y la interacción con el algoritmo escogido son gestionadas directamente por AMPL y la librería simplemente actúa como un intermediario entre AMPL y R.

### 3. Marco teórico

Este apartado se explican los conceptos básicos de la optimización de carteras. También se explica en profundidad el modelo de Markowitz, los modelos variantes de éste y el modelo MAD.

#### 3.1 Conceptos básicos en optimización de carteras

La optimización de carteras trata de seleccionar la mejor combinación de activos para conseguir un objetivo previamente propuesto. El objetivo más común es maximizar la rentabilidad minimizando el riesgo al mismo tiempo. Definimos los conceptos básicos relacionados con esta área:

- Activo: en nuestro caso serán las diferentes empresas del IBEX 35 en las que vamos a invertir.
- Cartera: combinación de la distribución del capital entre los distintos activos.
- Frontera eficiente de rendimiento-riesgo: conjunto de carteras eficientes, es decir, aquellas que ofrecen la mayor rentabilidad para cada nivel de riesgo, y el mínimo riesgo para cada nivel de rentabilidad. No hay una mejor cartera que la cartera eficiente en cuanto riesgo y rentabilidad.

#### 3.2 Modelo de Markowitz

Es el modelo base del trabajo. El objetivo del inversor es maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo ambos inherentes a la inversión. Además, nos ofrece diversificar la cartera, lo que es una de las principales características de este modelo.

El modelo de Markowitz tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\min f(x) &= \mu \sigma^2(x) - r(x) = \mu \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j - \sum_{j=1}^n x_j r_j \\ \text{s.a. : } &\sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ &x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\end{aligned}$$

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la cartera de inversión y  $n$  el número total de activos.
- $x_j$  es la proporción del capital total invertido en el activo  $j, j = 1, \dots, n$ .
- $f(x)$  es la función objetivo. El primer término  $\sigma^2(x)$  está relacionado con el riesgo de la cartera, y el segundo  $r(x)$  con el rendimiento esperado de la cartera.
- $R(x)$  es el rendimiento de la cartera, definido de la siguiente manera:

$R(x) = \sum_{j=1}^n x_j R_j$ , donde  $R_j$  es la rentabilidad del activo  $j, j = 1, \dots, n$ . Con ello se tiene que  $E R(x) = r(x)$  y  $Var R(x) = \sigma^2(x)$ .

-  $r_j$  es el rendimiento diario esperado del activo  $j, j = 1, \dots, n$ , es decir,  $r_j = E R_j$  y  $\sigma_{ij}$  es la covarianza entre  $R_i$  y  $R_j, i, j = 1, \dots, n$ .

El parámetro  $\mu$  que forma parte de la función, condiciona el objetivo de esta dependiendo de su valor, que está definido entre 0 e infinito. Cuanto más cercano a 0, se pondrá más énfasis en maximizar el rendimiento; y cuanto mayor sea su valor, se priorizará minimizar el riesgo. Dando diferentes valores a  $\mu$  obtendremos las diferentes carteras que forman la frontera eficiente.

Para elegir una cartera de la frontera eficiente, debemos utilizar algunos valores estadísticos disponibles y calcular el siguiente cociente que nos permite comparar las diversas carteras:

$$SR(x) = \frac{r(x) - \bar{r}}{\sigma(x)}$$

Este cociente se llama ratio de Sharpe, ver [20]. Permite medir la relación entre la rentabilidad que ofrece una inversión en relación con el riesgo que se asume con ella. El término  $\bar{r}$  se corresponde con el rendimiento medio del activo sin riesgo. En nuestro caso no tenemos datos de un activo sin riesgo y por ello este término será igual a 0 en el cociente. La cartera de la frontera eficiente que nos interesa encontrar es aquella que tiene el mayor valor de ratio de Sharpe.

### 3.2.1 Modelo de Markowitz con corrección de estimadores

Los estimadores para el rendimiento diario esperado del activo  $j, j = 1, \dots, n$ , vienen dados por la siguiente expresión, donde  $T$  es el número total de observaciones a lo largo del tiempo para el activo  $j, j = 1, \dots, n$ :

$$r_j = E R_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j(t), j = 1, \dots, n$$

Para conseguir que las observaciones más recientes tengan una mayor relevancia, cambiamos la expresión anterior por la siguiente:

$$r_j = \frac{\sum_{t=1}^T p^{T-t} R_j(t)}{\sum_{t=1}^T p^{T-t}}$$

Dependiendo del valor del parámetro  $p$  variará el peso que se le da a las observaciones. Con  $p = 1$  se tiene la primera expresión de  $r_j$  donde todas las observaciones tienen la misma importancia. Variando este valor obtendremos diferentes pesos para las observaciones más lejanas y para evitar que los pesos tiendan a 0 rápidamente, se suele usar el valor 0.9. En nuestro caso, dispondremos de algunos valores entre 0.9 y 1 para comparar resultados. El resto del modelo es idéntico al explicado.

### 3.2.2 Modelo de Markowitz con restricción de cardinalidad

Para poder restringir el número total de activos que conforman la cartera es necesario incluir nuevas variables en el modelo. Estas nuevas variables  $y_j, j = 1, \dots, n$ , tienen que ser binarias, es decir, que puedan tomar sólo los valores 0 y 1. En caso de valer 1 se invierte en el activo  $j$  y en caso contrario vale 0.

Es necesario asociar estas variables a las ya existentes  $x_j$  y también hay que tener otra restricción únicamente formada con las variables binarias que se encargue de la cardinalidad. Por ello se incluyen las siguientes restricciones en el modelo:

$$\sum_{j=1}^n y_j = N$$

$$L_j y_j \leq x_j \leq S_j y_j, j = 1, \dots, n$$

$$y_j \in \{0,1\}, j = 1, \dots, n$$

- $N$  es el número total de activos que conforman la cartera, siendo  $N \leq n$ .
- $L_j$  y  $S_j$  son las cotas inferior y superior, respectivamente. Se ha establecido como cota superior  $S_j = 1$  y como valor inicial de la cota inferior  $L_j = 0.01$ , permitiendo aumentar este valor hasta la cantidad  $1/N$ .

### 3.3 Modelo MAD (Mean Absolute Deviation)

En el modelo de Markowitz, en la función objetivo tenemos el término  $\sigma^2(x) = \text{Var } R = E (R(x) - r(x))^2$ . Con ello estamos calculando la esperanza del cuadrado de la diferencia entre el rendimiento de la cartera,  $R(x)$ , y el rendimiento esperado de la cartera,  $r(x)$ , permitiendo medir el riesgo.

El modelo MAD calcula la esperanza del valor absoluto de la misma diferencia, es decir,  $E |R(x) - r(x)|$ . El uso del valor absoluto otorga algunas propiedades importantes al modelo, y entre ellas se destaca que este modelo garantiza que las carteras producidas no están estocásticamente dominadas (en segundo orden) por otras carteras, ver [21].

Antes de formular el modelo, hay que tener en cuenta dos expresiones que nos permiten entender la formulación del modelo.

La primera expresión es  $E |R(x) - r(x)|$ , siendo esta igual a:

$$E |\sum_{j=1}^n x_j R_j - \sum_{j=1}^n x_j r_j| = E |\sum_{j=1}^n x_j (R_j - r_j)|.$$

La segunda expresión es  $r_j = E R_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,

El modelo MAD tiene la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} \min f(x) = \mu ri(x) - r(x) &= \mu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j) \right| - \sum_{j=1}^n x_j r_j \\ \text{s.a. : } \sum_{j=1}^n x_j &= 1 \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la cartera de inversión y  $n$  el número total de activos.
- $x_j$  es la proporción del capital total invertido en el activo  $j, j = 1, \dots, n$ .
- $f(x)$  es la función objetivo. El primer término  $ri(x)$  está relacionado con el riesgo de la cartera, y el segundo  $r(x)$  con el rendimiento esperado de la cartera.
- $r_j$  es el rendimiento diario esperado del activo  $j, j = 1, \dots, n$ , es decir,  $r_j = E R_j$ .
- $R_j(t)$  es la rentabilidad del activo  $j, j = 1, \dots, n$  en el instante  $t = 1, \dots, T$ , donde  $T$  es el número total de observaciones a lo largo del tiempo para el propio activo.

El parámetro  $\mu$  que forma parte de la función, sigue teniendo la misma interpretación que la explicada en el modelo de Markowitz en la sección 3.2.

Con este nuevo modelo seguimos teniendo un problema no lineal porque el valor absoluto no es un problema lineal. Sin embargo, es muy sencillo convertir este problema en uno de ellos. Para eso necesitamos unas nuevas variables  $y_t, t = 1, \dots, T$ . Estas nuevas variables se ponen en lugar del valor absoluto en la función objetivo y se incluyen en el modelo unas nuevas restricciones.

El modelo MAD tiene finalmente la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} \min f(x) = \mu ri(x) - r(x) &= \mu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t - \sum_{j=1}^n x_j r_j \\ \text{s.a. : } \sum_{j=1}^n x_j &= 1 \\ -y_t &\leq \sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j), t = 1, \dots, T \\ \sum_{j=1}^n x_j (R_j(t) - r_j) &\leq y_t, t = 1, \dots, T \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \\ y_t &\geq 0, t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

## 4. Descripción de los datos

En este trabajo se han recogido datos de diez empresas que forman parte del IBEX 35, teniendo información desde el 4 de enero del año 2021 hasta el 3 de enero del año 2025, abarcando un periodo de 4 años. De esta forma se evita el año 2020 y las anomalías asociadas a la pandemia, mientras que se podrán visualizar los efectos debidos a la guerra de Ucrania iniciada en febrero del año 2022.

Las empresas seleccionadas han sido las siguientes: Endesa, Iberdrola, Enagas, Naturgy, Bankinter, Caixa, Santander, Unicaja, Sabadell y BBVA. Se distinguen dos sectores que agrupan todas estas empresas: energético y banca, cada uno formado con cuatro y seis empresas respectivamente (Endesa, Iberdrola, Enagas y Naturgy en el energético; y Bankinter, Caixa, Santander, Unicaja, Sabadell y BBVA en la banca).

Para conseguir los datos se ha utilizado la web Yahoo Finance [22], donde podremos visualizar los datos al seguir los siguientes pasos: buscar IBEX 35, seleccionar la opción de “Componentes”, elegir una de las empresas, seleccionar “Datos históricos” y finalmente establecer el periodo de tiempo elegido.

Al seguir estos pasos, podemos ver una tabla con diferentes columnas, concretamente las columnas “Fecha”, “Abrir”, “Máx.”, “Min”, “Cerrar”, “Cierre ajustado”, y “Volumen”. Se han seleccionado las dos primeras columnas, decidiendo así utilizar los datos de la columna “Abrir” que hacen referencia a los valores de apertura que difieren de un día a otro.

Con estos datos obtenemos un rendimiento y riesgo para cada empresa durante el periodo establecido y se recogen en la siguiente tabla:

| Empresa   | Rendimiento | Riesgo    |
|-----------|-------------|-----------|
| Endesa    | -0.0003229  | 0.0001583 |
| Iberdrola | 0.0002221   | 0.0001702 |
| Enagas    | 0.0000359   | 0.0001819 |
| Naturgy   | 0.0003382   | 0.0002452 |
| Bankinter | 0.0010173   | 0.0003657 |
| Caixa     | 0.0010598   | 0.0003667 |
| Santander | 0.0006915   | 0.0003478 |
| Unicaja   | 0.0007769   | 0.0004766 |
| Sabadell  | 0.0019257   | 0.0006352 |
| BBVA      | 0.0009821   | 0.0003636 |

## 5. Elaboración de la aplicación

Antes de comenzar a programar el diseño de la aplicación se han programado los distintos modelos en AMPL. Además, se ha creado un fichero con extensión “.txt” donde se han escrito los posibles valores que toma el parámetro  $\mu$  en los diferentes modelos.

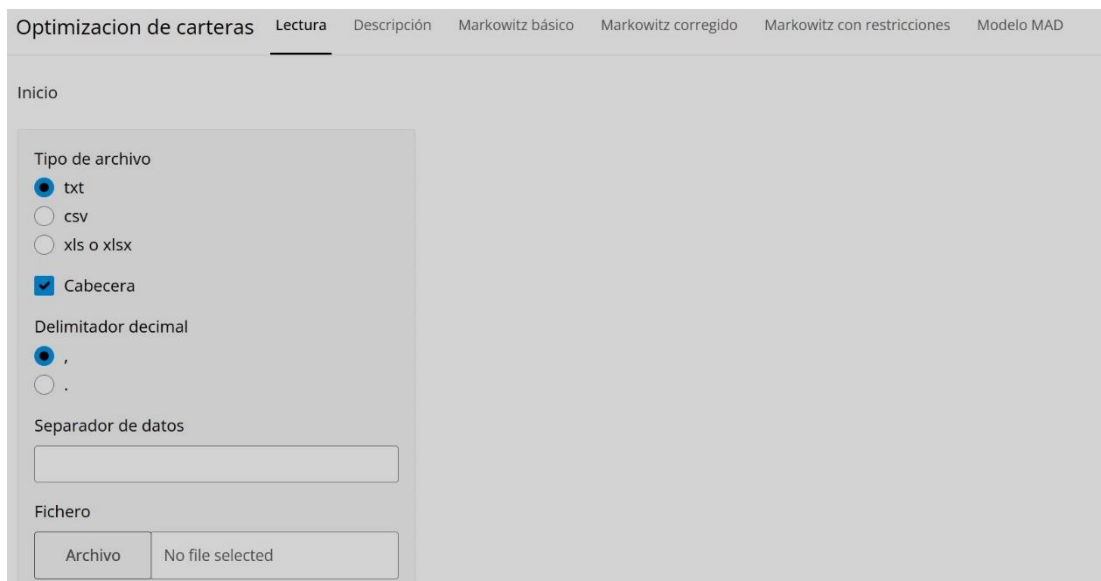
### 5.1 Estructura de la aplicación

Para desarrollar una aplicación utilizando el paquete shiny, hay que programar las tres componentes que conforman su estructura y que explicamos a continuación:

- UI: son las siglas en inglés de User Interface, es decir, se trata de la interfaz de usuario.

Es la imagen y forma que adquiere la aplicación para que el usuario interactúe con la aplicación pudiendo solicitar datos o mostrar resultados, entre otras posibilidades.

En este caso, se han creado seis pestañas. La primera (“Lectura”) ofrece un menú de opciones para leer los datos, tal y como se puede ver en la Figura 2. Entre las diferentes opciones ofrece elegir el tipo de extensión del fichero, leer la cabecera del fichero como el nombre de las variables, seleccionar el símbolo que determina los decimales de un número, el separador de datos en el fichero y un botón para seleccionar el fichero.



Optimización de carteras

Lectura Descripción Markowitz básico Markowitz corregido Markowitz con restricciones Modelo MAD

Inicio

Tipo de archivo

☒ txt

☐ csv

☐ xls oxlsx

☒ Cabecera

Delimitador decimal

☒ ,

☐ .

Separador de datos

Fichero

Archivo No file selected

Figura 2 Pestaña Lectura de la aplicación

La segunda pestaña (“Descripción”), como puede verse en la Figura 3, permite visualizar la evolución de los activos o la evolución de los rendimientos a lo largo del tiempo, de manera grupal o individual en cada situación, y para un periodo de tiempo establecido.

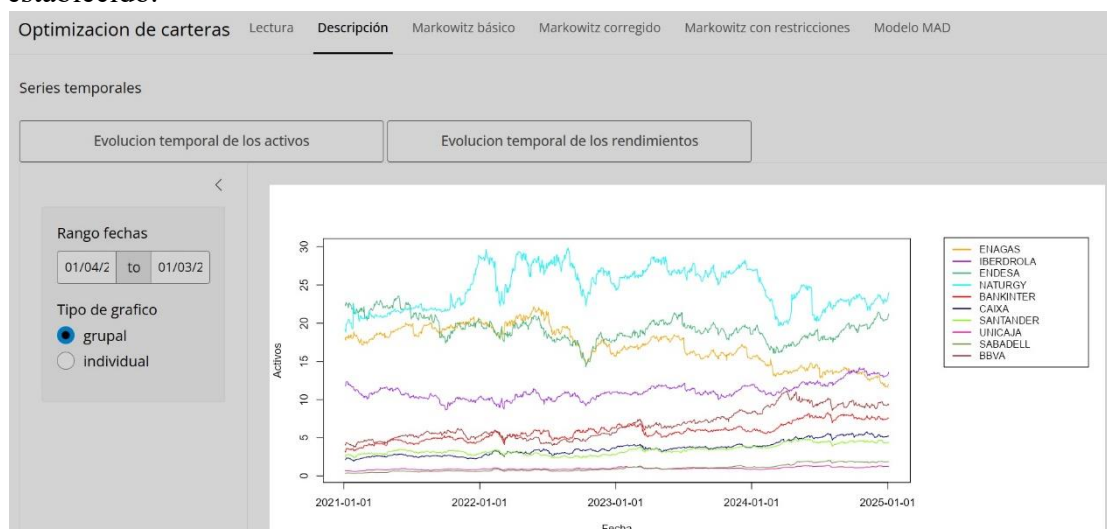


Figura 3 Pestaña Descripción de la aplicación

La tercera pestaña (“Markowitz básico”) únicamente muestra el resultado del modelo de Markowitz.

La cuarta pestaña (“Markowitz corregido”), como puede verse en la Figura 4, aplica el modelo de Markowitz con corrección de estimadores, permitiendo variar el valor del parámetro  $p$ . Además, al pulsar el botón ejecutar, aparte de los gráficos resultantes, muestra un mensaje con el número de observaciones que se utilizan respecto del total junto con el porcentaje correspondiente y que varían dependiendo del valor del parámetro. Cuando el peso que se le da a una observación es menor o igual a  $10e-8$  se ha considerado que el peso es igual a 0, obteniéndose prácticamente los mismos resultados.

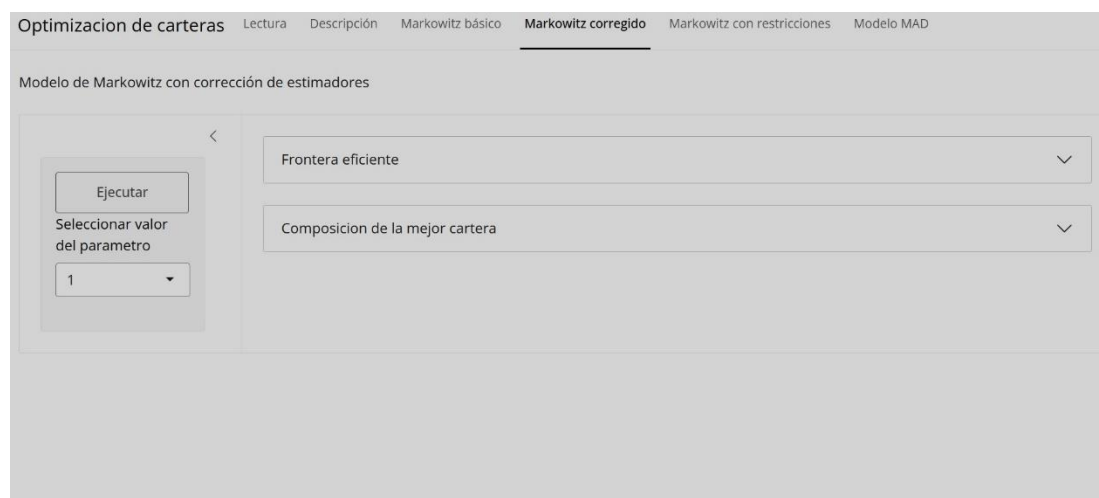


Figura 4 Pestaña Markowitz corregido de la aplicación

La quinta pestaña (“Markowitz con restricciones”), como se muestra en la Figura 5, utiliza el modelo de Markowitz con restricción de cardinalidad, permitiendo variar el número total de activos que forman la cartera, así como el valor de la cota inferior que indica la cantidad mínima a invertir en cada activo cuyo valor máximo dependerá del número de activos elegido para formar la cartera.

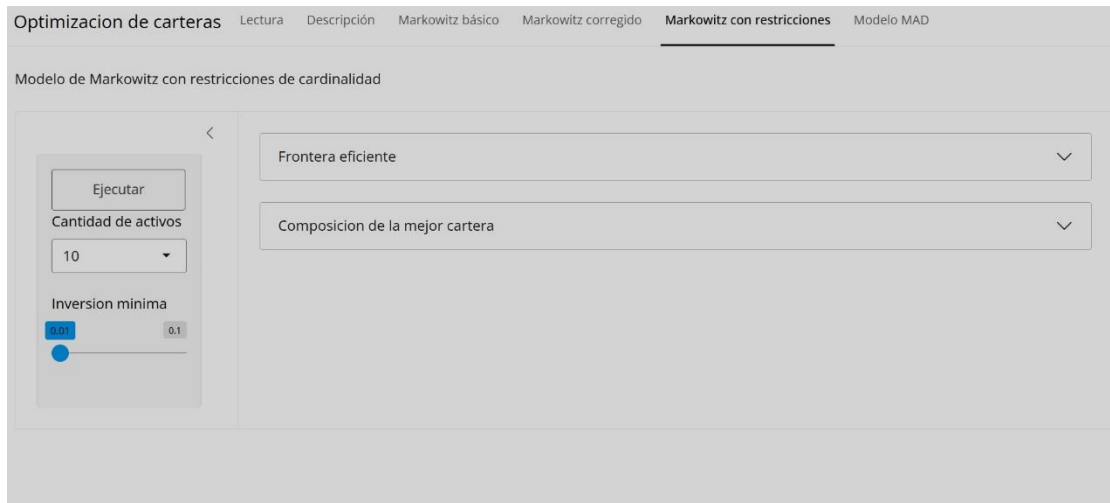


Figura 5 Pestaña Markowitz con restricciones de la aplicación

La sexta pestaña (“Modelo MAD”) solamente muestra el resultado del modelo MAD.

- Server: se encarga de especificar la funcionalidad de la aplicación.

Define los gráficos que se tienen que generar al seleccionar una opción o los cálculos que se tienen que realizar al pulsar un botón. También se especifican las leyendas que acompañan a los gráficos y como estas pueden variar dependiendo de los valores elegidos para los parámetros.

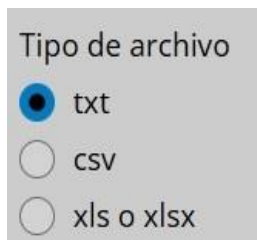
- shinyApp: es la función de la librería shiny que ejecuta la aplicación al indicar cuál es la interfaz y el servidor que tiene que utilizar.

## 5.2 Funcionalidad implementada

En este trabajo casi todas las pestañas de la aplicación ofrecen algún tipo de funcionalidad al usuario exceptuando a las pestañas correspondientes al modelo de Markowitz y al modelo MAD, donde únicamente se muestran los gráficos resultantes relacionados con ambos modelos.

A continuación, se explica cada uno de los distintos elementos implementados en las diferentes pestañas junto con las funcionalidades que desempeñan:

### 5.2.1 Pestaña Lectura

Un panel de selección de archivos con el título "Tipo de archivo". Contiene tres opciones de radio: "txt" (seleccionada), "csv" y "xls oxlsx".

Tipo de archivo

☒ txt

☐ csv

☐ xls o xlsx

Figura 6 Selector del archivo de datos

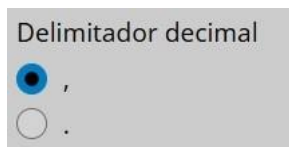
Selector de opciones: puede verse en la Figura 6 que permite establecer el tipo de extensión del archivo de datos.

Un panel de selección con el título "Cabecera". Contiene una única opción de checkbox marcada con "Cabecera".

☒ Cabecera

Figura 7 Marcador de lectura

Marcador: en la Figura 7, se indica si durante la lectura del fichero se debe leer la primera línea como si fueran los nombres de las variables.

Un panel de selección de caracteres decimales con el título "Delimitador decimal". Contiene dos opciones de radio: "," (seleccionada) y ".".

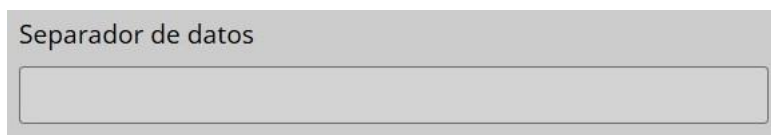
Delimitador decimal

☒ ,

☐ .

Figura 8 Selector del carácter decimal

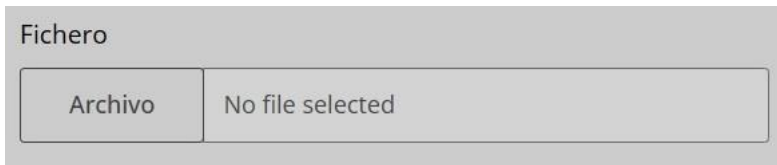
Selector de opciones: en la Figura 8, se permite elegir el carácter que establece un número con decimales.

Un panel con el título "Separador de datos" que contiene un campo de entrada de texto vacío.

Separador de datos

Figura 9 Lector de texto para el separador

Lector de texto: la Figura 9, se utiliza el símbolo escrito para separar los datos durante la lectura del fichero.



*Figura 10 Lector de fichero*

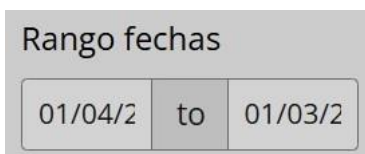
Botón de lectura: en la Figura 10, se permite elegir el fichero del que se quieren leer los datos.

### 5.2.2 Pestaña Descripción



*Figura 11 Botones para cambiar de datos*

Botones: la Figura 11 muestra varios botones y al pulsar cada botón se establecen los datos que se quieren visualizar, los activos o los rendimientos.



*Figura 12 Selector de fechas*

Rango de fechas: en la Figura 12 puede verse el periodo de fechas elegido y cuyo rango puede variar a elección del usuario.

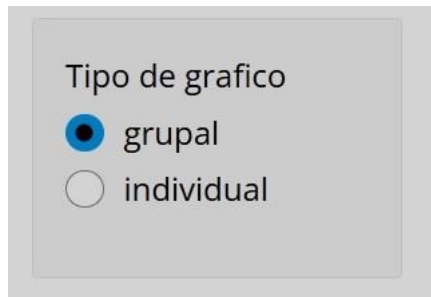


Figura 14 Opción grupal

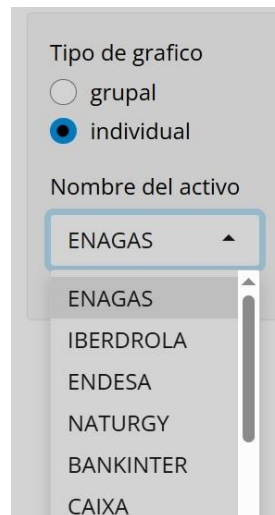


Figura 13 Opción individual

Selector de opciones: permite indicar el modo en el que se muestran los datos indicados, si de manera grupal o individual, como puede verse en la Figura 13. Si se elige la opción individual, visible en la Figura 14, se habilita un menú desplegable donde seleccionar concretamente que activo o rendimiento se quiere visualizar.

### 5.2.3 Pestaña Markowitz corregido

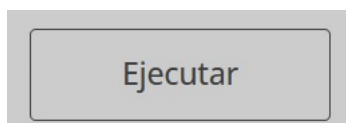


Figura 15 Botón para realizar ejecución

Botón: la Figura 15 muestra el botón que al pulsarlo se comienza a resolver el modelo planteado con los valores de los parámetros elegidos.

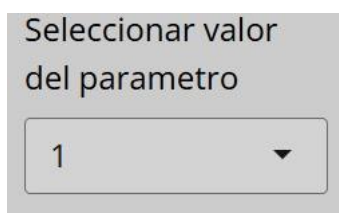


Figura 16 Menú desplegable valor  $p$

Menú desplegable: la Figura 16 permite establecer el valor del parámetro  $p$  con el que se realizará la corrección de los estimadores y se resolverá el modelo.

#### 5.2.4 Pestaña Markowitz restringido

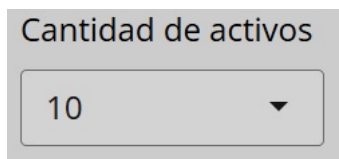


Figura 17 Menú desplegable cantidad activos

Menú desplegable: la Figura 17 permite establecer el número total de activos que conforman la cartera. Sus posibles valores van desde el número total de activos disponibles en los datos hasta 1.



Figura 18 Regulador

Regulador: en la Figura 18, se permite seleccionar el valor para la cota de mínima inversión dentro de un intervalo determinado y que varía en función de la cantidad total de activos que conforman la cartera.

## 6. Análisis e interpretación de los resultados

En esta sección se muestran y analizan algunos resultados obtenidos en el proyecto.

### 6.1. Evolución temporal de los activos

El primer gráfico que vamos a analizar se trata de la evolución de las diferentes empresas a lo largo del tiempo.

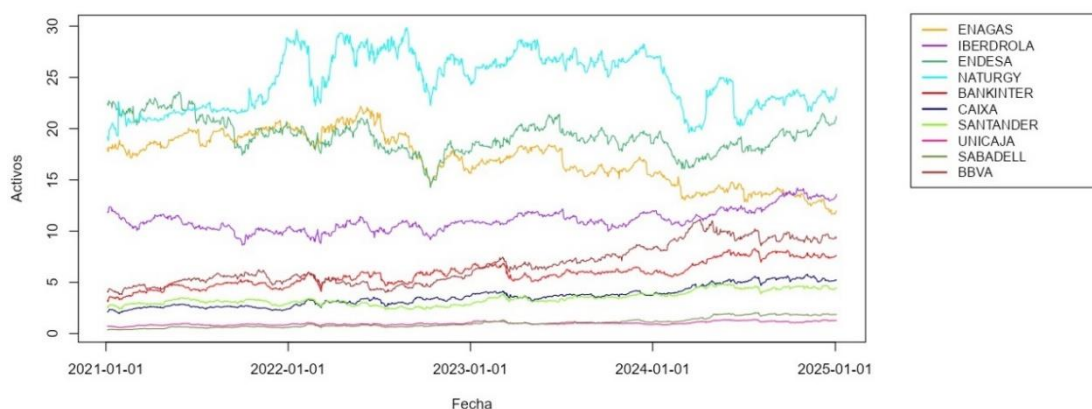


Figura 19 Evolución de los activos durante el periodo establecido

Las empresas Enagas y Endesa tienen un menor valor al finalizar el periodo que al inicio, como puede verse en la Figura 19. La empresa Unicaja parece haberse mantenido casi constante durante todo el intervalo de tiempo estudiado. El resto de las empresas presentan un mayor valor al final del tiempo estudiado que en sus inicios, siendo muy leve en el caso de la empresa Sabadell.

Destacamos como poco después de la fecha 2022-01-01, visible en el gráfico, puede contemplarse como todas las empresas presentan un decrecimiento. Esto es debido al momento de gran incertidumbre producido por la guerra de Ucrania que inició en febrero de 2022. Algunas empresas presentan un mayor descenso que otras, destacando Naturgy, que es la empresa con mayor descenso durante ese mes de febrero.

## 6.2 Modelo de Markowitz

A continuación, analizamos los gráficos resultantes al utilizar el modelo de Markowitz.

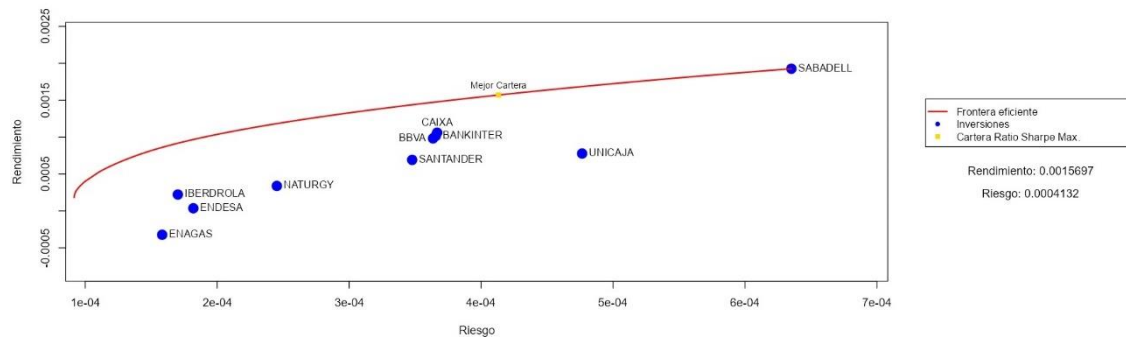


Figura 20 Frontera eficiente modelo de Markowitz

La Figura 20 muestra la frontera eficiente resultante y la obtención del rendimiento y riesgo de la mejor cartera al utilizar el ratio de Sharpe. Podemos ver como obtenemos un rendimiento del 0.15697% y un riesgo igual a 0.04132%. Destacamos que la empresa Sabadell se encuentra en la frontera eficiente, indicando que es el mejor activo en el que invertir. También se destaca como las empresas BBVA, Caixa y Bankinter parecen tener un comportamiento muy similar en cuanto al rendimiento y riesgo.

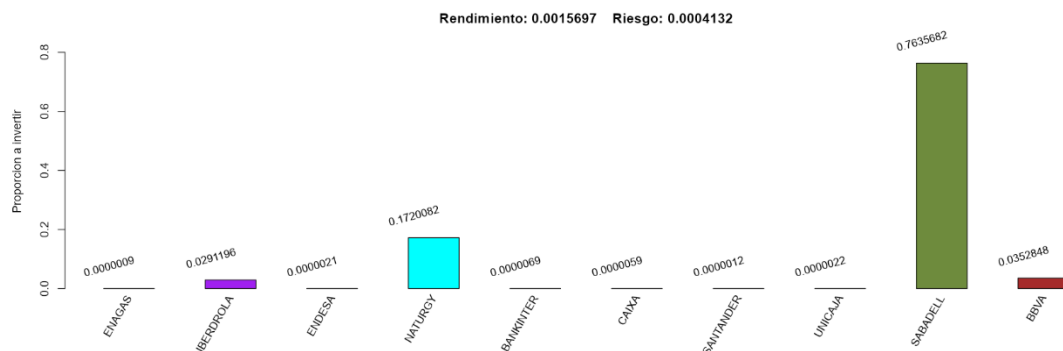


Figura 21 Composición de la cartera modelo Markowitz

En la Figura 21 podemos analizar la composición de la mejor cartera encontrada, donde se destacan cuatro empresas entre el resto por su proporción de inversión. De menor a mayor valor tenemos a las empresas Iberdrola, BBVA, Naturgy y Sabadell que reciben unos porcentajes de inversión igual a 2.91196%, 3.52848%, 17.20082% y 76.35682%, respectivamente.

## 6.3 Modelo de Markowitz con corrección de estimadores

En este caso vamos a analizar varias situaciones seleccionando diferentes valores para el parámetro  $p$ .

### 6.3.1 Valor $p = 0.98$

En primer lugar, hay que indicar que, al determinar este valor del parámetro, se utilizan el 77.85% de las observaciones totales, concretamente las últimas 798.

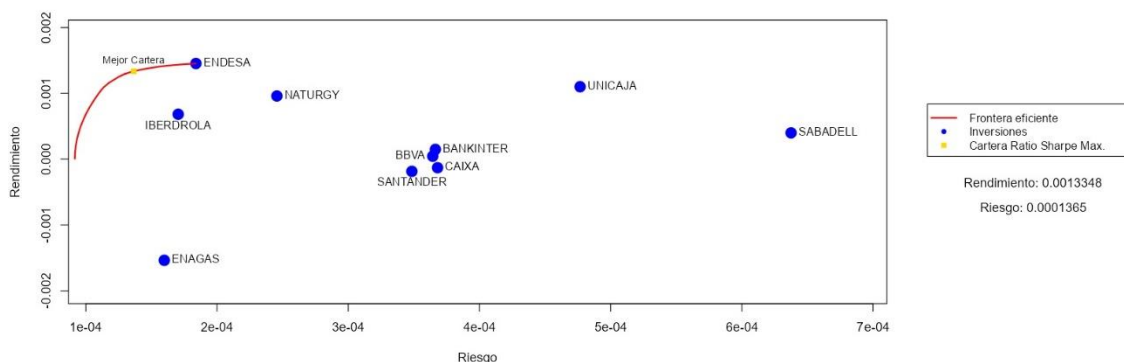


Figura 22 Frontera eficiente modelo Markowitz estimadores corregidos con valor 0.98

En la frontera eficiente de la Figura 22, ahora encontramos a la empresa Endesa en lugar de Sabadell, que es la empresa más alejada. También se puede ver como las empresas relacionadas con el sector energético están más cerca de la frontera eficiente que las del sector de la banca. También destacamos como las empresas Bankinter, Caixa, Santander y BBVA parecen tener un comportamiento muy similar en cuanto a rendimiento y riesgo, aunque Santander parece tener una ligera diferencia respecto al resto.

La mejor cartera tiene un rendimiento igual a 0.13348% y un riesgo de 0.01365% . Vemos como el riesgo a disminuido en mayor medida que el rendimiento si los comparamos con el riesgo y rendimiento del modelo de Markowitz.

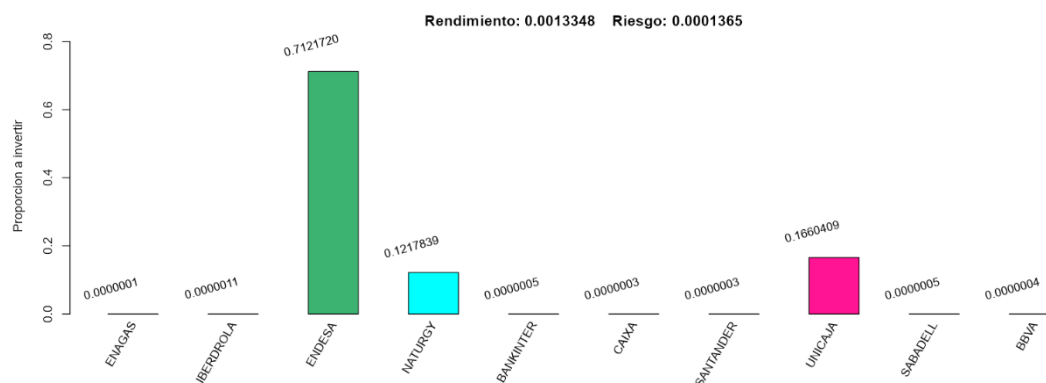


Figura 23 Composición de la cartera modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.98

La mejor cartera en este caso tiene tres empresas que destacan entre el resto, como puede verse en la Figura 23. De menor a mayor proporción de inversión se tratan de las empresas Naturgy, Unicaja y Endesa, con unas inversiones del 12.17839%, 16.60409% y 71.2172%, respectivamente. Destaca el hecho de que una empresa del sector de la banca como es Unicaja destaque al formar parte de la mejor cartera en lugar de una de las empresas del sector energético que se encuentran más cerca de la frontera eficiente.

### 6.3.2 Valor $p = 0.94$

Con este valor del parámetro se utilizan el 25.46% de las observaciones totales, específicamente las últimas 261.

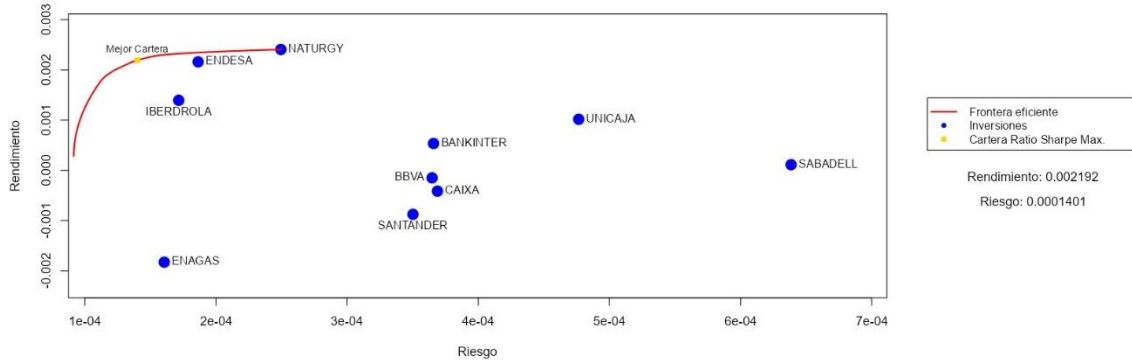


Figura 24 Frontera eficiente modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.94

En la Figura 24, en la frontera eficiente encontramos ahora a la empresa Natrurgy en lugar de Endesa, aunque está se encuentra muy próxima a la frontera. Las empresas del sector energético siguen más cerca de la frontera eficiente que las del sector de la banca. Ahora parece que únicamente las empresas Caixa y BBVA tienen un comportamiento similar en cuanto al rendimiento y el riesgo; y las empresas Bankinter y Santander se han alejado aún más del grupo visto en el caso anterior.

La mejor cartera tiene un rendimiento del 0.2192% y un riesgo del 0.01401% .

El rendimiento ha aumentado respecto del caso anterior y el riesgo ha aumentado muy poco. Estos cambios respecto del modelo de Markowitz también son notables en el rendimiento y el riesgo, siendo mayor el cambio en el rendimiento.

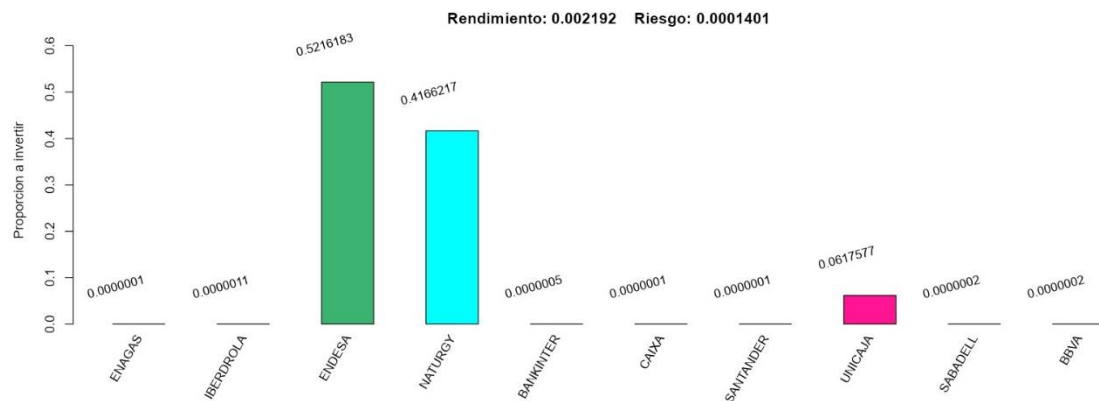


Figura 25 Composición de la cartera modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.94

La mejor cartera, que se muestra en la Figura 25, vuelve a tener 3 empresas que destacan entre el resto. De menor a mayor proporción de inversión se tratan de las empresas Unicaja, Natrurgy y Endesa, con unas inversiones del 6.17577%, 41.66217% y 52.16183%, respectivamente. Destacamos la gran diferencia que ha obtenido Natrurgy que ha sido algo mayor a la triplicación del caso anterior. Se vuelve a destacar la notoria presencia de una empresa del sector de la banca como es Unicaja en lugar de una empresa del sector energético teniendo en cuenta lo comentado en el caso anterior.

### 6.3.3 Valor $p = 0.9$

En esta ocasión se utilizan el 14.92% de las observaciones totales, equivalente a las últimas 153.

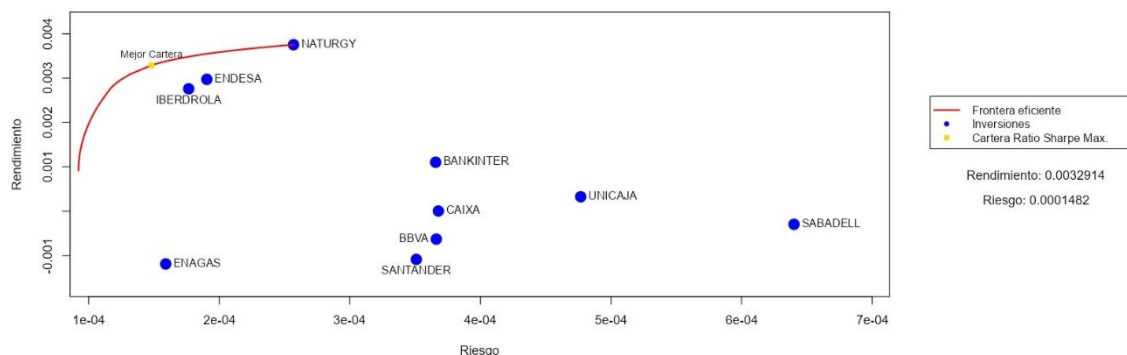


Figura 26 Frontera eficiente modelo Markowitz estimadores corregidos valor 0.9

En la frontera eficiente de la Figura 26 volvemos a encontrar a la empresa Naturgy. Las empresas del sector energético continúan más próximas a la frontera eficiente que las del sector de la banca, que parecen haberse alejado.

La mejor cartera tiene un rendimiento igual a 0.32914% y un riesgo de 0.01482%.

El rendimiento ha vuelto a incrementarse respecto del caso anterior y el riesgo ha aumentado ligeramente.

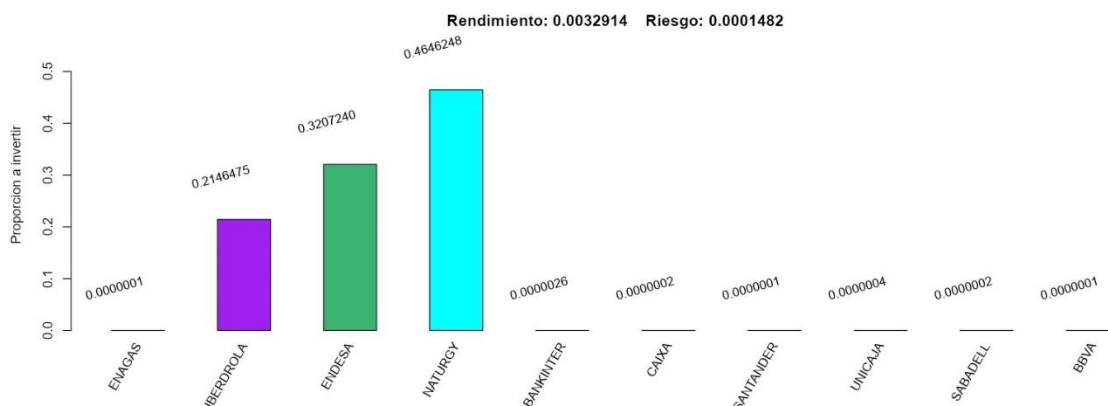


Figura 27 Composición de la cartera modelo Markowitz con valor 0.9

La mejor cartera, mostrada en la Figura 27, sigue teniendo tres empresas que sobresalen del resto. De menor a mayor proporción de inversión se tratan de las empresas Iberdrola, Endesa y Naturgy, con unas inversiones del 21.46475%, 32.0724% y 46.46248%, respectivamente.

En esta ocasión la empresa Natrurgy es la que más inversión recibe y se destaca que en esta cartera las empresas destacadas pertenecen únicamente al sector energético.

## 6.4 Modelo de Markowitz con restricción de cardinalidad

En este apartado vamos a analizar diferentes situaciones al seleccionar diferentes cotas mínimas de inversión y determinado número de empresas que conformen la cartera.

### 6.4.1 Cardinalidad 10 y cota 0.01

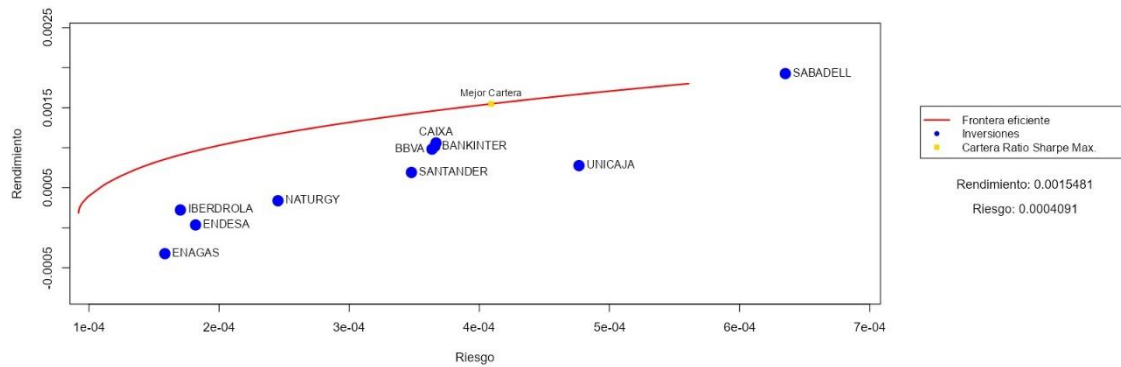


Figura 28 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.01

En la Figura 28 observamos que la frontera eficiente es casi la misma que en el modelo de Markowitz original salvo que en esta ocasión es más corta sin llegar hasta la empresa Sabadell.

La mejor cartera seleccionada tiene un rendimiento igual a 0.15481% y un riesgo de 0.04091%. Estos valores son muy similares al modelo de Markowitz original que se

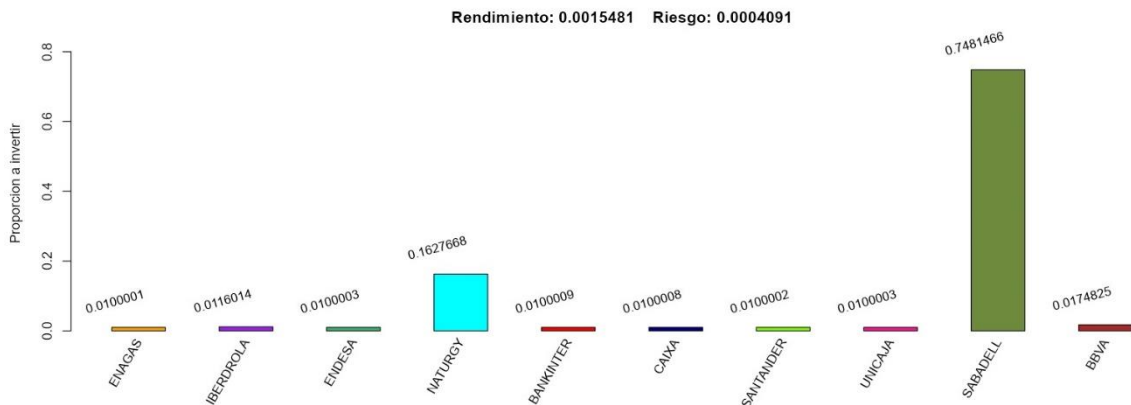


Figura 29 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.01

En este caso, en la Figura 29 destacan dos empresas entre el resto en lugar de las cuatro que había en el modelo de Markowitz original. Los porcentajes de inversión para estas dos empresas son muy similares a los de ese modelo, siendo iguales a 16.27668% y 74.81466% para las empresas Naturgy y Sabadell, respectivamente. El resto de las empresas cumplen el valor para la cota mínima establecido en 0.01.

## 6.4.2 Cardinalidad 10 y cota 0.03

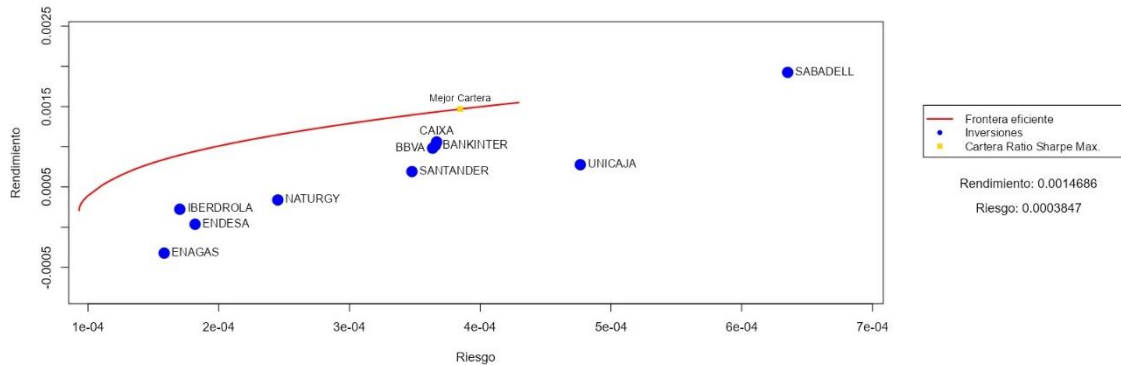


Figura 30 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.03

La frontera eficiente vuelve a ser más corta que en el anterior caso como puede visualizarse en la Figura 30.

La mejor cartera elegida tiene un rendimiento igual a 0.14686% y un riesgo de 0.03847%. En ambos casos han disminuido sus valores en cuanto al caso anterior, habiendo mayor diferencia en el rendimiento que en el riesgo.

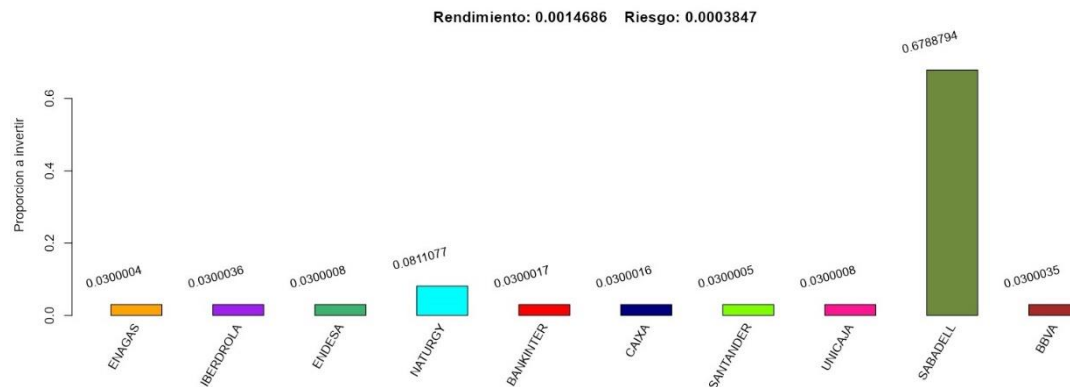


Figura 31 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.03

Siguen destacando del resto las mismas empresas que en el caso anterior como puede verse en la Figura 31, aunque la diferencia de la empresa Naturgy respecto al resto ha disminuido, sin tener en cuenta a la empresa Sabadell. Las inversiones recibidas son del 8.11077% y 67.88794% para las empresas Naturgy y Sabadell, respectivamente. El resto de las empresas cumplen con la cota mínima de inversión establecida en 0.03.

### 6.4.3 Cardinalidad 10 y cota 0.04

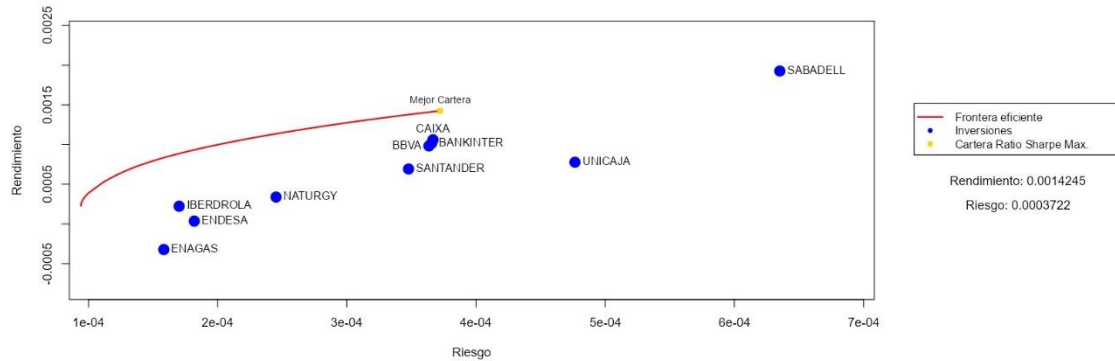


Figura 32 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.04

Como puede verse en la Figura 32, una vez más la frontera eficiente se vuelve más corta llegando aproximadamente a la mitad de lo que abarcaba en el modelo de Markowitz. Destacamos que esta vez la mejor cartera se encuentra justo al final de la frontera eficiente.

La mejor cartera tiene un rendimiento igual a 0.14245% y un riesgo de 0.03722% .

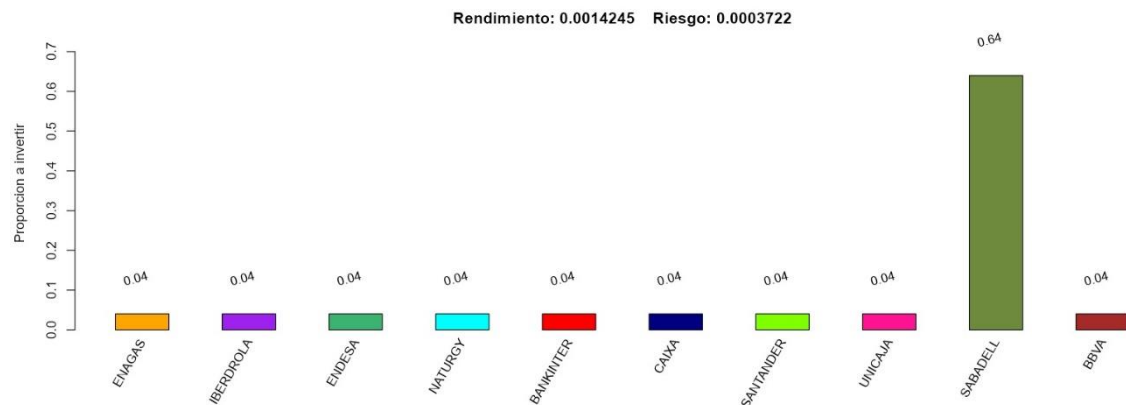


Figura 33 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.04

En este caso, en la Figura 33 únicamente destaca la empresa Sabadell con un porcentaje de inversión igual a 64% y el resto de las empresas tienen la misma proporción de inversión que coincide con el valor establecido para la cota mínima.

#### 6.4.4 Cardinalidad 10 y cota 0.09

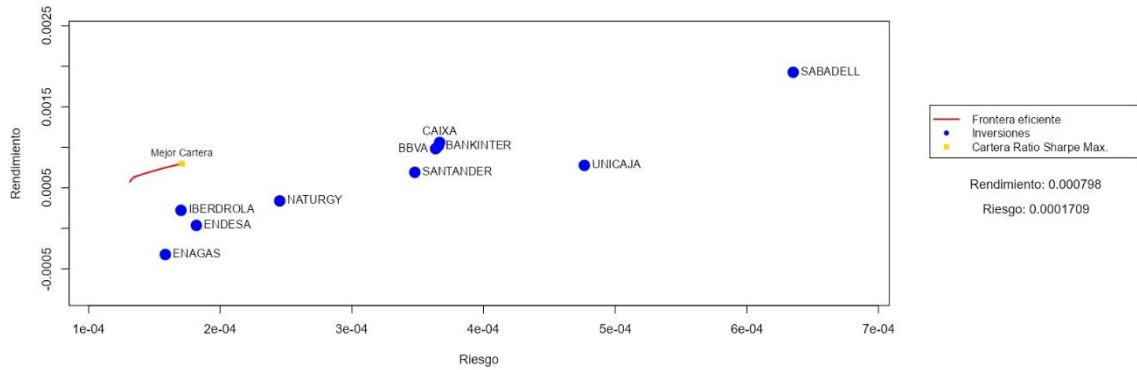


Figura 34 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.09

Se puede observar en la Figura 34 como la frontera eficiente se ha reducido bastante, llegando a ser aproximadamente una octava parte de lo que es en el modelo de Markowitz original. La mejor cartera vuelve a estar al final de la frontera eficiente.

En este caso tiene un rendimiento igual a 0.0798% y un riesgo de 0.01709%. En ambos casos se han reducido las cantidades algo más de la mitad que tenían en el caso anterior.

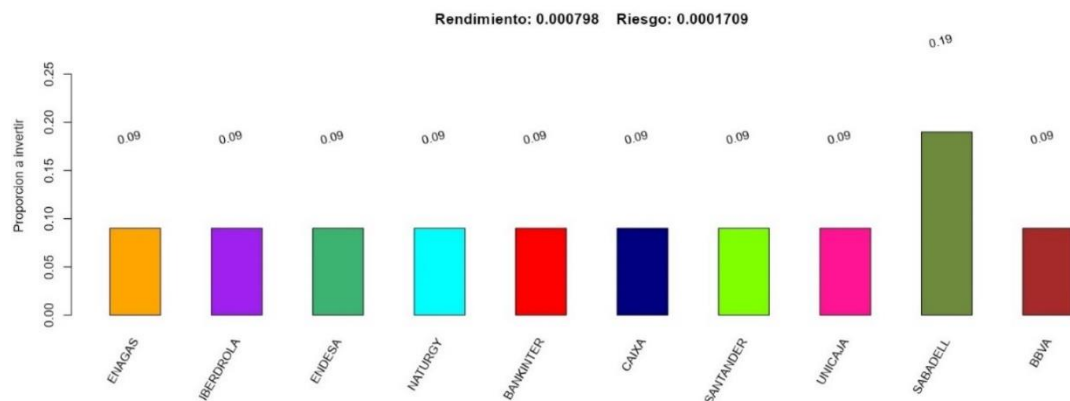


Figura 35 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 10 y cota 0.09

Se tiene una situación muy similar a la del anterior caso como puede verse en la Figura 35. La empresa Sabadell destaca entre las demás y el resto tienen el mismo valor de proporción a invertir que coincide con el valor de la cota mínima establecido.

Llegados a este caso se puede entender que para el resto de los valores de la cota serán un caso similar a este, es decir, la empresa Sabadell tendrá el mayor valor de proporción a invertir y el resto de las empresas el mínimo. Esto será así a excepción del último valor posible para la cota mínima porque este establece la cartera equiponderada, aquella que invierte lo mismo en cada activo.

### 6.4.5 Cardinalidad 9 y cota 0.01

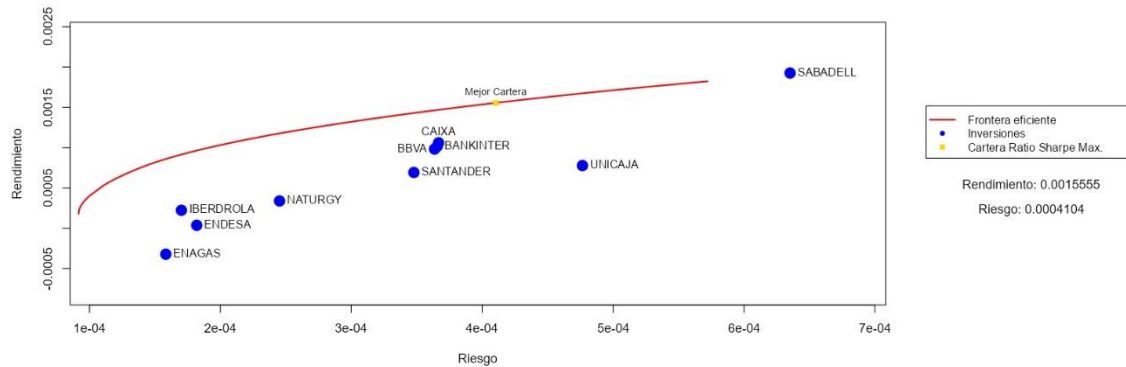


Figura 36 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 9 y cota 0.01

En esta ocasión la frontera eficiente de la Figura 36 es mayor que para el mismo valor de la cota, pero cardinalidad 10. Destacamos que la empresa que se encuentra más alejada de este punto es la empresa Enagas, por lo que suponemos que será la empresa que deje de formar parte de la cartera.

La mejor cartera tiene un rendimiento igual a 0.15555% y un riesgo de 0.04104% . Ambos son unos valores un poco menores que los obtenidos en el modelo de Markowitz. Como, la diferencia no es muy grande suponemos que las empresas que destacaban en el modelo de Markowitz vuelvan a destacar, salvo que ya no formen parte de la cartera.

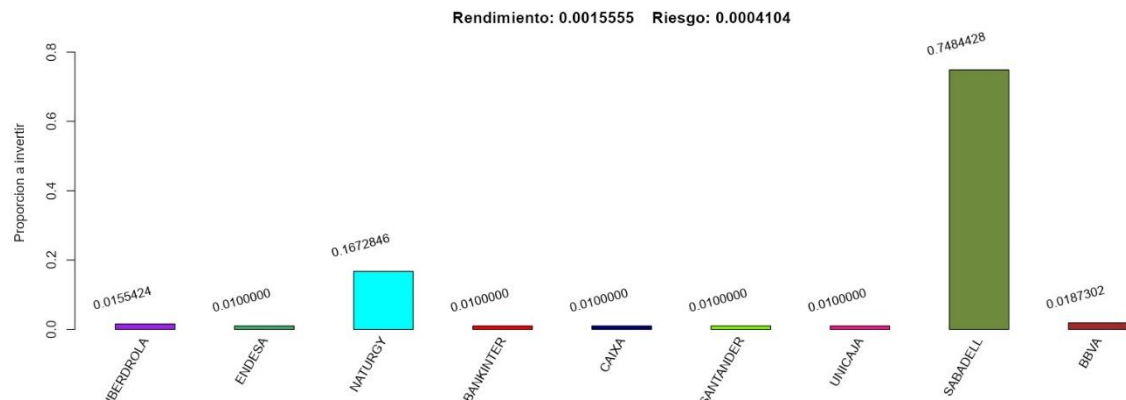


Figura 37 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 9 y cota 0.01

En la Figura 37, se confirman los supuestos planteados pues las empresas que reciben una mayor proporción de inversión son las mismas que en el modelo de Markowitz, aunque sus valores han cambiado. De menor a mayor proporción de inversión tenemos los valores 1.55424%, 1.87302%, 16.72646% y 74.84428% para las empresas Iberdrola, BBVA, Natrurgy y Sabadell, respectivamente.

Puede verse como el resto de las empresas han recibido la cota mínima de inversión.

#### 6.4.6 Cardinalidad 4 y cota 0.01

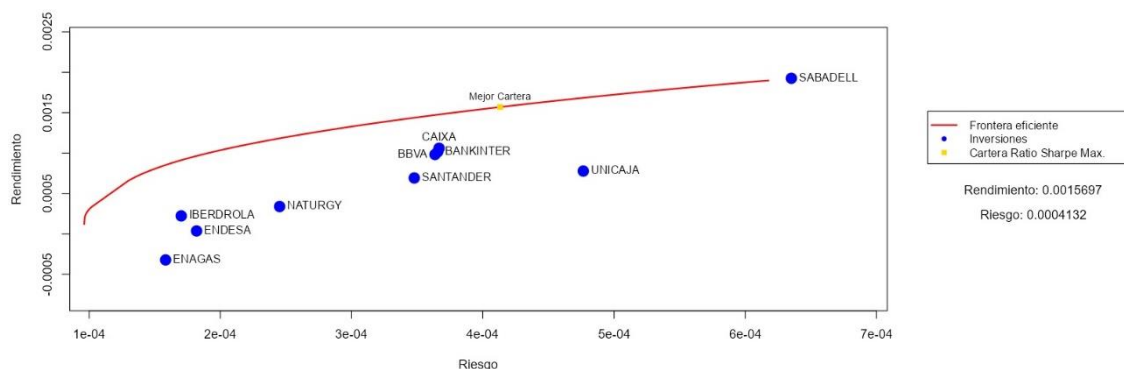


Figura 38 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 4 y cota 0.01

Se obtiene un resultado muy similar al modelo de Markowitz, tal y como se muestra en la Figura 38. Volvemos a ver como la frontera eficiente aumenta su dimensión en comparación con los casos de cardinalidad 10 y 9.

La mejor cartera tiene un rendimiento igual a 0.15697% y un riesgo de 0.04132% . Estos valores han aumentado respecto a la anterior situación planteada con cardinalidad 9 y son los mismos que se obtuvieron para el modelo Markowitz. Esto apoya una gran similitud entre estos dos resultados, por lo que suponemos que la formación de la cartera también será muy pareja.

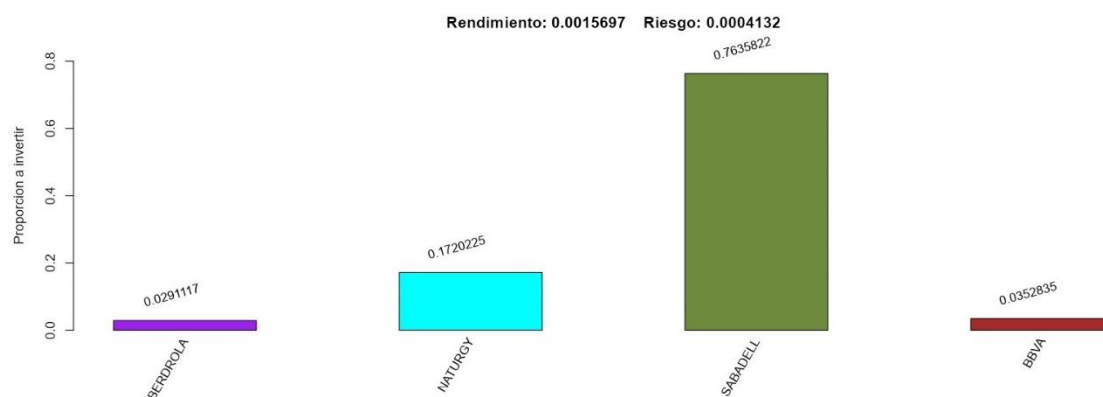


Figura 39 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 4 y cota 0.01

En la Figura 39 se confirma el parecido con el modelo de Markowitz pues se mantiene el orden de menor a mayor proporción invertida y las empresas seleccionadas son aquellas que destacaban en el modelo de Markowitz. Las proporciones son del 2.91117%, 3.52835%, 17.20225% y 76.35822% para las empresas Iberdrola, BBVA, Naturgy y Sabadell, respectivamente.

Destacamos que las proporciones invertidas en las empresas Iberdrola y BBVA han descendido, siendo menor en el caso de BBVA y para las empresas Naturgy y Sabadell han aumentado siendo mayor en el caso de Naturgy.

## 6.4.7 Cardinalidad 2 y cota 0.01

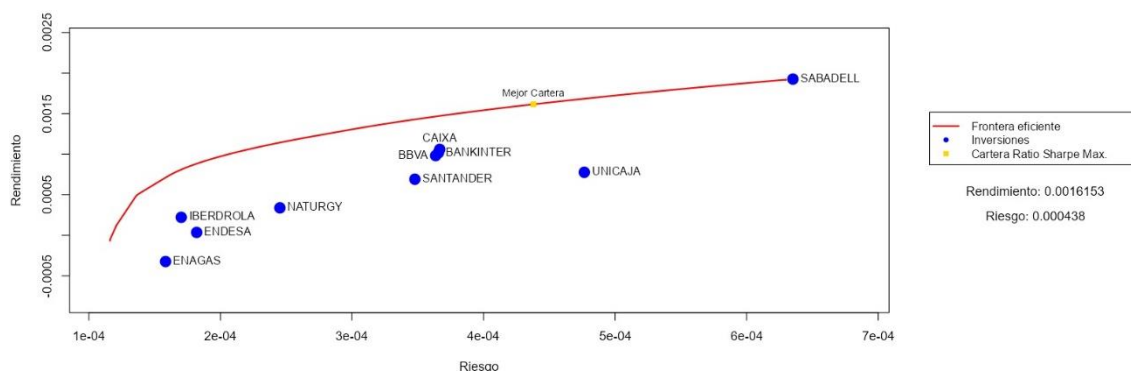


Figura 40 Frontera eficiente modelo Markowitz cardinalidad 2 y cota 0.01

La frontera eficiente de la Figura 40 una vez más ha aumentado su longitud al igual que en los casos con cardinalidad 9 y 4, consiguiendo ser prácticamente la misma que en el modelo de Markowitz.

La mejor cartera seleccionada tiene un rendimiento igual a 0.16153% y un riesgo de 0.0438%. Ambos valores se incrementan respecto de los anteriores casos, habiendo una mayor diferencia en el caso del rendimiento.



Figura 41 Composición de la cartera modelo Markowitz cardinalidad 2 y cota 0.01

La composición de la cartera de la Figura 41 era bastante previsible porque está formada por las dos empresas que mayor proporción de inversión han recibido en todos los casos vistos anteriormente. Mantienen la importancia que venían mostrando pues Naturgy recibe menor proporción que Sabadell, concretamente un 19.55234% y 80.44766%, respectivamente.

Se destaca que en esta situación la diferencia entre las proporciones ha disminuido porque en esta ocasión la proporción de Sabadell es un poco más de cuatro veces la de Naturgy, mientras que en los otros resultados podía ser superior a cuatro y medio.

## 6.5 Modelo MAD

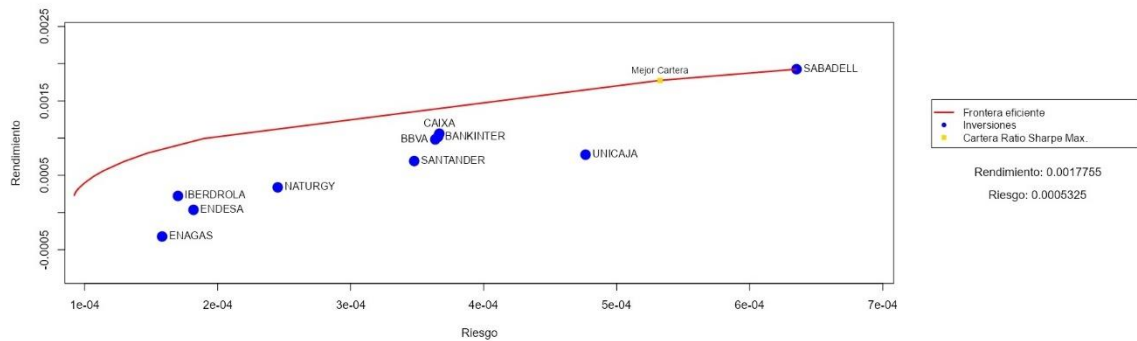


Figura 42 Frontera eficiente modelo MAD

Se observa una frontera eficiente muy similar al modelo de Markowitz en la Figura 42. La mejor cartera encontrada parece tener un comportamiento algo distinto, con un rendimiento igual a 0.17755% y un riesgo de 0.05325%. Ambos valores son mayores que en el otro modelo, habiendo mayor diferencia en el rendimiento.

Al comparar este modelo con otros vistos, el modelo de Markowitz con cardinalidad 2 y cota 0.01 es con el que tiene mayor parecido porque tiene la menor diferencia entre los rendimientos y los riesgos. Por esto suponemos que la composición de la cartera también sea similar al modelo mencionado.



Figura 43 Composición de la cartera modelo MAD

Claramente se observa en la Figura 43 un cambio respecto al modelo de Markowitz porque en lugar de tener una cartera formada con diez empresas, en este caso solamente hay dos. Aunque las dos empresas seleccionadas son también las dos que tienen mayor inversión en el otro modelo, en esta ocasión los porcentajes han variado de manera notable. La empresa Naturgy ha disminuido su inversión hasta el 9.46169% y la empresa Sabadell incrementa su inversión hasta ser igual al 90.53831%.

Al realizar la misma comparativa con el modelo de Markowitz cardinalidad 2 y cota 0.01, vemos que el supuesto planteado de similitud se cumple parcialmente. En ambos modelos la mejor cartera está formada sólo por las dos empresas que mayor proporción habían recibido en el modelo de Markowitz. Sin embargo, la proporción de inversión tiene diferencias notables sobre todo para la empresa Naturgy porque se ha reducido algo más de la mitad de lo que recibía en el otro caso. Esta diferencia un poco mayor a 0.1, se ve reflejado en que la proporción de inversión que recibe Sabadell sea un poco mayor a diez veces lo que recibe Naturgy, cuando en la otra situación era un poco mayor a cuatro veces.

## 7. Conclusiones

La conclusión primordial del trabajo se establece en el objetivo principal planteado en la Sección 1.1. Se ha elaborado una aplicación Shiny con la que el usuario puede interactuar y obtener los gráficos y resultados que requiera y que esta permite, pudiendo elegir todo el periodo de tiempo o en uno concreto. Al mismo tiempo, se ha conseguido implementar dentro de la aplicación otro modelo diferente al modelo de Markowitz, en este caso el modelo MAD, permitiendo comparar los diferentes resultados que estos modelos ofrecen. Se tiene que destacar haber conseguido integrar AMPL en R y usarlo dentro de la aplicación, lo que supone una mejora respecto de otros trabajos anteriormente realizados sobre este tema.

En cuanto a las herramientas utilizadas para realizar el proyecto, se resalta el aprendizaje de la librería Shiny porque esta tarea se inició sin haber trabajado con ella en otro momento. Lo mismo ha ocurrido con las otras dos librerías empleadas, aunque su uso ha sido menor en comparación. También se ha ahondado en los diferentes tipos de solvers o algoritmos para la resolución de problemas que ofrece AMPL.

Se han incluido los gráficos que se han considerado relevantes para poder analizar y comparar unos modelos con otros. La división en varias pestañas permite visualizar diferentes resultados sin tener que volver a ejecutar y resolver los distintos modelos.

### 7.1 Comentarios finales

Cada modelo ha ofrecido unos resultados diferentes al resto. Los modelos de Markowitz y Markowitz con corrección de estimadores presentan una mayor diversificación. En este último también se ha comprobado cómo cambia la composición de la cartera, modificando el sector o los sectores donde invertir las mayores proporciones de inversión, pero manteniendo una diversificación.

En el modelo de Markowitz con restricción de cardinalidad, se ha podido comprobar que, al realizar un análisis de sensibilidad en la cota, manteniendo que todos los activos formen parte de la cartera, a medida que se iba aumentando la cota mínima, la frontera eficiente tiene un menor tamaño. También al realizar un análisis de sensibilidad en la cardinalidad, manteniendo el valor de la cota al mínimo establecido, al ir disminuyendo el valor de la cardinalidad, la frontera eficiente incrementa su longitud, llegando a ser prácticamente la misma que en el modelo de Markowitz.

El modelo MAD también ha presentado diferencias respecto al modelo de Markowitz, principalmente en su diversificación, siendo mayor en Markowitz. Por otro lado, el modelo MAD ha tenido similitudes con el modelo de Markowitz con cardinalidad 2 y cota 0.01 en cuanto a la composición de la mejor cartera, variando las proporciones invertidas en las empresas.

## 7.2 Trabajo futuro

Una posible futura línea de investigación relacionada con este proyecto sería conectar la aplicación con datos en tiempo real.

Otra línea de investigación sería programar otro modelo alternativo al modelo de Markowitz, como el modelo de Black-Litterman, que en el artículo ver [23] se plantea como un modelo que mejora el modelo de Markowitz en algunos ámbitos.

Otro modelo alternativo es el modelo CAPM. Este modelo concluye que cuanto mayor es el riesgo que se asume, mayor es la rentabilidad esperada, por lo que, si se pudiera medir exactamente el nivel de riesgo vinculado a un activo, se podría deducir el porcentaje exacto de rentabilidad potencial que este ofrece, ver [24]. El resultado de este modelo representa la rentabilidad esperada que un inversor debería exigir para asumir el riesgo de un activo. Si el rendimiento es superior al resultado del CAPM, el activo puede estar infravalorado y es una buena oportunidad de inversión. En cambio, si el rendimiento es inferior, el activo podría estar sobrevalorado, ver [25].

## 8. Referencias

- [1] Markowitz, H. «Portfolio Selection,» The Journal of Finance, [En línea]. Available: <https://www.jstor.org/stable/2975974>.
- [2] «Optimización de la cartera,» Wikipedia, [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n\\_de\\_la\\_cartera](https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_de_la_cartera).
- [3] Konno, H. y Yamazaki, H. «Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market,» Management Science, [En línea]. Available: <https://www.jstor.org/stable/2632458>.
- [4] Konno, H. y Yamazaki, H. «Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market,» Management Science, 1 Mayo 1991. [En línea]. Available: <https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.37.5.519>.
- [5] «Programación no lineal,» Wikipedia, [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Programaci%C3%B3n\\_no\\_lineal](https://es.wikipedia.org/wiki/Programaci%C3%B3n_no_lineal).
- [6] Bertsekas, D. P. «Nonlinear Programming,» Massachusetts Institute of Technology, [En línea]. Available: [https://mcube.lab.nycu.edu.tw/~cfung/docs/books/bertsekas1999nonlinear\\_programming.pdf](https://mcube.lab.nycu.edu.tw/~cfung/docs/books/bertsekas1999nonlinear_programming.pdf).
- [7] Brinkhuis, J. y Tikhomirov, V. «Optimization: Insights and Applications,» Princeton University Press, 18 Septiembre 2005. [En línea]. Available: <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691102870/optimization?srsId=AfmBOopp-VPdhB2MtTuKA1SD8voiVxNZ5QD4nrETf9VumsYla2VMVt12>.
- [8] [En línea]. Available: <https://www.bolsasymercados.es/bme-exchange/es/Preguntas-Frecuentes/que-es-ibex-35>.
- [9] Aparicio Corada, S. «Aplicación Shiny para optimización de carteras de inversión,» Universidad de Valladolid, 2021.
- [10] Arranz Varnequilla, V. «Aplicación web Shiny para la selección interactiva de carteras de inversión con el modelo de Markowitz,» Universidad de Valladolid, 2022.
- [11] Arroyo Hernantes, I. «Optimización de carteras de productos agrarios,» Universidad de Valladolid, 2023.
- [12] Garrido Mellado, P. «Aplicación Shiny para optimización de carteras de inversión en criptomonedas,» Universidad de Valladolid, 2024.
- [13] Ferrero, R. «¿Qué es R Software? Introducción al Lenguaje y Entorno para Análisis Estadístico,» Agosto 2018. [En línea]. Available: <https://www.maximaformacion.es/blog-dat/que-es-r-software/>.

- [14] Kosourova, E. «Tutorial de RStudio,» 3 Mayo 2024. [En línea]. Available: <https://www.datacamp.com/es/tutorial/r-studio-tutorial>.
- [15] AMPL Optimization, Inc., 2025. [En línea]. Available: <https://ampl.com/>.
- [16] C. Consulting, «¿Conoce AMPL?,» Cassotis Prescriptive Analytics, 9 Agosto 2021. [En línea]. Available: <https://es.cassotis.com/insights/conoce-ampl>.
- [17] Astros, I. J. P. T. «Introducción al programa AMPL,» Monografías, [En línea]. Available: <https://www.monografias.com/trabajos104/introduccion-al-programa-ampl/introduccion-al-programa-ampl>.
- [18] Fourer, R.; Gay, D. M. and Kernighan, B. W. «AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming Second Edition,» Duxbury Press, 2003. [En línea]. Available: <https://ampl.com/wp-content/uploads/BOOK.pdf>.
- [19] «AMPL R API,» AMPL Optimization Inc., [En línea]. Available: <https://rampl.ampl.com/en/latest/>.
- [20] «¿Qué es el ratio de Sharpe y qué mide?,» UNIR Revista, 30 12 2022. [En línea]. Available: <https://www.unir.net/revista/empresa/ratio-sharpe/>.
- [21] Vanderbei, R. J. «Robert J. Vanderbei Foundations and Extensions Fourth Edition,» Springer, 2014. [En línea]. Available: <https://nibmehub.com/opac-service/pdf/read/Linear%20Programming-%204th%20edition-%202014.pdf>.
- [22] «Yahoo Finanzas - Bolsa de valores en directo, cotizaciones, noticias,» [En línea]. Available: <https://es.finance.yahoo.com/>.
- [23] Franco-Arbeláez, L. C.; Avendaño-Rúa, C. T. y Barbutín-Díaz, H. «Modelo de markowitz y modelo de Black-Litterman en la optimización de portafolios de inversión,» 21 Junio 2011. [En línea]. Available: <https://doi.org/10.22430/22565337.40>.
- [24] «El modelo CAPM: ¿Cómo calcular la tasa de retorno de un activo financiero?,» UNIR, 27 Noviembre 2023. [En línea]. Available: <https://mexico.unir.net/noticias/economia/modelo-capm/>.
- [25] «¿Qué es el modelo CAPM y cómo se aplica en inversiones?,» XTB, [En línea]. Available: <https://www.xtb.com/es/educacion/que-es-el-modelo-capm>.