Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo Fin de Grado

Grado en Economía

Teoría de Juegos en Economía: El Problema de Negociación

Presentado por:

Adrián Serna Arenas

Valladolid, 19 de junio de 2025

RESUMEN:

Este trabajo está dividido en cuatro secciones. Primeramente, se hará una introducción a la figura de John Forbes Nash para una mejor contextualización. Después, se expondrá el cuerpo principal del trabajo presente, el cuál trata de entender, pormenorizadamente, y explicar la solución al Problema de Negociación propuesta por John F. Nash. En este apartado, se expondrán las condiciones de partida, el método resolutivo y finalmente su solución. Se tendrá especial atención a los axiomas como objeto central del entendimiento del modelo. Asimismo, tras la resolución axiomática que desarrolla John F. Nash, se verá, en el siguiente apartado, una de las apreciaciones más conocidas a la solución de Nash, la solución al Problema de Negociación de Kalai-Smorodinsky. Finalmente, se procederá a ejemplificar, en sus respectivas secciones, ambas soluciones para una mayor comprensión práctica, así como un segundo ejemplo para exponer sus diferencias y similitudes.

ABSTRACT:

This work is divided into four sections. First, an introduction to John Forbes Nash will be provided for better contextualization. Next, the main body of this work will be presented, which seeks to understand, in detail, and explain the solution to the Bargaining Problem proposed by John F. Nash. In this section, the starting conditions, the resolution method, and finally, the solution will be presented. Special attention will be paid to the axioms as a central objective for understanding the model. Likewise, after the axiomatic solution developed by John F. Nash, the following section will examine one of the most well-known interpretations of Nash's solution, the solution to the Kalai-Smorodinsky Bargaining Problem. Finally, we will proceed to exemplify, in their respective sections, both solutions for greater practical understanding, as well as a second example to expose their differences and similarities.

ÍNDICE:

ÍNDICE DE GRÁFICOS, TABLAS Y FIGURAS PAGINADOS.

Índice de gráficos:

Índice de tablas:

Índice de figuras:

1. INTRODUCCIÓN

Durante la elección del tema a tratar me vi inmerso en un ambiguo problema que todo economista puede llegar a plantearse: ¿la Economía puede ser teorizada mediante modelos matemáticos? Si bien existen muchas respuestas a esta pregunta, uno ha de ser fiel a lo que es capaz de ver y comprender. Por ello, y tras reconsiderarlo profundamente, quise dedicar el objeto de estudio a una rama más observable y menos cuantificable.

Sin embargo, tras sumergirme en los tomos, rápidamente comprendí que la esfera en la que se desarrolla la Economía es demasiado amplia como para intentar plasmarla en unas pocas páginas, a no ser que se omita deliberadamente gran parte de las causas que influyen en la problemática. Es así como comprendí que, si bien cuantificar modelos complejos que representen mínimamente a la realidad es una tarea virtualmente imposible, si las condiciones de partida son muy limitadas y se trata un supuesto extremadamente aislado y teórico, posiblemente los modelos matemáticos puedan ser una herramienta relativamente útil.

A su vez, hoy en día está en boga de todos que la economía es un Juego de Suma Cero (ya sea dicho con o sin relación a su significado), y es fácil escuchar en el debate público sentencias como la de si un grupo de población tienen mucho dinero es porque otros tienen muy poco a consecuencia. Si bien refutar esta idea es algo simple y llano, me dio la oportunidad de plantearme el estudio de algún problema que se vea reflejado en la Teoría de Juegos.

Y es así como, uniendo ambas posturas, di con el objeto de este Trabajo de Fin de Grado. La utilización de la Teoría de Juegos para la resolución del Problema de Negociación es un tema que llamó mi atención desde un inicio, pues cumplía sendos requisitos.

Mediante la fijación de unos supuestos básicos, que pueden ser expresados matemáticamente, se crea un modelo capaz de replicar la problemática real a una escala muy reducida y controlable, donde la consecución de los razonamientos matemáticos y sus conclusiones pueden tener mayores atisbos de certeza.

Como más adelante explicaré, todo el enfoque sólo es entendible mediante la implicación de unos supuestos que, al final, no dejan de ser arbitrarios. Debido a esto, la crítica al planteamiento de Nash es parte indisociable de este trabajo. Pero, a su vez, no podría existir el razonamiento científico sin la crítica continua, incluso a las grandes figuras y a las verdades más irrebatibles de los campos de estudio.

Este trabajo se centra en la problemática de dos individuos (o jugadores) que pretenden maximizar su beneficio (representado como utilidad) en un reparto común, teniendo en cuenta un punto de desacuerdo, en que solo por encima de él negociarán. La problemática es una simplificación básica de una situación real en la que existe un cierto reparto entre dos o más personas (aunque a nosotros solo nos atañe la situación de dos) y hay que llegar a un acuerdo consensuado. Este ejemplo se puede dar en el día a día, y de las formas más banales, de una persona, así como en situaciones de repartos financieros u otras más variopintas como, por ejemplo, el reparto de una herencia.

Siguiendo un enfoque teórico y analítico se explicará la solución que da John Forbes Nash, utilizando ciertos axiomas que fijen las bases para la solución y, también, creen limitaciones para que esta sea única.

Como paliativo a ciertas restricciones poco realistas o muy rígidas, se introduce la solución de Kalai-Smorodinsky. Este nuevo modelo no es la solución última al Problema de Negociación, pero nos permite entender las críticas que se pueden hacer a modelos matemáticos para intentan plasmar la realidad más certeramente.

Finalmente, se realizarán dos ejemplos en sus respectivos apartados: uno en el que la solución de Nash y la de Kalai-Smorodinsky coinciden, debido al cumplimiento estricto de los axiomas, y otro ejemplo en el que difieren las soluciones al relajar el axioma de Simetría. Asimismo, este último ejemplo servirá para explicar la caracterización matemática para saber cuándo sendas soluciones difieren y cuándo coinciden.

Con esta forma de proceder se espera obtener también una comprensión mayor de ciertos problemas estandarizados en la cotidianidad de la vida, que muchas veces se pasan por alto, pero uno siempre ha de ser capaz de racionalizar los problemas y actuar de acorde a soluciones justificadas. Además de presentar una crítica al modelo, que siempre es la base de un pensamiento racional, abrirse a críticas y no justificar el mundo respecto al modelo, si no al revés.

2. INTRODUCCIÓN A LA FIGURA DE JOHN NASH.

John Forbes Nash Jr. nació el 13 de junio de 1928 en Bluefield, Virginia Occidental, Estados Unidos. En 1948 se licenció en Matemáticas, tras haber cursado Ingeniería Química. Fue recomendado a las mejores universidades como un genio de las Matemáticas y, tras ser aceptado en universidades como Harvard o la de Chicago, se decantó por Princeton, por su cercanía, donde finalizaría el doctorado en 1950 con su tesis de Juegos no Cooperativos.

Fue un matemático de prestigio, cuyas contribuciones son conocidas en los campos de la Teoría de Juegos, la Geometría Diferencial o la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales, entre otras.

Su carrera fue determinada cuando realizó, durante su doctorado, la que hoy se conoce como Teoría del Equilibrio de Nash, una solución general para Juegos no Cooperativos. Este planteamiento revolucionó la Teoría de Juegos y tuvo implicaciones en diferentes ciencias, entre ellas la Economía. Más tarde, en 1994, sería premiado, junto a John Harsanyi y Reinhard Selten, con el Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel (popularmente conocido como Nobel de Economía) por sus diversas contribuciones al campo de la Teoría de Juegos.

Su periodo como profesor en la Universidad de Princeton fue especialmente relevante, pues otros afamados profesores impartían clase en esa misma universidad, como Albert Einstein. También, John von Neumann y Oskar Morgenstern impartían clase allí, especialmente relevantes por ser los autores del libro "*Theory of Games and Economic Behavior*". Además, estos académicos ayudaron a John Nash en su solución del Problema de Negociación, como él mismo menciona en su artículo *"The Bargaining Problem"*.

En 1952 conoció a Eleanor Stier, con quien tuvo un hijo. Mas tarde, en 1957 se casaría con una exalumna suya Alicia Lardé López-Harrison, de origen salvadoreño, con quien tendría su segundo hijo.

Es desacertado detallar la vida de John Nash sin mencionar que estuvo marcada por la esquizofrenia paranoide, diagnosticada en 1958. El problema principal que padeció Nash fueron las alucinaciones, que le impedían distinguir entre la realidad y sus pensamientos delirantes, lo que afectó a su vida personal, académica y social. Él mismo explicó que nunca veía cosas, sino que simplemente creía firmemente en ideas falsas que no podía controlar. Con el tiempo, a finales de los 80 y principios de los 90, aprendió a ignorar sus delirios sin medicamentos y pudo continuar con sus estudios. Su segundo hijo, también padeció esta enfermedad.

Uno de los episodios más reseñables de su condición fue su viaje a Europa en 1959, en el cuál intentó conseguir el estatus de refugiado político en Ginebra y Francia, bajo su sospecha de que estaba siendo perseguido por el gobierno de los Estados Unidos, debido a su creencia de que él era una figura clave en la lucha mundial contra los poderes en las sombras. Ninguna autoridad política le concedió refugio, pues sabían que eran actos manifestados por su enfermedad.

Tras recobrar el "pensamiento voluntario", como él mismo expresa en su discurso del Premio Nobel de Economía, continuó reflexionando, escribiendo y participando activamente en el mundo académico, especialmente en temas abstractos y filosóficos, muchos de ellos fuera del área de las Matemáticas.

En 2015 fue laureado con el Premio Abel por su contribución a la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales y sus aplicaciones al Análisis Geométrico, convirtiéndose en el único investigador con el reconocimiento de sendos galardones, el Premio Nobel y el Premio Abel.

Lamentablemente, el 23 de mayo de 2015, a la vuelta de la ceremonia del Premio Abel, falleció en un accidente automovilístico, donde perdieron la vida él y su mujer.

El legado de John Nash aún perdura, tanto dentro de la Teoría de Juegos con contribuciones tan revolucionarias como el Equilibrio de Nash, o el Teorema de Inmersión de Nash dentro del área de la Geometría Diferencial, entre otras muchas contribuciones matemáticas. Su impacto en el área de la Economía fue también profundo, al proporcionar una herramienta matemática para analizar las decisiones de los agentes económicos. Por último, es consecuente mencionar su influencia cultural, pues se ha llevado su vida a la gran pantalla y su figura quedará como un ejemplo de resiliencia frente a la adversidad.

3. EL PROBLEMA DE NEGOCIACIÓN

3.1. Las bases del Problema de Negociación.

La base del Problema de Negociación es determinar cuál es el resultado óptimo de una negociación entre dos partes, ambas racionales, mediante cooperación, en las que cada una busca maximizar su beneficio, teniendo como punto de partida un valor mínimo, el punto de desacuerdo, que es, a su vez, el beneficio retribuido si no se llega a un acuerdo entre las partes.

Nash considera el supuesto en el que los individuos, o jugadores, no pueden actuar sin el consentimiento del otro para cambiar la situación inicial, por lo que cualquier acuerdo es vinculante para ambas partes.

En el desarrollo de este trabajo se hablará de jugadores, pues expresa con mayor acierto los diferentes agentes que pueden participar en el Problema de Negociación.

Pero antes de continuar, el propio Nash en su artículo hace un inciso sobre el modelo utilizado para resolver este problema y sus antecedentes. Un momento inmediatamente anterior de relevancia para la resolución de Nash fue la publicación del libro: "*Theory of Games and Economic Behavior*" de John von Neumann y Oskar Morgenstern en 1944. En este libro los autores desarrollan la Teoría de Juegos moderna, introducen los Juegos Cooperativos, los Juegos de Suma Cero y teorizan sin resolver el Problema de Negociación.

Un concepto clave que los autores von Neumann y Morgenstern utilizan, y será la base de la Teoría de Juegos, es el de la utilidad esperada. Este concepto es iniciado conceptualmente por el matemático Daniel Bernoulli y su "esperanza moral", que llevó a incorporar factores psicológicos y subjetivos en el análisis económico y probabilístico. Bernoulli argumentó que las decisiones no se basan únicamente en un valor monetario esperado, sino en la utilidad que subjetivamente se asigna a las pérdidas o ganancias, introduciendo así el concepto de utilidad marginal decreciente. La Teoría de la Utilidad Esperada es un modelo perteneciente a la economía positiva que trata de entender las elecciones de los jugadores racionales de forma cuantificada a través de la función de utilidad, la cual representa la satisfacción (o utilidad) que un jugador obtiene de sus elecciones. Los jugadores perfectamente racionales poseen curvas de utilidad convexas, las cuales, a mayor cantidad de un bien más aumenta su utilidad, pero en intervalos superiores aumenta menos que proporcionalmente.

Otras contribuciones anteriores que marcaron las bases para la resolución de Nash del problema fueron las siguientes:

1881 – "*Mathematical Psychics*" de Francis Y. Edgeworth: Introduce cómo dos agentes intercambian bienes cuando ambos pueden beneficiarse del intercambio y su famosa Caja de Edgeworth.

1906 – "*Manuale di Economia Politica*" de Vilfredo Pareto: Introduce cuándo una situación económica es eficiente u óptima, en el sentido de que no se puede mejorar la situación de alguien sin empeorar la del otro. También, introduce lo que hoy se conoce como la frontera de Pareto, es decir, el conjunto eficiente. E introduce, siendo de especial relevancia, el concepto de eficiencia y equidad: algo puede ser eficiente, alcanzando un máximo, pero injusto en la equidad del reparto entre los jugadores para ese acuerdo. La elección de una solución óptima en este último contexto la resolvería más tarde John Nash.

1944 – "*Theory of Games and Economic Behavior*" de von Neumann y Morgenstern: Fundan la Teoría de Juegos moderna.

1950 – *"Equilibrium Points in n-Person Games",* artículo de John F. Nash: Define el equilibrio de Nash en el que ningún jugador tiene incentivos a salir del equilibrio, dadas las estrategias del resto de jugadores.

Este mismo año también publica su tesis sobre Juegos no Cooperativos: Los jugadores maximizan su propio beneficio sin importar si mejora el del conjunto.

En el Problema de Negociación, que veremos detalladamente después, sí importa el conjunto, es un Juego Cooperativo.

1950 – *"The Bargaining Problem",* artículo de John F. Nash: Presenta su solución al Problema de Negociación, el cuerpo de este trabajo.

3.2. La función de utilidad.

Para empezar a elaborar el modelo, Nash establece unas condiciones de partidas ideales: Los jugadores son perfectamente racionales, poseen la misma capacidad de negociación y conocen las preferencias y gustos del otro jugador. Estas condiciones serán plasmadas en el modelo a través de ciertas restricciones matemáticas formales.

Es en este instante en el que Nash, basándose en la Teoría de Utilidad Esperada para definir preferencias de forma numérica, introduce el concepto de "anticipación". La anticipación es un estado de expectación sobre la posibilidad de que cierto suceso ocurra o no en el futuro.

Siguiendo una explicación similar a la suya: Se supone que un jugador espera obtener un coche Aston Martin (A) en el futuro, lo cual equivale a tener una anticipación de A. Ahora, si por el lanzamiento de una moneda se decidiese si el jugador obtiene un Aston Martin (A) o un BWM (B), sería equivalente a decir que tiene mitad anticipación de A y mitad de B. Expresado con probabilidades, para todo $p \in [0,1]$, el jugador tendría una anticipación de $pA + (1-p)B$, lo cual representa una anticipación que es combinación de dos anticipaciones.

Si bien Nash desarrolló todo su artículo utilizando el término "anticipaciones", es más correcto que en adelante se las mencione como opciones, pues la acepción de esta palabra es más apropiada para su entendimiento. A partir de ahora, las letras mayúsculas representarán opciones.

Con esta idea en mente, Nash contempla la función de utilidad de un jugador siguiendo los siguientes cuatro axiomas:

1. **Completitud:** El jugador es capaz de comparar dos posibles opciones y decidir cuál es preferible o si son igual de deseables.
2. **Transitividad:** Si la opción A es preferible a B y, a su vez, esta última es preferible a C, entonces A es preferible a C.
3. **Independencia:** Cualquier combinación de dos opciones igualmente deseables con una tercera, son igualmente deseables. O, cualquier combinación de dos opciones igualmente deseables, es igualmente deseable que cualquiera de ellas por separado.
4. **Continuidad:** Si entre las opciones A, B y C se tiene que A es preferible o igual a B y B es preferible o iguala C, entonces una combinación de las opciones A y C es al menos tan deseable como C.

Nash establece un quinto axioma el cual es, de nuevo, el axioma de Independencia recogido en el punto tercero. Añadir que los autores von Neumann y

Morgenstern establecen un quinto axioma de **No Trivialidad:** existen al menos dos opciones tales que el jugador prefiera una sobre la otra, o al menos no sea indiferente entre ellas. Este concepto es esencial para garantizar que el modelo tenga una mínima representación real, al existir al menos dos elecciones diferentes.

Con estos axiomas, se establece la función de utilidad (en adelante u), que asigna un número real a cada opción del jugador.

Este tipo de función cumple las siguientes propiedades:

a) Representación ordinal de preferencias: Si $u(A) > u(B)$ implica que A es preferido a B.
b) Utilidad esperada: Para todo $p \in [0,1]$, entonces:

$$u(pA + (1-p)B) \ = \ pu(A) + (1-p)u(B).$$

Esto implica que existe una función de utilidad cardinal, la cual Nash expresa que no es única, pues admite transformaciones o, dicho de otra manera, se puede expresar como una función de utilidad cardinal única, salvo transformaciones afines. Esto implica que, para $a > 0$ y $b = constante$, si la función u representa las preferencias de un jugador, entonces $u' \ = \ au + b$ también representa las mismas preferencias. Este axioma se conoce como Invariabilidad ante Transformaciones Afines, e implica que la función de utilidad no tiene unidades absolutas, solo importa el orden de las preferencias y la diferencia relativa respecto al punto de desacuerdo.

La función cardinal no solo permite representar las preferencias de un jugador, sino también cuantificar la intensidad de las preferencias.

Solo respetando los axiomas anteriores se da la propiedad de linealidad de la función de utilidad.

3.3. La función de utilidad de dos jugadores.

Ahora que comprendemos la función de utilidad de un jugador, Nash establece en su artículo aquella que comprende a dos jugadores.

Una opción de dos jugadores se puede definir como una combinación de dos opciones de un jugador. Así mismo, la función de utilidad de un jugador con dos opciones es aplicable a las de dos jugadores con dos opciones. Por lo que, una combinación de probabilidad de dos opciones de dos jugadores se define realizando las combinaciones correspondientes de sus componentes. Siendo $N = rA + (1-r)B$ dos opciones de un jugador y $M = qC + (1-q)D$ dos opciones de otro, para $r, q, p \in [0,1]$, la combinación sería:

$$X = pN + (1-p)M,$$

donde X representa una opción conjunta, es decir, una opción que mezcla las opciones individuales de ambos jugadores.

La función de utilidad esperada asociada a esta combinación mantiene la misma propiedad de linealidad que en el caso de un solo jugador:

$$u(X) = pu(N) + (1-p)u(M).$$

Una última apreciación que hace Nash antes de continuar tiene su relevancia en una opción que se distingue especialmente del resto. Esta opción es aquella en la que se da la no cooperación entre los jugadores, también llamado punto de desacuerdo $d(d_1, d_2)$, el cual es el resultado que obtienen los jugadores si no consiguen llegar a un acuerdo. En este punto de desacuerdo, la utilidad que obtiene cada jugador es nula. Formalmente sería: $u_i(d) = 0$, para cada $i = 1, 2$.

Esta fijación de que el punto de desacuerdo sea el $(0,0)$ determina que la función de utilidad de un jugador solo puede ser multiplicada por un número real positivo en orden de que siga respetando ese punto de origen. La función de utilidad que buscamos, para que en el punto de desacuerdo se obtenga una utilidad de cero, no admite sumas o restas de constantes pues el punto de desacuerdo variaría:

$$u_i(d) + b = 0, \text{ si } b \neq 0 \text{ entonces } u_i(d) + b \neq 0, \text{ para } i = 1, 2.$$

Esto garantiza que las comparaciones sean relativas al punto de desacuerdo $d(0,0)$. Si bien esta premisa parece negar el axioma de Invariabilidad ante Transformaciones Afines, este supuesto solo lo utiliza Nash para hallar su solución al Problema de Negociación con un punto de desacuerdo específico y un punto de equilibrio, como veremos más adelante, dado. Nash solo fuerza el punto de desacuerdo como el $(0,0)$ en esta resolución, pero las funciones de utilidad cumplen el axioma. Desde ahora, para explicar la solución de Nash, se entenderá de esta manera.

3.4. Representación gráfica del modelo.

Para representar el modelo gráficamente en el plano $\mathbb{R}^2$, se trazan las utilidades asociadas a todas las opciones disponibles, usando funciones de utilidad apropiadas para cada jugador.

Con el fin de definir la forma y propiedades del conjunto de puntos obtenidos, es necesario introducir algunos supuestos estructurales sobre el conjunto de alternativas.

Estos supuestos permiten caracterizar el conjunto factible en el espacio de utilidades, que será la base para aplicar la solución de Nash.

Siendo S el conjunto factible, $S \subset \mathbb{R}^2$, se utiliza el plano $\mathbb{R}^2$ porque cada punto representa una combinación de utilidades $(u_1(A), u_2(A))$ de dos jugadores, para una opción A.

Este conjunto es:

a. **Compacto:** Es decir, cerrado (la frontera está contenida en el conjunto) y acotado (el conjunto tiene límites y no se extiende infinitamente). Formalmente, se entiende como compacto aquel conjunto que está contenido en una bola abierta, de radio lo suficientemente grande. Se necesita que el conjunto sea compacto para que se dé la solución de Nash y garantizar que la función a maximizar alcance el máximo en el conjunto. Según el Teorema de Weierstrass: Una función continua sobre un conjunto compacto alcanza un máximo (y un mínimo), en ese mismo conjunto.
b. **Convexo:** Esto es, si para cualquier par de puntos $A, B \in S$, la línea recta que los une también está completamente dentro de S. Esta restricción es importante porque los jugadores pueden acordar mezclas probabilísticas entre distintas opciones. Si dos acuerdos son posibles, también lo es la combinación convexa entre ellos.
c. **No vacío:** Si bien Nash no habla de esta restricción, es necesario que el conjunto no sea vacío para que exista negociación (y se genere utilidad). Un conjunto vacío es convexo y compacto, por lo que esta restricción no es deducible de las anteriores.

3.5. La solución de Nash.

La solución consiste en las expectativas racionales de ganancia por parte de los jugadores, que les mueve a alcanzar acuerdos vinculantes aceptados por ambos. Por ende, existe un acuerdo que proporciona a cada jugador la utilidad que espera obtener. Los jugadores racionales elegirán este acuerdo o uno similar, que se puede representar en el gráfico $\mathbb{R}^2$. Además, solo se consideran los acuerdos en los que ambos jugadores se beneficien, pues un jugador solo negociará si puede obtener una mayor utilidad respecto al punto de desacuerdo.

Nash detalla que los jugadores pueden elegir un método de probabilidad para decidir el acuerdo final alcanzado. Es decir, dado varios acuerdos aceptables, también lo es la combinación probabilística de ellos, tal y como se detallaba en el supuesto de convexidad. Más adelante, esta propiedad será utilizada en el ejemplo práctico.

El siguiente paso es formular axiomas o condiciones plausibles y razonables, para luego deducir matemáticamente una única solución que las satisfaga. Esta solución será, tal y como demuestra Nash, el punto que maximiza el producto de las utilidades relativas respecto al punto de desacuerdo, que se desarrollará más adelante.

Primero, dadas las funciones de utilidad de ambos jugadores, u_1 y u_2, respectivamente, y sea $c(S)$ el punto de equilibrio que se busca como solución en el conjunto factible S, se suponen los siguientes cuatro axiomas para jugadores racionales:

Pareto-optimalidad: Si hay un punto $\alpha \in S$ tal que existe otro punto $\beta \in S$ con $u_1(\beta) < u_1(\alpha)\ y\ u_2(\beta) < u_2(\alpha)$ entonces α no puede ser el punto de equilibrio dado por $c(S)$. Esto quiere decir que, si existe un punto que es estrictamente dominado por otro, en términos de utilidades, para ambos jugadores, no puede ser el acuerdo óptimo de negociación. Así pues, como ambos jugadores son racionales, no aceptarán acuerdos que podrían ser mejorables. Como se dijo anteriormente, la solución de Nash al Problema de Negociación está influida por el principio de eficiencia de Pareto, en el que un acuerdo no puede ser óptimo si existe otro que mejore la situación de, al menos, un jugador sin empeorar la del otro. Este axioma garantiza que la solución se encuentre en la frontera eficiente del conjunto factible.

Independencia de Alternativas Irrelevantes: Si $S \subseteq T \in \mathbb{R}^2$ y el punto de solución $c(T)$ pertenece a S, entonces la solución debe ser la misma para el conjunto T que para el conjunto S, $c(T) = c(S)$. Así pues, si el acuerdo óptimo pertenece a un conjunto de opciones y se reduce el conjunto sin eliminar el punto de equilibrio, entonces la solución no debe cambiar. Este axioma es clave en la unicidad de la solución, pues garantiza que solo exista un punto que maximice el producto de utilidades respecto al punto de desacuerdo. Este axioma permite comparar soluciones entre diferentes conjuntos, mientras permanezcan los mismos acuerdos relevantes.

Simetría: Para dos funciones de utilidad u_1 y u_2, si $(a,b) \in S$ y $(b,a) \in S$, entonces el gráfico es simétrico respecto la recta $u_1 = u_2$. Esto implica que, el punto de equilibrio, $c(S)$, ha de pertenecer a la diagonal $u_1 = u_2$, es decir, $c(S) = (a,a)$. Este axioma permite representar el hecho de que ambos jugadores poseen la misma capacidad de negociación y no hay diferencias estructurales entre los dos jugadores.

Invariabilidad ante Transformaciones Afines: La solución del Problema de Negociación no depende de la escala o la unidad de medida de las utilidades de los jugadores. Este axioma garantiza que no exista pérdida de generalidad cuando, por ejemplo, solo se consideran los Problemas de Negociación con el punto de desacuerdo representado en el origen, como en esta solución en donde Nash fuerza a que el punto de desacuerdo sea el $(0,0)$ y no genere utilidad alguna.

Estas condiciones permiten demostrar que el punto de equilibrio se localice en la frontera del conjunto factible S donde las funciones de utilidad u_1 y u_2 sean maximizadas. Por otra parte, la compacidad del conjunto permite asegurar que ese punto de equilibrio existe, y la convexidad asegura la unicidad.

La función a maximizar por Nash sería la siguiente, siendo $d(0,0)$ el punto de desacuerdo:

$$\max_{u1,u2 \in S} (u_1 - u_1(d))(u_2 - u_2(d)) \; = max\, u_1 \cdot u_2,$$

$$\text{para } u_i(d) = 0, i = 1,2.$$

La solución de Nash sería, por tanto, el punto en el que la curva de nivel de la función de utilidad a maximizar haga tangencia con la frontera eficiente del conjunto factible.

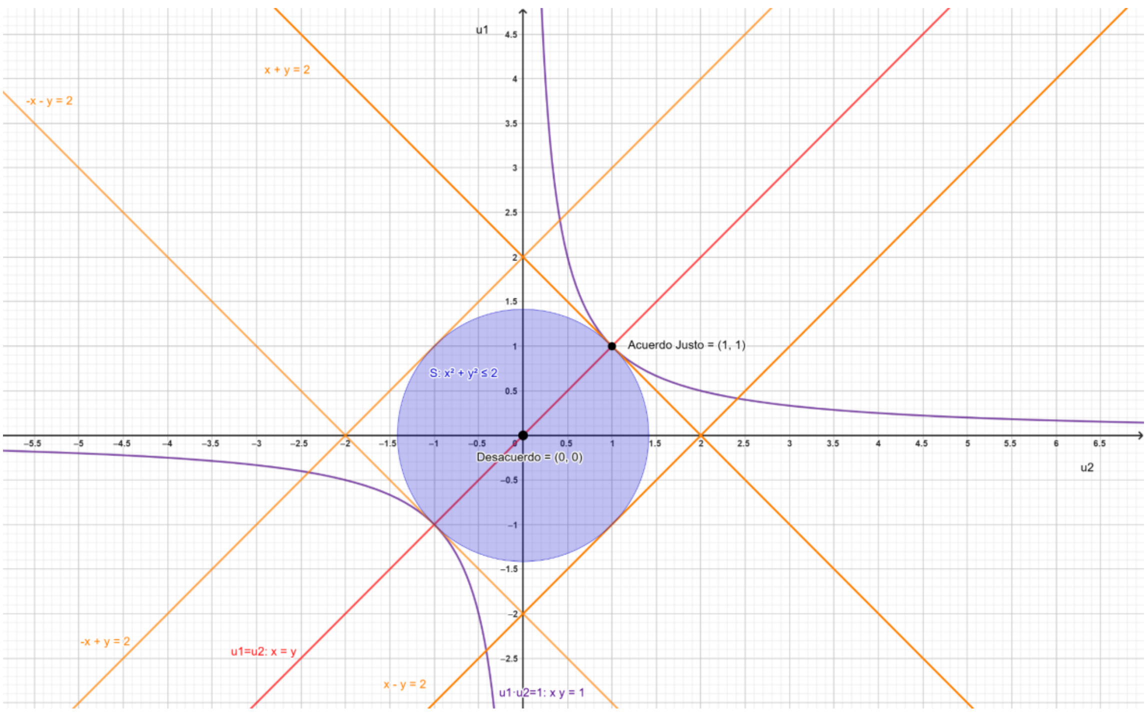
Nash lo traslada al siguiente ejemplo:

Supongamos que se reescalan las funciones de utilidad multiplicándolas por constantes positivas, de forma que la solución (punto de equilibrio) que estamos considerando tenga las coordenadas $(1{,}1)$ en $\mathbb{R}^2$. Este hecho no invalida la solución, debido a el axioma de Invariabilidad ante Transformaciones Afines. Dado que el producto de las utilidades de la función a maximizar sería $u_1 \cdot u_2 = 1$, implica que el conjunto factible debe de quedar contenido en la región $u_1 + u_2 \leq 2$, pues si la suma fuese superior a dos, implicaría la existencia de un producto de utilidades mayor que uno, $u_1 \cdot u_2 \geq 1$, lo cual negaría que el punto $(1{,}1)$ fuese el máximo que se busca.

Por otra parte, se construye un cuadrado simétrico respecto a la recta $u_1 = u_2$, con un lado sobre la recta $u_1 + u_2 = 2$ y un vértice en el punto $(1{,}1)$ que está contenido en el conjunto factible. Ahora, si ampliamos el conjunto a uno más grande, el cuadrado que acabamos de formar y que posee el mismo punto que maximiza la utilidad en el vértice $(1{,}1)$, entonces el conjunto factible original S que está contenido en el cuadrado, también debe tener el mismo punto de máximo. Esto se respeta según el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes, anteriormente expuesto. La diagonal que divide el cuadrado forma un triángulo con el punto de desacuerdo, el de equilibrio y su proyección el eje de abscisas. Para Nash, la maximización geométrica de este triángulo es comparable a la maximización del producto de utilidades.

Gráfico 1

Representación geométrica de la solución de Nash al Problema de Negociación.



4. EJEMPLO PRÁCTICO

El siguiente ejemplo planteado es un problema sencillo que ayudará a ilustrar de forma más práctica y visual el Problema de Negociación y la solución de Nash. De esta manera, se conseguirá entender más fácilmente lo anteriormente explicado y encontrar un atisbo de comparación con las problemáticas que se pueden dar en la realidad. Además, servirá para introducir más adelante una conclusión a la solución de Nash.

Supongamos que una pareja, María y José, quieren ir al cine a ver una película juntos. En el horario al que acuden hay disponibles dos películas para disfrutar: Una película de comedia que le gusta mucho a José y una de terror que le gusta mucho a María. Lo único que les gusta a ambos de la película del otro es que están juntos. Si no alcanzan a un acuerdo, cada uno por separado vería su película preferible. Dado que van al cine a pasar tiempo en pareja, ninguno de los dos acabaría disfrutando su película y no les reportaría ninguna satisfacción.

Suponiendo que fuese posible cuantificar las utilidades reportadas por cada película a cada uno de ellos mediante un análisis exhaustivo de sus gustos y preferencias, se obtiene la siguiente tabla de utilidades:

Tabla 1

Utilidades relativas de María y José.

Película	Utilidad de María (u_M)	Utilidad de José (u_J)
Terror (A)	4	2
Comedia (B)	2	4
Desacuerdo (d)	0	0

Como María y José quieren ser imparciales sobre qué película escoger, establecen echar a suerte cuál película ver, esto es:

- $p_a \in [0,1]$: Probabilidad de ver la película A.
- $p_b = 1 - p_a \in [0,1]$: Probabilidad de ver la película B.

Podemos definir las funciones de utilidad de ambos de la siguiente manera:

- Función de utilidad de María: $u_M = (4 \cdot p_a) + (2 \cdot (1 - p_a)) = 2p_a + 2$.
- Función de utilidad de José: $u_J = (2 \cdot p_a) + (4 \cdot (1 - p_a)) = -2p_a + 4$.

El conjunto de opciones es el siguiente:

$$S = \{(u_M(p), u_J(p)) = (2p_a + 2, -2p_a + 4) | p_a \in [1,0]\}.$$

El conjunto S representa el segmento que une los puntos (4,2) y (2,4). Este segmento cumple las restricciones de convexidad y compacidad.

La solución de Nash maximiza el producto de las utilidades respecto al punto de desacuerdo, maximizando también el área. Entonces, la función a maximizar sería la siguiente:

$$\max_{0 \leq p_a \leq 1} u_M \cdot u_J = (2p_a + 2)(-2p_a + 4).$$

Desarrollando, la función a maximizar sería $U(p) = -4{p_a}^2 + 4p_a + 8$, para p_a comprendido entre 0 y 1.

Se deriva para hallar el punto de tangencia de las curvas de nivel con el conjunto de opciones:

$$U'(p_a) = -2p_a + 1, \text{ para } p_a \in (1,0),$$

e igualamos a cero para hallar el punto de la hipérbola donde tiene su máximo, que hace contacto con el segmento de opciones. Se obtiene:

$$U'(p_a) = 0 = -2p_a + 1, \text{ donde } p_a = 1/2.$$

Se comprueba que $p_a = 1/2$ es un máximo haciendo la segunda derivada y obteniendo que $U''(p_a) \leq 0$:

$$U''(p_a) = -2.$$

Esto implica que la solución de Nash a este problema es 1/2, y que los jugadores obtienen unas utilidades de $u_J\left(\frac{1}{2}\right) = u_M\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, con:

$$U(1/2) = -4{p_a}^2 + 4p_a + 8 = -4(1/2)^2 + 4(1/2) + 8 = 9.$$

Así pues, el punto de equilibrio para este Problema de Negociación sería el siguiente:

$$S = (2p_a + 2, -2p_a + 4) \text{ para } p_a = 1/2 \text{ el punto sería el } (3,3).$$

Ambas personas, María y José, obtendrían una utilidad esperada de 3 unidades.

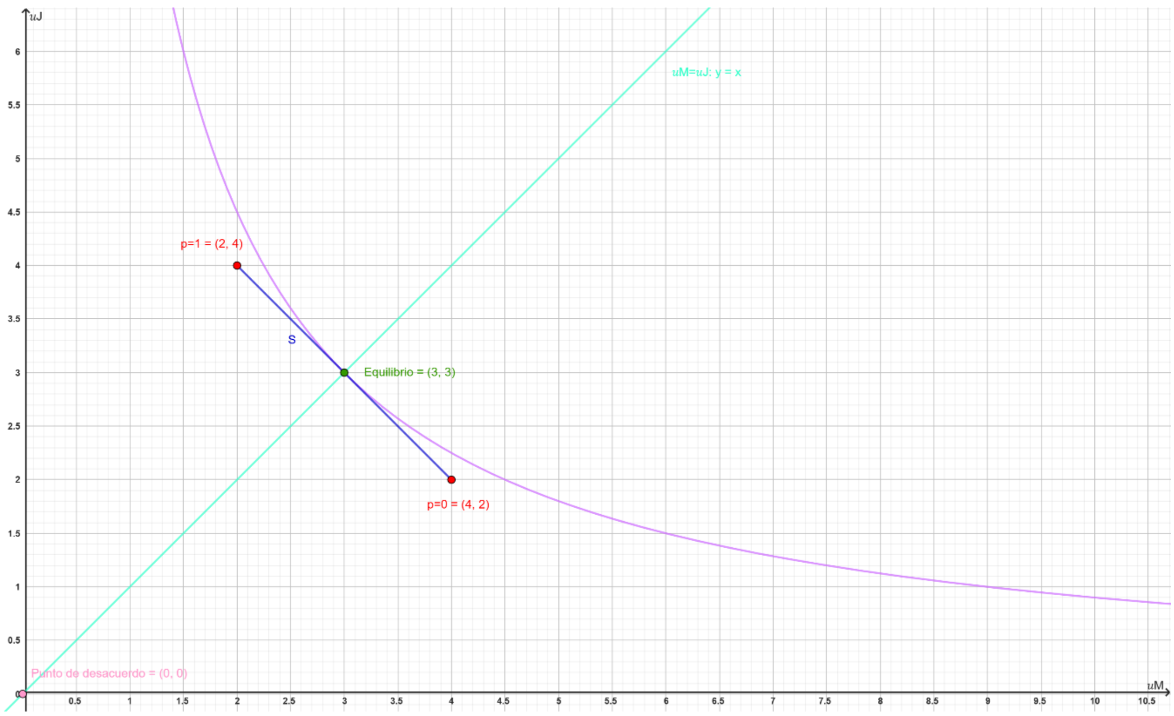
Este ejemplo respeta los axiomas necesarios para que se dé la solución, ya que es eficiente en el sentido de Pareto, pues no hay un punto que aumente la utilidad de uno sin empeorar la del otro. Además, el axioma de Independencia de Alternativas

Irrelevantes también se cumple por la propia naturaleza del segmento, que ya es irreducible. Por su parte, el axioma de Invarianza ante Transformaciones Afines también se cumple, puesto que las utilidades ya están normalizadas respecto al punto de desacuerdo. A su vez, el axioma de Simetría se satisface y hace que el ejemplo sea, tal vez, extremadamente sencillo e ideal, pues nos permite ilustrar la solución como si se tratase de un lanzamiento de moneda que decide, mediante la asignación de cara o cruz, qué película ver. Este es uno de los ejemplos que el propio Nash proporciona como negociación justa, un acuerdo entre partes para utilizar un método de probabilidad. Esto ocasiona que, a la fuerza, ambas personas posean la misma capacidad de negociación, que es la hipótesis fundamental del axioma de Simetría. Así mismo, el conjunto de opciones es simétrico respecto la recta $u_M = u_J$, y la solución pertenece a un punto de la recta.

Para una mayor comprensión visual del ejemplo, se adjunta el siguiente gráfico:

Gráfico 2

Representación geométrica de la solución de Nash al ejemplo práctico.



5. LA SOLUCIÓN DE KALAI-SMORODINSKY

La solución de Nash al Problema de Negociación no está exenta de críticas, y en este apartado se expondrá una de las primeras, que buscaba paliar alguna de las principales faltas de realismo del modelo de Nash. Ehud Kalai y Meir Smorodinsky, dos matemáticos cuya área de estudio es la Teoría de Juegos, propusieron para la solución al Problema de Negociación un nuevo método publicado en su artículo de 1975 "*Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*". Su principal crítica a la solución de Nash recae en el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes. En este sentido, la solución de Kalai-Smorodinsky sostiene que el conjunto de opciones disponibles afecta a las expectativas de los jugadores sobre lo que debería ser el acuerdo final (equilibrio). Esto es, si cambia el conjunto de opciones, aunque se incorporen o eliminen opciones irrelevantes, la percepción de cuánto debería recibir cada jugador puede cambiar. La existencia de una opción donde uno de los jugadores podría ganar más, aunque luego no se elija, llevaría a ese jugador a esperar más del equilibrio o acuerdo final. Para Kalai-Smorodinsky, el equilibrio debería adaptarse a esas nuevas máximas ganancias posibles.

Esta es la razón que los llevó a remplazar el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes por el de Monotonía de Recursos, basado en el principio de división justa, en el que los recursos deben distribuirse entre los jugadores garantizando un trato equitativo, racional y razonable para todos.

La solución de Kalai-Smorodinsky se aplica, al igual que la de Nash, para dos jugadores y tendrían que pasar casi 50 años para que D. Karos, N. Muto y S. Rachmilevitch en 2018 publicaran la solución de Kalai-Smorodinsky para n-jugadores en su *trabajo "A Generalization of the Egalitarian and the Kalai-Smorodinsky Bargaining Solutions"*. En este trabajo se ilustrará el modelo original para dos jugadores.

Primero, para caracterizar el axioma de Monotonía de Recursos hay que definir algunos elementos necesarios:

Sean (d, S_1) y (d, S_2) dos Problemas de Negociación, donde $d(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ es el punto de desacuerdo y $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$ son conjuntos de opciones (compactos y convexos en $\mathbb{R}^2$) tales que $d \in S_i, i = 1{,}2$. Se define $b(S) = \big(b_1(S), b_2(S)\big)$, donde:

$$b_i(S) = sup\{u_i: (u_1, u_2) \in S \; y \; u_i \geq d_i\}, \; i = 1{,}2;$$

es el supremo de utilidad alcanzable en el conjunto S para un jugador. Este punto representa la máxima utilidad individual que cada jugador puede alcanzar dentro del conjunto S.

Sea $g_S(x)$: $[d_1, b_1(S)] \in \mathbb{R}^2$ una función tal que:

$g_S(x) = y$ si existe y tal que $(x, y) \in S$ es la solución sobre la frontera de Pareto.

$g_S(x) = b_2(S)$ si, en el caso contrario, y no existe.

El axioma de Monotonía de Recursos afirma:

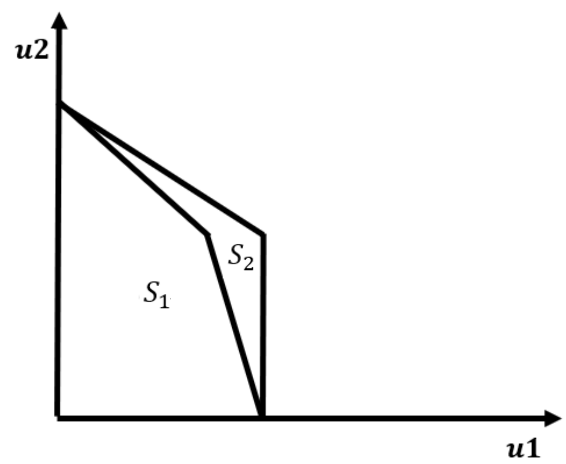
Si $b(S_1) = b(S_2)$ y $g_{S_1}(x) \leq g_{S_2}(x)$ para todo $g_S(x)$: $[d_1, b_1(S)]$, entonces la solución al Problema de Negociación no debe empeorar para ningún jugador. Es decir, si $c(S_i) = (u_1(d, S_i), u_2(d, S_i))$ es la solución al Problema de Negociación (d, S_i), entonces $u_1(d, S_1) \leq u_1(d, S_2)$ y $u_2(d, S_1) \leq u_2(d, S_2)$.

Esto principio se basa en la idea de que, si en el nuevo conjunto de alternativas las posibilidades de cada jugador mejoran o se mantienen sin empeorar las del otro, entonces la solución no debería empeorar para ninguno de los dos, sino ser mejor o igual.

Esto se ilustra perfectamente en la siguiente figura, donde están representados dos conjuntos, en la cual $S_1 \subseteq S_2 \in \mathbb{R}^2$. En equilibrio, la utilidad del jugador 2 es igual para ambos conjuntos, pero la utilidad del jugador 1 en el conjunto S_2 mejora sin empeorar la del otro. También se puede observar que las aspiraciones máximas para cada jugador se mantienen igual para ambos conjuntos.

Figura 1

Comparación de utilidades de los individuos para los conjuntos S_1 y S_2.



La solución de Kalai-Smorodinsky no trata de maximizar el producto de utilidades respecto al punto de desacuerdo, como la solución de Nash, sino preservar las proporciones entre las máximas aspiraciones individuales y lo que consiguen los jugadores en el equilibrio, respecto al punto de desacuerdo.

La solución del Problema de Negociación para Kalai-Smorodinsky se halla de la siguiente manera: Encontrar el punto de corte entre la recta que interseca la frontera de Pareto, la cual pasa por el punto de desacuerdo y el punto formado por las aspiraciones máximas de cada jugador, b(S). La recta sería:

$$L = \{(1-\lambda)d + \lambda b(S) : \lambda \in [0,1]\}$$

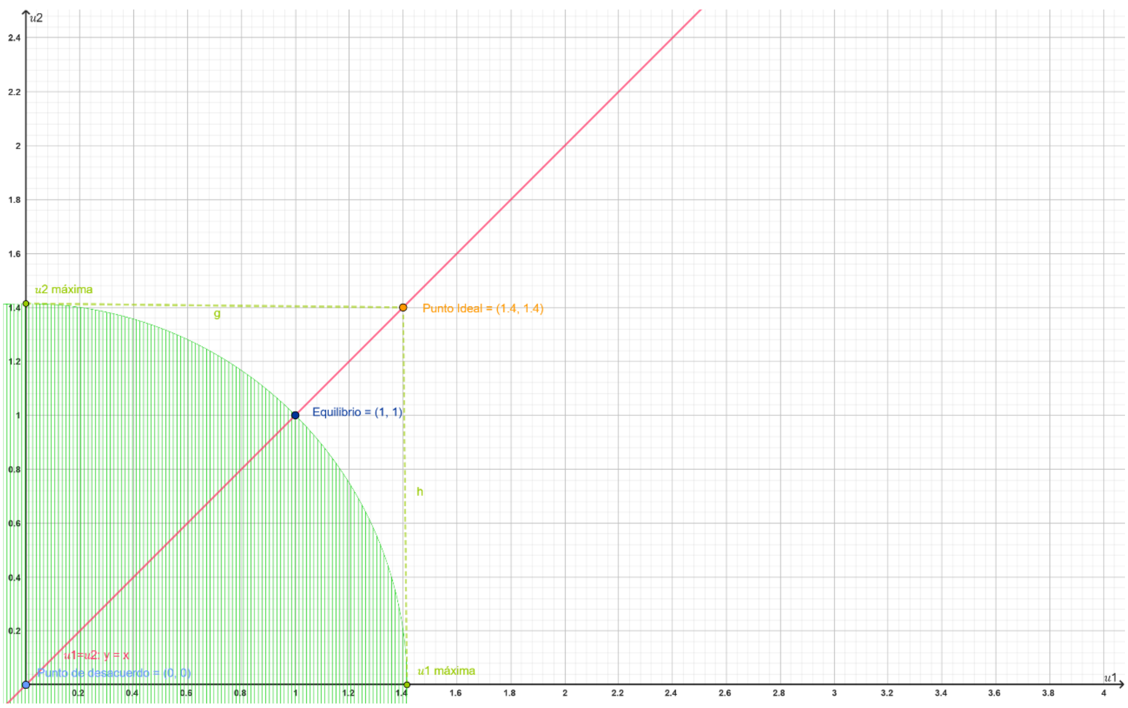
Formalmente, dado un conjunto de negociación S y el punto de desacuerdo d, la solución de Kalai-Smorodinsky se define como el punto sobre la frontera de Pareto en S que maximiza la mínima proporción de utilidad alcanzada respecto el punto ideal:

$$c(d,S) = \arg\max_{(u1,u2)\in S} (\min\left\{\frac{u_1 - d_1}{b_1(S) - d_1}, \frac{u_2 - d_2}{b_2(S) - d_2}\right\}), \text{ donde } u = (u_1, u_2) \in S.$$

La representación gráfica, para el punto de equilibrio $c(S) = (1,1)$ sería:

Gráfico 3

Representación geométrica de la solución de Kalai-Smorodinsky al Problema de Negociación.



6. EJEMPLO PRÁCTICO PARA LA SOLUCIÓN KALAI-SMORODINSKY

Para ilustrar mejor las diferencias y similitudes con la solución de Nash, se procederá a resolver el ejemplo práctico anteriormente expuesto, cuyos elementos además ya nos son conocidos, con el modelo de Kalai-Smorodinsky.

Como recordatorio, se muestra de nuevo la tabla de utilidades del ejemplo:

Tabla 1

Utilidades relativas de María y José.

Película	Utilidad de María (u_M)	Utilidad de José (u_J)
Terror (A)	4	2
Comedia (B)	2	4
Desacuerdo (d)	0	0

El punto clave que nos ayudará a obtener la solución de Kalai-Smorodinsky es aquel punto ideal en el que ambas personas, María y José, alcanzan su utilidad máxima, b. Este punto no pertenece al conjunto factible, pero es el necesario para crear la recta que corta la frontera eficiente pasando por el punto de desacuerdo $d(0,0)$.

Para María, su máximo es 4 y para José, su máximo es también 4, debido a la simetría anteriormente explicada. El punto ideal es: $b = (b_M, b_J) = (4,4)$.

La recta que cruza el punto $d(0,0)$ y el punto $b(4,4)$ en este ejemplo simétrico es la recta $u_M = u_J$.

Ahora, se halla el punto de corte entre la recta y la frontera eficiente. Primero, se obtiene la recta que contiene la frontera eficiente, cuya pendiente se define como: $m = \frac{4-2}{2-4} = -\frac{2}{2} = -1$, por lo que la recta quedaría: $y - 2 = -(x - 4)$, o $y = -x + 6$.

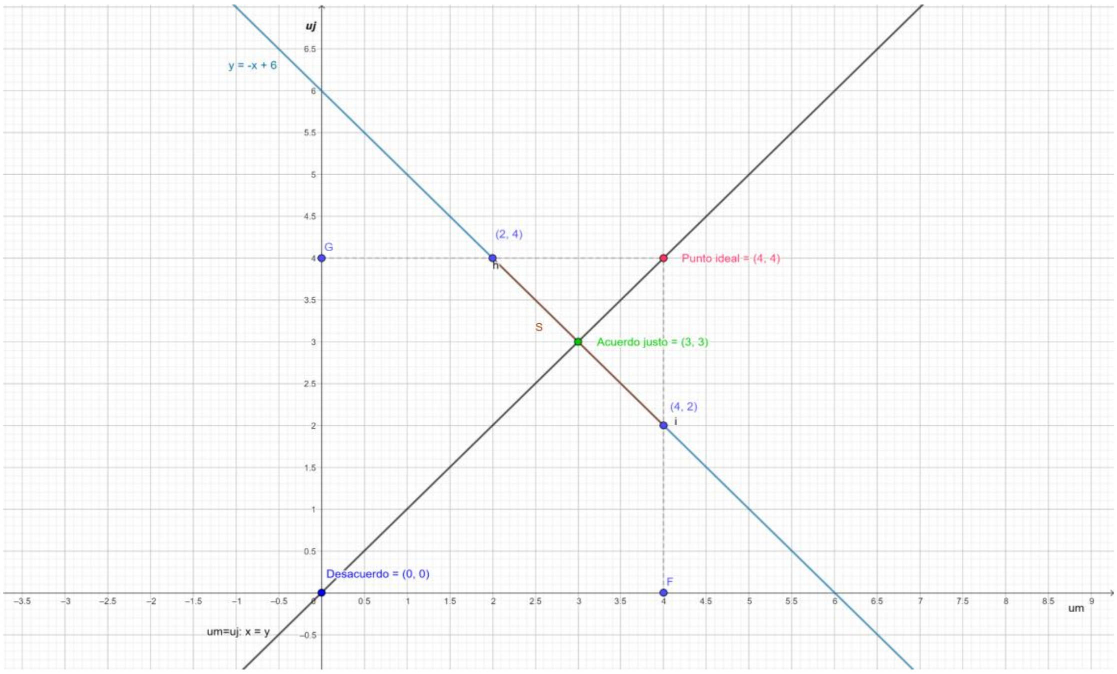
El punto de corte entre las rectas $x = y$ e $y = -x + 6$ es el $(3,3)$.

La utilidad que obtendría María sería 3 y la utilidad que obtendría José sería, también, 3. Es decir, se concluye con el mismo acuerdo que con Nash de efectuar un sorteo con igual probabilidad para ambas películas.

Visualmente se representa la solución en el siguiente gráfico:

Gráfico 4

Representación geométrica de la solución de Kalai-Smorodinsky al ejemplo práctico.



En este ejemplo práctico el resultado de la solución de Nash y la solución de Kalai-Smorodinsky es el mismo, pues la finalidad del ejemplo es ilustrar el Problema de Negociación y las distintas formas de resolución que implican. En el caso de Nash es maximizar el área de utilidad y en el caso de Kalai-Smorodinsky es respetar la proporcionalidad de las ganancias posibles.

Si bien este sencillo ejemplo no posee alternativas irrelevantes, pues el segmento es ya el mínimo conjunto de opciones posibles, la crítica de Kalai-Smorodinsky sigue siendo observable: Las máximas ganancias posibles que un jugador puede conseguir en un conjunto de opciones debe tener su implicación en el acuerdo justo final o punto de equilibrio.

A pesar de que el modelo de Kalai-Smorodinsky elimine el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes de Nash por el axioma de Monotonía, la solución es la misma. Bajo ambos modelos, el acuerdo justo entre ambos individuos es el mismo. En el siguiente apartado, se expondrá como el punto de equilibrio difiere entre ambos modelos al relajar el axioma de Simetría.

7. EJEMPLO PRÁCTICO: CONTRASTE DE SOLUCIONES

Como forma de ilustrar la imagen completa del Problema de Negociación para las soluciones de Nash y Kalai-Smorodinsky, se procederá a insertar una perturbación en el ejemplo ya expuesto, que permita que sendas soluciones difieran y así visualizar, después, el porqué de que las soluciones coincidan o no.

Con la situación del ejemplo práctico ya comentado como partida, se supone que una nueva película entra en la cartelera de ese horario, una película de aventuras que solo agrada, y mucho, a María. La nueva tabla de utilidades quedaría de esta siguiente manera:

Tabla 2

Utilidades relativas de María y José para la nueva situación.

Actividad	Utilidad de María (u_M)	Utilidad de José (u_J)
Terror (A)	4	2
Comedia (B)	2	4
Aventura (C)	6	0
Desacuerdo (d)	0	0

Las combinaciones factibles de utilidades se obtienen como el conjunto convexo de los puntos, $S = \{(2,4), (4,2), (6,0)\}$, es decir, el segmento que une los puntos $(2,4)$ y $(6,0)$. Este segmento forma la frontera de Pareto.

Se procede a mostrar la resolución de esta nueva situación con ambos modelos.

a) Solución de Nash: Maximiza el producto de utilidades.

$$\max_{(u_M,u_J)\in S} u_M \cdot u_J = (u_M - u_M(d))(u_J - u_J(d)).$$

Primero, se parametriza el segmento a maximizar, para $p \in [0,1]$:

$$(u_M(p), u_J(p)) = p \cdot (6,0) + (1-p) \cdot (2,4) = (4p+2, -4p+4);$$

a continuación, se busca el punto del segmento que maximiza el producto de utilidades:

$$U = u_M \cdot u_J = (4p+2) \cdot (-4p+4) = -16p^2 + 8p + 8,$$

Derivando en p e igualando a cero para hallar los puntos críticos de la curva de nivel, y sustituyendo en la segunda derivada para comprobar que realmente es un máximo, se obtiene:

$$\mathrm{U}'(\mathrm{p}) = -32p + 8 = 0, \text{ por lo que } p = 1/4.$$

$$\mathrm{U}''(\mathrm{p}) = -32 \leq 0, \text{ el punto } p = 1/4 \text{ es un máximo.}$$

El punto donde se maximiza el producto de utilidades es el siguiente:

$$(u_M(p), u_J(p)) = (4(\frac{1}{4}) + 2, -4(\frac{1}{4}) + 4) = (3,3)\,.$$

Como se puede observar, la existencia de una nueva opción que permite obtener más utilidad a una de las partes, no modifica el punto de equilibrio para la solución de Nash, tal y como se expresa en el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes.

b) Solución de Kalai-Smorodinsky: Proporción entre las máximas ganancias de cada individuo con el acuerdo de equilibrio, respecto al punto de desacuerdo.

$$\frac{u_M - u_M(d)}{b_M - u_M(d)} = \frac{u_J - u_J(d)}{b_J - u_J(d)}\,.$$

Primero, se halla el punto donde las utilidades de cada individuo son máximas, $b = \left(b_M, b_J\right) = (6,4)$. Ahora, se obtiene el punto sobre el segmento que cumpla:

$$\frac{u_M}{6} = \frac{u_J}{4}, es\ decir\ u_J = \frac{2}{3}u_M,$$

sustituyendo en el segmento, para $p \in [0,1]$, se obtiene:

$$(u_M(p), u_J(p)) = (4p + 2, -4p + 4), \text{ o equivalentemente,}$$

$$-4p + 4 = \tfrac{2}{3}(4p + 2), \text{ operando obtenemos que } p = \tfrac{2}{5},$$

por lo que, el punto que respeta las proporciones respecto a las máximas utilidades de los individuos sería:

$$(u_M(p), u_J(p)) = (4(\frac{2}{5}) + 2, -4(\frac{2}{5}) + 4) = (\frac{18}{5}, \frac{12}{5}) = (3.6,2.4).$$

Como se puede observar, la nueva opción modifica el punto de equilibrio a tenor de la nueva ganancia máxima que puede obtener María, lo cual refleja cómo se elimina el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes, para así introducir el axioma de Monotonía.

Con este contraste entre las soluciones de los dos ejemplos introducidos, aquel en el que las soluciones de Nash y Kalai-Smorodinsky eran las mismas, y este en el que no, obtenemos una interpretación que es conveniente exponer para la conclusión final de estos ejemplos prácticos. Es interesante apreciar como al introducir en el supuesto una opción que ha causado que se relaje el cumplimiento del axioma de Simetría, donde $u_M = u_J$, ambas soluciones difieren. Este hecho lleva a considerar que, bajo el cumplimiento estricto del axioma de Simetría (y del resto de axiomas: Optimalidad-Pareto e Independencia ante Transformaciones Afines), en donde ambos jugadores tienen igual poder de negociación, no se producen diferencias en las soluciones de Nash y Kalai-Smorodinsky. Este hecho ya ha sido analizado por T. Stambaugh, quien en 2017 publica el artículo: *"Coincidence of Two Solutions to Nash's Bargaining Problem".* Este artículo es significativo porque, aunque se sabía que las soluciones de Nash y Kalai–Smorodinsky eran iguales bajo el axioma de Simetría, el autor ofrece una caracterización completa de los Problemas de Negociación en las que coinciden. El autor del artículo expresa:

Para una solución de Nash tal que $\eta(d,S) = (\eta_1, \eta_2)$, y una solución de Kalai-Smorodinsky tal que $\mu(d,S) = (\mu_1, \mu_2)$, ambas coincidirán si y solo si para todo $(u_1, u_2) \in S$:

$$\mu_2 u_1 + \mu_1 u_2 \leq 2\mu_1\mu_2.$$

Esto se puede demostrar para los ejemplos expuestos anteriormente. Empezando por este último, en la situación en la que se relaja el axioma de Simetría, comprobando si los puntos de negociación cumplen con el teorema:

Para el punto $(4{,}2)$: $2{,}4 \cdot 4 + 3{,}6 \cdot 2 < 2 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}6$. Es decir, $16{,}8 < 17{,}28$.

Para el punto $(2{,}4)$: $2{,}4 \cdot 2 + 3{,}6 \cdot 4 > 2 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}6$. Es decir, $19{,}2 > 17{,}28$.

Para el punto $(6{,}0)$: $2{,}4 \cdot 6 + 3{,}6 \cdot 0 < 2 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}6$. Es decir, $14{,}4 < 17{,}28$.

Se puede observar como el punto $(2{,}4)$ no cumple el teorema, lo cual lleva a que $\mu(d,S) \neq \eta(d,S)$, ambas soluciones difieran.

Por otra parte, para el primer ejemplo, en la situación en la que se cumple estrictamente el axioma de Simetría, se comprueba que puntos de negociación cumplan el teorema:

Para el punto $(4{,}2)$: $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Es decir, $18 = 18$.

Para el punto $(2{,}4)$: $3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Es decir, $18 = 18$.

Se puede observar que $\mu(d,S) = \eta(d,S)$, ambas soluciones coinciden, para el primer ejemplo estrictamente simétrico expuesto.

8. CONCLUSIONES

La solución de John Nash introdujo un modelo matemático preciso para la resolución del Problema de Negociación. Previo a este autor, la Teoría de Juegos estaba centrada principalmente en Juegos de Suma Cero (lo que gana uno, lo pierde el otro), mientras que la Teoría de Juegos presentada por von Neumann y Morgenstern centrada en Juegos Cooperativos, no daba una solución a este al problema. En este contexto, Nash establece un modelo que permite, mediante un problema de maximización, calcular una única solución basada en axiomas lógicos para llegar a un equilibrio o acuerdo justo.

Sin embargo, este modelo es extremadamente ideal y los supuestos determinados de base, como la racionalidad de los jugadores o la igualdad de habilidad de negociación, son demasiado poco realistas. La idéntica capacidad de negociación es algo que en la práctica casi nunca ocurre, al igual que el supuesto de que ambos jugadores conocen perfectamente los gustos y preferencias del otro.

A su vez, los axiomas planteados para alcanzar un punto único de equilibrio pueden considerarse poco realistas. Tomemos, por ejemplo, el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes: en la actualidad son diversos los estudios que muestran que aquellas opciones de elección irrelevantes, aunque peores y menos llamativas, pueden hacer que la opción elegida sea vista como más beneficiosa, o sea por comparación más interesante. Este efecto, llamado efecto señuelo ("decoy effect"), ha sido ampliamente estudiado en Psicología, Economía Conductual y Marketing.

A su vez, el supuesto de Simetría también es poco realista, dado que los jugadores poseen distintas capacidades de negociación, así como diferentes opciones y desequilibrios estructurales como la renta, el status social o el propio tiempo, entre otros.

La crítica de Kalai-Smorodinsky, si bien soluciona las carencias que el axioma de Independencia de Alternativas Irrelevantes presenta, no está exento de otras críticas por asumir el resto de supuestos de Nash.

A pesar de ello, la solución de Kalai-Smorodinsky permitió presentar un primer inciso en la solución propuesta por Nash, lo cual, en el futuro, permitió crear modelos cada vez más fieles a la realidad. Es mediante la pequeña aportación de grandes pensadores que, poco a poco, los modelos matemáticos pueden adecuarse mejor a lo observable en la realidad.

El Problema de Negociación ha sido, y sigue siendo, un problema sin solución definitiva. De hecho, tras Nash y Kalai-Smorodinsky, otros autores han contribuido a mejorar el ajuste a la realidad de este problema, entre los cuales cabe destacar, entre otros:

- A. Rubinstein en 1982 publica su artículo *"Perfect Equilibrium in a Bargaining Model"*, donde trata el problema como un juego dinámico para explicar el proceso de negociación.
- S. J. Grossman y M. Perry en 1986 publican el artículo *"Sequential Bargaining Under Asymmetric Information"*, donde crean un modelo de negociación incompleta con información asimétrica.
- K. Binmore, M. J. Osborne, y A. Rubinstein, en 1992 publicaron *“Noncooperative Models of Bargaining”* donde relacionan la solución de Nash con el modelo de Rubinstein.
- E. Fehr y K. M. Schmidt, en 1999 publicaron el artículo *“A Theory of Fairness, Competition, and Cooperation”*, en el cual desarrollaron un modelo donde los jugadores no son perfectamente racionales.

Una de las soluciones más aplaudidas se basa en el modelo de Rubinstein combinado con los trabajos de Grossman-Perry. Se trata de un modelo dinámico que conecta con la solución de Nash y permite introducir hipótesis más acordes al mundo real.

La finalidad de este Trabajo de Fin de Grado no es plasmar la realidad de la forma más precisa, pudiendo cuantificar cada variable que acontece de forma exacta, sino entender un modelo que permita esbozar una comprensión cuantificada de un problema fáctico de la realidad, en este caso el Problema de Negociación. A través del modelo de John Nash, así como del modelo de Kalai-Smorodinsky, se puede alcanzar este propósito.

Al final, en Economía, un supuesto tan sencillo como el de racionalidad de los individuos siempre será criticado, descartado o incluso aceptado, pero sin duda alguna, intentar comprender la complejidad de la realidad mediante modelos matemáticos nos acerca cada vez más a ese supuesto idílico.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arévalo, J. J. (2004): *"Teoría de Juegos de Negociación: una visión general"*, Revista Sociedad y Economía, nº7, pág. 45-64.

Binmore, K., M. J. Osborne y A. Rubinstein (1992): *"Noncooperative Models of Bargaining"*, Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. 1, pág. 179-225.

Edgeworth, F. Y. (1881): *"Mathematical Psychics: an essay on the application of mathematics to the moral sciences", C. Kegan Paul & Co.*

Fehr, E. y K. M. Schmidt (1999): "A Theory of Fairness, Competition, and Cooperation", The Quarterly Journal of Economics, Vol. 114, pág. 817-868.

Grossman, S. J. y M. Perry (1986): *"Sequential Bargaining Under Asymmetric Information"*, Journal of Economic Theory, Vol. 39, pág. 120-154.

Kalai, E. y M. Smorodinsky (1975): "*Other Solutions to Nash's Bargaining Problem"*, Econometrica Vol. 43, pág. 513-518.

Karos, D., N. Muto y S. Rachmilevitch (2018): *"A Generalization of the Egalitarian and the Kalai-Smorodinsky Bargaining Solutions"*, International Journal of Game Theory Vol. 47, pág. 1169-1182.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green (1995): *"Microeconomic Theory"*, Oxford University Press.

Nasar, S. (1998): *"A Beautiful Mind: The life of mathematical genius and nobel laureate John Nash*", Simon & Schuster.

Nash, J. F. (1950): *"Equilibrium Points in n-Person Games"*, Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS) Vol. 36, pág. 48-49.

Nash, J. F. (1950): *"The Bargaining Problem"*, Econometrica Vol. 18, pág. 155-162.

Pareto, V. (1906): "*Manuale di Economia Politica*", Società Editrice Libraria.

Rubinstein, A. (1982): *"Perfect Equilibrium in a Bargaining Model",* Econometrica Vol. 50, pág. 97-109.

Stambaugh, T. (2017): "*Coincidence of Two Solutions to Nash's Bargaining Problem",* Economics Letters Vol. 157, pág. 148-151.

Von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944): *"Theory of Games and Economic Behavior"*, Princeton University Press.