



COLECCIÓN CONOCIMIENTO CONTEMPORÁNEO

Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: perspectivas metodológicas

Coordinadoras
Alba Vico Bosch
Luisa Vega Caro
Olga Buzón García

Dykinson, S.L.

ENTORNOS VIRTUALES PARA
LA EDUCACIÓN EN TIEMPOS DE PANDEMIA:
PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

Coordinadoras

ALBA VICO BOSCH

LUISA VEGA CARO

OLGA BUZÓN GARCÍA

Dykinson, S.L.

2021

ENTORNOS VIRTUALES PARA LA EDUCACIÓN EN TIEMPOS DE PANDEMIA: PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

Diseño de cubierta y maquetación: Francisco Anaya Benítez

© de los textos: los autores

© de la presente edición: Dykinson S.L.

Madrid - 2021

N.º 33 de la colección Conocimiento Contemporáneo

1ª edición, 2021

ISBN 978-84-1377-640-8

NOTA EDITORIAL: Las opiniones y contenidos publicados en esta obra son de responsabilidad exclusiva de sus autores y no reflejan necesariamente la opinión de Dykinson S.L ni de los editores o coordinadores de la publicación; asimismo, los autores se responsabilizarán de obtener el permiso correspondiente para incluir material publicado en otro lugar.

RESTOS CON GRAFOS: UN PRETEXTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA MODULAR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

ASTRID CUIDA

Universidad de Valladolid

MARINA ARNAL-FERRÁNDIZ

Universidad de Córdoba

CRISTINA PEDROSA-JESÚS

Universidad de Granada

1. INTRODUCCIÓN Y MARCO CONCEPTUAL

Actualmente la tecnología tiene un papel fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La existencia, potencia y versatilidad de la misma hacen necesario replantear la tipología de las matemáticas que debe aprender el alumnado y cuál es la mejor forma de hacerlo (NCTM, 2000, p.25). En este documento se hace referencia a las habilidades en el pensamiento computacional por parte de los estudiantes. De acuerdo con el marco Pisa 2021 (OECD, 2018) estas habilidades incluyen el reconocimiento y descomposición de patrones, el diseño y uso de la abstracción, la determinación de cuáles serían las herramientas informáticas (si las hay) que podrían emplearse para analizar o resolver un problema y la definición de algoritmos como parte de una solución detallada. Puesto que la tecnología ocupará un papel cada vez más relevante en la vida de los estudiantes, el recorrido a largo plazo de la competencia matemática también debe contemplar la relación sinérgica y recíproca de los pensamientos matemático y computacional. Este último entendido como un proceso que implica la formulación de problemas y el diseño de sus soluciones en una forma que pueda ser ejecutada por un ordenador, un ser humano o una combinación de ambos (Wing, 2011). El pensamiento computacional se considera uno de

los tres grandes principios metodológicos para el desarrollo e implementación del currículo de matemáticas en España (CEMat, 2021) ya que se ha convertido en una habilidad fundamental posicionándose en el mismo nivel que la lectura, la escritura y la aritmética (Guzdial, 2008).

Las matemáticas discretas tienen aplicaciones en todos los campos de la informática, y se utilizan ampliamente en telecomunicaciones y procesamiento de información. La matemática discreta y el pensamiento computacional guardan una estrecha relación. En particular, la aritmética modular forma parte de algunos enfoques constructivos concretos del pensamiento computacional (Flores, 2011). Desde la introducción de la matemática discreta en el libro titulado: “Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics” (NCTM, 1989), diversos autores han señalado la necesidad de incluirla en el currículo (DeBellis y Rosenstein, 2004; Hart y Martín, 2018; Rosenstein, 2020). Por medio de las experiencias con la matemática discreta, los profesores pueden enseñar mejor a los estudiantes a “pensar críticamente, resolver problemas y tomar decisiones usando estrategias y razonamientos matemáticos” (DeBellis y Rosenstein, 2004, p.49). Estos autores consideran además que, es un vehículo que ofrece a los profesores una forma diferente de pensar sobre los temas matemáticos tradicionales. También presenta “una nueva estrategia para involucrar al alumnado en el estudio de las matemáticas” (p. 49), y que le ofrece herramientas e información valiosas que le permite un nuevo comienzo en las matemáticas, brindando una oportunidad de revitalizar las matemáticas escolares. Según Goldin (2017) los estudiantes que han sido “apagados-desanimados” por las matemáticas escolares tradicionales, y los maestros que desde hace mucho tiempo han hecho una rutina de su instrucción, pueden encontrar en el dominio de las matemáticas discretas oportunidades para el descubrimiento matemático y la resolución de problemas interesantes.

La resolución de problemas ha sido estudiada, en el ámbito de la educación matemática, por su gran impacto en el aprendizaje y en la construcción del conocimiento matemático (English y Gainsburg 2016; Lesh y Zawojewski, 2007; Liljedahl y Santos-Trigo 2019; Pólya, 1954; Schoenfeld, 1985). En las últimas dos décadas ha cobrado mayor

relevancia la enseñanza de habilidades de pensamiento y la resolución de problemas en la escuela. Esto ha sido originado, en parte, por los resultados de estudios que han señalado vínculo entre las habilidades de pensamiento genérico del alumnado y el rendimiento del aprendizaje (Prins et al., 2006; Van Der Stel, y Veenman, 2014).

Es esencial que los profesores utilicen entornos de aprendizaje que tengan como objetivo involucrar a los estudiantes y usuarios de las matemáticas en experiencias de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2020). Schoenfeld (1985) implementó un programa en torno a la resolución de problemas, centrado en analizar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, documentando aspectos relacionados con el uso de estrategias heurísticas, la naturaleza del pensamiento matemático, las creencias de los estudiantes y la importancia de las estrategias metacognitivas.

Una cuestión central en su programa fue la caracterización de lo que significa pensar matemáticamente. Las actividades en las aulas de matemáticas pueden y deben reflejar el desarrollo del conocimiento matemático que queremos que los estudiantes adquieran. Según Schoenfeld (1985), “aprender a pensar matemáticamente, implica mucho más que saber varias cosas “al dedillo”. Incluye ser flexible e ingenioso [...], usar el conocimiento de manera eficiente, y, entender y aceptar las reglas tácitas del juego” (p.xii). Es fundamental, por tanto, relacionar el proceso de desarrollar la disciplina con el aprendizaje o construcción del conocimiento, esto es, que el alumnado adquiera distintas herramientas y se involucre en actividades que reflejen el quehacer matemático. También es importante crear un ambiente que posibilite la construcción de significados (“sense-making”). El mismo autor señala:

Pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático -valorar los procesos de matematización y abstracción y tener la predilección para aplicarlos- (b) desarrollar una competencia con las herramientas propias de las matemáticas y ponerlas a disposición para comprender la estructura: construcción de significados matemáticos.

(Schoenfeld, 1994, p.60).

Las actividades en el aula deben contribuir en la propia comprensión o desarrollo de las ideas matemáticas del alumnado, acentuando no sólo el proceso constructivo sino además la necesidad de tomar conciencia de esa construcción, siendo capaz de modificarla a partir de la reflexión en cada una de las fases del proceso. El aula resulta ser la principal fuente de experiencias de resolución de problemas para los estudiantes, la experiencia básica desde la cual abstraen su sentido de lo que se trata la matemática.

Otro aspecto relevante relacionado con los principios de la resolución de problemas tiene que ver con la manera en que los estudiantes conceptualizan las matemáticas. Schoenfeld (2016) destaca que un aspecto significativo en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es pensarlas en términos generales, como la “ciencia de los patrones”. Las matemáticas revelan patrones ocultos que nos ayudan a comprender el mundo que nos rodea [...] “hacer” matemáticas es mucho más que cálculos o deducciones; implica la observación de patrones, la prueba de conjeturas y la estimación de resultados (National Research Council, 1989, p.31). Se debe poner el foco más sobre el proceso que sobre el contenido matemático puesto que, se ha de describir lo que son las matemáticas, así como lo que se espera que el alumnado aprenda al estudiarlas. De acuerdo con la caracterización de las matemáticas a partir de patrones que hace Devlin (1994), se pretende que, en un contexto de resolución de problemas, los estudiantes reconozcan las propiedades de conjuntos numéricos: que busquen, representen y describan relaciones entre dichos conjuntos de tal forma que los lleve a la identificación de patrones, conjeturas o relaciones.

Las primeras operaciones aritméticas suelen introducirse en edades tan tempranas que en muchas ocasiones el momento de fundamentar estos algoritmos jamás llega. Una pregunta del tipo “por qué se divide de izquierda a derecha y no al contrario” puede poner en dificultades a más de un estudiante.

Este trabajo parte de una actividad orientada a que los alumnos de secundaria sean capaces de examinar los supuestos matemáticos existentes detrás de sus explicaciones al abordar un problema desde distintos puntos de vista, y en particular, desde la aritmética modular. En

concreto, se presenta una propuesta construida alrededor del algoritmo para el cálculo del resto de una división, mediante el empleo de un grafo. La idea se basa en el uso de propiedades aritméticas básicas que permiten desarrollar un algoritmo y, usando un grafo, se logra dar dinamismo e, incluso, convertirlo en un elemento lúdico con una presentación similar a la de un juego del estilo de Serpientes y escaleras. Esta es una herramienta interesante para la estimulación de la exploración personal del conocimiento y los procesos de matematización asociados (Martín-Morales, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2009). En principio el proceso, visto como caja negra y con pasos que no emplean divisiones ni multiplicaciones, causa asombro e intriga acerca de la razón por la cual funciona. Además de aportar los elementos que permiten la comprensión interna del algoritmo, la discusión también enriquecerá las posibilidades que permite el proceso del reparto para la deducción de propiedades de la aritmética modular.

2. OBJETIVOS

El objetivo principal de este trabajo es:

Presentar el diseño de una propuesta de enseñanza de la aritmética modular, teniendo en cuenta como agentes motivadores, el cálculo de restos con grafos y la visualización.

Los objetivos secundarios:

- Revelar de manera aplicada el significado de construcción de conocimiento matemático.
- Aplicar propiedades de la aritmética modular como alternativa a la división, para solucionar problemas en contextos cotidianos que se repiten modularmente.
- Aportar elementos de comprensión que permitan a los estudiantes conectar ideas matemáticas previas con la matemática discreta.
- Utilizar la aritmética modular para solucionar problemas de divisibilidad.

3. METODOLOGÍA

La metodología utilizada es la propia del marco de resolución de problemas de Schoenfeld (1985, 1994) cuyas etapas se basan en las planteadas por Pólya (1954). Se pretende que el alumnado “viaje a territorio desconocido” poniendo el énfasis en la construcción de significados mediante su participación en discusiones matemáticas bajo el enfoque de resolución de problemas de Schoenfeld. Este mismo entiende este proceso como no lineal, que supone caminos que van en zig-zag y marchas con distintas direcciones (hacia adelante o hacia atrás). El modelo se plantea en cuatro etapas: análisis, exploración, ejecución, comprobación (Véase Blanco, 1996). En concordancia con la perspectiva de la resolución de problemas de Schoenfeld se ha diseñado una herramienta metacognitiva (Figura 1) que se estructuró en torno a cuatro tipos de preguntas auto-dirigidas fundamentadas en los estudios de Pólya (1954) y Schoenfeld (2016). Las estrategias consideradas en las distintas preguntas se acuñaron de la lista de Mevarech y Kramarski (2014).

FIGURA 1. Herramienta metacognitiva.



Fuente: elaboración propia

Un aspecto que se tiene en cuenta en el diseño de la propuesta es el de la visualización. Su alcance en este sentido no es el de destacar la importancia de la visualización, sino el de transmitir aspectos estratégicos e intuitivos, que, por otra parte, son probablemente mucho más difíciles de hacer explícitos y asimilables para los estudiantes, precisamente por encontrarse muchas veces situados en los sustratos menos conscientes de la propia actividad del experto [...] (Guzmán, 1996, p.35). Se han planteado las actividades para ser implementadas en el contexto de educación secundaria, pudiéndose adaptar más adelante en los distintos niveles.

3.1. FASES DE REALIZACIÓN

La propuesta diseñada será llevada a cabo en seis fases ($F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$) que se describen en la Tabla 1. Posteriormente, se detallan aspectos clave en el desarrollo de cada fase y, de manera implícita el objetivo en cada una de ellas. En estas fases, de acuerdo con lo descrito en la introducción, se pretende promover en el alumnado, el trabajo en los procesos de matematización y abstracción y, a la vez motivarlo para que se involucre en actividades que reflejen el quehacer matemático.

TABLA 1. Descripción de las fases de la propuesta

Fases	Descripción de la fase	
F_1 Problema	Planteamiento de una situación modular inicial.	
F_2 Motivación	Se presenta una imagen del grafo, y se explica su uso para el cálculo de restos.	
F_3 Descubriendo patrones y relaciones jugando	Se presenta una imagen de un “reloj” (rueda modular) y a partir de una pregunta deben establecerse relaciones entre los números y los colores	
	Experimentación dirigida	Sumas y restas. Relación con los restos.
		Producto de dos números. Relación con los restos.
		Potenciación. Relación con los restos.
F_4 Comunicando ideas	Hallar restos de números con distintas descomposiciones.	
	Identificación de distintos patrones al operar con restos.	
F_5 Deducciones informales	Respuestas a preguntas planteadas, conjeturas y propuesta de nuevas cuestiones.	
F_6 Generalización	Utilizando propiedades de la aritmética elemental se generalizan algunas propiedades modulares.	

Fuente: elaboración propia

En la primera fase se trabajará con los conocimientos previos del alumnado y a partir de la segunda fase, como se ha señalado en el marco conceptual, se ponen a disposición las herramientas propias de las matemáticas para la construcción de significados matemáticos. Se transitará por cuatro etapas del método de Schoenfeld (1994) de manera transversal en las seis fases, ya que las actividades en sí mismas plantean cuestiones a resolver.

1. **Fase 1:** Se plantea un problema situado en un contexto modular. El alumnado utilizará sus propias estrategias para solucionar el problema.

2. **Fase 2:** Mediante el grafo de restos se aborda el mismo problema. El grafo actuará más como elemento motivador, como excusa para invitar al alumnado a trabajar la aritmética modular a partir de preguntas tales como ¿Por qué funciona? ¿Cómo se construye?
3. **Fase 3:** A partir de la visualización se descubrirán propiedades de la aritmética modular. De acuerdo con el tiempo y el grado del curso en el cual se plantee la propuesta, se pueden incluir distintas propiedades además de las básicas de la multiplicación y la suma.
4. **Fase 4:** Al comunicar ideas se pretende conectar con conocimientos previos como por ejemplo la propiedad asociativa de la suma o la expansión decimal de un número, entre otras.
5. **Fase 5:** Teniendo en cuenta las conexiones y los resultados que van emergiendo, el alumnado podrá hacer deducciones informales.
6. **Fase 6:** A partir de las deducciones informales, en algunos casos se podrán realizar generalizaciones.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se presentan algunas de las actividades diseñadas para la secuencia didáctica. Se han elaborado varias para que el alumnado tenga la posibilidad de encontrar patrones y conjeturar sobre las propiedades de la aritmética modular. También se describe el escenario de realización de las tareas.

4.1. ALGUNOS PROBLEMAS EN CONTEXTOS MODULARES

Inicialmente se expondrán algunos problemas significativos, de la multitud de problemas que pueden dar juego a la hora de trabajar contextos modulares para que el alumnado lo resuelva con sus propias heurísticas.

Problema 1: Los autobuses del ejército cuentan con 36 asientos para los soldados (son todos iguales). Si 1126 soldados están siendo

transportados en autobús a su lugar de entrenamiento, y se optimiza el uso de los transportes, es decir, no se trae otro autobús hasta que se llena el anterior, ¿hay algún autobús que lleve asientos vacíos? Si lo hay, ¿cuántos asientos vacíos lleva? Adaptado de: Rodríguez et al. (2009).

Problema 2: Un astronauta hizo un viaje de 239 horas. Si despegó a las 00:00 horas, ¿a qué hora aterrizó? La respuesta ha de darse en el formato de 24 horas.

Problema 3: Las estaciones se suceden en el tiempo siguiendo siempre la misma secuencia IPVOIPVO... (invierno, primavera, verano, otoño, invierno, primavera, ...) Un abuelo reta a su nieto contándole que, a partir del día 21 de diciembre de cierto año, en el que comenzó el invierno, han pasado 58 estaciones y media, aproximadamente. ¿En qué estación se encuentran?

Problema 4: Si hoy es miércoles ¿qué día será dentro de 284 días?

Problema 5: ¿ $8^{193} - 1$ es divisible por 7?

El quinto es un problema en contexto modular pero no cotidiano. Con la aritmética modular, a diferencia de los criterios de divisibilidad, no sólo se verifica la divisibilidad de un número entre otro sino el resto que queda, una información que ningún criterio de divisibilidad arroja.

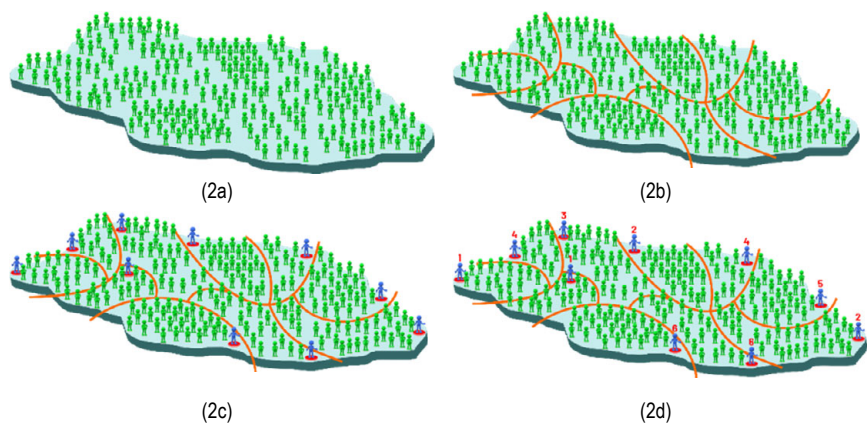
Al incrementar los distintos valores dados en los cuatro primeros problemas, la división resultaría ser más compleja, y, en el quinto, calcular la potencia y luego dividir supondría bastante coste operativo. Como pretexto para solucionar estos problemas sin la necesidad de dividir, se introduce la aritmética modular a partir de un método alternativo, mucho más rápido y con menor coste matemático, que el algoritmo de la división.

La idea clave que se quiere transmitir al alumnado es que hallar restos tiene que ver con agrupar. A lo largo de todo el desarrollo de la secuencia se ha de reforzar este concepto.

Se puede empezar la actividad en clase con un caso práctico como el siguiente: suponiendo que se tiene toda la Plaza Mayor llena de gente y

que se quiere saber su resto módulo 7 (Figura 2a), y por ello se plantean algunas alternativas para encontrarlo. Una de ellas sería, contar el número de personas presentes, y hallar el resto al hacer la división entre 7. Pero esto es muy costoso, inclusive matemáticamente porque habría que hacer una división. El algoritmo en este caso no es eficiente. Otra opción es dividir en varios grupos, sin importar el tamaño de los mismos (Figura 2b) y se indica a varias personas (una por grupo) que calculen en resto módulo 7 en su grupo (Figura 2c). No hace falta saber cuántos grupos hay, ni de cuántas personas componen cada uno, sólo los restos (Figura 2d), y tampoco tienen por qué estar asociados a la unidad que se cuenta. Por último se suman todos los restos (en este caso particular, $1+4+3+2+4+5+2+1+6+6$ y, el resultado de la suma se vuelve a repartir).

FIGURA 2. *Cálculo de restos mediante agrupaciones*



Fuente: elaboración propia

Se plantean problemas en distintos contextos modulares, algunos de ellos cotidianos como: los meses del año, las horas del día, los días de la semana, las estaciones del año que se solucionarán primero con grafos y luego se hacen las conexiones con la aritmética modular o aritmética del reloj (Burton, 2010).

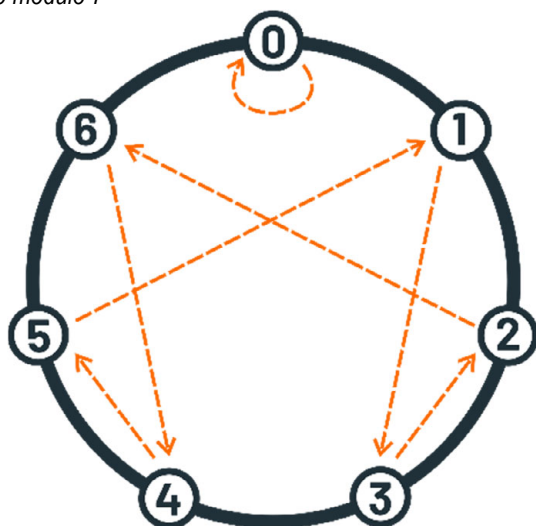
Teniendo en mente el concepto esencial que se quiere trabajar en la segunda fase, y para ampliar la perspectiva del alumnado sobre la forma

de solucionar problemas en contextos modulares, se hará uso del grafo para calcular los restos al dividir por cualquier número. Se calculan con los mismos valores propuestos en la fase 1, inclusive con números de varios dígitos para que el alumnado vea la bondad de trabajar con esta novedosa herramienta. A continuación, además de contextualizar el uso del grafo, se hace una breve explicación sobre su funcionamiento.

4.2. DESCRIPCIÓN DEL CÁLCULO DE RESTOS CON GRAFOS

Hay situaciones en las que un problema se resuelve encontrando, no el cociente, sino el resto, de una división, por ejemplo, si hoy es miércoles ¿qué día será dentro de 283 días? También ocurre que, en ocasiones, no es necesario conocer el resultado de una división, sino únicamente si ésta es exacta o no, como es el caso en el que se quiere determinar si un número es, o no, primo. Por último, se puede tener la situación en la que se necesita saber si el resultado de una división es exacto, antes de invertir tiempo realizando la división de forma completa. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se simplifica un número fraccionario, ya que solo se deben hacer divisiones con resultado exacto. En general, para conocer el resto de una división se utiliza el algoritmo de la división y éste aparece al final del proceso. Pero ¿es posible conocer el valor del resto de una división sin necesidad de hacer la división mediante el algoritmo? La respuesta a esta pregunta se verá a continuación al empleando un grafo (Figura 3), que es una adaptación de Wilson (2010).

FIGURA 3. Grafo módulo 7



Nota: Adaptado de Wilson (2010)

Este grafo, en particular, permite conocer cuál es el resto que se obtiene al dividir un número entre 7. En este caso, tiene 7 vértices, etiquetados del 0 a 6. El algoritmo inicia siempre en el vértice 0 y consta de cambios de posición, que dependen de cada uno de los dígitos que componen al número, según dos reglas: los desplazamientos sobre la circunferencia se realizan siempre en el sentido de las manecillas del reloj y los “saltos” siguiendo las aristas discontinuas. La última posición alcanzada corresponde al valor del resto buscado.

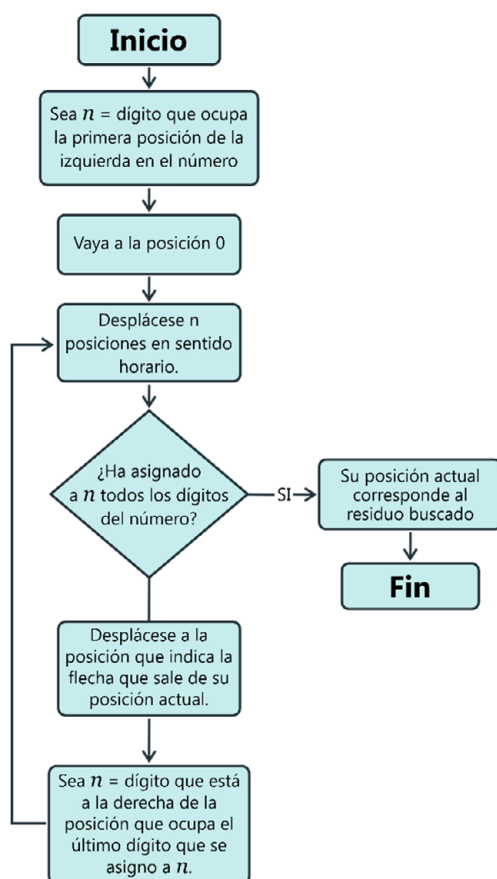
Dado un número natural mayor que 0, describiremos el procedimiento que debe ser ejecutado con el grafo para hallar el resto, en otras palabras, vamos a puntualizar el algoritmo:

- Iniciando en 0, nos movemos en sentido de las agujas del reloj tantas posiciones como indique el dígito que ocupa la posición de la unidad de mayor orden en nuestro número.
- Si aún no hemos agotado los dígitos de nuestro número, nos desplazamos de la posición actual a la que indique la arista discontinua que parte de donde nos encontramos. En el caso de haber agotado los dígitos vamos al paso 5.

- A partir de esta nueva posición nos desplazamos nuevamente en sentido de las agujas del reloj, tantas posiciones como indique el dígito que ocupe la posición a la derecha del último que fue usado.
- En esta nueva posición seguimos el mismo procedimiento indicado a partir del paso 2.
- El dígito correspondiente a la última posición ocupada es el resto buscado.

Se presenta también el algoritmo de manera esquemática, como un diagrama de flujo (Figura 4).

FIGURA 4. Diagrama de flujo para ejecutar el algoritmo de restos con grafos



Fuente: Elaboración propia

Ilustraremos el algoritmo con ejemplo concreto al calcular el resto de dividir 948 entre 7. Iniciando en 0 se hace un desplazamiento de 9 (948) posiciones en sentido de las agujas del reloj, de tal forma que se llega al 2. Como no se han agotado los dígitos de 948 se “salta” desde el 2 al 6 (esto lo indica la arista discontinua naranja). A partir de 6 se hace un desplazamiento de 4 (948) posiciones en el sentido horario, hasta llegar al 3. Como aún queda un dígito, se “salta” de nuevo, según la arista naranja hasta el 2. Finalmente se hace un desplazamiento de 8 (948) posiciones en sentido de las agujas del reloj de tal forma que se llega al 3. Como se han agotado los dígitos, ¡3 es el resto buscado!

Llegados a este punto, el alumnado podrá realizar el proceso varias veces con números al azar para verificar que han entendido el proceso y que éste en realidad funciona.

Una vez hecho esto, surgen diversas preguntas:

- ¿Por qué funciona el algoritmo?
- ¿Cómo se construye el grafo?
- ¿Estas ideas pueden generalizarse a divisores diferentes al 7?

Es claro que estas preguntas son equivalentes, en el sentido de que si tenemos la respuesta a alguna de ellas necesariamente habremos hecho avances en la solución de las otras dos. La intención es que a medida que se vaya avanzando en las fases de realización de la propuesta, los interrogantes van encontrando respuestas.

El algoritmo ha sido programado en Geogebra y depositado online para libre acceso en el enlace: <https://www.geogebra.org/m/gdnzda4p>. Dicho link se le proporcionará al alumnado para que pueda calcular restos sin invertir tiempo en la construcción del grafo. El grafo tiene dos tipos de aristas, unas van con las manecillas del reloj y las otras (las discontinuas) señalan como “saltar” en la base del sistema de numeración, en este caso, la base diez. En la aplicación que se ha diseñado, la ausencia de arista discontinua que salga de alguna posición indica que el número correspondiente se transforma en sí mismo. Esto solo se ha indicado de manera explícita para el 0. Los grafos se pueden construir módulos

cualquier número y no es de recorrido único. Los vértices se corresponden con los restos posibles. En el caso de tener el divisor 7, los restos son, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

La siguiente fase pasa por dar respuestas a algunos de los interrogantes surgidos en la anterior. En ella se comienzan a introducir conceptos propios de la aritmética modular mostrando su similitud con el reloj analógico, teniendo en cuenta como referencia los problemas propuestos en la fase 1. De esta forma se hace latente la conexión entre la aritmética modular y la resolución de ese tipo de problemas.

4.3. SITUACIONES COTIDIANAS Y ARITMÉTICA DEL RELOJ (DE LA RUEDA)

La aritmética del reloj, de la rueda o modular trabaja con un “reloj” cuyas horas coinciden con los posibles restos de dividir un número entre otro. Para solucionar el Problema 2, basta imaginar un reloj de 24 horas como el reloj astronómico de Praga (Figura 5).

FIGURA 5. Reloj astronómico de San Marcos Praga

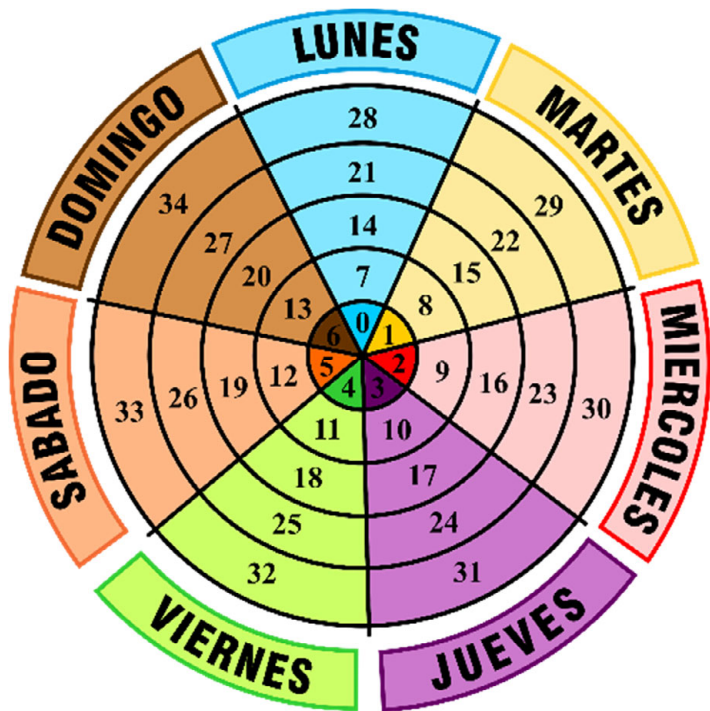


Nota: Adaptado de Klipartz [Fotografía],
Klipartz (<https://www.klipartz.com/es/sticker-png-oizqq>)

Para solucionar el problema 3, basta imaginar un reloj con cuatro posibles horas, que concuerdan con el número de estaciones del año.

Para solucionar los problemas 4 y 5, se puede suponer el reloj analógico de 7 horas que se corresponden con los siete días de la semana o “ser divisible por 7” (Figura 6).

FIGURA 6. Reloj (rueda) de restos módulo 7. Analogía con los días de la semana



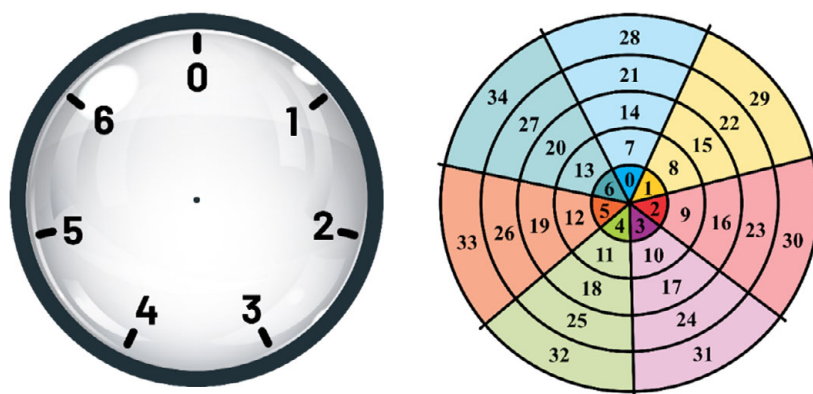
Fuente: Elaboración propia

La secuencia pretende pasar del grafo al reloj (rueda) y, a partir de la visualización concretar propiedades de la aritmética modular que pueden dar respuesta a todos los interrogantes (y otros) planteados anteriormente. Desde la fase 3 se trabajan de manera transversal y cíclica las otras fases ya que a partir de cada una de las imágenes propuestas irán surgiendo nuevos interrogantes.

4.4. “VIENDO” LA ARITMÉTICA MODULAR

Como se ha mencionado antes, la visualización juega un papel importante. Se establecerá inicialmente una analogía entre el reloj y la “rueda modular” y, en consecuencia, la relación con los restos (Figura 7). Las respuestas a todas estas cuestiones servirán de apoyo en la descripción y determinación de las propiedades de la suma y la multiplicación (Figuras 8 y 9). En los ejemplos que se muestran, se supone que todos los restos son obtenidos al dividir entre 7.

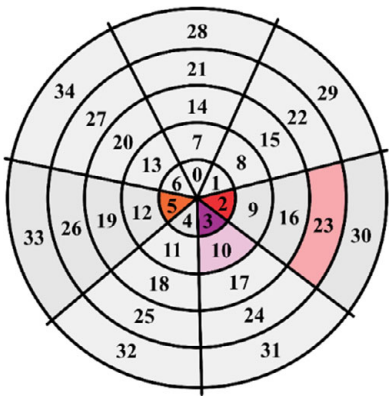
FIGURA 6. Reloj (rueda) de restos módulo 7.



Nota: Adaptado de Modular Arithmetic Visually Explained [Video],
Star (<https://bit.ly/3kxnP1E>)

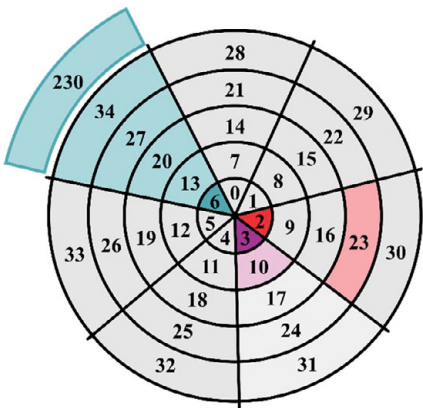
El alumnado ha de indagar la conexión existente entre los números y los colores (sectores). ¿Por qué los números van aumentando de forma circular? ¿Cuál es el significado de los colores? ¿Por qué los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 tienen colores distintos? Los estudiantes pueden lanzar otros interrogantes cuya discusión alentará aún más a descubrir las propiedades que se pretenden establecer.

FIGURA 8. Suma módulo 7. El resto de la suma de dos números es igual al resto de la suma de los restos.



Nota: Adaptado de Modular Arithmetic Visually Explained [Video], Star (<https://bit.ly/3kxnP1E>)

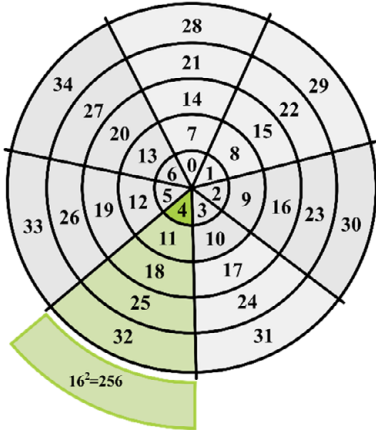
FIGURA 9. Producto módulo 7. El resto del producto de dos números es igual al resto del producto de los restos.



Nota: Adaptado de Modular Arithmetic Visually Explained [Video], Star (<https://bit.ly/3kxnP1E>)

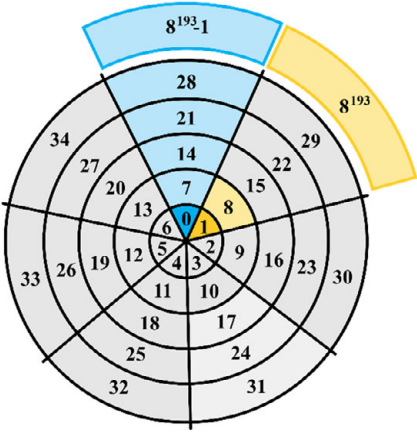
Y avanzando en el tema, se trabajan las propiedades de las potencias (Figuras 10 y 11).

FIGURA 10. Los restos de las potencias de números en un mismo sector siempre “aterrizan” en un mismo sector.



Nota: Adaptado de Modular Arithmetic Visually Explained [Video], Star (<https://bit.ly/3kxnP1E>)

FIGURA 11. $8^n - 1$, con n natural, es divisible por 7.



Nota: Adaptado de Modular Arithmetic Visually Explained [Video], Star (<https://bit.ly/3kxnP1E>)

Dado que han determinado las propiedades básicas de la aritmética modular, ya se pueden aplicar para hallar restos. Por ejemplo, calcular el resto de 946 entre 7 es igual que encontrar el resto de la forma canónica $900+40+6$. Se puede observar que es el mismo resto de dividir 246 entre 7, dado que $946=700+246$. Como $246=20\cdot 10+4\cdot 10+6$, aplicando de forma reiterada las propiedades de la suma y el producto se observa que su resto es el mismo que el de $6\cdot 10+4\cdot 10+6=10\cdot 10+6$. Este a su vez es igual al resto de $3\cdot 10+6=30+6$ y repitiendo de nuevo el proceso, se obtiene el mismo resto que el de $2+6$, siendo 1.

Se les inicia con un número cuyos dígitos sean mayores o iguales que 7 para que se vea la bondad de hallar restos. En este caso se forman grupos de 10 en 10 o de 100 en 100. Por ejemplo el resto de dividir 8798 entre 7 es el mismo resto de dividir 1021 entre 7. Esto no significa que no se pueda repartir también en veintenas, docenas, quincenas, etc.

Para responder desde la aritmética modular a los interrogantes que motivaron su estudio: ¿Por qué funciona el algoritmo? o ¿Cómo se construye el grafo? Para ello, basta con que el alumnado recorra de 10 en 10

en el sentido horario el reloj modular y que consiga los restos que quedan al hacer cada avance (véase Tabla 2).

TABLA 2. Construcción del grafo para hallar restos módulo 7

Pasos: Movimientos por grupos de 10 en 10.	Decenas	Resto	Aristas Discontinuas
En el 0 se mueve 0. Se mantiene en 0.	0	0	$0 \Rightarrow 0$
Mover 10 y se llega al 3.	$1 \cdot 10$	3	$1 \Rightarrow 3$
Mover otros 10. Es lo mismo que $3 + 10$ y se llega al 6.	$2 \cdot 10$	6	$2 \Rightarrow 6$
Mover otros 10. Es lo mismo que $6+3$ y se llega al 2	$3 \cdot 10$	2	$3 \Rightarrow 2$
Mover otros 10. Es lo mismo que $2+3$ y se llega al 5	$4 \cdot 10$	5	$4 \Rightarrow 5$
Mover otros 10. Es lo mismo que $3+3$ y se llega al 1	$5 \cdot 10$	1	$5 \Rightarrow 1$
Mover otros 10 es lo mismo que $1+3$ y se llega al 4	$6 \cdot 10$	4	$6 \Rightarrow 4$
Mover otros 10. Es lo mismo que $4+3$ y llega al 0.	$7 \cdot 10$	0	$7 \Rightarrow 0$
Mover otros 10 y se llega al 3. Se repiten los valores.	$8 \cdot 10$	3	$8 \Rightarrow 3$

Fuente: elaboración propia

Cabe resaltar que los valores de los vértices coinciden con los posibles restos al dividir por 7. Se observa que a partir de la séptima decena se repiten los mismos y con ellos construimos nuestro grafo.

De acuerdo con el nivel y el tiempo que se pueda destinar para trabajar el tema, se pueden ampliar los contenidos a trabajar con criterios de divisibilidad o propiedades de los números primos. Por ejemplo, con aritmética modular se puede deducir de manera sencilla que el resto de dividir un número abcd de cuatro cifras entre 7, es el resto de dividir $6a+2b+3c+d$ entre 7.

Este trabajo presenta una secuencia-guía para la introducción de contenidos propios de la aritmética modular en educación secundaria. Su enfoque permite la adaptación de diferentes niveles de conocimientos relacionados con la aritmética tradicional, ya que, se puede abordar el tema al margen de un conocimiento del algoritmo de la división, y, si se tiene un conocimiento profuso del mismo, se puede llegar a establecer una conexión interesante entre dicho algoritmo y el que se presenta

en esta propuesta. Se han mostrado actividades que se han diseñado para llevar a cabo esta propuesta. Estas mismas ofrecen ventajas de implementación, tanto en sesiones prácticas de aula, con las actividades de visualización y en sesiones de prácticas en el aula de informática con la aplicación de Geogebra que se ha diseñado.

La perspectiva no sólo permite al alumnado dar unos primeros pasos en la matemática discreta sino tomar otro punto de vista de conocimientos aparentemente “acabados”. Por ejemplo, al relacionar los grafos en distintos módulos con los criterios usuales de divisibilidad. La implementación de esta propuesta es abrir las puertas a lo que DeBellis y Rosenshtein (2008) entienden, es el camino a seguir en las experiencias con la Matemática Discreta, los profesores pueden ayudar mejor a los estudiantes a “pensar críticamente, resolver problemas y tomar decisiones usando estrategias y razonamientos matemáticos”.

Hemos generado un entorno de aprendizaje que, de acuerdo con lo que apunta (Santos-Trigo, 2020) tiene como objetivo involucrar al alumnado en experiencias de resolución de problemas. No sólo son problemas propuestos explícitamente, sino también otros que van surgiendo a medida que se avanza en el desarrollo de la secuencia didáctica. En las distintas fases de la propuesta se refleja el desarrollo de la visión matemática y de competencias con herramientas propias de las matemáticas para comprender una estructura aritmética, que en palabras de Schoenfeld (1994) significa permitir la construcción de significados (“sense-making”).

5. CONCLUSIONES

La secuencia didáctica permite el abordaje de problemas de restos mediante un método alternativo, significativamente más rápido y menos costoso matemáticamente, que el algoritmo de la división. A través de la aritmética modular el alumnado puede ampliar las heurísticas en la resolución de problemas en contextos modulares. Se ha presentado una propuesta para abordar el concepto de resto de tal forma que los estudiantes puedan deducir algunas de sus propiedades. La transmisión de las inquietudes y necesidades de construcción de los conceptos a los

estudiantes, hace que el proceso sea enriquecedor. El avance en la implementación permite visualizar distintas formas de calcular restos y también practicar con distintas herramientas. Se ha mostrado una adaptación del método de restos con grafos de David Wilson, para interpretar conceptos propios del currículo de manera visual. Gracias a las implementaciones que se han diseñado, la competencia aprender a aprender se trabaja de manera profusa con los estudiantes.

6. REFERENCIAS

- Burton, D. M. (2010). *Elementary number theory*. (7ª ed.) McGraw-Hill.
- Blanco, L. (1996). La resolución de problemas: una revisión teórica. *Suma*, 11-20.
- CEMat (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. Comité Español de Matemáticas.
- DeBellis, V. A., y Rosenstein, J. G. (2004). Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States. *ZDM Mathematics Education*, 36(2), 46–55.
- Devlin, K. (1994). *Mathematics the science of patterns*. New York: Scientific American Library.
- English, LD., y Gainsburg, J. (2016) Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. En English LD, Kirshner D (eds) *Handbook of international research in mathematics education*. Routledge, New York, 313–335.
- Flores, A. (2011). Desarrollo del pensamiento computacional en la formación en matemática discreta. *Lámpsakos*, 5, 28-33.
- Goldin, G. A. (2010). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics: A representational discussion. En *Theories of Mathematics Education*, 241-250. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Goldin, G. A. (2017). Discrete mathematics and the affective dimension of mathematical learning and engagement. In E. W. Hart y J. Sandefur (Eds.), *Teaching and learning discrete mathematics in the school curriculum worldwide*. Springer.
- Guzdial, M. (2008). Paving the way for computational thinking. *CACM*, 51(8): 25-27.
- Guzmán, M. de. (1996). El Rincón de la Pizarra. *Ensayos de Visualización en Análisis Matemático Elementos del Análisis*. Madrid: Pirámide.

- Lesh, R., y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 763-804.
- Liljedahl, P. y Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical Problem Solving*. Springer International Publishing.
- Martín-Morales, J., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos: una experiencia. *Contextos Educativos*, 12, 137-164.
- Mevarech, Z. y Kramarski, B. (2014). *Critical Maths for Innovative Societies: The Role of Metacognitive Pedagogies*. OECD Publishing.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- OCDE. (2018). *PISA 2021 Mathematics Framework*. Draft. OECD Publishing, Paris.
- Ontario Ministry of Education. (2020). *The Ontario curriculum, Grades 1-8: Mathematics 2020*. Toronto: Queen's Printer for Ontario. Recuperado de <https://www.dcp.edu.gov.on.ca/en/curriculum/elementary-mathematics>
- Ontario Ministry of Education. (2005). *The Ontario Curriculum: Mathematics, grades 1 to 8*. Toronto: Queen's Printer for Ontario. Recuperado de <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf>
- Pólya, G. (1954). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Prins, F. J., Veenman, M. V. J., y Elshout, J. J. (2006). The impact of intellectual ability and metacognition on learning: new support for the threshold of problematicity theory. *Learning and Instruction*, 4, 374-387.
- Rodríguez, P.; Lago, M. O., Hernández, M. L.; Jiménez, L., Guerrero, S. y Caballero, S. (2009). How do secondary students approach different types of division with remainder situations? Some evidence from Spain. *European journal of psychology of education*, 24(4), 529-543.
- Rosenstein, J. G. (2018). The Absence of Discrete Mathematics in Primary and Secondary Education in the United States... and Why that Is Counterproductive. En *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research*, 21-40. Springer, Cham
- Santos-Trigo, M. (2020). *Problem-solving in mathematics education*. Encyclopedia of mathematics education, 686-693. Springer.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida (USA): Academic Press.

- Schoenfeld, A. H. (1994). *Reflections on doing and teaching mathematics. In Mathematical Thinking and Problem Solving*, 53–75. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38.
- Van Der Stel, M., y Veenman, M. V. (2014). Metacognitive skills and intellectual ability of young adolescents: A longitudinal study from a developmental perspective. *European journal of psychology of education*, 29(1), 117-137.
- Wilson, D. (2010). *Divisibility by 7 is a Walk on a Graph*. II. Tanya Khovanova's Math Blog. <https://bit.ly/3tgsxor>
- Wing, J. (2011). Research notebook: Computational thinking—What and why. *The link magazine*, 6, 20-23.