Andalucía se mueve con Europa

Desafíos de la investigación y la innovación educativa ante la sociedad inclusiva

Inmaculada Aznar Díaz
Carmen Rodríguez Jiménez
Magdalena Ramos Navas-Parejo
Gerardo Gómez García

Dykinson, S.L.

Junta de Andalucía
UNIÓN EUROPEA
Fondo Europeo de Desarrollo Regional

Desafíos de la investigación y la innovación educativa ante la sociedad inclusiva

Inmaculada Aznar Díaz
Carmen Rodríguez Jiménez
Magdalena Ramos Navas-Parejo
Gerardo Gómez García

Dykinson, S.L.

Financiado con fondos públicos en convocatoria competitiva por la Dirección General de Investigación y Transferencia del Conocimiento de la Consejería de Economía, Conocimiento, Empresas y Universidad de la Junta de Andalucía, mediante el programa de ayudas a proyectos de investigación sobre el SARS-COV-2 y la enfermedad del COVID-19, cofinanciado con fondos FEDER europeos (Referencia: CV20-01248)

Editorial DYKINSON, S.L. Meléndez Valdés, 61 - 28015 Madrid

Teléfono (+34) 91 544 28 46 - (+34) 91 544 28 69

e-mail: info@dykinson.com

http://www.dykinson.es

http://www.dykinson.com

Consejo Editorial véase www.dykinson.com/quienessomos

Los editores del libro no se hacen responsables de las afirmaciones ni opiniones vertidas por los autores de cada capítulo. La responsabilidad de la autoría corresponde a cada autor, siendo responsable de los contenidos y opiniones expresadas.

El contenido de este libro ha sido sometido a un proceso de revisión y evaluación por pares ciegos.

ISBN: 978-84-1122-024-8

CAPÍTULO 35.

DISEÑO DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA PARA TRABAJAR LOS PROCESOS DE RAZONAMIENTO Y PRUEBA CON FUTUROS MAESTROS

Matías Arce, Laura Conejo, Astrid Cuida y Héctor Sanz

1. INTRODUCCIÓN

Cada vez hay un mayor consenso sobre la importancia que tienen los procesos asociados a hacer y construir matemáticas, especialmente en contextos situados en un paradigma constructivista de enseñanza y aprendizaje. El *National Council of Teachers of Mathematics* de EE.UU. destaca cinco procesos clave: razonamiento y prueba, resolución de problemas, comunicación, representación de ideas matemáticas y conexiones (NCTM, 2003). Este trabajo se centra en el primero, razonamiento y prueba, cuya relevancia si cabe se ha puesto más de manifiesto con la consideración del razonamiento matemático como elemento central en el marco teórico del próximo estudio PISA en matemáticas, en 2022 (OCDE, 2018).

El NCTM destaca que "el razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad" (NCTM, 2003, p. 59). Así, los docentes hemos de proveer oportunidades de aprendizaje de este proceso, adaptadas al nivel de los estudiantes, que sean suficientes y adecuadas. Para ello, es una condición necesaria (que no suficiente) que los propios docentes tengan un adecuado conocimiento de estos procesos, como indican marcos de conocimiento del profesor de matemáticas como el de Carrillo et al. (2018). Este hecho no es sencillo, porque el razonamiento y la demostración son, en general, procesos cuyo aprendizaje es complejo, también entre los estudiantes para profesor (Harel y Sowder, 2007; Stylianides y Stylianides, 2009), lo que hace imprescindible seguir ofreciendo oportunidades de aprendizaje de estos procesos en la formación inicial de profesores de matemáticas.

El objetivo de la comunicación es mostrar el diseño de la primera parte de un experimento de enseñanza (Molina, 2021; Molina et al., 2011), diseñado por los autores de esta comunicación e implementado con estudiantes del Grado en Educación Primaria (en adelante, EGEP), que pretende proporcionar a los EGEP oportunidades de aprendizaje

ISBN: 978-84-1122-024-8

del proceso de razonamiento y prueba (y los diferentes subprocesos vinculados con él), así como de movilización y generación de conocimientos vinculados a este proceso.

En el siguiente apartado se presentan los fundamentos teóricos del estudio, que en buena medida conforman los principios que sirven de base para la generación del experimento de enseñanza. Posteriormente, se explican las características metodológicas del experimento de enseñanza. Y se finaliza con la descripción detallada de la preparación y el diseño del experimento de enseñanza, la implementación con EGEP, así como un análisis retrospectivo de todo el proceso.

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico del trabajo está compuesto por dos componentes fundamentales: el conocimiento del profesor de matemáticas, por un lado, y los procesos de razonamiento y prueba y su enseñanza y aprendizaje, por otro.

2.1. Conocimiento del profesor de matemáticas

La consideración del profesorado como actor fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha propiciado un interés creciente en investigaciones centradas en el profesor de matemáticas (Skott et al., 2018). Desde la Didáctica de la Matemática se han elaborado diferentes modelos que identifican y describen de forma precisa cuáles son las diferentes dimensiones del conocimiento que ha de tener un profesor de matemáticas para poder ejercer con éxito su labor. Algunos de ellos pueden verse en Skott et al. (2018).

En particular, en este trabajo se toma como referencia el modelo MTSK (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*) de Carrillo et al. (2018), que no concibe el conocimiento del profesor como algo estático a evaluar, sino como elementos de información que se movilizan y utilizan para desarrollar tareas relacionadas con la profesión docente, de ahí su carácter especializado (Scheiner et al., 2019). Este marco realiza una distinción en dos grandes dominios, el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático, considerando un papel central a las creencias del profesor como aspecto clave que permea qué conocimientos moviliza y usa.

Este trabajo se focaliza en el dominio del conocimiento matemático, dentro del cual se engloban tres subdominios (Carrillo et al., 2018). El *conocimiento de los temas* (*Knowledge of Topics*, KoT), que abarca el conocimiento disciplinar de los diferentes contenidos matemáticos (definiciones, propiedades, procedimientos, contextos de

ISBN: 978-84-1122-024-8

aplicación…). El *conocimiento de la estructura de las matemáticas* (*Knowledge of the Structure of Mathematics,* KSM) incluye conocer conexiones entre diferentes contenidos matemáticos. El *conocimiento de la práctica matemática* (*Knowledge of Practices in Mathematics,* KPM) comprende el conocimiento sobre las actividades y los procesos que suponen un pilar para hacer matemáticas y para construir conocimiento matemático.

Así, el marco MTSK hace explícita la necesidad de que un profesor de matemáticas conozca los procesos asociados a hacer y construir matemáticas, y sea capaz de movilizar y usar su conocimiento sobre estos procesos para resolver tareas. Entre estos procesos se consideran la práctica de demostrar, de definir, de resolver problemas y de comunicar en matemáticas (Delgado-Rebolledo, 2020). Este trabajo, y el experimento de enseñanza diseñado, contiene tareas vinculadas a la práctica de demostrar, considerando tanto los procesos de construcción de conjeturas y razonamientos, como la construcción de demostraciones y las funciones de la demostración.

2.2. Enseñanza y aprendizaje de los procesos de razonamiento y prueba

La experiencia docente y la investigación muestran que los procesos de razonamiento y prueba resultan especialmente complejos para el alumnado. Uno de los motivos de esa complejidad es la gran cantidad de subprocesos que involucra. Arzarello (2008) argumenta la existencia de dos etapas de naturaleza diferente en la actividad de probar, una de indagación en el problema para llegar a establecer conjeturas, y la otra, posterior, de construcción de cadenas lógico-deductivas de razonamientos que permitan justificar y validar tales conjeturas, en caso de ser ciertas. Jeannotte y Kieran (2017) ponen de manifiesto la gran cantidad de subprocesos vinculados, por un lado, al establecimiento de conjeturas (comparar, identificar un patrón, generalizar, establecer una conjetura, …) y, por otro, a su validación (explicar, demostrar, validar, …).

Otro aspecto que genera grandes dificultades en los procesos de razonamiento y prueba es el diferente modo de generar y validar conocimiento en matemáticas frente a otras disciplinas o en la vida cotidiana (Dreyfus, 2017). Harel y Sowder (2007) introdujeron la idea de *esquema de prueba* (en adelante EP) de una persona como aquello que constituye convencimiento y persuasión para esa persona, es decir, aquello que le permite eliminar sus dudas sobre la veracidad de un enunciado matemático y usarlo para eliminar las dudas de otros. Estos autores distinguen tres tipos de esquemas de prueba:

- EP de convicción externa, donde el convencimiento y persuasión se obtiene por elementos ajenos al razonamiento.

ISBN: 978-84-1122-024-8

- EP empíricos, de tipo experimental (basados en percepción o manipulación) o inductivo (basados en ejemplos o comprobaciones en casos concretos).
- EP analíticos, basados en razonamientos de tipo lógico-deductivo.

Una dificultad muy documentada en el aprendizaje de los procesos de razonamiento y prueba está en la presencia y enraizamiento en muchos alumnos de EP empíricos de tipo inductivo (Dreyfus, 2017; Harel y Sowder, 2007). Muchos alumnos desarrollan convencimiento sobre la certeza de un enunciado matemático a partir de su comprobación en ejemplos concretos, considerando el razonamiento inductivo como generador de pruebas matemáticamente válidas. Esta dificultad también se ha detectado en profesores de matemáticas en formación (Arce y Conejo, 2019; Stylianides y Stylianides, 2009), lo cual podría comprometer las oportunidades de aprendizaje de estos procesos que pudieran diseñar en su futuro como profesionales docentes.

Al ser conscientes de estas complejidades y dificultades, surge la necesidad de que en la formación inicial de profesores se planteen tareas vinculadas al razonamiento y prueba dirigidas al establecimiento de conjeturas y a su validación, pudiendo así superarse los EP inductivos y entender cómo se construye y se valida el conocimiento en matemáticas. Además, como indican Lin et al. (2012), las tareas diseñadas para conjeturar y probar en matemáticas favorecen el desarrollo de la comprensión conceptual y de estrategias propias de la resolución de problemas.

La geometría es una disciplina que ofrece numerosas oportunidades para desarrollar procesos de razonamiento y demostración, en particular, tareas de conjeturar y probar (NCTM, 2003). Además, recursos como los *programas de geometría dinámica*, que permiten no solo realizar construcciones geométricas sino dinamizarlas manteniendo las propiedades definidas en su construcción, facilitan la indagación y detección de conjeturas. No obstante, como advierten Lin et al. (2012), estos programas pueden llegar a reforzar los EP inductivos (al poder realizar fácilmente numerosas comprobaciones) y disminuir la necesidad de desarrollar demostraciones matemáticas. Este hecho hace necesario un cuidadoso diseño de las tareas de conjeturar y probar.

Lin et al. (2012) proponen una serie de principios para el diseño de este tipo de tareas, para la parte de conjeturar, para la transición entre conjeturar y probar, y para la parte de probar. Para promover la conjeturación, es necesario proveer a los estudiantes de oportunidades para desarrollar la observación, la construcción indagatoria, la transformación de los conocimientos previos y la reflexión sobre el proceso de

ISBN: 978-84-1122-024-8

conjeturación y las conjeturas encontradas. Para facilitar la transición de conjeturar a probar, la tarea debe generar una necesidad en los estudiantes para hacer dicha transición. Esa necesidad puede ser de tipo intelectual, a través por ejemplo de conflictos cognitivos o de la necesidad de explicar por qué se da cierta relación, o de tipo social, estableciendo unas normas para aceptar o rechazar conjeturas basadas en el modo de validar conocimiento en matemáticas. Por último, para facilitar la prueba de las conjeturas, es necesario promover la clasificación de enunciados matemáticos, el uso de diferentes representaciones para expresar argumentos, la creación de sus propias pruebas y el intercambio de roles entre estudiantes (generador / evaluador de demostraciones).

3. MARCO METODOLÓGICO: EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA

Un experimento de enseñanza es uno de los tipos de investigación dentro del paradigma de investigación de diseño. Consiste en una secuencia de episodios de enseñanza donde los participantes pueden ser un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores observadores (Molina et al., 2011). La elección de este marco metodológico se fundamenta en la no distinción entre docente e investigador que puede existir en otros tipos de investigaciones de diseño, ya que son los propios docentes de la asignatura los que actúan como investigadores, y por el hecho de desarrollarse en el aula y no en laboratorios. En este caso concreto, los participantes son el equipo de investigadores del proyecto, que actúan, en función del grupo de EGEP, de investigadores-docentes o de investigadores-observadores, y los distintos grupos de EGEP que realizan las actividades diseñadas.

Al igual que en la investigación de diseño en general, los experimentos de enseñanza se componen de tres fases diferenciadas (Cobb y Gravemeijer, 2008; Molina et al. 2011), a saber: preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y ejecución del análisis retrospectivo de los datos. En la segunda fase es en la que tiene lugar la intervención en el aula, que puede acontecer en iteraciones sucesivas de un ciclo de tres pasos: diseño y formulación de hipótesis, intervención en el aula y recogida de datos y el análisis de los datos, revisión y reformulación de hipótesis. En la Figura 1 se ilustra el proceso, a partir de las propuestas en Molina (2021) y Molina et al. (2011).

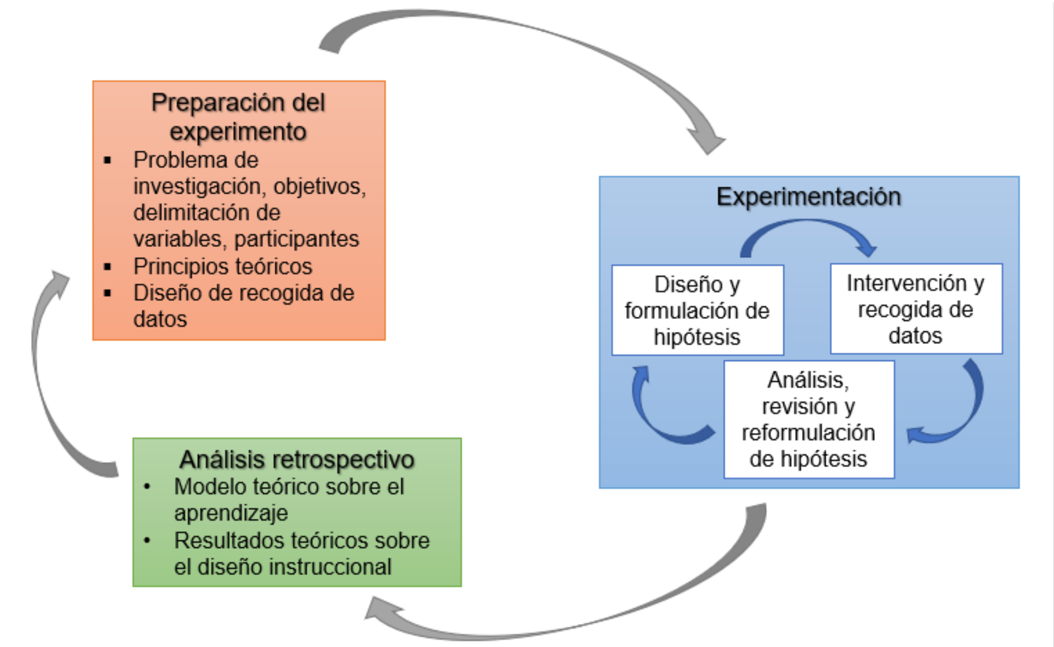
Este experimento de enseñanza se está desarrollando en dos grupos de la asignatura “Fundamentos de la forma y el volumen y estrategias didácticas para su enseñanza” del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Valladolid (Campus de Palencia y

ISBN: 978-84-1122-024-8

Soria). Se describe aquí la primera de las actividades diseñadas en el marco del experimento de enseñanza, que conllevó miniciclos de experimentación.

Figura 1

Fases y ciclos de un experimento de enseñanza



4. DESARROLLO DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Recogemos aquí el desarrollo del experimento de enseñanza en un primer ciclo completo, atendiendo a las tres fases cronológicas establecidas en el apartado anterior.

4.1. Primera fase: preparación del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza llevado a cabo parte de la necesidad, indicada por marcos como el MTSK (Carrillo et al., 2018), de que un profesor de matemáticas tenga un adecuado conocimiento de los procesos de razonamiento y prueba, y sea capaz de movilizar y usar ese conocimiento para abordar tareas que lo requieran. La experiencia docente de los autores de esta contribución nos ha permitido detectar que el conocimiento de estos procesos que exhiben los EGEP no es lo suficientemente sólido para poder abordar estas tareas, generalmente como consecuencia de la escasa experiencia con actividades vinculadas a estos procesos en su historial académico previo. Esta limitación viene avalada también por numerosas investigaciones, recogidas en Arce y Conejo (2019), Stylianides y Stylianides (2009) o Torregrosa et al. (2010). Ante esta limitación

ISBN: 978-84-1122-024-8

en la formación de los EGEP, los objetivos principales de este experimento de enseñanza son diseñar y evaluar la implementación de un conjunto de tareas formativas vinculadas a los procesos de razonamiento y prueba con las que los EGEP puedan evolucionar el conocimiento especializado sobre la práctica de demostrar que consiguen movilizar.

Estas tareas formativas se han diseñado para ser aplicadas en una asignatura sobre contenidos geométricos y su didáctica, de 2º curso del Grado en Educación Primaria. Los estudiantes con los que se ha realizado la implementación son, por tanto, estudiantes para maestro de Educación Primaria, que en su formación universitaria ya han cursado una asignatura en primero sobre aritmética y su didáctica. Se presentó a los estudiantes participantes el propósito de la sesión del experimento de enseñanza que aquí se recoge, y se les pidió que trajeran tanto útiles de dibujo y medida (regla, compás, transportador) como ordenador portátil para poder trabajar en línea con applets generados con GeoGebra (programa gratuito de geometría dinámica).

Se consideran como variables a estudiar el conocimiento especializado sobre la práctica de demostrar que movilizan los EGEP a lo largo de las tareas y el potencial de las tareas diseñadas, y su organización en la sesión, para promover avances en ese conocimiento. Se exponen a continuación cuáles han sido los principios teóricos tomados como base para el diseño, basados en los referentes del marco teórico:

- Es recomendable que las tareas contemplen tanto la etapa de establecimiento de conjeturas como la de su validación.

La tarea que se recoge en esta comunicación, vinculada con las relaciones angulares en la circunferencia, está compuesta por una etapa para llegar a conjeturar la relación existente entre la amplitud del ángulo inscrito y el central correspondiente en una circunferencia (tanto con papel y lápiz como con el apoyo del programa de geometría dinámica GeoGebra) y por otra guiada orientada a construir una prueba de esta conjetura.

- En la etapa de conjeturación, se recomienda proporcionar a los alumnos oportunidades para desarrollar la construcción, observación y reflexión.

En este caso, se plantea que los estudiantes construyan la conjetura a partir de la construcción con lápiz y papel y la medición de los ángulos, y, después, con el estudio, observación y dinamización de la construcción angular en el entorno GeoGebra. Además, se incluyen preguntas como las sugeridas por Lin et al. (2012) para fomentar la reflexión sobre las conjeturas (cuál es la base de tu conjetura, por qué crees que es cierta...)

ISBN: 978-84-1122-024-8

- Es necesario plantear situaciones que permitan a los EGEP superar los EP inductivos, y que les generen una necesidad para pasar de conjeturar a demostrar.

En esta tarea, en diferentes momentos de la misma, hacemos uso de preguntas dirigidas a los estudiantes, de tipo metacognitivo, para que expliquen su grado de convencimiento sobre la conjetura enunciada y si estaría ya suficientemente probada o no. Estas preguntas (similares a los *conceptual awareness pillars* de Stylianides y Stylianides, 2009) aportan información sobre cuál es el esquema de prueba de los estudiantes. Para evitar que el uso del programa GeoGebra refuerce EP inductivos, se introduce una necesidad de tipo intelectual, basada en la necesidad de explicar por qué puede darse esa relación angular (y no solo comprobar que se cumple).

- En la etapa de demostración de las conjeturas, se recomienda dar oportunidades para la creación de las propias pruebas.

En esta tarea, se han diseñado un conjunto de preguntas que sirvan de guía a los estudiantes para movilizar conocimientos que son la base para construir las pruebas. Por ejemplo, para el caso del ángulo inscrito y su central correspondiente, se inician las preguntas con el caso en que uno de los lados del ángulo inscrito contenga al centro de la circunferencia, cuya demostración es más sencilla; y posteriormente se añaden otras preguntas que inviten a construir el resto de casos a partir de este.

Para la recogida de datos se utilizaron dos medios: en primer lugar, los primeros enunciados se daban en papel, puesto que requerían de una primera parte de exploración de las relaciones propuestas con instrumentos de dibujo (más limitado que lo que permite hacer GeoGebra). En segundo lugar, el resto de preguntas se desarrollaron a través de una lección de GeoGebra Classroom. Esto permitía dos cosas: por un lado, proveer a los alumnos de un applet manipulativo en el que explorar la relación del teorema del ángulo inscrito que se había explorado en papel, pero facilitando la comprobación de muchos más ejemplos. Por otro lado, registrar y monitorizar en tiempo real las respuestas dadas por los alumnos. Posteriormente, se recogieron los enunciados en papel, así como se han registrado las repuestas proporcionadas en GeoGebra Classroom, lo que será objeto de análisis en las últimas fases del experimento de enseñanza.

4.2. Segunda fase: experimentación

En esta segunda fase, de experimentación, se realizaron implementaciones en aula del diseño concreto de la actividad, en varios miniciclos que describimos a continuación.

ISBN: 978-84-1122-024-8

Estas implementaciones se realizaron en un momento en el que los EGEP habían trabajado los tipos de ángulos en la circunferencia, pero no las relaciones angulares vinculadas a estos, por lo que se buscaba que los alumnos pudieran llegar a conjeturar algunas de esas relaciones y justificarlas a través de la actividad diseñada.

Uno de los docentes-investigadores involucrados diseñó una primera versión preliminar de la actividad, que fue discutida entre los cuatro investigadores autores, hasta llegar a una primera versión final de la actividad. Esta actividad se implementó con los EGEP del grupo de Soria (17 alumnos), en la que ya se recopilaron las respuestas de los alumnos. Tras esta primera implementación, y a la luz de la experiencia y respuestas obtenidas, el enunciado de la actividad volvió a ser discutido por los cuatro investigadores, proponiendo algunas modificaciones para superar las dificultades encontradas (alguno de los enunciados era malinterpretado por los alumnos, era necesario incluir alguna actividad más para propiciar el desarrollo de la justificación por parte de los alumnos, o se requería algún cambio metodológico). Esta segunda versión, que se describe con mayor detalle a continuación, se implementó con el grupo de Palencia (21 alumnos), del que también se recopilaron las repuestas de los alumnos y que serán las que se analicen en la tercera fase del experimento, la fase de análisis retrospectivo.

Explicamos a continuación la actividad en su versión final. La primera parte de la actividad se realiza en papel, donde se pidió a los EGEP que, de manera individual, dibujasen con regla y compás un ángulo inscrito en una circunferencia y su ángulo central correspondiente y que conjeturasen, si creían que existía, una relación entre las amplitudes de ambos ángulos. Se incluyeron también preguntas de tipo metacognitivo sobre el grado de seguridad en su respuesta y hasta qué punto creían que habían justificado dicha relación:

- ¿En qué grado estás convencido (estás seguro de que es así) de que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?
- ¿Crees que está suficientemente probado que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?
- Si crees que podrías estar más convencido y/o que se podría probar mejor que la conjetura que has hecho es cierta, ¿qué habría que hacer para lograrlo?

Tras esto, los estudiantes trabajaron por parejas en una lección de GeoGebra Classroom basada en el libro GeoGebra al que se puede acceder en el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/msmvesu2

ISBN: 978-84-1122-024-8

En esta parte, las parejas de EGEP tenían que hacer uso de un applet ya construido con GeoGebra (programa de geometría dinámica), en el que puede encontrarse un ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente. A partir de la dinamización y observación del applet, se pide a los EGEP de nuevo conjeturar la relación entre las amplitudes de ambos ángulos (comparándola con la antes encontrada), así como contestar a preguntas de tipo metacognitivo similares a las anteriores, con el propósito de instarle a adscribir estados mentales propios sobre el grado de certeza que le confiere a tal conjetura.

La tercera parte de la actividad vinculada al ángulo inscrito, comienza con una pregunta que trata de generar en las parejas de EGEP una reflexión sobre por qué puede ser cierta esa conjetura, pasando posteriormente a un guion de preguntas con un applet construido ad hoc que pretenden ayudar a los alumnos a buscar y construir una justificación deductiva. De nuevo, se añaden preguntas movilizando nuevamente los aspectos metacognitivos del alumno con el propósito de que este perciba la posibilidad de dar una argumentación más general y robusta, pudiendo evolucionar en sus esquemas de prueba a lo largo del proceso.

Por último, se replican las cuestiones similares, pero en este caso con el problema de justificar la relación entre el ángulo exterior y sus centrales correspondientes. Así, se pretende que los EGEP puedan comenzar a mostrar evidencias de una mejora cualitativa de los procesos de razonamiento y prueba movilizados y de sus EP.

4.3. Tercera fase: análisis retrospectivo

Esta tercera parte, aún en proceso de desarrollo, se corresponde con el análisis de los datos obtenidos en los miniciclos de enseñanza descritos en la fase 2 de experimentación. A partir de este análisis, de tipo cualitativo, podremos determinar qué esquemas de prueba poseen nuestros alumnos, si las tareas propuestas realmente les ayudan a generar una justificación de una conjetura establecida previamente y si esa generación promueve el avance de EP de convicción externa o empíricos hacia EP analíticos. Tras un análisis preliminar de los datos y a partir de las observaciones realizadas en el aula por los investigadores-docentes, se explican a continuación las tendencias encontradas.

En general, la mayoría de los EGEP manifiestan inicialmente EP de convicción externa e inductivos, pues cuando tras la primera tarea de dibujo se les pregunta si la conjetura está suficientemente probada y si creen que podría probarse mejor, responden que tendrían que medir con el transportador de ángulos, verlo en más casos o algún experto en matemáticas debería confirmarla. Sin embargo, algunos alumnos muestran

ISBN: 978-84-1122-024-8

ciertos indicios de necesidad de una prueba de tipo deductivo pues hacen alusiones a la necesidad de un teorema probado o a la comprensión de la teoría.

Al igual que indican Dreyfus (2017) y Harel y Sowder (2007), los esquemas de prueba de convicción externa e inductivos se muestran persistentes, pues, aunque muchos alumnos consiguen desarrollar e indican comprender el razonamiento que permite establecer la veracidad de la conjetura sobre el teorema del ángulo inscrito realizada, siguen insistiendo en que su convencimiento se soporta principalmente en la comprobación de muchos casos, sobre todo tras haber visualizado la relación en GeoGebra. Esto va en la línea de la advertencia que realizan Lin et al. (2012) sobre que el uso de programas de geometría dinámica puede reforzar esquemas de prueba inductivos. Eso nos lleva a reforzar la hipótesis de que la evolución hacia EP analítico-deductivos no debe basarse solo en generar la necesidad al alumno de los mismos, sino que debe formar parte de la cultura de aula, haciendo explícito que en matemáticas no es posible dar por cierto una conjetura salvo que podamos justificarla de forma deductiva. Si embargo, en la segunda parte de la actividad en la que se pide conjeturar la relación sobre el teorema del ángulo exterior y justificarla, se observan ya alumnos que indican estar más convencidos de esta relación (menos factible de ser apreciada a simple vista que la relación que establece el teorema del ángulo inscrito) porque la construcción de la prueba les ha permitido comprender por qué es así (función de vital importancia en la demostración), lo que nos permite pensar que este tipo de actividades, de forma continuada, ayudará a los alumnos a desarrollar esquemas de prueba deductivos.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo describimos con detalle el proceso de diseño de un experimento de enseñanza para trabajar los procesos de razonamiento y prueba con EGEP, uno de los procesos clave para hacer y construir matemáticas. Mediante el mismo, se ha obtenido, como producto, una actividad que, junto con el resto de actividades que forman parte del experimento de enseñanza, puede ser útil tanto para promover la evolución del conocimiento especializado de los EGEP sobre estos procesos y sobre los conceptos involucrados como para evaluar cuáles son los EP que manifiestan.

La Didáctica de la Matemática es un área de conocimiento joven, pero ya con un cuerpo de conocimientos consistente y cada vez más amplio. Experiencias como las aquí descritas se vuelven cada vez más necesarias para poder transferir los resultados de

ISBN: 978-84-1122-024-8

investigación encontrados a la generación, diseño y análisis de tareas y actividades, en este caso en un contexto de formación de profesores de matemáticas, que permitan avanzar en su formación y en su construcción de conocimiento especializado. Esa construcción ha de entenderse como un proceso formativo a largo plazo, que en primer lugar se extienda a lo largo de las diferentes asignaturas de su formación inicial.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP), y financiado con la convocatoria "Ayudas para la realización de proyectos de investigación UVa 2021" (referencia: PROYEMER-2021-59).

REFERENCIAS

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Arzarello, F. (2008). The proof in the 20th century. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history to epistemology and cognition to classroom practices* (pp. 43-64). Sense Publishers.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P. Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. By Muñoz-Catalán, M. C. (2018). *The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model.* Research in Mathematics Education, 20(3), 236-253.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum.

Delgado-Rebolledo, R. (2020). *Una propuesta de caracterización del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios* (tesis doctoral no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

ISBN: 978-84-1122-024-8

Dreyfus, T. (2017). What are solid findings in mathematical education? En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 57-62). DCU Institute of Ed. y ERME.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805- 842). Information Age.

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1-16.

Lin, F-L., Yang, K-L., Lee, K-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles and task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305-325). Springer.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88

NCTM (2003). *Principios y estándares para el aprendizaje de las matemáticas* (Traducción de la SAEM Thales). Autor.

OCDE (2018). *PISA 2022 Mathematics Framework (draft)*. Recuperado de https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes Mathematics Teacher Knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*, 153-172.

Skott, J., Mosvold, R. y Sakonidis, C. (2018). Classroom practice and teachers' knowledge, beliefs and identity. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 162-180). Routledge.

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

ISBN: 978-84-1122-024-8

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 327–340.

ISBN: 978-84-1122-024-8