Universidad del
Rosario

Voces y escenarios de docentes investigadores

Resumen

Nos enfrentamos al desafío de construir una sociedad de reciprocidades, confianza social y compromiso cívico y, por tanto, más allá del sentido formal y técnico que requiere investigar en educación. A través de este libro los autores buscan dar voz a los caminos trasegados y a las experiencias vividas de los docentes que, a lo largo y ancho de sus territorios y espacios de aula, le han apostado a la generación de conocimiento desde diversas perspectivas, a la promoción de la reflexión sistemática permanente en torno a la dialéctica de enseñar y aprender.

Voces y escenarios de docentes investigadores materializa las historias escolares y hazañas pedagógicas en investigaciones desde la educación matemática; las ciencias naturales y la educación ambiental. Desde una perspectiva reflexiva, los autores presentan elementos conceptuales y metodológicos sobre el rigor científico, la justicia social, los caminos recorridos y el compromiso social adquirido desde la educación que se asumió luego del paso de la pandemia.

Palabras clave: educación en ciencias naturales, educación matemática, educación ambiental, investigación educativa.

Voices and scenarios of teacher researchers

Abstract

We face the challenge of building a society of reciprocity, social trust, and civic commitment, and, therefore, beyond the formal and technical sense that educational research requires. Through this book, the authors seek to give voice to the paths followed and lived experiences of teachers who, throughout their territories and classroom spaces, have bet on the generation of knowledge from different perspectives and on the promotion of permanent systematic reflection on the dialectic of teaching and learning.

Voices and scenarios of teacher researchers brings to life school stories and pedagogical feats in research from mathematics education, natural sciences, and environmental education. From a reflective perspective, the authors present conceptual and methodological elements on scientific rigor, social justice, the roads traveled, and the social commitment acquired from education assumed after the passing of the pandemic.

Keywords: natural sciences education, mathematics education, environmental education, educational research.

Citación sugerida / Suggested citation
Giraldo Macías, C. F., Valderrama Gómez, V., Lopera Pérez, M. y Méndez-Romero, R. A. (Eds.). (2025). *Voces y escenarios de docentes investigadores*. Editorial Universidad del Rosario. https://doi.org/10.12804/urosario9789585005044

Voces y escenarios de docentes investigadores

Christian Fernney Giraldo Macías
Verónica Valderrama Gómez
Marisol Lopera Pérez
Rafael Alberto Méndez-Romero
—Editores académicos—

Voces y escenarios de docentes investigadores / Christian Ferney Giraldo Macías, Verónica Valderrama Gómez, Marisol Lopera Pérez y Rafael Alberto Méndez-Romero. Editores académicos — Bogotá: Editorial Universidad del Rosario, 2025.

XIII, 304 páginas

1. Docentes – Investigadores 2. Educación – Investigadores 3. Educación superior – Innovación en docencia 4. Formación profesional de maestros – Metodologías de enseñanza I. Giraldo Macías, Christian Ferney. Editor II. Valderrama Gómez, Verónica. Editor III. Lopera Pérez, Marisol. Editor IV. Méndez-Romero, Rafael Alberto. Editor V. Universidad del Rosario. VI. Título.

370.7 SCDD 20

Catalogación en la fuente — Universidad del Rosario. CRAI

DAMV marzo 14 de 2025

Hecho el depósito legal que marca el Decreto 460 de 1995

Universidad del Rosario

Editorial Universidad del Rosario
Calle 12C n.º 6-25
Tel. (+57) 601 297 0200, ext. 3113
https://editorial.urosario.edu.co

Primera edición: Bogotá, D. C., 2025

ISBN: 978-958-500-502-0 (impreso)
ISBN: 978-958-500-503-7 (ePub)
ISBN: 978-958-500-504-4 (pdf)
https://doi.org/10.12804/urosario9789585005044

Corrección de estilo: Andrés Castillo Brieva
Diseño de cubierta: Luz Arango y César Yepes
Diagramación: Precolombi EU-David Reyes

Impreso y hecho en Colombia
Printed and made in Colombia

El contenido de este libro fue sometido al proceso de evaluación de pares, a fin de garantizar los altos estándares académicos. Para conocer las políticas completas, consultar: https://editorial.urosario.edu.co

Contenido

Capítulo 1

Jugar con relojes: otra forma de aprender a pensar la divisibilidad

Astrid Cuida Gómez
Óscar Gómez Rojas

Presentación

En el ámbito de la educación matemática, la resolución de problemas ha sido estudiada por su gran impacto en el aprendizaje y en la construcción del conocimiento matemático (English y Gainsburg, 2016; Lesh y Zawojewski, 2007; Liljedahl y Santos-Trigo, 2019; Pólya, 1954; Schoenfeld, 1985). En las últimas décadas, se ha puesto un mayor énfasis en la enseñanza de habilidades de pensamiento y en la resolución de problemas en la escuela. Esto ha sido motivado, en parte, por los resultados de investigaciones que señalan el vínculo entre las habilidades de pensamiento genérico de los estudiantes y el rendimiento del aprendizaje (Prins et al., 2006; Van Der Stel y Veenman, 2014).

Desde la introducción de las matemáticas discretas en *Curriculum and evaluation standards for school matematics* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989), diversos autores han señalado la necesidad de incluir las matemáticas discretas en el currículo (DeBellis y Rosenstein, 2004). A través de las experiencias en matemáticas discretas, los profesores pueden ayudar mejor a

❖ Para citar este capítulo: https://doi.org/10.12804/urosario9789585005044.01

los estudiantes a "pensar críticamente, resolver problemas y tomar decisiones usando estrategias y razonamientos matemáticos" (p. 49). En vista de que se trata de una rama activa de las matemáticas contemporáneas, con amplias aplicaciones en la informática, en los negocios y en la industria, su importancia ha aumentado significativamente. Dado que sus temas se encuentran en otras áreas de las matemáticas, "debería constituir una parte integral del currículo" (NCTM, 2000, p. 31).

El objetivo de este capítulo es compartir una experiencia con estudiantes de noveno grado de educación básica secundaria, construida y desarrollada para que el profesor invite a los estudiantes a examinar los supuestos matemáticos existentes detrás de sus explicaciones cuando aborda un problema desde distintos puntos de vista, en particular desde la aritmética modular. Se pretende que los estudiantes "viajen a territorio desconocido" y que al hacerlo, pongan énfasis en la construcción de significados mediante su participación en discusiones matemáticas bajo el enfoque de resolución de problemas (Schoenfeld, 1994).

Este trabajo muestra una experiencia *in situ*, la cual, pese a la estructuración impuesta al escribir, conserva un poco del sabor anárquico propio de las experiencias reales. Esto no constituye una apología al desgobierno como método de trabajo en el aula; lo que se quiere resaltar es la saludable tensión entre un control absoluto (proveniente del rigor con que se manejan las ideas y conceptos matemáticos) y la actuación naturalmente errática de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, en un marco de resolución de problemas. En otras palabras, una vez puestos los mejores elementos conceptuales y de procedimiento sobre la mesa, se debe permitir el grado de libertad idóneo para que el proceso de construcción de conocimiento fluya de forma natural y no se fuerce para llegar a los objetivos de forma prematura; con esta manera de proceder se aseguran los objetivos principales y también se abre espacio a la obtención de logros no previstos en el plan inicial.

Fundamentación teórica

Actualmente, se reconoce que el proceso de resolución de problemas es esencial en el desarrollo del conocimiento matemático. Es fundamental que los profesores utilicen entornos de aprendizaje cuyo objetivo sea involucrar a los estudiantes y usuarios de las matemáticas en experiencias de resolución de problemas (Gamarra Astuhuaman y Pujay Cristóbal, 2021; Santos-Trigo, 2020). El programa que implementó Schoenfeld (1985) en torno a la resolución de problemas se centró en analizar el desarrollo de formas de pensamiento matemático en los estudiantes mediante la documentación de aspectos relacionados con el uso de estrategias heurísticas, la naturaleza del pensamiento matemático, las creencias de los estudiantes y la importancia de las estrategias metacognitivas.

Un tema clave en su programa fue caracterizar el significado de *pensar matemáticamente*. Las actividades en nuestras aulas pueden y deben reflejar el desarrollo del conocimiento matemático que queremos que los estudiantes adquieran. Según Schoenfeld (1985), "aprender a pensar matemáticamente implica mucho más que saber varias cosas al dedillo. Incluye ser flexible e ingenioso [...], usar el conocimiento de manera eficiente, y entender y aceptar las reglas tácitas del juego" (p. xii). Es fundamental, por tanto, relacionar el proceso de desarrollar la disciplina con el aprendizaje o construcción del conocimiento, y además crear un ambiente que posibilite la construcción de significados (*sense-making*). El mismo autor señala:

> pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático —valorar los procesos de matematización y abstracción y tener la predilección para aplicarlos—, (b) desarrollar una competencia con las herramientas propias de las matemáticas y ponerlas a disposición para comprender la estructura: construcción de significados matemáticos. (Schoenfeld, 1994, p. 60)

Las actividades en el aula deben incidir en la comprensión matemática de los estudiantes, al subrayar no solo el proceso constructivo, sino también la necesidad de ser consciente de esa construcción, de modo que puedan modificarla con la reflexión en cada una de las etapas del proceso. Las aulas son la principal fuente de experiencias de resolución de problemas para los estudiantes. Son la experiencia básica con la que abstraen su sentido de aquello de lo que tratan las matemáticas.

Otra parte importante relacionada con los principios de la resolución de problemas tiene que ver con la forma en que se conceptualizan las matemáticas. Schoenfeld (2016) reconoce que un aspecto significativo en la caracterización de las matemáticas es pensarlas, en términos generales, como la *ciencia de los patrones*. "Las matemáticas revelan patrones ocultos que nos ayudan a comprender el mundo que nos rodea […] 'hacer' matemáticas es mucho más que cálculos o deducciones; implica la observación de patrones, la prueba de conjeturas y la estimación de resultados" (National Research Council, 1989, p. 31). El enfoque ha de centrarse en el proceso más que en el contenido matemático, ya que se ha de describir tanto lo que son las matemáticas como lo que se espera que los alumnos aprenden al estudiarlas. De acuerdo con la caracterización de las matemáticas a partir de patrones que hace Devlin (1994), se pretende que, en un contexto de resolución de problemas, los estudiantes reconozcan propiedades de conjuntos numéricos. Que busquen, representen y describan relaciones entre dichos conjuntos, de forma que esto los lleve a identificar patrones, conjeturas o relaciones.

En esta experiencia, se plantea la resolución de problemas como una herramienta para pensar matemáticamente, en la que una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) participa en discusiones, plantea cuestiones, resuelve problemas, formula conjeturas y escucha los argumentos de otros. Esta postura es coherente con las características fundamentales del pensamiento matemático en torno a la resolución de problemas.

En las actividades de aprendizaje llevadas a cabo, nuestra intención ha sido favorecer los valores asociados al conocimiento matemático y su enseñanza —racionalidad, objetivismo, rigor, progreso, apertura, espíritu crítico y espíritu lúdico—, puesto que dichos valores desempeñan un papel significativo en las valoraciones que hacen los estudiantes acerca de las matemáticas y su aprendizaje (Bishop, 1991). La idea es promover dentro del aula esta "cultura de pensar matemáticamente", alentando la construcción de significados y el uso de conocimientos y estrategias propias del marco de resolución de problemas.

Diseño y desarrollo de la experiencia

Las actividades que se exponen a continuación representan el tipo de problemas que se discutieron en sesiones de resolución de problemas con un grupo de quince estudiantes de noveno grado, durante un bimestre de dos horas semanales. Se muestra, por una parte, un episodio en el que se abordó un criterio de divisibilidad por 7, y por otra parte, una secuencia de actividades para el desarrollo del tema de *restos* mediante la *aritmética modular*. La dinámica de las sesiones incluyó trabajo individual, en parejas, presentación de las actividades a todo el grupo y discusiones plenarias coordinadas por el profesor. La agenda temática evolucionó a partir de la negociación de problemas planteada por el profesor y las matemáticas empleadas por los estudiantes para trabajarlos. El alumnado participante había trabajado en cursos anteriores los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 9.

El problema inicial, el criterio de divisibilidad por 7, surgió de una discusión en el aula alrededor de la *divisibilidad*. El profesor, al preguntar a los estudiantes por qué funcionaba el criterio, vio una oportunidad de trabajar los conocimientos previos del alumnado y de generar un entorno en el que pudieran aprender a pensar matemáticamente. Dado que el criterio no aporta el dato del resto, a menos que sea 0, el profesor consideró propicio el momento para introducir una forma de hallar restos de una manera muy visual y estructurada en su secuenciación, al trasladar la agenda a un terreno nuevo pero relacionado: la aritmética modular.

El objetivo principal de la experiencia es hacer matemáticas con los estudiantes en un contexto de resolución de problemas, y abordar, desde otras perspectivas, contenidos más amplios sin que se requieran conocimientos específicos adicionales a los propios del currículo. Se caracterizan varios episodios adaptados de Santos-Trigo (2008), en los cuales, por una parte, se identifican y exploran diversas relaciones matemáticas, y por otra, se reconocen momentos ligados a la dialéctica de los procesos desarrollados por los estudiantes.

Primer episodio: comprensión del problema

En la simplificación de fracciones, en la descomposición en factores primos y en otros casos, resulta muy útil saber cuándo un número es divisible por otro, sin necesidad de hacer la división. Por ejemplo, para saber si un número entero es divisible por 7, se toma el número resultante de suprimir la cifra de las unidades, y se le resta el doble de la cifra suprimida. Si el resultado es 0 o múltiplo de 7, el número original también es múltiplo de 7. Si el resultado es distinto, el número no es divisible por 7. Por ejemplo, para saber si 469 es múltiplo de 7, hacemos $46 - 9 \cdot 2 = 28$, y como 28 es múltiplo de 7, entonces 469 también lo es.

En general, los estudiantes entendieron el problema después de hacer comprobaciones con varios números, y mencionaron que si los números eran grandes, había que repetir el procedimiento hasta llegar a un número pequeño.

En el proceso de resolución, la estrategia heurística de partida considerada por los estudiantes para determinar por qué este criterio de divisibilidad por 7 funciona, fue suponer el problema resuelto (Pólya, 1954).

Segundo episodio: búsqueda de argumentos matemáticos, primer intento

En principio, algunos estudiantes exploraron varios casos en busca de regularidades, mientras que otros trabajaban con la expansión polinómica del número en base 10. No tuvieron en cuenta un hecho primordial: proponer una expresión matemática para el algoritmo. ¿Qué procesos matemáticos convierten 469 en 46? Concluyeron el procedimiento: primero, restar la última cifra y luego dividir por 10. Entonces se les hizo una sugerencia: considerar un número x cuya última cifra es u. Lograron así condensar los primeros pasos del algoritmo en la expresión:

$$\frac{x - u}{10} - 2u = \frac{x - 21u}{10} \qquad (1.1).$$

En este momento, una estudiante planteó la siguiente "prueba":

$$x = 7m \qquad (1.2),$$

entonces,

$$\frac{x - 21u}{10} = \frac{7m - 21f}{10} = \frac{7(m - 3u)}{10} \qquad (1.3).$$

Como el término de la izquierda es un entero, también lo es el de la derecha. Por otra parte, ya que 7 y 10 no tienen factores comunes, la simplificación de la fracción de la derecha deja intacto al 7 y convierte al 10 en 1. En consecuencia, este término es un entero múltiplo de 7.

En ocasiones no se presta atención a ciertos valores particulares que pueden aparecer en los cálculos. Por esta razón, llegados a este punto, se pidió a los estudiantes que explicasen cuál era el paso clave en la demostración. Después de un largo debate, concluyeron que la aparición del 21 en la igualdad (ecuación 1.1), que es múltiplo de 7, permite la factorización posterior. La claridad sobre este punto es fundamental para el trabajo futuro. Al considerar la tarea de la estudiante que propuso la "prueba", vemos que partió de la suposición de que x es múltiplo de 7, en tanto que lo que se pretende es determinar si lo es o no. Esto es un síntoma de la dificultad para clarificar el sentido correcto de una argumentación. Sin embargo, el trabajo no se había perdido del todo: se demostró que cuando el número original es múltiplo de 7, el número final también lo es. Esto significa que, si este no es el caso, la razón es que necesariamente se inició con un número que no es múltiplo de 7. Se ha justificado el algoritmo para cuando la conclusión es falsa, esto es, cuando el número no es múltiplo de 7. El método, aunque no se hizo con este propósito, existe en matemáticas y se llama *demostración por reducción al absurdo* (Pólya, 1954).

Tercer episodio: búsqueda de argumentos matemáticos, otro intento, una solución

Se pidió entonces al grupo construir, y argumentar, el enunciado correcto que reflejara la situación planteada. Se realizaron varios debates sobre diversas propuestas y se llegó al siguiente consenso:

Sea x un número entero positivo cuya última cifra es u, si $\frac{x - 21u}{10}$ es divisible entre 7, entonces x es divisible entre 7.

Se argumentó de la siguiente forma:

Sabemos que

$$\frac{x - 21u}{10} = 7m \qquad (1.4),$$

de donde, despejado *x*, se tiene

$$x = 70m + 21u = 7(10m + 3u) \qquad (1.5),$$

y así llegamos al resultado buscado.

La demostración, además, pone de manifiesto información subyacente al algoritmo. El resultado, cuando es positivo, nos informa que el número es divisible por 7, pero no dice cuál es el otro factor. Sin embargo, este aparece en la ecuación 1.5. Por ejemplo: si el número es 749, hacemos $74 - 18 = 56$. Entonces, no solo sabemos que 7 divide a 749, sino que, por ecuación 1.4, $m = 8$, y por ecuación 1.5, $749 = 7 \cdot 107$.

Cuarto episodio: las generalizaciones

Una estudiante afirmó que, sin hacer adaptación alguna, el algoritmo funcionaba para verificar la divisibilidad por 3 (dado que, en este caso, se verifica si el número resultante es múltiplo de 3). ¿Por qué? A continuación, otro estudiante señaló y explicó con argumentos consistentes que, si en el algoritmo se resta una vez la última cifra, funciona con 11.

Finalmente, se propuso hacer una generalización de la expresión (ecuación 1.1), en la que se reemplazó la constante 2 por una variable $n \in N$ para ampliar la perspectiva. Si $n = 1$, se tiene un criterio de divisibilidad por 11. Para $n = 2$, uno para 7 y 3. Además, para $n = 3$ y $n = 4$, sendos criterios para 31 y 41. Con $n = 5$, obtenemos 51, que no es primo, pero sí múltiplo de 3 y 17. En consecuencia, tenemos criterios para 3 y 17.

Quinto episodio: ¡sorpresa inesperada!

Los estudiantes habían ido más allá del objetivo propuesto. Uno de ellos afirmó que el criterio podía adaptarse “¡a cualquier número primo con excepción del 2 y del 5!”. Se planteó como un reto para el grupo analizar su afirmación. De nuevo, a partir de un intercambio de ideas, se concertó que la expresión $10n + 1$ (con $n = 1,2,3 \ldots$), genera números terminados en 1, que, o bien son primos, como 31 y 41, o bien son compuestos, como 21 y 51. En el segundo caso, obtenemos criterios de divisibilidad para primos como 3, 7 y 17. El aporte del estudiante siguió de la observación de que todo número primo, con excepción de 2 y 5, tiene un múltiplo terminado en 1. ¿La razón? Los primos distintos de 2 y 5 terminan en 1, 3, 7 o 9, y cada uno de estos números tiene un múltiplo terminado en 1.

Último episodio: otros métodos y extensiones (entran en escena los relojes)

Las fases seguidas en el desarrollo de este tema se presentan en la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Fases del episodio relacionado con la aritmética modular

Fases	Descripción de las fases
Motivación	Planteamiento de una situación inicial.
Comenzar con una pregunta	Se presenta una imagen de un “reloj” (rueda modular) y a partir de una pregunta deben establecerse relaciones entre los números y los colores.

Continúa

<table>
<tr><th>Fases</th><th colspan="2">Descripción de las fases</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Descubrir patrones y relaciones jugando</td><td rowspan="3">Experimentación dirigida</td><td>Sumas y restas. Relación con los restos.</td></tr>
<tr><td>Producto de dos números. Relación con los restos.</td></tr>
<tr><td>Potenciación. Relación con los restos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicar ideas</td><td colspan="2">Hallar restos de números con distintas descomposiciones. Generalización.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identificación de distintos patrones al operar con restos.</td></tr>
<tr><td>Deducciones informales</td><td colspan="2">Respuestas a preguntas planteadas, conjeturas y propuesta de nuevas cuestiones.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Motivación: El profesor planteó a los estudiantes la siguiente situación (cuadro 1.1).

Cuadro 1.1. Situación planteada por el profesor

Imaginen que un profesor pide a su clase de noveno que solucione la siguiente ecuación:

$$10x + 2 = 5$$

Un estudiante dice al profesor: “Claramente, la solución de la ecuación es 1”.

Fuente: Elaboración propia.

Algunos estudiantes dijeron: “¡No, está mal!”. El profesor comentó: “Tendría que corregir, ¿verdad?”. Todos los alumnos asintieron y alguno dijo: “¡Claro!”. Luego, el profesor les propuso: “¿Cómo sabemos que 10 + 2 no es 5? ¿Qué pasaría si dijéramos ‘sí’ a esa idea?… No lo sé, averigüémoslo. Si $x = 1$, entonces

$$10 + 2 = 5$$
$$12 = 5$$
$$11 = 4$$
$$\vdots$$
$$8 = 1$$
$$7 = 0,$$

y… ¡no puede ser porque 0 y 7 están separados en la recta numérica!” (figura 1.1).

Figura 1.1. Recta numérica

Fuente: Elaboración propia.

El profesor comentó: “¿Y si no es una recta numérica?, ¿y si es una circunferencia numérica? ¡Como si tuviéramos un reloj como este…!” (figuras 1.2 y 1.3).

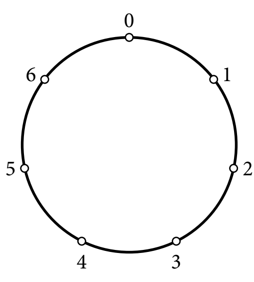

Figura 1.2. Circunferencia numérica del módulo 7

Fuente: Elaboración propia.

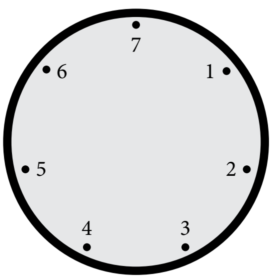

Figura 1.3. Reloj numérico del módulo 7

Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes se quedaron un poco desconcertados. El profesor continuó: “Sí, si nos movemos 7 ‘pasos’, siempre terminaremos en donde comenzamos. De hecho, todos los números enteros de la recta están ‘amontonados’ en esos

7 puntos". Los matemáticos han estudiado ampliamente este sistema de aritmética para números enteros, que se conoce como *aritmética modular* o *aritmética de los relojes* (Burton, 2005). Esta área de las matemáticas tiene unas aplicaciones importantes en criptografía y en teoría de códigos.

Comenzar con una pregunta

El alumnado hizo el ejercicio de "ubicar" distintos números sobre el reloj y notó que quedaban superpuestos. Para evitar esto, se reemplazó el reloj por una configuración de sectores circulares, en cada uno de los cuales aparecían separados los números que antes se superponían (figura 1.4). La intención era que ellos mismos relacionaran el comportamiento de los números sobre el reloj (recta circular) con el nuevo formato de "rueda modular", y que dedujeran algunas de las propiedades a partir de la visualización.

Hay una pregunta implícita en esta imagen, oculta a primera vista. Aquí están los números del 1 al 34, ¿qué sucede con los colores?

Conforme transcurría el tiempo, los estudiantes planteaban más interrogantes y compartían distintas opiniones. "Los números del centro son las horas de reloj, y los otros son los que caen en esa hora, como hicimos antes". Formularon preguntas: "¿Por qué los números de cada sección tienen distintos colores?, ¿por qué 1, 2, 3 4, 5 y 6 tienen otros colores?, ¿por qué los números aumentan en forma circular?, ¿por qué son 7 radios/secciones?". Cuando comenzaron a lanzar conjeturas y a arriesgarse a preguntar si eran correctas, el profesor expresó: "No lo sé, averigüémoslo". Un estudiante afirmó: "Los números del centro son los restos de dividir los otros por 7", y el profesor le

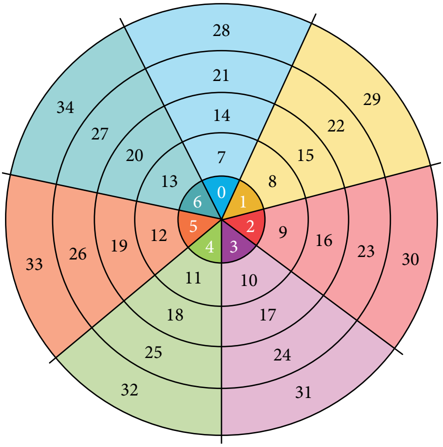

Figura 1.4. Reloj de restos del módulo 7

Nota: De forma intuitiva, parece existir una conexión entre los números y los colores.

• Quizás es posible extender a más números.

• ¿Cuál es el significado de los colores?

Los estudiantes son quienes responden las preguntas.

Fuente: Adaptado de Zach Star (2019).

pidió que explicara su afirmación. El debate permitió determinar qué es lo correcto, sin que el profesor diera una respuesta explícita. Otro estudiante dijo: "8 entre 7, 1, y resto 1; 15 entre 7, 2 y resto 1. Calculé todos y el resto es 1. ¿Qué más explicación?".

Descubrir patrones jugando: ¿cómo se suma, cómo se resta, cómo se multiplica?

Conforme avanzaba la sesión, cada estudiante elaboró su propio reloj, y comenzó a jugar con las operaciones para ver regularidades. En adelante, hasta que se diga otra cosa, hablaremos de los restos al dividir por 7. Los estudiantes verificaron que tanto la suma como el producto "aterrizaban" en el mismo sector de la respectiva suma o producto de los restos. Empezaron a probar con números que ellos mismos se inventaban y a sacar sus propias deducciones. Ya familiarizados con la idea de que, para dos números cualquiera, estar en el "mismo sector" significa "tener igual resto", se les mencionó que, si dos números enteros *a* y *b* tienen igual resto al ser divididos por $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, se escribe $a \equiv b \ (mod\ n)$, y se lee *a* congruente con *b*, módulo *n*. Jugando un poco más, los estudiantes pudieron verificar algunas propiedades de la suma, el producto y la potenciación de los enteros del módulo *n*[1], con distintos valores de *n*. Se señalan a continuación algunas de ellas, para $n = 7$ (figuras 1.5 y 1.6).

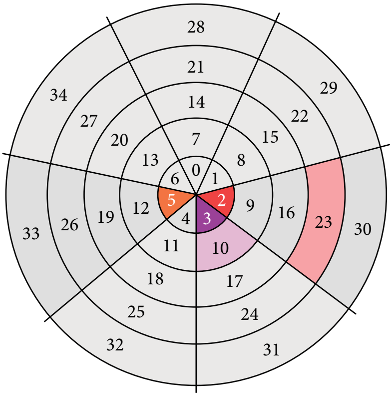

Figura 1.5. Suma de restos del módulo 7

Nota: El resto de la suma de dos números es igual al resto de la suma de los restos:

$$\underbrace{23}_{2} + \underbrace{10}_{3} = 33$$

Para hallar el resto de 33, basta sumar los restos de 23 y 10. Así se halla su resto:

$2 + 3 = 5.$

Fuente: Adaptado de Zach Star (2019).

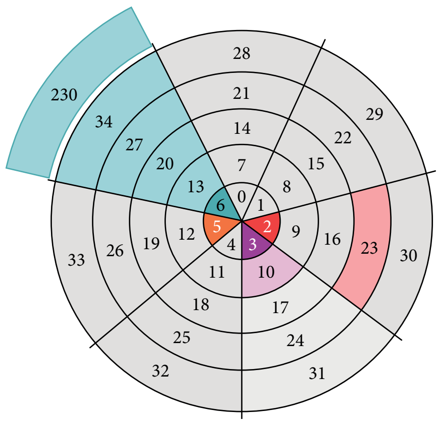

Figura 1.6. Producto del módulo 7

Nota: El resto del producto de dos números es igual al resto del producto de los restos:

$$\underbrace{23}_{2} \cdot \underbrace{10}_{3} = \underbrace{230}_{6}$$

Para hallar el resto de 230, basta multiplicar los restos de 23 y 10. Así se halla su resto:

$2 \cdot 3 = 6$

Fuente: Adaptado de Zach Star (2019).

1 Para facilitar la lectura, los restos de cada número, al ser divididos por 7, se sitúan debajo del respectivo dividendo.

Comunicar ideas

Los estudiantes calcularon restos de sumas y productos:

$$45 \cdot 134 = \underbrace{45}_{3} \cdot \underbrace{2}_{2} \cdot \underbrace{67}_{4} \tag{1.6}$$

El resto de $45 \cdot 134$ es el resto de dividir $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ entre 7, que es 3. El profesor insistió en que, para hallar el resto de dividir por 7 la suma o producto de dos números, basta trabajar con el resto de cada uno de los números. Explicó con un ejemplo, y luego generalizó la propiedad para cualquier número, con el algoritmo de la división:

$$\begin{aligned} 45 \cdot 134 = (7 \cdot 6 + 3)(7 \cdot 19 + 1) &= 7 \cdot 6(7 \cdot 19) \\ &+ 7 \cdot 6 + 7 \cdot 19 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ &= \underbrace{45}_{3} \cdot \underbrace{134}_{1} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Todos los términos con 7 como factor tienen resto 0, con lo cual basta quedarse con el producto de los restos $3 \cdot 1 = 3$. Algunos estudiantes se percataron de que, teniendo el resto, podían hallar el cociente. Al hablar de potencias, uno de ellos expresó: “Es lo mismo que el producto, ya que las potencias son multiplicaciones”. Al pedirle una explicación, el estudiante puso el siguiente ejemplo:

$$5^4 = \underbrace{5 \cdot 5}_{4} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{4} \tag{1.8}$$

y señaló: “El resto de 5^4 es el resto del número que resulta de multiplicar el resto de 25 por sí mismo. Es decir, el resto de $4 \cdot 4 = 16$ dividido por 7, que es 2. Y así con todas las potencias”.

Los estudiantes descompusieron de diversas formas y utilizaron propiedades de las potencias. Además de hallar restos de diversas potencias, conjeturaron acerca de regularidades observadas, que en el terreno formal son teoremas (por ejemplo, el pequeño teorema de Fermat[2]). Al calcular restos de potencias de 5, obtuvieron los posibles restos de dividir entre 7. Se amplió el tema de las potencias, y también de los divisores. Algunas de las deducciones se reseñan en las siguientes figuras (1.7 a 1.10):

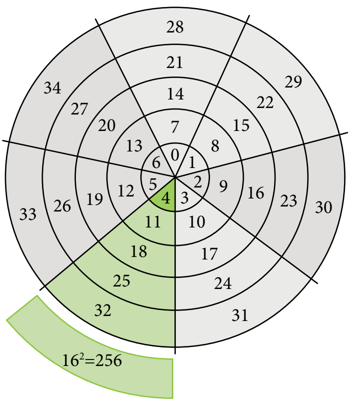

Figura 1.7. Restos de potencias

Nota: Los restos de las potencias de números en un mismo sector siempre "aterrizan" en un mismo sector.

Fuente: Adaptado de Zach Star (2019).

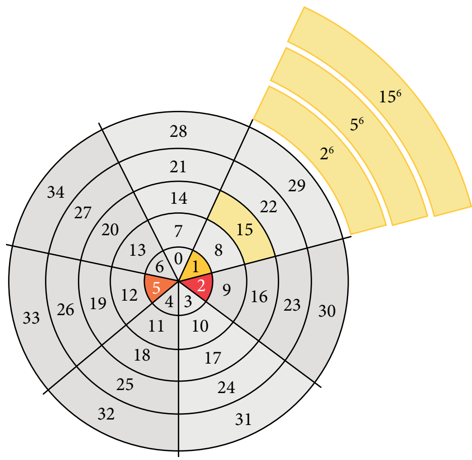

Figura 1.8. Pequeño teorema de Fermat

Nota: Cualquier número entero no nulo elevado a la 6, al ser dividido entre 7, tiene resto 1.

Fuente: Adaptado de Zach Star (2019).

---

2 Si p es un número primo, entonces, para cada número natural a, con $a > 0$, $ap-1$ ≡ $1 \; mod \; p$, siempre y cuando a no sea divisible por p.

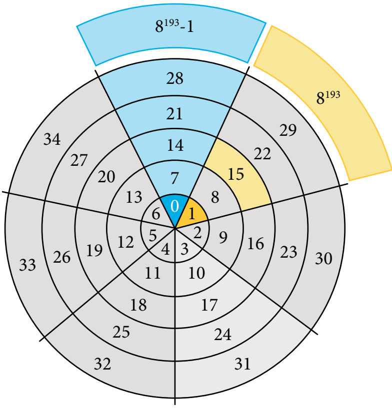

Figura 1.9. Múltiplos de 7

Nota: $8^n - 1$, con n natural, es divisible por 7.

Fuente: Adaptado de Zach Star (2019).

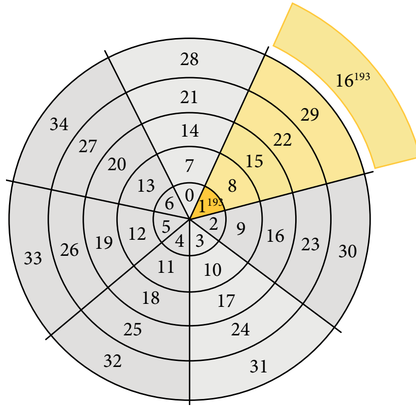

Figura 1.10. Propiedad de números congruentes con 1 (*mod p*)

Nota: Cualquier potencia de números cuyo resto al dividir entre 7 sea 1, tiene resto 1.

Fuente: Adaptado de Zach Star (2019).

Por último, el profesor pidió a los estudiantes justificar por qué el resto de dividir un número *abcd* (de cuatro cifras) entre 7, es el resto de dividir $6a + 2b + 3c + d$ por 7. Encontraron no solo una forma de hallar el resto y el cociente sin necesidad de hacer la división, sino también un criterio de divisibilidad por 7, con aritmética modular.

Reflexiones

La herramienta metacognitiva se estructuró en torno a cuatro tipos de preguntas metacognitivas autodirigidas, fundamentadas en los estudios de Pólya (1954) y Schoenfeld (2016). Las estrategias consideradas en las preguntas de estrategia se acuñaron de la lista de estrategias cognitivas y metacognitivas que aparecen en Mevarech y Kramarski (2014) (figura 1.11).

Figura 1.11. Herramienta metacognitiva

Fuente: Elaboración propia.

Desde hace casi dos décadas se ha señalado como objetivo principal de la educación matemática formar ciudadanos que entiendan y sean capaces de usar matemáticas en la vida diaria y el trabajo. Es decir, que tengan aptitudes para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2004).

Si algo ha de procurar el sistema educativo, y de manera particular sus docentes, es hacer posible, a través de sus propuestas de enseñanza, la generalización de los aprendizajes adquiridos en el aula y su transferencia a situaciones de la vida diaria y al trabajo futuro.

En febrero de 2017, Helena Herrero, presidenta y consejera delegada de Hewlett-Packard para España y Portugal, afirmó: "El 65 % de los alumnos actuales de primaria van a estudiar carreras para puestos de trabajo que no existirán" (Fernández Enguita, 2017). Esta frase habla por sí sola de las implicaciones que esta realidad tiene sobre la educación. Es claro que si no sabemos cuáles conocimientos específicos tendrán mayor demanda y aplicaciones, lo sensato es enseñar a aprender. Esta nueva dinámica resalta la importancia de los desarrollos dirigidos a optimizar la propia actividad de aprendizaje, así como a afinar las herramientas de reflexión sobre el propio conocimiento. Todo esto tiene el propósito de obtener los mejores resultados en la gestión particular del proceso de educación, en el sentido más adecuado de la palabra. Aunque las nuevas profesiones de las que habla Herrero son desconocidas, podemos sin esfuerzo predecir una actividad que se desarrollará en todas ellas: la resolución de problemas. Entonces, además de resaltar los tres elementos citados (el futuro, los análisis metacognitivos y la ubicua necesidad de resolver problemas), defendemos las dos propuestas de trabajo en el aula que de manera tácita contienen esta experiencia (a fin de estimular la exploración personal del conocimiento): invitar a extender los alcances de este conocimiento (primera experiencia) o presentarlo desde diversos puntos de vista y con diversas herramientas, tanto conceptuales como metodológicas (segunda experiencia). La introspección en la autogestión del conocimiento requiere, *sine qua non,* que esta autogestión ya se esté dando.

En definitiva, se trata de vincular la enseñanza con la vida, en este caso, a partir de la comprensión-interpretación de la realidad en clave matemática, para contribuir a su transformación con un fundamento crítico-matemático.

Caja de herramientas

1. *Matemáticas experimentales.* Si me lo dices, lo olvido; si me lo enseñas, lo recuerdo; pero si me involucras, lo entiendo. Consultar:
   - Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) y Centre Sciences y Adecum. (s.f.). *Matemáticas experimentales*. https://www.experiencingmaths.org/es/

2. *Matemáticas discretas y geometría: el teorema de Pick.* Es un resultado geométrico cuando menos curioso, si no sorprendente. Permite calcular de forma muy sencilla el área de un polígono bajo ciertas condiciones. Se debe al matemático austriaco Georg Alexander Pick, que lo demostró en 1899. Para saber en qué consiste y conocer una experiencia con futuros profesores, consultar:
   - Jiménez-Gestal, C. y Blanco Nieto, L. J. (2017). El teorema de Pick como pretexto para la enseñanza de la geometría con estudiantes para maestro. *Números, 94*, 7-21. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1243287/Jimenez2017Teorema.pdf

3. *Software GeoGebra*. En el Proyecto Gauss se puede encontrar una gran cantidad de *applets* de GeoGebra, tanto de educación primaria como de secundaria y bachillerato, que cubren todos los contenidos mínimos de las matemáticas. Este proyecto “aporta a la comunidad escolar una forma diferente y creativa de enseñar y aprender matemáticas” mediante el diseño de “ítems didácticos” que resultan útiles, claros y aplicables al aula con facilidad. Consultar:
   - Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación de Profesorado (INTEF). (s.f.). *Proyecto Gauss*. http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

4. *Smartick*. Además de tener un método en línea para el aprendizaje de las matemáticas, este es uno de esos sitios en los que muy a menudo pueden encontrarse curiosidades matemáticas, como un método para calcular restos con grafos en los que solo basta saltar y avanzar. Los grafos para calcular restos de dividir un número entre otro se pueden hallar en el recurso que hemos elaborado en Geogebra. Consultar:
   - Sanz, H. (2020, 2 de marzo). *El porqué de los criterios de divisibilidad*. Smartick. https://bit.ly/2QEBXYk
   - Gómez Rojas, O. y Cuida Gómez, A. (2020, 12 de marzo). *Generación del grafo para el cálculo de residuos* [*Applet* en línea]. https://www.geogebra.org/m/g69wb9cv

5. *La geometría en tablas de multiplicar modulares*. Mediante la geometría se pueden observar curiosidades de las tablas de multiplicar. ¿Por qué es simétrica la imagen? ¿Qué ocurre si se cambia el número de

puntos? ¿Y si cambiamos la tabla? La *applet* diseñada en GeoGebra fue inspirada por el video *Tablas de multiplicar, Mandelbrot y el corazón de las matemáticas*, que aparece en la misma página. Consultar:

- Phelps, S. (2015, 6 de noviembre). *Modular times table.* GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/dqKkQEv7

6. *Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la Universidad de Utah*. Es un proyecto educativo cuyo objetivo es desarrollar una biblioteca de manipuladores virtuales interactivos (principalmente *applets* en Java) de libre acceso, y que permite a los profesores enriquecer sus clases de matemáticas. Consultar:
   - Utah State University. (s.f.). National Library of Virtual Manipulatives. http://nlvm.usu.edu/

7. *Repositorio de materiales ofrecido por el Instituto Freudenthal.* Contiene una colección de recursos educativos muy interesantes para matemáticas y aritmética en la escuela. Consultar:
   - Freudenthal Instituut. (s.f.). *Leermiddelen*. Universiteit Utrecht. https://bit.ly/3bew9xZ

8. *La teoría de grafos a través del cine*. La película *Mente indomable* (1997), inspirada en la historia de George Dantzig y dirigida por Gus Van Sant, vista desde una perspectiva educativa. Consultar:
   - El indomable Will Hunting. (s.f.). *Cine y TV como fuente de información para mejorar las competencias matemáticas del alumnado de secundaria*. https://bit.ly/3gFrDda

9. *Proyecto Descartes*. Tiene como principal finalidad promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, integrando las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) en el aula como herramienta didáctica. En esta web de la Red Educativa Digital Descartes se incluyen numerosas unidades didácticas desarrolladas por profesores y profesoras, que han querido compartirlas con toda la comunidad educativa. Consultar:
   - Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación de Profesorado (INTEF) y Ministerio de Educación y Formación Profesional. (s.f). *Unidades didácticas*. Proyecto Descartes. https://proyectodescartes.org/uudd/index_nivel.htm

10. *Libro* ¡Sálvese quien pueda!: el futuro del trabajo en la era de la automatización, *de Andrés Oppenheimer, 2018*. La escritura de este libro fue motivada por un estudio de la Universidad de Oxford que pronostica que 47 % de los empleos actuales son de tal naturaleza que pueden ser asumidos, durante los próximos 15 o 20 años, por robots y computadores con inteligencia artificial. La enseñanza no está exenta. Al contrario:

    > A diferencia de los maestros humanos, que tienden a exasperarse después de varios intentos infructuosos de explicarles algo a sus alumnos, un maestro robótico puede explicar las cosas de cientos de maneras. Si el estudiante no entiende una, puede pasar a la otra y así sucesivamente. (p. XX)

Esta situación, obviamente, plantea un reto a quienes nos dedicamos a la enseñanza: debemos dotar nuestros métodos de trabajo de tal dosis de creatividad que ni nosotros ni nuestros alumnos corramos el riesgo de ser desplazados en los trabajos por robots inteligentes. Consultar:

- Oppenheimer, A. (2018). *¡Sálvese quien pueda!: el futuro del trabajo en la era de la automatización*. Vintage Español.

11. *Libro* Amor y matemáticas, *de Edward Frenkel, 2015*. Libro cuyo inicio dice: "¿Qué sucedería si en clase de arte te ensañaran a pintar una verja? ¿O que jamás te mostraran una pintura ni te hablaran de la existencia de Van Gogh o Picasso?" (p. 2). Contiene un lúcido análisis de las matemáticas como fenómeno sociológico en las sociedades modernas, así como el hecho de que el supuesto paraíso de la ciencia no está exento de ser contaminado por prejuicios de tipo político y racial. Consultar:
    - Frenkel, E. (2015). *Amor y matemáticas*. Ariel

12. *Libro* Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático, *de Imre Lakatos, 1994*. Este libro tiene una fascinante presentación en la que, mediante una clase ficticia (en la cual se da una construcción dialéctica de conocimiento por parte de un grupo de estudiantes y su profesor), se muestran discusiones filosóficas y controversias que realmente ocurrieron en la historia de las matemáticas. Consultar:
    - Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Universidad.

13. *Software Excel*. Gracias a su ubicuidad y versatilidad, permite hacer con rapidez verificaciones de conjeturas o determinación de patrones. Un ejemplo: el código =SI(ES.PAR(A1);A1/2;3*A1+1, escrito en la casilla A2 (si se introduce un número en la casilla A1 y mediante arrastre), permite hacer rápidas verificaciones de la conjetura de Collatz. Sobre esta conjetura, consultar:
    - El más simple de todos los problemas matemáticos sin solución. (2016, 3 de julio). *BBC Mundo*. https://www.bbc.com/mundo/noticias-36651490

14. *Software PSeInt*. Es un magnífico lenguaje para iniciarse en la programación. Desarrollado en Argentina, emplea palabras reservadas en castellano. También genera el diagrama de flujo del código fuente. ¡Y hace el proceso inverso! En consecuencia, es posible correr un algoritmo que se haya codificado mediante un diagrama de flujo. Además, exporta el código nativo C, C++, a Java, JavaScript, MATLAB, etc.

Referencias

Bishop, A. J. (1991). Mathematical values in the teaching process. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 193-214). Springer; Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2195-0_10

Burton, D. (2005). *Elementary number theory* (6th ed.). McGraw-Hill.

DeBellis, V. A. y Rosenstein, J. G. (2004). Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36*, 46–55. https://doi.org/10.1007/BF02655758

Devlin, K. (1994). *Mathematics the science of patterns*. Scientific American Library.

English, L. D. y Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. In L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313-335). Routledge.

Fernández Enguita, M. (2017, 12 de marzo). El futuro de la educación: el 65 % de no-sé-quién va a hacer no-sé-qué. *El País*. https://bit.ly/3oTL8dp

Gamarra Astuhuaman, G. G. y Pujay Cristóbal, Ó. E. (2021). Resolución de problemas, habilidades y rendimiento académico en la enseñanza de la matemática. *Revista Educación, 45*(1), 176-189. https://doi.org/10.15517/revedu.v45i1.41237

Lesh, R. y Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics, Information Age Publishing.

Liljedahl, P. y Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical problem solving*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6

Mevarech, Z. y Kramarski, B. (2014). *Critical maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264223561-en

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. National Academy Press.

Organisation for Economic Co-operation and Development [oecd]. (2004). *The pisa 2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills, education and skills.*

Pólya, G. (1954). *How to solve it*. Princeton University Press.

Prins, F. J., Veenman, M. V. J. y Elshout, J. J. (2006). The impact of intellectual ability and metacognition on learning: New support for the threshold of problematicity theory. *Learning and Instruction*, *16*(4), 374–387. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.07.008

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática xii.* xii Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (seiem), Badajoz, España.

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 686-693. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-75). Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Van der Stel, M. y Veenman, M. V. J. (2014). Metacognitive skills and intellectual ability of young adolescents: A longitudinal study from a developmental perspective. *European*

Journal of Psychology of Education, *29*(1), 117-137. https://doi.org/10.1007/s10212-013-0190-5

Zach Star. (2019, 27 de agosto). Modular arithmetic visually explained [Archivo de video]. Youtube. https://bit.ly/3hjGKtO