



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**Ondas viajeras en ecuaciones de
reacción-difusión**

**Autor: Óscar Aguado Miravalles
Tutor: Ángel Durán Martín**

2024/2025

Resumen

En este trabajo se explican algunas propiedades de ondas viajeras que son soluciones de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de tipo reacción-difusión. El carácter de onda viajera convierte la EDP de la que es solución en una ecuación diferencial ordinaria (EDO), por lo que su existencia y dinámica pueden estudiarse a partir de la teoría cualitativa. El trabajo se centra en el caso de ecuaciones escalares, tratando la extensión de los resultados para algunos sistemas de reacción-difusión. Se ilustrará la importancia de este tipo de soluciones con algunos modelos que aparecen en dinámica de poblaciones.

Palabras clave: Ecuaciones de reacción-difusión, ondas viajeras, teoría cualitativa, dinámica de poblaciones

Abstract

The purpose of this work is the analysis of traveling wave solutions of partial differential equations (PDEs) of reaction-diffusion type. The special form of these solutions transforms the PDE into an ordinary differential equation (ODE), which can be studied from the qualitative theory of ODEs. The contents will be focused on the scalar case, with the extension of some results to some reaction-diffusion systems. The relevance of these traveling wave solutions will be illustrated with the description of some models in population dynamics.

Key words: Reaction-diffusion equations, traveling waves, qualitative theory, population dynamics

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo profundamente a mi tutor, **Ángel Durán**, por su apoyo incondicional, su guía experta y su paciencia a lo largo de todo este proceso. Su dedicación y sus valiosos consejos han sido fundamentales para llevar a cabo este trabajo, y por ello le estoy muy agradecido.

A mi **familia**, que siempre ha estado a mi lado, dándome fuerzas en los momentos más difíciles y celebrando conmigo cada pequeño logro. Su amor, comprensión y confianza en mí han sido el motor que me ha impulsado a seguir adelante. A mis padres, por enseñarme los valores de la perseverancia y el esfuerzo, y a mi hermano, por su apoyo inquebrantable.

A mis **amigos**, por su constante ánimo, por los conocimientos compartidos y por ser parte de los recuerdos inolvidables de estos años. Gracias por hacer más llevadero este camino.

A todos, en general, por su apoyo, cariño y por ser una fuente constante de motivación. Mi más sincero agradecimiento.

Índice general

Resumen	3
Agradecimientos	6
1. Introducción	11
1.1. Ondas viajeras en modelos de reacción-difusión	11
1.1.1. Ondas estacionarias	12
1.1.2. Ondas periódicas	14
1.2. Estructura del TFG	14
2. Revisión de sistemas diferenciales y teoría cualitativa	15
2.1. Carácter de bien puesto de un sistema de EDOs	15
2.1.1. Existencia y unicidad	16
2.1.2. Dependencia de las condiciones iniciales	20
2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio	20
2.2.1. Estabilidad para sistemas lineales	22
2.2.2. Estabilidad de sistemas no lineales. Linealización	22
2.3. Teorema de la variedad estable	23
2.4. Teorema de Hartman-Grobman	25
2.5. Estabilidad de los puntos de equilibrio	26
2.5.1. Caracterización de la estabilidad en el caso hiperbólico	26
2.5.2. Puntos de equilibrio de sistemas planos	26
3. Ondas viajeras en ecuaciones escalares de reacción-difusión	33
3.1. Resultados generales sobre frentes de onda en sistemas planos	33
3.1.1. Trayectorias que conectan dos equilibrios	33
3.1.2. Frentes de onda en sistemas planos	37
3.2. Frentes de onda en ecuaciones de reacción-difusión	39
3.2.1. Término fuente con signo constante (monoestable)	40
3.2.2. Término fuente con cambio de signo (biestable)	41
3.3. Estabilidad de los frentes de onda	42
3.4. Un ejemplo: el modelo de Fisher	43
3.4.1. Modelo original de Fisher	43
3.4.2. Caso dominante-recesivo (monoestable)	46
3.4.3. Caso codominante (biestable)	48
4. Ondas viajeras en sistemas de reacción-difusión	51
4.1. Sistemas monótonos	51

4.2. Un modelo de competición entre especies	52
4.2.1. Invasión de una especie	56
4.2.2. Control biológico de la invasión	57
4.3. Dinámica celular	58
4.3.1. Desarrollo de la leucemia	58
4.3.2. Arterioesclerosis	59
Bibliografía	66

Capítulo 1

Introducción

1.1. Ondas viajeras en modelos de reacción-difusión

En este trabajo estudiaremos algunas propiedades de ondas viajeras, siendo estas solución de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) de tipo parabólico y de reacción-difusión, de la forma general

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u + F(u), \quad (1.1.1)$$

donde $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m, m \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es simétrica y definida positiva, Δ es el operador laplaciano, con

$$\Delta u := (\Delta u_1, \dots, \Delta u_m)^T,$$

y $F(u) = (F_1(u), \dots, F_m(u))^T$ es un término fuente, en general no lineal en u . El sistema puede plantearse en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$, que puede ser $\Omega = \mathbb{R}^n$ (problema de valor inicial o pvi, para un dato inicial $u_0(x) = u(x, 0)$ conocido) o bien Ω acotado (en cuyo caso, además de u_0 , necesitamos condiciones de contorno en la frontera $\partial\Omega$ de Ω , para especificar un problema de valores iniciales y de contorno).

Sistemas de tipo (1.1.1) son llamados de reacción-difusión (RD). Por ejemplo, si u está midiendo distribuciones de temperatura o densidades de población, el primer sumando del lado derecho representa un término difusivo (de transferencia de calor o movimiento aleatorio de individuos) mientras que el segundo actúa como término de reacción (describiendo una cierta tasa de producción- externa o no- de calor, o bien, en el caso de poblaciones, su tasa de reproducción). Problemas asociados a (1.1.1) como modelo surgen en muchas áreas de física, química, biología, medicina, etc, [27].

Sistemas (RD) de tipo (1.1.1) suelen caracterizarse por la existencia de equilibrios (de relevancia en el contexto del modelo bajo estudio) en forma de ceros de los términos de reacción. Es entonces de esperar que aquellos estados iniciales entre dos equilibrios generen soluciones que representen transiciones de uno a otro, al modo, por ejemplo, del modelo logístico, representado en la figura 1.1.

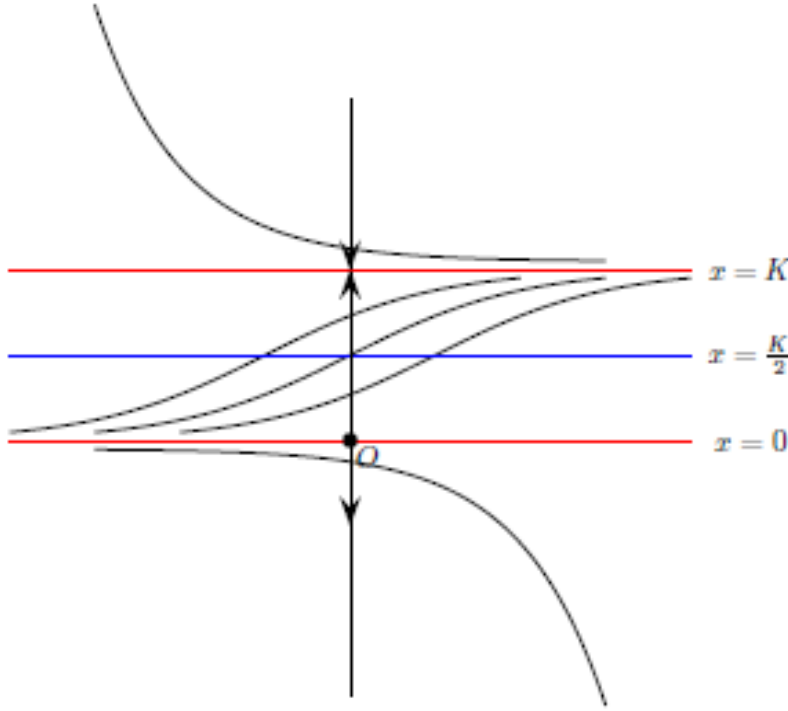


Figura 1.1: Trayectorias del modelo logístico $u' = u(K - u)$.

Estas soluciones suelen llamarse ondas de reacción-difusión, y pueden ser de varios tipos, de los que destacamos dos.

1.1.1. Ondas estacionarias

Son soluciones $u = u(x, t)$ de (1.1.1) de la forma

$$u(x, t) = w(x_1 - ct, x'), \quad (1.1.2)$$

donde x_1 representa una dirección en $\mathbb{R}^n$ (por sencillez se elige la del primer vector de la base canónica), $x' = (x_2, \dots, x_n)$, c es una constante (representando la velocidad de la onda) y w es cierta función de n variables. En el caso $n = 1$, (1.1.2) se convierte en

$$u(x, t) = w(x - ct). \quad (1.1.3)$$

La onda estacionaria (1.1.3) se llama entonces onda plana unidimensional, [27]. Si u satisface (1.1.1), entonces la función $w(\xi)$, $\xi = x - ct$, es solución de

$$Aw''(\xi) + cw'(\xi) + F(w) = 0, \quad (1.1.4)$$

que puede escribirse como un sistema de EDOs de primer orden

$$w' = p, \quad Ap' = -cp - F(w), \quad (1.1.5)$$

y las ondas planas pueden estudiarse como trayectorias de un sistema de EDOs. Una clasificación de ondas planas a partir de sus relevancia en las aplicaciones puede ser la siguiente:

- Frentes de ondas: son soluciones w de (1.1.5) con

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w(\xi) = w_{\pm}, \quad w_+ \neq w_-. \quad (1.1.6)$$

Si las funciones w y w' están acotadas y los límites en (1.1.6) existen, puede comprobarse que, [27]

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w''(\xi) = 0,$$

de modo que, tomando límites en (1.1.4), se tiene que

$$F(w_+) = F(w_-) = 0.$$

Así, $w_{\pm}$ pueden verse como equilibrios de la EDO

$$w' = F(w), \quad (1.1.7)$$

y los frentes de onda conectan ambos puntos (cf. figura 1.1 o figura 1.2). Por ello es importante, para conocer su dinámica, tener información sobre la estabilidad de $w_{\pm}$ como equilibrios de (1.1.7).

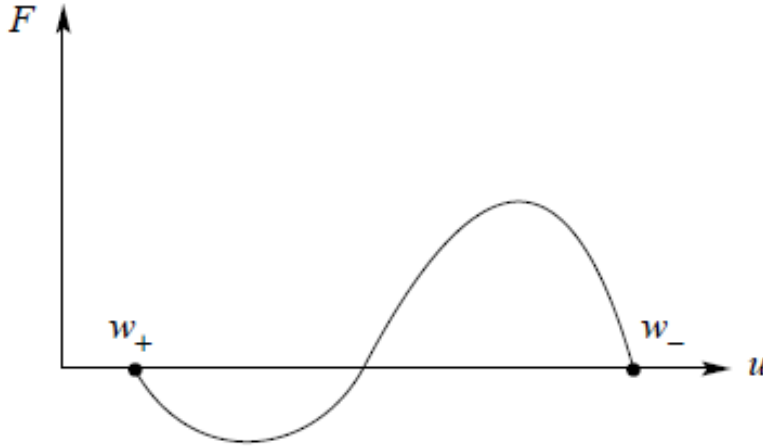


Figura 1.2: Frente de ondas no monótono.

- Pulsos: son soluciones w de (1.1.5) con

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w(\xi) = w_{\pm}, \quad w_+ = w_-.$$

Se trata entonces de ondas conectando un mismo estado, véase la figura 1.3. Ejemplos clásicos aparecen en modelos como las ecuaciones de FitzHugh-Nagumo (FHN), [24].

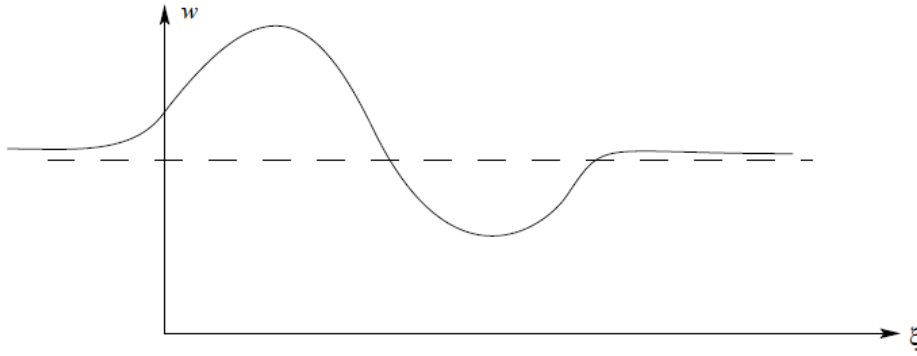


Figura 1.3: Ondas viajeras pulso.

1.1.2. Ondas periódicas

Algunos modelos matemáticos basados en ecuaciones RD contienen también otros tipos de ondas viajeras, [27, 25, 26]. En particular, son de interés las ondas periódicas, definidas como soluciones $u(x, t)$ de (1.1.1) de la forma

$$u(x, t) = w(x_1 - ct, x', t),$$

donde $w(x, t)$ es periódica en t . En el caso unidimensional, esto significa que $w(\xi, t)$ es periódica en t , $\xi = x - ct$.

1.2. Estructura del TFG

El presente trabajo se centrará en las ondas estacionarias para el caso unidimensional. Los problemas a tratar para su estudio, desde el punto de vista matemático, pueden agruparse en tres aspectos:

- Resultados de existencia de ondas.
- Estabilidad de las ondas.
- Análisis de la velocidad de propagación.

La mayor parte de los resultados corresponderán al caso escalar y utilizaremos la teoría de sistemas dinámicos, a partir del sistema (1.1.5), para el análisis. Otras técnicas son posibles, [27], pero quedan fuera de los objetivos y el propósito del trabajo.

La estructura es la siguiente. El punto de vista que adoptaremos, basado en la teoría cualitativa para (1.1.5), justifica la revisión de algunos conceptos sobre sistemas dinámicos para EDOs en el capítulo 2, con especial mención para la linealización y los teoremas de Grobman-Hartman y de la variedad estable. El capítulo 3 analiza las ondas viajeras para ecuaciones escalares de RD. A partir de resultados generales sobre la dinámica en sistemas de EDOs planos, discutiremos la existencia de frentes de onda en ecuaciones con términos fuente de signo constante y términos fuente con cambio de signo. El ejemplo que ilustra estos resultados será el modelo de Fisher, [10, 11]. En el capítulo 4 extenderemos los resultados del capítulo anterior a sistemas monótonos, aplicándolos a varios modelos en dinámica de poblaciones.

Capítulo 2

Revisión de sistemas diferenciales y teoría cualitativa

En este capítulo haremos una revisión de algunos aspectos de la teoría de ecuaciones diferenciales y de sistemas dinámicos, necesarios para el análisis en los capítulos 3 y 4. La revisión no será exhaustiva; para los detalles pueden consultarse referencias como [21, 13, 14, 12].

2.1. Carácter de bien puesto de un sistema de EDOs

Consideremos un sistema autónomo de EDOs

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1.1)$$

con $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$. Una función $x : I \rightarrow D$ es una solución de (2.1.1) en el intervalo real I si $x(t)$ es diferenciable en I y verifica (2.1.1) para todo $t \in I$.

Un primer punto a discutir en este capítulo es el carácter de bien puesto del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)), \quad t \in I, \\ x(t_0) &= x_0, \quad t_0 \in I, \quad x_0 \in D. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Esto significa discutir tres propiedades:

- Existencia y unicidad de solución de (2.1.2).
- Dependencia continua de la condición inicial.

Estas propiedades son importantes si con (2.1.2) queremos modelizar algún fenómeno físico. La primera refleja la observación de que a partir de un dato de entrada (la condición inicial) el fenómeno físico ofrece una y sólo una respuesta. La segunda indicará que dicha respuesta es una función continua del dato de entrada: si cambiamos un poco éste, la respuesta correspondiente no se alejará mucho de la asociada al dato de entrada sin perturbar.

Definición 2.1.1. *Se dice que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, es localmente Lipschitz en D si para cada $x_0 \in D$ existe una bola abierta $B(x_0, \delta) \subset D$ centrada en x_0 y de radio δ , y una constante $K_0 = K_0(x_0)$ tales que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K_0 \|x - y\|, \quad x, y \in B(x_0, \delta), \quad (2.1.3)$$

con $\|\cdot\|$ denotando la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1.1. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, de clase C^1 en D . Entonces, f es localmente Lipschitz en D .

Demostración. Véase [21]. □

2.1.1. Existencia y unicidad

La discusión de la primera propiedad asociada al carácter de bien puesto utilizará el método de Picard o aproximaciones sucesivas. Suponiendo que $f \in C^1(D)$, el método se basa en reescribir (2.1.2) en forma integral, de manera que $x(t)$ es solución de (2.1.2) si y sólo si $x(t)$ es una función continua verificando

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))ds. \quad (2.1.4)$$

El método consiste en formular la iteración de punto fijo

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0, \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x_k(s))ds, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

de manera que la sucesión de iterantes $\{x_k(t)\}_k$ converge a una solución de (2.1.4) y, por tanto, de (2.1.2), en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, centrado en t_0 .

Teorema 2.1.2. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $x_0 \in D$, $f \in C^1(D)$. Entonces, existe $a > 0$ tal que el problema de valor inicial (pvi) dado por (2.1.2) admite una única solución $x(t)$ definida para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.

Demostración. Como $f \in C^1(D)$, por el lema 2.1.1 existen $B(x_0, \delta) \subset D$ y $K_0 > 0$ verificando (2.1.3). Asimismo, f es continua y acotada en $\overline{B_0} = \overline{B(x_0, \delta/2)}$, por lo que existe

$$M = \max_{x \in \overline{B_0}} \|f(x)\|.$$

Consideramos ahora las aproximaciones $x_k(t)$ definidas en (2.1.5). Como

$$x_1(t) = x_0 + (t - t_0)f(x_0),$$

entonces, definiendo t en un intervalo $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$, con $0 < a < \frac{\delta}{2M}$, se tiene que x_1 es continua en I_a y satisface

$$\|x_1(t) - x_0\| \leq \frac{\delta}{2}, \quad t \in I_a.$$

Supongamos ahora que x_k está definida y es continua en I_a verificando

$$\|x_k(t) - x_0\| \leq \frac{\delta}{2}, \quad t \in I_a. \quad (2.1.6)$$

Entonces $f(x_k(t))$ está definida y es continua en I_a ; por tanto, de (2.1.5), se tiene que $x_{k+1}(t)$ está definida y es continua para todo $t \in I_a$. Además

$$\|x_{k+1}(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_k(s))\|ds \leq M(t - t_0) \leq \frac{\delta}{2},$$

para todo $t \in I_a$. Por inducción sobre k , se tiene que $x_k(t)$, definida en (2.1.5), es continua en I_a y satisface (2.1.6) para todo $k \geq 0$, por lo que $x_k(t) \in \overline{B_0}$, $t \in I_a$.

Esto implica, por (2.1.3) y para todo $t \in I_a$

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(x_1(s)) - f(x_0)\| ds \\ &\leq K_0 \int_{t_0}^t \|x_1(s) - x_0\| ds \leq K_0 \frac{\delta}{2} |t - t_0| \leq K_0 a \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que para $k \geq 2$ es

$$\max_{t \in I_a} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq (K_0 a)^{k-1} \frac{\delta}{2}. \quad (2.1.7)$$

Entonces, si $t \in I_a$, por (2.1.3) y usando la hipótesis de inducción (2.1.7), se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(x_k(s)) - f(x_{k-1}(s))\| ds \\ &\leq K_0 \int_{t_0}^t \|x_k(s) - x_{k-1}(s)\| ds \leq (K_0 a)^k \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Por inducción sobre k , se tiene entonces que (2.1.7) se cumple para todo $k = 2, 3, \dots$. Si consideramos dos índices $m > k$, (2.1.7) implica que podemos escribir, para todo $t \in I_a$

$$\begin{aligned} \|x_m(t) - x_k(t)\| &\leq \sum_{j=k}^{m-1} \|x_{j+1}(t) - x_j(t)\| \leq \sum_{j=k}^{m-1} (K_0 a)^j \frac{\delta}{2} \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} (K_0 a)^j \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \frac{(K_0 a)^k}{1 - K_0 a}. \end{aligned}$$

Si tomamos

$$0 < a < \min\left\{\frac{\delta}{2M}, \frac{1}{K_0}\right\},$$

se tiene entonces que $\{x_k(t)\}_k$ es una sucesión de Cauchy de funciones continuas en I_a . Esto implica (véase, por ejemplo, [23]) que la sucesión converge uniformemente a una función $x(t)$ continua en $t \in I_a$. Como el límite es uniforme, $x(t)$ y $f(x(t))$ son continuas, tomando límite $k \rightarrow \infty$ en (2.1.5) se cumple entonces que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds, \quad t \in I_a. \quad (2.1.8)$$

Por el teorema fundamental del Cálculo Integral, el lado derecho de (2.1.8) es por tanto diferenciable verificando

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in I_a,$$

con $x(t_0) = x_0$ y, por (2.1.6), si $k \rightarrow \infty$, es $x(t) \in B(x_0, \delta)$, $t \in I_a$.

Para comprobar la unicidad de solución, sean $x(t), y(t)$ dos soluciones de (2.1.2) en I_a . Entonces, la función continua

$$\|x(t) - y(t)\|,$$

alcanza su máximo en algún punto $t_n \in I_a$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x - y\|_\infty &= \max_{t \in I_a} \|x(t) - y(t)\| = \|x(t_n) - y(t_n)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(x(s)) - f(y(s))) ds \right\| \leq K_0 \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \leq K_0 a \|x - y\|_\infty, \end{aligned}$$

y como $K_0 a < 1$, se tiene necesariamente que $\|x - y\|_\infty = 0$ y, por tanto, $x(t) = y(t)$, $t \in I_a$. $\square$

Ejemplo 2.1. Podemos ilustrar el teorema anterior para el caso de un sistema lineal, es decir, (2.1.1) con $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, no es complicado ver por inducción sobre k que

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(t - t_0)^j}{j!} A^j x_0.$$

De manera que la solución del sistema con $x(t_0) = x_0$ es

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^j}{j!} A^j x_0 = e^{(t-t_0)A} x_0.$$

Intervalo maximal de existencia

El teorema 2.1.2 tiene un carácter local; la existencia y unicidad de solución se da en un intervalo I_a que depende de un entorno del dato inicial y de las propiedades de f . Esta solución local se puede prolongar a una solución maximal, es decir, aquella definida en un intervalo maximal (α, ω) , más allá del cual la solución no puede prolongarse.

Antes de dar el resultado correspondiente, precisamos un poco más esta idea.

Ejemplo 2.2. Para $\mu \neq 0$, la EDO

$$x' = \mu x^3,$$

tiene, para un dato inicial $x(0) \neq 0$ la solución

$$x(t) = \frac{|x(0)|}{\sqrt{1 - 2\mu x(0)^2 t}},$$

cuyo intervalo maximal de definición se puede deducir fácilmente de la expresión explícita:

$$(\alpha, \omega) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{2|\mu|x(0)^2}, +\infty \right) & \mu < 0 \\ \left(-\infty, \frac{1}{2\mu x(0)^2} \right) & \mu > 0 \end{cases}$$

Definición 2.1.2. Sea $x(t)$ solución de (2.1.1) en un intervalo $t \in I_x$. Se dice que $y(t)$ es una prolongación de $x(t)$ si $y(t)$ es solución de (2.1.1) en un intervalo I_y con $I_x \subset I_y$ y, además, $y(t) = x(t)$, $t \in I_x$.

Así, la solución $x(t)$, definida en el intervalo I_a y obtenida por el método de aproximaciones sucesivas, se puede prolongar a un intervalo más amplio como sigue: ponemos $t_1 = t_0 + a$, $x_1 = x(t_1)$. Entonces, el pvi

$$x' = f(x), \quad x(t_1) = x_1,$$

tiene, por el teorema 2.1.2, solución única $x_1(t)$ en un intervalo $[t_1 - a_1, t_1 + a_1]$, $a_1 > 0$. Por unicidad, se tiene que $x_1(t) = x(t)$ si $t \in [\alpha, t_0 + a]$, siendo $\alpha = \max\{t_0 - a, t_1 - a_1\}$. Por tanto

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \in I_a \\ x_1(t) & t \in [t_0 + a, t_0 + a + a_1], \end{cases}$$

es una prolongación de la solución $x(t)$ por la derecha. (Consideraciones análogas se pueden hacer por la izquierda.)

¿Hasta dónde es posible continuar este proceso?

Definición 2.1.3. Se dice que $x(t)$ es una solución maximal del pvi (2.1.2) si no admite ninguna prolongación.

Es claro que el intervalo de definición de una solución maximal (o intervalo maximal) ha de ser abierto; en otro caso, se razonaría como antes para obtener una prolongación a partir de uno de los extremos. Por otro lado, se tiene (cf. [21]):

Teorema 2.1.3. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$. Entonces, para cada $x_0 \in D$, el pvi (2.1.2) admite una única solución maximal $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, definida en un intervalo $(\alpha, \omega) = (\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0))$.

La demostración del teorema 2.1.3 no proporciona sin embargo estimaciones del intervalo maximal de existencia (α, ω) . Alguna información adicional sobre el sistema de EDOs puede dar, a su vez, alguna información sobre dicho intervalo, a partir del siguiente resultado, [21]:

Teorema 2.1.4. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$, (α, ω) el intervalo maximal de existencia de la solución $x(t)$ de (2.1.2). Supongamos que $\omega < \infty$. Entonces, dado un compacto $K \subset D$, existe $t \in (\alpha, \omega)$ tal que $x(t) \notin K$.

Corolario 2.1.5. En las condiciones del teorema 2.1.4:

- Si existe

$$\bar{x} = \lim_{t \rightarrow \omega^-} x(t),$$

entonces $\bar{x} \in \bar{D}$.

- Supongamos que existe un compacto $K \subset D$ tal que

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \exists t \in (\alpha, \omega) / y = x(t)\} \subset K.$$

Entonces $\omega = \infty$.

Teorema 2.1.6. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(D)$, $x_0 \in D$. Supongamos que (2.1.2) tiene una solución $x(t, t_0, x_0)$, definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, existen $\delta, K > 0$ tales que para todo $y \in B(x_0, \delta)$ el pvi

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = y.$$

tiene solución única $x(t, y)$, definida en $[a, b]$ verificando

$$\|x(t, y) - x(t, x_0)\| \leq \delta e^{K|t-t_0|},$$

con

$$\lim_{y \rightarrow x_0} x(t, y) = x(t, x_0),$$

uniformemente para todo $t \in [a, b]$.

2.1.2. Dependencia de las condiciones iniciales

El estudio de la segunda propiedad asociada al carácter de bien puesto de (2.1.2) está basado en el resultado siguiente:

Teorema 2.1.7. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, con $x_0 \in D$, $f \in C^1(D)$. Entonces, existen $a, \delta > 0$ tales que, para todo $y \in B(x_0, \delta)$ el pvi*

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = y, \quad (2.1.9)$$

tiene solución única $x(t, y)$ con $x \in C^1(I_a \times B(x_0, \delta))$, $x(\cdot, y) \in C^2(I_a)$ para todo $y \in B(x_0, \delta)$.

Demostración. La demostración de la existencia de una única solución $x : I_a \rightarrow \mathcal{R}^n$ de (2.1.9) con $x \in C^2(I_a)$ para cada $y \in B(x_0, \delta)$ hace de nuevo uso del método de aproximaciones sucesivas y de que $f \in C^1(D)$. La comprobación de que $x(\cdot, y)$ es diferenciable con continuidad en $B(x_0, \delta)$ requiere, además, utilizar el lema de Gronwall sobre la función

$$g(t) = \|x(t, y) - x(t, y + h) + \Phi(t, y)h\|,$$

donde $h > 0$ es tal que $y, y + h \in B(x_0, \delta)$, $\Phi(t, y)$ es la matriz fundamental solución del pvi

$$\Phi' = f'(x(t, y))\Phi, \quad \Phi(t_0, y) = I,$$

con I la matrix identidad $n \times n$ y $f'(x)$ la matriz jacobiana en x . Véase, e. g. [21, 16] para los detalles. $\square$

2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

En muchos modelos suele haber comportamientos estacionarios y que tienen un significado especial en su interpretación y dinámica. Si el fenómeno a estudio viene descrito por un sistema de EDOs como (2.1.1), tales estados estacionarios se identifican con soluciones constantes o puntos de equilibrio $\tilde{x}$, verificando entonces que $f(\tilde{x}) = 0$. La importancia de tales estados en el modelo suele proceder del comportamiento del resto de las soluciones con respecto a ellos. Por ejemplo, si aquéllas que comienzan próximas al equilibrio permanecen próximas en todo instante posterior, el estado estacionario ofrece un carácter estable, de interés para interpretar el fenómeno representado por (2.1.1).

Definición 2.2.1. *Sea $\tilde{x}$ un punto de equilibrio de (2.1.1). Se dice que $\tilde{x}$ es estable si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in \overline{B(\tilde{x}, \delta)}$ la solución $x(t, t_0, x_0) = x(t)$ de (2.1.2) satisface*

$$\|x(t) - \tilde{x}\| \leq \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

En otro caso, se dice que $\tilde{x}$ es inestable. Se dice que $\tilde{x}$ es asintóticamente estable si es estable y δ se puede elegir de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{x}.$$

El concepto de estabilidad queda ilustrado en las figuras 2.1 y 2.2 para los casos escalar y de un sistema plano, respectivamente.

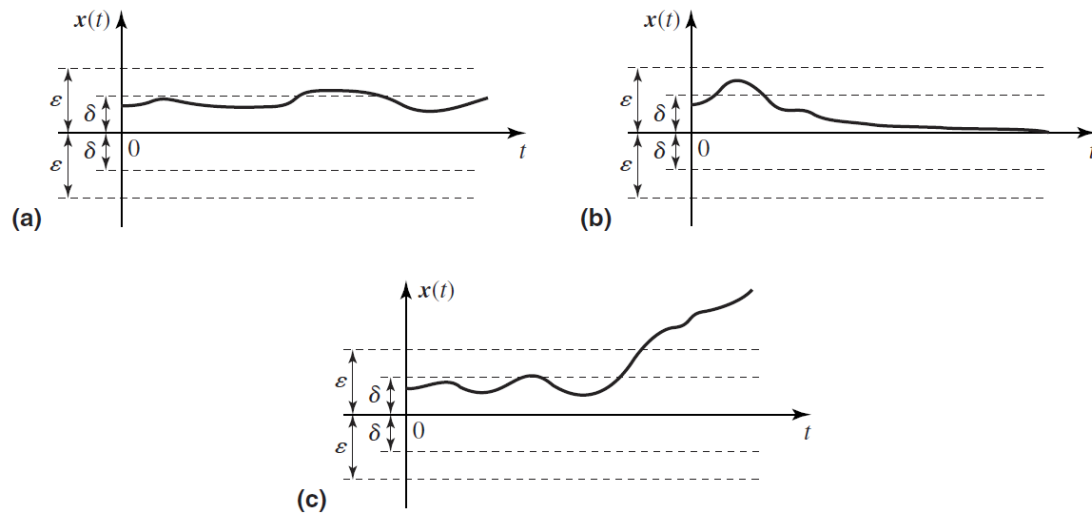


Figura 2.1: Ilustración de la estabilidad en el caso escalar: (a) equilibrio estable; (b) equilibrio asintóticamente estable; (c) equilibrio inestable.

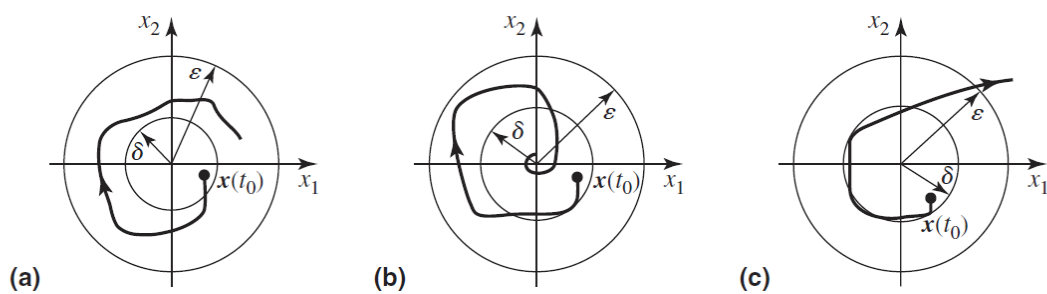


Figura 2.2: Ilustración de la estabilidad en un sistema plano: (a) equilibrio estable; (b) equilibrio asintóticamente estable; (c) equilibrio inestable.

2.2.1. Estabilidad para sistemas lineales

Estudiamos primero cómo caracterizar el concepto de estabilidad en sistemas (2.1.1) lineales

$$x' = Ax, \quad (2.2.1)$$

con $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular, de modo que el origen $\tilde{x} = 0$ es el único equilibrio. (Si A es singular, todos los elementos del núcleo de A son equilibrios. Al analizar la estabilidad de uno $\tilde{x}$ de ellos, hay que estimar la diferencia $\|x(t, x_0) - \tilde{x}\|$ cuando $\|x_0 - \tilde{x}\|$ es pequeño. Pero, por linealidad, $z(t) = x(t) - \tilde{x}$ es solución de (2.2.1) con $z(0) = x_0 - \tilde{x}$, con lo que las propiedades de estabilidad de un equilibrio $\tilde{x} \neq 0$ son las mismas que las del origen.)

Teorema 2.2.1. *$\tilde{x} = 0$ es un equilibrio estable de (2.2.1) si y sólo si todas las soluciones del sistema están acotadas para $t \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que todas las soluciones del sistema (2.2.1) están acotadas. Sea $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$; entonces, si $e_1, \dots, e_n$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, del ejemplo 2.1 existen $M_1, \dots, M_n$ tales que

$$\begin{aligned} \|e^{tA}x_0\| &= \|x_1^0 e^{tA}e_1 + \dots + x_n^0 e^{tA}e_n\| \\ &\leq \|e^{tA}e_1\| |x_1^0| + \dots + \|e^{tA}e_n\| |x_n^0| \\ &\leq M_1 |x_1^0| + \dots + M_n |x_n^0| \leq M \|x_0\|, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

para $t \geq 0$ y donde $M = \max\{M_1, \dots, M_n\}$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, si $\|x_0\| \leq \epsilon/M$, (2.2.2) implica que la solución de (2.2.1) con $x(0) = x_0$ satisface $\|e^{tA}x_0\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq 0$, por lo que el origen es estable.

Supongamos ahora que el origen es estable y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_0\| \leq \delta$, la solución $x(t, x_0)$ de (2.2.1) con $x(0) = x_0$ verifica $\|x(t, x_0)\| \leq \epsilon$, $t \geq 0$. Sea $x(t)$ una solución no nula de (2.2.1) y sea

$$z(t) = \frac{\delta}{\|x(0)\|} x(t).$$

Entonces, $z(t)$ es solución de (2.2.1) con $\|z(0)\| = \delta$. Por hipótesis, se tiene que entonces $\|z(t)\| \leq \epsilon$, $t \geq 0$ y, por tanto, $x(t)$ está acotada para todo $t \geq 0$. $\square$

A partir de este resultado, podemos obtener la caracterización de la estabilidad en función del tipo de espectro de la matriz A .

Corolario 2.2.2. *El origen es un equilibrio estable de (2.2.1) si y sólo si $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ para todo autovalor λ de A y si $\operatorname{Re} \lambda = 0$, entonces coinciden las multiplicidades geométrica y algebraica de λ .*

El origen es un equilibrio asintóticamente estable de (2.2.1) si y sólo si $\operatorname{Re} \lambda < 0$ para todo autovalor λ de A .

2.2.2. Estabilidad de sistemas no lineales. Linealización

Por definición, la estabilidad de un equilibrio $\tilde{x}$ de un sistema no lineal (2.1.1) requiere analizar el comportamiento de las soluciones inicialmente próximas a $\tilde{x}$. Esto encaja con la idea de aproximar (2.1.1) localmente por otro más sencillo que permita estudiar la estabilidad de $\tilde{x}$.

Definición 2.2.2. Se dice que un equilibrio $\tilde{x}$ de (2.1.1) es hiperbólico si ninguno de los autovalores de la matriz jacobiana en $\tilde{x}$, $f'(\tilde{x})$, tiene parte real nula. El sistema lineal

$$x' = Ax, \quad A = f'(\tilde{x}), \quad (2.2.3)$$

se llama linealización de (2.1.1) en $\tilde{x}$.

Si $\tilde{x} = 0$ es un equilibrio de (2.1.1), por el teorema de Taylor, $f'(0)x$ es una primera aproximación a $f(x)$ cerca de $\tilde{x} = 0$, de modo que, en principio, parece razonable esperar que el comportamiento de (2.1.1) cerca de $\tilde{x} = 0$ pueda aproximarse por el de su linealización en $\tilde{x} = 0$. Veremos que esto es así cuando $\tilde{x} = 0$ es hiperbólico. Para $\tilde{x} \neq 0$ y x cerca de $\tilde{x}$, entonces $f(x)$ puede aproximarse por $f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$, y (2.1.1) se aproxima localmente por

$$y' = f'(\tilde{x})y, \quad (2.2.4)$$

a través del cambio de variable $y = x - \tilde{x}$, de manera que el comportamiento de (2.1.1) cerca de $\tilde{x}$ puede explicarse a partir del de (2.2.4) cerca de $\tilde{y} = 0$, cuando $\tilde{x}$ es hiperbólico.

Definición 2.2.3. Denotemos por $\sigma(A)$ al espectro de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se dice que un equilibrio $\tilde{x}$ de (2.1.1) es:

- Un sumidero (o atractor) si $\operatorname{Re} \lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(f'(\tilde{x}))$.
- Una fuente si $\operatorname{Re} \lambda > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(f'(\tilde{x}))$.
- Un punto de silla si $\tilde{x}$ es hiperbólico y existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(f'(\tilde{x}))$ con $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0 < \operatorname{Re} \lambda_2$.

(Esta clasificación puede analizarse con más detalle en el caso de sistemas planos, véase la sección 2.5.)

En las siguientes secciones describiremos dos resultados importantes para estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema (2.1.1) cerca de un equilibrio.

2.3. Teorema de la variedad estable

Consideremos un sistema (2.2.1) con equilibrio hiperbólico $\tilde{x}$ (que asumimos cero para simplificar el siguiente razonamiento), y sea $B = P^{-1}AP$ una forma canónica real de A con los bloques elementales en el orden

$$B = \begin{pmatrix} B_s & & \\ (\operatorname{Re} \lambda < 0) & & \\ & B_u & \\ & (\operatorname{Re} \lambda > 0) & \end{pmatrix},$$

correspondientes a los autovalores con parte real negativa (B_s) y luego los correspondientes a los autovalores con parte real positiva (B_u) de tamaños n_s y $n_u = n - n_s$, respectivamente. El cambio $x = Py$ lleva (2.2.1) al sistema canónico

$$y' = By.$$

Sean

$$\tilde{E}^s = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n_s}\}, \quad \tilde{E}^u = \operatorname{span}\{e_{n_s+1}, \dots, e_n\},$$

con $e_j = (0, \dots, 1^j, \dots, 0)^T$. Al deshacer el cambio de variables $x = Py$, las soluciones $x(t)$ de (2.2.1) correspondientes a condiciones iniciales en el subespacio

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Py, y \in \tilde{E}^s\},$$

satisfacen $\|x(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. E^s se llama subespacio estable de (2.2.1) y está generado por los vectores $v_j = Pe_j, j = 1, \dots, n_s$, que son autovectores generalizados asociados a los autovalores de A con parte real negativa. Análogamente, las soluciones $x(t)$ de (2.2.1) correspondientes a condiciones iniciales en el subespacio

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Py, y \in \tilde{E}^u\},$$

satisfacen $\|x(t)\| \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$. E^u se llama subespacio inestable de (2.2.1) y está generado por los vectores $v_j = Pe_j, j = 1, \dots, n_s$, que son autovectores generalizados asociados a los autovalores de A con parte real positiva.

Se puede comprobar que el comportamiento de un sistema hiperbólico sobre el subespacio estable E^s es el de un atractor y sobre el subespacio inestable E^u el de una fuente. Las trayectorias correspondientes a puntos que no están ni en E^s ni en E^u , de alejan del origen tanto para $t \rightarrow \infty$ como para $t \rightarrow -\infty$. El origen será un atractor si $E^u = \emptyset$, una fuente si $E^s = \emptyset$ y un punto de silla si $E^s, E^u \neq \emptyset$.

El objetivo del teorema de la variedad estable consiste en mostrar que cerca de un equilibrio hiperbólico $\tilde{x}$, el sistema (2.1.1) tiene variedades estables, S y U , tangentes en $\tilde{x}$ a los subespacios E^s, E^u , de la linealización en $\tilde{x}$ dada por (2.2.3), con las mismas dimensiones, positiva y negativamente invariantes por las soluciones en (2.2.3) resp. y con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \tilde{x}, \quad x_0 \in S, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0) = \tilde{x}, \quad x_0 \in U.$$

Definición 2.3.1. Sea X un espacio métrico, U y V dos subespacios de X . Un homeomorfismo de U en V es una aplicación continua y biyectiva $h : U \rightarrow V$ con $h^{-1} : V \rightarrow U$ continua. Se dice entonces que U y V son topológicamente equivalentes.

Definición 2.3.2. Una variedad diferenciable n -dimensional M es un espacio métrico conexo, con un recubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}_\alpha$, tal que

1. Para todo α , existe un homeomorfismo

$$h_\alpha : U_\alpha \rightarrow V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

2. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces

$$h = h_\alpha \circ h_\beta : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es diferenciable con $\det h'(x) \neq 0$ para todo $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Teorema 2.3.1. (Variedad estable.) Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\tilde{x} \in D$, $f \in C^1(D)$ con $f(\tilde{x}) = 0$ y $f'(\tilde{x})$ con k autovalores de parte real negativa, $n - k$ autovalores de parte real positiva. Entonces:

1. Existe una variedad diferenciable k -dimensional S , tangente al subespacio estable E^s de (2.2.3) en $\tilde{y} = 0$, positivamente invariante por las soluciones de (2.1.1) y tal que si $x_0 \in S$, la solución $x(t, x_0)$ de (2.1.2) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \tilde{x}.$$

2. Existe una variedad diferenciable $n - k$ -dimensional U , tangente al subespacio inestable E^u de (2.2.3) en $\tilde{y} = 0$, negativamente invariante por las soluciones de (2.1.1) y tal que si $x_0 \in U$, la solución $x(t, x_0)$ de (2.1.2) satisface

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0) = \tilde{x}.$$

Demostración. Véanse, por ejemplo, [21, 12]. □

Las variedades estable e inestable del teorema 2.3.1 tienen un carácter local; pueden definirse de forma global incorporando las trayectorias que parten de $y \in S$ para $t \leq 0$ y las que parten de $y \in U$ para $t \geq 0$, véase [21] para los detalles.

Corolario 2.3.2. *Bajo las condiciones del teorema 2.3.1, sean S y U son las variedades estable e inestable de (2.1.1) en $\tilde{x}$ y supongamos que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que*

$$\operatorname{Re} \lambda_j < -\alpha < 0 < \beta < \operatorname{Re} \lambda_m,$$

para $j = 1, \dots, k, m = k + 1, \dots, n$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in B(\tilde{x}, \delta) \cap S$

$$\|x(t, x_0)\| \leq \epsilon e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

y si $x_0 \in B(\tilde{x}, \delta) \cap U$

$$\|x(t, x_0)\| \leq \epsilon e^{\beta t}, \quad t \leq 0.$$

2.4. Teorema de Hartman-Grobman

El segundo resultado sobre teoría cualitativa local de EDOs que mencionamos establece que cerca de un equilibrio hiperbólico $\tilde{x}$, el sistema no lineal (2.1.1) tiene la misma estructura cualitativa que el linealizado (2.2.3) cerca del origen. La demostración puede leerse en, por ejemplo, [21].

Definición 2.4.1. *Se dice que los sistemas (2.1.1) y (2.2.3) son topológicamente equivalentes cerca de los equilibrios $\tilde{x}$ e $\tilde{y} = 0$ si existen abiertos U con $\tilde{x} \in U$ y V con $0 \in V$, así como un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que:*

1. lleva trayectorias de (2.1.1) que pasan por U en trayectorias de (2.2.3) que pasan por V ;
2. preserva la orientación en el sentido de que si una trayectoria en U va de x_1 a x_2 , entonces su imagen en V va de $h(x_1)$ a $h(x_2)$.

Teorema 2.4.1. (Teorema de Hartman-Grobman.) *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\tilde{x} \in D$, $f \in C^1(D)$ con $f(\tilde{x}) = 0$ y tal que $\tilde{x}$ es hiperbólico. Entonces, existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ de un abierto U con $\tilde{x} \in U$ en un abierto V con $0 \in V$ tal que para cada $x_0 \in U$ existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$ verificando que si $x(t, t_0, x_0)$ es solución de (2.1.2), se tiene:*

$$h(x(t, t_0, x_0)) = e^{(t-t_0)A} h(x_0),$$

es decir, h aplica trayectorias de (2.1.1) cerca de $\tilde{x}$ en trayectorias de (2.2.3) cerca del origen y preservando la parametrización (en particular, la orientación y el comportamiento asintótico).

2.5. Estabilidad de los puntos de equilibrio

2.5.1. Caracterización de la estabilidad en el caso hiperbólico

De los teoremas 2.3.1 y 2.4.1 y a partir de la definición 2.2.3, se sigue que cualquier equilibrio atractor de (2.1.1) es asintóticamente estable, mientras que los equilibrios fuente y punto de silla son inestables. En particular, todo equilibrio hiperbólico es o bien asintóticamente estable o bien inestable. El corolario 2.3.2 proporciona información adicional sobre el comportamiento de las soluciones cerca de un atractor.

Teorema 2.5.1. *Si $\tilde{x}$ es un equilibrio atractor de (2.1.1) y $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha < 0$ para todo autovalor λ de $f'(\tilde{x})$, entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in B(\tilde{x}, \delta)$, la solución $x(t, t_0, x_0)$ de (2.1.2) satisface*

$$\|x(t, t_0, x_0) - \tilde{x}\| \leq \epsilon e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Puesto que los equilibrios hiperbólicos son o bien asintóticamente estables o bien inestables, la única posibilidad de tener un equilibrio estable no asintóticamente estable se da cuando $f'(\tilde{x})$ tiene al cero como autovalor o dos autovalores imaginarios puros conjugados; más específicamente, cf. [14, 9, 16]:

Teorema 2.5.2. *Si $\tilde{x}$ es un equilibrio estable de (2.1.1), entonces ningún autovalor de $f'(\tilde{x})$ tiene parte real positiva.*

Por tanto, la existencia de equilibrios estables no asintóticamente estables nos lleva necesariamente al caso no hiperbólico. El estudio general de la estabilidad entonces requiere de otros procedimientos, como la teoría de Liapunov. Como no es un tema necesario para los contenidos de este trabajo, remitimos al lector interesado a referencias clásicas como [12, 13].

2.5.2. Puntos de equilibrio de sistemas planos

En el caso de sistemas planos, es posible completar el resultado del teorema de Hartman-Grobman con información adicional sobre cómo se acercan o alejan las trayectorias con respecto a los equilibrios. Este tipo de informaciones suele tener importancia en las aplicaciones y en esta sección revisaremos las más relevantes para nuestro estudio en el capítulo 3. Los detalles pueden consultarse, por ejemplo, en [21, 9, 18, 20].

En lo que se refiere a la conservación del carácter de un equilibrio al pasar de la aproximación lineal (2.2.3) al sistema no lineal (2.1.1), ya sabemos que, como consecuencia de los teoremas 2.3.1 y 2.4.1, todo equilibrio hiperbólico mantiene su carácter. En el caso de equilibrios no hiperbólicos elementales, la conservación del carácter depende de la parte no lineal de f , si bien las alternativas son limitadas.

En lo que sigue suponemos que un equilibrio $\tilde{x}$ de (2.1.1) con $n = 2$ es elemental, de modo que $f'(\tilde{x})$ es no singular, y que, tras la correspondiente traslación al origen de $\tilde{x}$ el sistema (2.1.1) queda en la forma

$$x' = Ax + R(x), \quad A = f'(0), \quad R = (R_1, R_2)^T, \quad (2.5.1)$$

con R de clase C^1 en un abierto que contiene al origen,

$$R_i(0) = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}(0) = 0, i, j = 1, 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_i(x)}{\|x\|} = 0, i = 1, 2.$$

Las posibles configuraciones del diagrama de fases del linealizado

$$x' = Ax, \quad (2.5.2)$$

depende del espectro de A , identificable a partir de la correspondiente estructura de la base canónica. Las configuraciones están esquematizadas en la figura 2.3

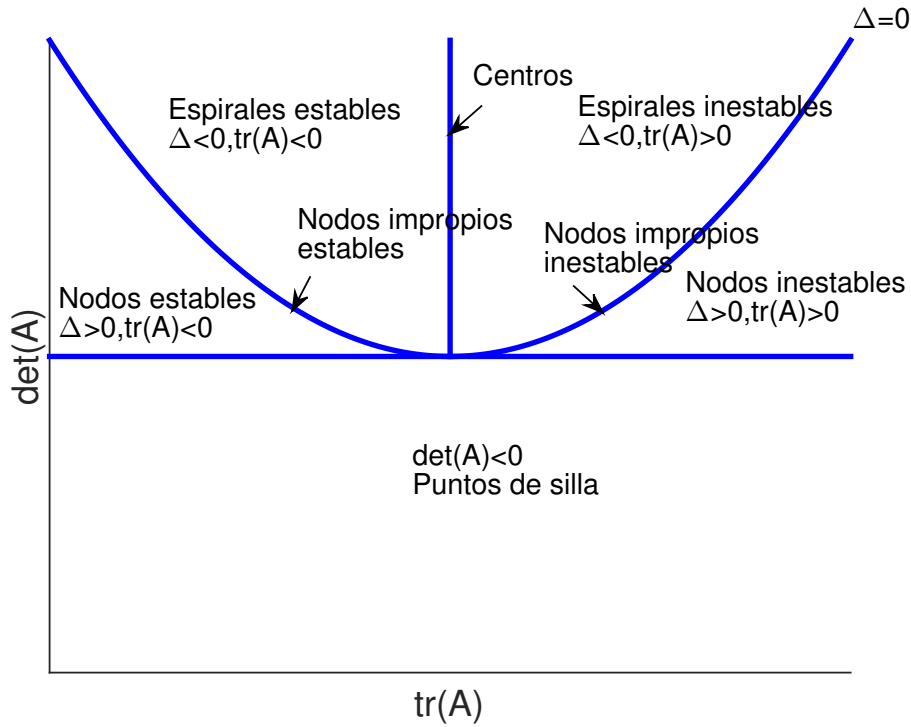


Figura 2.3: Estabilidad en el plano traza-determinante con $\Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A$.

En lo que sigue comentaremos algunos detalles de la conservación de la configuración al pasar del sistema lineal al no lineal cerca del origen.

Focos

Supongamos que A tiene dos autovalores complejos conjugados $a \pm bi$, con $a \neq 0$. Las trayectorias de (2.5.2) son espirales logarítmicas, descritas en forma polar

$$r(t) = r_0 e^{at}, \quad \theta(t) = \theta_0 - bt,$$

y el origen es un foco, estable si $a < 0$ ($r(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$) e inestable si $a > 0$ ($r(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow -\infty$). El valor b representa la velocidad angular con la que se recorre la espiral (en el sentido horario si $b > 0$ y antihorario si $b < 0$; asumimos a partir de ahora que $b > 0$). El cambio de variable $x = Py$ que lleva (2.5.2) al sistema canónico $y' = By$, $B = P^{-1}AP$, transforma el sistema (2.5.1) en

$$y' = By + Q(y), \quad Q(y) = P^{-1}R(Py), \quad (2.5.3)$$

con

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{Q_i(y)}{\|y\|} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Pasando a polares, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} r' &= ar + \rho(r, \theta), \\ \theta' &= -b + \frac{1}{r}\omega(r, \theta), \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

en un entorno reducido del origen ($r \neq 0$) con

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho(r, \theta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega(r, \theta)}{r} = 0.$$

Entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $r \leq \delta$

$$|\rho(r, \theta)| \leq \frac{|a|}{2}r, \quad |\omega(r, \theta)| \leq \frac{|b|}{2}r.$$

Si $a < 0$ y $r \leq \delta$, se tiene entonces que

$$r' \leq ar - \frac{a}{2}r = \frac{a}{2}r, \quad \theta' \leq -b + \frac{b}{2} = -\frac{b}{2}. \quad (2.5.5)$$

sea $(r(t), \theta(t))$ una solución de (2.5.4) con $r(0) \leq \delta$. Entonces, de (2.5.5), r es estrictamente decreciente con

$$r(t) \leq r(0)e^{at/2},$$

de donde $r(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Análogamente, de (2.5.5) se tiene que para $t \geq 0$, θ es estrictamente decreciente con $\theta(t) \leq -\frac{b}{2}t + \theta(0)$, de donde $\theta(t) \rightarrow -\infty$ si $t \rightarrow \infty$. Por tanto, la trayectoria $(r(t), \theta(t))$ que comienza cerca del origen se acerca a él en forma espiral y sentido horario (suponiendo que $b > 0$).

Si $a > 0$, el mismo razonamiento lleva a que, en lugar de (2.5.5), se tiene

$$r' \geq ar - \frac{a}{2}r = \frac{a}{2}r, \quad \theta' \leq -b + \frac{b}{2} = -\frac{b}{2},$$

de donde $r(t) \geq r(0)e^{at/2}$, $t \geq 0$, mientras $r(t) \leq \delta$, lo que implica que toda trayectoria no nula tal que $r(0) \leq \delta$ sale del círculo de radio δ . Por otro lado, integrando entre 0 y $t < 0$ se tiene que $r(t) \leq r(0)e^{at/2}$, $t \leq 0$, lo que implica que $r(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow -\infty$. A su vez

$$\theta(t) \geq -\frac{b}{2}t + \theta(0), \quad t \leq 0,$$

de donde $\theta(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow -\infty$, y la trayectoria se aleja del origen en sentido horario.

El comportamiento de la trayectoria justifica entonces la siguiente definición: se dice que $\tilde{x} = 0$ es un foco o punto espiral estable (resp. inestable) de (2.5.1) si existe $\delta > 0$ tal que toda trayectoria $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ con $\|x(0)\| \leq \delta$ está definida para todo $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$) y verifica

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad |\theta(t)| = \left| \arctg \frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right| \rightarrow \infty,$$

si $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$). El razonamiento anterior nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 2.5.3. *Si el origen es un foco para (2.5.2), también lo es para (2.5.1), conservándose el tipo de estabilidad.*

Nodos

Si A tiene dos autovalores reales del mismo signo, su forma canónica es de uno de estos tres tipos:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.5.6)$$

En el primer caso, el origen es un nodo para la aproximación lineal (2.5.2): las trayectorias $x(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$ entran en el origen (cuando $t \rightarrow \infty$ si es un nodo estable y cuando $t \rightarrow -\infty$ si es inestable) por cada lado, tangentes al autoespacio del autovalor de menor valor absoluto, excepto las dos que lo hacen por cada lado del autoespacio asociado al otro autovalor. Se puede demostrar que la configuración se mantiene para el sistema no lineal (2.5.1), [9, 21];

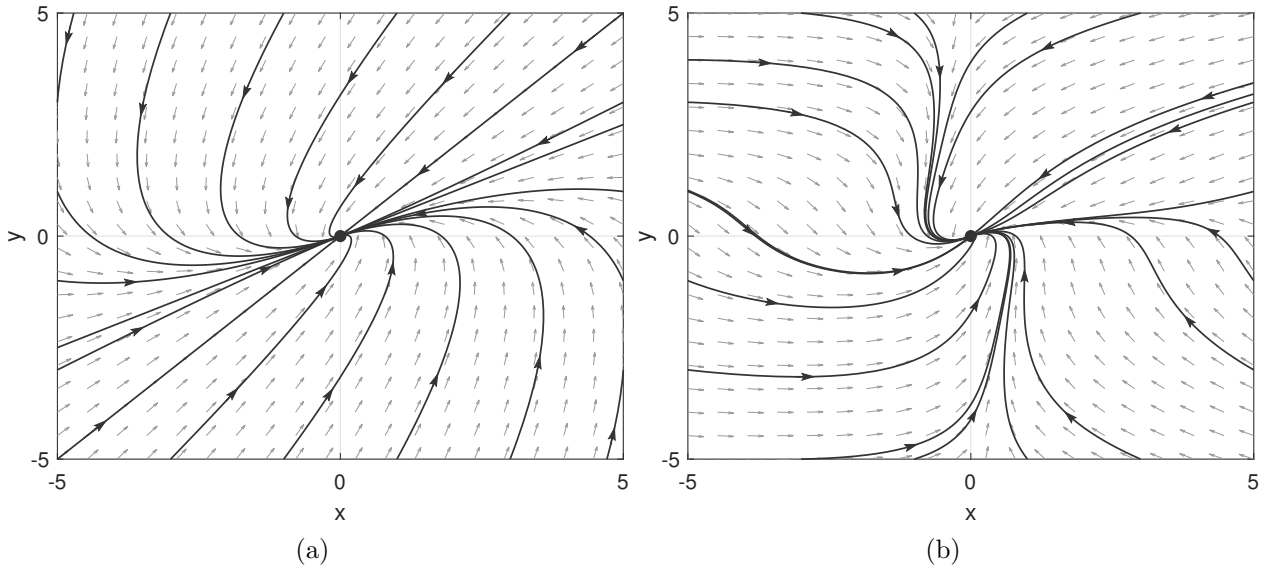


Figura 2.4: (a) Nodo (estable) en el sistema (2.5.2); (b) Nodo (estable) en el sistema (2.5.1).

véase figura 2.4.

Teorema 2.5.4. *Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, todas las trayectorias de (2.5.1) que comienzan cerca del origen entran en él cuando $t \rightarrow \infty$ en una de las cuatro direcciones determinadas por los autoespacios de λ_1 y λ_2 . Hay una sola trayectoria que entra en el origen en cada una de las dos direcciones determinadas por el autoespacio asociado a λ_2 , mientras que hay infinitas que lo hacen tangentes a cada una de las dos direcciones determinadas por el autoespacio de λ_1 , como autovalor de menor valor absoluto.*

Si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, hay una sola trayectoria que entra en origen, cuando $t \rightarrow -\infty$, tangente a cada una de las direcciones determinadas por el autoespacio asociado a λ_1 , e infinitas que lo hacen tangentes a cada una de las dos direcciones determinadas por el autoespacio asociado a λ_2 , como autovalor de menor valor absoluto.

En el caso de una forma canónica B del segundo tipo en (2.5.6), el origen es un nodo estrella para la aproximación lineal (2.5.2): para cada $m \in \mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, hay dos trayectorias (una por cada lado) que entran en el origen con pendiente m (cuando $t \rightarrow \infty$ si $\lambda < 0$ y cuando $t \rightarrow -\infty$ si $\lambda > 0$). En general, es necesario imponer algo más de regularidad a (2.5.1) para asegurar la conservación de esta configuración (figura 2.5(a)).

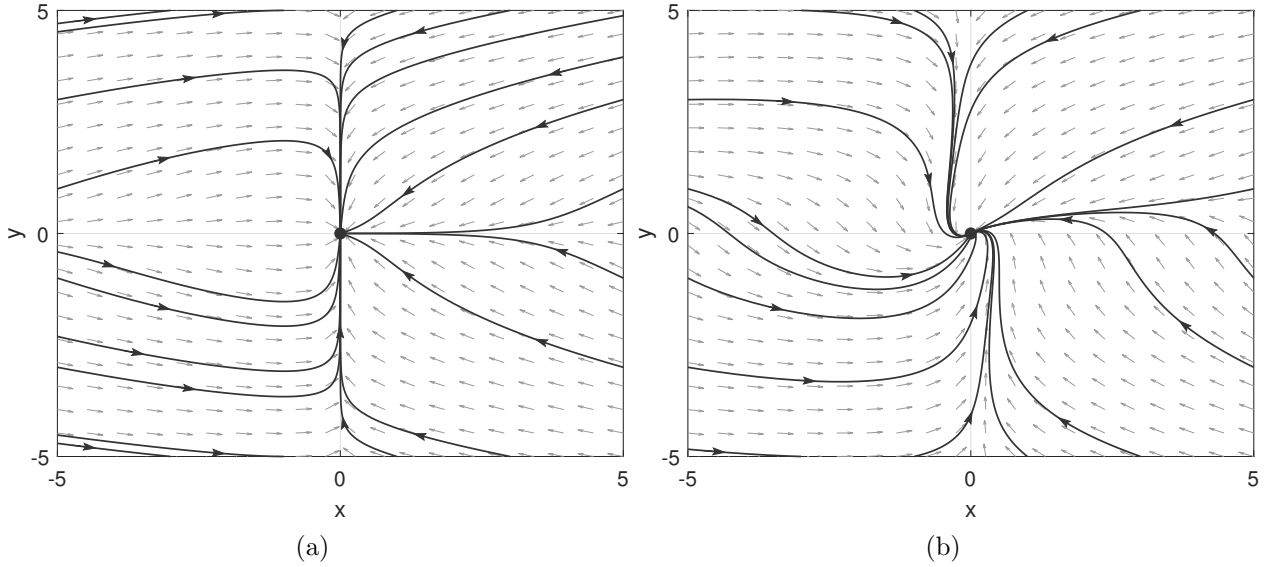


Figura 2.5: (a) Nodo estrella (estable) en el sistema (2.5.1); (b) Nodo impropio (estable) en el sistema (2.5.1).

Teorema 2.5.5. *Supongamos que en (2.5.1) la matriz A tiene un autovalor doble de multiplicidad geométrica dos. Si las funciones R_i son de clase C^2 en un entorno del origen, entonces las trayectorias del sistema (2.5.1) que comienzan cerca del origen entran en él, cuando $t \rightarrow \infty$ si $\lambda < 0$ y cuando $t \rightarrow -\infty$ si $\lambda > 0$, con pendiente $m \in \overline{\mathbb{R}}$; para cada uno de los dos ángulos θ^* tales que $\tan \theta^* = m$ hay exactamente una trayectoria que entra con ángulo θ^* .*

Si la forma canónica es del tercer tipo en (2.5.6), la configuración del diagrama de fase cerca del origen se mantiene al pasar de (2.5.2) a (2.5.1) bajo las condiciones de regularidad del teorema 2.5.5.

Teorema 2.5.6. *Supongamos que en (2.5.1) la matriz A tiene un autovalor doble de multiplicidad geométrica uno. Si las funciones R_i son de clase C^2 en un entorno del origen, entonces las trayectorias del sistema (2.5.1) que comienzan cerca del origen entran en él, cuando $t \rightarrow \infty$ si $\lambda < 0$ y cuando $t \rightarrow -\infty$ si $\lambda > 0$, tangentes a una de las dos direcciones determinadas por el autoespacio asociada al autovalor, habiendo infinitas para cada una de dichas direcciones (cf. figura 2.5(b)).*

Definición 2.5.1. *Se dice que el origen es un nodo estable (resp. inestable) como equilibrio de (2.5.1) si existe $\delta > 0$ tal que toda trayectoria $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \neq 0$ con $\|x(0)\| \leq \delta$, está definida para todo $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$), verifica que $\|x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$) y entra en el origen con pendiente bien definida.*

Puntos de silla

Si A tiene dos autovalores reales de signos opuestos (digamos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$), el origen es un punto de silla para la aproximación lineal (2.5.2): hay dos trayectorias (semirrectas $\gamma_i, i = 1, 2$) que se aproximan al origen cuando $t \rightarrow \infty$ y otras dos $\gamma_j, j = 3, 4$, que lo hacen cuando $t \rightarrow -\infty$; todas las demás (excepto el origen) se alejan de él cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Por otro lado:

- $E^s = \gamma_1 \cup \{0\} \cup \gamma_2$ es el subespacio estable de (2.5.2) y coincide con el autoespacio asociado al autovalor $\lambda_2 < 0$.

- $E^u = \gamma_3 \cup \{0\} \cup \gamma_4$ es el subespacio estable de (2.5.2) y coincide con el autoespacio asociado al autovalor $\lambda_1 > 0$.

Esta configuración, cerca del origen, se mantiene para (2.5.1):

Teorema 2.5.7. *Supongamos que en (2.5.1) la matriz A tiene dos autovalores reales de signos opuestos ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$). Entonces, además del origen, existe $\delta > 0$ tal que las trayectorias que se inician en $B(0, \delta)$ se comportan como sigue (cf. figura 2.6):*

- (i) *Existe una curva S que pasa por el origen tal que la semitrayectoria positiva (o solución para $t \geq 0$) a partir de cualquier punto de $S \cap B(0, \delta)$ (variedad estable local) está contenida en $S \cap B(0, \delta)$ y tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que la semitrayectoria negativa (o solución para $t \leq 0$) sale de $B(0, \delta)$ para t decreciente.*
- (ii) *Existe una curva U que pasa por el origen tal que la semitrayectoria negativa a partir de cualquier punto de $U \cap B(0, \delta)$ (variedad inestable local) está contenida en $U \cap B(0, \delta)$ y tiende al origen cuando $t \rightarrow -\infty$, mientras que la semitrayectoria positiva sale de $B(0, \delta)$ para t creciente.*
- (iii) *La trayectoria de cualquiera de los puntos de $B(0, \delta)$ que no está en $S \cup U$ sale de $B(0, \delta)$ tanto para t creciente como para t decreciente.*
- (iv) *S tiene por tangente en el origen la recta E^s y U la recta E^u .*

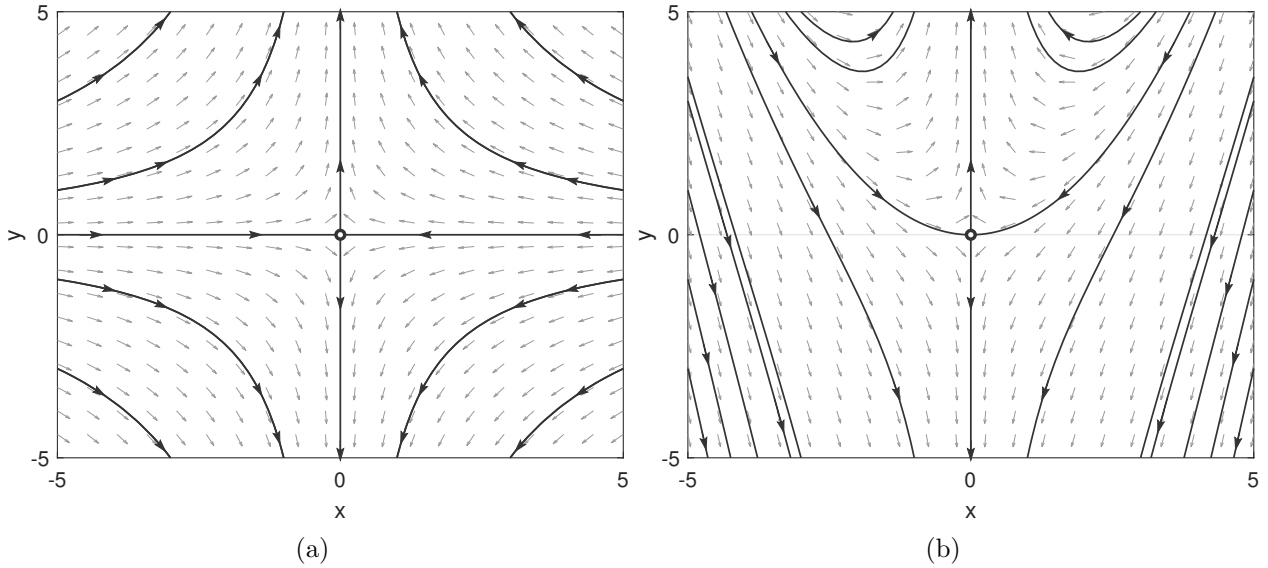


Figura 2.6: (a) Punto de silla en el sistema (2.5.2); (b) Punto de silla en el sistema (2.5.1).

Si adoptamos como definición de punto de silla la dada por las propiedades (i)-(iii) del teorema 2.5.7, entonces se tiene que si $\tilde{y} = 0$ es punto de silla para la aproximación lineal (2.2.3), entonces $\tilde{x}$ es punto de silla para (2.1.1). Además, localmente, hay dos trayectorias que entran en el origen cuando $t \rightarrow \infty$ con la pendiente del autoespacio asociado al autovalor negativo y otras dos que lo hacen cuando $t \rightarrow -\infty$ con la pendiente del autoespacio asociado al autovalor positivo, cf. figura 2.6.

Centros

Si los autovalores de A son imaginarios ($\pm ib, b > 0$), el origen no es hiperbólico y es un centro como equilibrio de (2.5.2); las trayectorias son, aparte del origen, curvas cerradas (elipses) que lo rodean y que corresponde a soluciones periódicas. El sistema canónico (2.5.3) asociado a (2.5.1) es

$$y'_1 = by_2 + Q_1(y), \quad y'_2 = -by_1 + Q_2(y),$$

con su equivalente en polares

$$\begin{aligned} r' &= \rho(r, \theta), \\ \theta' &= -b + \frac{1}{r}\omega(r, \theta). \end{aligned}$$

La ecuación para θ es la misma que en el caso de un foco, de modo que puede encontrarse un entorno del origen en el que todas las trayectorias giran indefinidamente alrededor del origen para t creciente y/o t decreciente (y ninguna entra en el origen, caso de hacerlo, con pendiente definida). Pero la ecuación para r no proporciona información general sobre el comportamiento asintótico de $r(t)$. Es necesario conocer algo más sobre los términos R_i en (2.5.1).

Definición 2.5.2. *Dado el sistema plano (2.1.1), se dice que un punto de equilibrio $\tilde{x}$ es un punto de rotación o centro-foco si en todo entorno de $\tilde{x}$ existe una órbita cerrada que rodea a $\tilde{x}$.*

El comportamiento cerca de un equilibrio $\tilde{x}$ de (2.1.1) para el que el origen es un centro como equilibrio de la aproximación lineal (2.2.3) viene dado por el siguiente resultado, cf. [14]:

Teorema 2.5.8. *Si el origen es un centro para la aproximación lineal (2.2.3) en un equilibrio $\tilde{x}$ de (2.1.1), entonces $\tilde{x}$ es un centro, un foco o un punto de rotación. En este último caso, existe un entorno de $\tilde{x}$ tal que toda trayectoria que comienza en él es, o bien una órbita cerrada que rodea a $\tilde{x}$, o bien una espiral que se aproxima, para $t \rightarrow \pm\infty$, a una órbita cerrada que rodea a $\tilde{x}$, cf. figura 2.7.*

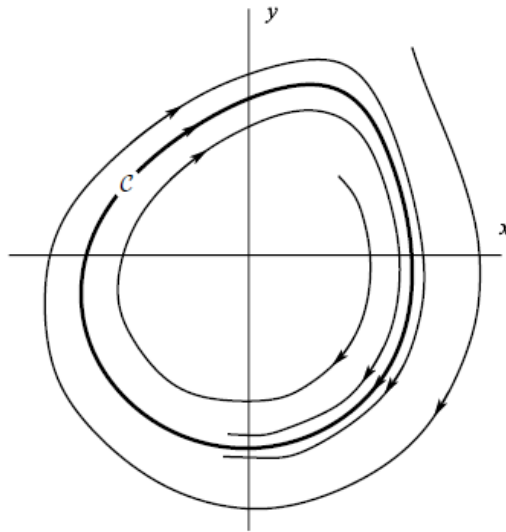


Figura 2.7: Estructura de un punto de rotación, [16].

Capítulo 3

Ondas viajeras en ecuaciones escalares de reacción-difusión

En este capítulo se estudiará la formación de ondas viajeras solución de ecuaciones de reacción-difusión, analizando los elementos mencionados en la introducción: resultados de existencia y estabilidad, propiedades de la velocidad de propagación y algunas aplicaciones.

Nos centraremos aquí en el caso de ecuaciones escalares. El estudio de la existencia de frentes de onda utiliza el método basado en la teoría cualitativa de EDO y explicada en el capítulo 2. Se analizará la existencia en sistemas planos generales, para luego aplicar los resultados a dos casos de ecuaciones RD. Este punto de vista permite también incluir aspectos relativos a la estabilidad de las ondas viajeras e información sobre la velocidad de propagación. Todos estos resultados se ilustrarán con el modelo de Fisher, relativo a la propagación de genes en una población, [10, 11].

3.1. Resultados generales sobre frentes de onda en sistemas planos

3.1.1. Trayectorias que conectan dos equilibrios

Consideremos un sistema de EDOs en el plano, ahora escrito en la forma

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y), \quad (3.1.1)$$

donde $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio simplemente conexo que contiene dos equilibrios de (3.1.1) (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (cf. Introducción), siendo el primero un punto de silla y el segundo un nodo estable. Buscamos establecer condiciones bajo las cuales la variedad inestable del punto de silla entre en el nodo cuando $t \rightarrow \infty$. Una posible forma de asegurar esta conexión entre los equilibrios está ilustrada en la figura 3.1, [15].

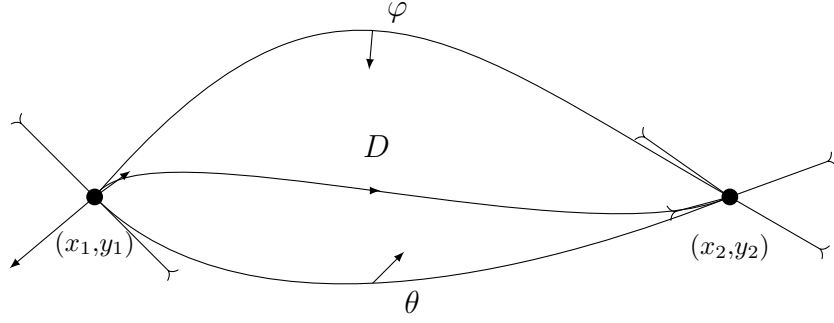


Figura 3.1: Trayectoria que conecta dos equilibrios de (3.1.1).

Las condiciones que se imponen son las siguientes. Para simplificar suponemos que los equilibrios están en el eje X con $(x_1, y_1) = (\alpha, 0)$, $(x_2, y_2) = (\beta, 0)$, $\alpha < \beta$. En estas condiciones, definimos dos curvas φ, θ con las propiedades:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (x, y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \\ \alpha < \varphi_1(t) < \beta, \quad \varphi_2(t) > 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_1(t) = \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) = \beta, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_2(t) = \tilde{\varphi}_2 \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_2(t) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} |\dot{\varphi}_1(t)| + |\dot{\varphi}_2(t)| \neq 0, \quad -\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\varphi}_2(t)}{\dot{\varphi}_1(t)} < 0, \\ |\dot{\varphi}_1(t)| + |\dot{\varphi}_2(t)| \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty, \\ x = \alpha \text{ si } 0 < y < \tilde{\varphi}_2, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\theta : y = 0 \text{ si } \alpha < x < \beta. \quad (3.1.4)$$

De este modo, el dominio D de la figura 3.1 está acotado por la curva φ verificando (3.1.2), el segmento del eje X entre α y β y, posiblemente, un segmento del eje Y , entre 0 y $\tilde{\varphi}_2$, cf. figuras 3.2 y 3.3.

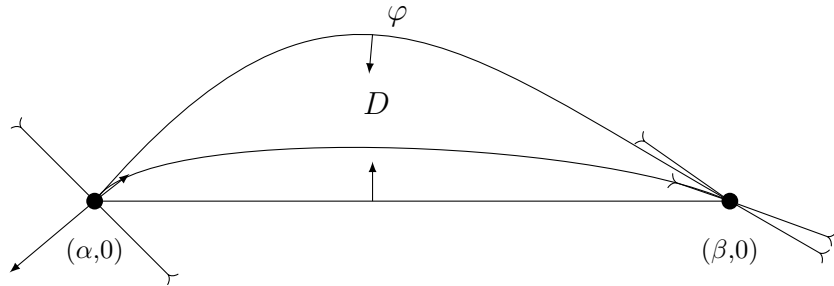


Figura 3.2: Trayectoria simplificada según (3.1.2)-(3.1.4) que conecta dos equilibrios de (3.1.1), con $\tilde{\varphi}_2 = 0$.

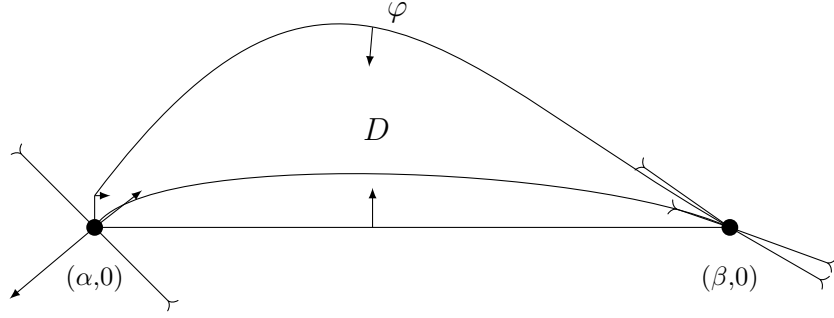


Figura 3.3: Trayectoria simplificada según (3.1.2)-(3.1.4) que conecta dos equilibrios de (3.1.1), con $\tilde{\varphi}_2 \neq 0$.

La hipótesis

$$\begin{aligned} f(x, 0) = g(x, 0) = 0, \quad x = \alpha, \beta, \\ (x, y) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \setminus \{(\alpha, 0), (\beta, 0)\} \Leftrightarrow |f(x, y)| + |g(x, y)| \neq 0, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

establece que $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$ no contiene más equilibrios de (3.1.1). Por otro lado, linealizando (3.1.1) en $(\alpha, 0)$ tenemos, para $F = (f, g)$

$$F'(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} f_x(\alpha, 0) & f_y(\alpha, 0) \\ g_x(\alpha, 0) & g_y(\alpha, 0) \end{pmatrix}. \quad (3.1.6)$$

Luego si

$$f_x(\alpha, 0)g_y(\alpha, 0) - f_y(\alpha, 0)g_x(\alpha, 0) < 0, \quad (3.1.7)$$

entonces, según lo explicado en el capítulo 2, $(\alpha, 0)$ es un punto de silla como equilibrio de (3.1.1). Los autovalores de (3.1.6) son

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}(\alpha, 0) &= \frac{1}{2} \left(f_x(\alpha, 0) + g_y(\alpha, 0) \pm \sqrt{\Delta(\alpha, 0)} \right), \\ \Delta(\alpha, 0) &= (f_x(\alpha, 0) + g_y(\alpha, 0))^2 - 4(f_x(\alpha, 0)g_y(\alpha, 0) - f_y(\alpha, 0)g_x(\alpha, 0)), \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

con $\lambda_+ > 0 > \lambda_-$. Los subespacios estable e inestable son

$$\begin{aligned} E^s &= E(A, \lambda_-) = \{(u, v) : v = \frac{1}{2f_y(\alpha, 0)} (g_y(\alpha, 0) - f_x(\alpha, 0) - \sqrt{\Delta(\alpha, 0)})\}, \\ E^u &= E(A, \lambda_+) = \{(u, v) : v = \frac{1}{2f_y(\alpha, 0)} (g_y(\alpha, 0) - f_x(\alpha, 0) + \sqrt{\Delta(\alpha, 0)})\}, \end{aligned}$$

y, por tanto, las condiciones

$$f_y(\alpha, 0) > 0, \quad g_x(\alpha, 0) > 0, \quad (3.1.9)$$

implican que

$$g_y(\alpha, 0) - f_x(\alpha, 0) - \sqrt{\Delta(\alpha, 0)} < 0, \quad g_y(\alpha, 0) - f_x(\alpha, 0) + \sqrt{\Delta(\alpha, 0)} > 0,$$

y la dirección inestable satisface $dy/dx > 0$ cerca de $(\alpha, 0)$, mientras que la estable verifica $dy/dx < 0$.

Utilizando de nuevo la linealización, esta vez en el otro equilibrio $(\beta, 0)$, y los resultados del capítulos 2, se tiene que

$$\begin{aligned} f_x(\beta, 0) + g_y(\beta, 0) &< 0, \\ 0 &< (f_x(\alpha, 0)g_y(\alpha, 0) - f_y(\alpha, 0)g_x(\alpha, 0)) \leq (f_x(\alpha, 0) + g_y(\alpha, 0))^2, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

garantizan que $\lambda_-(\beta, 0) \leq \lambda_+(\beta, 0) < 0$, cf. (3.1.8) y, por tanto, que $(\beta, 0)$ es un nodo estable. Un análisis similar de los autoespacios nos lleva a que si

$$f_x(\beta, 0) > g_y(\beta, 0), \quad f_y(\beta, 0) > 0, \quad g_x(\beta, 0) < 0, \quad (3.1.11)$$

entonces la dirección principal (asociada a $\lambda_+(\beta, 0)$) y la lateral (asociada a $\lambda_-(\beta, 0)$) satisfacen $dy/dx < 0$, con $|dy/dx|$ mayor para la lateral.

La última hipótesis impone que el campo F apunte hacia el interior de D en los puntos de su frontera. Utilizando la figura 3.2, esto puede expresarse como

$$f(\varphi(t))\dot{\varphi}_2(t) - g(\varphi(t))\dot{\varphi}_1(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1.12)$$

$$f(\alpha, y) \geq 0, \quad 0 < y < \tilde{\varphi}_2, \quad (3.1.13)$$

$$g(x, 0) \geq 0, \quad \alpha < x < \beta, \quad (3.1.14)$$

indicando, en cada caso, que el coseno del ángulo entre el campo de vectores y el vector normal de la curva correspondiente apuntando hacia el interior es positivo.

Teorema 3.1.1. *Bajo las hipótesis (3.1.2)-(3.1.14), el conjunto cerrado $\overline{D}$ contiene la parte de la variedad inestable que sale del punto de silla $(\alpha, 0)$ con $x, y > 0$. Esta trayectoria, cuando $t \rightarrow \infty$, tiende hacia el nodo estable $(\beta, 0)$, conectando así los dos equilibrios.*

La demostración puede dividirse en varias partes, véase [15].

Lema 3.1.2. *En las condiciones del teorema 3.1.1, si una trayectoria $(x(t), y(t))$ está en D en $t = 0$, entonces permanece en D para todo t finito.*

Demostración. Por reducción al absurdo, sea $t_0 < \infty$ el menor t para el que $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)) \notin D$. Entonces, o bien (x_0, y_0) es uno de los equilibrios o es otro punto de la frontera de D . Por la hipótesis del teorema 3.1.1, no puede darse el primer caso. Supongamos entonces que (x_0, y_0) está en la frontera de D y no es uno de los dos equilibrios, de manera que de (3.1.5) podemos asumir que $f(x_0, y_0) \neq 0$ (si fuese $g(x_0, y_0) \neq 0$, el razonamiento es similar). Por las condiciones (3.1.12)-(3.1.14), la trayectoria se mueve tangente a la frontera. Como $f(x_0, y_0) \neq 0$, si tomamos x como coordenada local para $\varphi = (x, \phi(x))$ y la trayectoria de la forma $(x, y(x))$, se tiene

$$f(x, \phi(x))\phi'(x) \geq g(x, \phi(x)), \quad (3.1.15)$$

y, por ser solución

$$f(x, y(x))y'(x) = g(x, y(x)). \quad (3.1.16)$$

Al ser $f \in C^1$, entonces $f(x, y) \neq 0$ para (x, y) en un entorno de (x_0, y_0) . Definimos

$$E(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

en dicho entorno, de manera que E es lipschitziana en (x_0, y_0) . Sea K la constante de Lipschitz asociada y $w(x) = \phi(x) - y(x)$. Entonces, de (3.1.15), (3.1.16) y la lipschitzianidad de E , se tiene

$$w'(x) \geq E(x, \phi(x)) - E(x, y(x)) \geq -K|w(x)|.$$

Como t_0 es minimal, entonces $w(x) > 0$ si $x \leq x_0$, con $w(x_0) = 0$. Pero entonces, si $x \leq x_0$

$$w'(x) \geq -Kw(x),$$

con $w'(x_0) \geq -Kw(x_0) = 0$. Entonces $w(x) \leq w(x_0) = 0$ para $x \leq x_0$ cerca de x_0 , llegando a contradicción. $\square$

Lema 3.1.3. *En las condiciones del teorema 3.1.1, si una trayectoria está en la frontera de D en un instante $t = t_0$, entonces continúa en $\overline{D}$ para todo t .*

Demostración. Es trivial si la trayectoria es uno de los equilibrios; en otro caso, se puede usar un argumento similar al utilizado en la demostración del lema 3.1.2. $\square$

Lema 3.1.4. *En las condiciones del teorema 3.1.1, la trayectoria asociada a la variedad inestable del punto de silla $(\alpha, 0)$ está contenida en $\overline{D}$.*

Demostración. Utilizando los lemas 3.1.2 y 3.1.3, es suficiente con demostrar que la trayectoria de la variedad inestable $\gamma(t)$ está en $\overline{D}$ para $t < t_0$ y algún t_0 finito.

Si $\tilde{\varphi}_2 > 0$, utilizando (3.1.12)-(3.1.14), el razonamiento es claro a partir de los lemas 3.1.2 y 3.1.3, véase la figura 3.3. Supongamos entonces que $\tilde{\varphi}_2 = 0$ y que la curva γ correspondiente de la variedad inestable llega a un punto $P \notin \overline{D}$. Tomamos $\overline{P} \notin \overline{D}$ cerca de P y entre las curvas φ y γ y seguimos la trayectoria $\bar{\gamma}$ que pasa por $\overline{P}$ hasta $t \rightarrow -\infty$. Para $\overline{P}$ suficientemente cerca de P , la trayectoria está arbitrariamente cerca de la variedad inestable y pasará por puntos de D en su recorrido hasta $t \rightarrow -\infty$, llegando a una contradicción con el lema 3.1.2. $\square$

Completando el teorema 3.1.1, se tiene:

Teorema 3.1.5. *El conjunto $\overline{D}$ contiene a la dirección principal asociada al nodo estable $(\beta, 0)$ correspondiente a $x, y > 0$, mientras que la dirección lateral no tiene puntos comunes con D .*

Demostración. Si la dirección principal no estuviese totalmente contenida en $\overline{D}$, las trayectorias que comienzan en D y que entran en $(\beta, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ tangentes a la dirección principal dejarían $\overline{D}$ en algún momento, contradiciendo el argumento del lema 3.1.2.

Por otro lado, si la variedad lateral pasa por un punto $P \in D$, podemos encontrar trayectorias que empiezan en D , cerca de P y que entran en $(\beta, 0)$ por la dirección principal. alguna de ellas debe salir de $\overline{D}$, de nuevo en contradicción con el lema 3.1.2. $\square$

3.1.2. Frentes de onda en sistemas planos

Escribimos ahora el sistema (3.1.1) en la forma

$$x' = f(x, y, c), \quad y' = g(x, y, c), \tag{3.1.17}$$

dependiente de un parámetro c real y con f, g de clase C^1 en las tres variables. Nuestro objetivo en esta sección es estudiar las trayectorias del teorema 3.1.1 en función del parámetro c .

Asumimos que se verifican las condiciones (3.1.5)-(3.1.9) para todo c (de modo que $(\alpha, 0)$ es siempre un punto de silla) y la existencia de un valor c^* tal que (3.1.10), (3.1.11) se satisfacen para $c > c^*$ (en cuyo caso, $(\beta, 0)$ es un nodo estable). Como veremos más adelante, ésta es una situación típica en la búsqueda de frentes de onda en ecuaciones de reacción-difusión.

Definición 3.1.1. Una solución $z(t) = (x(t), y(t))$ de (3.1.17), para c fijo, con

$$\begin{aligned} z(t) &\in [\alpha, \beta] \times [0, \infty), \quad t \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t) &= (\alpha, 0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = (\beta, 0), \end{aligned}$$

se llama *frente de onda de velocidad c* .

De las hipótesis anteriores, estamos suponiendo que no existen frentes con velocidades menores que c^* . El siguiente resultado establece condiciones sobre (3.1.17) que proporcionan información sobre el conjunto de posibles velocidades de los frentes de onda.

Teorema 3.1.6. Supongamos que si $c_2 > c_1 \geq c^*$ y $(x, y) \in [\alpha, \beta] \times [0, \infty)$ se verifica que

$$g(x, y, c_1)f(x, y, c_2) \geq f(x, y, c_1)g(x, y, c_2), \quad (3.1.18)$$

y que se satisface (3.1.14) para $c \geq c^*$. Entonces, el conjunto de velocidades para los frentes de onda es o bien vacío o bien una semirrecta (c_0, ∞) para cierto $c_0 \geq c^*$.

Demostración. Supongamos que existe una velocidad c_1 con frente asociado $z(t, c_1) = (x_1(t), y_1(t))$ y sea $c > c_1$, con $z(t, c)$ solución de (3.1.17). Entonces, por (3.1.18)

$$f(z(t, c_1), c)y_1'(t) \geq g(z(t, c_1), c)x_1'(t),$$

y, por tanto, tomando $\varphi(t) = z(t, c_1)$ en la construcción del teorema 3.1.1 (con $\tilde{\varphi}_2 = 0$), se tiene que $z(t, c)$ es un frente de onda con velocidad c . $\square$

Observación 3.1.7. Observemos que la condición (3.1.18) es una cierta propiedad de monotonía del sistema con respecto al parámetro c . Se puede interpretar en términos de trayectorias: si $z(t, c_1)$ y $z(t, c_2)$ son las soluciones de (3.1.17) para $c = c_1$ y c_2 respectivamente, entonces (3.1.18) implica que para todo t

$$\left\langle \begin{pmatrix} x'(t, c_2) \\ y'(t, c_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y'(t, c_1) \\ -x'(t, c_1) \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0,$$

(donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^2$) de manera que el vector tangente a $z(t, c_2)$ y el normal a $z(t, c_1)$ forman un ángulo agudo para todo t . Como consecuencia:

Corolario 3.1.8. Sean c_1, c_2 dos velocidades asociadas a frentes de onda de (3.1.17) $z(t, c_1)$, $z(t, c_2)$, con $c_2 > c_1 \geq c^*$. Entonces, la trayectoria de $z(t, c_1)$ está contenida en la adherencia del dominio formado por $z(t, c_2)$ y el intervalo $[\alpha, \beta]$.

El ínfimo c_0 del conjunto de velocidades, mencionado en el teorema 3.1.6 es un mínimo (y, por tanto, el intervalo es cerrado por la izquierda) bajo la hipótesis adicional siguiente:

Teorema 3.1.9. Bajo las condiciones del teorema 3.1.6, si suponemos además que para todo $c \geq c^*$ existe $\bar{y} = \bar{y}(c) > 0$ tal que

$$g(x, \bar{y}, c) < 0, \quad x \in (\alpha, \beta),$$

entonces existe un frente con velocidad c_0 .

Demostración. Supongamos que no existe un frente de onda de (3.1.17) con velocidad c_0 . Sea $c > c_0$ una velocidad asociada al frente $z(t, c)$, con $c - c_0$ suficientemente pequeño como se especifica más adelante, y D el dominio acotado por $\varphi(t) = z(t, c)$ y el intervalo $[\alpha, \beta]$. Por (3.1.18) (cf. observación 3.1.7) con $c_2 = c, c_1 = c_0$, el campo de vectores para c_0 apunta hacia el exterior del dominio. Utilizando los argumentos de la demostración del teorema 3.1.1, se puede comprobar que la correspondiente parte de la variedad inestable del equilibrio $(\alpha, 0)$ de (3.1.17) para $c = c_0$ no entra en D en su recorrido $[\alpha, \beta] \times [0, \infty)$, mientras que la hipótesis adicional impide que la curva se vaya a infinito. Como $z(t, c_0)$ no es un frente, la curva debe entonces llegar a $x = \alpha$ o $x = \beta$ en tiempo finito. En ambos casos, la curva inestable para $c > c_0$, con $c - c_0$ suficientemente pequeño, tiene el mismo comportamiento, lo que contradice la hipótesis de que $z(t, c)$ es un frente de onda con velocidad c . $\square$

Así, bajo las condiciones del teorema 3.1.9, la velocidad c_0 queda alternativamente caracterizada como el menor de los valores del parámetro c para los que existe la curva φ verificando (3.1.2) y (3.1.12).

El siguiente resultado completa la información sobre los frentes de onda en sistemas planos generales. La demostración puede consultarse en [15].

Teorema 3.1.10. *En las condiciones del teorema 3.1.9, se tiene:*

- (i) *El frente asociado a c_0 es la curva de la variedad lateral del nodo $(\beta, 0)$ con $x, y > 0$.*
- (ii) *Para $c > c_0$, el frente de (3.1.17) con velocidad c llega a $(\beta, 0)$ tangente a la dirección principal, excepto en el caso de que para todo $\tilde{c} \in [c_0, c]$ todos los frentes compartan la misma trayectoria.*

3.2. Frentes de onda en ecuaciones de reacción-difusión

Pasamos a aplicar algunos de los resultados de la sección 3.1 para el estudio de los frentes de onda en ecuaciones de reacción-difusión del tipo

$$u_t = u_{xx} + F(u), \quad (3.2.1)$$

con F de clase C^1 . A partir de lo mencionado en la introducción, un frente de ondas para (3.2.1) será aquí una solución $u(x, t) = w(x - ct), c \in \mathbb{R}$ verificando

$$w'' + cw' + F(w) = 0, \quad (3.2.2)$$

con

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w(\xi) = w_{\pm}, \quad w_+ < w_-, \quad (3.2.3)$$

donde $w_- \geq w(\xi) \geq w_+, \xi \in \mathbb{R}$ y

$$F(w_+) = F(w_-) = 0.$$

En lo que sigue discutiremos la existencia de los frentes para dos tipos de términos fuente F . Por sencillez asumiremos que $w_- = 1, w_+ = 0$ y $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

3.2.1. Término fuente con signo constante (monoestable)

Suponemos que F satisface las condiciones

$$F(1) = F(0) = 0, \quad F(w) > 0, w \in (0, 1), \quad F'(0) > 0, F'(1) < 0. \quad (3.2.4)$$

Para adaptarnos a la notación de la sección 3.1, hacemos el cambio $w \mapsto 1 - w$ (así, en (3.2.3) es ahora $w(-\infty) = 0, w(\infty) = 1$) y escribimos (3.2.2) en forma de sistema de primer orden

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -cy + F(1 - x). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

El sistema (3.2.5) tiene entonces la forma (3.1.17) con

$$f(x, y, c) = y, \quad g(x, y, c) = -cy + F(1 - x), \quad (3.2.6)$$

así como dos equilibrios tenemos

$$(\alpha, 0) = (0, 0), \quad (\beta, 0) = (1, 0).$$

Si analizamos la linealización de (3.2.5), tenemos que el jacobiano del sistema en un punto (x, y) es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F'(1 - x) & -c \end{pmatrix}.$$

Para el primer equilibrio $(x, y) = (0, 0)$, los autovalores de $J(0, 0)$ son

$$\lambda_{\pm}(0, 0) = \frac{1}{2} \left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4F'(1)} \right).$$

Utilizando (3.2.4), se tiene que $(\alpha, 0) = (0, 0)$ es un punto de silla. En el caso del segundo equilibrio, los autovalores de $J(1, 0)$ son

$$\lambda_{\pm}(1, 0) = \frac{1}{2} \left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4F'(0)} \right).$$

Utilizando (3.2.4) y tomando $c^* = 2\sqrt{F'(0)}$, se tiene que $(\beta, 0) = (1, 0)$ es un nodo estable cuando $c \geq c^*$.

De nuevo por (3.2.4), la función g en (3.2.6) satisface (3.1.14); asimismo, tomando $\tilde{\varphi}_2 = 0$ en (3.1.2) se cumple (3.1.13) trivialmente. Por otro lado, si $c_2 > c_1 \geq c^*$

$$\begin{aligned} g(x, y, c_1)f(x, y, c_2) - f(x, y, c_1)g(x, y, c_2) &= (-c_1y + F(1 - x))y - y(-c_2y + F(1 - x)) \\ &= (c_2 - c_1)y^2 \geq 0, \end{aligned}$$

y se cumple la condición (3.1.18). Por último, usando (3.2.4) y (3.2.6), si $c > c^*$, se verifica la hipótesis adicional del teorema 3.1.9 eligiendo

$$\bar{y} = \bar{y}(c) > \frac{1}{c} \max_{x \in (0, 1)} F(x),$$

y, por tanto, existe un valor mínimo de la velocidad (denotado por c_0 en los teoremas 3.1.6 y 3.1.9). Para determinar su valor, utilizamos su caracterización, mencionada después del teorema

3.1.9, y la forma de g dada por (3.2.6). En este caso, podemos escribir la curva φ en (3.1.2), (3.1.12) en la forma $y = \zeta(x)$, $\zeta : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, con ζ de clase C^1 y verificando

$$\begin{aligned}\zeta(x) &> 0, x \in (0, 1), \zeta(1) = 0, \\ \zeta'(1) = y' &= -cy + F(0) = -cy < 0.\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

La condición (3.1.12) se escribe entonces, para $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}f(x, \zeta(x))\zeta'(x) - g(x, \zeta(x)) &\geq 0 \\ \zeta(x)\zeta'(x) + c\zeta(x) - F(1-x) &\geq 0,\end{aligned}$$

es decir

$$c \geq -\zeta'(x) + \frac{F(1-x)}{\zeta(x)}, \quad x \in (0, 1),$$

por tanto

$$c \geq \sup_{0 < x < 1} \left\{ -\zeta'(x) + \frac{F(1-x)}{\zeta(x)} \right\},$$

con ζ verificando (3.2.7). Entonces

$$c_0 = \inf_{\zeta} \sup_{0 < x < 1} \left\{ -\zeta'(x) + \frac{F(1-x)}{\zeta(x)} \right\}, \tag{3.2.8}$$

donde el inferior se toma en el conjunto de funciones $\zeta : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, con ζ de clase C^1 y verificando (3.2.7). Tomando, en particular, $\zeta(x) = \kappa(1-x)$, $\kappa > 0$, entonces, de (3.2.8)

$$c_0 \leq \sup_{0 < x < 1} \left\{ -\zeta'(x) + \frac{F(1-x)}{\kappa(1-x)} \right\} = G(\kappa),$$

con

$$G(\kappa) = \kappa + \frac{L}{\kappa}, \quad L = \sup_{0 < u < 1} \frac{F(u)}{u}.$$

Luego

$$c^* = 2\sqrt{F'(0)} \leq c_0 \leq \min_{\kappa > 0} G(\kappa) = G(\kappa_0) = 2\sqrt{L}, \tag{3.2.9}$$

siendo $\kappa_0 = \sqrt{L}$.

Por otro lado, utilizando el teorema 3.1.10, el frente con velocidad $c > c_0$ entra en el nodo $(1, 0)$ tangente a la dirección principal, por lo que su velocidad viene dada por el autovalor $\lambda_+(1, 0)$, mientras que si $c = c_0$, es la curva correspondiente de la variedad lateral, por lo que llega a $(1, 0)$ con velocidad dada por $\lambda_-(1, 0)$; entonces

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(-c + \sqrt{c^2 - 4F'(0)} \right) & c > c_0 \\ \frac{1}{2} \left(-c - \sqrt{c^2 - 4F'(0)} \right) & c = c_0 \end{cases} \tag{3.2.10}$$

3.2.2. Término fuente con cambio de signo (biestable)

Supongamos ahora que la función F en (3.2.1) tiene un cambio de signo, de manera que existe $\mu \in (0, 1)$ tal que

$$F(0) = F(\mu) = F(1) = 0, \tag{3.2.11}$$

$$F(x) < 0, 0 < x < \mu, \quad F(x) > 0, \mu < x < 1, \tag{3.2.12}$$

$$F'(0) < 0, \quad F'(\mu) > 0, \quad F'(1) < 0. \tag{3.2.13}$$

Un frente de ondas $u = w(x - ct)$, $c \in \mathbb{R}$ es de nuevo solución de (3.2.2) o el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -cy - F(x). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

En este caso, hay tres equilibrios: $(0, 0)$, $(\mu, 0)$ y $(1, 0)$. Usando linealización y (3.2.13), se tiene que $(0, 0)$ y $(1, 0)$ son puntos de silla, mientras que $(\mu, 0)$ es un nodo estable si $c \geq c^* = 2\sqrt{F'(\mu)}$. Entonces, para datos iniciales en $(\mu, 1) \times [0, \infty)$ tenemos una situación similar a la de (3.2.1) bajo las condiciones (3.2.4). Hay entonces un intervalo $[c_0, \infty)$, $c_0 \geq c^*$ de velocidades correspondientes a frentes de onda (en este caso decrecientes) con

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = \mu, \quad (3.2.15)$$

que corresponden a trayectorias conectando el punto de silla $(1, 0)$ y el nodo $(\mu, 0)$. Por otro lado, la teoría expuesta en la sección 3.1 se puede adaptar para conectar los equilibrios $(\mu, 0)$ y $(0, 0)$, como sigue: los autovalores de la linealización de (3.2.14) en $(\mu, 0)$ son

$$\lambda_{\pm}(\mu, 0) = \frac{1}{2} \left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4F'(\mu)} \right).$$

Por (3.2.13), si $c \leq \tilde{c} = -2\sqrt{F'(\mu)} < 0$, entonces $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ y $(\mu, 0)$ es un nodo inestable. (Para $c \in (\tilde{c}, c^*)$, $(\mu, 0)$ es un foco inestable si $c < 0$, estable si $c > 0$ y un centro si $c = 0$.) Entonces, hay un intervalo $(-\infty, \tilde{c}_0]$, $\tilde{c}_0 > 0$, $-\tilde{c}_0 \leq \tilde{c}$, de velocidades para frentes decrecientes viajando hacia la izquierda con

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = \mu, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = 0, \quad (3.2.16)$$

conectando el nodo inestable con el punto de silla $(0, 0)$ (a través de la correspondiente curva de su variedad estable). Finalmente, también se puede encontrar una velocidad entre c_0 y $\tilde{c}_0$ para la cual existe un frente de onda conectando una curva de la variedad inestable de $(1, 0)$ con una de la estable de $(0, 0)$, Resumimos estos argumentos en el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [15].

Teorema 3.2.1. *Bajo las condiciones (3.2.11)-(3.2.13), el conjunto de velocidades de frentes de onda decrecientes solución de (3.2.1) es de la forma $(-\infty, \tilde{c}_0]$, $[c_0, \infty)$ y un valor aislado c_1 con*

$$-\infty < -\tilde{c}_0 \leq -2\sqrt{F'(\mu)} < c_1 < 2\sqrt{F'(\mu)} \leq c_0 < \infty. \quad (3.2.17)$$

Para $c \geq c_0$, $c = c_1$ y $c \leq -\tilde{c}_0 < 0$, el correspondiente frente satisface las condiciones de contorno en $\pm\infty$ dadas por (3.2.15), (3.2.3) y (3.2.16), respectivamente.

3.3. Estabilidad de los frentes de onda

Al no ser soluciones constantes, la estabilidad de las ondas viajeras tiene características específicas, [25, 27]. Notemos primero que si $w(\xi)$ es solución de (3.2.2), (3.2.3) y $h \in \mathbb{R}$, entonces $w(\xi + h)$ es también solución. (Esta propiedad se conoce como invariancia por traslaciones.) Desde el punto de vista de la estructura del espectro del operador linealizado de (3.2.2)

$$Lu = u'' + cu' + F'(w(\xi))u,$$

esto implica la existencia del autovalor cero en el espectro, con autofunción $u(\xi) = w'(\xi)$. Ello requiere entonces cambiar la idea de estabilidad hacia un concepto de tipo orbital, buscando más el comportamiento estable de la órbita de w por el grupo de traslaciones

$$\mathcal{O}_w = \{w(\xi + h) : h \in \mathbb{R}\},$$

en el sentido siguiente, [3]: consideramos (3.2.1) en las coordenadas $t, \xi = x - ct$, esto es, moviéndose con la onda

$$u_t = u_{\xi\xi} + cu_\xi + F(u), \quad (3.3.1)$$

y para la que $w(\xi)$ es una solución estacionaria. Tomando condiciones iniciales de la forma

$$u(\xi, 0) = w(\xi) + \epsilon(\xi), \quad (3.3.2)$$

con $\epsilon(\xi)$ pequeño, entonces:

- Si la correspondiente solución $u(\xi, t)$ converge a $w(\xi)$ cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que la onda w es asintóticamente estable.
- Si la convergencia se da hacia la onda trasladada $w(\xi + h)$, para algún $h \in \mathbb{R}$, se habla de estabilidad asintótica con desplazamiento (u orbital).

En el caso biestable, el principal resultado en este sentido es el siguiente, [25]:

Teorema 3.3.1. *Supongamos que $F'(w_\pm) < 0$. Entonces, existen $\epsilon_0, M, \lambda > 0$ tales que toda función continua a trozos $\epsilon(\xi)$ con*

$$\sup_{\xi} |\epsilon(\xi)| \leq \epsilon_0,$$

la solución $u(\xi, t)$ de (3.3.1), (3.3.2) satisface

$$\sup_{\xi} |u(\xi, t) - w(\xi + h)| \leq Me^{-\lambda t}, \quad t \rightarrow \infty,$$

para algún $h \in \mathbb{R}$.

En el caso monoestable, como las ondas existen para un intervalo continuo de valores de la velocidad, la elección de la condición inicial determina, en su caso, hacia qué onda converge la solución, véase [25] y referencias en él.

3.4. Un ejemplo: el modelo de Fisher

Ilustramos los resultados de la sección 3.2 formulados para el estudio de la propagación de genes en una población.

3.4.1. Modelo original de Fisher

El modelo original de Fisher, [10, 11], considera una población distribuida en un cierto hábitat y que ocupa una densidad uniforme. Si en algún punto del hábitat ocurre una mutación, el gen mutante, en condiciones favorables, se propaga en el medio sustituyendo a sus formas previas (llamadas alelos). Este proceso suele primero completarse cerca de donde se generó la mutación, para luego avanzar en el resto de la población, en lo que se puede modelizar como una onda (creciente o decreciente) de la frecuencia del gen en cada punto del medio.

Las hipótesis más simples impuestas por Fisher en sus primeros modelos son las siguientes:

- El gen mutante sólo admite una forma previa, a la que va sustituyendo.
- Un hábitat unidimensional y homogéneo.
- Un factor de intensidad de selección en favor del gen mutante independiente del hábitat y de la concentración del mismo.

Sea $c(x, t)$ la frecuencia del gen mutante en la posición x del medio y en el instante t . La evolución de c suele medirse, en su formulación más sencilla, a partir de ecuaciones de reacción-difusión del tipo, [22]

$$c_t(x, t) = ac_{xx}(x, t) + Q(c), \quad (3.4.1)$$

donde $a > 0$ es una constante que mide la difusión o motilidad del gen entre la población y $Q(c)$ es una tasa local de crecimiento de la densidad del gen mutante por reproducción. De las hipótesis anteriores, una primera elección de Q viene dada por

$$Q(c) = C(c - c_1)(c_2 - c),$$

con $C > 0$ y donde las constantes $c_1 < c_2$ son los valores de densidad para dos estados de equilibrio uniformes, con la concentración del gen mutante propagándose por el medio por reproducción entre c_1 y c_2 . Usando la variable adimensional

$$u = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1},$$

y sustituyendo en (3.4.1) se obtiene la ecuación de Fisher original, [10]

$$u_t(x, t) = au_{xx}(x, t) + mu(x, t)(1 - u(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.4.2)$$

donde $m > 0$ es la frecuencia de selección en favor del gen mutante para una densidad $0 < u < 1$ y que está definida como

$$m = \frac{4A}{c_2 - c_1},$$

siendo A la tasa máxima de crecimiento reproductivo de la concentración de gen mutante en el intervalo original (c_1, c_2) (medida experimentalmente).

El cambio $t \mapsto t/a, x \mapsto x/a$ lleva (3.4.2) a

$$u_t = u_{xx} + amu(1 - u),$$

que es de la forma (3.2.1) con $F(u) = amu(1 - u)$. La teoría expuesta en la sección 3.2 muestra, formalizando los argumentos de Fisher, la existencia de un frente de ondas $u(x, t) = w(x - ct)$ con

$$0 \leq w(x, t) \leq 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = 0,$$

con $\xi = x - ct, c \geq c^* = 2\sqrt{am}$, véase la figura 3.4.

Es posible obtener expresiones explícitas para los frentes de onda para velocidades concretas. Por ejemplo, Ablowitz y Zeppetella, [1], haciendo el cambio de variable $t \mapsto mt, x \mapsto \sqrt{(m/a)}x$, que lleva (3.4.2) a

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u),$$

construyen una familia uniparamétrica de frentes

$$w(\xi) = \frac{1}{(1 - re^{\xi/\sqrt{6}})^2}, \quad r \neq 0, \quad (3.4.3)$$

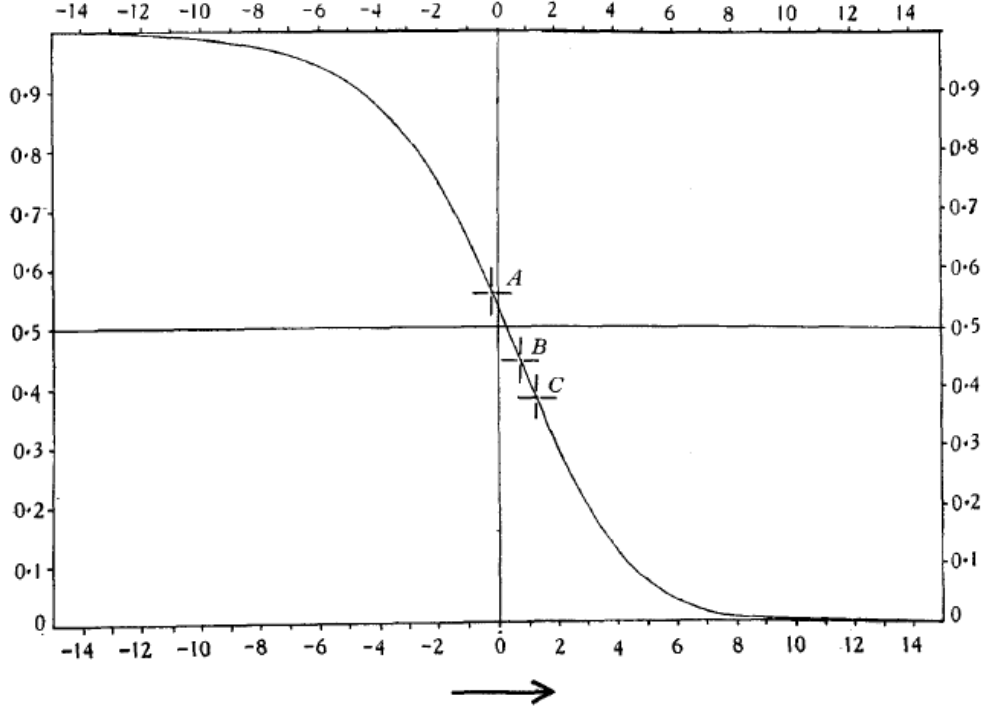


Figura 3.4: Frente de onda para el modelo de Fisher, [11].

con $w(-\infty) = 1, w(\infty) = 0$ y velocidad $c = 5/\sqrt{6} > 2$. La técnica de construcción está basada en un desarrollo en exponenciales

$$u = \sum_{m,n=0, m+n \geq 1}^{\infty} a_{mn} e^{(m\lambda_+(0,0) + n\lambda_-(0,0))\xi},$$

con $\lambda_{\pm}(0,0)$ los autovalores del linealizado en el equilibrio $(0,0)$. Observemos de (3.4.3) que puede haber más de un frente asociado a la misma velocidad (recordemos que la unicidad ya se perdía por la simetría traslacional). Además, para $r > 0$, las soluciones (3.4.3) explotan para $\xi = \xi^*$ real y finito, dado por

$$\xi^* = \sqrt{6} \ln \frac{1}{r},$$

y son regulares si $r < 0$. Para otras velocidades, es necesario utilizar procedimientos numéricos para obtener aproximaciones a las formas de los frentes, [6].

El modelo de Fisher fue generalizado por Kolmogorov, Petrovsky y Piscounoff, [17, 2], partiendo del modelo (3.4.1) con $Q(c)$ verificando

- $Q(0) = Q(1) = 0$,
- $Q(c) > 0$ si $0 < c < 1$,
- $Q'(0) > 0, Q'(c) < Q'(0), 0 < c \leq 1$.

y demostrando que si la condición inicial satisface $0 \leq c(x,0) \leq 1, c(x,0) = 1, x < x_1, c(x,0) = 0, x > x_2$, para ciertos $x_2 > x_1$, entonces existe un frente de ondas solución $u(x,t) = w(x-ct)$ que conecta los equilibrios $(1,0)$ y $(0,0)$ con velocidades $c \geq c^* = 2\sqrt{aF'(1)}$.

El modelo de Fisher admite también extensiones para el estudio de la propagación de diferentes versiones de un mismo gen, no necesariamente relacionadas por mutación. Es el caso de los

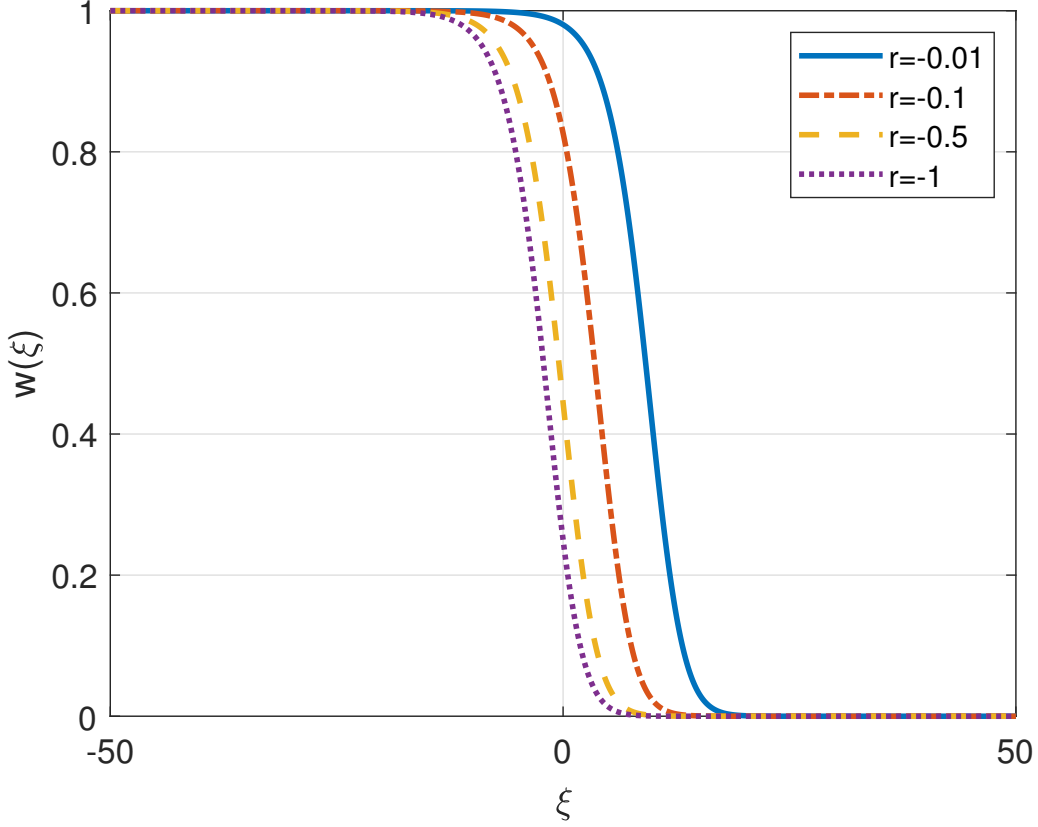


Figura 3.5: Frente de onda (3.4.3) para diferentes valores de $r < 0$, [1].

organismos llamados heterocigotos, que reciben por herencia dos alelos diferentes del mismo gen. Para estudiar la evolución de éste se puede considerar un término de reacción cúbico de manera que (3.2.1) tiene la forma

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(1-\tau-(2-\sigma-\tau)u), \quad (3.4.4)$$

donde σ y τ representan el factor de intensidad o frecuencia de selección de las dos formas del gen. Para (3.4.4) pueden estudiarse dos casos:

3.4.2. Caso dominante-recesivo (monoestable)

Suponiendo $\sigma \geq 1 > \tau$ (de manera que una forma del gen es dominante y la otra recesiva) entonces (3.4.4) puede reescribirse en la forma

$$u_t = u_{xx} + F(u), \quad F(u) = u(1-u)(1+\nu u), \quad (3.4.5)$$

donde

$$\nu = \frac{\sigma-1}{1-\tau} - 1, \quad (3.4.6)$$

de manera que $-1 \leq \nu < \infty$. Notemos que F satisface (3.2.4) y estudiemos entonces algunas propiedades descritas en la sección 3.2 referidas a la velocidad minimal de los frentes de onda. De (3.2.9) se tiene

$$\begin{aligned} F'(0) &= 1 \leq \frac{c_0(\nu)^2}{4} \leq L = \sup_{0 < u < 1} \frac{F(u)}{u} = \sup_{0 < u < 1} (1-u)(1+\nu u) \\ &= \begin{cases} 1 & -1 \leq \nu \leq 1 \\ \frac{(\nu+1)^2}{4\nu} & \nu \geq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Entonces $c_0(\nu) = 2$ si $|\nu| \leq 1$. Se puede comprobar que el llamado pulso de Huxley (véase la figura 3.6)

$$w(\xi) = (1 + e^{\xi\sqrt{\frac{\nu}{2}}})^{-1}, \quad \nu > 0, \quad (3.4.8)$$

es un frente de ondas de (3.4.5), (3.4.6) con velocidad $c_H = (\nu + 2)/\sqrt{2\nu}$. Para $\nu = 2$ es $c_H = 2$, por lo que $c_0(2) \leq 2$. Por otro lado, como F es una función creciente en ν para $0 < u < 1$ y usando (3.2.8), se tiene que $c_0(\nu)$ es también creciente en ν . Por tanto, si $1 \leq \nu \leq 2$

$$2 = c_0(1) \leq c_0(\nu) \leq c_0(2) \leq 2,$$

luego $c_0(\nu) = 2$ para $1 \leq \nu \leq 2$. Asimismo, usando (3.4.8), si $x = w$

$$y = x' = -\sqrt{\nu/2}e^{\xi\sqrt{\nu/2}}(1 + e^{\xi\sqrt{\nu/2}})^{-2},$$

luego, si $\xi \rightarrow \infty$

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow -\sqrt{\frac{\nu}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{c_H^2 - 4} - \frac{c_H}{2}.$$

Entonces, utilizando (3.2.10), necesariamente es $c_0 = c_H$. En resumen:

Teorema 3.4.1. *La velocidad minimal $c_0(\nu)$ para (3.4.5), (3.4.6) es*

$$c_0 = c_0(\nu) = \begin{cases} 2 & -1 \leq \nu \leq 2 \\ \frac{\nu+2}{\sqrt{2\nu}} & \nu \geq 2 \end{cases}.$$

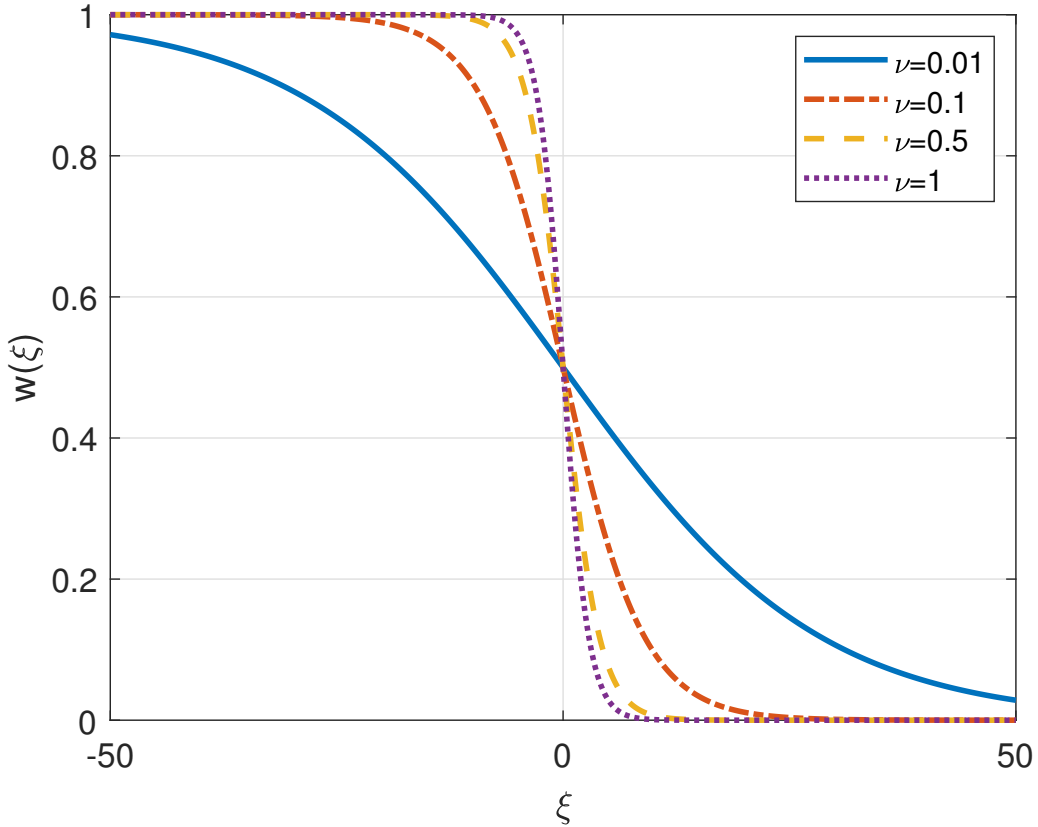


Figura 3.6: Pulso de Huxley (3.4.8) para diferentes valores de ν .

3.4.3. Caso codominante (biestable)

Suponiendo $\sigma, \tau > 1$ (correspondiente al llamado caso codominante de ambos alelos), se puede definir

$$\mu = \frac{\tau - 1}{\sigma + \tau - 2},$$

que satisface $0 < \mu < 1$ y, a través del cambio $t \mapsto \mu t, x \mapsto \sqrt{\mu}x$, escribir (3.4.4) como

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)(u - \mu), \quad (3.4.9)$$

que es de la forma (3.2.1) con un término de reacción biestable $F(u) = u(1 - u)(u - \mu)$. Estudiamos entonces las ondas viajeras $u = w(\xi), \xi = x - ct$, solución de (3.4.9) a partir de los resultados correspondientes de la sección 3.2. Observemos primero que si w es un frente con velocidad c , entonces

$$w'' + cw' + F(w) = 0. \quad (3.4.10)$$

Tomando $v(\xi) = w(-\xi)$, se tiene que

$$v''(\xi) - cv'(\xi) + F(v(\xi)) = w''(-\xi) + cw'(-\xi) + F(w(-\xi)) = 0,$$

luego v es un frente con velocidad $-c$ (cambiando además crecimiento por decrecimiento y viceversa). De esta manera, podemos suponer que $c > 0$. También, por sencillez y sin perder generalidad, podemos asumir $\sigma \geq \tau$, de manera que $0 < \mu \leq 1/2$ (el caso $1/2 \leq \mu < 1$ se estudia de forma análoga).

El término F satisface las condiciones (3.2.11)-(3.2.13), de manera que la linealización determina que los equilibrios $(0, 0)$ y $(1, 0)$ son puntos de silla, mientras que $(\mu, 0)$ es un nodo estable para

$$c \geq c^* = 2\sqrt{F'(\mu)} = 2\sqrt{\mu(1 - \mu)}.$$

Existe entonces un intervalo $[c_0, \infty)$ con $c_0 \geq c^*$ y velocidades c para las cuales el correspondiente frente de ondas decrece y conecta los equilibrios $(1, 0)$ y $(\mu, 0)$:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = \mu.$$

Con argumentos similares a los del caso monoestable, [15], puede comprobarse que

$$c_0(\mu) = \begin{cases} (1 + \mu)/\sqrt{2} & 0 < \mu \leq 1/3 \\ c^* & 1/3 \leq \mu \leq 1/2 \end{cases}$$

El estudio de la sección 3.2 nos lleva también a la existencia de un frente decreciente conectando $(\mu, 0)$ y $(0, 0)$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = \mu, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = 0,$$

con velocidades $c \leq -\tilde{c}_0$, $\tilde{c}_0 > 0$. Por la simetría de (3.4.10) con respecto a las velocidades, esto implica la existencia de frentes de onda crecientes conectando $(0, 0)$ y $(\mu, 0)$, es decir

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = \mu,$$

con velocidades $c \geq \tilde{c}_0$. En este caso, puede comprobarse, [15], que $\tilde{c}_0 = c^*$. Finalmente, la función

$$w(\xi) = (1 + e^{\xi/\sqrt{2}})^{-1},$$

es un frente de ondas con velocidad $c_1 = \sqrt{2}(1/2 - \mu)$ y verificando

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = 0,$$

es decir, conectando $(1, 0)$ y $(0, 0)$.

En este caso, los frentes son únicos (salvo traslaciones en espacio). Para otros valores de la velocidad, se pueden usar procedimientos numéricos, [7], para obtener aproximaciones a los perfiles.

Capítulo 4

Ondas viajeras en sistemas de reacción-difusión

4.1. Sistemas monótonos

Discutimos en este capítulo la extensión de los resultados sobre ondas viajeras en ecuaciones escalares de reacción-difusión a sistemas RD

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + F_i(u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n, n > 1. \quad (4.1.1)$$

Puede hacerse un estudio sobre las ondas viajeras $u(x, t) = w(\xi)$, $\xi = x - ct$, solución de (4.1.1), es decir

$$-cw'_i = w''_i + F_i(w), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1.2)$$

para algunos tipos de términos de reacción, [27], si bien es en general necesario utilizar otros procedimientos, más allá de la teoría local de sistemas dinámicos, presentada en el capítulo 2 y utilizada en el capítulo 3. Una extensión de los resultados allí obtenidos para el caso escalar es conocida para los llamados sistemas monótonos, aquéllos de la forma (4.1.1) para los que

$$\frac{\partial F_i(u)}{\partial u_j} > 0, \quad i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \quad (4.1.3)$$

para todo $u = (u_1, \dots, u_n)$ o que, por algún cambio de variable, pueden reducirse a ellos. Tales sistemas aparecen en bastantes aplicaciones en áreas como la cinética química o la dinámica de poblaciones, como veremos en secciones posteriores. La extensión se da en el sentido del teorema siguiente, cuya comprobación puede consultarse en [27].

Teorema 4.1.1. *Supongamos que el término de reacción $F = (F_1, \dots, F_n)^T$ del sistema (4.1.1) satisface la condición (4.1.3) y que existen dos equilibrios $w_{\pm}$ (es decir $F(w_{\pm}) = 0$) o vectores constantes con $w_+ < w_-$, donde la desigualdad se entiende componente a componente. Se verifica:*

1. *(Caso biestable.) Supongamos que el espectro de las matrices $F'(w_{\pm})$ está en el semiplano izquierdo y que existe w_0 con*

- $w_+ < w_0 < w_-$ y $F(w_0) = 0$.
- $F'(w_0)$ tiene un autovalor con parte real positiva.

Entonces, existe una onda viajera $w(\xi)$, $\xi = x - ct$, solución de (4.1.2) que conecta w_- con w_+ . La onda es única salvo traslaciones en espacio y es estable. Su velocidad admite una representación similar a (3.2.8).

2. (Caso monoestable.) Supongamos que no hay ceros w_0 de F entre w_+ y w_- (componente a componente), que todos los autovalores de una de las matrices $F'(w_+)$ o de $F'(w_-)$ tienen parte real negativa, mientras que la otra admite un autovalor positivo. Entonces, existen ondas viajeras solución de (4.1.2) y monótonas, conectando w_- con w_+ , para un rango continuo de velocidades con un valor minimal c_0 , calculable a partir de una formulación de tipo (3.2.8).

Ilustramos la emergencia de ondas viajeras en sistemas de reacción-difusión monótonos (o reducibles a monótonos por cambio de variable) con un par de ejemplos relacionados con la dinámica de poblaciones.

4.2. Un modelo de competición entre especies

En un entorno natural, las poblaciones de diferentes especies no evolucionan de manera aislada, sino que interactúan entre ellas de diferente forma. Cuando la dinámica de las especies viene formulada matemáticamente a partir de un sistema de reacción-difusión, dicha interacción suele medirse con los términos de reacción, frente a la propagación de las especies representada por la componente de difusión.

En este contexto, tiene interés la búsqueda de dinámicas que permitan controlar las poblaciones sin riesgo para el entorno, evolucionando asintóticamente de un estado de equilibrio a otro en función del interés para el ecosistema y utilizando ciertos parámetros de control. Ello justifica la formulación de modelos con sistemas RD que admitan ondas viajeras solución como forma de propagación de las especies entre valores poblacionales estacionarios.

Ejemplos clásicos de interacción son los modelos depredador-presa o la competición entre especies, véase por ejemplo [19, 5]. En el segundo caso, las especies deben compartir algunos recursos para la supervivencia y ello puede afectar a su tasa de reproducción. La situación más simple viene dada por un sistema con dos especies que, matemáticamente, se formula como dos ecuaciones RD con los términos de interacción compartiendo el mismo signo, dado que la competición afecta a ambas poblaciones, si bien las respuestas pueden ser de diferente intensidad según las condiciones del modelo. (Que los términos compartan el mismo signo nos lleva a sistemas monótonos o que, por cambio de variables, puedan reducirse a monótonos.) Consideremos entonces, como ilustración, el siguiente sistema para una distribución u_1, u_2 de dos poblaciones en un medio homogéneo y unidimensional

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + a_1 u_1 (1 - b_{11} u_1 - b_{12} u_2), \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_2 u_2 (1 - b_{21} u_1 - b_{22} u_2), \quad (4.2.2)$$

donde los parámetros $b_{ij} > 0, i, j = 1, 2$, cuantifican la intensidad de la competencia entre individuos de la misma especie (si $i = j$) y de especies distintas (si $i \neq j$). Por otro lado, $D_i > 0, i = 1, 2$, representan las tasas (constantes) de difusión o motilidad de las especies, mientras que $a_i > 0, i = 1, 2$, incorporan una tasa de crecimiento natural de tipo malthusiano,

corregido por el carácter logístico de los términos de reacción, [19]

$$F_1(u) = a_1 u_1 (1 - b_{11} u_1 - b_{12} u_2), \quad F_2(u) = a_2 u_2 (1 - b_{21} u_1 - b_{22} u_2).$$

Asumimos que

$$b_{11} \neq b_{21}, \quad b_{12} \neq b_{22}, \quad (4.2.3)$$

para que la intensidad de dicho efecto sea diferente para cada población. Observemos que el modelo requiere que las poblaciones vengan representadas por valores en el primer cuadrante del plano (u_1, u_2) . Entonces

$$\frac{\partial F_1(u)}{\partial u_2} = -a_1 b_{12} u_1 < 0, \quad \frac{\partial F_2(u)}{\partial u_1} = -a_2 b_{21} u_2 < 0,$$

si $u_1, u_2 > 0$. Los términos de reacción comparten el mismo signo y el sistema (4.2.1), (4.2.2) puede reducirse a un sistema monótono a través de un cambio de variable, véase por ejemplo [27].

La discusión de los estados de equilibrio en (4.2.1), (4.2.2) puede hacerse a partir del sistema de tipo Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x (1 - b_{11} x - b_{12} y), \\ y' &= a_2 y (1 - b_{21} x - b_{22} y). \end{aligned}$$

Se tiene entonces lo siguiente, cf. [5] para los detalles:

- Hay siempre tres estados de equilibrio, correspondientes a la extinción de ambas especies o de una de ellas (llegando la otra a su máximo de población que puede soportar el ecosistema):

$$(u_1, u_2) = (0, 0), \left(\frac{1}{b_{11}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{b_{22}}\right).$$

- Puede haber un cuarto estado estacionario (x_∞, y_∞) , cuando las dos rectas

$$b_{11}x + b_{12}y = 1, \quad b_{21}x + b_{22}y = 1, \quad (4.2.4)$$

se cortan (en un solo punto, por (4.2.3)). Representa un estado donde las poblaciones tienden a coexistir, evolucionando asintóticamente a valores constantes. El análisis de la linealización lleva a que (x_∞, y_∞) puede ser:

- (i) un nodo estable: en ese caso, $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$ y $(0, \frac{1}{b_{22}})$ son ambos inestables;
- (ii) un punto de silla: en ese caso, $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$ y $(0, \frac{1}{b_{22}})$ son ambos estables.
- Si las dos rectas (4.2.4) no se cortan y, por tanto, (x_∞, y_∞) no existe, sólo uno de los estados $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$ ó $(0, \frac{1}{b_{22}})$, es estable, mientras que el otro es inestable (la asignación en cada caso depende esencialmente de los valores de los parámetros $b_{ij}, i, j = 1, 2$).
- El estado de extinción de ambas especies $(0, 0)$ es siempre inestable.

A continuación, las figuras 4.1-4.4, extraídas de [5], ilustran las cuatro posibles dinámicas con respecto a los equilibrios. Las flechas ($\uparrow, \rightarrow$) indican el movimiento de las trayectorias en el eje vertical y horizontal respectivamente.

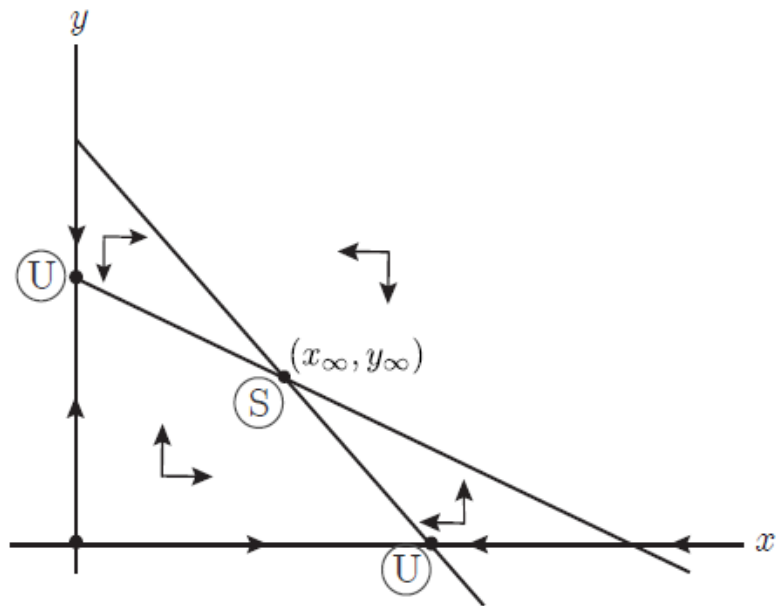


Figura 4.1: Competición entre especies: coexistencia (el punto de corte (x_∞, y_∞) es un nodo estable), [5].

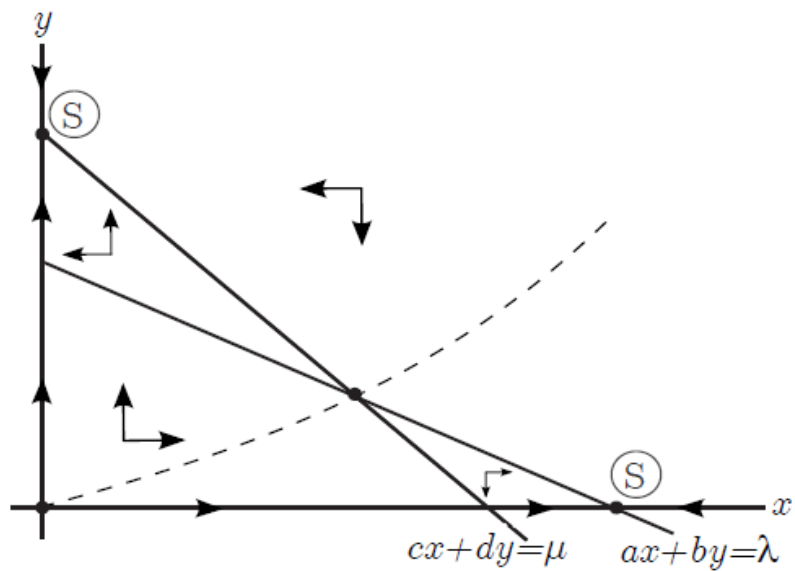


Figura 4.2: Competición entre especies: supervivencia dependiente del estado inicial de las poblaciones u_1, u_2 (el equilibrio (x_∞, y_∞) es un punto de silla), [5].

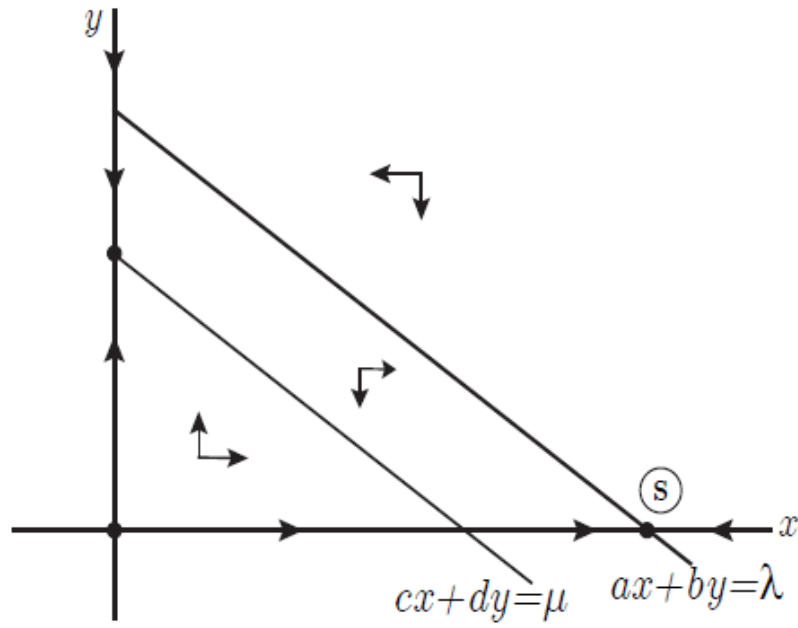


Figura 4.3: Competición entre especies: supervivencia de la especie u_1 y extinción de u_2 , [5].

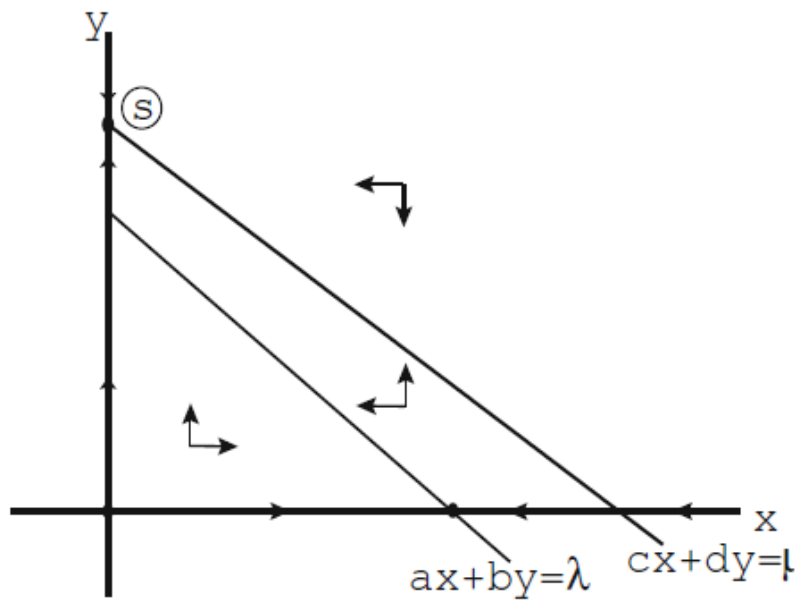


Figura 4.4: Competición entre especies: supervivencia de la especie u_2 y extinción de u_1 , [5].

El sistema (4.2.1), (4.2.2) contiene varios tipos de ondas viajeras solución, y su emergencia depende de las condiciones iniciales. Vamos a ilustrar esta variedad con dos situaciones, véase [25, 26] para los detalles.

4.2.1. Invasión de una especie

Supongamos que una de las especies invade el espacio habitado por la otra. Las correspondientes densidades de población han de ser de la forma:

$$u_1(x, 0) = 1/b_{11}, \quad u_2(x, 0) = \psi(x), \quad (4.2.5)$$

con $\psi(x)$ cierta función de soporte compacto.

Así, en el caso de que (x_∞, y_∞) exista y sea estable, las condiciones iniciales (4.2.5) evolucionan hacia dos frentes de onda monótonos, conectando los estados $(1/b_{11}, 0)$ (inestable) y (x_∞, y_∞) , propagándose desde el lugar en el que se introduce la segunda especie, de manera que, como resultado de la invasión, ambas especies coexisten, cf. figura 4.5

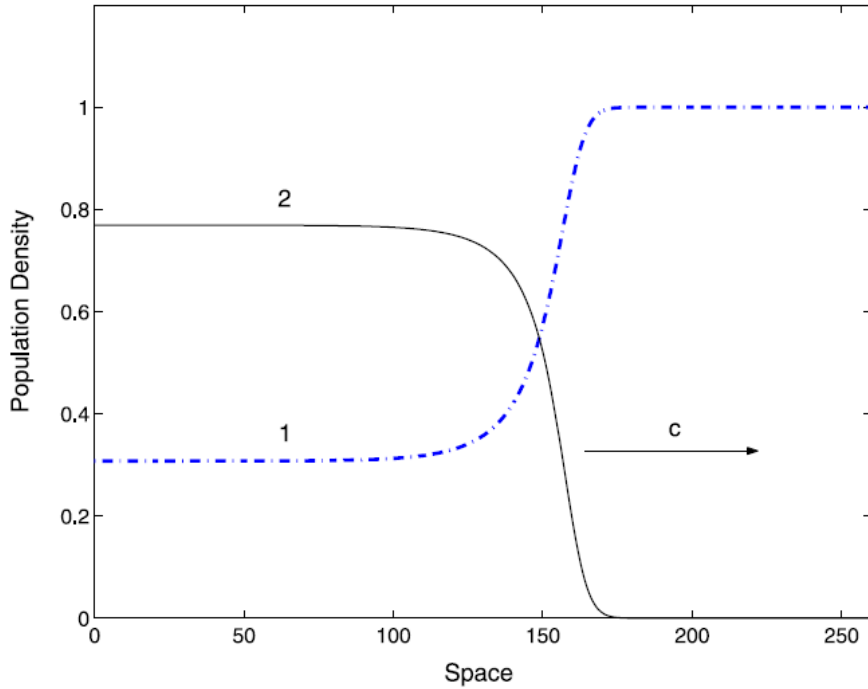


Figura 4.5: Competición entre especies: ondas viajeras solución de (4.2.1)-(4.2.5), con la población u_1 en línea discontinua y u_2 en línea continua, [25].

Si (x_∞, y_∞) no existe, el resultado de la introducción de la especie invasora u_2 depende de la estabilidad de los estados $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$ y $(0, \frac{1}{b_{22}})$. Si el primero es estable, la especie invasora se extinguirá sin poder consumar la invasión. Si el segundo es estable, se puede obtener un frente de ondas conectando $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$ y $(0, \frac{1}{b_{22}})$, por lo que la invasión tendrá como resultado (asintóticamente) la extinción de la especie invadida.

Si, finalmente, (x_∞, y_∞) existe pero no es estable, la evolución de (4.2.5) depende de las propiedades de $\psi(x)$, pero sin posibilidad de coexistencia en general, al ser $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$ y $(0, \frac{1}{b_{22}})$ ambos estables. La invasión podrá llevarse a cabo sólo bajo ciertas condiciones. Si tiene éxito, llevará

a la aniquilación de la primera especie (a través de un frente conectando (x_∞, y_∞) con $(0, \frac{1}{b_{22}})$); si no, la especie invasora tenderá hacia la extinción (propagándose en un frente conectando (x_∞, y_∞) con $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$).

4.2.2. Control biológico de la invasión

Una situación relacionada con la anterior puede plantearse cuando interesa un control biológico de la especie a partir de la introducción de un competidor fuerte. Supongamos que u_1 es una plaga en expansión que necesita controlarse. Consideramos las condiciones iniciales para (4.2.1), (4.2.2)

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_2(x, 0) = \psi(x), \quad (4.2.6)$$

con $\varphi(x), \psi(x)$ funciones de soporte compacto, siendo el de φ mayor que el de ψ . Se entiende que el competidor u_2 es lo suficientemente fuerte cuando es capaz de llevar a la exclusión de la otra especie, es decir, cuando $(0, \frac{1}{b_{22}})$ es estable y $(\frac{1}{b_{11}}, 0)$ inestable. En el caso del sistema (4.2.1), (4.2.2), esto se da cuando $b_{12} > b_{22}, b_{11} > b_{21}$. En la figura 4.6 se muestra cómo la evolución de la distribución inicial (primera fila) lleva a la formación de un frente de onda para u_2 siguiendo el pulso de la especie u_1 (segunda fila). Si la velocidad c de u_2 es mayor que la velocidad c_0 de u_1 , entonces u_2 alcanza a u_1 y, además, éste tiende a desaparecer (tercera y cuarta filas de la figura 4.6).

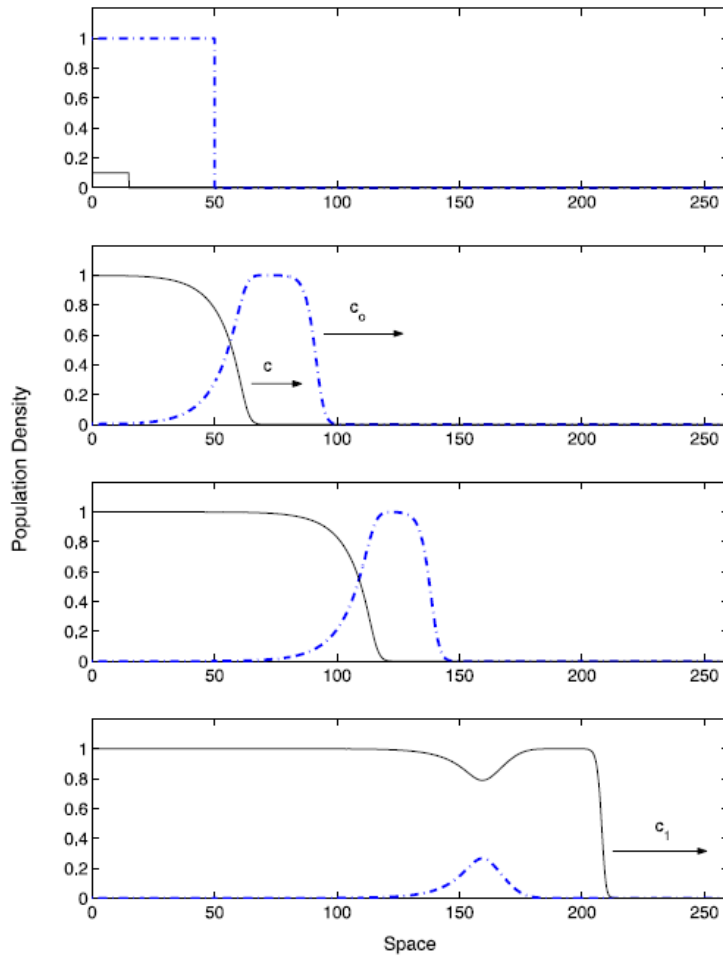


Figura 4.6: Competición entre especies: ondas viajeras solución de (4.2.1), (4.2.2) y condiciones iniciales (4.2.6), con la población u_1 en línea discontinua y u_2 en línea continua, [25].

4.3. Dinámica celular

La dinámica de poblaciones de células puede estudiarse matemáticamente a partir de ecuaciones de reacción-difusión; sus formas más sencillas son de tipo Fisher

$$u_t = u_{xx} + F(u), \quad F(u) = au(1 - u) - bu,$$

donde $F(u)$ describe la tasa de reproducción celular, proporcional a la densidad de población u y a los recursos disponibles $1 - u$ y con el último término incorporando un factor de mortalidad de la población. Versiones más sofisticadas requieren la imposición de leyes adicionales, como ecuaciones de Navier-Stokes, ley de Darcy, etc.

En comparación con la dinámica de poblaciones clásica, las poblaciones celulares pueden tener características específicas de relevancia. En esta sección discutiremos dos casos que ilustren esta propiedad.

4.3.1. Desarrollo de la leucemia

La producción de glóbulos en la médula ósea es un proceso complejo, con varias etapas y regulado por diferentes factores, lo que permite formularlo matemáticamente de diversas formas. Desde el punto de vista de la dinámica de poblaciones celulares, es obvio el interés en estudiar la formación y desarrollo inicial de células cancerígenas, [4]. En la etapa de división celular, pueden generarse mutaciones de rápida autoregeneración y cuyo proceso de diferenciación (es decir, la transformación en células especializadas para tareas funcionales y estructurales) es menor que el de las células normales. Como consecuencia, estas células defectuosas comienzan a expandirse a gran velocidad, sustituyendo a otras sanas e iniciando el proceso cancerígeno de la leucemia. Un modelo sencillo para dos tipos de células, las normales (P) y las defectuosas (Q), puede ser

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + H + kP(P_0 - P - Q) - aP, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + k_m Q(P_0 - P - Q) - a_m Q. \quad (4.3.2)$$

En (4.3.1), (4.3.2), H mide el influjo de células (a partir del grupo de células madre), k y a son parámetros que caracterizan los procesos de proliferación y destrucción de células normales, con k_m, a_m los correspondientes a las mutaciones, y P_0 es un valor fijo de células normales. A partir de su significado biológico, es natural asumir que todos estos parámetros son positivos, así como las variables $P, Q \geq 0$.

Los puntos estacionarios de (4.3.1), (4.3.2) vienen dados por las ecuaciones

$$H + kP(-b - P - Q) = 0, \quad k_m Q(b_m - P - Q) = 0, \quad (4.3.3)$$

con

$$b = -P_0 + a/k, \quad b_m = P_0 - a_m/k_m. \quad (4.3.4)$$

De la primera ecuación en (4.3.3), se tiene

$$Q = -b - P + \frac{H}{kP}, \quad (4.3.5)$$

y de la segunda

$$Q = 0, \quad \text{o bien} \quad Q = b_m - P. \quad (4.3.6)$$

Haciendo $Q = 0$ en (4.3.5) la ecuación resultante para P tiene la solución positiva

$$P^* = \frac{b}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4H}{kb^2}} - 1 \right),$$

y el equilibrio $(P, Q) = (P^*, 0)$ siempre existe. Por otro lado, la combinación de (4.3.5) con la segunda ecuación de (4.3.6) da lugar a

$$P + Q = -b + \frac{H}{kP}, \quad P + Q = b_m,$$

lo que lleva a la solución

$$P_m^* = \frac{H}{k(b_m + b)} > 0, \quad Q_m^* = b_m - P_m^*. \quad (4.3.7)$$

Se dan por tanto dos casos:

- Si $b_m(b + b_m) > H/k$, entonces $Q_m^* = b_m - P_m^* > 0$ y hay dos equilibrios

$$(P, Q) = (P^*, 0), (P_m^*, Q_m^*).$$

- Si $b_m(b + b_m) \leq H/k$, entonces $Q_m^* = b_m - P_m^* \leq 0$ y sólo es posible un equilibrio $(P, Q) = (P^*, 0)$.

De la descripción del modelo, es claro que la leucemia puede desarrollarse sólo en el primer caso. La condición $b_m(b + b_m) > H/k$ puede escribirse, usando (4.3.4), en la forma

$$\left(\mu - \frac{kP_0}{a} \right) (\mu - 1) > \frac{kH}{a^2}, \quad \mu = \frac{ka_m}{ak_m}. \quad (4.3.8)$$

El parámetro $1/\mu$ se llama fortaleza de la mutación: si la mutación cancerígena decrece su tasa de muerte celular y diferenciación, aumentando la de proliferación, entonces $\mu < 1$ y, por tanto, $1/\mu > 1$, desarrollándose entonces con mayor fuerza.

En el caso de que se cumpla (4.3.8), la linealización de (4.3.1), (4.3.2) en cada equilibrio muestra que (P_m^*, Q_m^*) es estable y $(P^*, 0)$ inestable. Como el sistema puede reducirse, mediante un cambio de variable, a un sistema monótono (de manera similar a (4.2.1), (4.2.2)), la teoría de la sección 4.1 permite asegurar la existencia de un frente de ondas solución conectando $(P^*, 0)$ con (P_m^*, Q_m^*) . Su propagación corresponde a la expansión de las células cancerígenas y al desarrollo de la enfermedad.

4.3.2. Arterioesclerosis

La arterioesclerosis es una inflamación de las paredes de las arterias que puede dar origen a diversas enfermedades cardiovasculares. Uno de los factores de riesgo para la arterioesclerosis es una alta concentración de lipoproteínas de baja densidad (LDL) o colesterol ‘malo’. El proceso comienza cuando las proteínas LDL penetran en el interior de las paredes de las arterias. Su oxidación es considerada por el sistema inmunitario como una sustancia peligrosa

y éste reacciona, transformando las LDL en oxidación en células de tipo lipídico que amplifican la reacción inflamatoria. Al mismo tiempo, esta autoamplificación es compensada por una respuesta antiinflamatoria, que puede formar parte de la enfermedad, al generar capas fibrosas sobre las células adiposas, aislándolas del flujo sanguíneo y modificando la estructura vascular. La interacción entre el flujo y estas capas puede producir trombos o liberar sustancias peligrosas en la sangre.

Un modelo simple para estudiar el desarrollo de la arterioesclerosis puede formularse como un sistema RD en un intervalo $x \in [0, L]$ que representa el interior de la pared de la arteria. Es de la forma, [8]

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f_1(A) - \lambda_1 M, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f_2(A)M - \lambda_2 A.\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

En (4.3.9), M es la densidad de células del sistema inmunitario y A la densidad de sustancia inflamatoria generada por ellas. La función $f_1(A)$ representa la producción de células del sistema inmunitario del flujo sanguíneo generado por la sustancia en el proceso de autoamplificación; se supone que es de la forma

$$f_1(A) = \frac{\alpha_1 + \beta_1 A}{1 + A/\tau_1},$$

donde $\alpha_1 = f_1(0)$ corresponde al comienzo de la inflamación: es la producción de sustancia inflamatoria debida a la oxidación de LDL. El factor β_1 representa la autoamplificación en la producción de sustancia. El factor $1 + A/\tau_1$ representa la saturación de producción de células M , que es el efecto de la capa fibrosa generada por las células, con τ_1 como tiempo característico para su formación. Imponemos la condición

$$\tau_1 > \alpha_1/\beta_1,\tag{4.3.10}$$

para asumir que f_1 es creciente en A .

El término $f_2(A)M$ muestra la tasa de producción de sustancia inflamatoria y se asume que es de la forma

$$f_2(A) = \frac{\alpha_2 A}{1 + A/\tau_2},\tag{4.3.11}$$

donde $\alpha_2 A$ representa la autosecreción de sustancia y $1 + A/\tau_2$ representa la inhibición producida por el efecto antiinflamatorio.

Los términos $-\lambda_1 M$ y $-\lambda_2 A$ reflejan la degradación de las células M y la sustancia A (muerte celular), mientras que las derivadas segundas describen su difusión, en forma de desplazamiento celular en el interior de la pared.

Se asumen que todos los parámetros son positivos. Las condiciones (4.3.10), (4.3.11) muestran que el sistema (4.3.9) es monótono.

En el estudio de los equilibrios de (4.3.9), podemos expresar M como función de A

$$M = F_1(A) = \frac{f_1(A)}{\lambda_1}, \quad M = F_2(A) = \frac{\lambda_2 A}{f_2(A)}.\tag{4.3.12}$$

Se pueden destacar tres casos de interés biológico, [8]:

- Si la concentración de colesterol es baja (α_1 pequeño), hay un único equilibrio $E_0 = (M_0, A_0)$ (figura 4.7), con $A_0 = 0, M_0 = \alpha_1/\lambda_1$, que es estable. Por tanto, en este caso no puede desarrollarse arterioesclerosis.

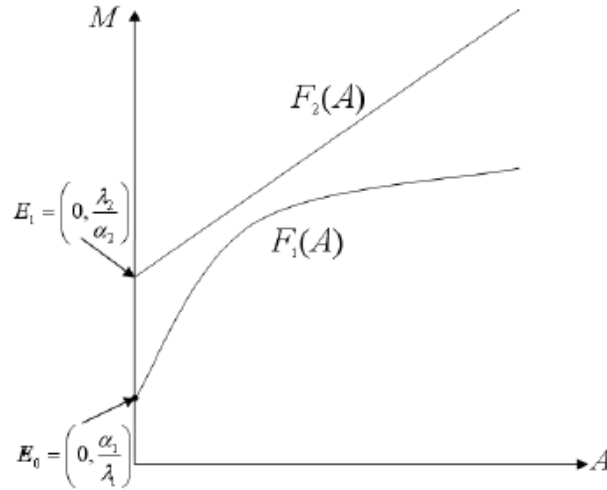


Figura 4.7: Equilibrios del sistema (4.3.9) para concentraciones bajas de colesterol, [8].

- Para valores medios de α_1 (concentraciones medias de colesterol), la igualdad $F_1(A) = F_2(A)$ en (4.3.12) tiene tres soluciones (figura 4.8): E_0 (que es estable) y otros dos, E_r (estable) y E_l (inestable). Tenemos entonces un caso biestable y, de la sección 4.1, la existencia de una onda viajera solución de (4.3.9) conectando E_r con E_l , que representa el posible desarrollo de la enfermedad como una onda de reacción-difusión.

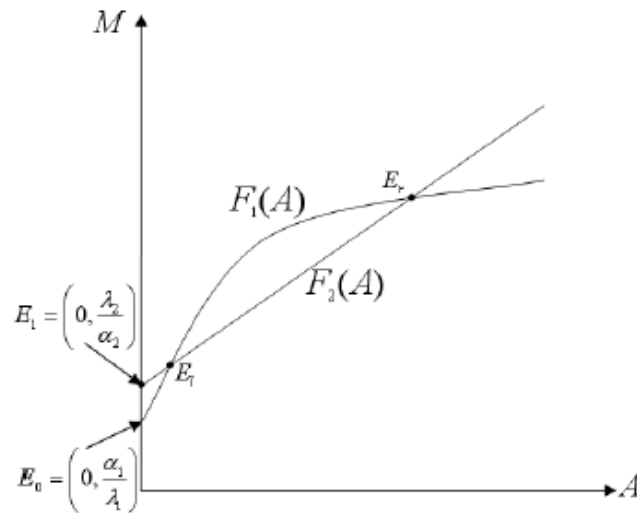


Figura 4.8: Equilibrios del sistema (4.3.9) para concentraciones medias de colesterol, [8].

- Para valores altos de α_1 , la igualdad $F_1(A) = F_2(A)$ tiene dos soluciones E_0 y E_r (figura 4.9), con E_0 inestable y E_r estable. Estamos entonces en un caso monoestable y la enfermedad puede desarrollarse a partir de frentes de onda que conectan E_0 con E_r a velocidades mayores que un valor minimal.

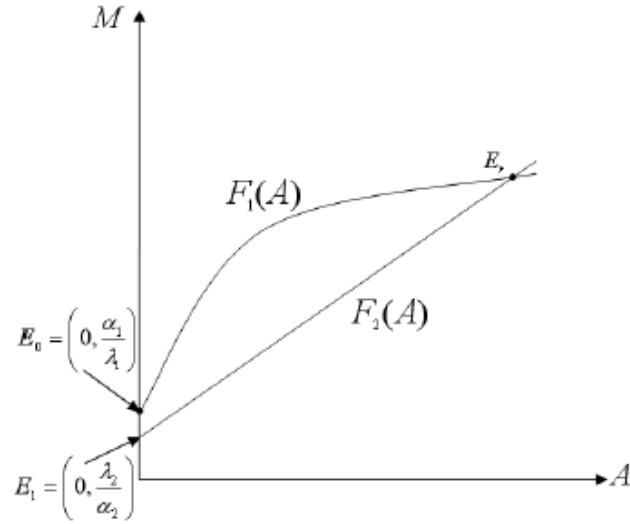


Figura 4.9: Equilibrios del sistema (4.3.9) para concentraciones altas de colesterol, [8].

Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz, A. Zeppetella, Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed, *Bull. Math. Biol.*, 41 (1979) 835-840.
- [2] N. Bacaër, *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer, 2011.
- [3] G. I. Barenblatt, Y. Zeldovich, On stability of flame propagation. *Prikl Mat Mekh*, 21 (1957) 856-859.
- [4] N. Bessonov, F. Crauste, I. Demin, V. Volpert, Dynamics of erythroid progenitors and erythroleukemia, *Math. Model Nat. Phenom.*, 4(3) (2009) 210-232.
- [5] F. Brauer, C. Castillo-Chávez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, 2012.
- [6] A.R. Champneys, B. Sandstede, Numerical computation of coherent structures, In: *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems* (B. Krauskopf, H.M. Osinga and J. Galan-Vioque, eds.), Springer (2007) 331-358.
- [7] J. D. Dockery, Numerical solution of travelling waves for reaction-diffusion equations via the Sinc-Galerking method, In: Bowers, K., Lund, J. (eds) *Computation and Control II. Progress in Systems and Control Theory*, vol 11. Birkhäuser, 1991.
- [8] N. El Khatib, S. Genieys, V. Volpert, Atherosclerosis initiation modeled as an inflammatory process, *Math Model Nat Phenom* 2(2) (2007) 126-141.
- [9] C. Fernández-Pérez, F. J. Vázquez Hernández, J. M. Vegas Montaner, *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias. Sistemas Dinámicos*, Thompson, 2003.
- [10] R. A. Fisher, *The genetical theory of natural selection*. Oxford University Press, 1930.
- [11] R. A. Fisher, The advance of advantageous genes. *Ann. of Eugenics*, 7 (1937) 355-369.
- [12] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [13] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, 1982.
- [14] M. W. Hirsch, S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza editorial, 1983.
- [15] K. P. Hadeler, F. Rothe, Traveling fronts in nonlinear diffusion equations, *J. Math. Biol.*, 2 (1975) 251-263.
- [16] D. W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford Univ. Press, 2007.

- [17] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, N. S. Piskunov, A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem. *Bull. Moscow Univ. Math. Mech.* 1:6, 1–26 (1937) Reprinted in: V.M. Tikhomirov (ed.) *Selected Works of A. N. Kolmogorov*, vol. 1, p. 242– 270. Kluwer, Dordrecht (1991). Also in: I. G. Petrowsky *Selected Works*, Part II, pp. 106–132. Gordon and Breach, Amsterdam (1996).
- [18] J. D. Logan, *A First Course in Differential Equations*, Springer, 2011.
- [19] J. D. Logan, *Applied Mathematics*, Willey, 2013.
- [20] R. K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Snider, *Fundamentals of Differential Equations*, 8th ed., Addidson-Wesley, 2012.
- [21] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.
- [22] G. Rosen, On the Fisher equation and the cubic polynomial equations for the propagation of species properties, *Bull. Math. Biol.*, 42 (1980) 95-106.
- [23] W. Rudin, *Análisis funcional*, McGraw-Hill, 1991.
- [24] A. Scott, *Nonlinear Science. Emergence and Dynamics of Coherent Structures*, Oxford Univ. Press, 1999.
- [25] V. Volpert, S. Petrovskii, Reaction-diffusion waves in biology, *Physics of Life Reviews*, 6 (2009) 267-310.
- [26] V. Volpert, S. Petrovskii, Reaction-diffusion waves in biology: new trends, recent developments, *Physics of Life Reviews*, 52 (2025) 1–20.
- [27] A. I. Volpert, V. A. Volpert, V. A. Volpert, *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, AMS, 2000.