



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

Universidad de Valladolid

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

PARTICIONES DE NÚMEROS ENTEROS

Autor: Marta González Arroyo

Tutor: José Enrique Marcos Naveira

Año: 2025



Resumen: En este trabajo se estudian las particiones de números enteros, desde propiedades elementales hasta teoremas elevados. Las aplicaciones son básicas en cuanto a que son funciones básicas de conteo. Se analizarán distintas familias de particiones, como las que se componen de partes distintas, impares, o que satisfacen ciertas condiciones de congruencia o propiedades globales, como las particiones autoconjugadas. Además, se elaborarán algunas tablas y ejemplos numéricos.

Palabras clave: Diagramas de Ferrers, funciones generatrices, teorema de los números pentagonales de Euler, particiones en partes distintas.

Abstract: This work studies the partitions of integers, ranging from elementary properties to advanced theorems. The applications are basic in the sense that they involve fundamental counting functions. Various families of partitions will be analyzed, such as those consisting of distinct parts, odd parts, or those that satisfy certain congruence conditions or global properties, such as self-conjugate partitions. In addition, some tables and numerical examples will be produced.

Keywords: Ferrers diagrams, generating functions, Euler's pentagonal number theorem, partitions into distinct parts.



Índice general

Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Composición	9
1.2. Funciones generatrices	10
2. Particiones en k partes	13
3. Diagramas de Ferrers	21
4. Particiones	25
4.1. El teorema de Euler de los números pentagonales	28
4.2. Grupos abelianos finitos	34
4.3. Relación entre el Grupo Simétrico y $p(n)$	35
4.4. Fórmula asintótica de Hardy y Ramanujan	38
5. Particiones en partes distintas	39
5.1. El teorema de Glaisher	47
5.2. El teorema de Schur	54
5.3. Particiones distintas que no son múltiplos de 4	60
6. Particiones autoconjugadas	65
7. Particiones en un número par/impar de partes	69
7.1. Particiones de n en un número par de partes	69
7.2. Particiones de n en un número impar de partes	71
Bibliografía	74



Introducción

La teoría de particiones es una rama de la teoría aditiva de números y de la combinatoria. Su estudio se centra en contar las diferentes maneras de escribir un número entero como suma de enteros positivos, ignorando el orden de los sumandos.

El primer estudio formal de las particiones se debe a Leonhard Euler (1707–1783), considerado el fundador de esta teoría. Euler introdujo el uso de funciones generadoras para estudiar las particiones y descubrió varias identidades fundamentales. Entre sus resultados más destacados se encuentra el teorema de los números pentagonales, en el que se ha hecho especial esfuerzo para obtener una demostración clara y que permite llegar a una fórmula recursiva para el número de particiones de un número n .

A principios del siglo XX, Ramanujan (1887–1920) descubrió sorprendentes congruencias para la función de particiones y colaboró con Hardy (1877–1947) para desarrollar una fórmula asintótica para $p(n)$. Las aportaciones de Ramanujan a la teoría de particiones son de gran profundidad, y aquí sólo se presentan algunas sin demostración.

A lo largo de este trabajo estudiaremos distintos tipos de particiones enteras. Se introducen primero las herramientas fundamentales, como las funciones generadoras, que usaremos solo en un sentido formal y que serán de gran utilidad en la demostración de igualdades entre distintos tipos de particiones. Nos serán de gran ayuda los diagramas de Ferrers, pues permiten visualizar de forma sencilla una partición.

En una etapa inicial del trabajo, se estudiarán también las particiones en un número fijo de partes k , lo que permite analizar cómo se distribuye un entero entre una cantidad determinada de sumandos. Este enfoque facilita el desarrollo de fórmulas recursivas y relaciones con otras particiones.

Se profundiza en las particiones en general, donde se presentan resultados clásicos como el teorema de los números pentagonales, la conexión con estructuras algebraicas como los grupos abelianos finitos y el grupo simétrico, y la fórmula asintótica de Hardy y Ramanujan. Estas particiones tienen aplicaciones sorprendentes en otros campos, como puede verse en [8].

Estudiaremos en detalle las particiones en partes distintas, que presentan una sorprendente correspondencia con las particiones en partes impares, descubierta por Euler. A partir de esta igualdad, consideraremos una generalización debida a Glaisher, cuyo teorema establece que el número de particiones de un entero donde ninguna parte se repite r o más veces coincide con el número de particiones cuyas partes no son divisibles por r . Además, exploraremos cómo el teorema de Schur conecta estas particiones con aspectos de la teoría modular. Iremos un paso más allá considerando también las particiones en partes distintas que no sean múltiplos de 4.

También se estudiarán otros tipos de particiones con propiedades particulares. Se consideran las particiones autoconjugadas, que presentan una interesante simetría en su diagrama de Ferrers y cuyo

número coincide con el de particiones en partes impares y distintas. Asimismo, se abordarán las particiones con un número par o impar de partes.

La Enciclopedia Online de Sucesiones de Enteros (OEIS) es una base de datos matemática creada por *N. J. A. Sloane* en 1964 que recopila sucesiones de números enteros de interés en diferentes áreas como la teoría de números, la combinatoria y la informática. Ha sido una herramienta muy útil en esta memoria, pues su base de datos permite identificar sucesiones ingresando algunos términos y proporciona información relevante como fórmulas, recurrencias, referencias y código para su generación. Además, es útil para consultar el estado actual de una sucesión conocida. Por su valor, recurriremos a esta página en varias ocasiones.

A lo largo del tiempo, esta colección creció y en 1995 se publicó en línea, dando origen a la OEIS, que hoy en día es mantenida por *The OEIS Foundation Inc.*. Actualmente, la OEIS contiene más de 350 000 sucesiones y sigue en constante expansión con contribuciones de matemáticos de todo el mundo.

Cada sucesión en la OEIS tiene un **identificador único** en el formato **AXXXXX**, donde **XXXXX** es un número que identifica la sucesión dentro de la base de datos.

Por ejemplo, la sucesión **A000009** representa *el número de particiones de un entero en partes impares*. Se puede consultar en la siguiente dirección web: <https://oeis.org/A000009>

Cada página de la OEIS ofrece información detallada sobre la sucesión, incluyendo definición y términos iniciales, propiedades matemáticas y fórmulas, ejemplos y aplicaciones, referencias y enlaces a artículos relacionados.

En esta memoria haremos referencia a la OEIS citando la página principal de la misma [14] y marcando el número de referencia de la sucesión.

Agradezco especialmente a mi tutor su orientación y apoyo durante el desarrollo de este trabajo, así como su ayuda en la comprensión de diversas demostraciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo incluimos una serie de conceptos y definiciones a las que recurriremos en demostraciones posteriores que encontramos a lo largo de toda la memoria. Hablaremos de composiciones y de funciones generatrices.

1.1. Composición

Las composiciones de un número entero son una herramienta fundamental en combinatoria y teoría de números. Permiten representar un entero como suma de partes. Su estudio incluye variantes como las composiciones fuertes y débiles, según se permitan o no valores nulos. Este trabajo analiza sus propiedades y su relevancia en distintos problemas matemáticos. Empezamos comentando definiciones básicas de la composición acompañados del libro *A Walk Through Combinatorics*[5] de Miklós Boná.

Definición 1.1. Un vector (a_1, a_2, \dots, a_k) con $a_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, k$, tal que:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n, \tag{1.1}$$

se dice que es una composición débil de n .

Si consideramos $a_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, k$, entonces (a_1, \dots, a_k) es una composición de n .

Pasamos ahora a una proposición y su posterior corolario en la que nos centramos en composiciones débiles de n en k partes que será de utilidad en el capítulo 2 de esta memoria.

Proposición 1.1. El número de composiciones débiles de n en k partes es:

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Demostración. Nuestro problema es equivalente a contar el número de formas de poner n bolas iguales en k cajas diferentes. Si colocamos las cajas en una línea recta, tendremos n bolas y $k-1$ paredes separando las k cajas. Esto es:

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

Pues en el numerador estamos contando todas las maneras de permutar las n bolas y $k - 1$ paredes distintas. Como todas son iguales, si permutamos las bolas entre sí no estamos generando una nueva configuración, luego lo dividimos por $n!$ para eliminar todas esas permutaciones redundantes. Análogamente lo dividimos por el número de paredes.

□

Corolario 1.2. El número de composiciones de n en k partes es:

$$\binom{n-1}{k-1}. \quad (1.2)$$

Demostración. Consideramos $n = x_1 + \dots + x_k$. Reemplazamos los x_i por $y_i := x_i - 1$ para todo $i = 1, \dots, k$. Entonces,

$$\sum y_i = n - k. \quad (1.3)$$

Aplicando la proposición anterior a $n - k$, concluimos.

□

1.2. Funciones generatrices

Una función generatriz es una serie de potencias cuyos coeficientes corresponden a los términos de una sucesión dada. En este trabajo consideramos las funciones generatrices de manera formal, por lo que no nos preocupamos por la convergencia de la serie, sino únicamente por las propiedades algebraicas de sus coeficientes. Se utilizan para resolver recurrencias, contar estructuras y modelar problemas. Empezamos esta sección con unas definiciones básicas.

Definición 1.2. Sea una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$, se define la *función generatriz ordinaria* de dicha sucesión a la serie de potencias

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ejemplo 1.1.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}.$$

Una operación fundamental con funciones generatrices es su producto, que permite combinar dos sucesiones y obtener información sobre estructuras más complejas. A continuación, describimos cómo se realiza esta multiplicación.

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}_{n \geq 0}$ y $\{b_n\}_{n \geq 0}$ con funciones generatrices ordinarias

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

el producto de ambas funciones generatrices es

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Dejamos a continuación un resumen de funciones generatrices útiles en este trabajo.

Función generatriz	El número de particiones de n en partes que son
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}$	Impares
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m}}$	Pares
$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{m^2}}$	Cuadrados
$\prod_p \frac{1}{1-x^p}$	Primos
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^m)$	Distintos
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{2m})$	Pares y distintos
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{2m-1})$	Impares y distintos
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{m^2})$	Cuadrados distintos
$\prod_p (1+x^p)$	Primos distintos
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^m+x^{2m})$	Cada parte aparece, a lo sumo, 2 veces
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^m+x^{2m}+x^{3m})$	Cada parte aparece, a lo sumo, 3 veces
$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n+x^{2n}}$	Schur
$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{2m+1}+x^{2(2m+1)}+x^{3(2m+1)})$	distintos, no múltiplos de 4

Para mayor información consultar el capítulo 14 del libro [4] de T.M Apostol.



Capítulo 2

Particiones en k partes

En este capítulo estudiamos propiedades de las particiones de enteros positivos en un número fijo k de partes. Por ejemplo, el número 10 admite 5 particiones en 2 partes:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5,$$

mientras que puede escribirse de 8 formas distintas en 3 partes:

$$10 = 1 + 1 + 8 = 1 + 2 + 7 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$$

Definición 2.1. Denotamos por $p_k(n)$ el número de particiones del entero n en exactamente k partes no decrecientes, es decir, el número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad \text{con } 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k.$$

Nota. La condición $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$ se impone para evitar contar como diferentes aquellas particiones que solo difieren en el orden de las sumas.

Ejemplo 2.1. Tenemos $p_3(7) = 4$, ya que existen cuatro particiones de 7 en 3 partes:

$$7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3.$$

En la Tabla 2.1 recogemos los valores de $p_k(n)$ para $1 \leq k \leq 15$ y $1 \leq n \leq 40$.

Nota. Mencionamos a continuación unas propiedades elementales:

- $p_1(n) = 1$.
- $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$.
- $p_n(n) = 1$.
- Si $n < k$, entonces $p_k(n) = 0$.
- Por convenio, $p_k(0) = 1$.

Una fórmula recurrente que permite calcular los valores de $p_k(n)$ de forma inductiva es la siguiente:

Proposición 2.1. Si $2 \leq k \leq n$ se cumple que

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k), \quad (2.1)$$

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n-k).$$

Demostración. Consideramos las formas de dividir n en k partes. Cada partición se puede obtener de dos maneras distintas.

- **Caso 1:** La partición contiene una parte de tamaño 1. Al restar 1 a n , obtenemos una partición de $n-1$ en exactamente $k-1$ partes, por lo que hay $p_{k-1}(n-1)$ formas.
- **Caso 2:** Todas las partes son al menos de tamaño 2. Si restamos 1 a cada parte, reducimos el problema a particionar $n-k$ en k partes, lo que ocurre en $p_k(n-k)$ formas.

Dado que estos casos son disjuntos y agotan todas las posibilidades, se tiene la recurrencia deseada.

Para justificar la segunda igualdad, procedemos como en el corolario 1.2. Consideramos de nuevo la transformación

$$y_i = x_i - 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, k,$$

que convierte una partición de n en k partes estrictamente positivas en una solución de

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k,$$

donde $y_i \geq 0$. Es decir, particionar n en k enteros positivos es equivalente a particionar $n-k$ en k enteros no negativos.

Ahora bien, no exigimos que todos los y_i sean estrictamente positivos. Luego algunas de esas partes pueden ser nulas, por lo que estamos considerando el número de particiones de $n-k$ en s partes siendo s un número entre $1, \dots, k$. Es decir,

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n-k).$$

□

Ejemplo 2.2. Vemos un ejemplo de la segunda igualdad de la Proposición 2.1 para $k = 5$ y $n = 20$:

$$p_5(20) = \sum_{i=1}^5 p_i(15).$$

$$p_1(15) = 1, \quad p_2(15) = 7, \quad p_3(15) = 19, \quad p_4(15) = 27, \quad p_5(15) = 30.$$

Entonces:

$$p_5(20) = 1 + 7 + 19 + 27 + 30 = 84.$$

Además, en el caso de particiones de un número en 3 partes disponemos de una proposición que nos permite calcularlo con exactitud que podemos encontrar en [pág 132, [13]].

Proposición 2.2. Denotamos $\{b\}$ el entero más próximo a b , es decir, $\{b\} = \lfloor b + 1/2 \rfloor$. Se cumple que $p_3(n) = \{n^2/12\}$.

Demostración. Sea $a_3(n)$ el número de soluciones de $n = x_1 + x_2 + x_3$, donde $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$. En estas condiciones, $a_3(n) = p_3(n + 3)$ y escribiendo $y_3 = x_3$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_1 = x_1 - x_2$ vemos que $a_3(n)$ es el número de soluciones de $n = y_1 + 2y_2 + 3y_3$, con $y_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3$.

Consideramos la función generatriz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_3(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Sea $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Su descomposición en fracciones parciales da como resultado

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_3(n)x^n = \frac{1}{6}(1-x)^{-3} + \frac{1}{4}(1-x)^{-2} + \frac{17}{72}(1-x)^{-1} + \frac{1}{8}(1+x)^{-1} + \frac{1}{9}(1-wx)^{-1} + \frac{1}{9}(1-w^2x)^{-1}. \quad (2.2)$$

Usando la fórmula que puede verse en [pág 72, [13]] ,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j}{j} x^j = (1-x)^{-a-1},$$

aplicando esto a (2.2), llegamos a

$$a_3(n) = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{1}{9}(w^n + w^{2n}),$$

lo que implica

$$|a_3(n) - \frac{1}{12}(n+3)^2| \leq \frac{7}{12} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} < \frac{1}{2}.$$

Lo que concluye la demostración. □

Vemos a continuación una fórmula asintótica en este tipo de particiones, con la que podemos aproximar el valor de $p_k(n)$ para valores altos de n .

Teorema 2.3. Si k está fijo, entonces cuando $n \rightarrow +\infty$, se cumple la siguiente aproximación asintótica:

$$p_k(n) \approx \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

Demostración. Si $n = x_1 + \dots + x_k$ con $x_1 \geq \dots \geq x_k \geq 1$ entonces, las $k!$ permutaciones de (x_1, \dots, x_k) tienen de soluciones los enteros positivos $\binom{n+k-1}{k-1}$, no necesariamente siendo todos diferentes, entonces

$$k!p_k(n) \geq \binom{n-1}{k-1}.$$

Por (1.2), considerando $y_i := x_i + (k - i)$ con $1 \leq i \leq k$, los y_i son distintos y $y_1 + \dots + y_k = n + \frac{k(k-1)}{2}$.

Luego,

$$k!p_k(n) \leq \binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}.$$

Para grandes valores de n , las combinaciones $\binom{n+m}{k}$ se aproximan por

$$\binom{n+m}{k} \approx \frac{n^k}{k!}.$$

En nuestro caso, $m = \frac{k(k-1)}{2}$, siendo k fijo, luego utilizando esta aproximación, obtenemos:

$$p_k(n) \approx \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!} \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

□

Podemos también considerar cuántas particiones de n hay en k partes considerando $k = 1, 2, 3, \dots$

Definición 2.2. Denotamos mediante $p_{\leq k}(n)$ el número de particiones de n en, **a lo sumo**, k enteros positivos; es decir, el número de soluciones enteras de la ecuación.

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \quad \text{tal que } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k.$$

Adoptamos el convenio $p_{\leq k}(0) = 1$

Para $n = 7$ y $k = 3$ tenemos que $p_{\leq 3}(7) = 8$,

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 1 + 3 + 3 = 1 + 2 + 4 = 1 + 1 + 5 = 2 + 2 + 3.$$

Nota. Por definición vemos que,

$$p_{\leq k}(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n).$$

Otra partición de n en k partes es considerando que todas las partes tienen que ser distintas, es una partición con equivalencias sorprendentes que veremos más adelante.

Definición 2.3. Denotamos mediante $pd_k(n)$ el número de particiones de n en k partes donde todos sus números son **enteros positivos distintos**; es decir, el número de soluciones enteras de la ecuación

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad \text{donde } 1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k.$$

Por ejemplo, para $n = 11$ y $k = 3$ tenemos que $pd_3(11) = 5$,

$$11 = 1 + 6 + 4 = 1 + 7 + 3 = 1 + 8 + 2 = 2 + 3 + 6 = 2 + 5 + 4.$$

Utilizando la nota anterior mostramos un teorema en el que relacionamos las particiones en k partes y las particiones en a lo sumo k partes, así como las particiones en k enteros positivos distintos.

Teorema 2.4. Se cumple que el número de particiones de n en k partes es igual al número de particiones de $n - k$ en a lo sumo k partes, es decir,

$$p_k(n) = p_{\leq k}(n - k) = \sum_{s=1}^k p_s(n - k). \quad (2.3)$$

Además, se cumple que el número de particiones de n en k partes distintas es igual al número de particiones de $n - (k - 1)k/2$ en k partes.

$$pd_k(n) = p_k(n - (k - 1)k/2). \quad (2.4)$$

Demostración. La primera afirmación es cierta por la igualdad anterior y aplicando la proposición 2.1,

$$p_{\leq k}(n - k) = \sum_{i=1}^k p_i(n - k) = p_k(n).$$

Vemos ahora que se cumple

$$pd_k(n) = p_k(n - (k - 1)k/2).$$

Dado que

$$\frac{k(k - 1)}{2} = 0 + 1 + 2 + \dots + (k - 1),$$

al restarle esta cantidad a n , se transforma la restricción inicial,

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k,$$

en una condición estrictamente creciente, es decir,

$$1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k.$$

Esto significa que contar las particiones de n en partes distintas es equivalente a contar las particiones de $n - (k - 1)k/2$ sin restricciones, ya que se ha descontado la cantidad mínima necesaria para que todas las partes sean diferentes. \square

Por la proposición anterior podemos ver que

$$p_{\leq s}(n) = p_s(n + s) \quad \text{para } s = 4, 5, 6 \dots$$

Se pueden consultar los detalles en la enciclopedia online OEIS, donde se encuentran las siguientes sucesiones: particiones de n en a lo sumo 4 partes, A001400; particiones de n en a lo sumo 5 partes, A001401; y particiones de n en a lo sumo 6 partes, A001402.

La siguiente proposición nos permite, mediante una fórmula inductiva, calcular las partes en las que dividir n en a lo sumo k partes.

Proposición 2.5. Si $2 \leq k \leq n$, se cumple que

$$p_{\leq k}(n) = p_{\leq k-1}(n-1) + p_{\leq k}(n-k). \quad (2.5)$$

$$p_{\leq k}(n) = \sum_{i=1}^k p_{\leq i}(n-k).$$

Demostración. Podemos deducirlo del teorema 2.3 y proposición 2.1

$$p_{\leq k}(n) = p_k(n+k) = p_{k-1}(n+k-1) + p_k(n+k-k) = p_{\leq k-1}(n-1) + p_{\leq k}(n-k).$$

$$p_{\leq k}(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n) = \sum_{i=1}^k p_{\leq k}(n-k).$$

□

Podemos considerar una variante de la fórmula inductiva anterior aplicada a las particiones de n en k partes distintas.

Teorema 2.6. Se cumple que

$$pd_k(n) = pd_{k-1}(n-k) + pd_k(n-k).$$

Demostración. Podemos deducirlo de la igualdad 2.5 y la proposición 2.1. Sabemos por (2.4) que

$$pd_k(n) = p_k(n - k(k-1)/2).$$

Y por (2.1), sabemos que $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$. Luego,

$$pd_k(n) = p_k(n - k(k-1)/2) = p_{k-1}(n - k(k-1)/2 - 1) + p_k(n - k(k-1)/2 - k) = pd_{k-1}(n-1) + pd_k(n-k).$$

Como queríamos probar.

□

Además, es claro que si $n < \frac{k(k-1)}{2}$, entonces $pd_k(n) = 0$.

El lector puede consultar a continuación las tablas de particiones de n en k partes, $p_k(n)$, y particiones de n en k partes distintas, $pd_k(n)$.

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1	0	0	0
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1	0	0
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1	0
14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1
15	1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	3	2	1
16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	2
17	1	8	24	39	47	44	38	29	22	15	11	7	5	3
18	1	9	27	47	57	58	49	40	30	22	15	11	7	5
19	1	9	30	54	70	71	65	52	41	30	22	15	11	7
20	1	10	33	64	84	90	82	70	54	42	30	22	15	11
21	1	10	37	72	101	110	105	89	73	55	42	30	22	15
22	1	11	40	84	119	136	131	116	94	75	56	42	30	22
23	1	11	44	94	141	163	164	146	123	97	76	56	42	30
24	1	12	48	108	164	199	201	186	157	128	99	77	56	42
25	1	12	52	120	192	235	248	230	201	164	131	100	77	56
26	1	13	56	136	221	282	300	288	252	212	169	133	101	77
27	1	13	61	150	255	331	364	352	318	267	219	172	134	101
28	1	14	65	169	291	391	436	434	393	340	278	224	174	135
29	1	14	70	185	333	454	522	525	488	423	355	285	227	175
30	1	15	75	206	377	532	618	638	598	530	445	366	290	229
31	1	15	80	225	427	612	733	764	732	653	560	460	373	293
32	1	16	85	249	480	709	860	919	887	807	695	582	471	378
33	1	16	91	270	540	811	1009	1090	1076	984	863	725	597	478
34	1	17	96	297	603	931	1175	1297	1291	1204	1060	905	747	608
35	1	17	102	321	674	1057	1367	1527	1549	1455	1303	1116	935	762
36	1	18	108	351	748	1206	1579	1801	1845	1761	1586	1380	1158	957
37	1	18	114	378	831	1360	1824	2104	2194	2112	1930	1686	1436	1188
38	1	19	120	411	918	1540	2093	2462	2592	2534	2331	2063	1763	1478
39	1	19	127	441	1014	1729	2400	2857	3060	3015	2812	2503	2164	1819
40	1	20	133	478	1115	1945	2738	3319	3589	3590	3370	3036	2637	2241

Cuadro 2.1: Particiones de n en k partes, $p_k(n)$ para $1 \leq k \leq 15$ y $1 \leq n \leq 40$.

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0	0	0
5	1	2	0	0	0	0	0	0
6	1	2	1	0	0	0	0	0
7	1	3	1	0	0	0	0	0
8	1	3	2	0	0	0	0	0
9	1	4	3	0	0	0	0	0
10	1	4	4	1	0	0	0	0
11	1	5	5	1	0	0	0	0
12	1	5	7	2	0	0	0	0
13	1	6	8	3	0	0	0	0
14	1	6	10	5	0	0	0	0
15	1	7	12	6	1	0	0	0
16	1	7	14	9	1	0	0	0
17	1	8	16	11	2	0	0	0
18	1	8	19	15	3	0	0	0
19	1	9	21	18	5	0	0	0
20	1	9	24	23	7	0	0	0
21	1	10	27	27	10	1	0	0
22	1	10	30	34	13	1	0	0
23	1	11	33	39	18	2	0	0
24	1	11	37	47	23	3	0	0
25	1	12	40	54	30	5	0	0
26	1	12	44	64	37	7	0	0
27	1	13	48	72	47	11	0	0
28	1	13	52	84	57	14	1	0
29	1	14	56	94	70	20	1	0
30	1	14	61	108	84	26	2	0
31	1	15	65	120	101	35	3	0
32	1	15	70	136	119	44	5	0
33	1	16	75	150	141	58	7	0
34	1	16	80	169	164	71	11	0
35	1	17	85	185	192	90	15	0
36	1	17	91	206	221	110	21	1
37	1	18	96	225	255	136	28	1
38	1	19	102	246	291	163	38	2
39	1	19	108	270	333	199	49	3
40	1	19	114	297	377	235	65	5

Cuadro 2.2: Particiones de n en k partes distintas, $pd_k(n)$ para $1 \leq k \leq 8$ y $1 \leq n \leq 30$.

Capítulo 3

Diagramas de Ferrers

Muchos teoremas sobre particiones pueden demostrarse fácilmente representando cada partición en un diagrama de puntos, conocido como el *diagrama de Ferrers*. En este diagrama, cada término de la partición se representa en una fila de puntos, ordenando los términos en orden descendente, con el mayor en la parte superior. En ocasiones, resulta más conveniente usar cuadrados en lugar de puntos; en este caso, el diagrama es conocido como el *diagrama de Young*¹, según algunos autores.

Por ejemplo, la partición $(5, 4, 2, 1)$ del número 12 se representa mediante los siguientes diagramas:

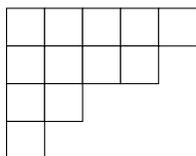


Figura 3.1: Diagrama de Young.

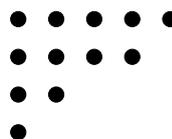
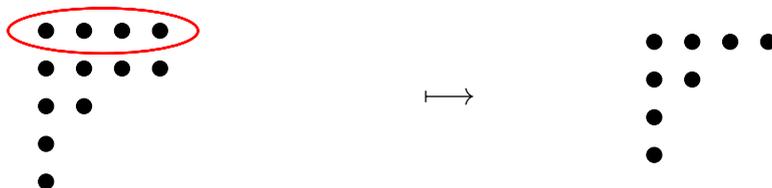


Figura 3.2: Diagrama de Ferrers.

Muchos de los temas en este capítulo se enfocarán en diversas transformaciones de los diagramas de Ferrers. Si desea profundizar en este asunto, puede consultar el libro de George E. Andrews² y Kimmo Eriksson, *Integer Partitions* [3].

Si una transformación es invertible, entonces se trata de una biyección y puede utilizarse para probar identidades de particiones. Como ejemplo simple de una transformación, consideremos el siguiente diagrama de Ferrers y eliminemos la fila superior:



¹Alfred Young (1873–1940) fue un matemático británico conocido por sus contribuciones a la teoría de particiones y representaciones de grupos. Introdujo el diagrama de Young, clave en combinatoria y teoría de representaciones. Su trabajo influyó en la teoría del grupo simétrico y en la física matemática. Publicó importantes investigaciones sobre formas invariantes y álgebra de representaciones.

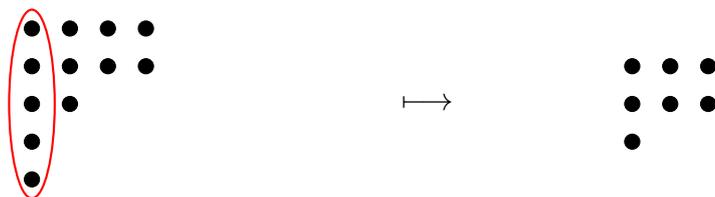
²George E. Andrews (1938) es un matemático estadounidense especializado en teoría de particiones y combinatoria enumerativa. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Pennsylvania bajo la dirección de Hans Rademacher. Es conocido por su trabajo en las identidades de Ramanujan y por descubrir el *Cuaderno Perdido de Ramanujan*. Actualmente es profesor en la Universidad Estatal de Pensilvania.

Si r es la longitud de la fila eliminada, entonces todas las filas del nuevo diagrama tendrán una longitud menor o igual que r . Inversamente, podemos añadir una fila de longitud r para recuperar la partición original. Esto define una biyección entre las particiones de n en las que la parte más grande es exactamente r y las particiones de $n - r$ en las que todas las partes son menores o iguales que r .

Podemos también demostrar esta igualdad con el diagrama de Ferrers:

$$p_k(n) = p_{\leq k}(n - k).$$

Consideramos una partición cualquiera de n en k partes. La longitud de la primera columna es igual al número de partes, es decir, tiene exactamente longitud k . Al eliminarla, obtenemos un nuevo gráfico de Ferrers de la partición de $n - k$ en partes menores o iguales que k . Luego:



Llegamos a que $p_k(n) = p_{\leq k}(n)$.

Pasamos ahora a algunas definiciones básicas sobre estos diagramas.

Definición 3.1. La partición que tenemos al leer el diagrama de Ferrers cambiando filas por columnas se llama *conjugado* de la partición original. Por ejemplo, la partición conjugada de 12,

$$12 = 4 + 4 + 2 + 1 + 1, \quad 12 = 5 + 3 + 2 + 2.$$

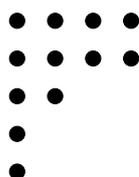


Figura 3.3: Original.

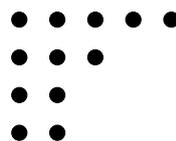


Figura 3.4: Conjugado.

La siguiente definición es un caso particular que obtenemos al hacer un conjugado.

Definición 3.2. Decimos que una partición es *autoconjugada* si coincide con su conjugada, es decir, si su diagrama es simétrico respecto a la diagonal principal.

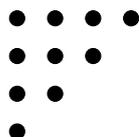


Figura 3.5: Original.

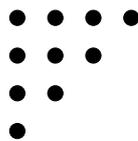


Figura 3.6: El conjugado coincide con la original, luego es autoconjugado.

Con estas definiciones probamos diversas identidades, como por ejemplo, que el número de particiones auto-conjugadas de n es igual al número de particiones de n en partes impares distintas.

A continuación tenemos una serie de proposiciones cuya demostración es sencilla usando diagramas de Ferrers:

Proposición 3.1. El número de particiones de n en k partes, $p_k(n)$, es igual al número de particiones de n en un número cualquiera de partes, la mayor de las cuales es k .

El número de particiones de n en, a lo sumo, k partes, $p_{\leq k}(n)$, es igual al número de particiones de n en un número cualquiera de partes que no son mayores que k .

Es decir, $p_k(n)$ es el número de soluciones enteras de la ecuación

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_p, \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{cualquiera,} \quad 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{p-1} \leq x_p = k.$$

A su vez, $p_{\leq k}(n)$, es el número de soluciones enteras de la ecuación

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_p, \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{cualquiera,} \quad 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{p-1} \leq x_p \leq k.$$

Una consecuencia inmediata:

Proposición 3.2. El valor $p_{\leq k}(n)$ es número de soluciones enteras de la ecuación

$$n = z_1 + 2z_2 + \cdots + kz_k, \quad 0 \leq z_j.$$



Capítulo 4

Particiones

El estudio de las particiones de enteros ha sido una fuente de profundos resultados matemáticos. Mencionamos a dos matemáticos sumamente importantes en este campo. Euler introdujo su función generatriz y descubrió relaciones inesperadas, como la conexión con los números pentagonales. Ramanujan¹ encontró congruencias sorprendentes, que posteriormente fueron explicadas con teoría modular. Este capítulo explora las particiones, sus propiedades y aplicaciones en distintos campos de las matemáticas.

Esta sucesión corresponde con el número A000041 de la OEIS.

Definición 4.1. Se define $p(n)$, *el número de particiones de n* , como el número de formas diferentes de expresar n como suma de otros enteros positivos (sin acotar la cantidad de estos). Es decir $p(n)$ es el número de soluciones de

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{cualquiera}, \quad 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k.$$

Nótese que $p(n)$ es el número de soluciones de

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n, \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Por convenio $p(0) = 1$.

Es evidente que $p(n) = p_{\leq n}(n)$. Además tenemos que $p(n)$ es el número de soluciones enteras de la ecuación

$$n = 1.z_j + 2.z_j + \dots + n.z_n, \quad 0 \leq z_i.$$

También podemos relacionar el número de particiones de n en k partes a partir de las definiciones vistas pues para $k > n/2$, tenemos que $n - k \leq n/2 \leq k$. En consecuencia,

$$p_k(n) = \sum_{s=1}^k p_s(n - k) = \sum_{s=1}^{n-k} p_s(n - k) = p(n - k),$$

siendo este último valor el número total de particiones de $n - k$.

Podemos observar a continuación una tabla con los primeros valores de $p(n)$.

El siguiente teorema nos muestra cuál es la función generadora de $p(n)$, pues $p(n) = p_{\leq n}(n)$.

¹Srinivasa Ramanujan (1887-1920) fue un matemático autodidacta cuya creatividad revolucionó la teoría de números. Descubrió sorprendentes congruencias en las particiones de enteros y contribuyó al estudio de las funciones modulares. Su colaboración con Hardy permitió el desarrollo de nuevas fórmulas asintóticas y resultados en análisis matemático. A pesar de su corta vida, sus ideas siguen influyendo en diversas áreas de las matemáticas modernas.

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	17	297	34	12310
1	1	18	385	35	14883
2	2	19	490	36	17977
3	3	20	627	37	21637
4	5	21	792	38	26015
5	7	22	1002	39	31185
6	11	23	1255	40	37338
7	15	24	1575	41	44583
8	22	25	1958	42	53174
9	30	26	2436	43	63261
10	42	27	3010	44	75175
11	56	28	3718	45	89134
12	77	29	4565	46	105558
13	101	30	5604	47	124754
14	135	31	6842	48	147273
15	176	32	8349	49	173525
16	231	33	10143	50	204226

Cuadro 4.1: Número de particiones de n , $p(n)$, para $1 \leq n \leq 50$.

Teorema 4.1. Para $|x| < 1$ tenemos

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

en donde $p(0) = 1$.

Demostración. Vamos a dar un deducción formal. Si cada factor del producto lo desarrollamos en serie de potencias (una serie geométrica) obtenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots).$$

Ahora multiplicamos las series de la derecha, tratándolas como si fuesen polinomios y agrupándolas según las potencias de x a fin de obtener una serie de potencias de la forma

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^k.$$

Queremos demostrar que $a(k) = p(k)$. Suponemos que hemos tomado el término de la primera serie, el término x^{2k_2} de la segunda, el término x^{3k_3} de la tercera, ... y el término x^{mk_m} de la m -ésima, en donde cada $k_i \geq 0$. Su producto es

$$x^{k_1} x^{2k_2} x^{3k_3} \dots x^{mk_m} = x^k,$$

en donde

$$k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + mk_m.$$

Este resultado se puede escribir también como sigue:

$$k = (1 + 1 + \dots + 1) + (2 + 2 + \dots + 2) + \dots + (m + m + \dots + m),$$

en donde el primer paréntesis contiene k_1 unos, el segundo k_2 doses, y así sucesivamente. Esta es una partición de k en sumandos positivos. Entonces, cada partición de k producirá uno de los términos de x^k y, recíprocamente, cada término x^k procede de una partición conveniente de k . Por consiguiente $a(k)$, el coeficiente de x^k , es igual a $p(k)$, el número de particiones de k . \square

Las propiedades combinatorias de las particiones también permiten interpretar fácilmente ciertas relaciones aritméticas. Una de ellas describe el número de particiones de un entero que contienen una parte concreta, en función de particiones de un entero menor.

Proposición 4.2. El número de particiones de un entero n que contienen una parte fija $p \leq n$ es igual al número de particiones de $n - p$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{N}$ fijo con $p \leq n$. Queremos contar las particiones de n que contienen a p como una de sus partes.

Dada una partición de n que contiene a p , podemos escribirla como:

$$n = p + \mu,$$

donde μ es una partición de $n - p$.

Por tanto, a cada partición de n que contenga a p podemos asociarle una partición de $n - p$ simplemente añadiendo p como una parte más. El recíproco es análogo.

Por tanto, el número de particiones de n que contienen la parte p es igual a $p(n - p)$. \square

Corolario 4.3. Sea $n \geq 2$, $m, k, r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r < n$ y $h = m - k \geq 0$. Entonces, el número de particiones de $mn - r$ que contienen kn como una parte es igual al número de particiones de $hn - r$. Es decir:

$$\text{Número de particiones de } mn - r \text{ que contienen } kn = p(hn - r).$$

Podemos también relacionar las particiones de n con las particiones de n en partes distintas mediante el siguiente teorema.

Teorema 4.4. Se cumple que $p(n)$ es el número de particiones de $\frac{n(n+3)}{2}$ en n partes distintas,

$$pd_n \left(\frac{n(n+3)}{2} \right) = p(n).$$

Veamos primeramente un ejemplo.

Ejemplo 4.1. Para $n = 6$ tenemos que $p(6) = 11$ y $\frac{6(6+3)}{2} = 27$, luego el número de particiones de 27 en 6 partes distintas es 11, $pd_6(27) = 11$.

Demostración. Consideremos una partición de n en partes enteras positivas con $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_l$ y tal que

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_l = n.$$

Sabemos que el número total de particiones de n en partes positivas es precisamente $p(n)$.

Ahora, tomemos la suma de los primeros n enteros positivos:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si sumamos una partición cualquiera de n a esta partición de S_n ordenadamente, cada término k_i se suma al correspondiente entero en la partición de S_n :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-l) + ((n-l+1) + k_1) + ((n-l+2) + k_2) + \dots + ((n-2) + k_{l-2}) + ((n-1) + k_{l-1}) + (n + k_l) \quad (4.1)$$

La suma total ahora es

$$S_n + n = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$$

Luego en (4.1) hemos generado una partición de $\frac{n(n+3)}{2}$ en n partes distintas.

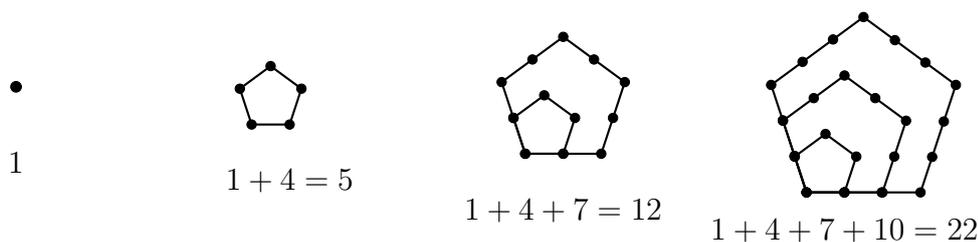
Dado que cada partición de n genera una partición distinta de $\frac{n(n+3)}{2}$ en n partes distintas, y viceversa, concluimos que el número de particiones de $\frac{n(n+3)}{2}$ en n partes distintas es igual a $p(n)$, es decir,

$$pd_n \left(\frac{n(n+3)}{2} \right) = p(n).$$

Esto completa la demostración. □

4.1. El teorema de Euler de los números pentagonales

En esta sección vamos a hablar de los *números poligonales*, y de ellos nos centraremos en los *números pentagonales*. Su idea nace de los pitagóricos, quienes relacionaron los números con la geometría. Vemos un ejemplo visual:



Si $w(n)$ designa la suma de los n primeros términos de esta progresión, entonces

$$w(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (3k+1) = \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

$$w(-n) = \frac{3n^2 + n}{2}.$$

Se denominan *números pentagonales*.

Los primeros valores son

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$w(m)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117
$w(-m)$	2	7	15	26	40	57	77	100	126

Para más información puede consultar el libro [[4], IH].

Gracias a estos números característicos llegamos a la famosa fórmula recursiva de Euler² para $p(n)$.

Teorema 4.5. Sea $p(n) = 0$ para $n < 0$. Entonces, para $n \geq 1$, se tiene que

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} [p(n - w(m)) + p(n - w(-m))] =$$

$$= p(n - 1) + p(n - 2) - p(n - 5) - p(n - 7) + \dots$$

Demostración. La demostración de este teorema se presentará más adelante. □

Ejemplo 4.2.

$$p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = 42.$$

Estudiamos a continuación dos sucesiones relacionadas con particiones en partes distintas que resultarán útiles en la demostración del teorema. Sea $p_e(n)$ el número de particiones de n en partes distintas que tienen un número par de partes, y sea $p_o(n)$ el número de particiones de n en partes distintas con un número impar de partes.

Estas sucesiones se corresponden con las entradas A067661 y A067659 de la OEIS, correspondientes a $p_e(n)$ y $p_o(n)$, respectivamente.

n	$p_e(n)$	n	$p_e(n)$	n	$p_e(n)$
0	1	10	5	20	32
1	0	11	6	21	38
2	0	12	7	22	45
3	1	13	9	23	52
4	1	14	11	24	61
5	2	15	13	25	71
6	2	16	16	26	83
7	3	17	19	27	96
8	3	18	23	28	111
9	4	19	27	29	128

Cuadro 4.2: Valores de $p_e(n)$ para $0 \leq n \leq 29$.

n	$p_o(n)$	n	$p_o(n)$	n	$p_o(n)$
0	0	10	5	20	32
1	1	11	6	21	38
2	1	12	8	22	44
3	1	13	9	23	52
4	1	14	11	24	61
5	1	15	14	25	71
6	2	16	16	26	82
7	2	17	19	27	96
8	3	18	23	28	111
9	4	19	27	29	128

Cuadro 4.3: Valores de $p_o(n)$ para $0 \leq n \leq 29$.

Para la demostración del teorema de los números pentagonales necesitamos enunciar y demostrar unos teoremas que usaremos en el mismo.

Comenzamos con un teorema que estudia la diferencia de las funciones $p_e(n)$ y $p_o(n)$, que puede consultarse en diversas fuentes, como el libro de Apostol (págs. 388–393, [4]), el texto de Van Lint y Wilson (págs. 158–159, [13]), y el apartado 19.11 de Hardy y Wright (págs. 286–287, [10]).

²Leonhard Euler (1707-1783) fue un matemático suizo que realizó contribuciones fundamentales en diversas áreas, incluyendo la teoría de números, el cálculo y la topología. Introdujo la notación funcional moderna y desarrolló importantes identidades en particiones y series infinitas. Su trabajo sentó las bases de muchas ramas de las matemáticas actuales y sigue siendo una referencia esencial en la investigación científica.

Teorema 4.6. Sea $p_e(n)$ el número de particiones de n en partes distintas con un número par de partes, y sea $p_o(n)$ el número de particiones de n en partes distintas con un número impar de partes. Entonces,

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } n = \frac{m(3m \pm 1)}{2} \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Vamos a demostrar que existe una correspondencia uno a uno entre las particiones de n en un número par de partes distintas y las particiones de n en un número impar de partes distintas, es decir, $p_e(n) = p_o(n)$ excepto cuando n es un número pentagonal.

Para ello, comenzamos introduciendo algunas definiciones. Llamaremos *base*, b , a la última fila del diagrama de Ferrers, y *pendiente* o *rampa*, s , al segmento que une el último punto de la primera fila con los últimos puntos de aquellas filas posteriores cuya longitud difiere en una unidad respecto a la anterior, es decir, que forman una secuencia de partes consecutivas. Visualmente:

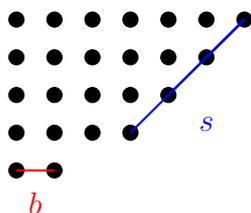


Figura 4.1: Diagrama de Ferrers.

Distinguimos ahora una serie de casos:

Caso 1: Si $b < s$, entonces $b \leq s - 1$, y podemos aplicar la **operación A**, que consiste en mover los puntos de la base de modo que pasen a formar parte de una nueva fila paralela a la rampa.

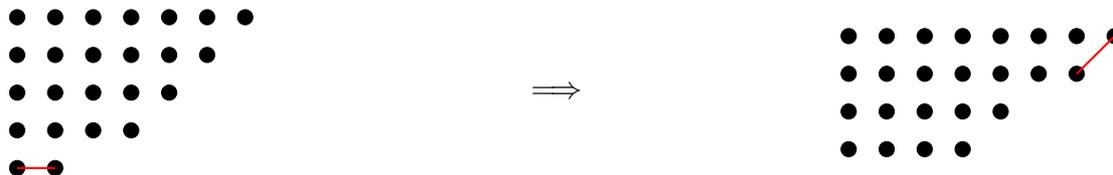


Figura 4.2: Operación A.

La operación A transforma una partición con k partes distintas en otra con $k - 1$ partes distintas.

Caso 2: Si $b = s$, también podemos aplicar la operación A, salvo cuando la base y la rampa se intersecan, como se muestra en la figura 4.3.

Caso 3: Si $b > s$, no podemos aplicar la operación A sin incumplir la condición de que en los diagramas de Ferrers las longitudes de las filas decrecen, pero sí podemos aplicar la **operación B**, que consiste en mover los puntos de la rampa para formar una nueva fila paralela a la base. Esta operación se puede aplicar si $b > s$ excepto cuando $b = s + 1$ y la base y la rampa intersecan.

La operación B transforma una partición con k partes en otra con $k + 1$ partes distintas.

Por tanto, salvo en las dos excepciones representadas en las figuras 4.3 y 4.4, toda partición de n en partes distintas puede transformarse mediante una de las operaciones A o B en otra con distinta paridad del número de partes. Así, existe una correspondencia uno a uno entre las particiones con número par e impar de partes distintas, es decir, $p_e(n) = p_o(n)$, salvo en los casos excepcionales.

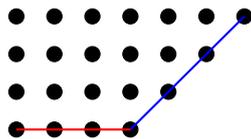


Figura 4.3: No se puede aplicar la operación A, $b = s$.

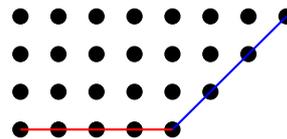


Figura 4.4: No se puede aplicar la operación B, $b = s + 1$.

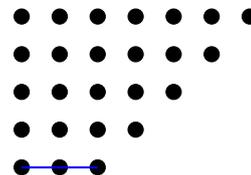
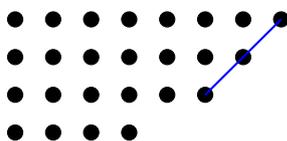


Figura 4.5: Operación B.

Estudiamos ahora los casos excepcionales en los que no se puede aplicar ninguna de las operaciones A o B.

Supongamos primero que $b = s$, como en la figura 4.3, y que el diagrama de Ferrers tiene k filas. En este caso, cada fila es una unidad más grande que la siguiente, formando una rampa. La base, que es la última fila, tiene longitud $b = k$, por lo que las longitudes de las filas son:

$$k, k + 1, \dots, 2k - 1,$$

una sucesión de k términos consecutivos. La suma total de estas partes es:

$$n = k + (k + 1) + \dots + (2k - 1) = \frac{k(3k - 1)}{2} = w(k).$$

Esta partición de n en k partes distintas no admite aplicación de las operaciones A ni B, por lo que no tiene pareja. Todas las demás particiones sí se emparejan entre sí, una con número par y otra con número impar de partes, y por tanto se cancelan en la diferencia $p_e(n) - p_o(n)$.

Entonces, solo queda sin cancelar esta partición concreta. Como tiene k partes, su paridad determina el signo de la diferencia: si k es par, hay una partición más en $p_e(n)$; si k es impar, en $p_o(n)$. En consecuencia:

$$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k.$$

De forma análoga, en el caso de la figura 4.4, se tiene que $b = s + 1$, es decir, hay un punto adicional en cada fila respecto a la rampa. La suma total en este caso es:

$$n = \frac{3k^2 - k}{2} + k = \frac{3k^2 + k}{2} = w(-k),$$

y de nuevo, la única partición no emparejada tiene k partes, por lo que:

$$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k.$$

En conclusión, obtenemos:

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = \frac{k(3k \pm 1)}{2} \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como queríamos demostrar. □

Del resultado anterior se deduce el siguiente corolario inmediato.

Corolario 4.7. Se cumple que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n))x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{n(3n-1)}{2}} + x^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right).$$

Demostración. La primera igualdad se deduce directamente del teorema anterior, ya que para cada $n \geq 1$, se cumple:

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = \frac{k(3k \pm 1)}{2} \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Añadiendo el término constante 1, correspondiente a $n = 0$, obtenemos:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n))x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}.$$

La segunda igualdad se deduce observando que para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{(-n)(3(-n) - 1)}{2} = \frac{n(3n + 1)}{2}, \quad \text{y} \quad (-1)^{-n} = (-1)^n,$$

lo que permite reagrupar los términos positivos y negativos de la suma como sigue:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{n(3n-1)}{2}} + x^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right).$$

□

La expresión obtenida coincide con una función generadora conocida, como veremos en el siguiente lema. Este resultado puede consultarse en el libro de Andrews [pág. 12, [1]].

Lema 4.8. La función generatriz de la diferencia $p_e(n) - p_o(n)$, donde $p_e(n)$ denota el número de particiones de n en partes distintas con un número par de partes, y $p_o(n)$ aquellas con número impar de partes, es:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n))x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

Demostración. Tomamos el producto infinito:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots$$

Vemos que se forman multiplicaciones de monomios x^n con signos $(-1)^k$, donde k es el número de factores $-x^{b_i}$ con $b_1 + b_2 + \dots + b_k = n$. Como cada exponente b_i aparece solo una vez, esta suma corresponde a una partición de n en k partes distintas. Es decir,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^j x^{b_1+b_2+\dots+b_j=n} \right)$$

Para cada partición en números distintos de n , el signo del término de x^n será $+1$ si la partición tiene un número par de partes o -1 si la partición tiene un número impar de partes. Una vez consideradas todas las particiones de n en partes distintas, los $+1$ y -1 se cancelan hasta quedar:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n)x^n).$$

Como queríamos demostrar. □

A continuación vemos un lema que relaciona dos funciones generatrices: la de las particiones de n , $p(n)$, con la de $p_e(n) - p_o(n)$.

Lema 4.9. Se cumple que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(x^{\frac{m(3m-1)}{2}} + x^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right) \right) = 1.$$

Demostración. Como hemos visto en 4.1, la función generatriz de $p(n)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n}.$$

Y por lo visto en el corolario 4.7 y el lema 4.8, podemos escribir el segundo factor como

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(x^{\frac{m(3m-1)}{2}} + x^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

Luego podemos concluir, pues

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n \right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(x^{\frac{m(3m-1)}{2}} + x^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right) \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1.$$

□

Combinando los lemas anteriores, podemos llegar a la demostración del teorema de Euler de los números pentagonales.

Corolario 4.10. Para $n > 0$,

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + \dots + (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) = 0.$$

Se entiende que $p(k) = 0$ si $k < 0$.

Demostración. El lema 4.9 establece que:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{n(3n-1)}{2}} + x^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right) \right) = 1.$$

Multiplicando las dos series, su producto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(p(n) + \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \left(p \left(n - \frac{k(3k-1)}{2} \right) + p \left(n - \frac{k(3k+1)}{2} \right) \right) \right) x^n = 1.$$

Tomando los coeficientes de x^n en ambos lados tenemos que

$$p(n) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(p \left(n - \frac{k(3k-1)}{2} \right) + p \left(n - \frac{k(3k+1)}{2} \right) \right) = 0.$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) - p(n-15) + \dots \\ + (-1)^k p \left(n - \frac{k(3k-1)}{2} \right) + (-1)^k p \left(n - \frac{k(3k+1)}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. □

En conclusión, hemos analizado la diferencia entre particiones en partes distintas con un número par e impar de partes, que está estrechamente relacionada con los números pentagonales, lo que nos ha llevado a obtener la fórmula recursiva de Euler para $p(n)$.

4.2. Grupos abelianos finitos

Las particiones de enteros tienen además una relación natural con los grupos abelianos finitos.

Teorema 4.11. Sea p un número primo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, todo grupo abeliano de orden p^n es isomorfo a un grupo de la forma:

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^{d_1}\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p^{d_2}\mathbb{Z}} \times \dots \times \frac{\mathbb{Z}}{p^{d_s}\mathbb{Z}}, + \right),$$

donde los enteros satisfacen $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_s \geq 1$, son únicos y

$$d_1 + d_2 + \dots + d_s = n.$$

Nota. Este resultado es un caso particular del teorema fundamental de la clasificación de grupos abelianos finitos.

Una consecuencia inmediata del teorema es la siguiente afirmación:

Teorema 4.12. Sea p primo. El número de grupos abelianos de orden p^n **no** isomorfos dos a dos es exactamente $p(n)$.

Por ejemplos existen exactamente $p(10) = 42$ grupos conmutativos no isomorfos de orden p^{10} .

4.3. Relación entre el Grupo Simétrico y $p(n)$

El *grupo simétrico* de grado n , denotado como S_n , es el conjunto de todas las permutaciones de los elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, con la operación de composición de funciones:

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}.$$

El orden del grupo simétrico es $|S_n| = n!$, ya que hay $n!$ maneras de ordenar los n elementos.

Ejemplo 4.3. El grupo simétrico S_3 es el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Contiene $3! = 6$ elementos, que corresponden a todas las formas en que se pueden reordenar estos tres elementos:

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

Donde:

- e es la permutación identidad.
- (12) intercambia 1 con 2.
- (13) intercambia 1 con 3.
- (23) intercambia 2 con 3.
- (123) rota los elementos en el orden $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.
- (132) rota los elementos en el orden $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Vamos a exponer ahora definiciones y propiedades del grupo simétrico.

Definición 4.2. Dos permutaciones $\sigma, \tau \in S_n$ se dicen *conjugadas* si existe una permutación $\pi \in S_n$ tal que:

$$\tau = \pi\sigma\pi^{-1}.$$

La relación de conjugación es una relación de equivalencia en S_n que divide al grupo en subconjuntos disjuntos llamados *clases de conjugación*.

Toda permutación $\sigma \in S_n$ puede escribirse de manera única (salvo el orden) como producto de *ciclos disjuntos*:

$$\sigma = C_1 C_2 \dots C_r,$$

donde cada C_i es un ciclo, y los ciclos no tienen elementos en común.

Definición 4.3. La *estructura de ciclos* de una permutación es la lista de longitudes de los ciclos disjuntos en que se descompone. Por ejemplo, si $\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$, entonces su estructura de ciclos es $(3, 2)$.

Un hecho fundamental es que dos permutaciones en S_n son conjugadas si y sólo si tienen la misma estructura de ciclos. Esto se debe a que la conjugación actúa reordenando los elementos del conjunto, pero sin alterar la longitud ni la cantidad de ciclos.

Ejemplo 4.4. Consideremos las siguientes permutaciones en S_5 :

$$\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5), \quad \tau = (2\ 4\ 5)(1\ 3).$$

Ambas tienen un ciclo de longitud 3 y otro de longitud 2, por lo tanto tienen la misma estructura de ciclos y son conjugadas. Existe una permutación $\pi \in S_5$ tal que:

$$\pi\sigma\pi^{-1} = \tau.$$

La estructura de ciclos de una permutación permite definir una *partición* de n , ya que la suma de las longitudes de los ciclos debe ser n . Por ejemplo, la estructura $(3, 2)$ corresponde a la partición $3 + 2 = 5$.

El número de clases de conjugación que tiene S_n es igual al número de estructuras distintas de ciclos posibles, que equivale al número de particiones de n .

Teorema 4.13. El número de clases de conjugación del grupo simétrico S_n es exactamente el número de particiones de n , es decir, $p(n)$.

Demostración. Como se ha explicado, cada permutación en S_n se puede escribir como producto de ciclos disjuntos cuya longitud suma n (incluyendo ciclo de longitud 1). La lista ordenada de esas longitudes define una partición de n . Por ejemplo, una permutación formada por un ciclo de longitud 4 y uno de longitud 1 tiene estructura $(4, 1)$, asociada a la partición $4 + 1$.

Dos permutaciones son conjugadas si y sólo si tienen la misma estructura de ciclos. Por tanto, cada clase de conjugación está determinada por una partición de n , y cada partición determina una clase de conjugación.

- Dada una partición de n , se puede construir una permutación con esa estructura de ciclos.
- Dos permutaciones con la misma estructura de ciclos siempre son conjugadas.

Por tanto, el número total de clases de conjugación en S_n coincide con el número total de particiones de n , es decir, $p(n)$. □

Vamos a pasar a definir unas propiedades del grupo simétrico relacionadas con matrices de permutación y polinomios característicos.

Definición 4.4. Una *matriz de permutación* de tamaño $n \times n$ es una matriz cuadrada que contiene exactamente un 1 en cada fila y cada columna, y ceros en las demás posiciones.

Formalmente, una matriz $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ es de permutación si:

- En cada fila i , existe un único índice j tal que $p_{ij} = 1$, y $p_{ik} = 0$ para $k \neq j$.
- En cada columna j , existe un único índice i tal que $p_{ij} = 1$, y $p_{kj} = 0$ para $k \neq i$.

Cada matriz de permutación representa una permutación $\sigma \in S_n$, reordenando las columnas de la matriz identidad según el orden indicado por σ .

Un ejemplo para $n = 3$ es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que corresponde a la permutación (12).

Estas matrices son ortogonales: cumplen que $P^T P = I_n$ y su inversa coincide con su traspuesta, es decir, $P^{-1} = P^T$.

Definición 4.5. El *polinomio característico* de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es:

$$\chi_A(x) = \det(xI - A).$$

En el caso de matrices de permutación, el polinomio característico depende solamente de la estructura de ciclos de la permutación asociada. Es decir, si dos permutaciones son conjugadas en S_n , sus matrices de permutación son semejantes, y por tanto tienen el mismo polinomio característico.

Teorema 4.14. El número de polinomios característicos distintos que se obtienen al considerar todas las matrices de permutación de tamaño $n \times n$ es exactamente $p(n)$, el número de particiones de n .

Demostración. Cada matriz de permutación P_σ representa una permutación $\sigma \in S_n$. Dos matrices de permutación P_σ y P_τ son semejantes si y sólo si σ y τ son conjugadas en el grupo simétrico.

Como la semejanza implica igualdad de polinomios característicos, se deduce que dos matrices de permutación tienen el mismo polinomio característico si y sólo si sus permutaciones asociadas son conjugadas.

Ya se ha demostrado que el número de clases de conjugación en S_n es igual a $p(n)$. Por tanto, hay exactamente $p(n)$ polinomios característicos distintos entre las $n!$ matrices de permutación de tamaño $n \times n$. \square

Ejemplo 4.5. Para $n = 3$, hay $3! = 6$ matrices de permutación, correspondientes a los elementos de S_3 . Las particiones de 3 son:

$$(3), \quad (2, 1), \quad (1, 1, 1),$$

por lo tanto $p(3) = 3$. Esto implica que existen exactamente tres polinomios característicos distintos entre todas las matrices de permutación de tamaño 3×3 .

A continuación se muestran tres representantes, uno por cada clase de conjugación:

- Permutación identidad: (1)(2)(3), asociada a la partición (1, 1, 1).

$$P = I_3, \quad \chi_P(x) = (x - 1)^3.$$

- Permutación (12), con estructura (2, 1).

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_P(x) = (x - 1)(x^2 - 1).$$

- Permutación (123), con estructura (3).

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_P(x) = x^3 - 1.$$

Se puede comprobar que las restantes matrices de permutación pertenecen a una de estas tres clases de conjugación, y por tanto no generan nuevos polinomios característicos.

4.4. Fórmula asintótica de Hardy y Ramanujan

El crecimiento del número de particiones enteras $p(n)$ es sorprendentemente rápido. Es importante destacar que $p(n)$ presenta un *crecimiento subexponencial*, es decir, su tasa de crecimiento está entre polinomial y exponencial. Esto contrasta, por ejemplo, con $n!$, que crece mucho más rápido. A pesar de que la fórmula incluye una exponencial, el exponente es proporcional a \sqrt{n} , lo que implica que $p(n)$ crece mucho más lentamente que e^{cn} cuando $n \rightarrow \infty$ para cualquier constante fija $c > 0$.

Aunque no existe una fórmula cerrada exacta para $p(n)$, en 1918 los matemáticos G. H. Hardy y S. Ramanujan desarrollaron una aproximación asintótica que permite estimar su valor con gran precisión para valores grandes de n .

Teorema 4.15 (Fórmula de Hardy–Ramanujan). Cuando $n \rightarrow \infty$, el número de particiones de n satisface la siguiente fórmula asintótica:

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

Esta fórmula permite estimar $p(n)$ con una precisión sorprendente, incluso para valores moderados de n . A continuación se muestra un ejemplo:

Ejemplo 4.6. Consideremos $n = 100$. Usando la fórmula asintótica, obtenemos:

$$p(100) \approx \frac{1}{4 \cdot 100 \cdot \sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2 \cdot 100}{3}}\right) \approx 199280893,35.$$

El valor exacto de $p(100)$ es:

$$p(100) = 190569291.$$

En este caso, la fórmula proporciona una estimación muy próxima que mejora cuanto mayor es n .

Capítulo 5

Particiones en partes distintas

Vamos a estudiar ahora particiones de n en partes distintas. Uno de los resultados más importantes en este contexto es *la identidad de Euler*, que como veremos más adelante, establece que el número de particiones de n en partes distintas es igual al número de particiones de n en partes impares.

En los siguientes apartados, exploraremos sus propiedades, resultados clásicos y algunas aplicaciones en combinatoria.

Para este capítulo ha sido particularmente útil la enciclopedia OEIS: <https://oeis.org/A000009>

Definición 5.1. Se dice que *una partición de n es en partes distintas* si todos los sumandos son diferentes entre sí. Es decir, una partición de n en partes distintas es una expresión de la forma:

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k,$$

donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$, garantizando que no haya repeticiones entre las partes. Denotamos mediante $pd(n)$ al *número de particiones de n en partes distintas*.

Ejemplo 5.1. Las particiones de $n = 10$ en partes distintas son:

$$10, \quad 9 + 1, \quad 8 + 2, \quad 7 + 3, \quad 6 + 4, \quad 7 + 2 + 1, \quad 5 + 4 + 1, \quad 5 + 3 + 2.$$

Además, siguiendo un razonamiento análogo al expuesto en el teorema 4.1, sabemos que la función generadora del número de particiones de n en partes distintas es:

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m).$$

Pasamos ahora a definir una partición de n en partes impares, pues nos será relevante en el desarrollo de este capítulo.

Definición 5.2. Se dice que *una partición de n es en partes impares* si todos los sumandos son impares. Es decir, una partición de n en partes distintas es una expresión de la forma:

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k,$$

donde todos los $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$, garantizando que todos los λ_i para $i = 1, \dots, k$ son impares. Denotamos mediante $q(n)$ al *número de particiones de n en partes impares*.

Ejemplo 5.2. Las particiones de $n = 10$ en partes impares son:

$$9 + 1, \quad 7 + 3, \quad 7 + 1 + 1 + 1, \quad 5 + 3 + 1 + 1, \quad 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 3 + 3 + 3 + 1, \\ 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Tenemos que la función generadora del número de particiones de n en partes impares es:

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{2m-1})^{-1}.$$

Con estos conceptos en mente, exponemos un resultado que parece desconcertante a primera vista. Este es uno de los casos donde dos clases de particiones, a simple vista tan diferentes, resultan estar en una relación sorprendentemente profunda.

Teorema 5.1. El número de particiones de n en partes impares es igual al número de particiones de n en partes distintas, es decir, $q(n) = pd(n)$. Por convenio, $pd(0) = 1$, así como $q(0) = 1$.

Demostración. Como hemos visto, la función generatriz del número de particiones de n en partes impares es

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{2m-1})^{-1},$$

y la función generatriz del número de particiones de n en partes distintas es

$$\sum_{n=0}^{\infty} pd(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m).$$

Veamos que son iguales y habremos concluido.

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2k}}{1 - x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{2k}) \prod_{l=1}^{\infty} (1 - x^l)^{-1} = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^{2m-1})^{-1}$$

es decir, desarrollando los productos

$$\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right) \left(\frac{1-x^4}{1-x^2}\right) \left(\frac{1-x^6}{1-x^3}\right) \left(\frac{1-x^8}{1-x^4}\right) \left(\frac{1-x^{10}}{1-x^5}\right) \left(\frac{1-x^{12}}{1-x^6}\right) \cdots = \\ = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \cdots$$

Se cumple la igualdad. □

Ahora, presentaremos una segunda demostración de este teorema, que ofrece una perspectiva diferente y, que podemos encontrar en la sucesión A000009 de la OEIS.

Demostración. Comenzamos con una partición de n en partes impares,

$$n = a_1 + \cdots + a_1 + a_2 + \cdots + a_2 + \cdots + a_s,$$

donde los a_i , para $i = 1, 2, \dots, s$, son números impares.

Agrupamos los a_i , y denotamos por L_i el número de veces que aparece a_i , es decir,

$$n = L_1 a_1 + L_2 a_2 + \cdots + L_s a_s,$$

siendo ahora los a_i números impares y distintos para cada $i = 1, 2, \dots, s$.

Ahora expresamos L_i en base 2, es decir,

$$L_i = 2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + \cdots + 2^{k_m} \quad \text{con} \quad k_1 > k_2 > \cdots > k_m.$$

Esto nos lleva a que cada término $L_i a_i$ tiene la forma

$$L_i a_i = 2^{k_1} a_i + 2^{k_2} a_i + 2^{k_3} a_i + \cdots + 2^{k_m} a_i, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, s.$$

Obviamente, estos sumandos de cada $L_i a_i$ son distintos. Además, como los $a_i \neq a_j$ para cada $i = 1, \dots, s$, los sumandos de $L_j a_j$ son distintos a los sumandos de $L_i a_i$ para cada $i = 1, \dots, s$. Por lo tanto, concluimos que los sumandos de n tales que

$$n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m 2^{k_{ij}} a_i = 2^{k_{11}} a_1 + 2^{k_{12}} a_1 + \cdots + 2^{k_{1m}} a_1 + 2^{k_{21}} a_2 + \cdots + 2^{k_{2m}} a_2 + \cdots + 2^{k_{ij}} a_i + \cdots + 2^{k_{sm}} a_s,$$

son todos distintos. Así, cualquier partición de n en partes impares podemos transformarla en una partición de n en partes distintas.

Partimos ahora de una partición de n en números distintos, para llegar a una partición en números impares basta con dividir a la mitad todos los números pares de la partición, y así sucesivamente hasta que dejen de serlo. Nos queda una suma de impares que pueden estar repetidos. \square

Luego, concluimos que el número de particiones de n en partes distintas es equivalente a el número de particiones de n en partes impares, $q(n) = pd(n)$. Por convenio establecemos como notación $q(n)$.

Ejemplo 5.3. Podemos ver que $pd(10) = q(10) = 8$

Particiones en partes impares:

$$9 + 1, \quad 7 + 3, \quad 7 + 1 + 1 + 1, \quad 5 + 3 + 1 + 1, \quad 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 3 + 3 + 3 + 1,$$

$$3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Particiones en partes distintas:

$$10, \quad 9 + 1, \quad 8 + 2, \quad 7 + 3, \quad 6 + 4, \quad 7 + 2 + 1, \quad 5 + 4 + 1, \quad 5 + 3 + 2.$$

Definimos ahora una suma en la que, en cada término, podemos elegir entre 1 o x lo cual queda representado por los corchetes mediante esta notación $[1, x]$, tal que el número n se expresa como:

$$n = 1 + [1, 2] + [1, 3] + [1, 4] + \cdots$$

donde en cada término de la suma, podemos seleccionar 1 o el valor x . Relacionamos esta definición con el número de particiones de n en partes distintas.

Una suma con $n = 7$ puede ser

$$7 = 1 + 2 + 3 + 1.$$

n	$q(n)$	n	$q(n)$	n	$q(n)$	n	$q(n)$
0	1	14	22	28	222	42	1426
1	1	15	27	29	256	43	1610
2	1	16	32	30	296	44	1816
3	2	17	38	31	340	45	2048
4	2	18	46	32	390	46	2304
5	3	19	54	33	448	47	2590
6	4	20	64	34	512	48	2910
7	5	21	76	35	585	49	3264
8	6	22	89	36	668	50	3658
9	8	23	104	37	760	51	4097
10	10	24	122	38	864	52	4582
11	12	25	142	39	982	53	5120
12	15	26	165	40	1113	54	5718
13	18	27	192	41	1260	55	6378

Cuadro 5.1: Número de particiones de n en partes impares, $q(n)$, para $0 \leq n \leq 55$.

Teorema 5.2. El número de diferentes sumas parciales de la forma

$$n = 1 + [1, 2] + [1, 3] + [1, 4] + \dots$$

donde cada término dentro de los corchetes $[1, x]$ representa una elección entre el número 1 y el número x , es igual al número de particiones de n en partes distintas, $q(n)$.

Este resultado, mencionado por John Perry (2003), no viene acompañado de una demostración. Además, se encuentra registrado en la OEIS como la sucesión A000009.

Ejemplo 5.4. Para $n = 6$, $q(6) = 4$

Las diferentes sumas parciales obtenidas siguiendo la notación $[1, x]$ son:

$$1 + [1, 2] + [1, 3] + \dots$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 2 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 2 + 3, \quad 1 + 1 + 3 + 1.$$

lo que coincide con el número de particiones de 6 en partes impares que son:

$$5 + 1, \quad 3 + 3, \quad 3 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Al igual que sucede con $p(n)$, se conoce una fórmula asintótica para estimar el valor de $q(n)$ cuando n es grande:

$$q(n) \approx \frac{e^{\pi\sqrt{n/3}}}{4 \cdot 3^{1/4} \cdot n^{3/4}}.$$

Ejemplo 5.5. Tomamos $n = 100$. Aplicando la fórmula asintótica:

$$q(100) \approx \frac{e^{\pi\sqrt{100/3}}}{4 \cdot 3^{1/4} \cdot 100^{3/4}} \approx 452783, 139.$$

El valor exacto es $q(100) = 444793$, por lo que la fórmula proporciona una aproximación.

Existe una relación curiosa entre el número total de particiones de n , el número de particiones en partes pares y el número de particiones en partes impares la cual sugiere que cada partición puede verse como una combinación de una partición con partes pares y otra con partes impares.

Teorema 5.3. Se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n \right). \quad (5.1)$$

Demostración. Demostraremos esta identidad utilizando funciones generatrices.

La función generadora de $p(n)$, el número total de particiones de n , viene dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Podemos separar este producto en el correspondiente a los índices pares y a los impares:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2k}} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2k-1}} \right).$$

Observamos que la primera parte del producto genera las particiones con partes pares. Si hacemos el cambio de variable $y = x^2$, entonces :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2k}} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-y^k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)y^n \right).$$

La segunda parte del producto genera particiones con partes impares, cuya función generadora es:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2k-1}} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n \right).$$

Por tanto, al combinar ambos factores llegamos a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)y^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n \right),$$

Sustituyendo de nuevo $y = x^2$, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n \right),$$

que es la identidad que queríamos demostrar □

A partir de la identidad demostrada en el teorema anterior, podemos obtener una expresión explícita para los coeficientes $p(n)$, separando los casos en los que n es par o impar.

Corolario 5.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\begin{cases} p(2n) = \sum_{k=0}^n p(n-k) q(2k), \\ p(2n+1) = \sum_{k=0}^n p(n-k) q(2k+1). \end{cases}$$

Demostración. Vamos a empezar demostrando la primera igualdad. Por el teorema anterior se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} p(r) x^{2r} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} q(s) x^s \right).$$

Al multiplicar las dos series y aplicar la regla de Cauchy para productos infinitos obtenemos

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} p(r) q(s) x^{2r+s}.$$

Para hallar el coeficiente de x^{2n} imponemos $2r + s = 2n$. Como $2r$ es par, necesariamente s también lo es; escribimos entonces $s = 2k$ con $0 \leq k \leq n$. Sustituyendo en la igualdad anterior resulta que $r = n - k$.

Cada $k \in \{0, \dots, n\}$ determina precisamente el par $(r, s) = (n - k, 2k)$; por tanto el coeficiente deseado es

$$\sum_{k=0}^n p(n-k) q(2k).$$

Ahora bien, el coeficiente de x^{2n} en $\sum_{n \geq 0} p(n) x^n$ es, por definición, $p(2n)$. Igualando ambos coeficientes se obtiene la identidad

$$p(2n) = \sum_{k=0}^n p(n-k) q(2k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siguiendo un razonamiento análogo, demostramos la segunda igualdad. Buscamos ahora el coeficiente de $2n+1$. Para que $2r + s = 2n+1$ ocurra con $r, s \geq 0$, el término s ha de ser impar; por ello escribimos $s = 2k + 1$ con $0 \leq k \leq n$. Sustituyendo $s = 2k + 1$ en la ecuación $2r + s = 2n + 1$ obtenemos

$$r = n - k.$$

Cada k entre 0 y n determina exactamente un par $(r, s) = (n - k, 2k + 1)$. El coeficiente buscado es, por tanto, la suma de todas las contribuciones correspondientes:

$$\sum_{k=0}^n p(n-k) q(2k+1).$$

Como el coeficiente de $2n+1$ en $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$ es exactamente $p(2n+1)$, igualando ambos coeficientes obtenemos la identidad

$$p(2n+1) = \sum_{k=0}^n p(n-k) q(2k+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lo que termina la demostración. □

Vemos a continuación dos ejemplos.

Ejemplo 5.6. Vamos a tomar $n = 5$, luego

$$p(10) = \sum_{k=0}^5 p(5-k)q(2k) = p(5)q(0) + p(4)q(2) + p(3)q(4) + p(2)q(6) + p(1)q(8) + p(0)q(10) =$$

$$= 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 10 = 42$$

$$p(11) = \sum_{k=0}^5 p(5-k)q(2k+1) = p(5)q(1) + p(4)q(3) + p(3)q(5) + p(2)q(7) + p(1)q(9) + p(0)q(11) =$$

$$= 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 12 = 56.$$

Estas identidades y su demostración pueden encontrarse en Wikipedia, en la entrada dedicada a Identities about strict partition numbers.

Exponemos a continuación una serie de teoremas que demostraremos mediante diagramas de Ferrers. Los siguientes resultados pueden consultarse en la sucesión A000009 de la OEIS.

Teorema 5.5. El número de particiones de n en partes distintas, $q(n)$, coincide con el número de particiones de n en las que si la parte más grande es k , entonces todas las partes desde 1 hasta k están presentes en la partición.

Demostración. Tomamos una partición de n en partes distintas, es decir,

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s.$$

Representamos esta partición mediante su diagrama de Ferrers.

Como ilustración, en la Figura 5 se muestra el diagrama correspondiente a la partición $22 = 7 + 6 + 5 + 3 + 1$ y su partición conjugada.

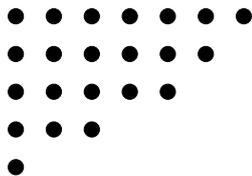


Figura 5.1: Partición original $7 + 6 + 5 + 3 + 1$.

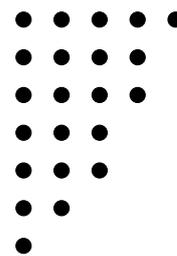


Figura 5.2: Partición conjugada $5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1$.

Debido a que las partes de la partición original son todas distintas, cada fila del diagrama tiene una longitud diferente. Esto implica que, al pasar al diagrama conjugado, la longitud de las filas de esa partición disminuyen, a lo sumo, de uno en uno sin saltos de más de una unidad.

Si existiera un salto mayor, ello indicaría que dos filas en la partición original tendrían la misma longitud, lo cual contradice la hipótesis de partes distintas.

En la Figura 5.3 se puede visualizar un ejemplo en el que ocurre un salto mayor en las alturas, lo que muestra una partición no válida para nuestro caso.

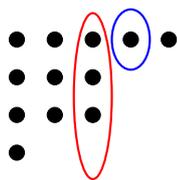


Figura 5.3: Diagrama de Ferrers donde hay un salto de altura dos. $5 + 3 + 3 + 1$.

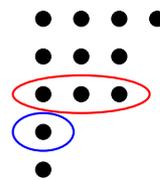


Figura 5.4: Conjugado del diagrama de Ferrers donde hay un salto de altura dos. $4 + 3 + 3 + 1 + 1$.

Por tanto, en el diagrama conjugado, las alturas de las columnas recorren exactamente todos los valores desde k hasta 1 sin saltos de altura dos o más, donde k es la parte más grande de la partición. Esto implica que están presentes todas las partes $1, 2, \dots, k$.

Recíprocamente, partimos de una partición $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_t$ de n en la que la parte más grande es $k = \mu_1$ y están presentes todas las partes de 1 a k .

Construimos su diagrama de Ferrers. Como las alturas de las columnas recorren sin interrupciones todos los valores de 1 a k , al tomar el diagrama conjugado obtenemos una partición en la que las longitudes de las filas son distintas, es decir, una partición en partes distintas.

En conclusión, hemos establecido una correspondencia biyectiva entre las particiones de n en partes distintas y las particiones de n en las que, si la parte más grande es k , están presentes todas las partes $1, 2, \dots, k$. Esto prueba el teorema. \square

El número $q(n)$ de particiones en partes impares de n también puede interpretarse de una forma combinatoria en términos de la paridad con la que aparecen las partes en una partición. Esta perspectiva se refleja en el siguiente teorema.

Teorema 5.6. El número $q(n)$ de particiones en partes impares de n coincide con el número de particiones de n en las que la parte más grande aparece un número impar de veces y todas las demás partes aparecen un número par de veces.

Demostración. Siguiendo una estructura similar a la demostración anterior, consideramos una partición de n en partes impares, es decir,

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s, \quad \text{con } \lambda_i \text{ impar para todo } i = 1, \dots, s.$$

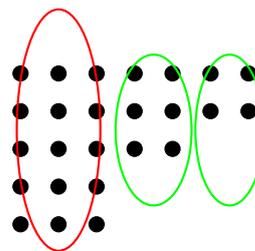
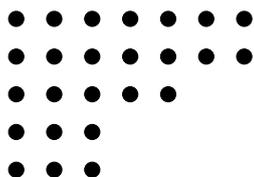
Representamos esta partición mediante su diagrama de Ferrers.

Como ilustración, para $n = 25$ tomamos la partición

$$25 = 7 + 7 + 5 + 3 + 3,$$

cuyo diagrama se muestra en la figura. A la derecha, se agrupan las columnas mediante elipses, organizando las partes iguales de la partición conjugada.

En el diagrama conjugado, es decir, mirando las columnas de la partición original, la parte más grande aparece un número de veces igual a la longitud de la última fila de la partición original. Como todas las filas de la partición original tienen longitud impar (por hipótesis), en particular la última fila también es impar, por lo que la parte más grande de la partición conjugada aparece un número impar de veces.



Respecto al resto de partes, la cantidad de veces que aparecen en la conjugada se calcula como la diferencia entre la longitud de una fila y la de la fila siguiente en la partición original. La diferencia de dos números impares es par, de modo que todas las demás partes distintas de la mayor aparecen un número par de veces.

Así, a toda partición de n en partes impares le corresponde, a través del proceso de conjugación, una partición en la que la parte más grande tiene multiplicidad impar y las demás partes multiplicidad par.

Recíprocamente, dada una partición con esta propiedad de paridades, podemos considerar su diagrama de Ferrers y reconstruir el conjugado: la parte más grande corresponde a una fila de longitud impar, y las demás partes combinadas también originan filas de longitud impar, preservando la condición inicial.

Por tanto, se establece una biyección entre las particiones de n en partes impares y las particiones de n donde la parte más grande aparece un número impar de veces y el resto un número par de veces, lo que concluye la demostración del teorema. \square

5.1. El teorema de Glaisher

Uno de los resultados más conocidos de la teoría de particiones, con el que iniciamos este capítulo, es el teorema de Euler, que establece que el número de particiones de un entero n en partes impares coincide con el número de particiones en las que todas las partes son distintas. Esta igualdad, que a primera vista resulta sorprendente, refleja una estructura combinatoria más profunda cuando se imponen ciertas restricciones.

El teorema de Glaisher¹ generaliza esta idea, considerando particiones en las que cada parte puede repetirse, a lo sumo, $d - 1$ veces para un entero $d \geq 2$. En concreto, Glaisher demostró que el número de particiones donde cada parte aparece como máximo $d - 1$ veces coincide con el número de particiones donde ninguna parte es divisible por d . Se puede consultar este resultado en el artículo [9]. El caso $d = 2$ recupera el teorema de Euler.

Antes de enunciar el teorema general, analizaremos el caso particular $d = 3$, relacionado con las particiones de un entero n en las que ninguna parte es múltiplo de 3. Esta sucesión está registrada en la *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) como A000726.

La tabla 5.2 muestra algunos de sus primeros valores:

¹James Whitbread Lee Glaisher (1848–1928) fue un matemático británico destacado por sus aportes a la teoría de particiones. Fue profesor en Cambridge y editor de importantes revistas matemáticas como el *Messenger of Mathematics* y el *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, desde las cuales impulsó activamente la difusión de trabajos en matemáticas puras durante el siglo XIX.

n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$
0	1	10	22	20	202
1	1	11	27	21	243
2	2	12	36	22	297
3	2	13	44	23	355
4	4	14	57	24	431
5	5	15	70	25	513
6	7	16	89	26	617
7	9	17	108	27	731
8	13	18	135	28	874
9	16	19	163	29	1031

Cuadro 5.2: Número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 3, para $0 \leq n \leq 29$.

Examinemos este caso en detalle, incluyendo ejemplos explícitos y la correspondiente demostración.

Teorema 5.7. Para todo entero $n \geq 0$, el número de particiones de n en las que ninguna parte aparece más de dos veces es igual al número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 3 (ni 3).

Demostración. Tomamos una partición de n tal que ninguna de sus partes es múltiplo de 3. Es decir, una partición de la forma

$$n = \underbrace{p_1 + \cdots + p_1}_{a_1 \text{ veces}} + \underbrace{p_2 + \cdots + p_2}_{a_2 \text{ veces}} + \cdots + \underbrace{p_k + \cdots + p_k}_{a_k \text{ veces}},$$

donde los p_i son distintos y cada p_i no es divisible por 3 para $i = 1, \dots, k$. Reuniendo las partes iguales, podemos escribir

$$n = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_k p_k,$$

donde a_i indica el número de veces que aparece la parte p_i para $i = 1, \dots, k$.

Ahora, expresamos cada a_i en base 3:

$$a_i = b_{i,j} 3^j + b_{i,j-1} 3^{j-1} + \cdots + b_{i,1} 3^1 + b_{i,0} 3^0,$$

donde cada $b_{i,\ell} \in \{0, 1, 2\}$.

Observamos que los términos $3^\ell p_i$ son todos distintos. Dado que cada p_i no es divisible por 3, si $3^\ell p_i = 3^m p_r$ para ciertos i, r y ℓ, m , necesariamente $\ell = m$ (pues $\text{mcd}(p_i, 3) = 1$) y para que se dé la igualdad debe cumplirse $p_i = p_r$. Como los p_i son distintos entre sí, concluimos que los productos $3^\ell p_i$ son todos diferentes.

Así, cada $3^\ell p_i$ aparece exactamente $b_{i,\ell}$ veces, con $b_{i,\ell} \in \{0, 1, 2\}$. Como cada $b_{i,\ell}$ es 0, 1 o 2, cada parte en la nueva partición aparece como mucho dos veces. Podemos entonces escribir

$$n = b_{1,j} 3^j p_1 + b_{1,j-1} 3^{j-1} p_1 + \cdots + b_{i,j} 3^j p_i + \cdots + b_{k,j} 3^j p_k + \cdots + b_{k,0} p_k.$$

Recíprocamente, dada una partición de n en la que cada parte aparece a lo sumo dos veces, la escribimos como

$$n = b_1 q_1 + b_2 q_2 + \cdots + b_k q_k,$$

donde cada $b_i \in \{0, 1, 2\}$ indica el número de veces que aparece la parte q_i .

Para cada q_i , factorizamos todas las potencias de 3 posibles, es decir, escribimos $q_i = 3^{\ell_i} p_i$, donde p_i no es divisible por 3. Agrupando los factores iguales p_i y sumando los coeficientes 3^{ℓ_i} correspondientes (según su descomposición en base 3) que hacen referencia a el número de veces que aparece p_i , reconstruimos exactamente los a_i de la partición original.

Así, recuperamos una partición de n en la que ninguna parte es múltiplo de 3.

De este modo, establecemos una correspondencia biyectiva entre las particiones de n sin partes divisibles por 3 y las particiones de n donde cada parte aparece, a lo sumo, dos veces, lo que concluye la demostración. \square

Ejemplo 5.7. Tomamos el caso $n = 7$.

El número de particiones de 7 en las que ninguna parte es múltiplo de 3 es 9. Estas particiones son:

$$7, \quad 5 + 2, \quad 5 + 1 + 1, \quad 4 + 2 + 1, \quad 4 + 1 + 1 + 1, \\ 2 + 2 + 2 + 1, \quad 2 + 2 + 1 + 1 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Vemos que coincide con el número de particiones de 7 en las que ninguna parte aparece más de dos veces, que es 9. Estas particiones son:

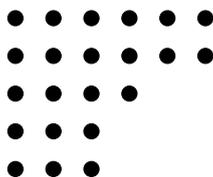
$$7, \quad 6 + 1, \quad 5 + 2, \quad 5 + 1 + 1, \quad 4 + 3, \quad 4 + 2 + 1, \quad 3 + 3 + 1, \quad 3 + 2 + 2, \quad 3 + 2 + 1 + 1.$$

Continuando nuestro estudio, presentamos otro resultado que caracteriza las particiones relacionadas con la sucesión A000726 de la OEIS, que habla del número de particiones de n en partes no múltiplos de 3, que está relacionada con propiedades sobre la parte más pequeña y las diferencias entre partes consecutivas.

Teorema 5.8. El número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 3 coincide con el número de particiones de n cuya parte más pequeña es 1 o 2 y en las que la diferencia entre partes consecutivas es, a lo sumo, 2.

Demostración. Consideramos primero una partición de n en la que ninguna parte es múltiplo de 3. Como hemos visto anteriormente, por el teorema de Glaisher para $d = 3$, esto es equivalente a considerar una partición de n en la que cada parte aparece como mucho dos veces.

Representamos esta partición mediante su diagrama de Ferrers. Recordemos que en dicho diagrama, las filas representan las partes de la partición y los puntos representan las unidades de cada parte. Para verlo visualmente vamos a considerar una partición de $n = 22$ en la que cada parte aparece, a lo sumo, dos veces, por ejemplo la partición $22 = 6 + 6 + 4 + 3 + 3$.



Ahora, observamos las columnas del diagrama de Ferrers. La longitud de cada columna forma una nueva partición de n . Como cada parte en la partición original aparece a lo sumo dos veces, las longitudes de las filas se repiten como mucho dos veces. Al considerar las columnas como una nueva partición, las alturas de las columnas difieren, a lo sumo, en 2 unidades.

Además, dado que las partes de la partición original pueden aparecer una o dos veces, la menor altura en el diagrama de Ferrers será 1 o 2, según si la parte aparece una o dos veces.

Por tanto, la partición obtenida al mirar las columnas del diagrama de Ferrers, es decir, su partición conjugada tendrá:

- Parte más pequeña igual a 1 o 2.
- Diferencias entre partes consecutivas, a lo sumo, 2.

De manera recíproca, dada una partición de n cuya parte más pequeña es 1 o 2 y donde las diferencias entre partes consecutivas son como mucho 2, podemos construir su diagrama de Ferrers y mirar las columnas. Nos darán una partición de n en la que ninguna parte es múltiplo de 3.

Esto establece una correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos de particiones, lo que concluye la demostración. \square

Tras el análisis del caso $d = 3$, abordamos ahora el caso $d = 4$, donde aparecen correspondencias adicionales entre tipos de particiones.

Esta sucesión está recogida en la sucesión A001935 de la OEIS.

Aunque se puede proporcionar una demostración idéntica a la del teorema 5.7, presentamos a continuación una que usa funciones generatrices.

Teorema 5.9. Para todo $n \geq 0$, el número de particiones de n en las que cada parte aparece, a lo sumo, tres veces es igual al número de particiones de n en las que ninguna parte es divisible por 4.

Demostración. Para esta demostración vamos a utilizar funciones generatrices.

Denotemos por $h(n)$ el número de particiones de n en las que ninguna parte es divisible por 4. La función generatriz correspondiente es

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n)x^n = \prod_{\substack{k=1 \\ 4 \nmid k}}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

En efecto, para cada k no divisible por 4, podemos tomar cualquier número de copias de k , y el término $\frac{1}{1-x^k}$ representa precisamente eso.

Observamos que

$$\prod_{\substack{k=1 \\ 4 \nmid k}}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{4k}}{1-x^k}.$$

Esta igualdad proviene de considerar la función generatriz de todas las particiones (producto sobre todos los k) y eliminar aquellas partes que son múltiplos de 4, ya que $1-x^{4k}$ anula la contribución de los múltiplos de 4.

Ahora bien, expandiendo $\frac{1-x^{4k}}{1-x^k}$ tenemos:

$$\frac{1-x^{4k}}{1-x^k} = (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}).$$

Por tanto,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{4k}}{1-x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}),$$

que es precisamente la función generatriz de las particiones de n en las que cada parte puede aparecer como mucho tres veces.

Esto demuestra que las dos clases de particiones consideradas tienen la misma función generatriz, y por tanto, el mismo número de particiones para cada n , lo que concluye la demostración. \square

La tabla 5.3 muestra los primeros valores de esta sucesión.

n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$
0	1	10	29	20	320
1	1	11	38	21	395
2	2	12	50	22	484
3	3	13	64	23	592
4	4	14	82	24	722
5	6	15	105	25	876
6	9	16	132	26	1060
7	12	17	166	27	1280
8	16	18	208	28	1539
9	22	19	258	29	1846

Cuadro 5.3: Número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 4, para $0 \leq n \leq 29$.

Se puede demostrar además que estas particiones corresponden a aquellas en las que las partes pares no se repiten.

Teorema 5.10. Para todo $n \geq 0$, el número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 4 coincide con el número de particiones de n en las que las partes pares no se repiten.

Demostración. Partimos de la función generatriz asociada a las particiones de n en las que cada parte aparece, a lo sumo, tres veces:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n + x^{2n} + x^{3n}).$$

Cada factor puede descomponerse como:

$$(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n}) = (1 + x^n)(1 + x^{2n}),$$

y utilizando que

$$1 + x^n = \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^n},$$

podemos reescribir:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n + x^{2n} + x^{3n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)(1 + x^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{2n}}{1 - x^n} \right) (1 + x^{2n}).$$

Así, la expresión puede reorganizarse como:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2n-1}} (1 + x^{2n}),$$

donde los factores $\frac{1}{1-x^{2n-1}}$ corresponden a las partes impares, que pueden repetirse cualquier número de veces. Los factores $(1+x^{2n})$ corresponden a las partes pares, que sólo pueden aparecer como mucho una vez.

De este modo, concluimos que el número de particiones de n en las que ninguna parte es divisible por 4 coincide con el número de particiones en las que las partes pares no se repiten. \square

A continuación, presentamos una segunda demostración de este resultado, basada en una descomposición directa de las particiones en partes impares y pares, y en el uso de una propiedad clásica de las particiones en números distintos.

Demostración. Consideramos una partición de n de la forma:

$$n = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_kp_k,$$

donde cada p_i no es divisible por 4 para todo $i = 1, \dots, k$, y a_i indica el número de veces que aparece la parte p_i .

Reorganizamos la suma separando las partes impares y las partes pares. Supongamos que los primeros h sumandos corresponden a las partes impares p_1, \dots, p_h , y que los p_{h+1}, \dots, p_k son los pares.

Sea m la suma de las partes pares:

$$m = a_{h+1}p_{h+1} + \cdots + a_kp_k.$$

Puesto que cada p_i para $i = h+1, \dots, k$ es par y no múltiplo de 4, podemos escribir:

$$p_i = 2q_i,$$

donde cada q_i es impar. Entonces:

$$m = 2(a_{h+1}q_{h+1} + \cdots + a_kq_k).$$

Observamos que estamos sumando ciertos múltiplos de números impares. Ahora aplicamos el teorema de Euler pues la suma $a_{h+1}q_{h+1} + \cdots + a_kq_k$ es una partición de números impares, p_{h+1}, \dots, p_k , que se repiten a_{h+1}, \dots, a_k veces respectivamente. Luego como existe una correspondencia entre particiones en partes impares permitiendo repeticiones y particiones en números distintos, m se puede escribir como:

$$m = 2(d_1 + d_2 + \cdots + d_s)$$

donde d_1, \dots, d_s son números distintos, lo que implica que $2d_1, \dots, 2d_s$ son números pares distintos.

Por tanto, hemos llegado a que la partición de n se descompone como:

- Una partición arbitraria en números impares (proveniente de los p_1, \dots, p_h).
- Una partición en números pares, donde cada número par aparece, a lo sumo, una vez (porque proviene de $2d_1, 2d_2, \dots, 2d_s$ con los d_i distintos).

De este modo, obtenemos que las partes pares en la partición de n no se repiten, mientras que las partes impares pueden aparecer cualquier número de veces, concluyendo así la demostración. \square

Ejemplo 5.8. Tomamos $n = 6$. Sabemos que el número de particiones de 6 en las que ninguna parte es múltiplo de 4 es 9. Estas particiones son:

6, 5+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1.

Veamos ahora las particiones de 6 en las que las partes pares no se repiten (es decir, cada parte par aparece como mucho una vez):

6, 5+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1.

Observamos que ambas listas coinciden exactamente.

Tras haber establecido esta correspondencia, pasamos a una nueva descripción de las particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 4, basada en las condiciones sobre la parte más pequeña y las diferencias entre partes consecutivas análogo al teorema 5.8.

Teorema 5.11. El número de particiones en la que ninguna parte es múltiplo de 4 es igual al número de particiones de n en el que la parte más pequeña y la diferencia entre partes consecutivas es a lo sumo 3.

Demostración. Consideremos una partición de n en la que ninguna parte es múltiplo de 4. Como establece el teorema de Glaisher para $d = 4$, dicha partición es equivalente a una en la que cada parte aparece, a lo sumo, tres veces.

A partir de esta partición, representamos su diagrama de Ferrers, en el que cada fila corresponde a una parte y cada punto representa una unidad.

Queremos ahora construir una nueva partición de n a partir de la información contenida en las columnas del diagrama, es decir de su partición conjugada. Observamos que, como cada parte puede repetirse a lo sumo tres veces, en cualquier columna aparecerán a lo sumo tres puntos apilados. Esto implica que las diferencias de longitud entre columnas consecutivas serán de 1, 2 o 3 unidades como máximo.

Por otro lado, las columnas de menor altura, al estar formadas por una, dos o tres unidades, indican que la parte más pequeña de la partición obtenida será 1, 2 o 3.

De este modo, a partir de la partición inicial hemos construido una nueva partición de n , su partición conjugada, que cumple que la parte más pequeña es 1, 2 o 3 y la diferencia entre partes consecutivas es, a lo sumo, 3.

De manera inversa, dada una partición de n cuya parte más pequeña es 1, 2 o 3 y en la que las diferencias entre partes consecutivas no exceden de 3, podemos interpretar las longitudes de las partes como las alturas de las columnas de un diagrama de Ferrers. Girando este diagrama, obtenemos una partición de n en la que cada parte aparece como mucho tres veces y, por tanto, en la que ninguna parte es múltiplo de 4.

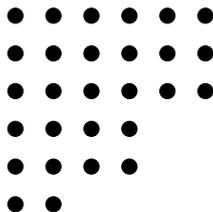
Con ello, establecemos una correspondencia biyectiva entre los dos tipos de particiones descritas, lo que concluye la demostración. \square

Ejemplo 5.9. Ilustremos el proceso con un ejemplo concreto.

Consideramos la partición de $n = 24$ en la que cada parte aparece, a lo sumo, tres veces:

$$24 = 6 + 6 + 6 + 4 + 4 + 2.$$

El diagrama de Ferrers asociado es:



Observamos ahora las columnas del diagrama. La altura de cada columna forma una nueva partición:

$$6, 6, 6, 5, 5, 3.$$

Esta partición cumple que la parte más pequeña es 3 y las diferencias entre partes consecutivas son a lo sumo 3.

Finalmente, cabe destacar que el estudio de casos particulares del teorema de Glaisher puede extenderse a otros valores de d . En la *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) pueden encontrarse las siguientes sucesiones que recogen estos resultados:

- A035959: número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 5.
- A219601: número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 6.
- A035985: número de particiones de n en las que ninguna parte es múltiplo de 7.

Aunque no desarrollaremos estos casos en detalle, su estudio sigue patrones similares a los analizados anteriormente.

Tras haber estudiado en detalle los casos particulares $d = 3$ y $d = 4$, podemos enunciar el teorema de Glaisher en su forma general. Este resultado establece una correspondencia entre particiones sujetas a restricciones en el número de repeticiones de las partes y particiones en las que se evita la presencia de múltiplos de un entero dado $d \geq 2$. El enunciado formal es el siguiente:

Teorema 5.12. Para todo entero $d \geq 2$ y para todo $n \geq 0$, el número de particiones de n en las que cada parte aparece, a lo sumo, $d - 1$ veces es igual al número de particiones de n en las que ninguna parte es divisible por d .

Demostración. La demostración de este teorema se sigue de manera análoga a la realizada para el caso $d = 3$, generalizando el argumento. En lugar de expresar las multiplicidades en base 3, se consideran ahora las descomposiciones en base d , y los productos $d^\ell p$ siguen siendo todos distintos debido a que las partes originales no son divisibles por d . De este modo, el razonamiento del caso particular se extiende directamente a todo $d \geq 2$. □

5.2. El teorema de Schur

Un teorema sobre particiones conocido es el teorema publicado por I. J. Schur en 1926 en su artículo [12]. Aunque el texto original no ha sido consultado por su idioma, lo mencionamos por su importancia

histórica . Probaremos este teorema estableciendo una correspondencia uno a uno entre dos tipos de particiones.

También se puede consultar la sucesión del teorema de Schur en la OEIS, en la entrada A003105.

El teorema es una extensión del teorema de la identidad de Rogers-Ramanujan en particiones. La identidad de Ramanujan para $r = 1$ o $r = 2$ afirma que el número de particiones de un entero en partes congruentes con $\pm r \pmod{5}$ es igual al número de particiones en partes con diferencia mínima 2, y cuya parte más pequeña es mayor o igual que r .

Enunciamos el teorema de Schur, que establece una correspondencia entre cuatro tipos diferentes de particiones enteras.

Teorema 5.13 (Schur 1926). Existe una biyección entre los siguientes tipos de particiones:

- Particiones de n en partes de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$.
- Particiones en partes distintas congruentes con $\pm 1 \pmod{3}$; es decir, partes congruentes con 1 o 2 módulo 3.
- Particiones en las que hay una diferencia mínima de 3 entre las partes, tales que no aparecen dos múltiplos de 3 consecutivos en la partición.
- Particiones en partes impares, donde cada parte aparece como máximo dos veces.

Se puede ver una muestra de esta sucesión en la tabla 5.4.

n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$
0	1	10	4	20	18	30	60
1	1	11	5	21	20	31	67
2	1	12	6	22	23	32	74
3	1	13	7	23	26	33	82
4	1	14	8	24	30	34	91
5	2	15	9	25	34	35	102
6	2	16	10	26	38	36	114
7	3	17	12	27	42	37	126
8	3	18	14	28	47	38	139
9	3	19	16	29	53	39	153

Cuadro 5.4: Número de particiones de n en las que el número de partes es de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$, para $0 \leq n \leq 39$.

A continuación demostraremos el teorema de Schur en varios pasos.

Lema 5.14. El número de particiones de n en partes de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$ es igual al número de particiones de n en partes *distintas* que son congruentes con $\pm 1 \pmod{3}$; es decir, $n = 3k + 1$ o $n = 3k - 1$.

Demostración. Consideramos una partición de n en la que cada parte es de la forma $6k + 1$ o $6k + 5$ (pues $6h - 1 = 6k + 5$), y puede repetirse varias veces.

$$n = a_1(6n_1 + 1) + \cdots + a_r(6n_r + 1) + b_1(6m_1 + 5) + \cdots + b_s(6m_s + 5),$$

donde a_i y b_j indican cuántas veces aparece cada parte.

Escribimos cada coeficiente a_i y b_j en base 2 y utilizando la propiedad distributiva, reescribimos la partición como una suma de términos de la forma:

$$n = 2^{e_1}(6k_1 + 1) + \cdots + 2^{e_r}(6k_r + 1) + 2^{f_1}(6m_1 + 5) + \cdots + 2^{f_s}(6m_s + 5),$$

donde los exponentes e_i y f_j son enteros no negativos distintos, y los términos $6k_i + 1$ y $6m_j + 5$ son impares no divisibles por 3. De este modo, cada sumando es de la forma $2^e(6k + 1)$ o $2^f(6k + 5)$, y todas las partes resultantes son distintas y no múltiplos de 3, es decir de la forma $3k + 1$ o $3k + 2$, como queríamos demostrar.

El recíproco también es cierto: dada una partición de n en partes distintas congruentes con $\pm 1 \pmod{3}$, podemos descomponer cada una como el producto de una potencia de 2 y un impar no divisible por 3. Luego, agrupando las potencias de 2 que aparecen con el mismo impar, reconstruimos una partición con partes de la forma $6k \pm 1$, posiblemente repetidas. Esto completa la demostración. \square

Ahora vamos a demostrar la correspondencia entre el punto 1 y 4 del Teorema de Schur.

Lema 5.15. El número de particiones de n en partes de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$, es igual al número de particiones en partes impares tales que cada parte aparece, a lo sumo, 2 veces.

Demostración. Siguiendo un razonamiento análogo al lema anterior, consideramos una partición de n en la que cada parte es de la forma $6k + 1$ o $6k + 5$, y puede repetirse varias veces. Es decir, la partición tiene la forma:

$$n = a_1(6n_1 + 1) + \cdots + a_r(6n_r + 1) + b_1(6m_1 + 5) + \cdots + b_s(6m_s + 5),$$

donde a_i y $b_j \in \mathbb{N}$ indican cuántas veces aparece cada parte.

Escribimos cada coeficiente a_i y b_j en base 3, es decir, como suma de potencias de 3 con coeficientes $\{0, 1, 2\}$.

Utilizando la propiedad distributiva, reescribimos la partición como una suma de términos de la forma:

$$n = c_1 \cdot 3^{e_1}(6k_1 + 1) + \cdots + c_p \cdot 3^{e_p}(6k_p + 1) + d_1 \cdot 3^{f_1}(6l_1 + 5) + \cdots + d_q \cdot 3^{f_q}(6l_q + 5),$$

donde los coeficientes $c_i, d_j \in \{1, 2\}$, y todos los términos $3^e(6k + 1)$ o $3^f(6k + 5)$ son impares, ya que el producto de una potencia de 3 con un impar sigue siendo impar.

Como a cada impar se le asocian potencias de 3 distintas, todas las partes de esta partición también son distintas, pero cada una puede aparecer a lo sumo dos veces, ya que en base 3 sólo usamos coeficientes 1 o 2.

Por tanto, hemos transformado una partición en partes de la forma $6k \pm 1$, en una partición en partes impares donde cada parte aparece, a lo sumo, dos veces.

El recíproco también es cierto: dada una partición de n en partes impares donde cada parte aparece como mucho dos veces, cada parte puede escribirse como el producto de una potencia de 3 por un impar de la forma $6k + 1$ o $6k + 5$, ya que todo impar puede escribirse en esa forma y las potencias de 3 permiten reconstruir la multiplicidad. Agrupando las potencias de 3 asociadas a cada impar, recuperamos una partición con partes de la forma $6k \pm 1$. Esto completa la demostración. \square

Por último, vamos a demostrar que existe una correspondencia entre el punto 2 y 3 del teorema de Schur. Para ello vamos a estudiar unas definiciones y lemas previos.

Se puede consultar este resultado en [6].

Definición 5.3. Vamos a definir las particiones que necesitamos.

- $C_{r,m}(n)$ denota el número de particiones de n en partes *distintas* congruentes con $\pm r$ mód m .
- $D_{r,m}(n)$ denota el número de particiones de n en partes *distintas* congruentes con 0 o $\pm r$ mód m , que satisfacen las siguientes condiciones:
 - La diferencia entre partes es al menos m ,
 - La diferencia entre múltiplos de m es al menos $2m$.

Queremos demostrar que el número de particiones de n en partes distintas congruentes con ± 1 mód 3 , $C_{1,3}(n)$, es igual al número de particiones de n en partes con diferencia mínima 3 , tales que no aparecen dos múltiplos de 3 consecutivos en la partición, $D_{1,3}(n)$. Al particularizar $D_{r,m}(n)$ en $r = 1, m = 3$ la condición de en partes *distintas* congruentes con 0 o $\pm r$ mód m abarca todos los números.

Necesitamos una definición algo peculiar:

Definición 5.4. Una *partición subyacente* $(1, 3)$ de n con k partes es una partición de

$$n - \frac{3k(k-1)}{2}$$

en exactamente k partes, cada una congruente con $0, \pm 1$ mód 3 (en este caso al ser $r = 1, m = 3$ estamos contando con todos los números) en la que los múltiplos de 3 son *distintos*.

Lema 5.16. Existe una correspondencia entre las particiones subyacentes $(1, 3)$ de n con k partes y las particiones contadas por $D_{1,3}(n)$ que tienen exactamente k partes.

Demostración. Sea $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ una partición subyacente $(1, 3)$ de n . Entonces es una partición tal que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n - \frac{3k(k-1)}{2},$$

donde los múltiplos de 3 son distintos.

Definimos una nueva partición $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ mediante:

$$b_i = a_i + 3(i-1), \quad \text{para } 1 \leq i \leq k.$$

Entonces $b_1 + \dots + b_k = n$, y como los a_i eran enteros positivos y los desplazamientos $3(i-1)$ son estrictamente crecientes, los b_i también forman una partición estrictamente creciente.

Además, se puede verificar que esta transformación preserva la estructura deseada: la diferencia entre partes consecutivas satisface

$$b_{i+1} - b_i = (a_{i+1} - a_i) + 3 \geq 4,$$

en particular, $b_{i+1} - b_i \geq 3$ para todo i .

Si b_i y b_{i+1} son múltiplos de 3, entonces se tiene:

$$b_i = 3k \quad \text{y} \quad b_{i+1} = 3r, \quad \text{con} \quad k < r.$$

Como $b_i = a_i + 3(i - 1)$ y $b_{i+1} = a_{i+1} + 3i$, se sigue que:

$$a_i = b_i - 3(i - 1) = 3(k - i + 1) \quad \text{y} \quad a_{i+1} = b_{i+1} - 3i = 3(r - i).$$

Por tanto, a_i y a_{i+1} serían ambos múltiplos de 3. Pero como los múltiplos de 3 en la partición subyacente (a_i) deben ser distintos, se tiene que $a_{i+1} \geq a_i + 3$, y por tanto:

$$b_{i+1} - b_i = (a_{i+1} - a_i) + 3 \geq 3 + 3 = 6.$$

Es decir, si dos partes consecutivas en la partición (b_i) son múltiplos de 3, su diferencia debe ser al menos 6.

Este procedimiento es reversible: dado b_i , se obtiene $a_i = b_i - 3(i - 1)$. Esto establece una correspondencia uno a uno entre las particiones subyacentes $(1, 3)$ y las particiones contadas por $D_{1,3}(n)$, que son aquellas en las que las partes son distintas, con diferencia mínima 3, y en las que los múltiplos de 3 están separados al menos por 6. \square

Vamos a ver ahora que $C_{1,3}$ también tiene una correspondencia uno a uno con las particiones subyacentes $(1, 3)$. Para eso necesitamos la siguiente definición.

Definición 5.5. Dada una partición $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ contada por $C_{1,3}(n)$, se subdivide de izquierda a derecha en **bloques de a lo sumo dos partes** siguiendo esta regla:

- Si $a_j + 3 > a_{j+1}$, y se cumple al menos una de las siguientes condiciones:
 - $a_j \equiv 1 \pmod{3}$,
 - $a_j > a_{j-1} + 3$,
 - a_{j-2} y a_{j-1} están en el mismo bloque,
 entonces a_j y a_{j+1} forman un bloque conjunto.
- En caso contrario, a_j forma un bloque por sí sola.

El **orden** de la partición es el número total de bloques obtenidos.

Ejemplo 5.10. La partición

$$4, 11, 14, 16, , 29, 31, 34, 36, 41$$

contada por $C_{1,3}(226)$ se subdivide en bloques, siguiendo la definición, de la siguiente manera:

$$4 \mid 11 \mid 14 \mid 16 \mid 29, 31 \mid 34, 36 \mid 41.$$

Esta partición tiene orden 7, ya que se han formado 7 bloques.

Lema 5.17. Existe una correspondencia biyectiva entre las particiones subyacentes $(1, 3)$ de n con k partes y las particiones contadas por $C_{1,3}(n)$ que tienen orden k .

Demostración. Sea (a_1, \dots, a_k) una partición subyacente $(1, 3)$. Definimos una nueva partición:

$$b_i = a_i + 3(i - 1), \quad \text{para } 1 \leq i \leq k.$$

Si algún b_i es múltiplo de 3, lo reemplazamos por dos enteros consecutivos que suman b_i , es decir:

$$b_i = \left\lfloor \frac{b_i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b_i}{2} \right\rceil.$$

De este modo, cada parte múltiplo de 3 se convierte en un bloque de dos elementos, mientras que las restantes forman bloques unitarios. El número total de bloques resultantes es k , que coincide con el número de términos de la partición subyacente original.

Este procedimiento es reversible: sumando las partes de cada bloque y restando $3(i - 1)$ al i -ésimo bloque, se recupera la partición subyacente.

Por tanto, existe una correspondencia uno a uno entre particiones subyacentes $(1, 3)$ de orden k y particiones contadas por $C_{1,3}(n)$ con orden k . \square

A partir del lema 5.16 y el lema 5.17 podemos concluir que

$$C_{1,3}(n) = D_{1,3}(n),$$

luego el número de particiones de n en partes distintas congruentes con $\pm 1 \pmod{3}$, $C_{1,3}(n)$, es igual al número de particiones de n en partes con diferencia mínima 3, tales que no aparecen dos múltiplos de 3 consecutivos en la partición, $D_{1,3}(n)$ y hemos probado el teorema 5.13.

A continuación se muestra una tabla con las particiones del número $n = 15$ según las tres formulaciones equivalentes del teorema de Schur:

- $A(n)$: número de particiones de n en partes (no necesariamente distintas) congruentes con $\pm 1 \pmod{6}$, es decir, partes congruentes con 1 o 5 módulo 6.
- $B(n)$: número de particiones de n en partes *distintas* que no son divisibles por 3, es decir, partes congruentes con $\pm 1 \pmod{3}$.
- $C(n)$: número de particiones de n en las que las partes son estrictamente decrecientes con una diferencia mínima de 3, y si dos partes son múltiplos de 3, su diferencia debe ser al menos 6.

En el caso $n = 15$, se puede comprobar que en cada una de estas formulaciones existen exactamente 9 particiones distintas que cumplen las respectivas condiciones. Estas particiones se muestran en tabla 5.5.

Además, podemos generalizar este resultado mediante el siguiente teorema:

Teorema 5.18. Dado $r, m \in \mathbb{N}$, tal que $r < \frac{m}{2}$, el número de particiones de n en partes distintas congruentes con $\pm r \pmod{m}$, $C_{r,m}(n)$, es igual al número de particiones de n en partes distintas congruentes con 0 o $\pm r \pmod{m}$ cuya mínima diferencia entre partes es m , y la mínima diferencia entre partes que son múltiplos de m es $2m$.

Para la demostración de este teorema basta con generalizar el lema 5.16 y el lema 5.17 para r, m .

Vamos a estudiar las funciones generatrices asociadas a las distintas particiones del lema de Schur.

$A(15) = 9$	$B(15) = 9$	$C(15) = 9$
$13 + 1 + 1$	$14 + 1$	15
$11 + 1 + 1 + 1 + 1$	$13 + 2$	$14 + 1$
$7 + 7 + 1$	$11 + 4$	$13 + 2$
$7 + 5 + 1 + 1 + 1$	$10 + 5$	$12 + 3$
$7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$10 + 4 + 1$	$11 + 4$
$5 + 5 + 5$	$8 + 7$	$10 + 5$
$5 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$8 + 5 + 2$	$10 + 4 + 1$
$5 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$	$8 + 4 + 2 + 1$	$9 + 5 + 1$
$1 + 1 + \dots + 1$	$7 + 5 + 2 + 1$	$8 + 5 + 2$

Cuadro 5.5: Particiones de $n = 15$ contadas por $A(n)$, $B(n)$ y $C(n)$.

La función generatriz del número de particiones de n en partes de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$, es:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^{6n+1})(1 - x^{6n+5})}.$$

La función generatriz del número de particiones de n en partes distintas congruentes con $\pm 1 \pmod{3}$, es decir, partes congruentes con 1 o 2 módulo 3, es:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{3n+1})(1 + x^{3n+2}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + x^n}{1 + x^{3n}}.$$

Observamos que se cumple la siguiente identidad algebraica:

$$\frac{1 + z}{1 + z^3} = \frac{1}{1 - z + z^2},$$

lo que nos permite deducir que la función generatriz anterior puede escribirse de forma equivalente como:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n + x^{2n}}.$$

Por el lema de Schur, las tres expresiones anteriores son equivalentes.

5.3. Particiones distintas que no son múltiplos de 4

En 2001, Andrews y Lewis [2] exploraron nuevas congruencias para particiones utilizando una identidad clásica del análisis q -hipergeométrico debida a F. H. Jackson. Esta herramienta permitió reinterpretar funciones generadoras asociadas a ciertas restricciones combinatorias, abriendo la puerta a una amplia clase de congruencias modulares. En particular, su enfoque resultó útil para analizar particiones en partes distintas que evitaban múltiplos específicos, como el 4, y establecer congruencias modulares no evidentes, como aquellas módulo 3. Esta partición está representada en la sucesión A070048 de la OEIS.

Teorema 5.19. El número de particiones de un entero n es la misma en cada uno de los siguientes tres casos:

- Particiones en partes impares en las que ninguna parte aparece más de tres veces.
- Particiones en partes distintas que no son múltiplos de 4.
- Particiones en partes impares tales que para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, **no** están simultáneamente $4j + 1$ y $4j + 3$.

Vamos a comenzar demostrando la igualdad entre el primer y el segundo caso del teorema. Podemos consultar este resultado en [11].

Lema 5.20. El número de particiones en partes impares en las que ninguna parte aparece más de tres veces es igual al número de particiones en partes distintas que no son múltiplos de 4.

Demostración. Sea una partición de n en partes impares, donde cada parte aparece a lo sumo tres veces. Es decir, escribimos

$$n = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_j k_j,$$

donde los k_i son impares distintos y $a_i \in \{1, 2, 3\}$ para todo i . A partir de esta partición, construiremos otra en partes distintas que no sean múltiplos de 4, mediante la siguiente correspondencia:

- Si $a_i = 1$, mantenemos la parte impar k_i .
- Si $a_i = 2$, sustituimos $k_i + k_i$ por una única parte $2k_i$, que es par pero no múltiplo de 4 (pues k_i es impar).
- Si $a_i = 3$, sustituimos $k_i + k_i + k_i$ por las partes k_i y $2k_i$, ambas distintas, no múltiplos de 4.

Observamos que todos los sumandos resultantes son distintos y no son múltiplos de 4. Como los k_i originales eran distintos, los valores k_i y $2k_i$ generados también lo son y no se repiten. Además, dado que k_i es impar, $2k_i$ es par pero no divisible por 4, ya que $2k_i \equiv 2 \pmod{4}$.

El recíproco es análogo, luego existe una biyección entre ambos tipos de particiones. □

Mostramos una segunda demostración usando funciones generatrices.

Demostración. Consideramos la función generatriz de las particiones de n en partes impares en las que ninguna parte aparece más de tres veces. Esta es:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2k+1} + x^{2(2k+1)} + x^{3(2k+1)}).$$

Observamos que el sumando

$$1 + z + z^2 + z^3 = (1 + z)(1 + z^2)$$

para cualquier z . Aplicando esta identidad con $z = x^{2k+1}$, obtenemos:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2k+1} + x^{2(2k+1)} + x^{3(2k+1)}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2k+1})(1 + x^{2(2k+1)}).$$

El primer producto genera partes impares distintas. El segundo producto genera partes de la forma $2(2k+1) = 4k+2$, es decir, partes pares no divisibles por 4 (ya que son congruentes con 2 módulo 4). Como los exponentes en ambos productos son distintos y cada factor es de la forma $1+x^m$, esto corresponde exactamente a las particiones en partes distintas que no son múltiplos de 4.

Por tanto, la función generatriz es la misma en ambos casos, lo que prueba el lema. \square

Demostramos a continuación la igualdad entre los casos 1 y 3 del teorema 5.19. Una referencia a este resultado puede encontrarse en [2].

Para ello, introducimos algunas definiciones previas.

Definición 5.6. Sean $0 < a < b < k$. Definimos $W_1(a, b; k; n)$ como el número de particiones de n en partes congruentes con a o b módulo k , tales que para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, no aparecen simultáneamente las partes $kj+a$ y $kj+b$.

En nuestra demostración, basta con considerar los valores $a = 1$, $b = 3$ y $k = 4$. En ese caso, $W_1(1, 3; 4; n)$ cuenta las particiones en partes impares tales que para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, **no** aparecen simultáneamente $4j+1$ y $4j+3$.

Asociamos a esta función de conteo su función generatriz:

$$\mathcal{W}_1(1, 3; 4; x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_1(1, 3; 4; n)x^n.$$

Lema 5.21. El número de particiones en partes impares tales que para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, no están simultáneamente $4j+1$ y $4j+3$, es igual al número de particiones en partes impares en las que ninguna parte aparece más de tres veces.

Demostración. Para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se permiten partes de la forma $4j+1$ o $4j+3$, pero no ambas a la vez. Su función generatriz es

$$\mathcal{W}_1(1, 3; 4; x) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} x^{m(4j+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} x^{m(4j+3)} \right).$$

A esta suma podemos aplicarle la siguiente identidad

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (b^n + c^n) = \frac{1-bc}{(1-b)(1-c)},$$

considerando $b = x^{4j+1}$ y $c = x^{4j+3}$. Luego tenemos

$$\frac{1 - x^{(4j+1)(4j+3)}}{(1 - x^{4j+1})(1 - x^{4j+3})}.$$

Por tanto, la función generatriz de la partición de números en los que no aparecen simultáneamente $4j+1$ o $4j+3$ es

$$\mathcal{W}_1(1, 3; 4; x) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 - x^{(8j+4)}}{(1 - x^{4j+1})(1 - x^{4j+3})}.$$

Como los denominadores recorren todos los impares $2n + 1$, podemos reescribir la función generatriz como

$$\mathcal{W}_1(1, 3; 4; x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - x^{4(2n+1)}}{1 - x^{2n+1}}.$$

Finalmente, aplicamos la identidad

$$\frac{1 - z^4}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3,$$

con $z = x^{2n+1}$, obteniendo

$$\frac{1 - x^{4(2n+1)}}{1 - x^{2n+1}} = 1 + x^{2n+1} + x^{2(2n+1)} + x^{3(2n+1)}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{W}_1(1, 3; 4; x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2n+1} + x^{2(2n+1)} + x^{3(2n+1)}),$$

que es precisamente la función generatriz de las particiones en partes impares en las que cada parte aparece a lo sumo tres veces.

Esto concluye la demostración. □



Capítulo 6

Particiones autoconjugadas

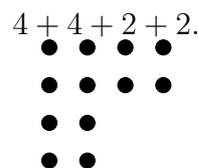
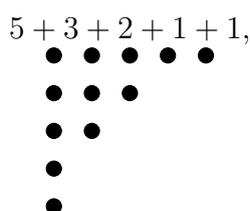
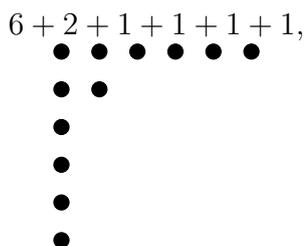
En la teoría de particiones, una *partición autoconjugada* es aquella que es igual a su propia partición conjugada como podemos ver en la definición 5, página 46. Las particiones autoconjugadas tienen una relación estrecha con las particiones en partes impares distintas.

En este capítulo, exploraremos sus propiedades, identidades fundamentales y demostraciones clásicas que relacionan las particiones autoconjugadas con otras formas de particionar un entero.

La sucesión que hemos utilizado en este capítulo corresponde a la sucesión A000700 en la OEIS.

Definición 6.1. Una *partición autoconjugada* de un entero n es aquella que coincide con su propia partición conjugada. Formalmente, si una partición de n se representa mediante su diagrama de Ferrers, su reflexión con respecto a la diagonal principal no altera la estructura de la partición. Denotamos al número de particiones de n autoconjugadas por $pa(n)$.

Luego, una partición es auto-conjugada si es su propio conjugado, es decir, son los puntos fijos de la transformación de conjugación. Podemos ver que las particiones autoconjugadas de 12 son:



Puede verse una pequeña muestra de la sucesión en la tabla 6.1.

Las particiones autoconjugadas y las particiones en partes impares distintas parecen estar definidas de manera independiente. Sin embargo, existe una correspondencia exacta entre ambas: para cada entero n , el número de particiones autoconjugadas es igual al número de particiones en partes impares distintas. Este resultado revela una conexión profunda entre la simetría en los diagramas de Ferrers y restricciones aritméticas en las particiones.

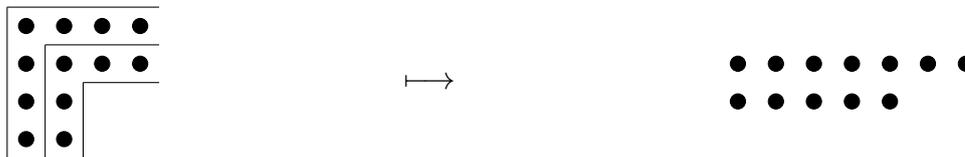
Teorema 6.1. Sea $pa(n)$ el número de particiones autoconjugadas de n y $qd(n)$ el número de particiones de n en partes impares distintas. Entonces, se cumple que

$$pa(n) = qd(n).$$

n	$a(n)$								
0	1	13	3	26	12	39	41	52	117
1	1	14	3	27	14	40	46	53	125
2	0	15	4	28	16	41	49	54	133
3	1	16	5	29	17	42	52	55	144
4	1	17	5	30	18	43	57	56	157
5	1	18	5	31	20	44	63	57	168
6	1	19	6	32	23	45	68	58	178
7	1	20	7	33	25	46	72	59	192
8	2	21	8	34	26	47	78	60	209
9	2	22	8	35	29	48	87	61	223
10	2	23	9	36	33	49	93	62	236
11	2	24	11	37	35	50	98	63	255
12	3	25	12	38	37	51	107	64	276

Cuadro 6.1: Valores del número de particiones autoconjugadas, $pa(n)$ para $0 \leq n \leq 64$.

Demostración. Tomamos la primera fila junto con la primera columna y formamos una nueva fila con todos esos puntos. Luego tomamos lo que queda de la segunda fila y la segunda columna y los combinamos en una nueva fila, y así sucesivamente. Dado que las particiones auto-conjugadas son simétricas alrededor de la diagonal noroeste-sureste, siempre combinamos una fila con una columna de la misma longitud, y como comparten un punto, el resultado es una fila de longitud impar (el doble de la longitud original menos uno). Es evidente a partir de la representación gráfica por qué las partes resultantes también deben ser distintas.



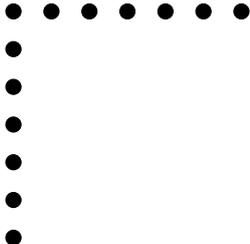
De manera recíproca, comenzando desde una partición en partes impares distintas, podemos doblar cada parte impar en un gancho simétrico único, y estos ganchos encajan unos dentro de otros, formando un diagrama de Ferrers auto-conjugado. Esta biyección prueba la identidad:

$$pa(n) = qd(n).$$

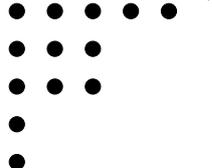
□

Podemos ver que $pa(13) = qd(13) = 3$. Las particiones autoconjugadas de $n = 13$ son:

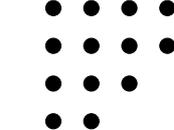
$$7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$



$$5 + 3 + 3 + 1 + 1,$$



$$4 + 4 + 3 + 2.$$



Las particiones de $n = 13$ en partes impares distintas son:

$$13, \quad 9 + 3 + 1 \quad \text{y} \quad 7 + 5 + 1.$$

Un hecho notable es que existe una función generadora que *enumera exactamente* las particiones autoconjugadas de n . Esta función está dada por el siguiente producto infinito:

$$\sum_{n=0}^{\infty} pa(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{2k-1}),$$

donde $pa(n)$ representa el número de particiones autoconjugadas de n .

Esta fórmula puede entenderse combinatoriamente observando que cada parte de una partición autoconjugada corresponde a un cuadrado centrado en la diagonal del diagrama de Ferrers. Como consecuencia, las longitudes de las filas (y columnas) implicadas deben ser impares y distintas, lo que justifica la estructura del producto generador.

Además, podemos considerar otra forma equivalente de expresar esta función generadora: utilizando la identidad

$$\frac{1 - h^k}{1 - h^{2k}} = \frac{1}{1 + h^k},$$

si tomamos $h = -x$, entonces como

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{2k-1}) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-x)^k}{1 - (-x)^{2k}},$$

tenemos otra función generadora:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (-x)^k}.$$

De esta manera, el número de particiones autoconjugadas de n puede interpretarse también en términos de particiones relacionadas con potencias de $-x$.

El número de particiones de n en partes impares y distintas, $pa(n)$, crece de forma subexponencial y está bien aproximado, para valores grandes de n , por la siguiente fórmula asintótica:

$$a(n) \approx \frac{1}{2 \cdot 24^{1/4} \cdot n^{3/4}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{6}}\right).$$

Esta fórmula proporciona una excelente estimación del número de particiones de n con las dos restricciones simultáneas: que todas las partes sean impares y que todas sean distintas.

Ejemplo 6.1. Consideremos $n = 50$. Aplicando la fórmula asintótica, tenemos:

$$a(50) \approx \frac{1}{2 \cdot 24^{1/4} \cdot 50^{3/4}} \cdot \exp\left(\pi\sqrt{\frac{50}{6}}\right) \approx 104,4934870872$$

El valor exacto es $a(50) = 98$.

Como hemos visto en el teorema 5.6, el número de particiones en partes impares es igual al número de particiones de n en las que, si k es la parte más grande, entonces k aparece un número impar

de veces, y las partes menores aparecen un número par de veces. Ahora disponemos de un resultado análogo.

Proposición 6.2. El número de particiones en partes autoconjugadas $pa(n)$, coincide con el número de particiones en la que si k es la partes más grande, entonces k aparece un número impar de veces y las partes menores que k aparecen un número par de veces.

Demostración. Consideramos una partición de n en partes impares y distintas, es decir,

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_s, \quad \text{con } \lambda_i \text{ impar para todo } i = 1, \dots, s.$$

Representamos esta partición mediante su diagrama de Ferrers.

Como ilustración, para $n = 26$ tomamos la partición

$$26 = 11 + 7 + 5 + 3,$$

cuyo diagrama se muestra en la figura. Se agrupan las columnas mediante llaves, organizando las partes iguales de la partición conjugada.

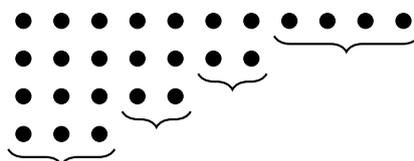


Figura 6.1: Diagrama de Ferrers con agrupación de columnas mediante llaves.

En el diagrama conjugado, es decir, al considerar las columnas de la partición original, la parte más grande aparece un número de veces igual a la longitud de la última fila. Como todas las filas de la partición original tienen longitud impar (por hipótesis), en particular la última fila también es impar, por lo que la parte más grande de la partición conjugada tiene multiplicidad impar.

Respecto al resto de partes, la cantidad de veces que aparecen en la conjugada se obtiene como la diferencia entre la longitud de una fila y la de la siguiente. La diferencia entre dos números impares es par, por lo que todas las demás partes distintas de la mayor aparecen un número par de veces.

Así, a toda partición de n en partes impares y distintas le corresponde, mediante conjugación, una partición en la que la parte más grande tiene multiplicidad impar y el resto de partes multiplicidad par.

Recíprocamente, dada una partición de n con esa distribución de paridades (una parte con multiplicidad impar y el resto con par), al considerar su diagrama de Ferrers y aplicar el conjugado, se obtiene una partición en partes distintas e impares: la parte con multiplicidad impar origina una fila de longitud impar, y la suma de las partes con multiplicidad par genera filas también de longitud impar, preservando la condición inicial.

Por tanto, se establece una biyección entre las particiones de n en partes impares distintas y las particiones de n donde la parte más grande aparece un número impar de veces y el resto un número par de veces, lo que concluye la demostración. \square

Capítulo 7

Particiones en un número par/impar de partes

En los capítulos anteriores hemos estudiado diversas funciones relacionadas con las particiones de un entero n , como la función $p(n)$, que cuenta todas las particiones posibles, $q(n)$, que cuenta las particiones en partes impares o distintas, y también las particiones autoconjugadas, entre otras. Estos casos nos han permitido observar cómo diferentes restricciones en la forma de particionar un número conducen a estructuras combinatorias interesantes, con funciones generadoras propias y comportamientos asintóticos.

En este capítulo presentamos una selección de variantes clásicas de particiones enteras, como particiones de n en un número par de partes y en número impar de partes.

Para cada una de estas familias describiremos brevemente su definición, señalaremos algunos resultados relevantes, tanto exactos como asintóticos, sus funciones generatrices y una pequeña muestra de la partición.

7.1. Particiones de n en un número par de partes

En esta sección vamos a estudiar las particiones n en un número par de partes. Esta sección corresponde con la sucesión de OEIS A027187.

Definición 7.1. *Una partición de n en un número par de partes es una descomposición de n en una suma de enteros positivos*

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$$

donde k es par y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$.

Vamos a denotar el número de particiones de n en un número par de partes como $pp(n)$.

Podemos añadir algunas curiosidades de este tipo de particiones. Para $n > 0$, $pp(n)$ representa el número de particiones de n cuya parte más grande es un número par.

$pp(n)$ también representa el número de particiones de $n + 1$ en un número impar de partes, siendo la menor 1.

n	$pp(n)$	n	$pp(n)$	n	$pp(n)$	n	$pp(n)$
0	1	6	6	12	40	18	195
1	0	7	7	13	49	19	242
2	1	8	12	14	69	20	317
3	1	9	14	15	86	21	392
4	3	10	22	16	118	22	505
5	3	11	27	17	146	23	623

Cuadro 7.1: Valores del número de particiones en un número par de partes, $pp(n)$ para $0 \leq n \leq 23$.

Además representa el número de particiones de n en las que la cantidad de partes pares tiene la misma paridad que la cantidad de partes impares.

Vamos a determinar la función generadora de esta sucesión.

Sea $p(n)$ el número de particiones de n . La función generadora de todas las particiones es

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Nuestro objetivo es determinar la función generadora de las particiones de n en un número par de partes.

Para ello, resulta útil distinguir entre particiones con un número par de partes y aquellas con un número impar de partes. Entonces se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} pp(n)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} pi(n)x^n,$$

donde $pp(n)$ denota el número de particiones de n con un número par de partes, y $pi(n)$ el número de particiones de n con un número impar de partes. Es decir, $p(n)$ cuenta todas las particiones de n , independientemente del número de partes.

Por otra parte, queremos justificar que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} pi(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}.$$

Recordamos que

$$\frac{1}{1+x^k} = 1 - x^k + x^{2k} - x^{3k} + \dots,$$

por lo que el producto infinito puede desarrollarse formalmente como

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k + x^{2k} - x^{3k} + \dots).$$

Esta expresión genera todas las particiones de n , donde cada término aparece con signo $+1$ o -1 dependiendo de la paridad del número de partes: se suma la partición si tiene un número par de partes y se resta si tiene un número impar de partes.

Por tanto, el coeficiente de x^n en esta serie corresponde exactamente a la diferencia entre el número de particiones de n con un número par de partes y el número de particiones de n con un número impar de partes. Es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (pp(n) - pi(n)) x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}.$$

Sumando ahora las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} pi(n)x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} pi(n)x^n \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k},$$

es decir,

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} pp(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}.$$

En conclusión, la función generadora de las particiones de n en un número par de partes es

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)x^n = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k} \right)}.$$

Presentamos a continuación una proposición llamativa que recuerda al teorema de los números pentagonales de Euler, y cuya demostración excede el alcance de este trabajo.

Proposición 7.1. Sea n un entero positivo y sea t el mayor entero tal que $n - t^2 \geq 0$. Entonces,

$$pp(n) = \sum_{s=0}^t (-1)^s p(n - s^2),$$

donde $pp(n)$ denota el número de particiones de n con un número par de partes, y $p(n)$ es el número total de particiones de n .

7.2. Particiones de n en un número impar de partes

En esta sección nos centraremos en el estudio de las particiones de n que presentan un número impar de partes. Este conjunto de particiones está recogido en la sucesión A027193 de OEIS.

Definición 7.2. Una *partición de n en un número impar de partes* es una descomposición de la forma

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k,$$

donde k es impar y se verifica que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$. Denotaremos el número de estas particiones como $pi(n)$.

n	$pi(n)$	n	$pi(n)$	n	$pi(n)$	n	$pi(n)$
0	0	6	5	12	37	18	190
1	1	7	8	13	52	19	248
2	1	8	10	14	66	20	310
3	2	9	16	15	90	21	400
4	2	10	20	16	113	22	497
5	4	11	29	17	151	23	632

Cuadro 7.2: Valores del número de particiones en un número impar de partes, $pi(n)$ para $0 \leq n \leq 23$.

Mostramos una pequeña muestra de la sucesión en la tabla (7.2).

El comportamiento de estas particiones presenta algunas particularidades que merecen destacarse.

Una primera caracterización alternativa de $pi(n)$ es que también cuenta el número de particiones de $n + 1$ en las cuales el número de partes es par y la menor parte es exactamente 1.

El número de particiones de n cuya parte más grande es un número impar.

Además, $pi(n)$ coincide con el número de particiones de $n + 1$ donde la parte más grande es par y aparece únicamente una vez.

Estas propiedades reflejan una correspondencia complementaria respecto a las observadas para $pp(n)$, aunque adaptadas al caso de un número impar de partes.

En cuanto a su función generadora, $pi(n)$ viene dada por la expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} pi(n)x^n = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} - \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k} \right).$$

La diferencia de signo entre esta función generadora y la correspondiente a $pp(n)$ refleja el cambio de paridad en el número de partes de las particiones consideradas.

Bibliografía

- [1] George E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, 1998.
- [2] G. E. Andrews y R. P. Lewis, *An algebraic identity of F. H. Jackson and its implications for partitions*, *Discrete Mathematics* **232** (2001), 77–83.
- [3] George E. Andrews y Kimmo Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2004.
- [4] T. M. Apostol, *Introducción a la teoría analítica de números*, Reverté, 2002.
- [5] Miklós Bona, *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific, 2002.
- [6] David M. Bressoud, *A combinatorial proof of Schur's 1926 partition theorem*, *American Mathematical Society*, 79 (2), 1980, pp. 338–340.
- [7] Charalambos A. Charalambides, *Enumerative Combinatorics*, Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [8] Nouredine Chair, *Partition Identities From Partial Supersymmetry*, 2004. Disponible en: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0409011>.
- [9] J. W. L. Glaisher, *A theorem in partitions*, *Messenger of Mathematics* **12** (1882–1883), 158–170.
- [10] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 6ª edición, 2008.
- [11] M. D. Hirschhorn y J. A. Sellers, *A congruence modulo 3 for partitions into distinct non-multiples of four*, *Journal of Integer Sequences* **17** (2014), Article 14.9.6.
- [12] I. J. Schur, *Zur additiven Zahlentheorie*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Physikalisch-mathematische Klasse, 1926, 488–495.
- [13] J. H. Van Lint y R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1992.
- [14] Neil J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, 1964. Disponible en: <https://oeis.org/>.

Las sucesiones mencionadas en este trabajo que pueden encontrarse en <https://oeis.org/> son:

- A000009: Número de particiones de n en partes distintas.
- A000041: Número de particiones de n .
- A000700: Número de particiones de n autoconjugadas.
- A000726: Número de particiones de n en partes no divisibles por 3.
- A001400: Número de particiones de n en a lo sumo 4 partes.

- A001401: Número de particiones de n en a lo sumo 5 partes.
- A001402: Número de particiones de n en a lo sumo 6 partes.
- A001935: Número de particiones de n en partes no divisibles por 4.
- A003105: Número de particiones de n en partes de la forma $6k + 1$ o $6k + 5$.
- A027187: Número de particiones de n en un número par de partes.
- A027193: Número de particiones de n en un número impar de partes.
- A035939: Número de particiones de n en partes no divisibles por 5.
- A035985: Número de particiones de n en partes no divisibles por 7.
- A067659: Número de particiones de n en partes distintas tal que el número de partes es impar.
- A067661: Número de particiones de n en partes distintas tal que el número de partes es par.
- A070048: Número de particiones de n en partes impares tal que cada parte aparece a lo sumo 3 veces.
- A219601: Número de particiones de n en partes no divisibles por 6.