



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

LA FUNCIÓN GAMMA DE EULER

Autor: Pablo Gómez Villamayor

Tutor: Javier Sanz Gil

Julio de 2025

LA FUNCIÓN GAMMA DE EULER

Pablo Gómez Villamayor ©
pablogv2001@gmail.com

TRABAJO FIN DE GRADO:
La función Gamma de Euler
Grado en Matemáticas. Universidad de Valladolid

LUGAR: Valladolid
FECHA: Julio de 2025

*“Lo que está a la vista
no necesita candiles”*

M^a Luisa Losada García

*A mis padres: Luisi y Don Pablo. A los Mimos y a la Moni.
A Amanda. A los Bebus: Janchu, Q y Rulas.
A mis amigos de Madridejos: Guille, Rober y Rome.
A Nieves y Daniel, por ser mis mayores fans.
Al CB Consuegra.*

*A mis amigos de Valladolid: Franco, Alejandro, Cubero, Elena, Noemí y
Lucía. Y, especialmente, a Sofi, Ángel y Mariano.
A Joo, por recordarme que 원숭이도 나무에서 떨어진다 .
A Gon & Killua.
Y a ti, dentro de 2000 años.*

*A Alfonso, por descubrirme la belleza de las matemáticas.
A Gabriel Chachi, por enseñarme a no bajarle ni un centímetro.
A Bombón, mi compañero peludo, que me acompañó desde el colegio hasta
la universidad.*

Gracias a todos, por hacerme ser quien soy.

*Y a mi abuela Luisa, por enseñarme que las mejores esencias se guardan en
frascos pequeños.*

ABSTRACT

This Bachelor's thesis presents a detailed study of Euler's Gamma function, which generalizes the factorial to non-integer arguments and stands as one of the most significant *special functions* in mathematical analysis. The exposition is structured in two main parts: The initial one examines the behavior of the function over the real numbers, including the Bohr–Mollerup theorem; the second one focuses on the complex domain, where several equivalent definitions of the Gamma function are explored, concluding with Wielandt theorem. The necessary theoretical foundations—such as logarithmic convexity, infinite products, and holomorphy under the integral sign—are introduced and developed. The final chapter presents an overview of key applications of the Gamma function, highlighting its connections to other special functions, notably the Beta function and the Riemann Zeta function. Moreover, multiple graphical representations are presented, generated with the aid of various computational resources.

Key words: *Euler Gamma function, factorial, Bohr–Mollerup theorem, logarithmic convexity, Wielandt theorem, Weierstrass infinite product.*

.....

RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Grado pretende abordar un estudio detallado de la función Gamma de Euler, una extensión del factorial a argumentos no enteros y una de las *funciones especiales* más importantes del análisis matemático. La exposición se divide principalmente en dos partes: el análisis en la recta real, donde se presenta el teorema de Bohr–Mollerup; y el estudio en el plano complejo, que incluye distintas definiciones equivalentes de Gamma y culmina con el teorema de Wielandt. Se introducen también los fundamentos teóricos necesarios: convexidad logarítmica, productos infinitos, y holomorfía bajo el signo integral. Finalmente, se comentan diversas aplicaciones de la función Gamma, así como su relación con otras *funciones especiales*, como las funciones Beta y Zeta de Riemann. A modo de complemento, el trabajo incluye múltiples representaciones gráficas de los contenidos estudiados, generadas con varios recursos informáticos.

Palabras clave: *Función Gamma de Euler, factorial, teorema de Bohr–Mollerup, log-convexidad, teorema de Wielandt, producto de Weierstrass.*

Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de códigos informáticos	XI
Introducción	1
Introducción histórica	3
1. Resultados previos	5
1.1. Convexidad	5
1.2. Convexidad logarítmica	15
1.3. Productos infinitos	22
1.4. Holomorfía bajo el signo integral	31
2. La función Γ real	33
2.1. Forma integral. Primeras propiedades	33
2.2. Extensión a $\mathbb{R}_{<0}$	40
2.3. Generalizando el factorial. Problema de unicidad	47
2.4. Teorema de Bohr-Mollerup	54
3. La función Γ compleja	63
3.1. Gamma como producto infinito	65
3.2. Gamma como límite	86
3.3. Gamma como integral	89
3.4. Teorema de Hölder	92
4. Aplicaciones de la función Gamma	95
En la Matemática	95
En la Física	95
Continuación I: Funciones pseudogamma	96
Continuación II: Funciones poligamma	97

Funciones Beta y Zeta de Riemann	97
Conclusion	98
I. Apéndice	99
Cálculo Infinitesimal	99
Derivabilidad de Γ real	104
Variable Compleja	107
Desigualdades notables	111
II. Anexo. Repositorio	115
$\text{\LaTeX}$. Gamma en $\mathbb{R}$	116
Mathematica . Gamma en $\mathbb{C}$	117
Bibliografía	119
Índice de notación	123
Índice de términos	127

Índice de figuras

Introducción

1. Línea temporal sobre el estudio de la función Gamma 3

Capítulo 1

- 1.1. Función convexa. Interpretación geométrica 7
- 1.2. Función convexa. Crecimiento de las pendientes 9
- 1.3. Función convexa. Mínimo absoluto 13
- 1.4. Función estrictamente convexa. Mínimo absoluto 14

Capítulo 2

- 2.1. Función Gamma real, $\Gamma(x)$ 46
- 2.2. Funciones pseudogamma. Un ejemplo degenerado 50
- 2.3. Funciones pseudogamma. Un ejemplo continuo y convexo . . . 52
- 2.4. Función Gamma real en $[1, 2]$. Mínimo absoluto 57

Capítulo 3

- 3.1. Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$ 64
- 3.2. Constante de Euler-Mascheroni. Acotación inferior de γ_n . . . 72
- 3.3. Constante de Euler-Mascheroni. Acotación superior de γ_n . . . 73
- 3.4. Constante de Euler-Mascheroni. Una mejor cota inferior para γ 75
- 3.5. Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Vista lateral . 81
- 3.6. Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Vista cenital . 82
- 3.7. Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Argumento . 82

Índice de códigos informáticos

Anexo

1. Código *L^AT_EX*. Gráfica de la función Gamma real, $\Gamma(x)$ 117
2. Código *Mathematica*. Gráfica del módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$ 117

Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) pretende abordar el estudio de la función Gamma de Euler: primeramente, desde la perspectiva del análisis en variable real; posteriormente, desde el punto de vista de la variable compleja, examinando las diferentes definiciones de esta función. Este es un tema clásico en análisis complejo, al que han contribuido célebres figuras de la Matemática como Carl Friedrich Gauss o Leonhard Euler, entre otros. En consecuencia, son fundamentales las técnicas y rudimentos estudiados en la asignatura “Variable Compleja”, de tercer curso del Grado en Matemáticas en la Universidad de Valladolid. La exposición del trabajo se persigue rigurosa y formal, de forma que se reflejen las capacidades alcanzadas durante el transcurso de los estudios del grado.

El contenido del trabajo se estructura como sigue: en el [capítulo 1](#) se recogen los resultados teóricos necesarios en el desarrollo del trabajo. Específicamente, se tratan los conceptos de convexidad logarítmica, productos infinitos y holomorfía bajo el signo integral. La parte central del TFG la conforman los dos siguientes capítulos; en el [capítulo 2](#) se estudia la función Gamma exclusivamente en la recta real. Se incluye aquí la caracterización de Gamma en $\mathbb{R}$ dada por el Teorema de Bohr-Mollerup; el [capítulo 3](#) continúa con el estudio de la función Gamma en el plano complejo, a través de tres definiciones diferentes. Se presenta aquí el teorema de Wielandt, que constituye la caracterización de Gamma en $\mathbb{C}$. Por último, el [capítulo 4](#) incluye diversos aspectos relacionados: se comentan aplicaciones de la función Gamma en la Matemática y la Física, se indican posibles temas a tratar tras nuestro estudio de Gamma y se presentan las funciones Beta y Zeta de Riemann.

Para cerrar el trabajo se ha incluido un [apéndice](#), que recoge resultados clásicos de análisis en variable real y en variable compleja. Asimismo, dicho apéndice consta de dos apartados adicionales: uno, sobre la derivabilidad de la función Gamma real; y otro, sobre desigualdades notables. Tras ello,

INTRODUCCIÓN

concluimos con un [índice de notación](#) y un [índice alfabético de términos](#). Estas tres últimas secciones buscan la completitud del texto, así como facilitar su lectura. Con este mismo fin, se han añadido múltiples hipervínculos, lo cual agiliza la navegación por el documento si se consulta en formato electrónico. Por ejemplo, para regresar al [índice de contenidos](#) desde cualquier lugar del documento, basta pulsar el número de página.

En cuanto a las ilustraciones que aparecen en el trabajo, todas ellas son de elaboración propia, salvo que se mencione explícitamente lo contrario. El [índice de figuras](#) permite su rápida localización en el texto. Para su elaboración se han utilizado $\text{\LaTeX}$, y *Mathematica*. Con el propósito de ofrecer un mayor nivel de detalle, se ha habilitado un repositorio de *GitHub* , que complementa el contenido del trabajo. En él se han recopilado todas las representaciones gráficas presentadas en el texto, así como los códigos informáticos utilizados para su generación. El lector que desee acceder al repositorio o encontrar más detalles sobre los aspectos computacionales del trabajo puede hacerlo en el correspondiente [anexo](#). De modo ilustrativo, dicha sección contiene algunos de los mencionados códigos, los cuales pueden localizarse acudiendo al [índice de códigos informáticos](#).

Las principales referencias bibliográficas seguidas en el desarrollo del trabajo han sido: el texto de Artin, [[Art64](#)], para la parte de variable real; y el libro de Remmert, [[Rem98](#)], en lo que concierne a la variable compleja. Existen otros textos que realizan una construcción similar de la función Gamma compleja, y cuya consulta ha sido provechosa. Destacamos los correspondientes libros de Henrici ([[Hen77](#)]) y Markusevich ([[Mar65](#)]). Aunque estas cuatro hayan sido las referencias fundamentales para la elaboración del TFG, la [bibliografía](#) incluye otras de gran interés. Adicionalmente, para facilitar la consulta del lector interesado, en cada sección se irán comentando las referencias utilizadas.

Finalmente, cabe mencionar que el contenido de elaboración propia del trabajo es de libre uso. Tanto imágenes como códigos informáticos pueden ser utilizados, reproducidos o modificados por cualquier persona interesada, citando correspondientemente el trabajo original:

“Gómez Villamayor, Pablo. *La Función Gamma de Euler*. Trabajo de Fin de Grado. Grado en Matemáticas. Universidad de Valladolid. Julio de 2025”.

Introducción histórica

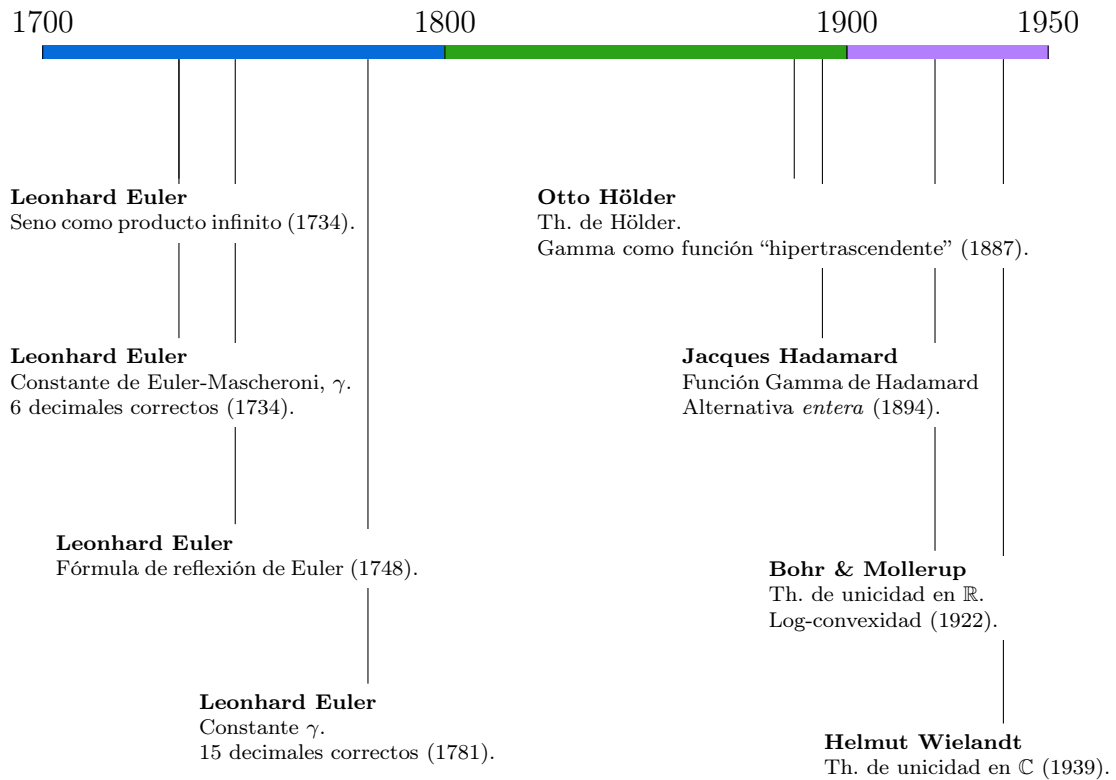


Figura 1: Línea temporal de sucesos relevantes en el estudio de la función Gamma. Elaboración propia (L^AT_EX).

INTRODUCCIÓN

La generalización de la función factorial a argumentos no enteros comenzó a estudiarse en el siglo XVIII. Daniel Bernoulli y Christian Goldbach estudiaron el problema en los años 1720, y fue resuelto a finales de esa década por Leonhard Euler [Wor12]. Euler definió la función Gamma mediante un producto infinito¹ y, poco después, dio su representación integral clásica. También descubrió propiedades fundamentales como la fórmula de reflexión.

En 1734, Euler introdujo la constante γ , conocida en la actualidad como *constante de Euler-Mascheroni*. Ese mismo año, Euler aproximó su valor a seis decimales; en 1781, perfeccionó este cálculo hasta quince decimales correctos. Esta época se caracterizó por el estudio de los productos infinitos: por ejemplo, el mismo Euler obtuvo la representación infinita del seno en 1734.

En el siglo XIX, la teoría de la función Gamma se consolidó. Adrien-Marie Legendre introdujo hacia 1811 la denominación de “función Gamma” y la notación actual, Γ . Además, Legendre reescribió la integral de Euler en su forma moderna. Por su parte, Carl Friedrich Gauss obtuvo la representación de Gamma como límite. En 1876, Karl Weierstrass estableció el célebre producto infinito que incluye la constante γ . Esta expresión sí que corresponde con la presentada en el trabajo, concretamente en la [sección 3.1](#).

El desarrollo teórico prosiguió con importantes teoremas de caracterización. En 1887, Otto Hölder demostró que la función Gamma no puede satisfacer ninguna ecuación diferencial algebraica. En 1922, Harald Bohr y Johannes Møllerup probaron que Γ es la única función log-convexa que satisface la relación de recurrencia $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ con $\Gamma(1) = 1$. Dicha relación será denominada *propiedad reproductiva* a lo largo del trabajo. Más adelante, en 1939, Wielandt dio una caracterización alternativa, desde la perspectiva del análisis complejo.

Hoy en día, la función Gamma posee múltiples aplicaciones, tanto en la Matemática como en otras disciplinas científicas. Por ejemplo, aparece en la resolución de algunos problemas de la Física Nuclear. Por otra parte, cabe destacar el importante papel de la función Gamma en teoría analítica de números, por su relación con la función Zeta de Riemann. Fruto de un prolongado esfuerzo colectivo iniciado en el siglo XVIII, la función Gamma se ha consolidado como una de las más relevantes del Análisis Matemático.

¹ Cabe señalar que la expresión del producto infinito de Euler no corresponde a la que se ha incluido en el trabajo.

Resultados previos

En este capítulo inicial se recogen los principales resultados teóricos necesarios en el posterior desarrollo del trabajo. Este estará dividido en cuatro secciones. En la [sección 1.1](#) se recuerdan las nociones básicas de convexidad. Seguidamente, la [sección 1.2](#) trata sobre convexidad logarítmica. Incluimos en ella los resultados necesarios para la demostración del teorema de Bohr-Mollerup¹. Por otro lado, las dos siguientes secciones recopilan la teoría requerida para las diversas definiciones de la función Gamma compleja. Más concretamente, la [sección 1.3](#) trata sobre productos infinitos, y la [sección 1.4](#), sobre holomorfía bajo el signo integral.

1.1. Convexidad

En primer lugar, se introduce el concepto de función convexa. Tras ello, continuaremos la sección recordando varios resultados básicos, complementados con diversos ejemplos. Las nociones tratadas en esta primera sección pueden consultarse en cualquier texto de cálculo infinitesimal².

Muchos de los resultados van a presentarse en esta sección fueron estudiados en la asignatura de *Cálculo Infinitesimal*, de primer curso del Grado. De este modo, se omitirán varias demostraciones, que se han considerado elementales.

En lo sucesivo, la letra I denotará un intervalo de la recta real.

¹ Corresponde con el [teorema 2.33](#) según la numeración del texto.

² Por ejemplo, [\[GST03, pág. 176\]](#).

1. RESULTADOS PREVIOS

Definición 1.1 (Función convexa). Sea f una función real definida en un intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Se dice que f es convexa en I si para todos $x, y \in I$ y todo $\alpha \in (0, 1)$ se verifica que:

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y). \quad (1.1)$$

Si la desigualdad anterior se cumple en sentido contrario, se dice que la función f es cóncava en I . Por otro lado, si la desigualdad es estricta, se dice que la función f es estrictamente convexa en I .

Observaciones 1.2 (Interpretación geométrica).

- (i) En general, dados dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ de un espacio vectorial X , los vectores $(1 - \alpha)\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, se denominan *combinaciones lineales convexas* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
- (ii) Si el espacio vectorial en que trabajamos es $X \equiv \mathbb{R}$, dados $x, y \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{(1 - \alpha)x + \alpha y : 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad (1.2)$$

representa el intervalo³ de extremos x e y . Este es un caso particular, en dimensión 1, del concepto de *envolvente convexa* de un conjunto de puntos.

- (iii) Con la notación de la [definición 1.1](#), si $x < y$, al variar α en el intervalo $[0, 1]$, los números $(1 - \alpha)x + \alpha y$ recorren el intervalo $[x, y]$. Análogamente, en esas mismas condiciones, los números $(1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$ recorren el intervalo de extremos $f(x)$ y $f(y)$. De este modo, los puntos de la forma

$$\left((1 - \alpha)x + \alpha y, (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \right)$$

conforman el segmento de $\mathbb{R}^2$ con extremos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.

- (iv) En virtud de las observaciones previas, la interpretación geométrica de la [desigualdad \(1.1\)](#) es clara: La función f es convexa en el intervalo I si la cuerda que une dos puntos cualesquiera de su gráfica queda por encima de dicha gráfica. La [figura 1.1](#) ilustra esta situación. Se han representado: en azul, la gráfica de f ; y en naranja, la cuerda que une los puntos x e y .

³ Cerrado.

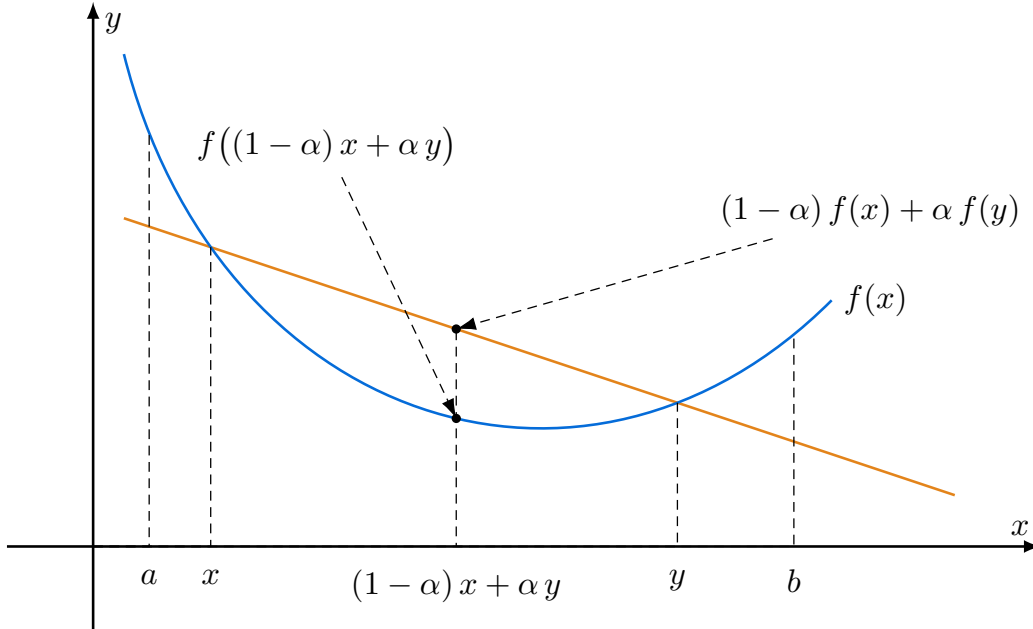


Figura 1.1: Representación gráfica de una función convexa. Interpretación geométrica. Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original:

Observación 1.3. A partir de la **desigualdad (1.1)**, es inmediato el siguiente resultado: Una función real f definida en el intervalo I es convexa en I si, y sólo si, $-f$ es una función cóncava en I .

Propiedades 1.4 (Operaciones con funciones convexas).

- i. La suma de dos funciones convexas (resp. estrictamente convexas) en I es convexa (resp. estrictamente convexa) en I .

Nótese que la composición de dos funciones convexas no es necesariamente una función convexa. Debemos pedir una condición adicional:

- ii. Si f es convexa (resp. estrictamente convexa) y g es convexa y creciente (resp. estrictamente creciente), entonces la composición $g \circ f$ es convexa (resp. estrictamente convexa).

Demostración. La demostración de ambas propiedades es rutinaria.

- i. Elemental.

1. RESULTADOS PREVIOS

- ii. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa en I , y sea $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y creciente en J , con $f(I) \subset J$. Sea $h = g \circ f$ la composición de ambas funciones. Sean $x, y \in I$ y $\alpha \in (0, 1)$. En primer lugar, por la convexidad de f , se tiene que:

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Teniendo en cuenta esta expresión, apliquemos que g es creciente, y convexa, respectivamente:

$$\begin{aligned} h((1 - \alpha)x + \alpha y) &= g\left(f((1 - \alpha)x + \alpha y)\right) \stackrel{g \text{ creciente}}{\leq} \\ &\leq g\left((1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)\right) \stackrel{g \text{ convexa}}{\leq} \\ &\leq (1 - \alpha)g(f(x)) + \alpha g(f(y)) = \\ &= (1 - \alpha)h(x) + \alpha h(y). \end{aligned}$$

De este modo, $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en I , como queríamos probar.

La demostración para los casos *estrictamente convexos* es idéntica, sustituyendo las correspondientes desigualdades ' $\leq$ ' por desigualdades estrictas, ' $<$ '. $\square$

Ejemplos 1.5.

- i. Las funciones exponencial, $f(x) = e^x$, y cuadrática, $g(x) = x^2$, son convexas en $\mathbb{R}$.
- ii. La función logaritmo natural, $h(x) = \log(x)$, es cóncava en $(0, +\infty)$.
- iii. Las funciones lineales, $L(x) = c \cdot x$, con $c \in \mathbb{R}$, son cóncavas y convexas, simultáneamente.

Las dos proposiciones que siguen serán de gran utilidad en el próximo capítulo. Por su simplicidad, las correspondientes demostraciones se han omitido.

Proposición 1.6. Una función f definida en un intervalo I es convexa en I si, y sólo si, para todos $x, y, z \in I$, con $x < y < z$ se tiene que:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \quad (1.3)$$

Observación 1.7 (Significado geométrico). La interpretación geométrica de la **expresión (1.3)** es clara. Dada una función convexa en un intervalo I , y $x, y, z \in I$ con $x < y < z$, entonces la pendiente del segmento $\overline{XY}$ es menor que la pendiente del segmento $\overline{YZ}$. La figura siguiente muestra esta situación.

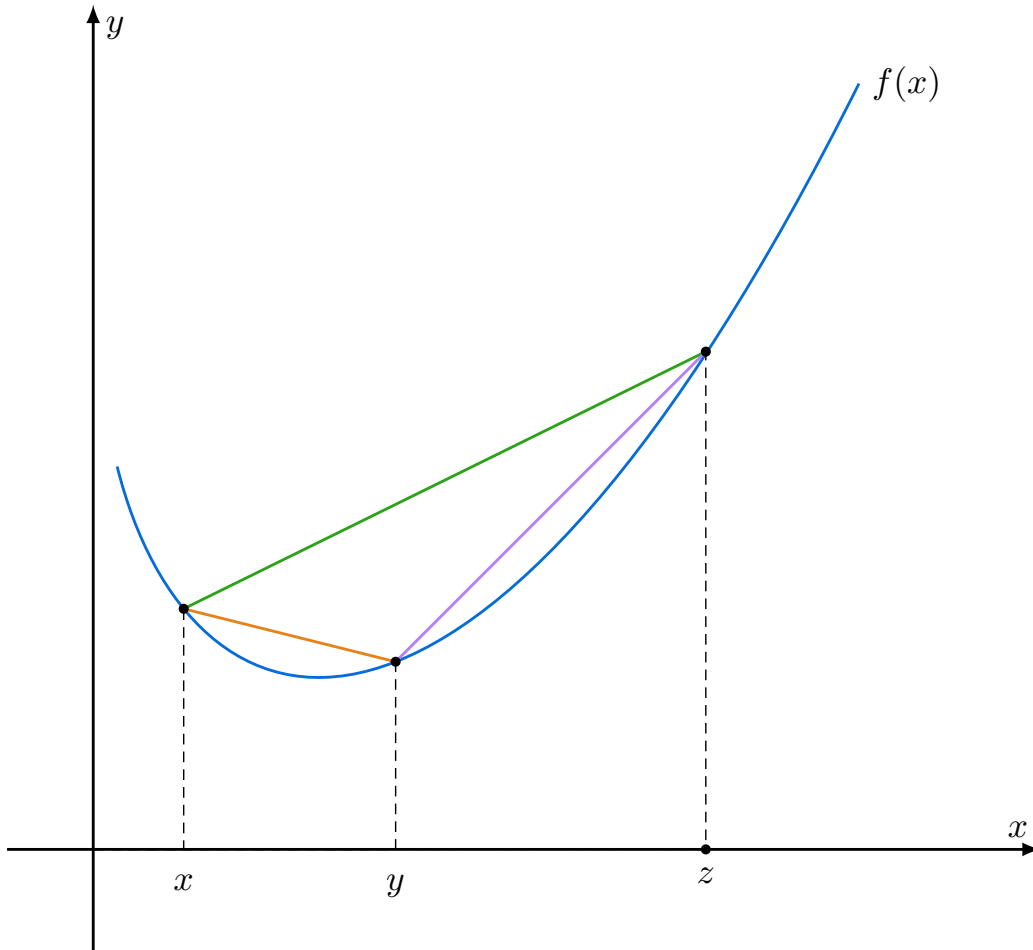


Figura 1.2: Representación gráfica de una función convexa. Crecimiento de las pendientes de los segmentos: $\overline{XY}$, en **naranja**; $\overline{YZ}$, en **lila**; y $\overline{XZ}$, en **verde**. Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original:

1. RESULTADOS PREVIOS

A la vista de la figura anterior, el siguiente resultado es inmediato:

Proposición 1.8. Una función f definida en un intervalo I es convexa en I si, y sólo si, para todos $x, y, z \in I$, con $x < y < z$ se tiene que:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \quad (1.4)$$

La interpretación geométrica de esta proposición vuelve a ser clara: la pendiente del segmento $\overline{XY}$ es menor que la pendiente del segmento $\overline{XZ}$. La prueba es análoga a la de la [proposición 1.6](#).

Seguidamente, pasamos a recordar otros tres resultados relacionados con la convexidad. Todos ellos son enunciados clásicos. Las demostraciones son inmediatas a partir de las proposiciones previas, realizando un paso al límite. Sin embargo, estas no aportan información relevante. Así, en aras de sintetizar la exposición, dichas pruebas no se han incluido en el texto.

Proposición 1.9. Sea f una función definida y convexa (o cóncava) en un intervalo abierto I . Entonces, f es continua en I .

Proposición 1.10. Sea f una función derivable en un intervalo I . Entonces f es convexa (resp., cóncava) en I si, y sólo si, f' es creciente (resp., decreciente) en I .

Proposición 1.11. Sea f una función definida y dos veces derivable en un intervalo I . Entonces f es convexa (resp., cóncava) en I si, y sólo si, para cada $x \in I$ se tiene que $f''(x) \geq 0$ (resp., $f''(x) \leq 0$).

A continuación, un resultado sobre la monotonía de funciones convexas.

Proposición 1.12. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa en I . Entonces, se verifica uno de los siguientes casos:

1. f es monótona en $\text{int}(I)$.
2. Existe un punto x_0 tal que f es decreciente en $(-\infty, x_0] \cap I$ y creciente en $[x_0, +\infty) \cap I$.

1.1. CONVEXIDAD

Demostración. Sea f una función convexa en I .

En primer lugar, como $\text{int}(I) \subset \mathbb{R}$ es un abierto, podemos suponer que I también es abierto, sin pérdida de generalidad. Es decir, $\text{int}(I) = I$.

Si f es monótona en I , estamos en el [caso 1](#), y hemos terminado.

Supongamos que f no es monótona⁴ en I . Luego, dados $a, b, c \in I$, con $a < b < c$, se verifica uno de los dos casos siguientes:

I. $f(a) > f(b)$, y $f(b) < f(c)$.

II. $f(a) < f(b)$, y $f(b) > f(c)$.

Pero, como f es convexa, el [caso II](#) es imposible: aplicando la [proposición 1.6](#), se tiene que:

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0,$$

pues, en el caso II, $f(b) > f(a)$. En consecuencia, como $b < c$, el denominador de la fracción de la izquierda es positivo. Esto permite concluir que $f(c) - f(b) > 0$, o sea, $f(c) > f(b)$, en contra del caso II.

Luego, obligatoriamente, nos encontramos en el [caso I](#).

Como f es convexa en I , por la [proposición 1.9](#), f es continua en I . En particular, lo es en el intervalo cerrado $[a, c]$. Por el teorema clásico de Weierstrass⁵, f alcanza su mínimo en $[a, c]$. Luego, existe un punto $x_0 \in [a, c]$ tal que:

$$f(x_0) = \min_{x \in [a, c]} \{f(x)\}.$$

En otras palabras, para cada $x \in [a, c]$, se tiene que $f(x_0) \leq f(x)$. Este mínimo alcanzado en x_0 no es tan solo el mínimo de f en $[a, c]$. De hecho, es el mínimo absoluto de f en I , es decir:

$$f(x_0) = \min_{x \in I} \{f(x)\}.$$

Efectivamente, demostremos esto último:

⁴ Esto es: f no es creciente, ni decreciente, en I .

⁵ Véase el [teorema A.7](#), en el apéndice.

1. RESULTADOS PREVIOS

- Sea $x \in I$, con $x < a$. Tenemos que $x < a \leq x_0$. Por la [proposición 1.8](#), se tiene que:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq 0,$$

ya que $f(x_0) \leq f(a)$, por la condición de mínimo en x_0 . En consecuencia, se tiene que $f(x_0) - f(x) \leq 0$, es decir $f(x_0) \leq f(x)$. El punto $x \in I$ escogido es arbitrario, con $x < a$. Luego, concluimos que x_0 es el mínimo de f en $(-\infty, x_0] \cap I$.

- Sea $x \in I$, con $x > c$. Se tiene $x_0 \leq c < x$. Utilizando la misma proposición que antes, se sigue que:

$$0 \leq \frac{f(c) - f(x_0)}{c - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

puesto que $f(x_0) \leq f(c)$, por la condición de mínimo en x_0 . Así, se deduce que $f(x) - f(x_0) \geq 0$, es decir $f(x) \geq f(x_0)$. Por tanto, x_0 es el mínimo de f en $[x_0, +\infty) \cap I$.

Queda probado que f alcanza en x_0 un mínimo absoluto, lo cual concluye la prueba.

□

Observaciones 1.13.

- El [caso 2](#) de la proposición previa equivale a decir que f presenta un mínimo absoluto⁶ en x_0 .
- Si en la proposición anterior la función f es estrictamente convexa, dicho mínimo se alcanza en un único punto, siendo así un mínimo *estricto*. Basta sustituir las desigualdades ‘ $\leq$ ’ correspondientes por desigualdades estrictas, ‘ $<$ ’.

Corolario 1.14. Toda función convexa f que no es monótona en $\text{int}(I)$ tiene un mínimo absoluto en $\text{int}(I)$. Además, si f es estrictamente convexa, dicho mínimo es único.

Para concluir la sección, presentamos dos ejemplos que ilustran la [observación 1.13, \(ii\)](#).

⁶ También llamado mínimo “global”.

Ejemplo 1.15 (Un caso convexo). Tomemos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 1. \\ 1, & 1 < x \leq 2. \\ x - 1, & x > 2. \end{cases}$$

A la vista de la [figura 1.3](#), es claro que esta función es convexa en $(0, +\infty)$, y no es monótona en dicho intervalo. Más concretamente, se tiene que $f''(x) \geq 0$, ya que:

$$f''(x) = \begin{cases} 2/x^3, & 0 < x < 1. \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Tenemos que f alcanza su mínimo absoluto, de valor $f(x_0) = 1$. Sin embargo, el punto x_0 en que se alcanza el mínimo no es único, pues $f(x) = 1$ para todo $x \in [1, 2]$. Es decir, dicho mínimo no es estricto.

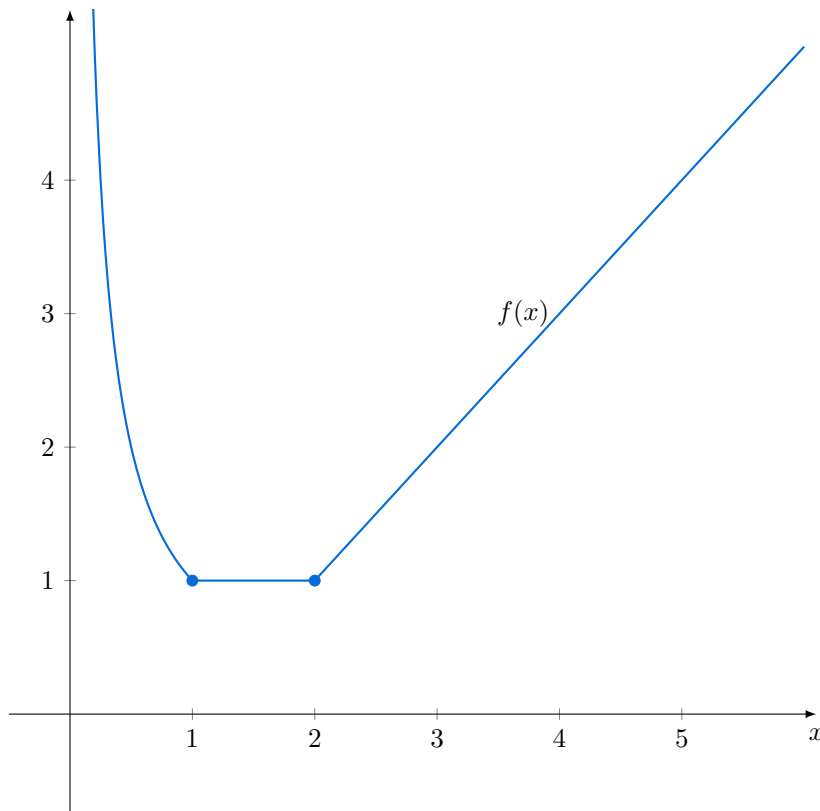


Figura 1.3: Representación gráfica de una función convexa. Mínimo absoluto. Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original:

1. RESULTADOS PREVIOS

Ejemplo 1.16 (Un caso estrictamente convexo). Un ejemplo paradigmático es la función cuadrática $f(x) = x^2$. Es inmediato que esta función es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$, puesto que $f''(x) = 2 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, es evidente que f no es monótona en $\mathbb{R}$: dado $x \in \mathbb{R}$, se tiene $f'(x) = 2x$. O sea, $f'(x) < 0$ si $x < 0$, y $f'(x) > 0$ para $x > 0$. En otras palabras, f es decreciente en $(-\infty, 0)$, y creciente $(0, +\infty)$. De esta forma, f alcanza un mínimo absoluto en un único punto, $x_0 = 0$, de valor $f(x_0) = 0$.

Al ser f estrictamente convexa, este mínimo se alcanza en un único punto, siendo así un mínimo estricto.

La [figura 1.4](#) ilustra la situación descrita en este ejemplo.

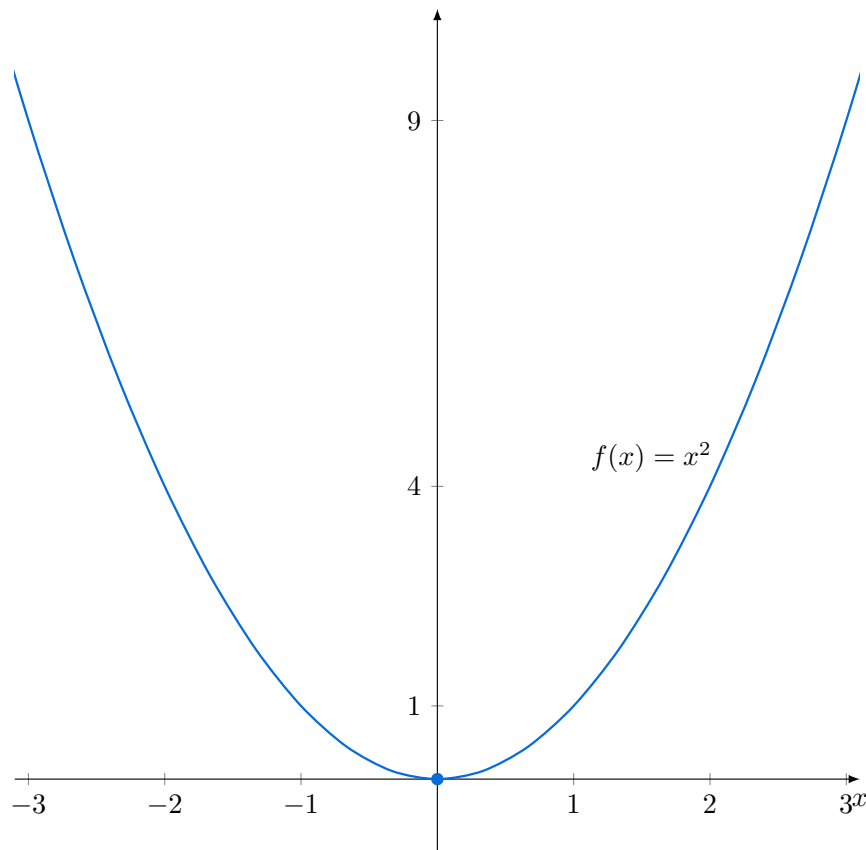


Figura 1.4: Representación gráfica de una función estrictamente convexa. Mínimo absoluto. Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original:

1.2. Convexidad logarítmica

A partir de lo estudiado en la sección previa, introducimos el concepto de función logarítmicamente convexa. Tras ello, presentamos varios resultados sobre este tipo de funciones, que serán claves en el siguiente capítulo.

Definición 1.17 (Función logarítmicamente convexa I). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en un intervalo I , verificando que $f(x) > 0$ para todo $x \in I$. Se dice que f es logarítmicamente convexa⁷ en I , si la función $\log(f)$ es convexa en I .

De igual modo, si la desigualdad (1.1) se cumple de manera estricta para la función $\log(f)$, se dice que f es estrictamente logarítmicamente convexa, o simplemente, “estrictamente log-convexa”.

Observación 1.18. Nótese que la condición $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ de la definición anterior asegura que la función real $\log(f)$ esté correctamente definida.

Observación 1.19. Si aplicamos la desigualdad (1.1) a la función $g = \log f$, teniendo en cuenta las propiedades del logaritmo, se tiene que:

$$\begin{aligned} \log\left(f((1-\alpha)x + \alpha y)\right) &= g((1-\alpha)x + \alpha y) \stackrel{g \text{ convexa}}{\leq} \\ &\leq (1-\alpha)g(x) + \alpha g(y) = \\ &= (1-\alpha)\log(f(x)) + \alpha\log(f(y)) = \\ &= \log(f(x)^{(1-\alpha)}) + \log(f(y)^\alpha) = \\ &= \log\left(f(x)^{(1-\alpha)} f(y)^\alpha\right). \end{aligned}$$

Como la función logaritmo es estrictamente creciente, la desigualdad anterior es equivalente a esta:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq f(x)^{(1-\alpha)} f(y)^\alpha.$$

Por tanto, podemos reescribir la definición 1.17 únicamente en términos de f , como sigue:

⁷ O simplemente “log-convexa”.

1. RESULTADOS PREVIOS

Definición 1.20 (Función logarítmicamente convexa II). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en un intervalo I , verificando que $f(x) > 0$ para todo $x \in I$. Se dice que f es logarítmicamente convexa en I si para todos $x, y \in I$ y todo $\alpha \in (0, 1)$ se verifica que:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq f(x)^{(1-\alpha)} f(y)^\alpha. \quad (1.5)$$

De igual modo, si la desigualdad (1.5) se cumple de manera estricta, se dice que f es estrictamente logarítmicamente convexa, o estrictamente log-convexa.

Proposición 1.21. Sea f una función logarítmicamente convexa en un intervalo I . Entonces, f es convexa en I .

Vamos a demostrarlo de dos formas diferentes.

Demostración 1 (directa). Podemos escribir:

$$f = \exp \circ \log(f). \quad (1.6)$$

Sabemos que la función exponencial es convexa y creciente, y que $\log(f)$ es convexa, por hipótesis de la proposición. En virtud de la propiedad 1.4-ii, se sigue que f es convexa. $\square$

Demostración 2 (algebraicamente). Comparemos las desigualdades (1.1) y (1.5). Para probar que toda función logarítmicamente convexa es convexa, basta demostrar la siguiente desigualdad:

$$f(x)^{(1-\alpha)} f(y)^\alpha \leq (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y), \quad (1.7)$$

para todos $x, y \in I$, y todo $\alpha \in (0, 1)$.

La prueba de esta desigualdad es un ejercicio clásico de cualquier curso de cálculo infinitesimal, y se basa en la concavidad de la función logaritmo. En efecto, apliquemos el logaritmo a la parte izquierda de la desigualdad:

$$\begin{aligned} \log\left(f(x)^{(1-\alpha)} f(y)^\alpha\right) &= \log\left(f(x)^{(1-\alpha)}\right) + \log\left(f(y)^\alpha\right) = \\ &= (1-\alpha) \log(f(x)) + \alpha \log(f(y)) \stackrel{\log \text{ cóncava}}{\leq} \\ &\leq \log\left((1-\alpha) f(x) + \alpha f(y)\right). \end{aligned}$$

1.2. CONVEXIDAD LOGARÍTMICA

Ahora, teniendo en cuenta que el logaritmo es una función estrictamente creciente, la desigualdad anterior es equivalente a la (1.7), que es precisamente lo que queríamos probar. $\square$

Observación 1.22 (Sobre la desigualdad de las medias ponderadas).

La desigualdad anterior, (1.7), probada en la segunda demostración, admite un resultado más general: la llamada *desigualdad de las medias ponderadas*⁸. Esta desigualdad es una generalización de la clásica “desigualdad de las medias”, que establece que la media aritmética de un conjunto de números reales no negativos es siempre mayor o igual que su media geométrica. Además, la igualdad entre ambas medias se da si, y sólo si, todos los números son el mismo.

Introduciendo unos pesos no negativos en las medias aritmética y geométrica, se llega al siguiente resultado.

Teorema 1.23 (Desigualdad de las medias ponderadas I).

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$, n números no negativos, y sean $w_1, w_2, \dots, w_n \in [0, +\infty)$ sus correspondientes pesos, también no negativos. Definamos $w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad⁹:

$$\text{MA}_p \equiv \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w} \geq \sqrt[w]{x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n}} \equiv \text{MG}_p. \quad (1.8)$$

Más aún, la igualdad se da si, y sólo si, todos los x_k , con peso $w_k > 0$, son iguales. Se ha utilizado la convención “ $0^0 = 1$ ”.

El caso que nos interesa, y que guarda relación con la desigualdad (1.7) es cuando el miembro izquierdo de la desigualdad es una combinación convexa de los puntos x_k . En otras palabras, cuando todos los coeficientes suman 1. De esta forma, tenemos el siguiente resultado:

⁸ En otros textos, también se la denomina la *desigualdad de las medias con pesos* o *desigualdad de las medias generalizada*. En la literatura inglesa se abrevia como “weighted AM-GM inequality”. Las siglas “AM-GM” se refieren a “Arithmetic Mean” y “Geometric Mean”.

⁹ Hemos denotado: “ MA_p ”, a la media aritmética ponderada; y “ MG_p ”, a la media geométrica ponderada.

1. RESULTADOS PREVIOS

Teorema 1.24 (Desigualdad de las medias ponderadas II).

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$, y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, +\infty)$, de modo que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. En estas condiciones, se verifica que:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}. \quad (1.9)$$

Tomando $n = 2$ puntos en la desigualdad previa, recuperamos precisamente la desigualdad (1.7). Nótese que un peso $\alpha_k = 0$ no tiene influencia en la desigualdad. Por ello, podemos asumir que todos los pesos son positivos.

Por otra parte, la condición de que todos los coeficientes sumen uno, obliga a que los α_k pertenezcan al intervalo $(0, 1)$, salvo en el caso trivial en que $k = 1$, pudiendo ser $\alpha_k = 1$.

La demostración del teorema anterior involucra la llamada [desigualdad de Jensen](#), una caracterización de las funciones cóncavas y convexas. Debido a su extensión, hemos decidido no incluir estos contenidos en el cuerpo del trabajo. Sin embargo, por su gran valor, se han recopilado al final del apéndice. Así, remitimos al lector interesado a la sección [desigualdades notables](#).

Seguidamente, retomamos el estudio de las funciones logarítmicamente convexas.

Propiedades 1.25 (Operaciones con funciones log-convexas).

- i. El producto de dos funciones logarítmicamente convexas es una función logarítmicamente convexa.
- ii. Una sucesión puntualmente convergente de funciones logarítmicamente convexas tiene como límite una función logarítmicamente convexa, siempre que dicho límite sea una función estrictamente positiva.

Demostración.

- i. Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones logarítmicamente convexas en el mismo intervalo I . Veamos que su producto, fg , es logarítmicamente convexo en I . Esto es, que $\log(fg)$ es convexo en I :

Aplicando las propiedades del logaritmo, se tiene que $\log(fg) = \log(f) + \log(g)$. Como la suma de funciones convexas es convexa ([propiedad 1.4-i](#)), se deduce el resultado buscado.

1.2. CONVEXIDAD LOGARÍTMICA

- ii. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones logarítmicamente convexas, que converge puntualmente hacia una función estrictamente positiva, digamos, f . Sea $g = \log(f)$, y sea $g_n = \log(f_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, las funciones f_n son logarítmicamente convexas. Por tanto, cada g_n es convexa. Es decir, dados $n \in \mathbb{N}$, $x, y > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, se verifica que:

$$g_n((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)g_n(x) + \alpha g_n(y).$$

Tomando límites en la desigualdad anterior, se sigue que:

$$\begin{aligned} g((1 - \alpha)x + \alpha y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n((1 - \alpha)x + \alpha y)) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 - \alpha)g_n(x) + \alpha g_n(y)) = \\ &= (1 - \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = \\ &= (1 - \alpha)g(x) + \alpha g(y). \end{aligned}$$

De este modo, la función $g = \log(f)$ es convexa. O sea, f es logarítmicamente convexa, como queríamos probar.

□

El texto de Artin continúa su exposición con más resultados sobre funciones logarítmicamente convexas. Estos permiten concluir la log-convexidad de funciones definidas por integrales, bajo ciertas hipótesis sobre la función integrando. El propósito de dicha construcción es poder concluir que la función Gamma real es log-convexa, a partir de su definición como integral.

Como comentaremos al final de la sección, en la [observación 1.32](#), no es imprescindible seguir el desarrollo de Artin para probar la convexidad logarítmica de la función Gamma. Sin embargo, consideramos que estas nociones adicionales sobre convexidad logarítmica son valiosas. Por ello, la presente sección concluye con tres resultados adicionales sobre funciones logarítmicamente convexas. Para más detalles, el lector interesado puede consultar [\[Art64, págs. 8-10\]](#).

Proposición 1.26 (Suma de funciones log-convexas). Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones logarítmicamente convexas, en un mismo intervalo I . Entonces su suma, $f + g$, es logarítmicamente convexa.

1. RESULTADOS PREVIOS

Demostración. La prueba de esta proposición es puramente algebraica, y no incluye razonamientos relevantes. Puede consultarse en [Art64, págs. 8-9]. $\square$

A continuación, un resultado clásico de cálculo integral, necesario para demostrar la siguiente proposición.

Lema 1.27. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces, se verifica que:

$$\int_a^b f(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (1.10)$$

Definición 1.28 (Convexidad logarítmica. Funciones de dos variables).

Sea $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables a valores reales. Esto es:

$$\begin{aligned} f : I_1 \times I_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

En esta situación, decimos que f es logarítmicamente convexa respecto a x_2 , si para cada x_1 fijo, la función real $f(x_1, \cdot) : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en el intervalo I_2 .

Proposición 1.29. Sea $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supóngase que, para cada $t \in [a, b]$, la función $f(t, x)$ es logarítmicamente convexa respecto a x . Entonces, se tiene que la función $F(x) := \int_a^b f(t, x) dt$ es logarítmicamente convexa en I .

Demostración. En primer lugar, dado $x \in I$, la función

$$F_n(x) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}, x\right)$$

es logarítmicamente convexa en I , para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto es debido a que es la suma de funciones logarítmicamente convexas ([proposición 1.26](#)).

En virtud del lema previo, al tender n hacia infinito, se deduce que:

$$F(x) \equiv \int_a^b f(t, x) dt \stackrel{\text{lema}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x).$$

En virtud de la [propiedad 1.25-ii](#), la función F es logarítmicamente convexa en I , por ser el límite de una sucesión de funciones logarítmicamente convexas. Esto concluye la prueba. $\square$

1.2. CONVEXIDAD LOGARÍTMICA

Observación 1.30. El resultado anterior también es válido para integrales impropias. Es decir, si la integral

$$\int_a^{b \rightarrow \infty} f(t, x) dt$$

es convergente, entonces la función

$$F(x) := \int_a^\infty f(t, x) dt \quad (1.11)$$

es logarítmicamente convexa.

Esto se debe a que una integral impropia es límite de integrales propias sobre subintervalos. De esta forma, dicha integral impropia vuelve a ser límite de funciones logarítmicamente convexas. De nuevo, la [propiedad 1.25-ii](#) permite concluir que la expresión [\(1.11\)](#) define una función log-convexa.

Teorema 1.31. Sea $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en (a, b) y positiva¹⁰. Entonces, la función

$$F(x) := \int_a^b \varphi(t) t^{x-1} dt \quad (1.12)$$

es logarítmicamente convexa en I , siendo I cualquier intervalo en el que la integral, propia o impropia, sea convergente.

Demostración. A partir de la proposición previa, la prueba es inmediata.

Para cada $t \in (a, b)$, la función integrando $f(t, x) = \varphi(t) t^{x-1}$ es logarítmicamente convexa, respecto a x . En efecto, calculemos el logaritmo de la función integrando:

$$g(t, x) \equiv \log(f(t, x)) = \log(\varphi(t)) + (x-1) \log(t).$$

Es decir, $g(t, x)$ es una función lineal respecto a x , luego¹¹ es convexa. Así, $f(t, x)$ es logarítmicamente convexa respecto a x , como queríamos probar. $\square$

Para concluir la sección, cabe realizar una última apreciación.

¹⁰ Se supone que el intervalo de integración, (a, b) , está contenido en $(0, +\infty)$.

¹¹ Recuérdesse el [ejemplo 1.5-iii](#).

1. RESULTADOS PREVIOS

Observación 1.32 (Un camino alternativo). Existe una vía diferente para probar que la función Gamma real es logarítmicamente convexa, basada en la [desigualdad de Hölder](#). La log-convexidad de Gamma será trascendental en nuestro trabajo, y constituye el [teorema 2.29](#) del mismo. De acuerdo con esto, en el siguiente capítulo, probaremos dicho resultado de dos formas distintas.

1.3. Productos infinitos

En la presente sección van a introducirse las nociones básicas sobre productos infinitos de números complejos. Además, se incluyen los resultados fundamentales acerca de la holomorfía de funciones definidas por tales productos.

Definición 1.33. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y sea $P_n = \prod_{k=1}^n z_k$ el producto parcial n -ésimo. Entonces, se dice que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número complejo P . Y, en este caso, escribimos $P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Observación 1.34. Nótese que, si la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $P \neq 0$, podemos considerar la sucesión de los $z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$. Se tiene que $z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$, cuando $n \rightarrow \infty$. De este modo, una condición necesaria (pero no suficiente) de la convergencia del producto infinito a un límite P no nulo es: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

Una forma natural de estudiar el producto infinito es transformarlo en una serie, tomando logaritmos. Con este enfoque, se presentan dos lemas que nos permitirán obtener resultados interesantes acerca de los productos infinitos.

Lema 1.35. Supongamos que $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a un límite distinto de cero si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ converge.

Observación 1.36. A lo largo de todo el texto denotamos por “ $\log(z)$ ” a la rama principal del logaritmo complejo, dada por la condición:

$$-\pi \leq \operatorname{Im}(\log(z)) < \pi.$$

1.3. PRODUCTOS INFINITOS

Demostración del lema 1.35. Sea $P_n = \prod_{k=1}^n z_k$ y sea $S_n = \sum_{k=1}^n \log z_k$.

$\Leftarrow$ Si $S_n \rightarrow S$, entonces $P_n = e^{S_n} \rightarrow e^S \neq 0$.

$\Rightarrow$ Recíprocamente, supongamos que $P_n \rightarrow P \neq 0$. Sea ϕ_0 un argumento de P . Entonces, tomamos ϕ de manera que la función $\arg_\phi$ sea continua en P . Nótese que se denota por $\arg_\phi$ a la determinación del argumento que toma valores en el intervalo $[\phi, \phi + 2\pi)$.

Por otro lado, sabemos que:

$$\log_\phi P_n = \ln |P_n| + i \arg_\phi(P_n). \quad (1.13)$$

Por continuidad de ambas funciones, la expresión (1.13) converge a $\ln |P| + i \arg_\phi(P) = \log_\phi P$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora, como $e^{S_n} = P_n$, tenemos

$$S_n = \log_\phi P_n + i 2\pi \ell_n,$$

para algún entero ℓ_n . Pero

$$S_n - S_{n-1} = \log(z_n) \rightarrow \log(1) = 0,$$

puesto que, como hemos visto anteriormente, si $P_n \rightarrow P \neq 0$ entonces $z_n \rightarrow 1$. Por tanto,

$$\log_\phi P_n - \log_\phi P_{n-1} + i 2\pi(\ell_n - \ell_{n-1}) \rightarrow 0.$$

Como la determinación del logaritmo $\log_\phi$ es continua en P , tenemos que:

$$\log_\phi P_n - \log_\phi P_{n-1} \rightarrow \log_\phi P - \log_\phi P = 0. \quad (1.14)$$

Como $\ell_n - \ell_{n-1}$ es un entero, y su límite es cero, entonces $\ell_n - \ell_{n-1} = 0$ a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ en adelante. En consecuencia, a partir de dicho n_0 , ℓ_n es constante, digamos que con valor ℓ . Por tanto:

$$S_n \rightarrow \log_\phi P + i 2\pi \ell, \quad (1.15)$$

de modo que la serie converge, como queríamos probar.

1. RESULTADOS PREVIOS

□

Lema 1.37. Si $a_n \geq 0$ para todo n , entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ converge si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración. Sean $P_n = \prod_{k=1}^n (1+a_k)$ y $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Puesto que $a_n \geq 0$, las sucesiones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ son monótonas crecientes. Por tanto, para probar el teorema bastará ver que $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente si, y sólo si, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente.

Teniendo en cuenta que $1+x \leq e^x$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (1+a_1) \cdots (1+a_n) \leq e^{a_1 + \cdots + a_n},$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado. □

El resultado anterior sugiere el concepto de convergencia absoluta para productos infinitos:

Definición 1.38. Se dice que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1+z_n)$ es absolutamente convergente si el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|z_n|)$ converge.

Observación 1.39. Por el [lema anterior](#), la convergencia absoluta del producto $\prod (1+z_n)$ es equivalente a la convergencia absoluta de la serie $\sum z_n$. Este hecho se utilizará en el siguiente resultado.

Lema 1.40. Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1+z_n)$ converge absolutamente, entonces converge.

Demostración. Puesto que $\prod (1+|z_n|)$ converge, el [lema 1.37](#) implica que la serie $\sum |z_n|$ converge. Por tanto, se tiene que $|z_n| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, podemos suponer que $|z_n| < 1$ para todo n .

Ahora, para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$, se tiene que:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z h(z),$$

siendo

1.3. PRODUCTOS INFINITOS

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{n-1}}{n} \quad , \quad \text{con } |z| < 1 .$$

Entonces, para $m \leq p$, se verifica que:

$$\left| \sum_{n=m}^p \log(1 + z_n) \right| \leq \sum_{n=m}^p |z_n| |h(z_n)| . \quad (1.16)$$

Nótese que, si $z_n \rightarrow 0$, entonces $h(z_n) \rightarrow 1$). De este modo, $\{h(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado. Además, como $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge, verifica la condición de convergencia de Cauchy.

De este modo, se deduce de (1.16) que $|\sum_{n=m}^p \log(1 + z_n)| \rightarrow 0$ cuando $m, p \rightarrow \infty$. De nuevo, la condición de Cauchy implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ es convergente. Finalmente, del lema 1.35 se sigue que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ es convergente, como queríamos demostrar. $\square$

Continuamos la exposición con otro lema, que será de utilidad para probar el teorema siguiente.

Lema 1.41. Sean $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$. Entonces, se verifica que:

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + w_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |w_k|) - 1 .$$

Demostración. Razonemos por inducción sobre n . Para $n = 1$ es trivial:

$$|1 + w_1 - 1| = |w_1| \leq |w_1| = (1 + |w_1|) - 1 . \quad (1.17)$$

Supongamos que se verifica para n , y veamos que se cumple para $n + 1$. En primer lugar, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (1 + w_k) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + w_k) \right) (1 + w_{n+1}) - 1 \right| \\ &= \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + w_k) - 1 \right) + w_{n+1} \prod_{k=1}^n (1 + w_k) \right| = (\star) . \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción, se sigue que:

1. RESULTADOS PREVIOS

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |w_k|) - 1 \right) + |w_{n+1}| \cdot \left| \prod_{k=1}^n (1 + w_k) \right| \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |w_k|) \right) + |w_{n+1}| \cdot \left| \prod_{k=1}^n (1 + w_k) - 1 \right| \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |w_k|) \right) + |w_{n+1}| \cdot \prod_{k=1}^n (1 + |w_k|) - 1 \\
&= \left(\prod_{k=1}^n (1 + |w_k|) \right) \cdot (1 + |w_{n+1}|) - 1 = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + |w_k|) - 1,
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. $\square$

El siguiente resultado es análogo al teorema de reordenación de series de Riemann, pero en el caso de productos infinitos absolutamente convergentes:

Teorema 1.42. Si el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ converge absolutamente, entonces cualquier reordenación de este también converge absolutamente, y hacia el mismo límite. Es decir, si $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |z_n|)$ converge y $P = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$, entonces para cualquier permutación $k \mapsto n_k$ de los naturales, el producto $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_{n_k})$ también converge hacia P .

Demostración. La convergencia absoluta del producto implica que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |z_n|)$ converge. Esto implica, por el [lema 1.37](#), que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge. En el caso de series, sabemos que cualquier reordenamiento de una serie absolutamente convergente también converge, de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n_k}|$ converge. De nuevo, por el [mismo lema](#), se deduce la convergencia del producto reordenado, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |z_{n_k}|)$.

Falta ver que ambos productos convergen al mismo límite, digamos P . Para ello, tomamos $\varepsilon > 0$ y, para cada $j \in \mathbb{N}$, denotamos por Q_j al j -ésimo producto parcial de $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_{n_k})$.

Ahora, elegimos un índice $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |z_n| < \varepsilon$. Nótese que la existencia de tal N se deduce de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. A su vez, tomemos $J \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que si $j \geq J$ entonces $\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{n_1, n_2, \dots, n_j\}$. Esto último es posible puesto que $j \mapsto n_j$ es una permutación de los números naturales.

Entonces, para cada $j \geq J$, se verifica que:

1.3. PRODUCTOS INFINITOS

$$\begin{aligned} |Q_j - P| &\leq |Q_j - P_N| + |P_N - P| \\ &= |P_N| \cdot \left| \prod_k (1 + z_{n_k}) - 1 \right| + |P_N - P|, \end{aligned}$$

donde el producto se toma a lo largo de los $k \leq j$ tales que $n_k > N$.

Aplicando el [lema 1.41](#), se deduce que:

$$\begin{aligned} |Q_j - P| &\leq |P_N| \cdot \left| \prod_{\substack{k \leq j \\ n_k > N}} (1 + z_{n_k}) - 1 \right| + |P_N - P| \\ &\leq |P_N| \cdot \left(\prod_{\substack{k \leq j \\ n_k > N}} (1 + |z_{n_k}|) - 1 \right) + |P_N - P| \\ &\leq |P_N| \cdot \left(\exp \left(\underbrace{\sum_{n_k} |z_{n_k}|}_{< \varepsilon} \right) - 1 \right) + |P_N - P| \\ &\leq |P_N| \cdot (e^\varepsilon - 1) + |P_N - P|. \end{aligned}$$

El miembro derecho de la desigualdad anterior puede hacerse tan pequeño como se quiera, tomando ε suficientemente pequeño y N suficientemente grande. De este modo, $Q_j \rightarrow P$ cuando $j \rightarrow \infty$, lo que concluye la prueba. $\square$

El siguiente resultado corresponde a la convergencia de productos infinitos de funciones complejas, definidas en un conjunto arbitrario.

Proposición 1.43. Sea $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones complejas acotadas, definidas todas ellas en un conjunto S . Si la serie $\sum_{n=1}^\infty |g_n|$ converge uniformemente en S , entonces el producto $\prod_{n=1}^\infty (1 + g_n)$ converge absolutamente y uniformemente en S . Más aún, si definimos $f(z) = \prod_{n=1}^\infty (1 + g_n(z))$, $z \in S$, entonces $f(z) = 0$ para algún $z \in S$ si, y solo si, $1 + g_n(z) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

1. RESULTADOS PREVIOS

Demostración. En primer lugar, la convergencia absoluta del producto se deduce del [lema 1.41](#). Tenemos $|g_n| \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ converge. Por dicho lema, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |g_n|)$ también converge, de modo que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n)$ converge absolutamente. Por otra parte, veamos la convergencia uniforme:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ converge uniformemente en S , entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $|g_n(z)| < 1$ para todo $z \in S$. Ahora, dado $r \geq N$ cualquiera, se tiene que:

$$\prod_{n=1}^r (1 + g_n(z)) = \left(\prod_{n=1}^{N-1} (1 + g_n(z)) \right) \cdot \left(\prod_{n=N}^r (1 + g_n(z)) \right). \quad (1.18)$$

Procedemos ahora como en la prueba del [lema 1.40](#). Tomamos la misma función h y $m, p \geq N$, de forma que:

$$\left| \sum_{n=m}^p \log(1 + g_n(z)) \right| \leq \underbrace{\sum_{n=m}^p |g_n(z)| \cdot |h(g_n(z))|}_{(\star)} \longrightarrow 0. \quad (1.19)$$

La serie $(\star)$ converge hacia 0 uniformemente en S , cuando $m, p \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + g_n(z))$ converge uniformemente en S . Puesto que las funciones $g_N, g_{N+1}, \dots$ están acotadas en S , la serie $\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(z)| \cdot |h(g_n(z))|$ está acotada en S . Por la desigualdad (1.19), la serie $\sum_{n=N}^{\infty} \log(1 + g_n(z))$ también está acotada en S .

Por otra parte, sabemos que la función exponencial es uniformemente continua en los subconjuntos acotados de $\mathbb{C}$. Así, cuando $r \rightarrow \infty$, se tiene que:

$$\exp \left(\sum_{n=N}^r \log(1 + g_n(z)) \right) \longrightarrow \exp \left(\sum_{n=N}^{\infty} \log(1 + g_n(z)) \right) \neq 0,$$

siendo esta convergencia uniforme en S . Esto prueba la convergencia uniforme de $\prod_{n=N}^{\infty} (1 + g_n(z))$ en S .

Por último, tenemos que $1 + g_n(z) \neq 0$ en S para $n \geq N$. Hemos definido $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(z))$. De este modo, se tiene $f(z) = 0$ para algún $z \in S$ si, y solo si, $1 + g_n(z) = 0$ para algún $n < N$. $\square$

Observación 1.44. En las condiciones del resultado anterior, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |g_n(z)|)$ también converge uniformemente en S . Basta aplicar la [proposición anterior](#) a las funciones $|g_1|, |g_2|, \dots$.

1.3. PRODUCTOS INFINITOS

Finalizamos la sección con un teorema, que trata sobre la holomorfía de productos infinitos de funciones complejas.

Teorema 1.45.

- (I). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas analíticas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω , entonces la función f , definida por

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

es analítica en Ω .

- (II). Más aún, para cada $z \in \Omega$, se tiene que $f(z) = 0$ si, y sólo si, $f_n(z) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- (III). Por otro lado, denotemos por $Z(f)$ al conjunto de los ceros de f . Entonces, para $z \in \Omega \setminus Z(f)$, se tiene que:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)},$$

siendo la convergencia uniforme en los compactos de $\Omega \setminus Z(f)$.

Demostración.

- (I). Aplicando la [proposición anterior](#), a las funciones $g_n = f_n - 1$, se deduce que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω . De este modo, el [teorema de Weierstrass](#) garantiza la holomorfía de f en Ω .
- (II). El segundo enunciado es, de nuevo, consecuencia de la [proposición 1.43](#).
- (III). Consideremos un punto $z \in \Omega \setminus Z(f)$, es decir, tal que $f(z) \neq 0$. Por el enunciado (II), esto implica que $f_n(z) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, cada f_n es holomorfa en Ω , y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω . De los apartados (I) y (II) se deduce que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $\Omega \setminus Z(f)$, hacia un límite distinto de cero. En estas condiciones, podemos aplicar el [lema 1.35](#), de modo que

1. RESULTADOS PREVIOS

la serie de los logaritmos $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$ converge uniformemente en los compactos de $\Omega \setminus Z(f)$. En cada componente conexa de $\Omega \setminus Z(f)$ puede elegirse una rama continua del logaritmo, ya que $f_n(z) \neq 0$ para todo $n \in N$.

Definimos entonces la función $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$. Se sigue entonces que g es holomorfa en $\Omega \setminus Z(f)$ y cumple que $f(z) = e^{g(z)}$, ya que:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z) \right) = \exp(g(z)).$$

Es decir, g es un logaritmo holomorfo de f en el conjunto $\Omega \setminus Z(f)$. De esta forma, dado $z \in \Omega \setminus Z(f)$, se verifica que $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Por otra parte, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$ converge uniformemente en los compactos de $\Omega \setminus Z(f)$, el [teorema de Weierstrass](#) permite derivar término a término, de modo que:

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}.$$

Finalmente, dado $z \in \Omega \setminus Z(f)$, se concluye que:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)},$$

con convergencia uniforme en los compactos de $\Omega \setminus Z(f)$.

□

1.4. Holomorfía bajo el signo integral

Para finalizar el capítulo, se presentan en esta sección dos versiones del teorema de holomorfía bajo el signo integral. La primera de ellas fue estudiada en la asignatura de “Variable Compleja”, ya que se utiliza en la demostración del teorema general de Cauchy.

Lema 1.46. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y sea φ una función compleja continua en el espacio producto $\Omega \times [a, b]$. Supongamos que para cada t fijo, la función que envía z en $\varphi(z, t)$ es analítica en Ω . Si se define F en Ω por

$$F(z) = \int_a^b \varphi(z, t) dt, \quad z \in \Omega,$$

entonces F es analítica en Ω y

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t) dt, \quad z \in \Omega.$$

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa del teorema de Fubini, de la fórmula integral de Cauchy para un disco, y del lema básico de derivación de integrales de tipo Cauchy. $\square$

A continuación, presentamos una versión más fuerte del resultado anterior. Su demostración se basa en el teorema de derivación de integrales paramétricas de Leibniz y el uso de las condiciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 1.47 (de holomorfía bajo el signo integral).

Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, sea A un subespacio medible de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \times A \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que:

- (i) Para todo $z \in U$, la función $f_z : A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_z(x) := f(z, x)$ es medible (en el sentido de Lebesgue).
- (ii) Para todo $x \in A$, la función $f_x : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_x(z) := f(z, x)$ es holomorfa en U .
- (iii) Para todo $z_0 \in U$ existe un entorno V de z_0 , contenido en U , y una función $h : A \rightarrow [0, \infty)$ integrable en A tal que

$$|f(z, x)| \leq h(x), \quad \text{para todo } (z, x) \in V \times A.$$

1. RESULTADOS PREVIOS

Entonces, la función $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_A f(z, x) dx, \quad z \in U,$$

es holomorfa en U , y, además

$$F'(z) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) dx, \quad z \in U.$$

Demostración. Basta expresar la función f como suma de sus partes real e imaginaria. De manera rutinaria, puede deducirse que la función F verifica las condiciones de Cauchy-Riemann, a partir de dichas condiciones para f . Finalmente, aplicando el teorema de derivación de integrales paramétricas de Leibniz, se concluye el resultado. $\square$

Aunque no es necesario para el trabajo, cabe mencionar que el resultado anterior puede generalizarse a cualquier orden de derivación. El lector interesado podrá encontrar este resultado en el texto de Dieudonné ([Die76], 1976). Concretamente, el contenido mencionado se corresponde con el teorema 13.8.6 de dicha referencia. Véase [Die76, págs. 127-129].

La función Γ real

A lo largo de este segundo capítulo, trabajaremos únicamente en los números reales. El capítulo comienza presentando la primera definición de la función Gamma, en su forma integral. Usando esta definición, se obtendrán las primeras propiedades de esta función. Inmediatamente, se comprobará que la función Gamma extiende la función factorial¹ a los números reales, aunque no es la única función que verifica esto. Tras ello, se estudiará el teorema de Bohr-Mollerup, resultado principal del capítulo. Este constituye una caracterización de la función Gamma real, en términos de convexidad logarítmica. La demostración del teorema conducirá a la segunda definición de Gamma, en forma de límite.

Posteriormente, en el [capítulo 3](#), se estudiará la función Gamma en los números complejos. Comenzaremos introduciendo una nueva definición, en forma de producto infinito. Posteriormente, lograremos extender las definiciones dadas previamente en la recta real al plano complejo.

El texto de Artin, [\[Art64\]](#), es la referencia principal utilizada en este segundo capítulo. Concretamente, se recomienda consultar [\[Art64\]](#), págs. 11-19].

2.1. Forma integral. Primeras propiedades

En primer lugar, como previa a la exposición del contenido del capítulo, recuérdese la definición de factorial.

¹ Únicamente definida en $\mathbb{N}_0$.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

Definición 2.1 (Factorial de un número natural). Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define su factorial, denotado por “ $n!$ ”, como el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n . Es decir:

$$n! := \prod_{k=1}^n k. \quad (2.1)$$

Para el factorial de cero, se conviene² que $0! = 1$.

Observaciones 2.2.

- (i) De manera inmediata, se deduce la siguiente relación para el factorial:

$$n! = n(n-1)! \quad (2.2)$$

- (ii) Alternativamente, se puede definir el factorial por recurrencia, estableciendo que $0! = 1$ y utilizando la ecuación anterior.

- (iii) Existen varios argumentos intuitivos para justificar la elección del factorial de cero. Por ejemplo, de la **expresión (2.2)** se deduce que:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}. \quad (2.3)$$

Y sustituyendo $n = 1$, se sigue que $0! = 1!/1 = 1$.

- (iii) Otro de estos argumentos se basa en el significado del factorial en combinatoria: $n!$ representa el número de permutaciones de un conjunto con n elementos. Es decir, el número de aplicaciones biyectivas de un conjunto de n elementos en sí mismo. Para el conjunto vacío ($n = 0$) existe una única aplicación: la aplicación vacía. Ello implica que $0! = 1$.
- (v) Además de por convenio, existe una razón fundamental para la elección del factorial de cero, relacionada con la función Gamma, como veremos próximamente en la **observación 2.6**.

Tras revisar el concepto de factorial y realizar algunas precisiones, continuemos con la construcción de la función Gamma en la recta real.

² Esta es la convención matemática habitual para el *producto vacío*. Por el mismo motivo, el resultado de elevar a cero cualquier número es uno.

2.1. FORMA INTEGRAL. PRIMERAS PROPIEDADES

El desarrollo de la teoría de la función Gamma guarda una estrecha relación con el problema de generalizar la función factorial: esto es, encontrar una expresión que tome el valor $n!$, para cualquier³ $n \in \mathbb{N}_0$, y que, además, pueda extenderse a cualquier valor real arbitrario.

En la búsqueda de esta expresión, nos encontramos con la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n! \quad (2.4)$$

Por el momento, para continuar con la exposición, admitiremos como cierta la **expresión (2.4)**. Posteriormente, la demostraremos.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, podríamos reemplazar el natural n , de la parte izquierda de la igualdad, por un valor real arbitrario, x , siempre que la integral siga convergiendo. De esta forma, definiríamos el valor $x!$ como el resultado de esta integral.

En lugar de esto, seguiremos la costumbre habitual: por motivos históricos, vamos a introducir una función que tome el valor $(n-1)!$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$. En consecuencia, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.3 (Función Gamma de **Euler**). Para cada $x > 0$, se define la función:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2.5)$$

Dicha función es conocida como la *función Gamma de Euler*.

Antes de continuar, debemos cerciorarnos de que la definición anterior es correcta. Es decir, debemos comprobar que la integral dada en **(2.5)** es convergente para cualquier x real y positivo:

Comprobación. En primer lugar, vamos a separar⁴ la integral en dos partes.

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt}_{(I)} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_{(II)}. \quad (2.6)$$

Una vez demostrada la convergencia de cada una de las dos integrales, la **igualdad (2.6)** es totalmente válida, y la convergencia quedará probada. Así,

³ Con el convenio $0! = 1$.

⁴ Nótese que, al integrar en el intervalo $[0, \infty)$, siempre tenemos que $t \geq 0$.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

estudiemos cada integral por separado:

$$(I). \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Para $x \geq 1$, la integral (I) es convergente: el integrando, $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$, es una función continua. Por tanto, es integrable en el intervalo acotado $[0, 1]$. En este caso, no se trata de una integral impropia, sino de una integral en sentido de Riemann.

Para $0 < x < 1$, y para todo $t > 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$0 < f(t) = e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1}.$$

Por el criterio de comparación para integrales impropias⁵, si la integral (A) $:= \int_0^1 t^{x-1} dt$ converge, entonces (I) converge.

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que:

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{\varepsilon^x}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x}.$$

Y, tomando límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left[\frac{\varepsilon^x}{x} \right]_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

De este modo, queda probada la convergencia de la integral (I), para todo $x \in (0, 1)$. En virtud del criterio de comparación, se tiene entonces que la integral (I) es convergente, para cada $x > 0$.

$$(II). \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Comparando con la función $g(t) = \frac{1}{t^2}$, tenemos que:

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{e^{-t} t^{x-1}}{1/t^2} = e^{-t} t^{x+1} = \frac{t^{x+1}}{e^t}.$$

Y al tomar límites:

⁵ Véase el [teorema A.11](#), en el apéndice.

2.1. FORMA INTEGRAL. PRIMERAS PROPIEDADES

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como la integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ es convergente, el criterio de comparación por cociente⁶ permite concluir la convergencia de la integral (II), para cada x real.

En resumen: La integral (I) converge para $x > 0$, y la integral (II) lo hace para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Luego ambas convergen para $x > 0$. Por tanto, la expresión (2.6) es lícita, y la [definición 2.3](#) de la función Gamma es correcta. $\square$

Proposición 2.4. La función Gamma verifica las dos siguientes propiedades:

- i. $\Gamma(1) = 1$.
- ii. $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, para todo $x > 0$. (*propiedad reproductiva*).

Demostración.

- i. La primera propiedad se demuestra directamente. Al sustituir $x = 1$ en la definición de la función Gamma, resulta que la función integrando tiene primitiva inmediata:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{b \rightarrow +\infty} = \\ &= \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-t}}_0 - (-e^0) = 0 - (-1) = 1. \end{aligned}$$

- ii. La segunda propiedad se demuestra utilizando integración por partes⁷, con $u = t^x$ y $dv = e^{-t} dt$:

⁶ Consultar el [teorema A.12](#).

⁷ Véase el [teorema A.10](#).

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \left[\begin{array}{ll} u = t^x & du = x t^{x-1} dt \\ dv = e^{-t} dt & v = -e^{-t} \end{array} \right] = \\
 &= -t^x e^{-t} \Big|_0^{t \rightarrow \infty} - \int_0^\infty e^{-t} x t^{x-1} dt = \\
 &= \underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} -t^x e^{-t}}_0 - 0^x e^{-0} + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x \Gamma(x).
 \end{aligned}$$

□

De la propiedad reproductiva, se deduce inmediatamente que la función Gamma interpola al factorial.

Proposición 2.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, con $n > 2$, se tiene que:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (2.7)$$

Demostración. Razonando recursivamente, la prueba es inmediata:

Dado $n \in \mathbb{N}$, la propiedad ii. de la proposición anterior establece que:

$$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1).$$

Si $n-1 > 1$, volvemos a aplicar la propiedad reproductiva, de modo que:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \Gamma(n-2).$$

Razonando recursivamente, y utilizando que $\Gamma(1) = 1$, se sigue que:

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot \Gamma(1) = (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1 = (n-1)!$$

□

Observación 2.6 (Sobre la elección del factorial de cero). La propiedad $\Gamma(1) = 1$, junto con la **fórmula (2.7)**, dan otro argumento más para justificar la elección del factorial de cero. Así, admitiendo que $0! = 1$, dicha fórmula es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

2.1. FORMA INTEGRAL. PRIMERAS PROPIEDADES

Observación 2.7 (Sobre distintas notaciones). Como comentábamos antes de introducir la [definición 2.3](#), parece más lógico definir directamente la función Gamma como la integral dada en [\(2.4\)](#), reemplazando n por x . Esta fue la notación introducida por Gauss, la llamada función Pi, denotada como Π . En consecuencia, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.8 (Función Pi de **Gauss**). Dado cualquier $x > -1$, se define la llamada *función Pi de Gauss* como:

$$\Pi(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^x dt. \quad (2.8)$$

Al haber probado la validez de la definición de la función Gamma, inmediatamente se deduce que la función Pi está correctamente definida, sin necesidad de más comprobaciones.

Observaciones 2.9.

- (i) De forma inmediata, se deduce la relación entre la función Pi y la Gamma. Dado $x \geq 1$, se sigue:

$$\Gamma(x) = \Pi(x - 1). \quad (2.9)$$

- (ii) Podemos escribir la relación anterior de manera alternativa. Dado $x \geq 0$, se tiene que:

$$\Gamma(x + 1) = \Pi(x). \quad (2.10)$$

De este modo, sustituyendo $x = n \in \mathbb{N}_0$, se prueba la validez de la [expresión \(2.4\)](#), que supusimos como cierta al inicio del capítulo.

- (iii) En consecuencia, la relación de la función Pi con el factorial es más natural que la de Gamma: dado $n \in \mathbb{N}_0$, se verifica:

$$\Pi(n) = n! \quad (2.11)$$

- (iv) Por motivos históricos, la notación $\Gamma(x)$, debida a Legendre, es la que ha sobrevivido. Por ello, será la que utilizaremos en todo el trabajo.
- (v) Existe otra “función pi” debida a Gauss, la llamada *función contadora de primos*. Esta función contabiliza el número de números primos menores o iguales a cierto número real x . Se denota por la letra π , en minúscula. Analíticamente, su definición es la siguiente:

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

$$\pi(x) := |\{p \leq x : p \text{ es primo}\}|. \quad (2.12)$$

No ha de confundirse la función contadora de primos, π , con la función Π de Gauss, alternativa a la Gamma.

2.2. Extensión a $\mathbb{R}_{<0}$

Con la construcción realizada hasta el momento, hemos definido la función Gamma para valores reales positivos⁸. El siguiente paso en nuestra construcción es extender la función Gamma a todo $\mathbb{R}$, incluyendo números negativos.

Primeramente, debemos señalar la necesidad de hallar una definición alternativa para $\Gamma(x)$, en el conjunto $\mathbb{R}_{\leq 0}$. Esto se debe a que la integral dada en la definición de Gamma⁹ es divergente para $x \leq 0$. La prueba de este hecho es inmediata.

Proposición 2.10. Para cada $x \leq 0$, la integral que define a la función Gamma es divergente, a saber:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2.13)$$

Demostración. Como ya hicimos en una prueba anterior, vamos a separar la integral del enunciado en dos partes. Nuevamente, denotemos:

$$(A) \equiv \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 f(x, t) dt.$$

Llamando $\theta = 1 - x$, la función integrando puede escribirse como:

$$f(x, t) = e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} t^{-\theta} = \frac{1}{e^t} \frac{1}{t^\theta}.$$

Como trabajamos con $t \in [0, 1] \equiv I$, podemos establecer la siguiente desigualdad:

$$f(x, t) = \frac{1}{e^t} \frac{1}{t^\theta} \geq \frac{1}{e} \frac{1}{t^\theta}, \quad \forall t \in I.$$

En consecuencia, la integral (A) puede minorarse por una integral divergente:

⁸ Esto es, en el conjunto $\mathbb{R}_{>0}$.

⁹ Recuérdese la [expresión \(2.5\)](#).

$$(A) = \int_0^1 f(x, t) dt \geq \frac{1}{e} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^\theta} dt}_{(B)}.$$

Como $x \leq 0$, tenemos que $-x \geq 0$, y como $\theta = 1 - x$, tenemos que $\theta \geq 1$. Por un criterio de convergencia conocido¹⁰, sabemos que la integral (B) es divergente para dicho θ .

En virtud del criterio de comparación, se concluye que la integral (A) también diverge. En consecuencia, si $x \leq 0$, la integral que define a Gamma es divergente, como se pretendía probar. $\square$

Debido a la divergencia de esta integral, necesitamos encontrar un enfoque alternativo para extender Γ a valores negativos. Notemos el siguiente hecho:

Proposición 2.11. Sea $y > 1$, y escribamos $y = x + n$, donde $x \in (0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se verifica:

$$\Gamma(x + n) = (x + n - 1)(x + n - 2) \cdots (x + 1)x \Gamma(x). \quad (2.14)$$

Demostración. Aplicando la propiedad reproductiva, se tiene que:

$$\Gamma(y) = \Gamma(x + n) = (x + n - 1)\Gamma(x + n - 1).$$

Podemos repetir este razonamiento hasta el término $x + n - n = x$, con lo que se deduce la expresión buscada. $\square$

Observación 2.12 (Sobre la parte entera). Habitualmente, el n de la proposición anterior denota la parte entera de y , aunque no en todos los casos. Se recomienda consultar las definiciones A.1 y A.2 del apéndice, para recordar el concepto de “parte entera” de un número real. Se utilizarán, indistintamente, las notaciones $[\cdot]$ y $\lfloor \cdot \rfloor$ para referirnos a la parte entera.

Para que la expresión (2.14) sea general, y pueda aplicarse a números naturales, es esencial que x sea estrictamente positivo. Más concretamente:

Si $y \notin \mathbb{N}$, entonces $n = [y]$, es decir, n denota la parte entera de y .

Por el contrario, si $y = m \in \mathbb{N}$, entonces $x = 1$, y $n = m - 1 \equiv [y] - 1$.

¹⁰ Consúltense el teorema A.13.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

Observación 2.13 (Una forma de calcular Γ en $(1, +\infty)$).

La proposición anterior lleva a una importante conclusión: suponiendo que el valor de $\Gamma(x)$ es conocido para $x \in (0, 1]$, la aplicación reiterada de la propiedad reproductiva permite hallar su valor en cualquier intervalo de la forma $(n, n+1]$, con $n \in \mathbb{N}$.

Reescribiendo la fórmula (2.14), podemos definir entonces la función Gamma para valores negativos.

Definición 2.14 (Función Gamma de Euler en $\mathbb{R}_{<0}$).

Sea $x < 0$, perteneciente a un intervalo de la forma $(-n, -n+1)$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se define el valor de la función Gamma en x como:

$$\Gamma(x) := \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} \Gamma(x+n). \quad (2.15)$$

Observaciones 2.15.

- (i) Si x es cero o un entero negativo¹¹, el lado derecho de la igualdad (2.15) no está definido, pues aparece un cero en el denominador.
- (ii) Si $x < 0$ y no es entero, dicha expresión está bien definida: dado $-n < x < -n+1$, se tiene que $0 < x+n < 1$, y es entonces correcto escribir el término $\Gamma(x+n)$.
- (iii) Consecuentemente, consideraremos que $\Gamma(x)$ no está definida en el conjunto $\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Es decir, tal y como hemos definido la función Gamma, su dominio de definición es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, que denotaremos por $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$.
- (iv) Esta definición extendida, por construcción, continúa verificando la propiedad reproductiva de Gamma. En otras palabras, la ecuación funcional $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ se verifica para todo $x \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$.
- (v) Por último, notemos que dado $x \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, con $x < 0$, este x pertenece a un único subintervalo de la forma $(-n, -n+1) \equiv I_n$, con $n \in \mathbb{N}$. Para cada x , denotaremos a dicho subintervalo por $I_{n,x}$. Dicho de otro modo, tenemos que:

$$I_{n,x} := ([x], [x] + 1).$$

¹¹ Esto es, si $x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

2.2. EXTENSIÓN A $\mathbb{R}_{<0}$

Una vez extendida la definición de Gamma a los números reales negativos, y determinado su dominio de definición en $\mathbb{R}$, podemos estudiar el signo de la función, así como su comportamiento asintótico.

Proposición 2.16. (Sobre el signo de Gamma) Sea $x \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, con $x < 0$. Entonces, el signo de $\Gamma(x)$ es $(-1)^n$, siendo $n \in \mathbb{N}$ el natural correspondiente al intervalo $I_{n,x}$. Esto es:

$$\operatorname{sgn}(\Gamma(x)) = \begin{cases} +1, & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es par.} \\ -1, & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es impar.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Demostración. El resultado se deduce analizando la [fórmula \(2.15\)](#). Para mayor claridad, podemos reescribir esta fórmula como:

$$\Gamma(x) := \frac{1}{\prod_{k=1}^n (x+n-k)} \Gamma(x+n). \quad (2.17)$$

Nótese que, en el denominador aparecen n términos de signo negativo:

Dado x en el intervalo $(-n, -n+1)$, tenemos que $0 < x+n < 1$. En consecuencia, $x+n-k < 1-k < 0$. Es decir, son negativos todos los factores de la forma $(x+n-k)$, con $k = 1, \dots, n$. Por otro lado, el factor $\Gamma(x+n)$ es positivo. En consecuencia:

$$\operatorname{sgn}(\Gamma(x)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{(-1)^n}\right) = \begin{cases} +1, & \text{si } n \text{ es par.} \\ -1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Esto es justamente lo que se pretendía demostrar, ya que $\lfloor x \rfloor = -n$. $\square$

Como ya comentamos, la integral que define a la función Gamma diverge para $x = 0$. En consecuencia, Γ no está definida en ese punto, y presentará una asíntota vertical. Gracias a la propiedad reproductiva, podemos estudiar el comportamiento asintótico de Gamma.

Proposición 2.17. (Comportamiento asintótico I)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty. \quad (2.18)$$

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

Demostración. Despejando en la propiedad reproductiva, se tiene que:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Tomando límites, se deduce el resultado buscado:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(1)}{x} = +\infty.$$

□

Proposición 2.18. (Comportamiento asintótico II)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x) = -\infty. \quad (2.19)$$

Demostración. La demostración es análoga a la del caso anterior. Como el límite se calcula con x tendiendo a cero por la izquierda, hay que usar la definición de Gamma para valores negativos. Así, aplicamos la [fórmula \(2.15\)](#), con $n = 1$:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

Nuevamente, la prueba se completa al tomar límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \Gamma(x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(1)}{x} = -\infty.$$

□

Observación 2.19 (Comportamiento asintótico III). De igual modo, podemos estudiar el comportamiento asintótico en los enteros negativos. Basta realizar un cálculo de límites análogo al anterior, en cada punto $x = -n$, con $n \in \mathbb{N}$. Debido a los cambios de signo de Gamma, el resultado dependerá de la paridad de n . Basta distinguir cuántos términos aparecen en el denominador de la [expresión \(2.15\)](#) en cada caso:

Para los puntos $x = -n$, siendo n par, el comportamiento es análogo al estudiado en el punto $x = 0$: al tomar límites por la derecha, aparece un número par de términos, correspondiendo con un signo positivo. Por otro lado, al tomar límites por la izquierda, aparece un número impar de términos, resultando en un signo negativo.

2.2. EXTENSIÓN A $\mathbb{R}_{<0}$

En los puntos $x = -n$, con n impar, ocurre al contrario, invirtiéndose los signos.

La tabla siguiente recoge la información anterior:

Paridad de n	$\lim_{x \rightarrow -n^+} \Gamma(x)$	$\lim_{x \rightarrow -n^-} \Gamma(x)$
par	$+\infty$	$-\infty$
impar	$-\infty$	$+\infty$

Tabla 2.1: Comportamiento asintótico de la función Gamma real en los enteros negativos.

Con la información que aportan los últimos resultados, estamos en condiciones de representar gráficamente la función Gamma real.

Observación 2.20. La [figura 2.1](#) muestra una representación gráfica de la función Gamma en $\mathbb{R}$. En ella, puede apreciarse los cambios de signo en los subintervalos I_n , estudiados en la [proposición 2.16](#).

Por ejemplo, vemos cómo Gamma toma valores negativos en el intervalo $I_{-1} = (-1, 0)$, y positivos en $I_{-2} = (-2, -1)$.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

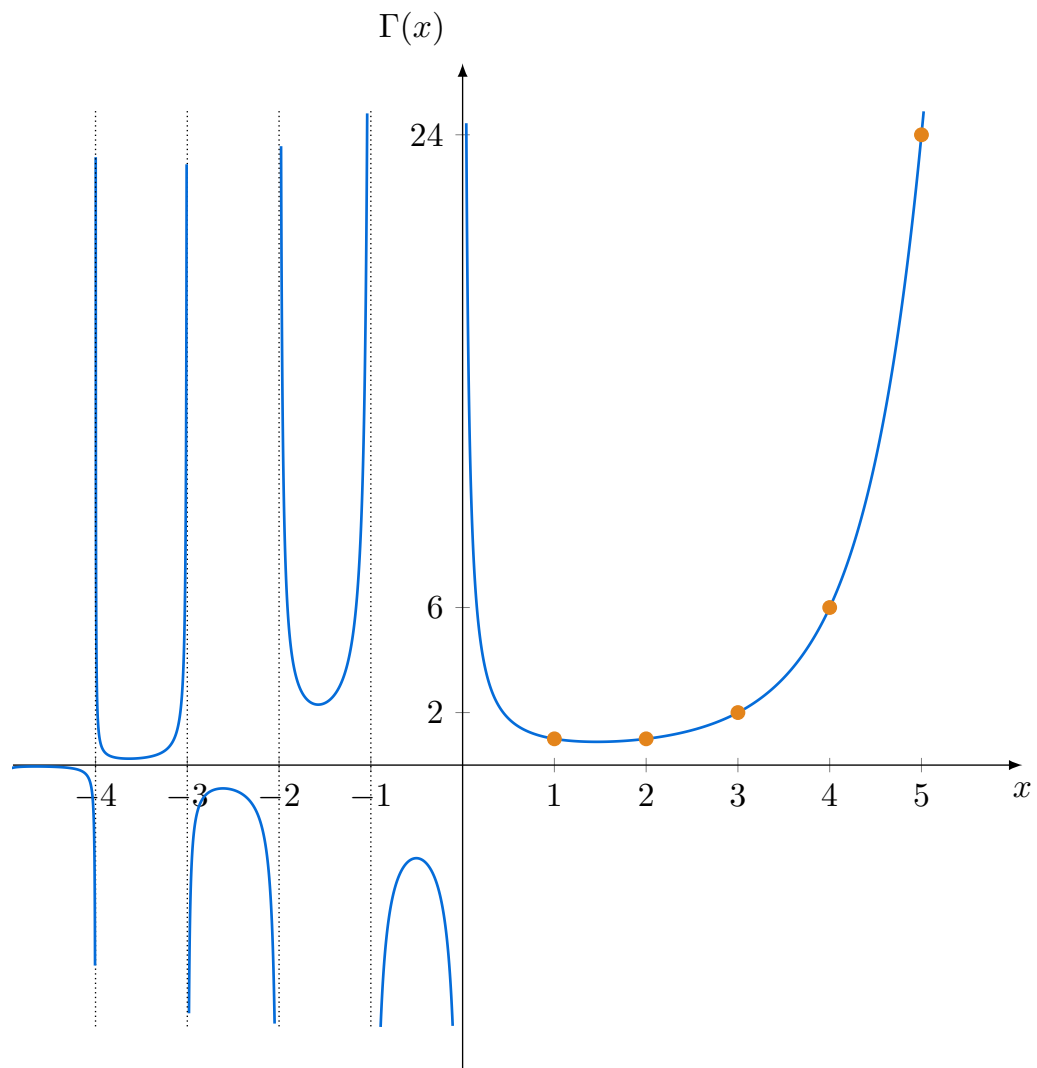


Figura 2.1: Representación gráfica de la función Gamma real, $\Gamma(x)$. Elaboración propia ($\text{\LaTeX}$). Código disponible en [anexo](#) y en *GitHub* .

2.3. Generalizando el factorial. Problema de unicidad

En la [sección anterior](#) hemos extendido la función Gamma a todo $\mathbb{R}$, incluyendo valores negativos. Llegados a este punto, es natural plantearse si los resultados estudiados hasta ahora permiten caracterizar a la función Gamma. Por ello, continuamos la exposición abordando el **problema de la unicidad**.

Como ya hemos constatado, la función Gamma interpola al factorial. Sin embargo, en la presente sección se comprobará que existen otras funciones que verifican esta propiedad; de hecho, un infinito número de ellas. Por ende, cabe preguntarse si la función Gamma presenta alguna propiedad que la distinga de todas las demás generalizaciones del factorial. Desde el punto de vista de la integración, es clara la importancia de la función Gamma de Euler. Esta aparece de forma natural en múltiples problemas de la Física. Además, está estrechamente relacionada con otras funciones y problemáticas relevantes de la Matemática.

Sin embargo, en esta sección pretendemos estudiar si Gamma es igualmente relevante, desde la perspectiva del problema interpolatorio. En consecuencia, perseguimos añadir condiciones adicionales a dicho problema de interpolación del factorial, de suerte que la función Gamma real sea la única que las verifique.

Es fundamental darse cuenta de que el procedimiento seguido para la extensión de Gamma es genérico, y podemos aplicarlo a otras funciones. En la [observación 2.13](#) se comentó cómo es posible determinar Gamma en $(1, +\infty)$, a partir de sus valores en $(0, 1]$. Teniendo presente esta idea, y utilizando la [expresión \(2.14\)](#), es inmediato deducir lo siguiente:

Para generalizar el factorial bastaría elegir cualquier función real $f(y)$ definida en $(0, 1]$, con $f(1) = 1$, y extenderla a $(1, +\infty)$ como:

$$\begin{aligned} f(y) = f(x+n) &:= \prod_{k=1}^n (x+n-k) f(x) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x f(x) =, \quad \text{si } y > 1. \end{aligned}$$

Hemos elegido denotar ‘ y ’ a la variable para ser coherentes con la notación de los resultados de la sección anterior. Utilizando que $y = x + n$, podemos

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

escribir la expresión anterior de manera más simplificada. Es decir, para¹² $y > 1$ se define:

$$f(y) := \prod_{k=1}^n (y - k) f(y - n).$$

O sea:

$$f(y) := (y - 1)(y - 2) \cdots (y - n) f(y - n). \quad (2.20)$$

En virtud de lo expuesto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.21 (Generalizaciones del factorial).

Sea $\tilde{f} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, una función real cualquiera, con $\tilde{f}(1) = 1$. Denotemos por f a la extensión de $\tilde{f}$ a $\mathbb{R}_{>0}$, definida de la siguiente manera:

$$f(y) = \begin{cases} \tilde{f}(y), & \text{si } y \in (0, 1] , \\ (y - 1)(y - 2) \cdots (y - n) f(y - n), & \text{si } y \in (1, +\infty) , \end{cases} \quad (2.21)$$

donde, para $y > 1$ escribimos $y = x + n$, con $x \in (0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$.

En estas condiciones, f es una generalización del factorial. Es decir, dado $m \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$f(m) = (m - 1)!$$

Demostración. La prueba es inmediata, y análoga a la realizada en el caso de la función Gamma. Por construcción, f verifica la propiedad reproductiva, y $f(1) = 1$. Bastaría razonar por recurrencia, igual que en la demostración de la proposición 2.5. Sin embargo, es más directo sustituir en la expresión de $f(y)$, para $y > 1$:

Sea $y = m \in \mathbb{N} \equiv x + n$, con $x = 1$ y $n = m - 1$. Sustituyendo en (2.20), se tiene que:

$$f(m) = (m - 1)(m - 2) \cdots \underbrace{(m - (m - 1))}_1 \underbrace{f(1)}_1 = (m - 1)!$$

Lo que concluye la prueba. □

¹² Recuérdese que escribimos $y = x + n$, con $x \in (0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Despejando, se tiene que $x = y - n$.

Observaciones 2.22.

- (i) Si queremos una relación más directa con el factorial, basta tomar la función $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(y) = f(y+1)$. De este modo, tenemos que $g(m) = m!$
- (ii) Nótese que la elección de la función $\tilde{f}$ es totalmente arbitraria, mientras verifique $\tilde{f}(1) = 1$. De este modo, existen infinitas funciones f que extienden el factorial a $\mathbb{R}_{>0}$. Tras la siguiente observación, veremos algunos ejemplos.

Observación 2.23 (Funciones pseudogamma). Las funciones que interpolan el factorial reciben el nombre de *funciones pseudogamma*. La función Gamma es la solución más conocida a este problema de interpolación. No obstante, como ya hemos visto, no es la única solución. Más aún, en la [proposición 2.21](#), hemos mostrado un método para construir infinitas funciones pseudogamma.

Sin embargo, las funciones así construidas tienen inconvenientes: es posible que no sean siquiera continuas¹³. Ciertas propiedades de regularidad¹⁴ pueden ser deseables para estas generalizaciones.

De entre todas las funciones pseudogamma, las dos más famosas son la función *Gamma de Hadamard* y el *factorial de Luschny*. Posteriormente, en el [capítulo 4](#), trataremos de nuevo las funciones pseudogamma.

Ejemplo 2.24 (Un caso degenerado). Podemos elegir como $\tilde{f}$ la función idénticamente nula, salvo en el punto $y = 1$. Es decir:

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \in (0, 1). \\ 1, & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

Al realizar la extensión con el procedimiento anterior, resulta que f es la función idénticamente nula en $\mathbb{R}_{>0}$, salvo en los números naturales. O sea:

¹³ Véase el [ejemplo 2.24](#).

¹⁴ Como la propia continuidad.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \notin \mathbb{N}. \\ (y-1)!, & \text{si } y \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Este es un caso trivial, pero sirve para ilustrar que f puede ser cualquier tipo de función, no necesariamente continua. En este caso, f es una función nula casi siempre¹⁵ en $\mathbb{R}_{>0}$. Es decir, la función f es discontinua, con discontinuidades evitables en los números naturales. La gráfica de f se muestra a continuación.

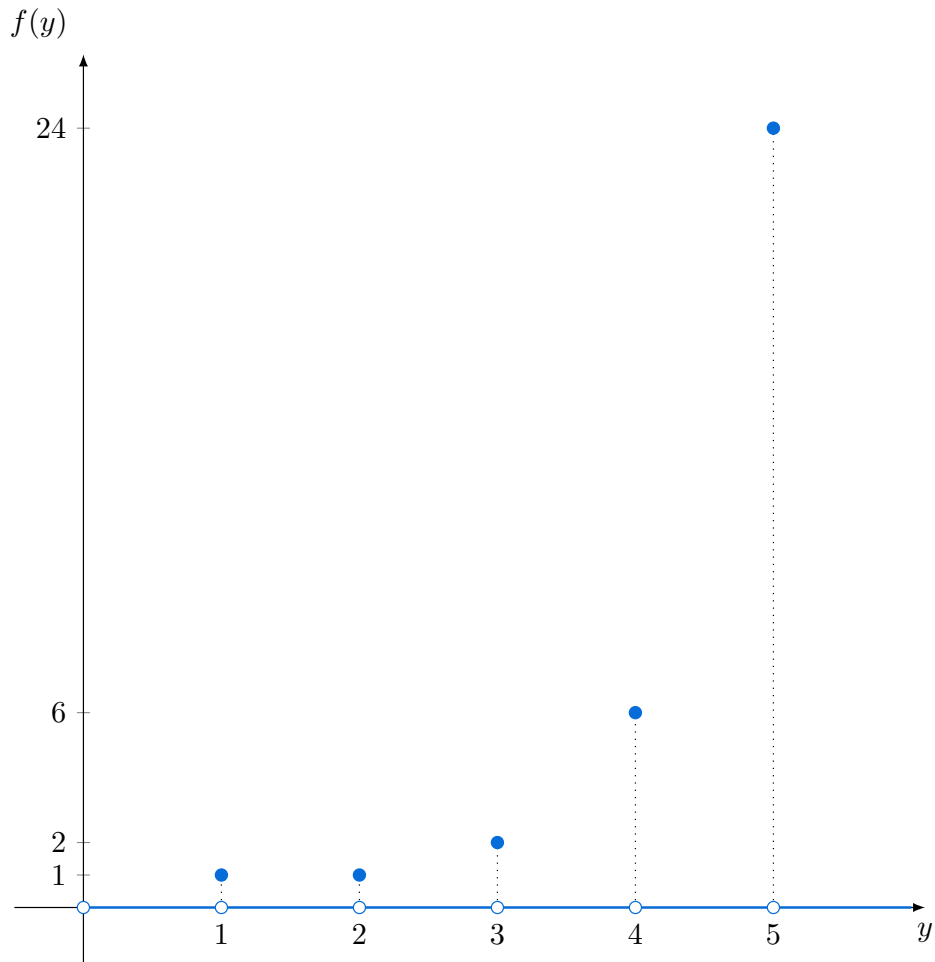


Figura 2.2: Funciones pseudogamma. Un ejemplo degenerado: $\tilde{f} \equiv 0$ c.s. Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original:

¹⁵ Esto es, salvo en el conjunto $\mathbb{N}$, de medida nula.

2.3. GENERALIZANDO EL FACTORIAL. PROBLEMA DE UNICIDAD

Ejemplo 2.25 (Un caso continuo, y convexo). Vamos a utilizar un enfoque similar al de la [proposición 2.21](#), para construir funciones pseudogamma. En este ejemplo, denotaremos por f_s a estas funciones, para diferenciarlas de las obtenidas con el procedimiento seguido anteriormente¹⁶.

Tomemos cualquier función $\tilde{f}_s : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, que cumpla la condición $\tilde{f}_s(1) = 1 = \tilde{f}_s(2)$. Podemos extenderla a $\mathbb{R}_{>0}$ utilizando la propiedad reproductiva: $f_s(y+1) = y f_s(y)$. Por ejemplo, escojamos la función idénticamente igual a 1. Es decir, $\tilde{f}_s(y) = 1$, para todo $y \in [1, 2]$.

Al realizar la extensión, para $y \in (0, 1)$, tenemos que $f_s(y) = \frac{1}{y}$. Asimismo, dado $y \in (2, 3]$, resulta que $f_s(y) = (y-1) f_s(y-1) = y-1$, ya que, como $y-1 \in (1, 2]$, se tiene que $\tilde{f}_s(y-1) = 1$. Razonamos análogamente para todos los intervalos $(n, n+1]$, con $n \in \mathbb{N}$, obteniendo que:

$$f_s(y) = \begin{cases} 1/y, & 0 < y \leq 1. \\ 1, & 1 < y \leq 2. \\ y-1, & 2 < y \leq 3. \\ (y-2)(y-1), & 3 < y \leq 4. \\ \vdots & \\ \prod_{k=1}^{n-1} (y-k), & n < y \leq n+1. \end{cases} \quad (2.23)$$

La función así construida resulta ser continua. Explícitamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow n^-} f_s(y) &= \lim_{y \rightarrow n^-} \prod_{k=1}^{n-2} (y-k) = \prod_{k=1}^{n-2} (n-k) \equiv f_s(n). \\ \lim_{y \rightarrow n^-} f_s(y) &= \lim_{y \rightarrow n^+} \prod_{k=1}^{n-1} (y-k) = \lim_{y \rightarrow n^+} (y-(n-1)) \prod_{k=1}^{n-2} (y-k) = \\ &= \underbrace{(n-(n-1))}_1 \prod_{k=1}^{n-2} (n-k) = \prod_{k=1}^{n-2} (n-k). \end{aligned}$$

De este modo, en los posibles puntos de discontinuidad¹⁷, los límites laterales¹⁸ coinciden entre sí, y con el valor de la función. Es decir, $f_s \in \mathcal{C}^0((0, +\infty))$. En la [figura 2.3](#) podemos apreciar la continuidad de f_s .

¹⁶ Que denotábamos simplemente por f .

¹⁷ Esto es, para cada $y = n \in \mathbb{N}$.

¹⁸ Calculados por la izquierda y por la derecha.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

En virtud de lo anterior, la continuidad no basta para que nuestro problema de interpolación posea a Gamma como solución única. Debemos buscar una propiedad alternativa.

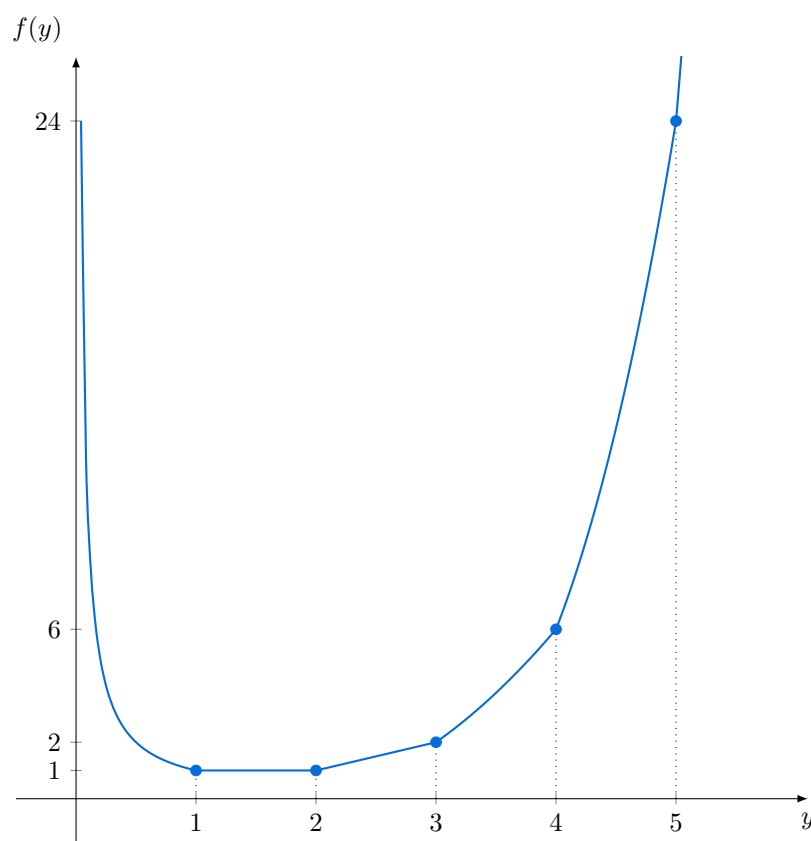


Figura 2.3: Funciones pseudogamma. Un ejemplo continuo y convexo: $\tilde{f}_s \equiv 1$ en $[1, 2]$. Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original:

Observación 2.26 (El problema de unicidad. Algunas notas históricas).

El artículo de Philip J. Davis, [Dav59], es una referencia clásica sobre la función Gamma, y el avance en su estudio en los últimos siglos. En concreto, en [Dav59, págs. 865-868] se discute la unicidad del problema interpolatorio, desde un punto de vista histórico.

La condición necesaria para lograr la unicidad se encontró, a principios del siglo XX, en términos de convexidad. Este concepto tuvo gran desarrollo durante los primeros años del siglo, gracias a matemáticos como Minkowski y Jensen¹⁹. Posteriormente, estas nociones se aplicaron a campos diversos,

¹⁹ Véase la [desigualdad de Jensen](#), en el apéndice.

2.3. GENERALIZANDO EL FACTORIAL. PROBLEMA DE UNICIDAD

como la teoría de juegos o la programación lineal.

Nótese que la función Gamma es convexa en el intervalo $(0, +\infty)$. Esto es claro, a la vista de la [figura 2.1](#). Sin embargo, la mera convexidad sigue sin ser suficiente para alcanzar la unicidad del problema. De acuerdo con la [figura 2.3](#), la función f_s que hemos construido también es convexa²⁰.

Sin embargo, la solución se encontraba cerca. Como veremos a continuación, la función Gamma no solo es convexa, sino que es logarítmicamente convexa. En 1922, Harald Bohr y Johannes Mollerup finalmente resolvieron el problema de unicidad, utilizando precisamente la **convexidad logarítmica** de Gamma.

En la siguiente sección presentaremos el conocido como *teorema de Bohr-Mollerup*, que constituye el resultado principal del capítulo. Pero antes, conviene realizar dos comentarios adicionales.

Observación 2.27 (Sobre la derivabilidad de Gamma). Otra ventaja de la función Gamma, respecto a las funciones pseudogamma que hemos construido en el capítulo, es la derivabilidad²¹. Es claro que la función f_s del [ejemplo 2.25](#) no es *suave*. Ni siquiera es una función diferenciable. Esto se aprecia claramente en la [figura 2.3](#).

Aunque para cada punto $y = n \in \mathbb{N}$ existan las derivadas laterales, estas no coinciden:

$$f'_s(y) = \begin{cases} -1/y^2, & 0 < y < 1. \\ 0, & 1 < y < 2. \\ 1, & 2 < y < 3. \\ y^2 - 3y + 2, & 3 < y < 4. \\ \vdots & \end{cases} \quad (2.24)$$

Por ejemplo, para $n = 1$, se tiene que:

²⁰ Aunque este hecho puede demostrarse analíticamente, es inmediato observarlo gráficamente: uniendo dos puntos cualesquiera de la gráfica de f_s , es obvio que el segmento que los une está por encima de dicha gráfica.

²¹ Recuérdese que, para funciones de una variable real, los conceptos de derivabilidad y diferenciabilidad son equivalentes. Por ello, al referirnos a este tipo de funciones en el texto, usamos indistintamente “función derivable” o “función diferenciable”.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

$$\left. \begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1^-} f'_s(y) &= -1 \\ \lim_{y \rightarrow 1^+} f'_s(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \neq \quad (2.25)$$

Por el contrario, puede demostrarse que la función Gamma real sí es derivable. Sin embargo, esta propiedad no es suficiente para caracterizar a la función Gamma de manera única. Existen otras²² funciones pseudogamma con esta propiedad²³.

Más aún, puede probarse que la función Gamma real es indefinidamente diferenciable en $(0, +\infty)$. No obstante, este resultado no es esencial para nuestra exposición. Por ello, no se ha incluido en el propio cuerpo del texto, sino como un apartado complementario. Siendo así, el lector interesado puede consultar el [teorema adicional 2](#), integrado en el apéndice.

Observación 2.28 (Funciones pseudogamma. Extensión a $\mathbb{R}_{<0}$).

Como ya estudiamos, la [expresión \(2.15\)](#) permite calcular Γ para valores negativos no enteros.

Así, podríamos extender las funciones pseudogamma construidas en los últimos ejemplos al conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, igual que hicimos con Gamma. Basta sustituir Γ por f , en dicha ecuación.

2.4. Teorema de Bohr-Mollerup

Previo a enunciar el teorema, vamos a demostrar que la función Gamma real es logarítmicamente convexa. Como ya se adelantó, este resultado admite dos demostraciones diferentes.

Teorema 2.29 (Log-convexidad de Gamma).

La función Gamma, definida por la integral [\(2.5\)](#), es logarítmicamente convexa en $(0, +\infty)$.

²² De hecho, infinitas.

²³ Ver [\[Art64, pág. 13\]](#).

2.4. TEOREMA DE BOHR-MOLLERUP

Demostración 1 (Artin).

La prueba es inmediata, a partir del estudio realizado sobre las funciones logarítmicamente convexas. Basta aplicar el [teorema 1.31](#), teniendo en cuenta que la función $\varphi(t) = e^{-t}$ es continua en $(0, +\infty)$. □

Demostración 2 (Hölder).

Recuérdese la [definición 1.20](#), de función log-convexa. Así, basta probar que, para cualesquiera $x, y \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (0, +\infty)$, se cumple la desigualdad siguiente:

$$\Gamma\left((1-\alpha)x + \alpha y\right) \leq (\Gamma(x))^{(1-\alpha)} (\Gamma(y))^\alpha. \quad (2.26)$$

Sean $x, y \in (0, +\infty)$ y $\alpha \in (0, +\infty)$, cualesquiera. Buscamos aplicar la desigualdad de Hölder. Para ello, definamos:

$$p := \frac{1}{1-\alpha}, \quad q := \frac{1}{\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad 1-\alpha = \frac{1}{p}, \quad \alpha = \frac{1}{q}.$$

De esta forma, se verifica que:

$$(1-\alpha) + \alpha \equiv \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2.27)$$

En consecuencia, se tiene que: $(1-\alpha)x + \alpha y = \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$. Operando, y aplicando cuidadosamente la desigualdad de Hölder, se obtiene el resultado buscado:

$$\begin{aligned} \Gamma\left((1-\alpha)x + \alpha y\right) &= \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)} dt \stackrel{(2.27)}{=} \\ &= \int_0^\infty e^{t\left(-\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} t^{\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)} dt = \\ &= \int_0^\infty \underbrace{\left(t^{x-1} e^{-t}\right)^{\frac{1}{p}}}_f \underbrace{\left(t^{y-1} e^{-t}\right)^{\frac{1}{q}}}_g dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \end{aligned}$$

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^\infty |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{(1-\alpha)} \cdot \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^\alpha = \\
&= (\Gamma(x))^{(1-\alpha)} \cdot (\Gamma(y))^\alpha.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.30. A partir del resultado anterior, resulta evidente²⁴ que Γ es una función convexa en $(0, +\infty)$.

Proposición 2.31 (Mínimo absoluto de la función Γ).

La función Gamma alcanza un mínimo absoluto en $(0, +\infty)$.

Demostración. Gamma es convexa en $(0, +\infty)$, y no es monótona en dicho intervalo: basta ver²⁵ que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$, $\Gamma(1) = 1$ y que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$. Una aplicación directa del [corolario 1.14](#) permite concluir la prueba.

□

Observación 2.32 (Sobre el mínimo absoluto de Gamma).

Obsérvese la [figura 2.4](#). Teniendo en cuenta que $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$, el mínimo debe ser un valor inferior a 1, y se alcanzará en un punto $x_0 \in (1, 2)$. A simple vista, se aprecia que x_0 es ligeramente inferior a 1,5.

²⁴ De acuerdo a la [observación 1.21](#), la propiedad de log-convexidad es más fuerte que la de convexidad.

²⁵ Recuérdesse el comportamiento asintótico estudiado, o simplemente la [figura 2.1](#).

2.4. TEOREMA DE BOHR-MOLLERUP

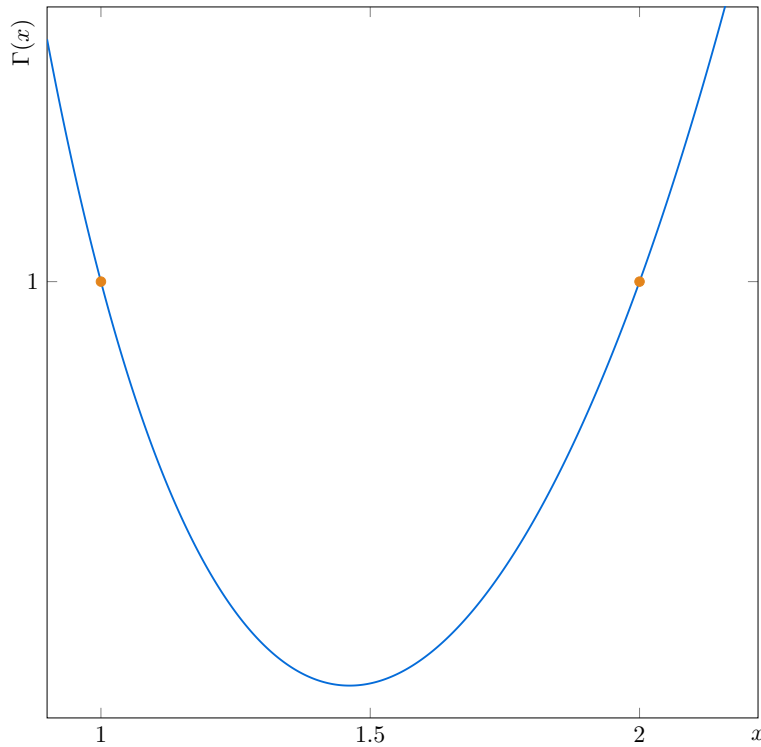


Figura 2.4: Representación gráfica de la función Gamma real en el intervalo $[1, 2]$. Mínimo absoluto. Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original:

Teorema 2.33 (de Bohr-Mollerup, 1922).

Sea $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo dominio de definición, $\mathcal{D}$, contiene a todos los números reales positivos²⁶, y que verifica las tres condiciones siguientes:

- i. $f(1) = 1$.
- ii. $f(x+1) = x f(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}$. (*propiedad reproductiva*).
- iii. f es logarítmicamente convexa en D .

Entonces f es idéntica a Γ en su dominio de definición.

Demostración. La prueba, aunque extensa, es elemental: solo requiere técnicas básicas de cálculo infinitesimal.

²⁶ Esto es: $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathcal{D}$.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

Primeramente, notemos que la **existencia** de una función que verifica estas tres condiciones ya ha sido probada: la función Γ las cumple. Así, resta probar la **unicidad**.

Ya que f verifica la propiedad reproductiva, se sigue²⁷ que:

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x). \quad (2.28)$$

Consecuentemente, basta ver que f coincide con Γ en el intervalo $(0, 1]$ para concluir la prueba. En tal caso, f será idénticamente igual a Gamma en el resto de puntos, puesto que ambas funciones verifican la propiedad reproductiva.

Sea $x \in (0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Por la hipótesis iii, f es logarítmicamente convexa. O sea, $g = \log(f)$ es una función convexa. Aplicando los resultados estudiados sobre el crecimiento de las pendientes²⁸ en funciones convexas, se sigue que:

$$\frac{g(n) - g(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{g(n+x) - g(n)}{(n+x) - n} \leq \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} \iff$$

$$\frac{\log(f(n)) - \log(f(n-1))}{1} \leq \frac{\log(f(n+x)) - \log(f(n))}{x} \leq \frac{\log(f(n+1)) - \log(f(n))}{1}.$$

Teniendo en cuenta que f verifica la propiedad reproductiva, se tiene que: $f(n+1) = n!$ y $f(n) = (n-1)!$. De este modo, aplicando las propiedades del logaritmo, se sigue que:

$$\log(n-1) \leq \frac{\log\left(\frac{f(n+x)}{(n-1)!}\right)}{x} \leq \log(n).$$

Multiplicando por $x > 0$, la desigualdad anterior se mantiene:

$$\log((n-1)^x) \leq \log\left(\frac{f(n+x)}{(n-1)!}\right) \leq \log(n^x).$$

Utilizando la monotonía de la función logaritmo, y multiplicando por $(n-1)!$, resulta que:

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x (n-1)!$$

²⁷ Recuérdense la [proposición 2.11](#).

²⁸ Consultar las [proposiciones 1.6 y 1.8](#).

2.4. TEOREMA DE BOHR-MOLLERUP

Sustituyendo la expresión (2.28) en la desigualdad anterior, y operando, se obtiene la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-2)(x+n-1)} &\leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-2)(x+n-1)} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \frac{x+n}{n}. \end{aligned}$$

La igualdad $(*)$ proviene de sustituir $(n-1)! = \frac{n!}{n-1}$.

Nótese que estas dos desigualdades que involucran a $f(x)$ son independientes la una de la otra: aunque han sido expresadas en función de n , ambas se verifican para todo $n \geq 2$. Por tanto, podemos reemplazar ' n ' por ' $n+1$ ' en el miembro de la izquierda, de modo que:

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \frac{x+n}{n}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+n}{n} = 1,$$

y aplicando el [criterio del sándwich](#), se concluye que:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}. \quad (2.29)$$

Así, hemos obtenido una expresión única para $f(x)$, con $0 < x < 1$. Sin embargo, $\Gamma(x)$ también verifica las tres condiciones del teorema. Por tanto, la expresión (2.29) continúa siendo válida si reemplazamos $f(x)$ por $\Gamma(x)$, en el lado izquierdo.

Por lo tanto $f \equiv \Gamma$ en el intervalo $(0, 1]$: lo hemos demostrado para el intervalo $(0, 1)$, y para $x = 1$, se verifica por la hipótesis i. Como ya se comentó²⁹, la función Γ queda completamente determinada por sus valores en $(0, 1]$. Así, como f es exactamente igual a Γ en $(0, 1]$, lo será en todo su dominio de definición, $\mathcal{D}$.

En virtud de lo anterior, queda probado que la función **Gamma es la única extensión logarítmicamente convexa de la función factorial**. $\square$

²⁹ Véase la [observación 2.13](#).

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

En este punto, conviene realizar una apreciación sobre la ecuación (2.29).

Observación 2.34. La expresión obtenida para la función Gamma en $(0, 1]$ es válida para todo su dominio de definición, $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Denotemos:

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}. \quad (2.30)$$

Sustituyendo x por $x+1$, se tiene que:

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n^{x+1} n!}{(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)} = x \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{n}{x+n+1}.$$

Dado $x \in (0, 1]$, el límite cuando n tiende a infinito del miembro derecho de la igualdad anterior existe, y vale $x\Gamma(x)$. Recuérdese que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x+n+1} = 1$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. De esta forma, el límite del miembro izquierdo de la igualdad también existe. Dicho límite se corresponde con la expresión de $\Gamma(x+1)$, para $x \in (0, 1]$. Es decir, la expresión de Gamma en forma de límite es válida también para $x \in (1, 2]$.

Más aún, la igualdad (2.30) es válida para cualquier x . De acuerdo con lo anterior, si existe el límite para x , existirá para $x+1$. Equivalentemente, si existe para $x+1$, lo hará para x , siempre que $x \neq 0$, para evitar un denominador nulo.

La conclusión fundamental es que la expresión obtenida para la función Gamma, en forma de límite, es válida en todo su dominio de definición. Por consiguiente, se deduce el último resultado del capítulo.

Corolario 2.35 (Gamma en forma de límite).

Dado cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ se verifica que:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}. \quad (2.31)$$

Observación 2.36 (Otras formas de definir Gamma).

En algunos textos, la igualdad (2.31) se utiliza como definición fundamental de Gamma, en lugar de su forma integral, (2.5). A partir de la expresión como límite, pueden deducirse el resto de sus propiedades. Dicha expresión fue obtenida en primera instancia por Gauss.

2.4. TEOREMA DE BOHR-MOLLERUP

Antes de avanzar al siguiente capítulo, cabe realizar unos comentarios finales.

Observaciones 2.37 (Algunas notas históricas).

- (i) El teorema de Bohr-Mollerup muestra que, entre las soluciones del problema de interpolación del factorial, la función Gamma es, en cierto sentido, la más simple de todas.
- (ii) Respecto a este tema, se recomienda consultar el artículo de Philip J. Davis, [Dav59]. Este texto incluye más detalles sobre la función Gamma, su relevancia y el problema interpolatorio. Concretamente, abarca esta última cuestión desde la perspectiva histórica.
- (iii) De acuerdo con [Dav59, pág. 868], Harald Bohr y J. Mollerup demostraron su teorema en 1922. Posteriormente, en 1931, Emil Artin³⁰ logró simplificar la prueba. Por este motivo, en algunos textos se conoce a este resultado como el “teorema de Bohr-Mollerup-Artin”.
- (iv) Este teorema es tan llamativo y potente que, en el texto de Nicolás Bourbaki³¹, constituye el punto de partida para la exposición de la función Gamma: en lugar de definirla por una fórmula concreta, se eligen las condiciones del teorema de Bohr-Mollerup como definición. Se recomienda al lector interesado consultar [BS13, Prop. 1. Cap. VII. Págs. 306-307]. Esta es una muestra más de la belleza e importancia del resultado estudiado, pues el grupo de matemáticos franceses constituyó uno de los exponentes de la Matemática de la época, destacando por su rigurosidad.
- (v) A modo de curiosidad, este grupo da nombre al santo patrón del Grado en Matemáticas en la Universidad de Valladolid. Cada año, el último viernes de noviembre, alumnos y profesores celebran la festividad de “San Bourbaki” en su honor. Esta fiesta comenzó a realizarse en el año 1968³², con motivo de un cambio de facultad. Este año 2025 se celebrará su quincuagésimosexta (56^a) edición.

³⁰ Véase [Art64, págs. 14-15].

³¹ “Nicolás Bourbaki” fue el pseudónimo utilizado por un grupo de matemáticos franceses para la publicación de sus obras. El colectivo fue fundado en 1935, y sus publicaciones tuvieron gran repercusión. Lograron aumentar la exigencia de rigor de los textos matemáticos posteriores, e influyeron en su estilo.

³² Desde entonces, se ha celebrado todos los años, salvo en el 2020, debido a la pandemia de coronavirus.

2. LA FUNCIÓN Γ REAL

Observación 2.38. (Una generalización del teorema de Bohr-Mollerup)

El teorema de Bohr-Mollerup admite una generalización, aplicable en contextos más amplios y a funciones diversas, con propiedades relacionadas con la concavidad y la convexidad.

Aunque de gran interés, este contenido escapa a los objetivos del TFG, y no entraremos en detalles. Se recomienda al lector interesado la consulta de [MZ22]. Este libro, publicado en 2022 por la editorial *Springer*, puede consultarse de manera gratuita³³. El enlace se encuentra disponible en la [bibliografía](#).

A continuación, daremos unas ideas breves del contenido del texto:

Este comienza dando un resultado ligeramente más general que el teorema de Bohr-Mollerup, aplicado a funciones “eventualmente convexas”³⁴.

Dicho resultado puede ampliarse a un rango de funciones más amplio. Esta construcción fue realizada por Wolfgang Krull y Roger Webster, de manera independiente.

Sin embargo, los resultados obtenidos por Krull y Webster contienen hipótesis muy restrictivas. En [MZ22], los autores³⁵ generalizan los resultados de Krull y Webster, relajando algunas hipótesis.

³³ Tanto este, como el resto de los libros de la editorial Springer que se citan en el trabajo, pueden descargarse de manera gratuita a través de la licencia de la Universidad de Valladolid.

³⁴ Según [MZ22, pág. vii] el término “función eventualmente convexa” denota a aquella que es convexa en un entorno de infinito.

³⁵ Jean-Luc Marichal y Naïm Zenaïdi.

La función Γ compleja

En el presente capítulo se estudiará la función Gamma en el cuerpo de los números complejos. La presentación se dividirá en tres secciones, de acuerdo a tres definiciones diferentes de Gamma. En primer lugar, se introduce una expresión de Gamma como [producto infinito](#). En la segunda sección se estudiará Gamma en forma de [límite](#). Por último, la tercera sección se corresponde con la forma [integral](#), extendiendo a $\mathbb{C}$ la definición previamente introducida en los números reales, en el [segundo capítulo](#). Uno de los resultados principales de este tercer capítulo es el teorema de Wielandt, que permite caracterizar a la función Gamma compleja de manera única.

El texto de Remmert ([\[Rem98\]](#), 1998) constituye la principal referencia del capítulo, realizándose la exposición en un orden similar al seguido en el texto. En concreto, el lector interesado puede consultar [\[Rem98\]](#), págs. 33-67]. Por otro lado, exposiciones similares sobre la función Gamma compleja pueden encontrarse en [\[Hen77\]](#), págs. 24-45] y [\[Mar65\]](#), págs. 304-322].

Para motivar el capítulo, se han incluido varias representaciones gráficas del módulo de la función Gamma compleja, realizadas con el software *Mathematica*. A continuación, se presenta la primera de ellas. Tras esto, comenzamos propiamente con la exposición del capítulo.

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

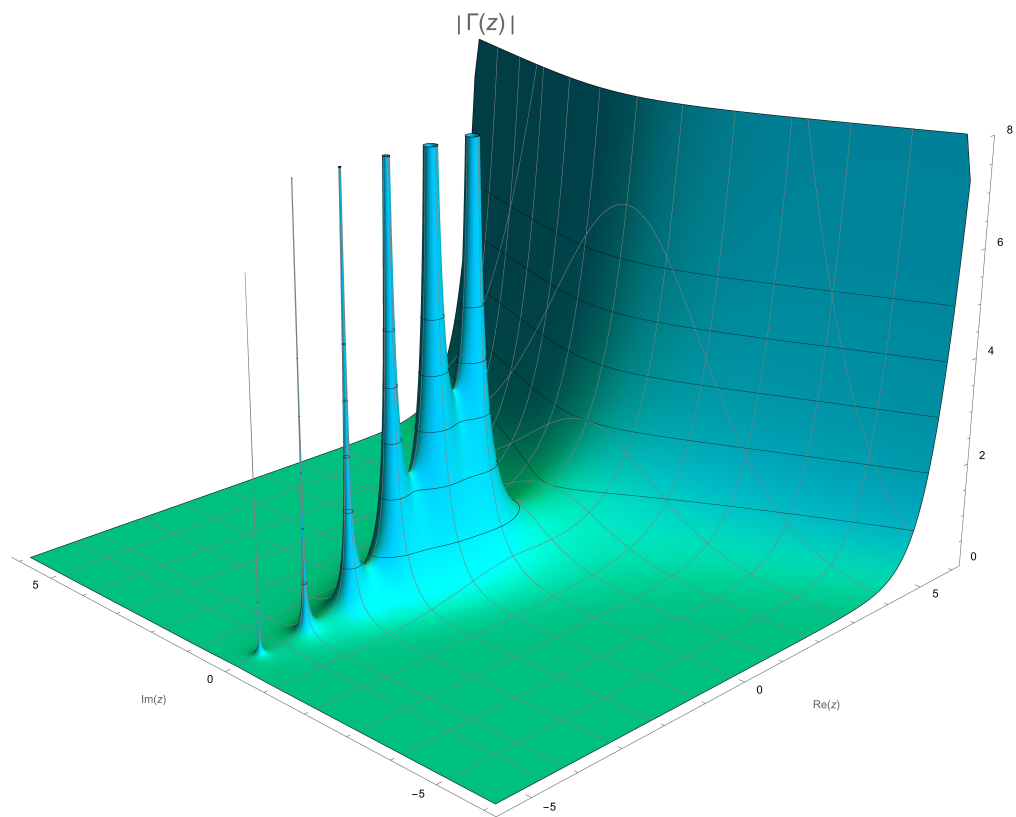


Figura 3.1: Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Elaboración propia (*Mathematica*). Código disponible en [anexo](#) y en *GitHub* .

3.1. Gamma como producto infinito

Antes de obtener la expresión de Gamma como producto infinito, hemos de introducir varias funciones auxiliares. La primera de ellas, que denotaremos por $H(z)$, se define a continuación.

La función auxiliar $H(z)$

Definición 3.1. Dado $z \in \mathbb{C}$, se define

$$H(z) := z \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v}\right) e^{-z/v}. \quad (3.1)$$

El siguiente resultado es fundamental.

Teorema 3.2. El producto $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v}\right) e^{-z/v}$ converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. En primer lugar, notemos que como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico, todo conjunto compacto es cerrado y acotado. En concreto, al ser acotado, todo compacto está contenido en una bola cerrada. De esta forma, basta demostrar la convergencia uniforme en bolas cerradas.

De este modo, sea $B_n := B_n(0)$ la bola cerrada centrada en el origen y de radio n , con $n \in \mathbb{N}$. Por la [proposición 1.43](#), para probar la convergencia uniforme de este producto basta demostrar que la serie

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{v}\right) e^{-z/v} - 1 \right)$$

converge uniformemente en B_n .

Por el [criterio M de Weierstrass](#), basta demostrar que la serie converge normalmente en B_n . De este modo, si probamos que

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| 1 - \left(1 + \frac{z}{v}\right) e^{-z/v} \right| < \infty \quad \text{para todo } z \in B_n,$$

habremos concluido.

Llamando $w = -\frac{z}{v}$ y sustituyendo la exponencial por su desarrollo en serie de Taylor, se sigue que:

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

$$1 - (1 - w)e^w = \frac{w^2}{2!} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)w + \cdots + \left(\frac{1}{v!} - \frac{1}{(v+1)!}\right)w^{v-1} + \cdots \right].$$

Observamos que todos los coeficientes entre paréntesis en la expresión a la derecha de la igualdad son positivos. Por lo tanto, si $|w| \leq 1$, se cumple que

$$|1 - (1 - w)e^w| \leq |w|^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v!} - \frac{1}{(v+1)!} \right) = |w|^2. \quad (3.2)$$

Nótese que la serie que aparece en la desigualdad (3.2) es *telescópica*, de modo que su suma es:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v!} - \frac{1}{(v+1)!} \right) = \frac{1}{1!} - \left(\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{(v+1)!} \right) = 1.$$

Sustituyendo $w = -z/v$ en (3.2), se sigue que:

$$\left| 1 - \left(1 + \frac{z}{v} \right) e^{-z/v} \right| \leq \frac{|z|^2}{v^2} \quad \text{si } |z| \leq v.$$

De esta forma:

$$\sum_{v=n}^{\infty} \left(\sup_{z \in B_n} \left| 1 - \left(1 + \frac{z}{v} \right) e^{-z/v} \right| \right) \leq |z|^2 \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{v^2} < \infty.$$

Entonces, la serie converge desde el término $v = n$ en adelante. Añadir un número finito de términos no altera la convergencia, de modo que la serie original converge normalmente en los compactos de $\mathbb{C}$. El *criterio M de Weierstrass* asegura la convergencia uniforme de esta serie en los compactos de $\mathbb{C}$. Finalmente, la *proposición 1.43* permite concluir la convergencia uniforme del producto $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v} \right) e^{-z/v}$ en los compactos de $\mathbb{C}$, precisamente lo que queríamos demostrar. □

El factor exponencial $e^{-z/v}$ produce la convergencia de un producto previamente divergente, $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v} \right)$. Karl Weierstrass fue el primero en reconocer la importancia de este procedimiento, y desarrolló una teoría general a partir de él. El lector interesado puede consultar el tercer capítulo del texto de Remmert ([Rem98], 1998), que trata sobre el *teorema de factorización de Weierstrass*.

Por lo tanto, se tiene que $H \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, siendo H la función definida en (3.1) y $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ el conjunto de las funciones enteras, esto es, holomorfas en $\mathbb{C}$.

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

Proposición 3.3. La función $H(z) = z \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v}\right) e^{-z/v}$ es entera.

Demostración. En primer lugar, el [teorema de Weierstrass](#) asegura la holomorfía en $\mathbb{C}$ del producto $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v}\right) e^{-z/v}$, ya que este converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$. En consecuencia, H es el producto de dos funciones enteras; luego, es entera. $\square$

Pasamos ahora a estudiar los ceros de la función auxiliar H .

Proposición 3.4. La función H definida en (3.1) posee ceros simples en los puntos $-n$ con $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Cada factor $\left(1 + \frac{z}{v}\right)$ se anula exactamente cuando $z = -v$, para cada $v \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, la función H se anula precisamente en los enteros negativos $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$, además de en el punto $z = 0$, por el factor inicial z .

Para ver que estos ceros son simples, notemos que en cada punto $z = -v$, se anula exactamente un único factor del producto:

$$\left(1 + \frac{z}{v}\right) = 0 \quad \text{cuando } z = -v,$$

mientras que los demás factores no se anulan en ese punto:

$$\left(1 + \frac{z}{k}\right) \Big|_{z=-v} \neq 0 \quad \text{si } k \neq v.$$

Por tanto, el producto tiene un cero simple en cada $z = -v$, con $v \in \mathbb{N}$. Lo mismo ocurre en el punto $z = 0$. $\square$

Llegados a este punto, requerimos una expresión del seno como producto infinito, para poder probar la siguiente propiedad importante de la función H . Antes de demostrar dicha expresión del seno, se necesita un resultado previo.

Lema 3.5 (Descomposición en fracciones simples de la cotangente).

La función cotangente admite el siguiente desarrollo en fracciones simples, para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+v} + \frac{1}{z-v} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - v^2}. \quad (3.3)$$

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

Demostración. Este es un resultado clásico de análisis complejo. Una de sus demostraciones se atribuye al alemán Gustav Herglotz. Esta solo requiere de resultados básicos de variable compleja, y se basa en el llamado “truco de Herglotz”.

Básicamente, la prueba consiste en denotar por f y g a los miembros izquierdo y derecho, respectivamente, de la primera igualdad en (3.3). Tras esto, se deducen propiedades comunes a ambas funciones, concluyéndose finalmente que deben coincidir.

Pese a su gran interés, no incluimos la demostración completa por motivos de extensión. Esta puede consultarse en el texto de Aigner y Ziegler ([AZ10], 2010), en el capítulo 23. En concreto, véase [AZ10, págs. 149-154].

□

A partir de esta descomposición, podemos demostrar el siguiente resultado sobre la función seno.

Teorema 3.6 (Euler 1734. Seno como producto infinito).

El seno complejo admite la siguiente representación como producto infinito:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{v^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

Demostración. En primer lugar, se tiene que la serie $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{z^2}{v^2}$ converge normalmente en los compactos de $\mathbb{C}$. Veámoslo:

Sea $n \in \mathbb{N}$, y tomemos $z \in B_n$. Denotemos por $f_v(z)$ al término general de la serie. Esto es, $f_v(z) := \frac{z^2}{v^2}$.

$$|f_v(z)| = \left| \frac{z^2}{v^2} \right| = \frac{|z|^2}{v^2} \leq \frac{n^2}{v^2} \quad \text{para todo } z \in B_n.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que la serie de término general $\frac{n^2}{v^2}$ es convergente. Concretamente:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{n^2}{v^2} = n^2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} = n^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

En virtud del [criterio M de Weierstrass](#), la serie $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{z^2}{v^2}$ converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$.

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

Ahora, la [proposición 1.43](#) permite concluir la convergencia uniforme del producto $\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{v^2}\right)$ en los compactos de $\mathbb{C}$.

Por el [teorema 1.45](#), dicho producto define una función entera. Así, definiendo

$$f(z) := \pi z \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{v^2}\right),$$

se sigue que f es una función entera.

Denotando por $f_v(z) = 1 - \frac{z^2}{v^2}$, se tiene que $f'_v(z) = \frac{-2z}{v^2}$. De esta forma:

$$\frac{f'_v(z)}{f_v(z)} = \frac{-2z}{v^2 - z^2} = \frac{2z}{z^2 - v^2}.$$

De acuerdo con el [apartado \(III\)](#) del citado teorema, calculemos la derivada logarítmica de f . Como ya vimos, la convergencia uniforme justifica la derivación término a término, de modo que:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - v^2}.$$

Observamos que la expresión anterior es precisamente la expansión de fracciones simples de la función cotangente, dada por [\(3.3\)](#). Es decir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \log f(z) = \pi \cot(\pi z).$$

Pero, por otro lado, esta expresión coincide con la derivada logarítmica de la función $\sin(\pi z)$:

$$\frac{d}{dz} \log(\sin(\pi z)) = \frac{\sin'(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z).$$

Ahora, por un [resultado clásico](#) de variable compleja sobre igualdad de derivadas logarítmicas de funciones meromorfas¹, se tiene que:

$$f(z) = c \sin(\pi z), \quad \text{con } c \in \mathbb{C}^*.$$

¹ Recuérdese que llamamos función “meromorfa” en un abierto Ω a aquella que es holomorfa en todo Ω excepto en un conjunto de puntos aislados, llamados polos de la función. El conjunto de las funciones meromorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se denota por $\mathcal{M}(\Omega)$.

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

Tomando límites cuando $z \rightarrow 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \pi z \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{v^2}\right) = \pi z. \\ \Rightarrow \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1. \end{aligned}$$

Consecuentemente, se sigue que $c = 1$, quedando probada la expresión del seno como producto infinito $\square$

Observación 3.7. La expresión (3.4) refleja claramente los ceros de la función seno: $\sin(\pi z)$ se anula si y solo si $z \in \mathbb{Z}$. Cada factor en el producto corresponde a uno de esos ceros. Además, vemos que cada uno de estos ceros es simple. Dado $v \in \mathbb{N}$, tenemos que $1 - \frac{z^2}{v^2} = (1 - \frac{z}{v})(1 + \frac{z}{v})$. El primer factor se anula en $z = v$, y el segundo, en $z = -v$

Una vez demostrada la expresión del seno como producto infinito, la siguiente propiedad de la función auxiliar H se deduce automáticamente.

Proposición 3.8. La función H verifica la siguiente propiedad:

$$-H(z)H(-z) = z^2 \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{v^2}\right) = \frac{1}{\pi} z \sin(\pi z). \quad (3.5)$$

Demostración. La primera igualdad de la expresión anterior se deduce sustituyendo $-z$ en la definición de H . La segunda es inmediata, a partir de la expresión del seno como producto, (3.4). $\square$

Observación 3.9. La proposición anterior muestra que $H(z)$ consiste, esencialmente, en “la mitad de los factores del producto del seno”.

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

Definición 3.10 (Constante de **Euler-Mascheroni**).

Se denomina *constante de Euler-Mascheroni* al límite de la diferencia entre la suma parcial de la serie armónica y el logaritmo neperiano. Es decir:

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log n \right). \quad (3.6)$$

Debemos comprobar que el límite existe y es finito.

Comprobación. Veamos que la expresión anterior define, efectivamente, una cantidad finita.

Denotemos por $\gamma_n = \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log n$ al término general de la sucesión. Este corresponde a la diferencia entre la suma parcial n -ésima de la serie armónica y la función logaritmo neperiano.

Para probar que el límite

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

existe y es un número real finito, basta ver que la sucesión es monótona y acotada. Esto es consecuencia de un [resultado conocido](#) de cálculo infinitesimal.

En primer lugar, estudiemos la monotonía de la sucesión.

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\log(n+1) - \log n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Ahora, utilizamos que $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$, una desigualdad conocida para $x > 0$.

Aplicándola a $x = \frac{1}{n}$, se sigue que $\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) > \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$.

Por tanto:

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 0.$$

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

Es decir, la sucesión γ_n es estrictamente decreciente.

Veamos ahora la acotación. Para ello, usaremos una técnica elemental, basada en comparar integrales con sumas de Riemann, considerando rectángulos de base unidad. Notemos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es positiva, continua y monótona decreciente en $[1, \infty)$, lo que garantiza la validez del razonamiento.

En primer lugar, veamos la acotación inferior de γ_n . Para ello, se utilizan una “suma de Riemann por la izquierda” Vamos a comparar el área bajo la función $1/x$ en el intervalo $[1, n]$, con rectángulos de base unidad y altura $f(k)$, con $k = 1, \dots, n-1$. Como f es decreciente, entonces la suma de Riemann izquierda sobreestima el valor de la integral. La [figura 3.2](#) ilustra esta situación

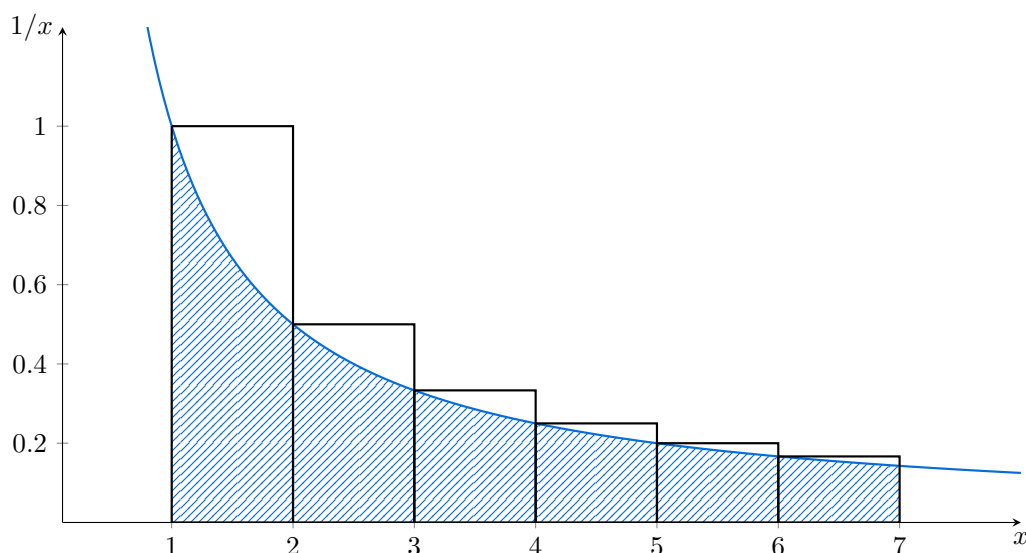


Figura 3.2: Constante de Euler-Mascheroni. Acotación inferior de γ_n . Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original: .

Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{1}{x} dx &< \sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} && \Longleftrightarrow \\ \log(n) + \frac{1}{n} &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} && \Longleftrightarrow \\ \gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) &> \frac{1}{n} > 0. \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que $\gamma_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

Como la sucesión es decreciente, una cota superior es su primer término. Es decir, tenemos que $\gamma_n < \gamma_1 = \frac{1}{1} - \log(1) = 1$.

Aunque no es necesario, podemos alcanzar la misma conclusión considerando una “suma de Riemann por la derecha”. Para ello, se toman rectángulos de base unidad y altura $f(k+1)$, con $k = 1, \dots, n-1$, como se muestra en la [figura 3.3](#). Al ser f monótona decreciente, la suma de Riemann derecha infraestima el valor de la integral.

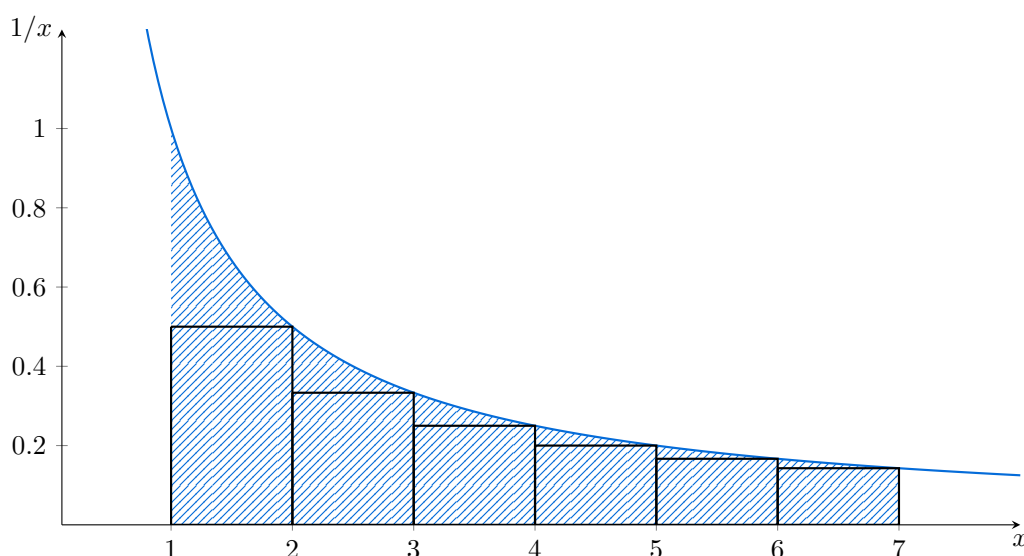


Figura 3.3: Constante de Euler-Mascheroni. Acotación superior de γ_n . Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original: .

En este caso, dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que que:

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{1}{x} dx &> \sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot f(k+1) \equiv \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} && \Longleftrightarrow \\ \log(n) + 1 &> \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} && \Longleftrightarrow \\ \gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) &< 1. \end{aligned}$$

Luego, $\gamma_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De este modo, se concluye que la sucesión γ_n está acotada: inferiormente, por 0; y superiormente, por 1. Como además es monótona decreciente, entonces es convergente. De este modo, su límite²

² Que hemos denotado por γ .

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

existe y es finito, siendo así coherente la [definición 3.10](#). Además, hemos probado que: $0 \leq \gamma \leq 1$.

□

Observaciones 3.11 (Comentarios I sobre la constante γ).

- (i) La existencia del límite de la sucesión γ_n admite varias demostraciones diferentes. Además de la presentada en nuestro trabajo, existen muchas otras formas de probar este resultado, con razonamientos similares.

Por ejemplo, una prueba alternativa de este resultado puede consultarse en [\[DL19, págs. 19-22\]](#). Esta consiste en definir dos sucesiones: $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1)$ y $s_n \equiv \gamma_n = \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log n$. Rutinariamente, se prueba que a_n define una sucesión monótona creciente, y s_n , una monótona decreciente. Tras ello, se comprueba que $s_n > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, se demuestra que γ_n está acotada inferiormente por $a_1 = 1 - \log(2) \approx 0,3068$, y superiormente por $s_1 = 1 - \log(1) = 1$. Finalmente, se ha demostrado que γ_n es decreciente y acotada, luego convergente. Con esta demostración, se obtiene una mejor cota inferior para γ .

- (iii) El razonamiento seguido en nuestro trabajo puede refinarse, para obtener una mejor cota inferior de γ . Una opción es razonar análogamente, con una suma tipo Riemann izquierda, pero considerando trapecios en lugar de rectángulos. Este será el procedimiento seguido en la siguiente proposición

Proposición 3.12 (Una mejor cota inferior para γ).

La constante de Euler-Mascheroni verifica:

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1. \quad (3.7)$$

Demostración. Por la convexidad de la función $\frac{1}{x}$ en cualquier intervalo $[1, n]$, con $n \in \mathbb{N}$, los trapecios cubren un área mayor que el área bajo la curva, como se ilustra en la [figura 3.4](#).

Así, dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left[f(k) + f(k+1) \right] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right] \quad \Longleftrightarrow$$

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

$$\begin{aligned}
 \log(n) &< \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right] \equiv \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right] \iff \\
 \log(n) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} &< \frac{1}{2} \left[2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \iff \\
 \gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.
 \end{aligned}$$

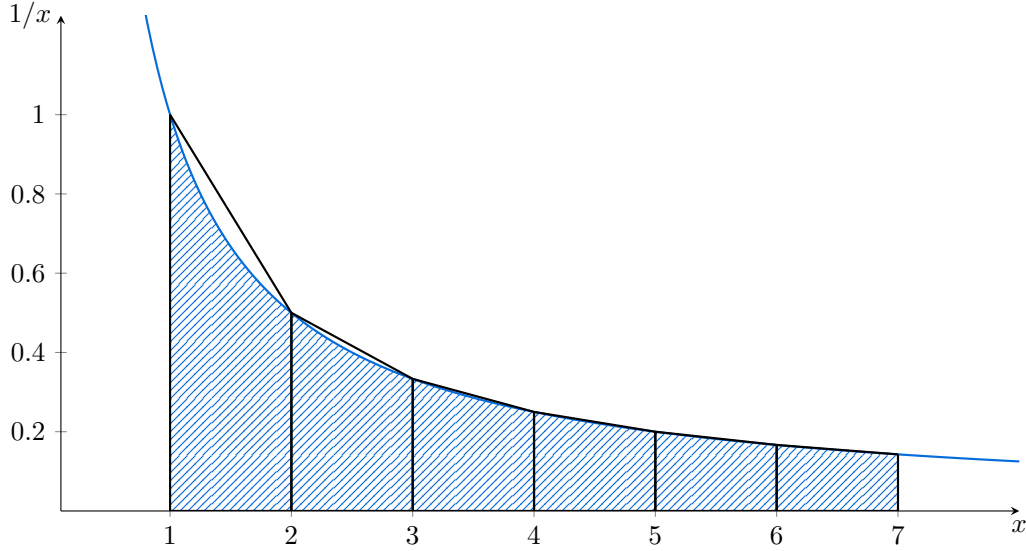


Figura 3.4: Constante de Euler-Mascheroni. Una mejor cota inferior para γ . Elaboración propia (L^AT_EX). Imagen original: .

De este modo, se ha deducido que $\gamma_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, para todo $n \geq 2$. Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$, se sigue que:

$$\gamma \geq \frac{1}{2}.$$

□

Observaciones 3.13 (Comentarios II sobre la constante γ).

- (i) Leonard Euler fue el primero en introducir la constante γ , en 1734. Ese año consiguió calcular hasta seis decimales, $\gamma \approx 0,577215$. Posteriormente, en 1781, Euler computó un valor con quince decimales correctos, $\gamma \approx 0,577215664901532$.

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

- (ii) Posteriormente, el matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750–1800) estudió esta constante detalladamente en su obra *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, publicada en 1790. El nombre “constante de Euler–Mascheroni” fue popularizado a posteriori, como reconocimiento a las contribuciones de ambos. En textos más antiguos, a veces se la denomina simplemente como “constante de Euler”. A modo de curiosidad, algunos textos la denotan simplemente por la letra C .
- (iii) A menudo, se considera a la constante γ como la tercera constante más importante del análisis matemático, por detrás de π y e . Sin embargo, nuestro conocimiento sobre γ es mucho más reducido. Al contrario que las anteriores, no se sabe si γ es racional o irracional, aunque se sospecha su irracionalidad. En la actualidad, también se desconoce si la constante γ es algebraica o trascendente.

Una vez estudiada la constante γ , presentamos las dos últimas propiedades de la función auxiliar H .

Proposición 3.14. La función H verifica la siguiente propiedad:

$$H(1) = e^{-\gamma}. \quad (3.8)$$

Demostración. En primer lugar, notemos que

$$\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{1}{v}\right) = \prod_{v=1}^n \left(\frac{v+1}{v}\right) = n+1,$$

puesto que todos los factores salvo el último se cancelan “en cascada”.

A partir de (3.1), expresamos H en forma de límite y sustituimos en $z = 1$. Así, se sigue que:

$$H(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{1}{v}\right) e^{-1/v} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n+1) \cdot e^{\sum_{v=1}^n -1/v} \right).$$

Claramente, $H(1) > 0$, de modo que podemos tomar logaritmos a ambos lados de la igualdad. Aplicando las propiedades del logaritmo y su continuidad en $(0, \infty)$, se tiene que:

$$\log H(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n \left(\log(n+1) - \frac{1}{v} \right) = - \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{v} \right) - \log(n+1) \right] = -\gamma.$$

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

Explicítamente, la última igualdad de la expresión anterior se escribe como

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \log(n+1) \right),$$

y es consecuencia de que

$$\log(n+1) - \log n = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad \text{luego} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0.$$

Resumiendo, hemos llegado a que

$$\log H(1) = -\gamma \quad \Rightarrow \quad H(1) = e^{-\gamma},$$

lo que concluye la prueba. □

Proposición 3.15 (Expresión de $H(z)$ como límite).

La función auxiliar $H(z)$ admite la siguiente representación en forma de límite:

$$H(z) = e^{-\gamma z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n! n^z}, \quad (3.9)$$

siendo $n^z := e^{z \log n}$.

Demostración. En primer lugar, a partir de la expresión (3.1), podemos escribir

$$H(z) = z \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{z}{v} \right) e^{-z/v} \right) \quad (3.10)$$

Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned} z \prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{z}{v} \right) e^{-z/v} &= z \left(\prod_{v=1}^n \frac{v+z}{v} \right) \exp \left(-z \cdot \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} \right) \\ &= \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n!} \exp \left(-z \cdot \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} \right) \end{aligned}$$

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n! n^z} \exp \left(z \cdot \underbrace{\left[\log(n) - \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} \right]}_{-\gamma_n} \right).$$

La igualdad (*) se obtiene multiplicando y dividiendo por $n^z = e^{z \log n}$. Sustituyendo el desarrollo anterior en la expresión (3.10), y tomando el límite, se obtiene la igualdad buscada:

$$H(z) = e^{-\gamma z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n! n^z}.$$

□

La función auxiliar $\Delta(z)$

Antes de obtener la expresión de Γ como producto infinito, necesitamos introducir una segunda función auxiliar, que denotaremos por $\Delta(z)$. De este modo, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.16. A partir de la función $H(z)$, se define la siguiente función auxiliar:

$$\Delta(z) := e^{\gamma z} H(z) = e^{\gamma z} z \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v} \right) e^{-z/v}. \quad (3.11)$$

En este contexto, a esta $\Delta(z)$ se la denomina *función de Weierstrass*.

Propiedades 3.17. La función $\Delta(z)$ verifica que:

- i. La función $\Delta(z)$ es entera, y tiene ceros de primer orden en los puntos $-n$ con $n \in \mathbb{N}_0$.
- ii. $\Delta(1) = 1$.
- iii. $\overline{\Delta(z)} = \Delta(\bar{z})$
- iv. Dado $x \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, se verifica que $\Delta(x) > 0$.

Demostración. Todas las propiedades se deducen inmediatamente a partir de la definición de Δ y de las propiedades de H . Por ejemplo, la [propiedad 3.17-i](#) es consecuencia directa de las [proposiciones 3.3](#) y [3.4](#). Por otro lado, la [propiedad 3.17-ii](#) se deduce de la [proposición 3.8](#): $\Delta(1) = e^{\gamma} H(1) \stackrel{(3.5)}{=} e^{\gamma} e^{-\gamma} = 1$

□

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

A partir de la [proposición 3.15](#), se deduce trivialmente la observación siguiente:

Observación 3.18 (Expresión de $\Delta(z)$ como límite).

$$\Delta(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n! n^z} . \quad (3.12)$$

Demostración. Basta sustituir la expresión de $H(z)$ como límite, [\(3.9\)](#), en la definición de la función de Weierstrass. $\square$

Proposición 3.19 (Ecuación funcional).

La función Δ verifica la siguiente ecuación funcional:

$$\Delta(z) = z \Delta(z+1) . \quad (3.13)$$

Demostración. La prueba es rutinaria. Basta sustituir $z+1$ en la expresión de Δ y operar adecuadamente, teniendo en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z+1+n}{n} = 1$. De este modo:

$$\begin{aligned} \Delta(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)(z+2) \dots (z+n)(z+1+n)}{n! n^{z+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n! n^z} \cdot \underbrace{\frac{z+1+n}{n}}_{\rightarrow 1} \\ &= \frac{\Delta(z)}{z} . \end{aligned}$$

Despejando $\Delta(z)$ llegamos a la ecuación buscada. $\square$

Proposición 3.20 (Relación con el seno).

La función Δ y la función seno están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\pi \Delta(z) \Delta(1-z) = \sin(\pi z) . \quad (3.14)$$

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

Demostración. De nuevo, la prueba es rutinaria. En primer lugar, sustituimos $-z$ en lugar de z en la ecuación (3.13), de forma que:

$$\Delta(-z) = -z \Delta(1-z). \quad (3.15)$$

Tras esto, basta recordar la expresión (3.5) y operar como sigue:

$$\begin{aligned} -H(z) H(-z) &= \frac{1}{\pi} z \sin(\pi z) && \Longleftrightarrow \\ -e^{-\gamma z} \Delta(z) e^{\gamma z} \Delta(-z) &= \frac{1}{\pi} z \sin(\pi z) && \Longleftrightarrow \\ -\Delta(z) \Delta(-z) &= \frac{1}{\pi} z \sin(\pi z) && \begin{matrix} (3.15) \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \\ -\Delta(z) [-z \Delta(1-z)] &= \frac{1}{\pi} z \sin(\pi z) && \Longleftrightarrow \\ \pi \Delta(z) \Delta(1-z) &= \sin(\pi z). \end{aligned}$$

□

La función $\Gamma(z)$. Representación de Weierstrass

Llegados a este punto, estamos en condiciones de definir la función Gamma en el plano complejo. Precisamente, $\Gamma(z)$ se define como el inverso de $\Delta(z)$. Así, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.21 (Función Gamma de **Euler**).

Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, se define la función Gamma de Euler como:

$$\Gamma(z) := \frac{1}{\Delta(z)} = \frac{e^{\gamma z}}{z} \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{v}\right)^{-1} e^{z/v}. \quad (3.16)$$

A esta expresión de Gamma como producto infinito se la denomina *representación de Weierstrass*.

Observaciones 3.22.

- (i) La función $\Gamma(z)$ es holomorfa y no se anula en $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Además, Gamma posee un polo simple en cada punto $-n$, con $n \in \mathbb{N}_0$. Lo anterior se deduce automáticamente, ya que la función $\Delta(z)$ es entera, con ceros simples en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ (propiedad 3.17-i). La posición de los polos se aprecia en las ilustraciones siguientes, especialmente en la figura 3.6.

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

- (ii) De esta forma, se tiene que $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. El dominio de definición de la función Gamma compleja es el conjunto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. En lo sucesivo, denotaremos a este conjunto por $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$.

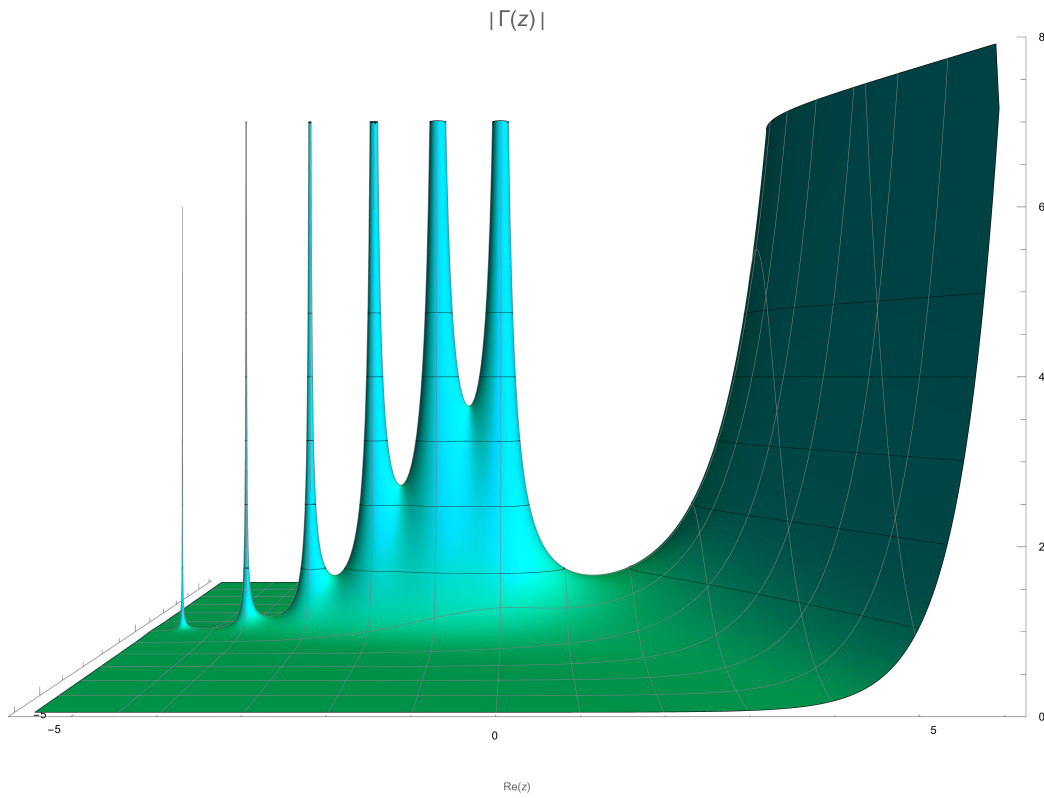


Figura 3.5: Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Vista lateral. Elaboración propia (*Mathematica*). Imagen original: .

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

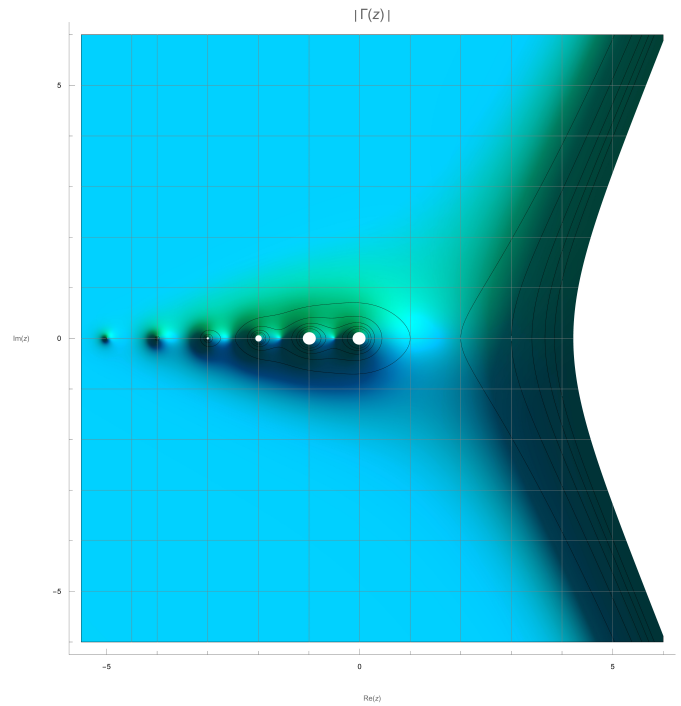


Figura 3.6: Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Vista cenital. Elaboración propia (*Mathematica*). Imagen original: .

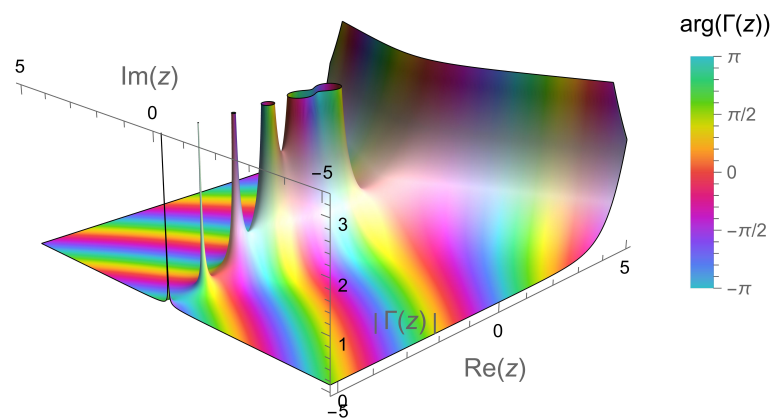


Figura 3.7: Módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Versión con argumento y leyenda. Elaboración propia (*Mathematica*). Imagen original: .

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

Propiedades 3.23. La función Gamma compleja verifica:

- i. $\Gamma(1) = 1$.
- ii. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, para todo $z \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. (F).

Demostración.

- i. $\Gamma(1) = \frac{1}{\Delta(1)} = \frac{1}{1} = 1$.
- ii. La propiedad reproductiva en el caso complejo se deduce de la [proposición 3.19](#):

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= z\Delta(z+1) &\iff \frac{1}{\Gamma(z)} &= z\frac{1}{\Gamma(z+1)} &\iff \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

□

Observación 3.24. Análogamente al caso real, la ecuación funcional (F) resulta esencial. Si conocemos $\Gamma(z)$ en la banda $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$, la propiedad reproductiva permite calcular sus valores en la banda adyacente, $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re}(z) \leq 2\}$. Razonando por inducción, se deduce que:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z). \quad (3.17)$$

En particular, se verifica la ya conocida interpolación del factorial:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Proposición 3.25 (Fórmula de reflexión de **Euler**).

Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (3.18)$$

Demostración. Basta aplicar la [definición 3.21](#) y sustituir en [\(3.14\)](#), de forma que:

$$\begin{aligned} \pi \Delta(z) \Delta(1-z) &= \sin(\pi z) &\iff \pi \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(1-z)} &= \sin(\pi z) &\iff \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \end{aligned}$$

□

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

Propiedades 3.26.

- i. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- ii. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.
- iii. $\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}$.
- iv. $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$.
- v. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$.
- vi. $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}$.
- vii. $|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}$.

Demostración.

- i. Basta sustituir $z = \frac{1}{2}$ en la fórmula (3.18):

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{1} = \pi \quad \Longleftrightarrow \\ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} &= \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

- ii. Se deduce a partir de la primera propiedad y de la expresión (3.17):

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2^n} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{\underbrace{(2n) \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2}_{2n \cdot 2(n-1) \cdots 2(2) \cdot 2(1)}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

3.1. GAMMA COMO PRODUCTO INFINITO

- iii. De la propiedad reproductiva, se tiene que $\Gamma(1+z) = z \Gamma(z) \iff \Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}$. Sustituyendo en (3.17) se obtiene la propiedad buscada.
- iv. La prueba es análoga a la de la propiedad anterior. En este caso, la ecuación funcional se aplica como $\Gamma(1-z) = -z \Gamma(-z)$. De nuevo, basta sustituir en (3.17) para encontrar el resultado buscado.
- v. Sustituimos $w = \frac{1}{2} + z$ en la fórmula de reflexión, teniendo en cuenta que $1-w = \frac{1}{2} - z$. Así:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} + z\right)\right)} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi z\right)} = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}.$$

- vi. Sustituimos $z = iy$ en la propiedad 3.26-iv, y utilizamos que $\sinh(t) = -i \sin(it)$. Consecuentemente:

$$\begin{aligned} \Gamma(iy) \Gamma(-iy) &= -\frac{\pi}{iy \sin(i\pi y)} \iff \Gamma(iy) \underbrace{\Gamma(\overline{iy})}_{\overline{\Gamma(iy)}} = \frac{\pi}{y \underbrace{[-i \sin(i\pi y)]}_{\sinh(\pi y)}} \\ \iff \left| \Gamma(iy) \right|^2 &= \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}. \end{aligned}$$

- vii. Tomemos $z = iy$ en la propiedad 3.26-v, notando que $\cosh(t) = \cos(it)$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) &= \frac{\pi}{\cos(i\pi y)} \iff \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \overline{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)} &= \frac{\pi}{\cos(i\pi y)} \iff \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.27 (Residuos de la función Gamma).

Dado $n \in \mathbb{N}_0$, se cumple que:

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (3.19)$$

Demostración. Realizamos el cálculo de los residuos de acuerdo con la [proposición C.20](#), considerando que las singularidades son polos simples. Así, se sigue que:

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \Gamma(z). \quad (3.20)$$

De la ecuación (3.17), se deduce que:

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z) \quad \Longleftrightarrow$$

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z}.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (3.20), se deduce que:

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z} = \frac{\Gamma(1)}{\underbrace{(-1)\cdots(-n+1)(-n)}_{(-1)^n n!}} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

Con la siguiente observación, finalizamos el estudio de Gamma como producto infinito, y pasamos a estudiar su expresión en forma de límite.

Observación 3.28. Razonando como en la prueba anterior se deduce que cualquier función $h \in M(\mathbb{C})$ que satisfaga $h(z+1) = zh(z)$, con $h(1) \neq 0$, tiene un polo simple en cada punto de $\mathbb{Z}_{\leq 0}$, con residuo:

$$\text{Res}(h, -n) = \frac{(-1)^n h(1)}{n!}.$$

3.2. Gamma como límite

La expresión de Gamma en forma de límite se obtiene trivialmente a partir de la observación 3.18.

Observación 3.29 (Expresión de $\Gamma(z)$ como límite).

Dado $z \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, se tiene que:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \quad (3.21)$$

A esta expresión de Gamma como límite se la denomina *representación de Gauss*.

3.2. GAMMA COMO LÍMITE

A partir de la expresión (3.21), se deducen automáticamente las siguientes propiedades de Gamma.

Propiedades 3.30.

- i. $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$, para todo $z \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$.
- ii. $\Gamma(x) > 0$, para todo $x > 0$.
- iii. $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(x)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $x = \operatorname{Re}(z) > 0$.

Demostración. Las dos primeras propiedades son triviales a partir de la expresión en forma de límite. Para la última, basta notar que $|n^z| = n^x$ y que, dado $v \in \mathbb{N}_0$, $|z + v| \geq x + v$, para todo z tal que $x = \operatorname{Re} z > 0$. $\square$

Observación 3.31 (Acotación en bandas verticales).

La propiedad 3.30-iii implica que $\Gamma(z)$ está acotada en cualquier banda del tipo $\{z \in \mathbb{C} : r \leq x \leq s\}$ con $0 < r < s < \infty$. Esta propiedad será necesaria en la demostración del teorema de Wielandt.

Proposición 3.32 (Comportamiento asintótico).

Dado $z \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n) n^z} = 1.$$

De este modo, podemos escribir $\Gamma(z+n) \sim_{\infty} \Gamma(n) n^z$.

Demostración. El resultado es una consecuencia directa de las expresiones (3.17) y (3.21):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n) n^z} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+n-1) \cdots (z+1) z \Gamma(z)}{\Gamma(n) n^z} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+n-1) \cdots (z+1) z}{(n-1)! n^z} \cdot \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n-1)(z+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-1)!(z+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n! + z(n-1)!} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

Llegados a este punto, estamos en condiciones de presentar el teorema de unicidad que caracteriza a la función Gamma en el plano complejo. Este resultado se atribuye al matemático alemán Helmut Wielandt, y puede consultarse en [Rem98, pág. 43] o [Rem96]. Su prueba se basa en el [teorema de Liouville](#).

Teorema 3.33 (de Wielandt, 1939).

Sea F holomorfa en el semiplano derecho $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Supongamos que $F(z+1) = zF(z)$, y que F está acotada en la banda $S := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$. Entonces, $F = a\Gamma$ en $\mathbb{T}$, donde $a := F(1)$.

Demostración. En primer lugar, se define $v := F - a\Gamma \in \mathcal{H}(\mathbb{T})$. La ecuación $v(z+1) = zv(z)$ también se cumple para v . Por tanto, v admite una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$. Sus polos, si existen, solo pueden estar en $\{0, -1, -2, \dots\}$.

Como $v(1) = 0$, se sigue que $\lim_{z \rightarrow 0} zv(z) = \lim_{z \rightarrow 0} v(z+1) = 0$. De esta forma, por el [teorema C.21](#), v presenta una singularidad evitable en $z = 0$. Dado que $v(z+1) = zv(z)$, se puede repetir el razonamiento anterior. Gracias a la [observación C.22](#), la función v se puede extender holomorficamente a cada punto $-n$, con $n \in \mathbb{N}_0$. Así, $v \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Como $\Gamma|_S$ está acotada ([observación 3.31](#)), también lo está $v|_S$. Por tanto, v también está acotada en la banda $S_0 := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$. Para $z \in S_0$ con $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$, esto se deduce por continuidad; para $|\operatorname{Im}(z)| > 1$, la acotación de v en S_0 se sigue de que $v(z) = \frac{v(z+1)}{z}$, y del hecho de que $v|_S$ está acotada.

Consideramos ahora la función entera $q(z) := v(z)v(1-z)$. Dado que $v(1-z)$ y $v(z)$ toman los mismos valores en S_0 , la función $q(z)$ está acotada en S_0 . Como $v(z+1) = zv(z)$ y $v(-z) = -\frac{v(1-z)}{z}$, tenemos que $q(z+1) = -q(z)$.

Así, $q(z)$ está acotada en $\mathbb{C}$. Como además q es entera, se verifican las hipótesis del teorema de Liouville. En consecuencia, se deduce que q es constante. Así, $q(z) \equiv q(1) = v(1)v(0) = 0$. Por lo tanto, $v \equiv 0$, es decir, $F = a\Gamma$ en $\mathbb{T}$. Esto concluye la prueba. □

3.3. Gamma como integral

Definición 3.34 (Integral de Euler de segunda especie).

En primer lugar, dado $z \in \mathbb{T}$, se define la siguiente integral impropia:

$$I_E(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.22)$$

Observaciones 3.35.

- (i) En 1811, el matemático francés Adrien-Marie Legendre denominó a dicha integral como *integral de Euler de segunda especie*.
- (ii) A simple vista apreciamos que la integral anterior es análoga a la expresión que utilizamos en (2.5) para definir la función Gamma real, pero sustituyendo x por z .

Sin embargo, la existencia de esta integral no es trivial. En la presente sección realizaremos una exposición similar a la de la [sección 2.1](#). En primer lugar, debemos asegurar que la integral converge, y que define una función holomorfa. Esto será posible gracias al [teorema de holomorfía bajo el signo integral](#).

Tras esto, el [teorema de unicidad de Wielandt](#) nos permitirá concluir que la integral I_E coincide, en $\mathbb{T}$, con la función Gamma compleja.

- (iii) Cabe mencionar que el desarrollo explicado en la observación previa puede utilizarse para calcular la llamada *fórmula integral de Hankel*. La integral I_E representa Gamma solo en el semiplano derecho, mientras que la de Hankel lo hace en todo el conjunto $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. Por motivos de extensión del trabajo, no se estudiarán en profundidad estos contenidos.

Definición 3.36 (Funciones auxiliares u y v).

Dado $r > 0$, denotamos por

$$\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq r\}, \quad \mathbb{L}_r := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq r\}.$$

Se definen entonces:

$$u(z) := \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt, \quad v(z) := \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.23)$$

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

Teorema 3.37 (Convergencia de u y v).

- (i) La integral $v(z)$ converge absolutamente en $\mathbb{T}_r$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Más aún, $v(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
- (ii) La integral $u(z)$ converge absolutamente en $\mathbb{L}_r$ para todo $r > 0$, y $u(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{T})$.

Demostración.

- (i) Para $z \in \mathbb{T}_r$, se tiene que $|t^{z-1}| \leq t^{r-1}$. Como $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{r-1} e^{-\frac{t}{2}} = 0$, entonces existe una constante $M > 0$ tal que $|t^{z-1} e^{-t}| \leq M e^{-t/2}$ para todo $z \in \mathbb{L}_r$, $t \geq 1$. Por otro lado, como $\int_1^\infty e^{-t/2} dt = 2 e^{-1/2}$, y $t^{z-1} e^{-t} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, el [teorema de holomorfía](#) bajo el signo integral permite concluir la primera parte del teorema.
- (ii) Renombremos $s := 1/t$. Se sigue que $u(z) = \int_1^\infty e^{-1/s} s^{-z-1} ds$. Dado $r > 0$, tenemos que $|e^{-1/s} s^{-z-1}| \leq s^{-r-1}$ para todo $z \in \mathbb{T}_r$. Más aún, $\int_1^\infty s^{-r-1} ds = r^{-1} < \infty$. De este modo, el segundo apartado del teorema se deriva del [teorema de holomorfía](#).

□

Observación 3.38. Las integrales $u(r)$ divergen para $r < 0$. Como $t^{r-1} e^{-t} \geq e^{-1} t^{r-1}$ para $t \in (0, 1)$, se tiene que:

$$\int_0^1 t^{r-1} e^{-t} dt \geq e^{-1} \int_0^1 t^{r-1} dt = \infty, \quad \text{si } r \leq 0.$$

Teorema 3.39 (Gamma como integral de **Euler**).

La integral

$$I_E(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

converge absolutamente en cualquier banda $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$, con $0 < a < b < \infty$, y define una función holomorfa en $\mathbb{T}$. Además, se tiene que $I_E \equiv \Gamma$ en $\mathbb{T}$.

Finalmente, podemos escribir:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.24)$$

3.3. GAMMA COMO INTEGRAL

Demostración. La convergencia se deduce del teorema anterior, ya que la integral coincide con $F(z) := u(z) + v(z)$ en $\mathbb{T}$. Al ser u y v holomorfas en $\mathbb{T}$, automáticamente $F \in \mathcal{H}(\mathbb{T})$.

Por otro lado, es inmediato verificar que:

- i. $F(1) = 1 \equiv a$. (Integración directa).
- ii. $F(z+1) = z F(z)$. (Integración por partes, como hicimos en el caso real).
- iii. $|F(z)| \leq |F(\operatorname{Re}(z))|$, $\forall z \in \mathbb{T}$.

En particular, F está acotada en la banda $S = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$. Gracias al [teorema de unicidad de Wielandt](#), podemos concluir que $F(z) = \Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{T}$. $\square$

Para finalizar la sección, incluimos el cálculo de algunas integrales que aparecen comúnmente en varias ramas de la Matemática.

Propiedades 3.40 (Algunas integrales usuales).

- i. $\int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx = \alpha^{-1} \Gamma(\alpha^{-1})$.
- ii. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Integral gaussiana).

Esta integral aparece en varias asignaturas del Grado en Matemáticas. Ahora, a partir de la función Gamma, tenemos una manera alternativa de calcular su valor.

- iii. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

- i. Sea el cambio de variable $t := x^\alpha$. Entonces, $t^{\alpha^{-1}-1} = x^{1-\alpha}$ y $dt = \alpha x^{\alpha-1} dx$. En consecuencia:

$$\Gamma(\alpha^{-1}) = \int_0^\infty t^{\alpha^{-1}-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty x^{1-\alpha} e^{-x^\alpha} \cdot \alpha x^{\alpha-1} dx = \alpha \int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx,$$

de donde se deduce la expresión buscada.

3. LA FUNCIÓN Γ COMPLEJA

- ii. Basta sustituir $\alpha = 2$ en la primera propiedad:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- iii. La última propiedad se deduce integrando por partes y razonando por inducción.

□

3.4. Teorema de Hölder

Finalizamos el capítulo presentando otro resultado popular sobre la función Gamma.

En analogía con las funciones exponencial y trigonométricas, resulta natural preguntarse si la función Γ es solución de una ecuación diferencial simple. En 1886, el matemático alemán Otto Hölder demostró que la función Gamma no verifica esta propiedad.

Teorema 3.41 (de Hölder). La función Γ no satisface ninguna ecuación diferencial algebraica cuyos coeficientes sean funciones racionales. En otras palabras, dado cualquier $n \in \mathbb{N}_0$, no existe ningún polinomio no nulo

$$P \in \mathbb{C}[X; Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$$

tal que

$$P(z; \Gamma(z), \Gamma'(z), \dots, \Gamma^{(n)}(z)) = 0,$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Observaciones 3.42 (Comentarios sobre el teorema de Hölder).

- (i) Tras la prueba original de Hölder, publicada en 1886, surgieron otras demostraciones. Destacan las de Moore (1897), A. Ostrowski (1919 y 1925) y F. Hausdorff (1925). Todas ellas se basan en llegar a una contradicción entre la ecuación funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y la supuesta ecuación diferencial.

3.4. TEOREMA DE HÖLDER

- (ii) En la literatura inglesa, las funciones con este tipo de propiedad se denominan *transcendentally transcendental functions* o *hypertranscendental functions*. No se ha encontrado ninguna referencia en castellano sobre estos temas, por lo que no existe una traducción estándar. Podríamos hablar de funciones “hipertrascendentes” o “trascendentes en sentido fuerte”.
- (iii) A partir de este resultado, podríamos preguntarnos para qué otros cuerpos K de funciones meromorfas en el plano sigue siendo cierto el teorema. ¿Puede la función Gamma ser solución de alguna ecuación diferencial algebraica con coeficientes en K ?

Estos contenidos escapan a los objetivos del trabajo. Sin embargo, hemos decidido comentarlos brevemente, por su gran interés matemático. El lector interesado podrá encontrar la respuesta a esta pregunta en el artículo de Bank y Kaufman ([BK78], 1978).

En relación con otras funciones “hipertrascendentes” también puede ser de utilidad la consulta de [Ban78].

- (iv) Posteriormente, el trabajo de Miller ([Mil97], 1997) aborda el tema desde otra perspectiva. El autor desarrolla una extensión del teorema de Hölder. *Grosso modo*, se restringen los coeficientes de la ecuación diferencial a funciones de variable real, definidas en subintervalos fijos de $(0, \infty)$. Estas funciones no tienen por qué extenderse meromórficamente a regiones del plano complejo. Como antes, estas cuestiones exceden el propósito del trabajo, por lo que no daremos más detalles.

Aplicaciones de Gamma

Para concluir el trabajo, en el presente capítulo se comentarán algunas de las aplicaciones de la función Gamma. Por motivos de extensión, no podemos estudiar en profundidad ninguno de estos contenidos. De este modo, el objetivo de este capítulo final no es otro que mostrar la importancia y riqueza de la función Gamma en campos diversos de la Matemática y de la Física.

Aplicaciones de Gamma en la Matemática

En primer lugar, la función Gamma es de gran utilidad en problemas de Análisis Matemático, para la resolución de muchas integrales. Por ejemplo, se utiliza para el cálculo del volumen de una n -esfera. Con respecto a la Probabilidad, la función Gamma aparece en la distribución homónima. La distribución Gamma se utiliza para modelar el tiempo de espera entre eventos, o la duración de ciertos procesos. Resulta de gran utilidad en diversas áreas como finanzas, ingeniería o biología.

Aplicaciones de Gamma en la Física

Por otra parte, la función Gamma se muestra en diversos problemas de la Física. Como alumno del doble grado Matemáticas-Física, estas aplicaciones resultaron de gran interés. Además, constituyen una muestra de cómo el conocimiento científico de disciplinas diferentes se entrelaza. Esto aporta, si cabe, más valor aún al avance de la Matemática. El estudio de temas matemáticos, *a priori* puramente teóricos, puede ayudar al posterior avance de otras ciencias.

Primeramente, Gamma se utiliza en problemas de Mecánica Clásica [Riv04, pág. 74]. También hace aparición en problemas menos comunes, como estudios de energías renovables o astrofísica. En concreto, la función Gamma se

4. APLICACIONES DE LA FUNCIÓN GAMMA

utiliza para calcular un parámetro de la *distribución de Weibull*. Dicha distribución se utiliza para describir la distribución de la velocidad del viento. Por su parte, también es útil para analizar la *función de luminosidad de Galaxias*. El lector interesado podrá encontrar más detalles sobre estas dos aplicaciones en [DL19, págs. 78-82].

Finalmente, de acuerdo con [Dav59, pág. 864], la función Gamma también es relevante en Física Nuclear, en problemas como la dispersión de partículas cargadas, las fuerzas nucleares entre protones o en la aproximación de Fermi para la probabilidad de la radiación beta.

Continuación I: Funciones pseudogamma

Si hubiera que continuar nuestro estudio sobre la función Gamma, lo haríamos profundizando en el estudio de las *funciones pseudogamma*, retomando el contenido de la [sección 2.3](#).

El teorema Bohr-Mollerup asegura que la función Gamma de Euler es la única función que interpola al factorial, y que es logarítmicamente convexa. Como ya se comentó, si eliminamos la condición de log-convexidad, existen infinitas funciones que interpolan al factorial. En la mencionada sección, ya vimos algunos ejemplos. Llegados a este punto, convendría estudiar otros en más profundidad.

El ejemplo paradigmático es la *función Gamma de Hadamard*. Nombrada en honor a Jacques Hadamard, se define como:

$$H(x) = \frac{1}{\Gamma(1-x)} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \ln \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right)} \right) \right\},$$

donde $\Gamma(x)$ denota la función Gamma de Euler.

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$H(n) = \Gamma(n) = (n-1)!$$

A diferencia de la función Gamma clásica, la función Gamma de Hadamard $H(x)$ no tiene ninguna singularidad. Es una función entera, es decir, está definida y es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Además, $H(x)$ satisface la siguiente ecuación funcional:

$$H(x+1) = xH(x) + \frac{1}{\Gamma(1-x)},$$

entendiendo que

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = 0 \quad \text{cuando } x \in \mathbb{N}.$$

Se puede argumentar que la función Gamma de Hadamard es una solución “más simple” al problema interpolatorio, desde el punto de vista de la teoría de funciones. Véase [Dav59, pág. 865].

El lector interesado encontrará información adicional en [Wik24] y [Lus].

Cabe mencionar que existen otras funciones pseudogamma populares, como el “factorial de Luschny”. En el reciente artículo de Klimek ([Kli23], 2023) se presenta otro ejemplo de función pseudogamma entera.

Continuación II: Funciones poligamma

El estudio podría continuar abordando las *funciones poligamma*. Estas se definen como las sucesivas derivadas del logaritmo de la función Gamma de Euler. La primera de ellas es la llamada *función digamma*, que aparece precisamente en la definición de la función Gamma de Hadamard.

También podrían estudiarse las *funciones gamma incompletas*, que se obtienen al variar los límites de integración de la integral que define a la función Gamma real.

En un estudio aún más profundo podrían abarcarse los *superfactoriales*, y su extensión al plano complejo, con la *función G de Barnes*.

Funciones Beta y Zeta de Riemann

Una vez finalizado el estudio de la función Gamma, surge de forma natural introducir las funciones Beta y Zeta de Riemann. Ambas funciones guardan una estrecha relación con Gamma, y son esenciales en algunas ramas de la Matemática.

La función Beta se define, para $x, y > 0$, como:

4. APLICACIONES DE LA FUNCIÓN GAMMA

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt .$$

Su relación con Gamma es:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} .$$

Específicamente, la función Beta es relevante en ramas como Análisis Matemático (cálculo de integrales) o Probabilidad (distribución Beta).

Por su parte, la función Zeta de Riemann se define como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} ,$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Existen varias expresiones que relacionan las funciones Gamma y Zeta.

Primeramente, se tiene la ecuación funcional siguiente.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) .$$

Por otro lado, existe la siguiente representación integral:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx .$$

La función Zeta es fundamental en ramas como Teoría de Números, Análisis Real y Análisis Complejo, entre otras. La Teoría de Números destaca frente al resto de campos. Llegados a este punto, cabe mencionar la *Hipótesis de Riemann*, sobre la distribución de los ceros de la función Zeta de Riemann. Este constituye uno de los grandes problemas abiertos de la Matemática.

Conclusion

Los ejemplos y aplicaciones anteriores evidencian cuán significativa y rica resulta la función estudiada, en distintos contextos. Con ello, esperamos haber ofrecido al lector una visión completa del tema. Las múltiples referencias incluidas en nuestro texto permitirán a los lectores curiosos seguir profundizando en el estudio de la función Gamma de Euler.

Apéndice

Recopilamos en este apéndice varios resultados clásicos de análisis matemático, utilizados a lo largo del trabajo. En primer lugar, se incluyen contenidos de [cálculo infinitesimal](#) en una variable real. Posteriormente, continuamos con un [apartado adicional](#) sobre la derivabilidad de la función Gamma real. Tras esto, presentamos resultados de [Variable Compleja](#). Por último, se han recogido algunas [desigualdades notables](#) empleadas en el trabajo.

Todos estos resultados no son imprescindibles en la exposición, y su aparición en el cuerpo del trabajo no aportaría información relevante. Así, por completitud del texto, hemos decidido incluirlos en este apéndice.

Para mayor claridad, se han separado estos contenidos en secciones diferenciadas. Aunque el apéndice mantiene una numeración común en todas las secciones, se ha utilizado una etiqueta diferente para cada una: la numeración de cada resultado va precedida por una letra mayúscula, a saber: **A**, para *una variable real*; **C**, para *variable compleja*; y **D**, para *desigualdades*.

Cálculo Infinitesimal

A continuación, se incluyen resultados de cálculo infinitesimal en una variable real. Estos son básicos para el estudio de la función Gamma en la recta real, realizado en el [capítulo 2](#). En su gran mayoría, han sido extraídos de [\[GST03\]](#). Para más detalles, el lector interesado puede consultar esta referencia.

Definición A.1 (Parte entera de un número real). Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único $m \in \mathbb{Z}$ verificando:

$$m \leq x < m + 1.$$

APÉNDICE

Dicho entero m se denomina *parte entera* de x , y se denota por $[x]$ o $E(x)$.

Analíticamente, podemos introducir la siguiente definición:

Definición A.2 (Función parte entera). Dado $x \in \mathbb{R}$, se define la función parte entera de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto m \equiv [x] := \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.\end{aligned}$$

Observaciones A.3.

- (i) En otras palabras, la función parte entera devuelve el mayor número entero no superior a x .
- (ii) En algunos textos de análisis se designa a la función parte entera definida anteriormente como función “suelo”, denotada por $[\cdot]$. En analogía con esta, existe la llamada función “techo”, con su correspondiente notación $\lceil \cdot \rceil$. En nuestro trabajo se utilizará únicamente la función “suelo”.
- (iii) Hay otros libros en los que la “función parte entera” no se define como en este apéndice, sino que se hace a trozos, a partir de las funciones suelo y techo. Sin embargo, en nuestro caso se utilizará exclusivamente la [definición A.2](#).
- (iv) Es importante tener en cuenta cómo se aplica la función parte entera a números negativos. Por ejemplo, la parte entera del número $-3,5$ es -4 , y no -3 . Escribir $[-3,5] = -3$ es un error habitual. Pero, con nuestra definición, lo correcto es escribir:

$$[-3,5] = -4.$$

Proposición A.4 (Convergencia de sucesiones).

Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces es convergente si, y sólo si, es acotada. Además, su límite es:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si la sucesión es creciente.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si la sucesión es decreciente.

Proposición A.5 (Suma de una serie telescópica).

Se denomina *serie telescópica* a aquella que puede escribirse como $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$. La suma de una serie telescópica se calcula como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1},$$

siempre que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ exista.

Teorema A.6 (Criterio del sándwich). Sean f, g y h funciones reales definidas en un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$, y sea a un punto de acumulación de A . Si las funciones f y h tienen límite l en el punto a , y además

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \text{para cada } x \in A,$$

entonces g tiene límite en a , y vale l .

Como es conocido de la asignatura de *Topología*, el siguiente resultado admite una generalización en términos de espacios topológicos y compacidad. Pese a ello, para nuestra exposición nos basta enunciar su versión simplificada, en la recta real.

Teorema A.7 (de **Weierstrass**). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo cerrado y acotado, $[a, b]$. Entonces f alcanza sus extremos absolutos en dicho intervalo. Es decir, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema A.8 (Fórmula de integración por partes). Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un mismo intervalo. Entonces:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Observación A.9. La fórmula de integración por partes se suele escribir de forma más compacta como:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

APÉNDICE

Análogamente, para el caso de integrales definidas:

Teorema A.10 (Fórmula de integración por partes para integrales definidas). Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ con primitivas F y G , respectivamente. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_a^b F g &= \left[F G \right]_a^b - \int_a^b f G = \\ &= F(b) G(b) - F(a) G(a) - \int_a^b f G.\end{aligned}$$

Alternativamente, con la notación simplificada:

$$\int_a^b u dv = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b v du.$$

Los dos siguientes resultados han sido extraídos de [GST03, pág. 319].

Teorema A.11 (Criterio de comparación). Sean f y g funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a, b)$, tales que existe $c \in (a, b)$ de modo que:

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{para cada } x \in (c, b).$$

Entonces:

- i) Si $\int_a^b g$ converge, también converge $\int_a^b f$.
- ii) Si $\int_a^b f$ no converge, tampoco converge $\int_a^b g$.

Teorema A.12 (Criterio de comparación por cociente). Sean f y g dos funciones reales definidas y localmente integrables en un intervalo $[a, b)$, tales que existe $c \in (a, b)$ de modo que:

$$f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0, \quad \text{para cada } x \in (c, b).$$

Supongamos que existe (finito o infinito) el límite:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Entonces:

- i) Si $L \in (0, \infty)$, entonces las integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.
- ii) Si $L = +\infty$ y $\int_a^b g$ no converge, entonces $\int_a^b f$ no converge.
- iii) Si $L = 0$ y $\int_a^b g$ converge, entonces $\int_a^b f$ converge.

Teorema A.13 (Un criterio usual de convergencia). Sean a, b números reales con $a < b$, y $\theta \in \mathbb{R}$. Las integrales impropias

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\theta} \quad \text{y} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\theta}$$

son convergentes si, y sólo si, $\theta < 1$. En este caso, el valor de ambas integrales es:

$$\frac{(b-a)^{1-\theta}}{1-\theta}.$$

Apartado adicional. Derivabilidad de Γ real

El resultado buscado sobre la derivabilidad de la función Gamma real puede deducirse de diferentes formas. En nuestro caso, la prueba incluida se basa en el teorema de derivación bajo el signo integral. Cabe señalar que el citado teorema fue introducido, en su versión real, en la asignatura *Análisis Matemático*, de segundo curso del Grado en Matemáticas en la Universidad de Valladolid. Para más detalles sobre la demostración que vamos a presentar, puede consultarse [Gar14, pág. 34].

Una vía alternativa consiste en demostrar que la función $\log(\Gamma(x))$ es indefinidamente derivable, a partir de la expresión de Gamma como producto infinito. Por extensión, esta segunda demostración no se ha incluido en el presente apéndice. El lector interesado puede consultar dicha prueba en [Dun14, págs. 5-6].

Teorema adicional 1 (de derivación bajo el signo integral).

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida e I un intervalo de $\mathbb{R}$. Sea $f(\cdot, t)$ una función definida en X e integrable para todo $t \in I$. Se define:

$$F(t) := \int f(x, t) d\mu(x).$$

Sea $g \in L_1(\mu)$. Entonces, se tiene que:

1. Si $f(x, \cdot)$ es continua en t_0 para cada $x \in X$ y $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todos $x \in X$, $t \in I$, entonces la función F también es continua en t_0 .
2. Si para todo $x \in X$ la función $f(x, \cdot)$ es derivable en todo $t \in I$, y además, se cumple que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in I,$$

entonces F es derivable. Más aún, se tiene que:

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Teorema adicional 2 (Gamma como función real indef. derivable).

La función Γ es de clase $\mathcal{C}^\infty(0, +\infty)$. Más aún, se tiene que:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n dt.$$

Demostración. Tomemos como función $f(t, x)$ el integrando de Γ . Esto es, $f(t, x) = e^{-t} t^{x-1}$, función definida en $(0, +\infty)^2$.

En primer lugar, nótese que para cada $t > 0$ la función de una variable $f(t, \cdot) = f_t(\cdot)$ es trivialmente continua y derivable en $(0, +\infty)$.

Por otro lado, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, con $0 < \alpha < 1 < \beta < +\infty$, y $x \in [\alpha, \beta]$. Distingamos los casos $t \in (0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Dado $(t, x) \in (0, +\infty)^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = e^{-t} \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}) = e^{-t} t^{x-1} \log(t) = f(t, x) \log(t).$$

En estas condiciones, se tienen las siguientes acotaciones.

(i) $0 < t < 1$.

$$f(t, x) = e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1} \leq t^{\alpha-1}.$$

En consecuencia,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \underbrace{t^{\alpha-1} |\log(t)|}_{g_1(t)}.$$

(ii) $1 < t < +\infty$.

$$f(t, x) = e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{\beta-1}.$$

Por tanto,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \underbrace{e^{-t} t^{\beta-1} \log(t)}_{h_1(t)}.$$

Las cotas anteriores permiten concluir el caso $n = 1$. El caso n -ésimo se demuestra inmediatamente aplicando inducción sobre n . Nótese que las sucesivas derivadas parciales n -ésimas aumentan en una unidad el exponente del logaritmo. En consecuencia:

APÉNDICE

(i) $0 < t < 1$.

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t, x) \right| \leq \underbrace{t^{\alpha-1} |\log(t)|^n}_{g_n(t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $1 < t < +\infty$.

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t, x) \right| \leq \underbrace{e^{-t} t^{\beta-1} (\log(t))^n}_{h_n(t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $g_n(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0, 1)$ y $h_n \geq 0 \quad \forall t \in (0, 1)$, y ambas funciones son integrables en $(0, +\infty)$. Por tanto, resta aplicar a cada caso el [teorema de derivación bajo el signo integral](#), concluyendo el resultado buscado. Como última aclaración, téngase en cuenta que en esta demostración se han intercambiado los papeles de las variables x y t , respecto al enunciado del teorema de derivación bajo el signo integral. En consecuencia, a lo largo de la prueba hemos escrito ' $f(t, x)$ ' en lugar de ' $f(x, t)$ '. $\square$

Variable Compleja

En la presente sección del apéndice se recogen varios resultados de Variable Compleja. Precisamos de ellos en el [capítulo 3](#), para la construcción de la función Gamma en $\mathbb{C}$. El lector que necesite una exposición más detallada sobre estos, u otros resultados relacionados, podrá encontrarla en [\[AN04\]](#) o [\[GGST19\]](#).

Proposición C.16. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función continua en todo U y derivable en todos los puntos de U excepto quizá en una cantidad finita de ellos, $z_1, z_2, \dots, z_n$. Entonces, f es holomorfa en todo U .

Teorema C.17 (de **Weierstrass**). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U , que converge uniformemente en los compactos de U hacia la función f . Entonces:

- (i). La función f es holomorfa en U .
- (ii). Para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión de derivadas $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia $f^{(k)}$.

Teorema C.18 (Igualdad de derivadas logarítmicas).

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio. Sean f, g funciones meromorfas y no nulas en G , con $f \not\equiv 0$, $g \not\equiv 0$, y supongamos que $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$ en G . Entonces existe una constante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f = cg$ en G .

Demostración. Consideramos la función cociente $h := \frac{f}{g}$. Como f y g son funciones meromorfas en G , y $g \not\equiv 0$, entonces $h \in \mathcal{M}(G)$. Derivando h , tenemos:

$$\frac{h'}{h} = \frac{d}{dz} \log\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = 0.$$

Por tanto, $h' = 0$, lo cual implica que h es constante: $h(z) = c \in \mathbb{C}^*$. En consecuencia,

$$f(z) = cg(z), \quad \forall z \in G.$$

□

Definición C.19 (Tipos de singularidades). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. Si f es una función definida y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$, se dice que f presenta o tiene una *singularidad aislada* en el punto z_0 . En estas condiciones:

APÉNDICE

- I) Si existe y es finito $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, se dice que la singularidad es *evitable*.
- II) Si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, se dice que la singularidad es *polar* o que z_0 es un *polo* de la función f .
- III) Si la singularidad en el punto z_0 no es evitable ni polar, se dice que es *esencial*.

Proposición C.20 (Cálculo de residuos).

En las condiciones de la definición anterior, podemos calcular el residuo de f en z_0 como:

- (i) Singularidad evitable:

$$\text{Res}(f(z), z_0) = 0. \quad (\text{C.1})$$

- (ii) Polo de orden m :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^N f(z) \right]. \quad (\text{C.2})$$

- (iii) Polo simple, $m = 1$:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (\text{C.3})$$

Teorema C.21 (Caracterización de singularidades evitables). Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f una función holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Son equivalentes:

- (a) z_0 es una singularidad evitable de f .
- (b) Existe una función g holomorfa en U tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$.
- (c) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z_0, \varepsilon) \subset U$ y f está acotada en $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.
- (d) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Observación C.22. En la situación del enunciado anterior, si la singularidad z_0 es evitable, es claro que la función dada por

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in U \setminus \{z_0\}, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

es continua en U y holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. De este modo, según la [observación C.16](#), g es holomorfa en U . Así, la extensión por continuidad de f al punto z_0 proporciona una función holomorfa en todo el abierto.

Teorema C.23 (de **Liouville**). Sea f una función compleja definida y entera¹. Si f es acotada, es decir, si existe $M > 0$ con $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

¹ O sea, holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Modos de convergencia

A continuación, se recuerdan los diferentes modos de convergencia de series de funciones. En lo sucesivo, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ denotará una sucesión de funciones complejas en un conjunto no vacío X .

Definición C.24 (Convergencia puntual).

Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en un conjunto X es *puntualmente convergente* si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales de la misma es puntualmente convergente en X . En este caso, la función f definida en X por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

se denomina *función suma* de la serie y se suele denotar también, en un abuso de notación, por $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, esto es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

Definición C.25 (Convergencia uniforme). En las condiciones de la definición anterior, se dice que la serie *converge uniformemente* en X , o que la suma $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniforme en X , si la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en X .

Definición C.26 (Convergencia absoluta). Dada una serie de funciones complejas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en un conjunto X , si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es puntualmente convergente en X , se dice que la serie original es *absolutamente convergente* (de forma puntual) en X . Obviamente, toda serie absolutamente convergente es también puntualmente convergente.

Definición C.27 (Convergencia normal). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones complejas en un conjunto X . Se dice que la serie *converge normalmente* en X si existe una serie convergente de números reales no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f_n(x)| \leq m_n \quad \text{para cada } x \in X.$$

El modo de convergencia normal es más fuerte que los otros mencionados. Explícitamente, esto viene ilustrado por el *criterio mayorante de Weierstrass* o *criterio M*.

Proposición C.28 (Criterio M de **Weierstrass**). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones complejas en el conjunto X . Si la serie converge normalmente en X , entonces converge absolutamente y uniformemente en X .

Desigualdades notables

En esta sección final del apéndice se incluyen varias desigualdades de interés en el trabajo. Las tres primeras guardan relación con los conceptos de convexidad. La cuarta, y última, permite probar de manera directa² la convexidad logarítmica de la función Gamma real.

Teorema D.29 (Desigualdad de **Jensen** discreta). Una función real f , definida en un intervalo I es convexa en I si, y sólo si, para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in I$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$, con $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ se tiene que:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k). \quad (\text{D.4})$$

Equivalentemente, f es cóncava en I si, y sólo si, bajo las mismas condiciones, la desigualdad (D.4) se verifica en sentido contrario.

Demostración.

[$\Leftarrow$] Trivial. Tomando $n = 2$, se recupera la definición de función convexa.

[$\Rightarrow$] Razonamos por inducción. El caso $n = 1$ es trivial: $\alpha_1 = 1$, y se tiene que $f(x_1) \leq f(x_1)$. Para $n = 2$ se cumple por definición de convexidad. Lo suponemos cierto para $n-1$, y lo probamos para n . El término izquierdo de la desigualdad (D.4) puede expresarse como sigue:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_1 x_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k x_k\right) = (\Delta).$$

Si $\alpha_1 = 1$, hemos terminado: todos los demás coeficientes α_k son nulos, y la desigualdad es obvia. Si $\alpha_1 \neq 1$, entonces $1 - \alpha_1 \neq 0$, y podemos escribir:

$$\begin{aligned} (\Delta) &= f\left(\alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_1} x_k\right) \leq \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + (1 - \alpha_1) f\left(\sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_1} x_k\right) \leq \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + (1 - \alpha_1) \sum_{k=2}^n \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_1} f(x_k) = \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \sum_{k=2}^n \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k). \end{aligned}$$

□

² Véase la segunda demostración del [teorema 2.29](#).

APÉNDICE

Teorema D.30 (Desigualdad de las medias: *AM-GM*).

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$, n números no negativos. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\text{MA} \equiv \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \equiv \text{MG}. \quad (\text{D.5})$$

Más aún, la igualdad entre media aritmética (MA) y media geométrica (MG) se da si, y sólo si, todos los x_k , son iguales.

Este es un resultado clásico, probado en el primer curso del Grado en Matemáticas. Este resultado puede probarse de varias formas diferentes: por inducción, con técnicas básicas de cálculo infinitesimal, con la desigualdad de Jensen... Por su extensión, no incluimos esta prueba, sino la del siguiente resultado, que resulta más interesante para nuestro trabajo.

Teorema D.31 (Desigualdad de las medias ponderadas).

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$. Y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, +\infty)$, de modo que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. En estas condiciones, se verifica que:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}. \quad (\text{D.6})$$

Demostración. La prueba de este resultado es análoga a la demostración algebraica ([demostración 2](#)) de la [proposición 1.21](#). Dicho resultado establece que toda función log-convexa es convexa. En lugar de usar la concavidad de la función logaritmo, se utiliza la desigualdad de Jensen discreta para funciones cóncavas.

En primer lugar, cabe realizar algunas apreciaciones. Nótese que un peso $\alpha_k = 0$ no tiene influencia en la desigualdad. Por tanto, podemos asumir que todos los pesos son positivos. La condición de que todos los pesos α_k sumen 1 obliga a que todos ellos pertenezcan al intervalo $(0, 1)$, salvo en el caso trivial en que $k = 1$, pudiendo ser $\alpha_k = 1$. Por otro lado, si uno de los x_k es nulo, pero no todos lo son, la media geométrica es cero. En estas condiciones, la media aritmética es positiva, cumpliéndose la desigualdad. De esta forma, podemos asumir también que todos los x_k son positivos.

Seguidamente, tomemos $f \equiv \log$. Como el logaritmo es una función cóncava, podemos aplicar la desigualdad ([D.4](#)) en sentido contrario, de forma que:

$$\log\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k \log(x_k) = \sum_{k=1}^n \log(x_k^{\alpha_k}) = \log\left(\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}\right).$$

Como la función logaritmo es estrictamente creciente, se deduce que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k},$$

que es precisamente la desigualdad buscada. □

Teorema D.32 (Desigualdad de **Hölder**).

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $p, q \in (1, \infty)$ exponentes conjugados, es decir, que cumplen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sean $f \in L_p(\mu)$ y $g \in L_q(\mu)$. En estas condiciones, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (\text{D.7})$$

La expresión (D.7) es conocida como *desigualdad de Hölder*.

El resultado anterior fue presentado en la asignatura *Análisis Funcional*, de cuarto curso del Grado en Matemáticas en la Universidad de Valladolid, en el marco de los espacios de medida generales.

No obstante, para nuestro trabajo nos es suficiente con el caso real. En estas condiciones, la desigualdad de Hölder puede escribirse como:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{D.8})$$

Anexo. Repositorio

De acuerdo con lo mencionado en la introducción del trabajo, el presente anexo contiene información sobre los aspectos computacionales del mismo; en particular, sobre las representaciones gráficas.

En el repositorio de *GitHub* , el lector interesado podrá consultar las ilustraciones contenidas en el trabajo a su resolución original. Además de las propias imágenes, se han incluido los códigos informáticos empleados para su generación. Estos códigos son completamente funcionales, pudiendo ser copiados y ejecutados a conveniencia.

Con el objetivo de garantizar la transparencia y reproducibilidad del trabajo, se han incluido dos secciones con programas de $\text{\LaTeX}$ y *Mathematica*. Cada una contiene un *Minimal Working Example* (MWE), esto es, un código funcional de mínima longitud. Estos programas permiten generar, respectivamente, las gráficas de la función Gamma real, $\Gamma(x)$, y del módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$.

Para adaptarse a los márgenes del documento, algunas líneas de código ocupan dos líneas de texto. De esta forma, si se desean ejecutar los códigos que a continuación se muestran, deberán eliminarse los saltos de línea¹.

Sin más aclaraciones, se presenta el enlace al repositorio:

https://github.com/PabloGomezVillamayor/TFG_Gamma_PGV-Maths

¹ Estos saltos se han representado por pequeñas flechas $\rightarrow$, para facilitar su visualización.

L^AT_EX. Gamma en $\mathbb{R}$

```

\documentclass[tikz]{standalone}

% Mis paquetes
\usepackage{tikz}
\usepackage{pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.18}

% Mis colores
\definecolor{MiAzul}{RGB}{5,108,217}
\definecolor{MiNaranja}{RGB}{227,132,27}

\begin{document}

% Figura 2.1: Gamma real
\begin{tikzpicture}[scale=1]

\begin{axis}[
width=1\textwidth,
height=1\textwidth,
xmin = -4.9, xmax = 6.1,      %ymin = -3.5, ymax = 3.5,
restrict y to domain=-10:25,
axis lines = middle,
axis line style={-latex},
xlabel={\$x\$},
ylabel={\$ \Gamma(x) \$},      %enlarge x limits={upper={val=0.2}},
enlarge y limits=0.05,
x label style={at={(ticklabel* cs:1.00)}}, inner sep=5pt,
    ↳ anchor=north},
y label style={at={(ticklabel* cs:1.00)}}, inner sep=5pt,
    ↳ anchor=south east},
xtick = {-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5},
ytick = {2,6,24},
xticklabels = {\$-4\$, \$-3\$, \$-2\$, \$-1\$, \$0\$, \$1\$, \$2\$, \$3\$, \$4\$, \$5\$},
yticklabels = {\$2\$, \$6\$, \$24\$},
]

% Gamma para x > 0
\addplot[color=MiAzul, samples=1200, smooth, thick, domain = 0:6]
    ↳ gnuplot{gamma(x)};

```

```

% Gamma para x < 0
\foreach[evaluate={\N=\n-1}] \n in {0,...,-5}{%
\addplot[color=MiAzul, samples=555, smooth, thick,
domain = \n:\N] gnuplot{gamma(x)};

% Asíntotas
\addplot [domain=-20:30, samples=200, densely dotted, thin] (\N,
    ↪ x);
}

% Puntos (x,Gamma(x)), x = 1,...,5. Gamma(n)=(n-1)!

\addplot+[only marks, color=MiNaranja, mark=*] coordinates {(1,1)
(2,1) (3,2) (4,6) (5,24)};

\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}

```

Código 1: $\text{\LaTeX}$. Gráfica de la función Gamma real, $\Gamma(x)$. Ver figura 2.1.

Mathematica. Gamma en $\mathbb{C}$

```

Show[Plot3D[Abs[Gamma[x + I y]], {x, -5.5, 6}, {y, -6, 6},
    ↪ PlotPoints -> 500, PlotRange -> {0, 8}, ViewPoint -> {-2,
    ↪ -2, 1}, Boxed -> False, BoxRatios -> Automatic, PlotStyle
    ↪ -> Directive[Cyan, Specularity[Blue, 40]], AxesEdge ->
    ↪ {{-1, -1}, {-1, -1}, {1, -1}}, Mesh -> {{-5, -4, -3, -2,
    ↪ -1, -0, 1, 2, 3, 4, 5}, {-5, -4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3,
    ↪ 4, 5}, {-5, -4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, 4, 5}}, MeshStyle
    ↪ -> {Gray, Gray, Opacity[0.6]}, MeshFunctions -> {Min[#1,
    ↪ 2*(#1 + 2)] &, #2 &, #3 &}, RegionFunction -> Function[{x,
    ↪ y, z}, Abs[Gamma[x + I y]] <= 8], AxesLabel -> {Re[z],
    ↪ Im[z]}, PlotLabel -> Style[Abs[Gamma[z]], 21]], Boxed ->
    ↪ False, Background -> None]

```

Código 2: *Mathematica*. Gráfica del módulo de la función Gamma compleja, $|\Gamma(z)|$. Ver figura 3.1.

Bibliografía

- [AZ10] M. Aigner y G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. 4.^a ed. Springer-Verlag. Springer, 2010. DOI: [10.1007/978-3-642-00856-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00856-6). URL: [🔗](https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-00856-6) (<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-00856-6>) Última consulta: 06/07/2025 (Citado en pág. [68](#)).
- [Art64] E. Artin. *The Gamma Function* (“Einführung in die Theorie der Gammafunktion”, 1931). Inglés. Trad. del alemán por M. Butler. Holt, Rinehart y Winston, 1964 (Citado en págs. [2](#), [19](#), [20](#), [33](#), [54](#), [61](#)).
- [AN04] R. B. Ash y W. P. Novinger. *Complex Variables*. 2.^a ed. Dover. 2004. Versión electrónica disponible en la siguiente URL: [🔗](https://people.math.sc.edu/girardi/m7034/book/AshComplexVariablesWithHyperlinks.pdf) (<https://people.math.sc.edu/girardi/m7034/book/AshComplexVariablesWithHyperlinks.pdf>). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. [107](#)).
- [Ban78] S. B. Bank. «Some results on the Gamma function and other hypertranscendental functions». En: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*. Vol. 79. N.º 3, págs. 335-341. 1978. DOI: [10.1017/S0308210500019855](https://doi.org/10.1017/S0308210500019855). URL: [🔗](https://www.cambridge.org/core/journals/proceedings-of-the-royal-society-of-edinburgh-section-a-mathematics/article/abs/some-results-on-the-gamma-function-and-other-hypertranscendental-functions/8A86705994E60591A3AE8F0E89E88222) (<https://www.cambridge.org/core/journals/proceedings-of-the-royal-society-of-edinburgh-section-a-mathematics/article/abs/some-results-on-the-gamma-function-and-other-hypertranscendental-functions/8A86705994E60591A3AE8F0E89E88222>). Última consulta: 08/07/2025. (Citado en pág. [93](#)).
- [BK78] S. B. Bank y R. P. Kaufman. «A note on Hölder’s theorem concerning the gamma function». En: *Mathematische Annalen*. Vol. 232. N.º 1, págs. 115-120. Springer. 1978. DOI: [10.1007/BF01421399](https://doi.org/10.1007/BF01421399). URL: [🔗](https://link.springer.com/article/) (<https://link.springer.com/article/>

BIBLIOGRAFÍA

- 10.1007/BF01421399). Última consulta: 08/07/2025. (Citado en pág. 93).
- [BS13] N. Bourbaki y P. Spain. *Functions of a Real Variable* (“*Fonctions d’une Variable Reelle*”, 1982). Elements of mathematics. Springer Berlin Heidelberg. 2013. Libro de acceso libre², disponible en la siguiente URL: [🔗](https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-59315-4) (https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-59315-4). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. 61).
- [Dav59] P. J. Davis. «Leonhard Euler’s Integral: A Historical Profile of the Gamma Function: In Memoriam: Milton Abramowitz». En: *The American Mathematical Monthly*. Vol. 66. N.º 10, págs. 849-869. Mathematical Association of America (MAA). Dic. 1959. DOI: [10.2307/2309786](https://doi.org/10.2307/2309786). URL: [🔗](http://www.jstor.org/stable/2309786) (http://www.jstor.org/stable/2309786). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en págs. 52, 61, 96, 97).
- [DL19] P. Diaz y R. Labarca. *Función Gamma: Propiedades Clásicas e Introducción a su Dinámica*. IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). 2019. 32º Colóquio Brasileiro de Matemática. Puede consultarse en la siguiente URL: [🔗](https://impa.br/wp-content/uploads/2022/03/32CBM08_eBook.pdf) (https://impa.br/wp-content/uploads/2022/03/32CBM08_eBook.pdf). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en págs. 74, 96).
- [Die76] J. Dieudonné. *Treatise on Analysis* (“*Eléments d’Analyse, tome 2*”, 1974). Vol. 2. Academic Press. 1976. Este libro se encuentra disponible, de forma gratuita, en la plataforma *Internet Archive*. Consultar la siguiente URL: [🔗](https://archive.org/details/TreatiseOnAnalysisVolIII) (https://archive.org/details/TreatiseOnAnalysisVolIII). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. 32).
- [Dun14] P. Duncan. *The Gamma function and the Zeta function*. University of Chicago. 2014. URL: [🔗](https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Duncan.pdf) (https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Duncan.pdf). Última consulta: 14/05/2025. (Citado en pág. 104).
- [GGST19] F. Galindo, J. Gómez, J. Sanz y L. A. Tristán. *Guía práctica de variable compleja y aplicaciones*. Universidad de Valladolid, Universidad de León, 2019 (Citado en pág. 107).

² Los libros de la editorial Springer pueden descargarse de manera gratuita, a través de la licencia de la Universidad de Valladolid.

- [GST03] F. Galindo, J. Sanz y L. A. Tristán. *Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable real*. Thomson, 2003 (Citado en págs. 5, 99, 102).
- [Gar14] V. Garzón Sánchez. *Introducción al análisis y la geometría de las funciones convexas y aplicaciones: medidas y gradientes*. Universidad de Valladolid. 2014. URL: [🔗](https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/6337/TFM-G299.pdf) (https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/6337/TFM-G299.pdf). Última consulta: 14/05/2025. (Citado en pág. 104).
- [Hen77] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*. Inglés. Vol. 2. Wiley, 1977 (Citado en págs. 2, 63).
- [Kli23] M. D. Klimek. «A new entire factorial function». En: *The Ramanujan Journal*. Vol. 61. N.º 10, págs. 757-762. Springer. Mar. 2023. DOI: [10.1007/s11139-023-00708-2](https://doi.org/10.1007/s11139-023-00708-2). URL: [🔗](https://link.springer.com/article/10.1007/s11139-023-00708-2) (https://link.springer.com/article/10.1007/s11139-023-00708-2). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. 97).
- [Lus] P. Luschny. *Hadamard's Gamma Function*. URL: [🔗](https://www.luschny.de/math/factorial/hadamard/HadamardsGammaFunction.html) (https://www.luschny.de/math/factorial/hadamard/HadamardsGammaFunction.html) Última consulta: 07/07/2025 (Citado en pág. 97).
- [MZ22] J.-L. Marichal y N. Zenaïdi. *A Generalization of Bohr-Mollerup's Theorem for Higher Order Convex Functions*. Vol. 70. Developments in Mathematics. Springer. 2022. Libro de acceso libre (licencia UVa), disponible en la siguiente URL: [🔗](https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-95088-0.pdf) (https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-95088-0.pdf). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. 62).
- [Mar65] A. I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*. Inglés. Vol. 2. Prentice-Hall, 1965 (Citado en págs. 2, 63).
- [Mil97] C. Miller. «An Extension of Hölder's Theorem on the Gamma Function». En: *Israel Journal of Mathematics*. Vol. 97. N.º 1, págs. 183-187. 1997. DOI: [10.1007/BF02774035](https://doi.org/10.1007/BF02774035). URL: [🔗](https://link.springer.com/article/10.1007/BF02774035) (https://link.springer.com/article/10.1007/BF02774035). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. 93).
- [Rem98] R. Remmert. *Classical Topics in Complex Function Theory*. Inglés. Ed. Springer New York, 1998 (Citado en págs. 2, 63, 66, 88).

BIBLIOGRAFÍA

- [Rem96] R. Remmert. «Wielandt's Theorem About the Γ -Function». En: *The American Mathematical Monthly*. Vol. 103. N.º 3, págs. 214-220. Mathematical Association of America. Mar. 1996. DOI: [10.2307/2975370](https://doi.org/10.2307/2975370). URL: [✚ \(http://www.jstor.org/stable/2975370\)](http://www.jstor.org/stable/2975370). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. 88).
- [Riv04] J. J. Rivaud. «La Función Gama». En: *Miscelánea Matemática*. N.º 39, págs. 61-84. Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Ago. 2004. URL: [✚ \(https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.845bb0bf38e2dfc9.5269766175642e706466.pdf\)](https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.845bb0bf38e2dfc9.5269766175642e706466.pdf). Última consulta: 10/07/2025. (Citado en pág. 95).
- [Wik24] Wikipedia contributors. *Pseudogamma function*. Wikipedia. 2024. URL: [✚ \(https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudogamma_function\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudogamma_function) Última consulta: 07/07/2025 (Citado en pág. 97).
- [Wor12] P. Wormer. *Gamma function — Knowino*. 2012. URL: [✚ \(https://www.theochem.ru.nl/~pwormer/Knowino/knowino.org/wiki/Gamma_function.html#History\)](https://www.theochem.ru.nl/~pwormer/Knowino/knowino.org/wiki/Gamma_function.html#History) Última consulta: 07/07/2025 (Citado en pág. 4).

Índice de notación

La siguiente lista describe la terminología utilizada en el cuerpo del texto. Se incluye, junto a cada símbolo, su significado y la página en la que se introduce por primera vez.

Conjuntos

$\text{int}(X)$	Interior de un conjunto X . Pág. 10.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3 \dots\}$. Pág. 33.
$\mathbb{N}_0$	Conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Pág. 33.
$\mathbb{Z}_{\leq 0}$	Conjunto de los enteros no positivos: $\{0, -1, -2, -3 \dots\}$. Pág. 42.
$\mathbb{R}$	Cuerpo de los números reales. Pág. 33.
$\mathbb{R}_{>0}$	Conjunto de los números reales positivos: $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Pág. 40.
$\mathbb{R}_{<0}$	Conjunto de los números reales negativos: $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Pág. 40.
$\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$	Dominio de definición de la función Gamma real: $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Pág. 42.
$\mathcal{C}^0(X)$	Conjunto de las funciones continuas en X . Pág. 51.
$\mathcal{C}^k(X)$	Conjunto de las funciones k veces continuamente diferenciables ³ en X , con $k \in \mathbb{N}$. Pág. 51.
$\mathcal{C}^\infty(X)$	Conjunto de las funciones indefinidamente diferenciables ⁴ en X . Pág. 51.

³ Para funciones de una variable real, esto es: k veces diferenciables, y con derivada k -ésima continua.

⁴ También llamadas funciones *suaves*.

ÍNDICE DE NOTACIÓN

$\mathbb{C}$	Cuerpo de los números complejos. Pág. 63.
$\mathbb{C}^*$	Conjunto de los números complejos sin el cero: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pág. 69.
B_n	Bola cerrada, centrada en el origen y de radio $n \in \mathbb{N}$. $B_n = B_n(0) = \{z \in \mathbb{C} : z \leq n\}$. Pág. 65.
$\mathcal{H}(\Omega)$	Conjunto de las funciones holomorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pág. 66.
$\mathcal{H}(\mathbb{C})$	Conjunto de las funciones enteras, es decir, holomorfas en $\mathbb{C}$. Pág. 66.
$\mathcal{M}(\Omega)$	Conjunto de las funciones meromorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pág. 69.
$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$	Dominio de definición de la función Gamma compleja: $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Pág. 81.
$\mathbb{T}$	Semiplano <i>de la derecha</i> : $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Pág. 88.
$\mathbb{T}_r$	Semiplano definido por: $\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq r\}$. Pág. 89.
$\mathbb{L}_r$	Semiplano definido por: $\mathbb{L}_r := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq r\}$. Pág. 89.

Funciones

$\exp(x)$	Exponencial de un número real x . Se usarán las notaciones ‘ $\exp(x)$ ’ o ‘ e^x ’. Pág. 8.
$\log(x)$	Logaritmo natural o neperiano ⁵ de un número real positivo x . Lo denotaremos por ‘ $\log(x)$ ’ o ‘ $\ln(x)$ ’, indistintamente. Pág. 8.
$\log(z)$	Logaritmo de un número complejo z . Rama principal. $-\pi \leq \operatorname{Im}(\log(z)) < \pi$. Pág. 22.
$n!$	Factorial de un número natural. Pág. 34.
Γ	Función Gamma de Euler. Pág. 35.
Π	Función Pi de Gauss. Notación alternativa para la función Gamma. Pág. 39.
$[x], \lfloor x \rfloor$	Función parte entera de un número real x . Pág. 41.

⁵ Dicho de otro modo, “logaritmo en base e ”.

$\Delta(z)$ Función de Weierstrass. Pág. 78.

Constantes

γ Constante de Euler-Mascheroni. Pág. 71.

π Número Pi. Pág. 76.

Otros símbolos

X Punto $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$. Pág. 9.

$\overline{XY}$ Segmento que une los puntos $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Pág. 9.

$\bar{z}$ Conjugado del número complejo z . Pág. 78.

$\text{Re}(z)$ Parte real del número complejo z . Pág. 83.

$\text{Im}(z)$ Parte imaginaria del número complejo z . Pág. 88.

Índice de términos

Programas y siglas

AM-GM	17
<i>GitHub</i>	2, 115
LaTeX	2, 115
MA	112
MG	112
MWE	115
<i>Mathematica</i>	2, 64, 115

A

Anexo	2, 115
Análisis	
Funcional	113
Matemático	95, 98, 104
Real	98
Aplicaciones	
de Gamma	95
Apéndice	2
Artin	2

B

Banda vertical	87
----------------------	----

Bernoulli	4
Bibliografía	2
Bohr	4

C

Caracterización de singularidades evitables	108
Cero simple	67
Combinación lineal convexa	6
Componente conexa	30
Comportamiento asintótico	43, 44
Concavidad	112
Condiciones de Cauchy-Riemann	31, 32
Condición	
de convergencia de Cauchy	25
Constante de Euler-Mascheroni	71
Convergencia	
absoluta	24, 110
de sucesiones	100
normal	110
puntual	110
uniforme	27, 110
Convexidad	56

ÍNDICE DE TÉRMINOS

logarítmica 1, 33
véase: Función logarítmicamente
convexa

Criterio

de comparación 41, 102
por cociente 102
del sándwich 101
M de Weierstrass 110
usual de convergencia . 41, 103

Cálculo

de residuos 108
Infinitesimal 5, 99

Código informático 2, 115
en $\text{\LaTeX}$ 117
en *Mathematica* 117

D

Derivabilidad de Gamma en $\mathbb{R}$ 53,
104

Derivada logarítmica 69, 107

Desarrollo en fracciones simples 68

Desigualdad

de Hölder 55, 113
de Jensen discreta ... 111, 112
de las medias 112
de las medias generalizada 112
de las medias ponderadas 112

Dieudonné 32

Diferenciabilidad 53

Distribución

Beta 98
de Weibull 96
Gamma 95

Doble grado 95

Dominio de definición

de Gamma en $\mathbb{C}$ 81

de Gamma en $\mathbb{R}$ 42

E

Ecuación

diferencial 92
Funcional 98
funcional 42, 96, 98

Enlace (link) 62, 115

Espacio

de medida 104, 113
métrico 65
producto 31
topológicos 101
vectorial 6

Euler 1, 4, 35

véase también: Función Gamma
de Euler

F

Factorial 33, 34

de cero 34, 38

de Luschny 49

Función

analítica 29, 31
Beta 1, 97
constante 109
contadora de primos 39
convexa 6
cotangente 68
creciente 7, 10
cóncava 6
de Weierstrass 78
decreciente 10
derivable 53, 54
diferenciable 53

ÍNDICE DE TÉRMINOS

- digamma 97
- entera 66, 96
- estrictamente convexa .. 6, 12
- estrictamente creciente ... 113
- eventualmente convexa 62
- exponencial 8
- G de Barnes 97
- Gamma de Euler .. 35, 47, 80, 96, 98
- Gamma de Hadamard . 49, 96
- Gamma incompleta 97
- hipertrascendente 93
- holomorfa 30, 66, 107
- idénticamente nula 49
- indef. diferenciable 54
- log-convexa 15, 56
- logaritmo natural 8
- logarítmicamente convexa . 15
- meromorfa 69, 107
- parte entera 100
- Pi de Gauss 39
- poligamma 97
- pseudogamma . 49, 50, 52, 54, 96
 - entera 97
 - suave 53
 - suelo 100
 - techo 100
 - uniformemente continua ... 28
- Zeta de Riemann 1, 97
- Física 1, 95
 - Nuclear 96
- Fórmula
 - de integración por partes . 101
 - de reflexión de Euler 83
 - integral de Cauchy 31
- Gauss 1, 4, 39
 - véase también:* Función Pi de Gauss
- Generalización
 - del factorial 48
 - del teorema de Bohr-Mollerup 61
- Goldbach 4
- Grado
 - en Física 95
 - en Matemáticas 1, 61, 91, 104, 112, 113
- H**
- Hadamard 49, 96
 - véase:* Función Gamma de Hadamard
- Hankel 89
 - véase:* Integral de Hankel
- Hausdorff 92
- Henrici 2, 63
- Herglotz 68
- Hipervínculos 2
- Hipótesis de Riemann 98
- Holomorfía
 - bajo el signo integral 31
 - de productos infinitos 29
- Hölder 4, 92, 113
 - véase:* Teorema de Hölder, Desigualdad de Hölder
- I**
- Índice
 - de contenidos 2

ÍNDICE DE TÉRMINOS

de figuras 2
de notación 2
de términos 2

Inducción 25, 83, 92, 112

Integración por partes 37, 92

Integral
de Euler de segunda especie 89
de Hankel 89
divergente 40
gaussiana 91
impropia 21

Interpolación del factorial .. 47, 83

K

Klimek 97

Krull 62

L

Lebesgue 31

Legendre 4, 89

Log-convexidad 56, 96
véase: Función logarítmicamente
convexa, función log-convexa
de Gamma 54

Logaritmo
complejo 22
holomorfo 30
natural 8
neperiano 8, 71

Luschny 97

Límite
de Gauss 61, 86
de integración 97
finito 71

no nulo 22

M

Marichal 62

Markushevich 2, 63

Matemática 1, 91, 95, 97, 98

Mecánica Clásica 96

Miller 93

Modos de convergencia 110

Mollerup 4

Moore 92

Mínimo absoluto 12
de Gamma en $\mathbb{R}$ 56

N

Notación
de Gauss 39
de Legendre 39

Número
de permutaciones 34
de página (del TFG) 2
primo 39

O

Ostrowski 92

P

Parte entera 41, 99
véase: Función parte entera

Permutación 26

Polo	108
de orden m	108
simple	80, 86, 108
Probabilidad	98
Problema	
abierto	98
de unicidad	47
interpolatorio	47, 61
Producto	
infinito	22
vacío	34
Propiedad reproductiva	
en $\mathbb{C}$	83
en $\mathbb{R}$	37

R

Rama principal del logaritmo complejo	22
Recta real	99
Remmert	2, 63
Repositorio	2, 115
Representación	
de Gauss	86
de Weierstrass	80
gráfica	2
integral de la función Zeta ..	98
Representación gráfica	64
en L ^A T _E X ..	7, 9, 13, 14, 46, 50, 52, 57, 72, 73, 75
en <i>Mathematica</i>	64, 81–83
Residuo	86, 108
de Gamma	85
Riemann	1, 26, 98
<i>véase:</i> Función Zeta de Riemann	

S

San Bourbaki	61
Semiplano derecho	88
Serie	22
armónica	71
de funciones	110
telescópica	66, 101
Singularidad	
aislada	107
esencial	108
evitable	108
polar	108
<i>véase:</i> Polo	
Springer	62
Subconjunto	
acotado	28
compacto	29
Subespacio medible (Lebesgue)	31
Suma de Riemann	72
Superfactorial	97

T

Teorema	
de Bohr-Mollerup ...	1, 57, 96
de Bohr-Mollerup-Artin ...	61
de derivación bajo signo integral	104
de derivación de integrales paramétricas de Leibniz ..	31
de factorización de Weierstrass	66
de Fubini	31
de holomorfía bajo el signo integral	31, 89, 90

ÍNDICE DE TÉRMINOS

de Hölder	92
de Liouville	88, 109
de reordenación de series de Riemann	26
de unicidad	88, 91
de Weierstrass (clásico) ...	101
de Weierstrass (holomorfía) 30, 107	
de Wielandt	1, 63, 88, 91
Teoría	
de funciones	97
de Números	98
Topología	101

U

Universidad de Valladolid ..	1, 61, 62, 104, 113
------------------------------	------------------------

V

Variable Compleja .	1, 31, 99, 107
Volumen de una n -esfera	95

W

Webster	62
Weierstrass	4, 66
Wielandt	4, 88

Z

Zenaïdi	62
---------------	----

