



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

VALORACIÓN NUMÉRICA DE DERIVADOS FINANCIEROS

Autora: Noemí Alonso Sanz

Tutor: Víctor Gatón Bustillo

2024/2025

Índice general

Resumen	5
Agradecimientos	7
Introducción	9
1. Mercados Financieros y Productos Derivados	11
1.1. Fundamentos de Matemática Financiera	11
1.2. Derivados financieros	14
1.2.1. Opción Europea	14
1.2.2. Opción Americana	14
1.2.3. Opción Barrera	15
1.2.4. Opción Asiática	16
2. Modelización Matemática	17
2.1. Modelización Probabilística de Mercados Financieros	17
2.2. El Modelo de Black-Scholes	22
2.2.1. La Fórmula de Black-Scholes	26
2.2.2. La EDP de Black-Scholes	31
2.2.3. Condiciones frontera para el modelo de Black-Scholes	33
3. El Método de Elementos Finitos	35
3.1. Fundamentos de Análisis Funcional para el MEF	36
3.2. El Método Galerkin	44
3.3. El Problema Variacional de Black-Scholes	47
4. Experimentos numéricos	51
4.1. Esquema numérico y discretización	51
4.1.1. Funciones base	52
4.1.2. Formulación matricial del problema	54
4.2. Valoración numérica de la Opción Europea	59

4.3. Valoración numérica de la Opción Americana	61
4.4. Valoración numérica de la Opción Barrera	63
Conclusiones	67
Bibliografía	69

Resumen

La valoración precisa de derivados financieros posee una gran relevancia para la gestión efectiva de riesgos y la toma de decisiones en los mercados financieros. Este trabajo se enfoca en el análisis numérico de dichos derivados mediante la formulación variacional de la ecuación de Black-Scholes y su resolución a través del método de elementos finitos. Para ello, se describe cómo se plantea la modelización probabilística de la dinámica de los activos del mercado y las herramientas que conducen a la obtención de una ecuación en derivadas parciales totalmente determinista.

Mediante experimentos realizados en MATLAB R2022a, se estudian diferentes tipos de opciones Put: europea, americana y barrera. En el caso de la Put europea, se evalúa el error de discretización para confirmar el orden de convergencia del método. Para las opciones americana y barrera, se ajustan las condiciones del modelo para reflejar sus particularidades.

Los resultados obtenidos evidencian la eficacia y versatilidad del enfoque numérico propuesto, especialmente en contextos donde no existen soluciones analíticas explícitas.

Abstract

Accurate pricing of financial derivatives plays a crucial role in effective risk management and decision-making within financial markets. This work focuses on the numerical analysis of such derivatives through the variational formulation of the Black-Scholes equation and its solution via the finite element method. Starting from a deterministic framework, a time discretization scheme based on the implicit Euler method is implemented.

Using simulations performed in MATLAB R2022a, various types of Put options are studied: European, American, and barrier options. For the European Put, the discretization error is assessed to verify the convergence order of the method. For the American and barrier options, the model conditions are adapted to reflect their specific features.

The results demonstrate the effectiveness and flexibility of the proposed numerical approach, particularly in scenarios where explicit analytical solutions are not available.

Agradecimientos

A mis padres, Isabel y Jesús, y a mi familia, por creer en mí incluso cuando yo misma dudaba. Gracias por hacerme sentir vuestro amor tan cerca y por transmitirme los valores del esfuerzo, el sacrificio y la constancia.

A mi tutor, Víctor Gatón, por su generosidad y dedicación a lo largo de todo este trabajo. Le agradezco sinceramente la paciencia, el apoyo y la amabilidad con la que siempre me ha acompañado.

A mis compañeros y amigos, por la confianza, la complicidad y el cariño que han compartido conmigo durante todos estos años. Y a Granada, por ser hogar lejos de casa.

A mis profesores, por su compromiso y dedicación a la enseñanza. Gracias por compartir sus conocimientos con pasión y entusiasmo, y por despertar en mí la curiosidad y las ganas de seguir aprendiendo.

A Marta, por ser verano en invierno. Gracias por su forma de cuidar, compartir y hacer reír sin esfuerzo.

Y a Tara, mi perrita, por recordarme cada día la importancia de una mirada sincera y una alegría sencilla.

Valladolid, 13 de julio de 2025.

Introducción

Los derivados financieros desempeñan un papel central en los mercados contemporáneos, tanto por su capacidad para gestionar el riesgo como por su versatilidad para diseñar estrategias complejas de inversión en entornos dinámicos. Estos instrumentos permiten vincular compromisos económicos al comportamiento futuro de distintos activos, ofreciendo así soluciones adaptables sin necesidad de intervención directa sobre el activo subyacente. Esta propiedad los convierte en herramientas esenciales para agentes que buscan estabilidad, eficiencia o rentabilidad en contextos de incertidumbre.

Más allá de su uso como cobertura ante riesgos adversos, los derivados permiten desarrollar estructuras de inversión sofisticadas, facilitar operaciones financieras y dotar de liquidez a mercados especializados. Sectores tan diversos como la energía, las materias primas, los tipos de interés o el crédito recurren a estos contratos como parte integral de su funcionamiento. Su presencia, tanto en entornos financieros tradicionales como en mercados emergentes, refleja una utilidad transversal que va más allá del simple afán especulativo.

A pesar de que su desarrollo formal y su regulación en mercados organizados son logros relativamente recientes, la lógica económica sobre la que se sustentan los derivados tiene antecedentes históricos notables. Desde la antigüedad, las sociedades han generado mecanismos contractuales para gestionar riesgos compartidos, anticiparse a hechos inciertos y estabilizar relaciones comerciales. Lejos de representar una innovación puramente moderna, los derivados actuales pueden entenderse como la evolución natural y tecnificada de dichas prácticas.

Un ejemplo especialmente revelador se encuentra en el Imperio Romano, donde ya se utilizaban contratos con una sorprendente afinidad conceptual respecto a los instrumentos modernos. Entre ellos destaca la *venditio rei speratae*, o "venta de una cosa esperada", mediante la cual una parte se comprometía a entregar un bien aún no existente —por ejemplo, una cosecha futura— con la condición de que llegase a producirse. Esta figura anticipa claramente el funcionamiento de los contratos forward, que fijan en el presente las condiciones para una transacción

futura.

Una modalidad aún más audaz era la *venditio spei*, o "venta de una esperanza", en la que el comprador aceptaba explícitamente el riesgo de que el bien nunca llegase a existir. Se trataba, por ejemplo, de adquirir el derecho sobre una pesca futura, sin certeza alguna de que esta tuviera lugar. Esta lógica de asumir riesgos asociados a eventos inciertos guarda estrecha relación con los derivados exóticos actuales, cuyos pagos pueden depender de condiciones complejas o discontinuas.

Lo más destacable es que la jurisprudencia romana no solo reconocía estos contratos, sino que los regulaba con criterios de validez, riesgo y equidad que siguen siendo relevantes hoy en día. Temas como la distribución del riesgo, la exigibilidad de las obligaciones o la protección del comprador fueron objeto de reflexión legal en el siglo I d.C., evidenciando una madurez jurídica notable para su tiempo.

Estos antecedentes históricos refuerzan la idea de que los derivados financieros responden a una necesidad constante en las relaciones económicas: convertir la incertidumbre en compromisos estructurados, racionales y verificables. Su evolución ha sido más una cuestión de complejidad técnica que de cambio conceptual.

En la actualidad, esta evolución alcanza su máxima expresión dentro de un sistema financiero globalizado, caracterizado por la interdependencia de los mercados, la abundancia de datos y la velocidad de las transacciones. Los derivados permiten diseñar productos altamente especializados para gestionar riesgos complejos, replicar comportamientos financieros no triviales y optimizar decisiones de inversión con base en modelos cuantitativos.

Desde una perspectiva teórica, su estudio ha impulsado el desarrollo de herramientas avanzadas en campos como la probabilidad, las ecuaciones en derivadas parciales o los métodos numéricos. Por ejemplo, el modelo de Black-Scholes, seguramente uno de los modelos más famosos, ofrece una fórmula explícita para valorar opciones europeas, integrando la teoría estocástica de las Matemáticas en el análisis financiero de una forma sistemática y rigurosa.

Capítulo 1

Mercados Financieros y Productos Derivados

En el ámbito de las finanzas cuantitativas, un *mercado financiero* se entiende como un espacio, físico o virtual, en el que se intercambian activos e instrumentos financieros, facilitando la asignación eficiente de recursos, la cobertura frente a riesgos y la formación de precios a través de la interacción entre distintos agentes económicos. Estos mercados permiten canalizar el capital desde unidades con capacidad de ahorro hacia aquellas con necesidad de financiación, y su estudio exige herramientas matemáticas que modelen de forma precisa el comportamiento incierto y dinámico de los activos involucrados.

El propósito de este capítulo es presentar los principios básicos de la matemática financiera que sustentan la definición y el análisis de los derivados financieros, con el fin de construir un marco conceptual sólido para su estudio posterior.

Para complementar los conceptos expuestos a continuación y ampliar la comprensión sobre el funcionamiento de los mercados financieros y los productos derivados, resulta útil consultar [15], que ofrece una perspectiva detallada desde el enfoque de las finanzas cuantitativas.

1.1. Fundamentos de Matemática Financiera

Definición 1.1. Un *activo (financiero)* es un derecho contractual que confiere a su titular la posibilidad de recibir ingresos futuros por parte del emisor o vendedor.

Entre los activos más comunes se encuentran acciones, bonos, divisas y materias primas. Matemáticamente, el precio unitario del activo para un instante de

tiempo t se suele denotar mediante $S(t)$.

Definición 1.2. Un *instrumento financiero* es cualquier contrato que da lugar a un activo financiero para una de las partes y a un pasivo financiero (deuda u obligación contractual) para la otra.

Definición 1.3. Una *posición larga* es una estrategia de inversión que implica la adquisición de un activo con la expectativa de que su valor aumente en el futuro.

Nota. Esta estrategia se basa en la creencia de que el mercado o el activo en particular se comportará de manera favorable, permitiendo al inversor obtener beneficios al vender el activo a un precio superior al de su compra.

Definición 1.4. Una *posición corta* es una estrategia en la que el inversor vende un activo que no posee, anticipando una caída en su valor, con el objetivo de recomprarlo posteriormente a un precio inferior.

Definición 1.5. Una *cartera de inversión* o *portfolio* es una combinación ponderada de activos y pasivos financieros que un agente económico mantiene con el objetivo de maximizar el rendimiento esperado, sujeto a un nivel determinado de riesgo. Formalmente, se puede representar mediante un vector de ponderaciones, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, donde cada w_i denota las cantidades invertidas en el activo i -ésimo. El valor de la cartera en el tiempo t viene dado por

$$V(t) = \sum_{i=1}^n w_i S_i(t).$$

Desde el punto de vista matemático, se utiliza $S_i(t)$ para denotar el precio del instrumento financiero i en el instante temporal t , siendo $S_i(t) \geq 0$ y donde, en general, un activo se corresponde con un valor $w_i > 0$, mientras que un pasivo con $w_i < 0$.

Aunque no se trate explícitamente en este TFG, la composición de la cartera puede ser diseñada considerando restricciones relacionadas con la rentabilidad esperada, la liquidez disponible y la tolerancia al riesgo del inversor.

Definición 1.6. Una *acción* representa una parte del capital social de una empresa. Al comprar una acción, un inversor adquiere una porción de la propiedad de la empresa y se convierte en *accionista*, con ciertos derechos y responsabilidades sobre la misma.

Las acciones son instrumentos de renta variable, lo que significa que su valor puede fluctuar en el mercado de forma impredecible a lo largo del tiempo.

Definición 1.7. Un *dividendo financiero* es la distribución de una parte de las ganancias netas de una empresa entre sus accionistas, como recompensa por su inversión y participación en el capital social.

Esta distribución puede efectuarse en efectivo o mediante la entrega de acciones adicionales, y generalmente se realiza de forma periódica.

Definición 1.8. Se denomina *volatilidad* a la medida estadística, usualmente expresada como la desviación estándar de los rendimientos, que cuantifica la magnitud de las fluctuaciones en el precio de un activo financiero durante un periodo de tiempo determinado.

Una alta volatilidad indica que el precio del activo fluctúa rápida y ampliamente, mientras que una baja volatilidad sugiere movimientos de precio más suaves o de menor intensidad.

Finalmente, conviene introducir dos conceptos que ayudan a comprender mejor el funcionamiento de los mercados financieros: el *riesgo* y el *arbitraje*.

En términos formales, el riesgo financiero se define como la posibilidad de que se produzcan eventos no predecibles con antelación de forma determinista que ocasionen pérdidas económicas o reduzcan el valor de una inversión o de una empresa. Estos eventos pueden deberse a factores como las fluctuaciones de los mercados financieros, el incumplimiento de obligaciones de pago o cambios en las condiciones económicas. En esencia, el riesgo representa la incertidumbre asociada al resultado económico de una decisión o actividad.

Por otro lado, el arbitraje financiero se define como la práctica de comprar un activo en un mercado y venderlo simultáneamente en otro mercado (o en el mismo mercado en diferentes momentos) a un precio más alto, obteniendo una ganancia segura de la diferencia de precio. Así definido, el arbitraje se trata de una estrategia que, sin requerir inversión inicial alguna, y operando en un entorno incierto (donde la evolución futura es desconocida), permite obtener un beneficio positivo con riesgo nulo.

En la modelización matemática de los mercados se asume ausencia de arbitraje. Esta hipótesis es bastante razonable desde un punto de vista lógico y económico. Una obtención segura de ganancias implica la existencia de una contraparte que sufre una pérdida segura, hecho que va en contra de la racionalidad de los mercados.

1.2. Derivados financieros

Definición 1.9. Un *derivado financiero* es un contrato cuyo valor depende, de forma directa o indirecta, de la evolución del precio de uno o más activos subyacentes. Estos activos pueden ser acciones, índices, tipos de interés, divisas, materias primas o, incluso, otros derivados.

Definición 1.10. Una *opción* es un contrato derivado que otorga a su titular el derecho, pero no la obligación, de comprar (*Call*) o vender (*Put*) un activo subyacente a un precio determinado, denominado *precio de ejercicio* o *strike*, en una fecha futura o hasta una fecha límite previamente establecida, denominada vencimiento y denotada por T . A cambio de este derecho, el comprador de la opción paga una prima al vendedor de la misma, quien asume la obligación correspondiente en caso de que la opción sea ejercida.

En lo sucesivo en este trabajo, se denota al precio de ejercicio o strike por K .

Existen distintos tipos de opciones según sus características y condiciones contractuales. A continuación, se describen brevemente algunas de las más habituales.

1.2.1. Opción Europea

La opción europea, se caracteriza por el hecho de que sólo puede ser ejercida en una fecha específica, denominada *fecha de vencimiento*, que se suele denotar por T . El pago en el vencimiento o *payoff* para el caso de una Call Europea es

$$C(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$$

mientras que para la Put Europea:

$$P(T) = \max\{K - S(T), 0\}.$$

Las opciones europeas son denominadas *opciones vainilla*, debido a su estructura estándar y a ser ampliamente utilizadas en los mercados financieros.

1.2.2. Opción Americana

La opción americana se diferencia de la europea en que puede ser ejercida en cualquier momento dentro del intervalo temporal $[0, T]$. Esta característica proporciona mayores derechos al comprador y, en consecuencia, el valor de una opción americana suele ser mayor o igual que el de su equivalente europea.

Por tanto, en un instante cualquiera de tiempo $t \in [0, T]$, debe verificarse:

$$C(t) \geq \max\{S(t) - K, 0\},$$

para la Call Americana. Asimismo, en el caso de la Put debe verificarse:

$$P(t) \geq \max\{K - S(t), 0\}.$$

1.2.3. Opción Barrera

La opción barrera es una variante de las opciones europeas, en las que el derecho de ejercicio está condicionado a que el precio del activo subyacente haya cruzado un determinado nivel durante la vida del contrato. Este nivel, denominado *barrera*, puede activar (knock-in) o desactivar (knock-out) la opción según el tipo de contrato acordado.

Sea $t = 0$ el momento en el que se negocia la opción barrera sobre el activo S y sean $X_u, X_d \in \mathbb{R}^+$ valores fijos tales que

$$X_d < S(0) < X_u.$$

Según la dirección del cruce y su efecto sobre la opción, se distinguen cuatro tipos de contratos barrera:

- **Up-and-out:** la opción se desactiva y vence sin valor si, en algún momento antes del vencimiento, el precio del subyacente alcanza la barrera X_u desde un valor inferior.

Es decir, no valdrá nada si $\exists t_0 \in (0, T] / S(t_0) \geq X_u$.

- **Down-and-out:** la opción queda anulada si el precio del subyacente cruza la barrera X_d desde un valor superior antes del vencimiento.

Es decir, no valdrá nada si $\exists t_0 \in (0, T] / S(t_0) \leq X_d$.

- **Up-and-in:** la opción solo se activa si el precio del subyacente alcanza la barrera X_u desde abajo durante la vida del contrato; en caso contrario, no tiene validez ni genera pago.
- **Down-and-in:** la opción únicamente entra en vigor si el precio del subyacente cruza la barrera X_d desde arriba antes del vencimiento; si esto no ocurre, la opción vence sin valor.

1.2.4. Opción Asiática

La opción asiática es un tipo de derivado, estilo opción europea, pero cuyo valor de ejercicio en el vencimiento depende del promedio del precio del activo subyacente durante un intervalo temporal previo a la fecha de vencimiento, en lugar de basarse únicamente en el precio del activo en $t = T$. Este promedio puede calcularse mediante diferentes métodos, como la media aritmética o geométrica, y puede realizarse de forma continua o discreta, lo que afecta al valor y comportamiento del contrato.

Por ejemplo, si se considera un promedio continuo definido como

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau,$$

los distintos tipos de contratos que se pueden encontrar y sus payoffs correspondientes son, para $A = A(T)$,

- **Average strike call:**

$$\phi(S, A) = \max\{S(T) - A, 0\}.$$

- **Average strike put:**

$$\phi(S, A) = \max\{A - S(T), 0\}.$$

- **Average rate call:**

$$\phi(S, A) = \max\{A - K, 0\},$$

para un cierto precio de ejercicio K .

- **Average rate put:**

$$\phi(S, A) = \max\{K - A, 0\},$$

para un cierto precio de ejercicio K .

Capítulo 2

Modelización Matemática

2.1. Modelización Probabilística de Mercados Financieros

En el ámbito financiero, la modelización estocástica es una herramienta fundamental para intentar comprender y describir la evolución de los precios de los activos. Dado que la incertidumbre es un elemento central en los mercados, es indispensable desarrollar un marco matemático que capture con precisión su comportamiento dinámico.

El objetivo de esta sección es proporcionar los conceptos teóricos necesarios para modelar adecuadamente los precios de los activos financieros y establecer métodos eficaces para su valoración. Estos fundamentos servirán como base para la valoración numérica de opciones exóticas, que se tratará en capítulos posteriores, y donde, tras su implementación, se analizarán los resultados obtenidos.

Un desarrollo más detallado de los resultados expuestos a continuación se puede consultar en [3]. Asimismo, se recomiendan [2], [10] y [11] como fuentes complementarias.

Definición 2.1. Sea Ω un conjunto arbitrario. Se dice que un subconjunto no vacío $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ -álgebra de Ω si satisface:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ (cerrado bajo complementarios).
3. Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ (cerrado bajo uniones numerables).

Definición 2.2. Un *espacio de probabilidad* es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω es el conjunto de todos los sucesos elementales, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ -álgebra de Ω y P es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$.

Definición 2.3. Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice que es *completo* si dado $B \subset A \in \mathcal{F}$ con $P(A) = 0$ se tiene que $B \in \mathcal{F}$.

A partir de este punto, se asume que todos los espacios de probabilidad considerados son completos.

Definición 2.4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una *filtración* es una familia de σ -álgebras $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ tales que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$, donde $0 \leq s \leq t \leq T$.

Definición 2.5. Un *espacio de probabilidad filtrado* es un espacio de probabilidad dotado de una filtración $\mathbb{F}$, y se representa mediante $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$.

Definición 2.6. Se denomina $\mathbb{T}$ al conjunto de índices temporales que representan los instantes en los que se observa o evalúa un determinado fenómeno a lo largo del tiempo.

Dependiendo de si $\mathbb{T}$ es numerable o no, se tiene un proceso *en tiempo discreto* o un proceso *en tiempo continuo*, respectivamente.

En lo sucesivo, se emplearán modelos en tiempo continuo, es decir, $\mathbb{T} = [0, T]$.

Definición 2.7. Un *proceso estocástico* X es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ y con llegada en $\mathbb{R}^n$.

Observación 1. A P se le suele llamar la *medida física de probabilidad*.

Observación 2. Se asume que los procesos estocásticos, entendidos como aplicaciones $\Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$, van a ser $\mathcal{F} \otimes \beta(\mathbb{T}) | \beta(\mathbb{R}^n)$ -medibles, donde $\beta(\cdot)$ denota la σ -álgebra de Borel.

En lo referido a procesos estocásticos, se adopta X_t para denotar $X(t)$. En adelante, se utilizarán ambas notaciones indistintamente.

Definición 2.8. Sea X una variable aleatoria real. Decimos que X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ , lo que se expresa como $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si su función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Definición 2.9. Un *movimiento browniano* o *proceso de Wiener* es un proceso estocástico $W = \{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ que verifica:

1. $W(0) = 0$
2. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$, $s < t$.
3. Si $r < s \leq t < u$, entonces $W(u) - W(t)$ y $W(s) - W(r)$ son variables estocásticas independientes.
4. La trayectoria de W es continua.

El planteamiento es describir la dinámica de un activo como un proceso X_t que se aproxima localmente por un término determinista y otro de naturaleza aleatoria (modelizado por un proceso de Wiener). La ecuación estocástica que rige la dinámica es:

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW(t), \\ X(0) = a, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\mu(X_t, t)$, conocido como *drift*, representa la tendencia determinista del proceso, mientras que $\sigma(X_t, t)$, conocido como el término de difusión, captura la magnitud de la componente aleatoria. A este último se le identifica con la *volatilidad de los retornos* en el ámbito económico.

El sistema (2.2) también se puede expresar en su forma integral

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW(s). \quad (2.3)$$

Definición 2.10. Sea X un proceso estocástico. $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}$ denota la σ -álgebra generada por $\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, es decir, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$.

Sea Y otro proceso estocástico tal que $Y(t) \in \mathcal{F}_t^X$, $\forall t \geq 0$. Entonces se dice que Y está *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$.

Definición 2.11. Se dice que un proceso g pertenece a $L^2[a, b]$ si verifica:

1. $\int_a^b \mathbb{E}[g^2(s)] ds < \infty$,
2. El proceso g está adaptado a la $\mathcal{F}_t^W$ -filtración,

donde $\mathbb{E}$ denota la esperanza matemática.

Para procesos $g \in L^2[a, b]$ es posible definir integrales del tipo $\int_a^b g(s)dW(s)$, desarrollando el correspondiente cálculo diferencial, conocido como Cálculo de Itô. En [3] puede encontrarse una introducción bastante completa a estas herramientas matemáticas. Un desarrollo más riguroso y extenso puede consultarse en [10] y [11].

Definición 2.12. Se dice que un proceso X es una $\{\mathcal{F}_t\}$ -martingala si se verifican las siguientes propiedades:

1. X está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.
2. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty, \forall t$.
3. $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \forall s, t$ con $s \leq t$.

La primera condición establece que podemos observar el valor de $X(t)$ en el instante t , mientras que la segunda es simplemente una cuestión técnica. La condición verdaderamente importante es la tercera, que indica que la esperanza del valor futuro de X , dado el conjunto de información disponible hasta el presente, es igual al valor observado hoy de X .

La demostración de los siguientes resultados puede encontrarse en [3].

Proposición 2.13. Para cualquier proceso $g \in L^2[a, b]$ se cumple que:

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t g(u) dW(u) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] = 0.$$

Proposición 2.14. Para cualquier proceso $g \in L^2[a, b]$, el proceso X , definido como

$$X(t) = \int_0^t g(s) dW(s),$$

es una $\{\mathcal{F}_t^W\}$ -martingala.

Definición 2.15. Sea X un proceso estocástico. Se dice que X es un *proceso de Itô* si admite una representación de la forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s) ds + \int_0^t H(s) dW(s),$$

o en una notación más habitual:

$$dX_t = K(t)dt + H(t)dW_t,$$

donde K es un proceso adaptado a $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ tal que $\int_0^t |K(s)| ds < \infty$ y $H \in L^2[0, t]$, $\forall t \geq 0$.

Si un proceso de Itô admite dos representaciones distintas, entonces estas son idénticas casi seguro.

Definición 2.16. Sea W un movimiento Browniano. De ahora en adelante, S denotará un *proceso de Itô con drift* $\mu = \mu(S_t, t)$ y *volatilidad* $\sigma = \sigma(S_t, t)$, y su dinámica vendrá dada por

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t.$$

Lema 2.17 (de Itô). Sea S un proceso de Itô dado por

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t,$$

Si $f \in \mathcal{C}^{1,2}$, entonces $f(S_t, t)$ verifica

$$df(S_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial S} dW_t.$$

En la expresión anterior se ha omitido la dependencia explícita de las variables de las funciones involucradas por razones de claridad y legibilidad.

Demostración. La demostración formal requiere un desarrollo teórico más extenso que el planteado para los objetivos de este trabajo, por lo que se presenta una versión simplificada basada en [3]. Un tratamiento más riguroso y completo puede consultarse [10].

A partir del desarrollo de Taylor, tomando términos hasta orden dos se obtiene:

$$df(S, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial S} dt dS \quad (2.4)$$

Por definición,

$$dS_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t,$$

de donde se deduce que

$$(dS)^2 = \mu^2(dt)^2 + 2\mu\sigma(dt)(dW) + \sigma^2(dW)^2.$$

Por otro lado, para un proceso de Wiener se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

1. dW es una variable aleatoria con distribución normal.
2. $\mathbb{E}[dW] = 0$.
3. $\mathbb{E}[dW^2] = dt$

Además, el término $(dt)^2$ se puede despreciar por ser de orden dos. De esta forma, sustituyendo en (2.4) y agrupando términos adecuadamente se llega al resultado buscado:

$$df(S_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial S} dW_t$$

□

2.2. El Modelo de Black-Scholes

El desarrollo del modelo de Black-Scholes marcó un hito en el estudio de los mercados financieros. Publicado inicialmente en 1972 por Fischer Black y Myron Scholes en el artículo “The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency” ([4]), y culminado en 1973 con la famosa fórmula homónima en “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” ([5]), este modelo proporcionó, por primera vez, una solución teórica analítica para valorar opciones europeas, basándose en principios de no arbitraje y cobertura dinámica. La posterior contribución de Robert Merton, quien amplió y formalizó el enfoque mediante herramientas del cálculo estocástico, fue clave para consolidar el modelo como una de las piedras angulares de las finanzas cuantitativas.

La fórmula de Black-Scholes permite calcular el valor teórico de una opción europea utilizando variables observables del mercado como el precio del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo hasta el vencimiento, la volatilidad y la tasa de interés libre de riesgo. Su base teórica se apoya en la idea de replicar el comportamiento de una opción mediante una cartera compuesta por un activo sin riesgo y acciones.

El artículo original también tuvo un impacto importante en la discusión sobre la eficiencia del mercado, al poder contrastar empíricamente si los precios observados de las opciones reflejaban su valor teórico, en línea con la Hipótesis de los Mercados Eficientes (EMH). Esta relación entre teoría financiera y observación empírica posicionó al modelo como una herramienta tanto teórica como práctica.

Desde su publicación, el modelo de Black-Scholes no sólo ha transformado la forma en que se valoran y negocian los derivados financieros, sino que también ha

contribuido al crecimiento de una industria global basada en productos estructurados y estrategias de cobertura. En 1997, Myron Scholes y Robert Merton recibieron el Premio Nobel de Economía por este trabajo; Fischer Black, coautor original, no pudo ser premiado tras su fallecimiento en 1995.

En esta sección se explorarán los fundamentos teóricos del modelo de Black-Scholes, la derivación de su fórmula, sus principales supuestos y limitaciones, así como su relevancia dentro del contexto más amplio de las finanzas modernas.

Antes de abordar la derivación del modelo, conviene analizar las hipótesis sobre las que se construye, ya que de ellas depende tanto la validez de la fórmula como sus limitaciones prácticas. Estas hipótesis pueden encontrarse en [4].

1. Mercados perfectos y sin fricciones: No existen costes de transacción, impuestos, ni restricciones a la compra o venta de activos o de opciones en el mercado.
2. Volatilidad constante y conocida: La varianza del rendimiento del activo subyacente es constante a lo largo de la vida de la opción y conocida por todos los participantes del mercado.
3. Tasa de interés libre de riesgo constante y conocida: Existe una tasa de interés a corto plazo, conocida y constante durante toda la vida de la opción. Los inversores pueden pedir prestado o prestar fondos ilimitadamente a esta tasa.
4. Ausencia de dividendos: Se asume que el activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción, o bien que el tenedor de la opción está completamente protegido frente a los efectos que estos pagos pudieran tener sobre el valor de la opción.
5. Distribución log-normal de los precios del activo subyacente: Los precios del activo subyacente siguen un movimiento browniano geométrico (explicado más adelante), lo que implica que los rendimientos sobre intervalos finitos de tiempo son log-normalmente distribuidos.
6. Venta en corto sin restricciones: Los inversores pueden realizar ventas en corto de activos sin limitaciones, utilizando inmediatamente los fondos obtenidos.
7. Ausencia de arbitraje: No existen posibilidades de obtener beneficios libres de riesgo a partir de discrepancias en los precios de los activos.

Estas hipótesis conforman un marco idealizado que permite la formulación matemática del modelo y la derivación de su solución analítica. No obstante, en la práctica, algunas de estas condiciones no se cumplen estrictamente, lo que ha

impulsado el desarrollo de modelos más sofisticados que ajustan o relajan dichos supuestos con el objetivo de reflejar de manera más precisa el comportamiento real de los mercados financieros.

Nota. Aunque en este trabajo se asume que el mercado está compuesto por un activo libre de riesgo y una acción, el modelo se puede generalizar a un mercado con varios activos con riesgo S_i , $i = 1, \dots, n$.

Definición 2.18. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, y sean P y Q dos medidas definidas sobre él. Se dice que P y Q son medidas equivalentes, y se denota por $P \sim Q$, si para todo conjunto $A \in \mathcal{F}$ se verifica que:

$$P(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(A) = 0.$$

Es decir, la equivalencia entre dos medidas implica que ambas comparten los mismos conjuntos de medida nula.

Definición 2.19. Se dice que una medida de probabilidad Q definida sobre $\mathcal{F}$ es una *medida equivalente libre de riesgo* para el modelo de mercado en el intervalo $[0, T]$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Q es equivalente a P en $\mathcal{F}$.
2. El proceso de precios de $S(t)$, una vez descontado por la tasa libre de riesgo $r(t)$, es una martingala bajo la medida Q en el intervalo $[0, T]$.

Definición 2.20. Se dice que el mercado sigue el modelo de Black-Scholes si la dinámica del activo libre de riesgo viene dada por

$$dB(t) = rB(t) dt, \tag{2.5}$$

y la de las acciones por

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \tag{2.6}$$

donde $r, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$ son constantes.

Las demostraciones de los resultados expuestos a continuación pueden consultarse en [3].

Teorema 2.21. *El modelo del mercado está libre de arbitraje si, y solo si, existe una medida libre de riesgo Q .*

Definición 2.22. En un mercado formado por un activo libre de riesgo (bono) B y una acción S , una *cartera de inversión* o *portfolio* es un vector $h = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde x representa la cantidad de bonos e y la cantidad de acciones en posesión del inversor.

Definición 2.23. Se dice que el mercado es *completo* si todo derivado se puede replicar mediante un portfolio replicador autofinanciado.

Un portfolio replicador autofinanciado es una cartera compuesta por activos financieros cuyo valor evoluciona de manera que replica exactamente el valor de un determinado derivado o instrumento financiero, sin necesidad de inyecciones o retiros de capital a lo largo del tiempo. La condición de autofinanciamiento implica que todas las modificaciones en la composición de la cartera se realizan utilizando únicamente los recursos propios de la misma, sin aportes de fondos externos ni distribuciones de efectivo.

Nótese que si un derivado puede replicarse por un portfolio replicador autofinanciado, el valor del portfolio y el del derivado deben coincidir, ya que si no surgiría una oportunidad de arbitraje comprando y vendiendo (o viceversa) el portfolio y el derivado simultáneamente.

Teorema 2.24. *Asumiendo ausencia de arbitraje, el modelo del mercado es completo si la medida libre de riesgo Q es única.*

Teorema 2.25 (de Girsanov). *Sea W un proceso de Wiener con respecto a la medida P y ϕ un proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$. Se supone que se cumple*

$$\mathbb{E}^P \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \|\phi(s)\|^2 ds} \right] < \infty, \quad \forall T > 0.$$

Se define una nueva medida de probabilidad Q sobre $\mathcal{F}_T$ para cada $T > 0$ mediante

$$dQ = L_T dP,$$

donde $L_T = e^{\int_0^T \phi(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\phi(s)\|^2 ds}$. Entonces se tiene que P y Q son dos medidas equivalentes.

Además, se verifica que

$$dW^Q = \phi dt + dW,$$

donde W^Q es un proceso de Wiener con respecto a la medida Q .

Teorema 2.26. *El modelo de Black-Scholes está libre de arbitraje y la medida libre de riesgo es única, es decir, el modelo es completo.*

La medida Q que se obtiene mediante el Teorema de Girsanov al definir

$$\phi = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

es la medida libre de riesgo para el modelo de Black-Scholes. Además, la dinámica de las acciones en dicha medida viene dada por

$$dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t) dW^Q(t).$$

Teorema 2.27. *El precio de la Call Europea viene dado por*

$$C(S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[\max\{S_T - K, 0\} | \mathcal{F}_t^{W^Q} \right].$$

2.2.1. La Fórmula de Black-Scholes

Previo al resultado principal de esta sección, se enuncia un lema necesario para su demostración.

Lema 2.28. *Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces se verifica que*

$$\mathbb{E} [\exp(aX) | X \geq k] = \exp \left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} \right) N(d),$$

donde $a, k \in \mathbb{R}$, $d = \frac{-k + \mu + a\sigma^2}{\sigma}$ y $N(\cdot)$ denota la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.

Demostración. A partir de la definición de esperanza condicionada y las propiedades de la esperanza de una variable aleatoria, se obtiene:

$$\mathbb{E} [\exp(aX) | X \geq k] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty \exp(aX) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dX.$$

Por las propiedades de la función exponencial, la expresión anterior se puede escribir como

$$\mathbb{E} [\exp(aX)|X \geq k] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty \exp \left[aX - \frac{1}{2} \left(\frac{X-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dX.$$

Completando cuadrados,

$$\begin{aligned} aX - \frac{1}{2} \left(\frac{X-\mu}{\sigma} \right)^2 &= \frac{2aX\sigma^2 - X^2 - \mu^2 + 2X\mu}{2\sigma^2} \\ &= \frac{2X(\mu + a\sigma^2) - X^2 - \mu^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{2X(\mu + a\sigma^2) + (\mu + a\sigma^2)^2 - (\mu + a\sigma^2)^2 - X^2 - \mu^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{2a\mu\sigma^2 + a^2\sigma^4 - [X - (\mu + a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} \\ &= a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{X - (\mu + a\sigma^2)}{\sigma} \right]^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathbb{E} [\exp(aX)|X \geq k] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} \right) \int_k^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X - (\mu + a\sigma^2)}{\sigma} \right)^2 \right] dX.$$

Si se definen $u = \frac{X - (\mu + a\sigma^2)}{\sigma}$ y $L = \frac{k - (\mu + a\sigma^2)}{\sigma}$, entonces por el Teorema del Cambio de Variable se llega a que

$$\mathbb{E} [\exp(aX)|X \geq k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} \right) \int_L^\infty \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du.$$

Por definición de función de distribución de una variable aleatoria normal estándar,

$$N(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(aX)|X \geq k] &= \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) [1 - N(L)] \\ &= \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) N(-L) = \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) N(d),\end{aligned}$$

donde $d \equiv -L = \frac{-k+\mu+a\sigma^2}{\sigma}$.

□

Teorema 2.29 (Fórmula de Black-Scholes para la Call Europea). *El precio de una Call Europea viene dado, para cada $t \in [0, T]$, por*

$$C(S_t) = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-r(T-t)},$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad ; \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

- $N(\cdot)$: es la función de distribución de una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$.
- T : es el vencimiento.
- t : es el instante actual.
- K : es el strike o precio de ejercicio.
- S_t : es el precio de la acción en el instante t .
- r : es el tipo de interés del activo libre de riesgo.
- σ : es la volatilidad, considerada constante, asociada a la evolución del precio del activo con riesgo.

Demostración. Por el Teorema 2.27, el precio de una Call Europea en el instante t está dado por

$$C(S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^Q \left[\max\{S_T - K, 0\} | \mathcal{F}_t^{W^Q} \right],$$

donde la opción se ejerce si $S_T \geq K$ y, en caso contrario, su valor es nulo. La dinámica del precio del activo bajo la medida de probabilidad Q está gobernada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = rS_t dt + \sigma S_t dW^Q(t),$$

donde W^Q es un proceso de Wiener con respecto a la medida Q .

Sea $V(x, t) = \ln(x)$ y $Z(t) = V(S_t, t)$. Aplicando el Lema de Itô (Lema 2.17) y como

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2},$$

se tiene que

$$dZ(t) = \left(0 + rS \left(\frac{1}{S}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(-\frac{1}{S^2}\right)\right) dt + rS \left(\frac{1}{S}\right) dW = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW.$$

Integrando en $[t, T]$ y deshaciendo el cambio,

$$Z(T) - Z(t) = \ln \left(\frac{S(T)}{S(t)} \right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma(W_T - W_t).$$

Reorganizando esta expresión, se deduce que la condición de ejercicio $S_T \geq K$ es equivalente a

$$S_T = S_t \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right] \geq K,$$

es decir,

$$W_T - W_t \geq \frac{1}{\sigma} \left[\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \right] \equiv k.$$

Por tanto, la opción vale 0 si no se ejecuta y, si lo hace, su valor es

$$C(S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[S_t \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma(W_T - W_t) \right] - K \middle| W_T - W_t \geq k \right].$$

Como $W_T - W_t \sim N(0, \sqrt{T-t})$, basta aplicar el Lema 2.28 para concluir.

□

Una vez obtenida la fórmula de valoración para una opción Call Europea, es natural preguntarse por la correspondiente fórmula para una opción Put Europea. Aunque sería posible seguir un razonamiento análogo al desarrollado para la Call, resulta más sencillo y elegante aprovechar la relación de *paridad Call-Put Europeas*. Dicha relación, válida bajo los supuestos de ausencia de arbitraje, permite derivar directamente el precio de la Put Europea a partir de la expresión obtenida para la Call, evitando así una nueva demostración completa.

Proposición 2.30 (Paridad Call-Put). *El valor de una opción Put Europea en el instante t se relaciona con el de la Call Europea mediante la expresión:*

$$P(S_t, t) = C(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)} - S_t.$$

Demostración. Se considera el portfolio Π_t compuesto por una posición corta (ver Definición 1.3 y 1.4) en una acción S_t , una posición corta en una opción Put Europea, una posición larga en una opción Call Europea y una posición larga en un bono que paga K en el instante de vencimiento T , y cuyo valor actual es $Ke^{-r(T-t)}$.

Ambas opciones están negociadas sobre el mismo activo subyacente S y comparten precio de ejercicio K y vencimiento T . Es decir:

$$\Pi_t = -S_t - P(S_t, t) + C(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)}$$

En el vencimiento T , el valor del portfolio viene dado por

$$\Pi_T = S_T + \max\{K - S_T, 0\} - \max\{S_T - K, 0\} - K$$

Separando los dos casos posibles, el payoff resulta ser

$$\begin{cases} S_T + (K - S_T) - K = 0, & \text{si } S_T < K, \\ S_T - (S_T - K) - K = 0, & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Por tanto, el portfolio Π_t vale cero en el instante de vencimiento independientemente del valor final de la acción S_T , que es desconocido. De acuerdo con la condición de ausencia de arbitraje, se concluye que, necesariamente, el valor de la inversión en el instante actual t debe ser cero. Esto es:

$$-S_t - P(S_t, t) + C(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)} = 0.$$

□

2.2.2. La EDP de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes conduce, bajo los supuestos de mercado expuestos al comienzo de la sección, a una ecuación en derivadas parciales que describe la evolución temporal del valor de una opción europea. Dicha EDP, completamente determinista, se formula en términos de una función $V(S, t)$, donde S representa el precio del activo subyacente y t el tiempo. Esta ecuación constituye otra herramienta en la valoración de derivados, ofreciendo una alternativa a los métodos basados en simulaciones estocásticas, como el método de Monte Carlo.

Se parte del modelo de Black-Scholes, de manera que la dinámica del proceso S viene dada por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW.$$

Se considera una cartera de inversión Π compuesta por:

- Una posición larga del derivado $V(S, t)$, con strike K y vencimiento T .
- Una cantidad $-\Delta$ del activo subyacente.

Esto es,

$$\Pi(S, t) = V(S, t) - S\Delta.$$

La evolución del valor del portfolio a lo largo de un intervalo diferencial dt se describe mediante:

$$d\Pi = dV - \Delta dS.$$

Aplicando el Lema de Itô (Lema 2.17):

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu S \Delta \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW.$$

Como no se tiene ninguna condición restrictiva sobre Δ , es posible elegir su valor libremente. En este caso, se sigue la conocida como estrategia *Delta Hedging*, donde se toma

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Así,

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt, \quad (2.7)$$

es decir, se obtiene un portfolio completamente determinista.

Esto implica que, para que no haya posibilidad de arbitraje, debe cumplirse que evoluciona al tipo libre de riesgo, es decir que

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (2.8)$$

Igualando las expresiones (2.7) y (2.8):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right).$$

Finalmente, agrupando en un mismo miembro y reordenando términos, se obtiene la reconocida Ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.9)$$

La deducción de la ecuación de Black-Scholes pone de manifiesto cómo, bajo una estrategia de cobertura dinámica adecuada, es posible eliminar la componente aleatoria del valor de una cartera y obtener una evolución puramente determinista. La ecuación resultante admite una solución explícita en ciertos casos particulares, como en el caso de opciones europeas. No obstante, en muchos otros escenarios de interés, como en la valoración de opciones americanas, opciones de tipo barrera o en la presencia de condiciones de mercado más complejas, no es posible obtener soluciones analíticas cerradas.

En estos casos, la resolución de la ecuación requiere recurrir a métodos numéricos. Entre los más empleados se encuentran los esquemas de diferencias finitas, los métodos de elementos finitos, que permiten abordar problemas en dominios irregulares, o los métodos espectrales.

2.2.3. Condiciones frontera para el modelo de Black-Scholes

Una vez formulada la ecuación en derivadas parciales que describe la evolución temporal del valor de una opción bajo el modelo de Black-Scholes, es necesario complementar dicha ecuación con condiciones de contorno adecuadas para garantizar la unicidad de la solución.

Estas condiciones frontera reflejan el comportamiento esperado del valor de la opción en los extremos del dominio considerado, es decir, cuando el precio del activo subyacente, S , tiende a cero o a infinito. La elección de estas condiciones depende del tipo de opción financiera que se esté modelizando, así como del marco temporal y del dominio espacial empleado en la resolución numérica.

En el caso de las opciones europeas, su valor en el instante del vencimiento, $t = T$, debe ser el del payoff. Así, para la Call se tiene que

$$V(S, T) = C(S, T) = \max\{S - K, 0\},$$

mientras que para la Put Europea,

$$V(S, T) = P(S, T) = \max\{K - S, 0\}.$$

Cuando $S = 0$, la variación del activo es nula ($dS = 0$) y la ecuación de Black-Scholes se simplifica, reduciéndose a una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0, t) - rV(0, t) = 0,$$

cuya solución es

$$V(0, t) = V(0, T)e^{-r(T-t)}.$$

De esta forma, como $C(0, T) = 0$, se concluye que para la Call Europea

$$C(0, t) = 0,$$

De igual manera, teniendo en cuenta que $P(0, T) = K$, se llega a que para la Put Europea

$$P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}.$$

Finalmente, en el caso en el que el valor del precio del activo tiende a infinito, si $S \rightarrow \infty$, se puede demostrar que

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0,$$

puesto que un incremento en el valor del activo subyacente reduce la probabilidad de ejercicio de la opción Put.

En consecuencia, en virtud de la relación de paridad entre opciones tipo Call y Put (Proposición 2.30):

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{C(S, t)}{S} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{P(S, t) - Ke^{-r(T-t)} + S}{S} = 1,$$

con lo que la condición frontera que surge es

$$\lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = S.$$

Conviene señalar que, numéricamente, la EDP se resuelve en un dominio finito $[0, S_M]$.

Se asume que el valor S_M es lo suficientemente grande para que el error numérico al imponer las condiciones frontera en $S = S_M$, conocido como el error de localización, sea despreciable frente a otros errores numéricos que se puedan cometer.

Capítulo 3

El Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos (MEF) es una técnica numérica basada en el análisis funcional y en la formulación variacional de problemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales. A diferencia de otros métodos discretos, como las diferencias finitas, el MEF parte de la reformulación del problema en términos de espacios de funciones adecuadamente definidos, lo que permite abordar de forma rigurosa la existencia y unicidad de soluciones aproximadas, así como su estabilidad y convergencia.

En el contexto financiero, la ecuación de Black-Scholes, tras una transformación adecuada, puede interpretarse como un problema parabólico en un dominio acotado, para el cual resulta natural plantear una formulación débil sobre un espacio de Hilbert, como $H^1(\Omega)$. Esta perspectiva funcional permite aplicar directamente las herramientas teóricas del MEF, facilitando la incorporación de condiciones de contorno y permitiendo un tratamiento más flexible de dominios irregulares.

Este capítulo introduce los fundamentos teóricos del Método de Elementos Finitos desde la perspectiva de la teoría de espacios funcionales. Se presentará la formulación débil del problema de Black-Scholes, se abordará la elección de los espacios de aproximación y se describirá el procedimiento de discretización que conduce a un sistema lineal de ecuaciones. Todo ello sentará las bases necesarias para, en el siguiente capítulo, implementar el método y aplicarlo al estudio numérico de opciones exóticas cuya complejidad impide una solución analítica.

A continuación, se presenta un breve resumen de las herramientas de Análisis Funcional necesarias basado en [14]. No obstante, para el desarrollo completo de los resultados expuestos, se remite al lector a [6] y [12], obras de referencia en análisis funcional y teoría de espacios de Sobolev. Además, se recomiendan las fuentes [8] y [13] como complementos que aportan diferentes enfoques y ampliaciones sobre

el tema, poniéndolo en relación con el método de elementos finitos.

3.1. Fundamentos de Análisis Funcional para el MEF

En esta sección, $\mathbb{K}$ denota un cuerpo, restringido en este trabajo a los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición 3.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* es una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para cada $x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para cada $x, y \in X$ (Desigualdad Triangular).

Definición 3.2. Una *sucesión de Cauchy* en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando que $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$, para cada $n, m \geq n_0$.

Observación 3. Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco no siempre es cierto. Se dice que un espacio normado es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 3.3. Se dice que un espacio es *de Banach* si es un espacio normado completo.

Definición 3.4. Sean X e Y dos espacios normados. Se dice que una aplicación $T : X \rightarrow Y$ es *lipschitziana* si existe $M \geq 0$ tal que $\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$, para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$.

Teorema 3.5. Sean X e Y espacios normados y sea $T : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Son equivalentes:

1. T es continua en X .
2. T es uniformemente continua en X .
3. T es continua en $x = 0$.
4. T es continua en algún punto de X .
5. Existe $K \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq K$, para cada $x \in \bar{B}_X(0, 1)$.
6. Existe $M \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M \|x\|$, para cada $x \in X$.

7. T es lipschitziana.

Demostración. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ y $7 \Rightarrow 1$ son inmediatas o sencillas y no se incluye su demostración por no sobrecargar la memoria.

$\boxed{4 \Rightarrow 5}$ Si T es continua en un punto $x_0 \in X$, entonces también lo es en el origen $x = 0$. En efecto, si $x_n \rightarrow 0$, entonces $x_n + x_0 \rightarrow x_0$ y, por continuidad, $T(x_n + x_0) \rightarrow T(x_0)$. Así, $T(x_n) \rightarrow 0$ pues, por la linealidad de T ,

$$T(x_n) = T(x_n + x_0) - T(x_0).$$

Por tanto, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$, entonces $\|T(x)\| \leq 1$. En consecuencia, si $x \in \bar{B}_X(0, 1)$, se tiene que $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$, de manera que $\|T(\frac{\delta x}{2})\| \leq 1$.

Tomando $K = \frac{2}{\delta}$, se llega a que $\|T(x)\| \leq K$, para cada $x \in \bar{B}_X(0, 1)$.

$\boxed{5 \Rightarrow 6}$ Por hipótesis, $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq K$, por lo que se concluye que

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

$\boxed{6 \Rightarrow 7}$ Si existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, para cada $x \in X$, entonces se obtiene como consecuencia directa que

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Por tanto, T es lipschitziana. □

Definición 3.6. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Se define

$$\begin{aligned} \text{BL}(X, Y) &:= \{T : X \rightarrow Y : T \text{ es lineal y acotada}\} \\ &= \{T : X \rightarrow Y : T \text{ es lineal y continua}\}. \end{aligned}$$

En particular, se define el espacio *dual topológico* de X como

$$X^* := \text{BL}(X, \mathbb{K}),$$

el cual tiene estructura de espacio vectorial.

Nota. Las aplicaciones entre espacios vectoriales se suelen denominar *operadores*, mientras que las aplicaciones entre un espacio vectorial y su cuerpo base reciben el nombre de *funcionales*.

Definición 3.7. Sean X e Y espacios normados y sea $T \in \text{BL}(X, Y)$. Se define la *norma de operadores* mediante:

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Observación 4. Se puede demostrar que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|, \text{ para cada } x \in X,$$

donde $\|T\|$ es la constante más pequeña que verifica la propiedad 6 del Teorema 3.5.

Teorema 3.8. Sean X e Y espacios normados. Entonces $\text{BL}(X, Y)$ es un espacio normado con la norma de operadores.

Demostración.

1. $\|T\| \geq 0$. Además, $\|T(x)\| = 0 \Rightarrow T = 0$, para cada $x \in X$.
2. $\|\alpha T\| = \sup\{\|\alpha T(x)\| : \|x\| = 1\} = |\alpha|\|T\|$, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\|T + R\| = \sup\{\|(T + R)(x)\| : \|x\| = 1\} \leq \|T\| + \|R\|$.

□

Nota. En lo sucesivo, se considera el espacio $\text{BL}(X, Y)$ dotado de la norma de operadores.

Teorema 3.9. Sean X e Y espacios normados. Si Y es un espacio de Banach, entonces $\text{BL}(X, Y)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Ya se ha demostrado que $\text{BL}(X, Y)$ es un espacio normado respecto de la norma de operadores.

Sea T_n una sucesión de Cauchy en $\text{BL}(X, Y)$. Nótese que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|, \text{ para cada } x \in X.$$

Además, $T_n(x)$ es una sucesión de Cauchy en Y , que es un espacio completo.

Por tanto, existe $T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, para cada $x \in X$. Se obtiene así un operador $x \rightarrow T(x)$ que es lineal por la unicidad del límite en Y .

Falta probar que T es continuo. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$, para cada $n, m \geq n_0$. Así, como $\|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$, se tiene que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon \|x\|, \text{ para cada } x \in X, \text{ con } n, m \geq n_0.$$

Haciendo $m \rightarrow \infty$, se sigue que $\|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon \|x\|$. De esta forma,

$$\|T(x)\| \leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x)\| \leq (\varepsilon + \|T_n\|) \|x\| \leq M \|x\|,$$

donde $M = \varepsilon + \|T_n\|$, para cualquier $n \geq n_0$ prefijado. En consecuencia, $T \in \text{BL}(X, Y)$.

Finalmente, se demuestra que $T_n \rightarrow T$. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n, m \geq n_0$, se verifica que $\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, dado $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$, se tiene que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo que existe $p \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n(x) - T_{n+p}(x)\| + \|T_{n+p}(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T_{n+p}\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Es decir, se ha probado que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ y cada $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ se tiene que $\|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon$, por lo que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$, de donde se concluye que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

□

Definición 3.10. Un *producto escalar*, sobre un espacio vectorial H sobre $\mathbb{K}$, es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ que verifica:

1. $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$, para cada $x \in H$.
2. $\langle x, x \rangle \geq 0$, para cada $x \in H$.
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, para cada $x, y, z \in H$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, para cada $x, y \in H$.

Por tanto, un producto escalar es una forma sesquilineal, hermítica y definida positiva.

Definición 3.11. Un *espacio prehilbertiano* es un espacio vectorial H sobre $\mathbb{K}$ dotado de un producto escalar.

La demostración del siguiente resultado, ampliamente conocido, puede encontrarse en [12].

Teorema 3.12 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea H un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar sobre H , entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Corolario 3.13 (Desigualdad de Minkowsky). Sea H un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar sobre H , entonces

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Demostración. Para cualesquiera $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} &= \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\Re\langle x, y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2|\langle x, y \rangle|} \leq \\ &\leq \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}} = \sqrt{\left(\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}\right)^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.14. Si H es un espacio prehilbertiano, entonces

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in H$$

define una norma en H .

Demostración. La desigualdad triangular se corresponde con la de Minkowsky y el resto de condiciones se prueban de forma inmediata.

□

Nota. En los desarrollos posteriores, todo espacio prehilbertiano H será considerado un espacio normado con la norma asociada al producto escalar:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in H.$$

Observación 5. La desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede reescribir de la siguiente forma:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in H.$$

Definición 3.15. Se dice que un espacio es *de Hilbert* si es un espacio prehilbertiano completo.

Proposición 3.16. Sea H un espacio de Hilbert definido sobre $\mathbb{R}$. Sea $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Son equivalentes:

1. La forma bilineal a es continua.
2. Existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$|a(x, y)| \leq \alpha \|x\| \|y\|,$$

para cada $x, y \in H$.

Definición 3.17. Sea H un espacio de Hilbert definido sobre $\mathbb{R}$. Se dice que una forma bilineal $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es *coerciva* si existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$a(x, x) \geq \beta \langle x, x \rangle, \quad \forall x \in H.$$

El siguiente resultado garantiza la existencia y unicidad del punto de mínima norma en un subconjunto no vacío, convexo y completo de un espacio prehilbertiano. Este lema será una herramienta fundamental en la formulación y demostración del Teorema de la Aproximación Óptima, que se desarrollará posteriormente.

Lema 3.18. Sean H un espacio prehilbertiano y $S \subset H$ un subconjunto convexo, completo y no vacío. Entonces, existe un único $s_0 \in S$ tal que

$$\|s_0\| = \min\{\|s\| : s \in S\}.$$

En particular, la distancia del origen al conjunto S se alcanza.

Demostración. Sea $t := \inf\{\|s\| : s \in S\}$, y sea $s_n \in S$ tal que $\|s_n\| \rightarrow t$. Como S es convexo, $\frac{s+\tilde{s}}{2} \in S$ para cada $s, \tilde{s} \in S$.

De esta forma, $\left\|\frac{s+\tilde{s}}{2}\right\| \geq t$. Es decir, $\|s + \tilde{s}\| \geq 2t$.

En consecuencia, $\|s_n + s_m\|^2 \geq 4t^2$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, y se tiene que

$$\begin{aligned}\|s_n - s_m\|^2 &= 2(\|s_n\|^2 + \|s_m\|^2) - \|s_n + s_m\|^2 \\ &\leq 2(\|s_n\|^2 + \|s_m\|^2) - 4t^2 \\ &= 2(\|s_n\|^2 - t^2) + 2(\|s_m\|^2 - t^2) \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Por tanto, s_n es de Cauchy en S , que es completo. Si $s_n \rightarrow s_0$, entonces $\|s_n\| \rightarrow t = \|s_0\|$, por lo que $\|s_0\| = \min\{\|s\| : s \in S\}$.

Además, s_0 es único, pues si existe $\tilde{s}_0$ con la misma propiedad, entonces

$$\|s_0 + \tilde{s}_0\|^2 + \|s_0 - \tilde{s}_0\|^2 = 2(\|s_0\|^2 + \|\tilde{s}_0\|^2) = 4t^2.$$

Así,

$$0 \leq \|s_0 - \tilde{s}_0\|^2 \leq 4t^2 - \|s_0 + \tilde{s}_0\|^2 = 4t^2 - 4t^2 = 0,$$

de donde se concluye que $s_0 = \tilde{s}_0$.

□

Teorema 3.19 (de la Aproximación Óptima). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $M \subset H$ un subespacio cerrado. Para cada $x \in H$, existe un único $m_x \in M$ tal que*

$$\|x - m_x\| = d(x, M).$$

Demostración. Dado $x \in H$, se define $S := x + M = \{x + m : m \in M\}$, que es un subconjunto cerrado y convexo. En virtud del lema previo, existe $m_x \in M$ tal que

$$\|x - m_x\| = \min\{\|x - m\| : m \in M\} = d(x, M) = \|x - M\|.$$

□

Nota. En las condiciones del teorema anterior se dice que m_x es el *vector de mejor aproximación* (o el *vector de aproximación óptima*) de x a M .

Teorema 3.20 (de Riesz-Fréchet). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $f \in H^*$. Entonces existe un único $x \in H$ tal que $f = f_x = \langle \cdot, x \rangle$. Además, $\|f\| = \|x\|$.*

Demostración. Sea $f \in H^*$. Si $f = 0$, es inmediato que $f = f_0 = \langle \cdot, 0 \rangle$. Si $f \neq 0$, entonces $\ker f$ es un subespacio cerrado y propio de H . Por consiguiente, $(\ker f)^\perp \neq \{0\}$, pues $H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$, con $H \neq \ker f$.

En consecuencia, existe $\omega \in (\ker f)^\perp$ tal que $f(\omega) \neq 0$. Se verifica que el vector

$$x = \frac{f(\omega)}{\|\omega\|^2} \omega$$

satisface la condición requerida. En efecto, $f(\omega)u - \omega f(u) \in \ker f$, por lo que

$$0 = \langle f(\omega)u - \omega f(u), \omega \rangle = f(\omega)\langle u, \omega \rangle - f(u)\langle \omega, \omega \rangle = f(\omega)\langle u, \omega \rangle - f(u)\|\omega\|^2,$$

de donde se obtiene que

$$f(u) = \left\langle u, \frac{f(\omega)}{\|\omega\|^2} \omega \right\rangle = \langle u, x \rangle, \quad \text{para cada } u \in H, \text{ con } x = \frac{f(\omega)}{\|\omega\|^2} \omega.$$

Además, x es único, pues si existe $\tilde{x} \in H$ tal que $\langle u, x \rangle = \langle u, \tilde{x} \rangle$ para cada $u \in H$, se sigue que

$$\langle x - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle = 0,$$

por lo que $x = \tilde{x}$. El hecho de que $\|f_x\| = \|x\|$ se deduce de forma directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

□

Los resultados presentados permiten formular el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en el Teorema 6.5 de [13].

Teorema 3.21 (de Lax-Milgram). Sean H un espacio de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva en H , y sea $f \in H^*$. Entonces, existe un único $x \in H$ tal que

$$a(x, y) = f(y),$$

para cada $y \in H$. Además, se verifica que $\|x\| \leq \frac{1}{\beta} \|f\|$, donde β es la constante de coercividad de a .

Definición 3.22. Sea H un espacio de Hilbert y sea $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva en H . Dado $f \in H^*$, se define el *problema variacional* como la determinación de un elemento $x \in H$ que satisfaga

$$a(x, y) = f(y), \quad (3.1)$$

para cada $y \in H$.

3.2. El Método Galerkin

Se considera el problema variacional definido en (3.1). En contextos prácticos, la resolución exacta es, por lo general, inabordable debido a la naturaleza infinito-dimensional del espacio de Hilbert H en el que se formula el problema.

No obstante, si el espacio H puede escribirse como unión de subespacios de dimensión finita, resulta natural preguntarse si es posible obtener soluciones aproximadas que converjan a la solución exacta mediante la proyección del problema original sobre dichos subespacios. Esta es, en esencia, la idea subyacente al método de Galerkin.

A continuación, se ofrece una descripción formal del método basada en el desarrollo presentado en [13].

Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de subespacios de H que verifiquen las siguientes propiedades:

1. $\dim H_i = i$.
2. $H_i \subseteq H_{i+1}$, para todo i .
3. H es la clausura de la unión de todos los H_i , es decir, $H = \overline{\bigcup_i H_i}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ una base del subespacio H_n . Todo elemento $x_n \in H_n$ admite una representación única como combinación lineal de los vectores de la base:

$$x_n = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j. \quad (3.2)$$

Se considera el problema variacional definido en 3.1 restringido a H_n , esto es, determinar $x_n \in H_n$ que satisfaga

$$a(x_n, y) = f(y), \text{ para cada } y \in H_n. \quad (3.3)$$

Esto significa que debe verificarse

$$a(x_n, \psi_k) = f(\psi_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Teniendo en cuenta 3.2 y sustituyendo en la expresión anterior, el problema variacional considerado se escribe como

$$\sum_{j=1}^n c_j a(\psi_j, \psi_k) = f(\psi_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Como resultado, se deduce un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, cuya solución es única debido a la coercividad de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$. Matricialmente:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f},$$

donde $\mathbf{A}_{k,j} = a(\psi_j, \psi_k)$, $\mathbf{c}_{j,1} = c_j$ y $\mathbf{f}_{k,1} = f(\psi_k)$.

Por tanto, se ha determinado que para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, existe una única solución $x_n \in H_n$. Falta demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a la solución exacta cuando $n \rightarrow \infty$, para lo cual se precisa del siguiente resultado.

Lema 3.23 (de Céa). *Bajo las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, sea x la solución del problema variacional original (3.1). Si x_n es la solución del problema aproximado restringido al subespacio H_n (3.3), entonces*

$$\|x - x_k\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \inf_{y \in H_k} \|x - y\|,$$

donde α y β son las constantes de continuidad y coercividad de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, respectivamente.

Demostración. Para cada $y \in H_n$ se tiene que

$$a(x, y) = f(y),$$

$$a(x_n, y) = f(y).$$

Restando ambas ecuaciones, se obtiene que

$$a(x - x_n, y) = 0, \quad \forall y \in H_n.$$

En particular, dado que $y - x_n \in H_n$, se verifica que

$$a(x - x_n, y - x_n) = 0,$$

lo que implica que

$$a(x - x_n, x - x_n) = a(x - x_n, x - y) + a(x - x_n, y - x_n) = a(x - x_n, x - y)$$

Por la coercividad y continuidad de $a(\cdot, \cdot)$, se cumple que

$$\beta \|x - x_n\|^2 \leq a(x - x_n, x - x_n) \leq \alpha \|x - x_n\| \|x - y\|.$$

En consecuencia,

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \|x - y\|,$$

donde la constante $\frac{\alpha}{\beta}$ no depende del valor de n . Como esto es válido para todo $y \in H_n$, se concluye que

$$\|x - x_k\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \inf_{y \in H_k} \|x - y\|.$$

□

Para justificar que el método de Galerkin conduce efectivamente a la solución exacta del problema variacional, nótese que, por hipótesis, el espacio H es la clausura de la unión de los subespacios H_n . Esto implica que existe una sucesión $\{z_n\}$, con $z_n \in H_n$, tal que $z_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde x es la solución exacta.

Aplicando el lema de Céa, se obtiene que

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \inf_{y \in H_n} \|x - y\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \|x - z_n\|.$$

Dado que $\|x - z_n\| \rightarrow 0$ al hacer $n \rightarrow \infty$, se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0,$$

lo que demuestra la convergencia de las soluciones aproximadas hacia la solución exacta.

3.3. El Problema Variacional de Black-Scholes

Con el objetivo de reformular el problema de Black-Scholes en un contexto variacional, resulta necesario introducir algunas nociones funcionales que permitan operar en espacios apropiados para este tipo de análisis. En esta sección se adopta el enfoque desarrollado en [13] como referencia principal.

Definición 3.24. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in L^2(\Omega)$. Se define la *norma* L^2 como

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Definición 3.25. Dado $k \in \mathbb{Z}$, se define el *espacio de Sobolev* $H^k(a, b)$ como el conjunto de las funciones reales definidas en $[a, b]$ tales que todas sus derivadas hasta orden $k - 1$ son absolutamente continuas en $[a, b]$ y tales que

$$\left(\int_a^b \left(\frac{d^k}{du^k}(u) \right)^2 du \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Definición 3.26. Sea $x \in H^k(a, b)$. Se define la *norma de Sobolev* como

$$\|x\|_{H^k(a, b)} = \left(\sum_{i=0}^k \int_a^b \left(\frac{d^i x}{du^i}(u) \right)^2 du \right)^{\frac{1}{2}},$$

y se denota por $H_0^k(a, b) = \{x \in H^k(a, b) : x(a) = x(b) = 0\}$.

A partir de la desigualdad de Poincaré (ver Teorema 7.5 de [13]), se puede demostrar que para toda función $u \in H_0^1(\Omega)$ existen constantes positivas C_1, C_2 tales que

$$C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

lo que implica que las normas $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ y $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ son equivalentes.

Definición 3.27. Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_k\} \subset H$ una sucesión. Se dice que $\{x_k\}$ converge débilmente a $x \in H$, y se denota por

$$x_k \rightharpoonup x,$$

si para todo funcional lineal y continuo $f \in H^*$ se verifica que

$$\langle f, x_k \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle,$$

cuando $k \rightarrow \infty$.

Observación 6. De forma equivalente, gracias a la identificación $H \cong H^*$ dada por el Teorema de Representación de Riesz (ver Teorema 6.3 de [13]), esto puede expresarse como:

$$\langle x_k, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle,$$

para todo $y \in H$.

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $z : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente regular. Se considera el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \mathcal{M}z = f, & \text{si } (u, \tau) \in (a, b) \times (0, T), \\ z(u, 0) = g(u), & \text{si } u \in (a, b), \\ z(a, \tau) = 0, \\ z(b, \tau) = 0, \end{cases}$$

donde el operador $\mathcal{M}$ está definido por

$$\mathcal{M}(z) = -\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \beta \frac{\partial z}{\partial u} + \gamma z,$$

con $\alpha > 0$, y β, γ constantes reales.

Sea $x \in H_0^1(a, b)$. Se introduce la forma bilineal asociada a $\mathcal{M}$, empleando el producto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $L^2(a, b)$, como

$$a(z, x) := \langle \mathcal{M}z, x \rangle = \alpha \left\langle \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \right\rangle + \beta \left\langle \frac{\partial z}{\partial u}, x \right\rangle + \gamma \langle z, x \rangle,$$

donde, en el primer término del segundo miembro, se ha aplicado integración por partes, teniendo en cuenta que las funciones consideradas se anulan en los extremos del intervalo, es decir, $z(a) = z(b) = 0$.

El problema puede reformularse en términos variacionales como la búsqueda de una función $z(u, \tau) \in H_0^1(a, b)$, definida casi siempre para $\tau \in [0, T]$, que verifique:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial z}{\partial \tau}, x \right\rangle + a(z, x) = \langle f, x \rangle, \\ z(u, 0) = g(u), \end{cases} \quad (3.5)$$

para toda función $x \in H_0^1(a, b)$.

En el contexto del método de Galerkin, se considera una base $\{\psi_i\}$ del espacio $H_0^1(a, b)$ y, para un valor fijo de $n \in \mathbb{N}$, sea H_n el subespacio generado por $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. La solución se aproxima entonces buscando una función $z_n(\tau, u)$ con la forma

$$z_n(u, \tau) = \sum_{j=1}^n c_j(\tau) \psi_j(u),$$

donde los coeficientes $c_j(\tau)$ son funciones a determinar que dependen del tiempo τ .

Sustituyendo esta expresión en el problema variacional y tomando como funciones de prueba $x = \psi_k$, para $k = 1, \dots, n$, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \mathbf{c}'(\tau) = -\mathbf{A}\mathbf{c}(\tau) + \mathbf{f}(\tau), & \tau \in (0, T], \\ \mathbf{c}(0) = \mathbf{g}, \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{A}_{k,j} = a(\psi_j, \psi_k), \quad \mathbf{f}_{k,1}(\tau) = \langle f(\tau), \psi_k \rangle, \quad \mathbf{c}_{j,1} = \langle g, \psi_j \rangle.$$

Asumiendo que f y g satisfacen ciertas condiciones de regularidad (ver [13]), y que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva, se puede demostrar el siguiente resultado (ver Teorema 9.9 en [13]), que será fundamental en desarrollos posteriores.

Teorema 3.28. *Si se verifican las hipótesis anteriores, el problema 3.5 está bien puesto y las soluciones z_n obtenidas mediante el método de Galerkin convergen (débilmente) a la solución exacta.*

Cuando el problema (3.5) presenta condiciones frontera no homogéneas, se puede considerar una función auxiliar $\eta(u, \tau)$, suficientemente regular (ver [13]), que satisfaga dichas condiciones en los extremos, es decir, $\eta(a, \tau)$ y $\eta(b, \tau)$.

Realizando el cambio de variable $z = x - \eta$ se transforma el problema original en otro con condiciones frontera homogéneas para z . De este modo, resulta posible aplicar el Teorema 9.9 de [13] para resolverlo. Finalmente, la solución al problema original se recupera deshaciendo la transformación.

A continuación, se retoma el análisis de la ecuación de Black-Scholes para el precio de una opción Put europea, denotado por $V(S, t)$. Fijado $\delta > 0$, se introduce la función $V_\delta(u, \tau)$, que satisface el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\delta}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V_\delta}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial V_\delta}{\partial u} + rV_\delta = 0, & (u, \tau) \in (-\delta, \delta) \times (0, T), \\ V_\delta(u, 0) = \max\{K - e^u, 0\}, & u \in (-\delta, \delta), \\ V_\delta(-\delta, \tau) = Ke^{r\tau}, \\ V_\delta(\delta, \tau) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

El sistema (3.6) se obtiene a partir de la ecuación original de Black-Scholes mediante los cambios de variable $\tau = T - t$ y $u = \log(S)$.

Nótese que el problema se ha definido en un dominio finito. No obstante, esto no impide aproximarse a la solución del problema de Black-Scholes, que está definido en un dominio infinito.

Tal como se demuestra en [9], al hacer $\delta \rightarrow \infty$, la función $V_\delta(u, \tau)$ converge a la solución del problema original transformado $V(e^u, T - \tau)$.

Por otra parte, se puede garantizar que el problema (3.6) admite una única solución variacional. Para ello, se introduce la función auxiliar

$$z(u, \tau) = V_\delta(u, \tau) + \frac{u - \delta}{2\delta} Ke^{r\tau},$$

y se comprueba que satisface las condiciones del Teorema 9.9 de [13], lo que asegura la existencia y unicidad de la solución buscada.

Capítulo 4

Experimentos numéricos

En este capítulo se presentan una serie de experimentos numéricos realizados con el objetivo de analizar las soluciones numéricas obtenidas con el MEF para varios tipos de opciones financieras. Todos los cálculos y representaciones gráficas han sido implementados en MATLAB R2022a.

Se incluyen representaciones para opciones europeas y americanas, destacando en este último caso la comparación directa entre ambas mediante la visualización de la diferencia entre sus precios. Además, para el caso de la opción europea, para el que se dispone de solución analítica, se analiza el error asociado a la discretización espacial y temporal, representando su evolución en escalas logarítmicas para estimar la pendiente y, con ello, el orden de convergencia del método empleado.

Adicionalmente, se aproxima también una opción exótica del tipo barrera, con el objetivo de ver cómo se adapta el enfoque numérico a las condiciones particulares del derivado.

4.1. Esquema numérico y discretización

Para abordar la resolución numérica de los problemas descritos, se ha empleado una combinación del método de elementos finitos en el espacio junto con la regla de Euler implícita para la integración temporal. Esta estrategia es especialmente adecuada para el tratamiento de ecuaciones en derivadas parciales como la de Black-Scholes, ya que ofrece estabilidad y un buen comportamiento de convergencia.

4.1.1. Funciones base

Definición 4.1. Sean $[a, b]$ un intervalo con $a, b \in \mathbb{R}$ y Δ una partición del mismo. Esto es:

$$\Delta : a = S_0 < S_1 < \dots < S_{N_S} = b.$$

Se define el espacio $M_0^1(\Delta)$ como el conjunto de funciones continuas en $[a, b]$ que, restringidas a cada subintervalo $[S_{i-1}, S_i]$ con $i = 1, \dots, M$, coinciden con un polinomio de grado menor o igual que uno (lineales a trozos).

En general, el método de elementos finitos permite considerar mallas no uniformes, lo que resulta útil en contextos donde se desea refinar la discretización en ciertas regiones del dominio. No obstante, para los objetivos de este trabajo se optará por una malla equiespaciada, en la que todos los subintervalos tienen la misma longitud h .

Asimismo, pueden considerarse otros espacios de funciones con mayor regularidad para la elección de las funciones base, pero no se han tenido en cuenta en esta memoria.

En este caso, se considera el intervalo $[0, S_R]$, de manera que los nodos de la partición $\Delta : 0 = S_0 < S_1 < \dots < S_{N_S} = S_R$ quedan definidos mediante

$$S_i = ih, \text{ con } h = \frac{S_R}{N_S}, \quad i = 0, \dots, N_S.$$

Esta elección facilita tanto la implementación como el análisis del esquema numérico, manteniendo al mismo tiempo una precisión adecuada en los ejemplos considerados en las secciones posteriores.

La construcción de las funciones base utilizadas en el método de elementos finitos se realiza de forma que verifiquen la condición de interpolación:

$$\psi_i(S_j) = \delta_{ij}, \quad \text{para } i, j = 0, \dots, N_S.$$

Por consiguiente, para los nodos interiores, esto es, para $i = 1, \dots, N_S - 1$, se define:

$$\psi_i(S) = \begin{cases} \frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} = \frac{S - S_{i-1}}{h}, & S \in [S_{i-1}, S_i], \\ \frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} = \frac{S_{i+1} - S}{h}, & S \in [S_i, S_{i+1}], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Asimismo, para los extremos del intervalo se define:

$$\psi_0(S) = \begin{cases} \frac{S_1 - S}{S_1 - S_0} = \frac{S_1 - S}{h}, & \text{si } 0 \leq S \leq S_1, \\ 0, & \text{si } S > S_1, \end{cases}$$

$$\psi_{N_S}(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } S < S_{N_S-1}, \\ \frac{S - S_{N_S-1}}{S_{N_S} - S_{N_S-1}} = \frac{S - S_{N_S-1}}{h}, & \text{si } S_{N_S-1} \leq S \leq S_{N_S}. \end{cases}$$

Estas funciones reciben comúnmente el nombre de *funciones hat* o *funciones sombrero* debido a su forma característica, que alcanza su valor máximo en un nodo y decrece linealmente hasta cero en los nodos adyacentes, como se ilustra en la Figura 4.1.

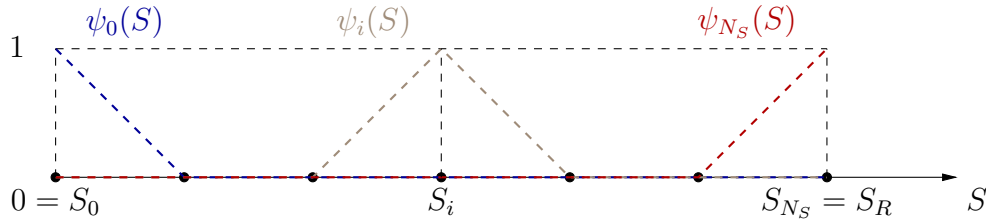


Figura 4.1: Funciones hat.

Se define $M_h = \langle \{\psi_0, \dots, \psi_{N_S}\} \rangle$ el espacio generado por $\psi_0(S), \dots, \psi_{N_S}(S)$. El conjunto $\{\psi_0, \dots, \psi_{N_S}\}$ constituye una base de M_h , ya que es linealmente independiente. En efecto,

$$\sum_{i=0}^{N_S} c_i \psi_i(S) = 0 \Rightarrow c_i = 0, \quad \forall i = 0, \dots, N_S.$$

que se obtiene evaluando la combinación lineal en los nodos $S = S_j$, donde por construcción $\psi_i(S_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, \dots, N_S$.

Además, el hecho de haber considerado una malla uniforme implica que la condición inicial del problema,

$$V(S, 0) = \max\{K - S, 0\},$$

pertenece al espacio M_h , lo que facilita la proyección exacta de los datos del problema en el vencimiento en el contexto del esquema de elementos finitos. Para ello, la discretización espacial se toma de forma que $K \in \{S_i\}_{i=0}^{N_S}$.

4.1.2. Formulación matricial del problema

El problema que se desea resolver numéricamente es la ecuación de Black-Scholes para el precio $V(S, t)$ de una opción financiera, que viene dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0,$$

y donde se recuerda S representa el precio del activo subyacente, $t \in [0, T]$ es el tiempo, r es el tipo de interés libre de riesgo y σ la volatilidad del activo.

Con el fin de facilitar la resolución numérica, se introduce el cambio de variable temporal $\tau = T - t$, de modo que la nueva función desconocida se define como $U(S, \tau) = V(S, T - \tau)$. Bajo este cambio, la ecuación se reescribe como:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} - rU. \quad (4.1)$$

Esta nueva formulación permite interpretar el problema como un proceso evolutivo en τ , que avanza desde el instante $\tau = 0$ (correspondiente al vencimiento $t = T$) hasta $\tau = T$ (esto es, el momento inicial $t = 0$). Es decir, se parte del valor conocido de la opción en el momento de su vencimiento y se calcula su evolución hacia atrás en el tiempo real.

A continuación, se localiza el problema, $S \in [0, S_R]$, con S_R suficientemente grande y se reescribe la ecuación (4.1) en su forma débil o variacional:

Sea una función $\psi(S)$ arbitraria que satisface

$$\psi(0) = \psi(S_R) = 0,$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación 4.1 por $\psi(S)$ e integrando en $[0, S_R]$:

$$\int_0^{S_R} \frac{\partial U}{\partial \tau} \psi dS = \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \psi dS + r \int_0^{S_R} S \frac{\partial U}{\partial S} \psi dS - r \int_0^{S_R} U \psi dS, \quad (4.2)$$

Integrando por partes y aplicando que $\psi(0) = \psi(S_R) = 0$:

$$\int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \psi dS = S^2 \psi(S) \frac{\partial U}{\partial S} \Big|_0^{S_R} - \int_0^{S_R} 2S \frac{\partial U}{\partial S} \psi dS - \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial U}{\partial S} \frac{\partial \psi}{\partial S} dS$$

Sustituyendo en la ecuación (4.2), se obtiene la expresión variacional del problema localizado:

$$\int_0^{S_R} \frac{\partial U}{\partial \tau} \psi dS = -\frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial U}{\partial S} \frac{\partial \psi}{\partial S} dS + (r - \sigma^2) \int_0^{S_R} S \frac{\partial U}{\partial S} \psi dS - r \int_0^{S_R} U \psi dS.$$

Finalmente, tomando $U(S, \tau) \sim U_{N_S}(S, \tau) = \sum_{j=0}^{N_S} u_j(\tau) \psi_j(S)$, se llega a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^M \frac{du_j}{d\tau} \int_0^{S_R} \psi_j \psi_k dS &= -\frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=0}^M u_j \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \frac{\partial \psi_k}{\partial S} dS \\ &\quad + (r - \sigma^2) \sum_{j=0}^M u_j \int_0^{S_R} S \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \psi_k dS \\ &\quad - r \sum_{j=0}^M u_j \int_0^{S_R} \psi_j \psi_k dS \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por la construcción de las funciones base, se tiene que para $j = 1, \dots, N_S - 1$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial S} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq S \leq S_{j-1}, \\ \frac{1}{h}, & \text{si } S_{j-1} \leq S \leq S_j, \\ -\frac{1}{h}, & \text{si } S_j \leq S \leq S_{j+1}, \\ 0, & \text{si } S_{j+1} \leq S \leq S_R. \end{cases}$$

Con el fin de reescribir la ecuación (4.3) como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se definen las siguientes matrices:

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^{N_S-1}, \quad M_{ij} = \int_0^{S_R} \psi_j \psi_i dS \quad (\text{Matriz de masa}),$$

$$\mathbf{K} = (K_{ij})_{i,j=1}^{N_S-1}, \quad K_{ij} = \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \frac{\partial \psi_i}{\partial S} dS \quad (\text{Matriz de rigidez}),$$

$$\mathbf{C} = (C_{ij})_{i,j=1}^{N_S-1}, \quad C_{ij} = \int_0^{S_R} S \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \psi_i dS \quad (\text{Matriz de convección}).$$

Tras las oportunas cuentas, el elemento general de las respectivas matrices viene dado por:

- Matriz de masa:

$$M_{ij} = \int_0^{S_R} \psi_j \psi_i dS = \begin{cases} 0, & \text{si } |j - i| \geq 2, \\ \frac{h}{6}, & \text{si } |j - i| = 1, \\ \frac{2}{3}h, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- Matriz de rigidez:

$$K_{ij} = \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \frac{\partial \psi_i}{\partial S} dS = \begin{cases} 0, & \text{si } |j - i| \geq 2, \\ -\frac{h}{3}(3i^2 + 3i + 1), & \text{si } |j - i| = 1, \\ \frac{h}{3}(6i^2 + 2), & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- Matriz de convección:

$$C_{ij} = \int_0^{S_R} S \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \psi_i dS = \begin{cases} 0, & \text{si } |j - i| \geq 2, \\ \frac{h}{6}(3i + 1), & \text{si } j = i + 1, \\ -\frac{h}{6}(3i + 2), & \text{si } j = i - 1, \\ -\frac{h}{3}, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Para incorporar las condiciones frontera a la formulación matricial, es necesario calcular los coeficientes correspondientes a los nodos S_0 y S_R .

Los experimentos numéricos se van a realizar sobre la Put Europea de strike K , cuyas condiciones frontera se recuerda que son:

$$\begin{aligned} U(0, \tau) &= Ke^{-r\tau}, \\ U(S_R, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, sólo será preciso calcular los coeficientes correspondientes a S_0 :

$$M_{1,0} = \frac{h}{6}, \quad K_{1,0} = -\frac{h}{3}, \quad C_{1,0} = -\frac{h}{6}(3i + 2).$$

Este procedimiento conduce a una formulación matricial del problema. La matriz correspondiente al operador diferencial se define como:

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{K} + (r - \sigma^2) \mathbf{C} - r \mathbf{M} \right).$$

El intervalo temporal $[0, T]$ se discretiza en $N_t \in \mathbb{N}$ subintervalos uniformes de tamaño $k = \frac{T}{N}$, lo que define los instantes temporales:

$$t_i = ik, \quad i = 0, \dots, N_t.$$

Aplicando la regla de Euler implícita, se obtiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{U}(\tau_{i+1}) - \mathbf{U}(\tau_i)}{k} = \mathbf{A} \mathbf{U}(\tau_{i+1}) + \mathbf{b}(\tau_{i+1}), \quad (4.4)$$

donde

$$\mathbf{U}(\tau_i) = \begin{pmatrix} u_1(\tau_i) \\ u_2(\tau_i) \\ \vdots \\ u_{N_S-1}(\tau_i) \end{pmatrix},$$

y las condiciones frontera de la Put Europea se recogen en

$$\mathbf{b}(\tau_i) = \begin{pmatrix} -M_{1,0}(-rKe^{-r\tau_i}) + (Ke^{-r\tau_i}) \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 K_{1,0} + (r - \sigma^2)C_{1,0} - rM_{1,0} \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación (4.4) puede reescribirse como:

$$\mathbf{U}(\tau_{i+1}) = (\mathbf{M} - k\mathbf{A})^{-1} (\mathbf{M}\mathbf{U}(\tau_i) + k\mathbf{b}(\tau_{i+1})).$$

Denotando $\mathbf{B} = (\mathbf{M} - k\mathbf{A})^{-1}$, el esquema adquiere la forma compacta:

$$\mathbf{U}(\tau_{i+1}) = \mathbf{B} (\mathbf{M}\mathbf{U}(\tau_i) + k\mathbf{b}(\tau_{i+1})).$$

La condición inicial se impone evaluando la Put Europea en el vencimiento, es decir:

$$\mathbf{U}(0) = \begin{pmatrix} K - S_1 \\ K - S_2 \\ \vdots \\ K - S_{N_S-1} \end{pmatrix},$$

Este esquema numérico constituye la base metodológica sobre la que se desarrollan los experimentos presentados en las secciones siguientes, y ofrece la flexibilidad necesaria para abordar distintos tipos de opciones financieras mediante ajustes específicos.

A continuación, se ilustra la aplicación del esquema propuesto en la valoración de diversas opciones, adaptándolo según las particularidades de cada caso.

4.2. Valoración numérica de la Opción Europea

Para la aproximación numérica del precio de la opción Put Europea realizada mediante el método de elementos finitos se han fijado los valores de los siguientes parámetros del modelo de Black-Scholes:

- Tipo de interés libre de riesgo: $r = 0.05$.
- Volatilidad constante: $\sigma = 0.10$.

Además, se ha considerado que la opción presenta un precio de ejercicio $K = 4$ y un vencimiento $T = 1$.

En cuanto al dominio espacial, este ha sido truncado en $S_R = 8$ y discretizado para el primer experimento con un paso $h = 0.01$, mientras que para la evolución temporal se ha empleado un paso $k = 0.005$.

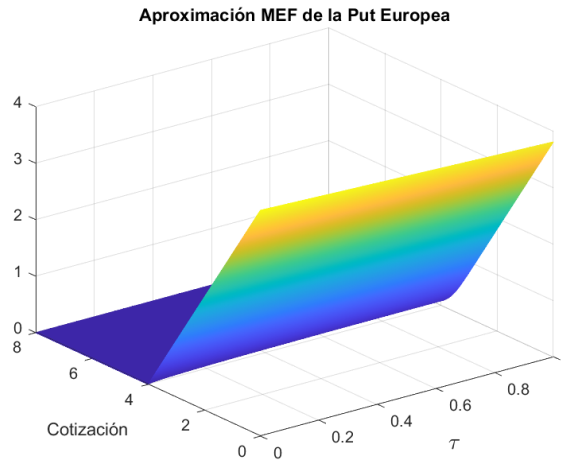


Figura 4.2: Precio de la opción Put Europea aproximado mediante el MEF.

En la Figura 4.2 se presenta la solución aproximada obtenida mediante el MEF para el precio de la opción Put Europea. Se observa que, en el instante de vencimiento, $\tau = 0$, la solución coincide con el payoff, que es una función continua pero no derivable.

Conforme avanza la variable temporal τ , equivalente a retroceder en el tiempo real t , el término difusivo presente en la ecuación de Black-Scholes induce un efecto regularizador para todo $t < T$.

Dado que para la opción europea se dispone de una solución analítica explícita (ver Capítulo 2), es posible cuantificar el error de la aproximación numérica, que

depende principalmente del tamaño de las discretizaciones.

Un análisis teórico de la convergencia del método numérico al problema de Black-Scholes puede encontrarse en [1]. A continuación, se realizará un análisis empírico de los errores espaciales y temporales por separado para comprobar si se obtienen los resultados esperados en [1].

En primer lugar, se fija un conjunto de nodos espaciales equidistantes N_0 ($N_0 = 2^8$ en los experimentos) en dominio espacial, que es donde se va a analizar el error con respecto al valor exacto.

Por ejemplo, para estimar el error cometido en la integración temporal, se ha comparado la solución numérica obtenida para distintos tamaños de paso temporal, manteniendo fija una discretización espacial suficientemente fina. En particular, se ha fijado un número elevado de divisiones espaciales $N_S = 2^7$, de modo que el error espacial resulte despreciable frente al error temporal. A partir de esta configuración, se calcula la solución numérica para distintos valores de pasos temporales $N_t \in \{2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7\}$. Como medida de error, se utiliza la raíz del error cuadrático medio (RMSE), definida como:

$$\text{RMSE}_{N_t} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} (U(S_j, T) - U^{N_t, N_S}(S_j, T))^2},$$

donde $U(S_j, T)$ representa la solución exacta en el nodo S_j , y $U^{N_t, N_S}(S_j, T)$ la aproximación numérica correspondiente con N_t pasos temporales y N_S divisiones espaciales.

De forma análoga, para analizar el error espacial se ha fijado un número elevado de pasos temporales $N_t = 2^{10}$, y se ha variado el número de divisiones espaciales $N_S \in \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4\}$, manteniendo constantes el resto de parámetros.

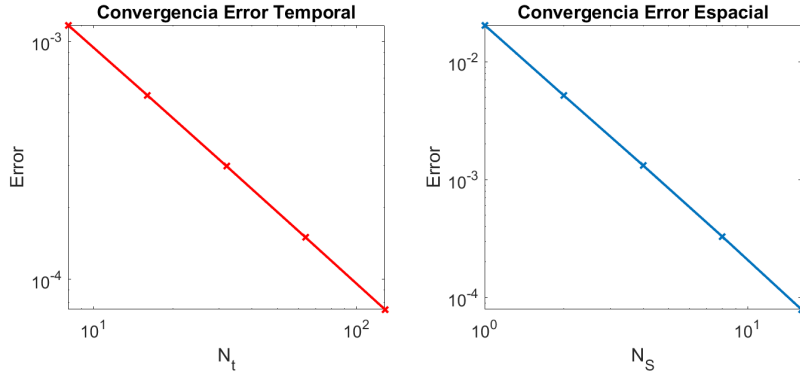


Figura 4.3: Error de la aproximación numérica: a la izquierda, error temporal; a la derecha, error espacial.

En la Figura 4.3 se han representado, en escala logarítmica, los errores calculados frente al tamaño de la discretización correspondiente. Las pendientes han sido aproximadas mediante la función *polyfit* de MATLAB.

El gráfico de la izquierda, relativo al error temporal, muestra una pendiente de -0.9930, lo que confirma el orden de convergencia lineal esperado para el método de Euler implícito. En el gráfico de la derecha, correspondiente al error espacial, se obtiene una pendiente de -1.9994, con lo que el método implementado es de orden 2 en espacio.

En caso de no observarse la reducción del error al refinar las mallas (resp. espacial/temporal), podría ser indicio de que el error que se pretende estimar aún no domina sobre el otro. En tal situación, sería necesario un mayor refinamiento de la malla (resp. temporal/espacial).

Cabe señalar que, si en lugar de una opción Put Europea se quisiera valorar una opción Call Europea, el esquema numérico descrito seguiría siendo aplicable sin modificaciones estructurales. Bastaría con ajustar la condición inicial y las condiciones de contorno de acuerdo con el nuevo tipo de opción, reflejando así la función de pago correspondiente y su comportamiento en los extremos del dominio.

4.3. Valoración numérica de la Opción Americana

A diferencia de la opción europea, la opción americana puede ejercerse en cualquier momento antes del vencimiento, lo que introduce una mayor complejidad en su valoración. Matemáticamente, el precio de una opción americana no satisface

una ecuación en derivadas parciales, sino una desigualdad variacional. Formalmente, se puede demostrar que el precio de la opción Put Americana $V_A(S, t)$ verifica:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_A}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_A}{\partial S} - rV_A \right) (V_A(S, t) - \max\{K - S, 0\}) &= 0, \\ \frac{\partial V_A}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_A}{\partial S} - rV_A &\leq 0, \\ V_A(S, t) - \max\{K - S, 0\} &\geq 0. \end{aligned}$$

La resolución de este problema requiere el uso de técnicas numéricas específicas, más sofisticadas que las utilizadas en el caso europeo, como las que pueden verse en [7].

No obstante, una alternativa práctica, y ampliamente utilizada, para aproximar el precio de la opción americana consiste en emplear *opciones bermudea* o *bermuda*, en las que el ejercicio solo es posible en un número finito de fechas predeterminadas. Esta estrategia permite aproximar el valor de la opción americana como el límite de los precios bermudeos cuando el número de fechas de ejercicio tiende a infinito.

Para ello, se definen $N_t + 1$ tiempos $t_i = \frac{iT}{N_t}$, con $i = 0, \dots, N$, de forma que el titular de la opción puede ejercer en cualquiera de esos puntos. El precio de la opción americana se aproxima entonces por el valor de esta versión discreta con un valor N_t suficientemente grande.

Desde el punto de vista computacional, el esquema descrito en la sección anterior puede adaptarse para valorar una opción Put Americana mediante dos modificaciones en el algoritmo. En primer lugar, es necesario ajustar las condiciones de contorno. Dado que esta opción puede ejercerse en cualquier momento antes del vencimiento, para $S = 0$ el valor de la opción coincide con el precio de ejercicio, esto es:

$$u_0(\tau) = K, \quad \frac{du_0}{d\tau}(\tau) = 0.$$

En segundo lugar, se introduce una comparación en cada paso temporal. Es decir, una vez calculado

$$\mathbf{U}(\tau_{i+1}) = \mathbf{B}(\mathbf{MU}(\tau_i) + k \mathbf{b}(\tau_{i+1})),$$

se actualiza la solución imponiendo el máximo entre el valor calculado y el payoff de la opción, lo que equivale a:

$$U_j(\tau_{i+1}) = \max\{K - S_j, U_j(\tau_{i+1})\}, \quad j = 1, \dots, N_S - 1.$$

De esta manera, se garantiza que el algoritmo respeta la posibilidad de ejercer anticipadamente la opción, característica distintiva del producto americano.

En la Figura 4.4 se presenta la valoración de la opción Put Americana y, junto a ella, la diferencia con respecto a la opción Put Europea, ilustrando el valor adicional que aporta la posibilidad de ejercicio anticipado. De nuevo, se han empleado los mismos valores para los parámetros del modelo de Black-Scholes:

- Tipo de interés libre de riesgo: $r = 0.05$.
- Volatilidad constante: $\sigma = 0.10$.

Asimismo, se ha considerado un precio de ejercicio $K = 4$ y un vencimiento $T = 1$.

Por otro lado, el dominio espacial se ha truncado en $S_R = 8$, con pasos de discretización $h = 0.01$ y $k = 0.005$ en el espacio y en el tiempo, respectivamente.

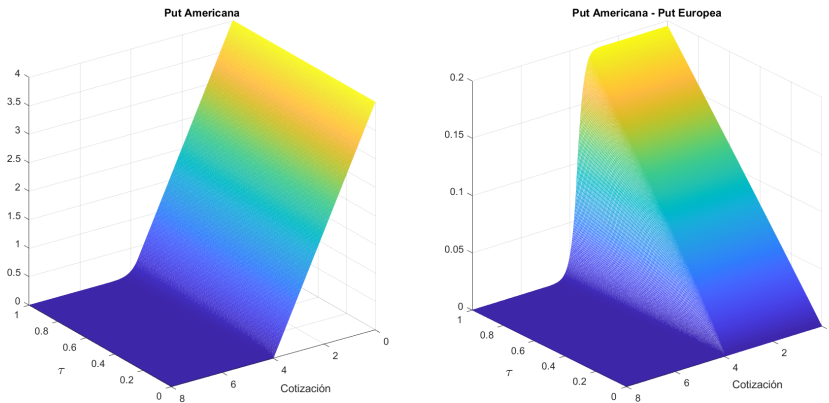


Figura 4.4: Valoración numérica de la opción Americana: a la izquierda, precio de la opción Put Americana aproximado mediante el MEF; a la derecha, diferencia de valores entre las opciones Put Americana y Put Europea.

4.4. Valoración numérica de la Opción Barrera

Se concluye este capítulo con la valoración de una opción Put Europea con barrera del tipo *down-and-out*, un derivado financiero que se anula automáticamente

si el precio del activo subyacente cae por debajo de un determinado umbral, tal como se explicó en el Capítulo 1.

En este experimento, se ha fijado la barrera en $S = 1$, un punto que pertenece explícitamente a la malla espacial construida. De este modo, basta con imponer como condición de contorno

$$U(S, \tau) = 0, \text{ para todo } \tau \in [0, T] \text{ y todo } S \leq 1,$$

lo que implica que el valor de la opción se anula automáticamente cuando el precio del activo alcanza dicha barrera.

Esta es la única modificación que requiere el algoritmo respecto al esquema previamente implementado para la opción Put Europea sin barrera.

Para mantener la coherencia con los experimentos previos, se han utilizado los mismos parámetros:

- Tipo de interés libre de riesgo: $r = 0.05$.
- Volatilidad constante: $\sigma = 0.10$.
- Precio de ejercicio: $K = 4$.
- Vencimiento: $T = 1$.
- Dominio espacial truncado en $S_R = 8$, con pasos $h = 0.01$ y $k = 0.005$ en el espacio y en el tiempo, respectivamente.

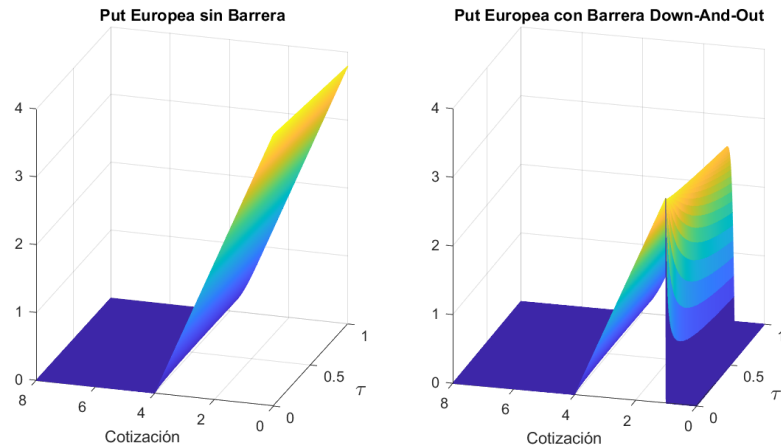


Figura 4.5: Valoración numérica de la opción Barrera: a la izquierda, precio de la opción Put Europea sin barrera aproximado mediante el MEF; a la derecha, precio de la opción Put Europea con barrera aproximado mediante el MEF.

Desde el punto de vista financiero, esta restricción adicional reduce los derechos o impone condiciones para el comprador, lo que justifica que el precio de la opción Put Europea con barrera sea más bajo que el de la opción Put Europea estándar. Esta diferencia puede observarse en la Figura 4.5, donde se muestran ambas valoraciones.

Por otro lado, cabe destacar que la presencia de la barrera en $S = 1$ introduce una discontinuidad de salto en la solución en el instante de vencimiento. No obstante, como en casos anteriores, se aprecia el efecto regularizante propio de la EDP parabólica de Black-Scholes para todo $t < T$, suavizando de forma inmediata dicha discontinuidad.

Conclusiones

El presente trabajo ha abordado la valoración de derivados financieros mediante la formulación variacional de la ecuación de Black-Scholes y su resolución numérica a través del método de elementos finitos (MEF). Este enfoque ha permitido aproximar de forma eficaz el precio de distintos productos derivados, como opciones Put Europea, Americana y de tipo barrera, adaptando el esquema a las particularidades de cada contrato.

En el caso de la Put Europea, la disponibilidad de una solución analítica ha hecho posible cuantificar el error numérico asociado a la discretización, confirmando empíricamente el orden de convergencia del método tanto en el espacio como en el tiempo. Por otro lado, la implementación de las opciones Put Americana y barrera ha puesto de manifiesto la flexibilidad del método empleado, permitiendo tratar productos más complejos mediante ajustes puntuales en las condiciones del modelo.

No obstante, el modelo de Black-Scholes presenta limitaciones importantes. Entre ellas destacan la hipótesis de volatilidad constante, la inexistencia de saltos en los precios, o el supuesto de mercados perfectamente eficientes. Estas suposiciones, aunque útiles desde el punto de vista teórico, no siempre reflejan con fidelidad el comportamiento real de los mercados financieros.

Con el fin de superar estas limitaciones, en los últimos años se han propuesto modelos más sofisticados, que constituyen líneas de investigación activa. Por ejemplo, los modelos de volatilidad estocástica, como el de Heston, permiten una evolución aleatoria de la volatilidad, ajustándose mejor a los datos del mercado. Asimismo, el uso de técnicas numéricas avanzadas, como redes neuronales o métodos espectrales, está ganando protagonismo en el ámbito de la valoración financiera.

Por otro lado, enfoques más recientes se apoyan en el uso de ecuaciones diferenciales fraccionarias, que introducen memoria en la dinámica de los precios, rompiendo con la hipótesis markoviana subyacente al modelo clásico. Si bien su

implementación supone un mayor reto, ofrecen un marco más flexible y realista para capturar ciertas anomalías observadas en la práctica.

En definitiva, este trabajo ofrece una primera aproximación rigurosa a la valoración numérica de derivados financieros desde una perspectiva matemática. Aunque el modelo considerado y la metodología empleada incluyen ciertas simplificaciones, permiten comprender con claridad los fundamentos teóricos y computacionales del problema. Este enfoque puede servir como punto de partida para el estudio de modelos más avanzados, que representan un desafío tanto desde el punto de vista matemático como computacional.

Bibliografía

- [1] ACHDOU, Y., AND PIRONNEAU, O. *Computational Methods for Option Pricing*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [2] BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, 2017.
- [3] BJÖRK, T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2009.
- [4] BLACK, F., AND SCHOLES, M. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *The Journal of Finance* 27, 2 (1972), 399–417.
- [5] BLACK, F., AND SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* 81, 3 (1973), 637–654.
- [6] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [7] DE FRUTOS, J. Implicit-explicit runge-kutta methods for financial derivatives pricing models. *European Journal of Operational Research* 171, 3 (2006), 991–1004.
- [8] ERN, A., AND GUERMOND, J.-L. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer, 2004.
- [9] KANGRO, R., AND NICOLAIDES, R. Far field boundary conditions for black-scholes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38, 4 (2000), 1357–1368.
- [10] KARATZAS, I., AND SHREVE, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1998.
- [11] KUO, H.-H. *Introduction to Stochastic Integration*. Springer, 2006.
- [12] ROBINSON, J. C. *An Introduction to Functional Analysis*. Cambridge University Press, 2020.

- [13] SALSA, S. *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*. Springer, 2008.
- [14] VELASCO COLLADO, M. V. Apuntes de la asignatura de Análisis Funcional. Material de clase no publicado, Universidad de Granada, curso 2023-2024.
- [15] WILMOTT, P. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Wiley, 2010.