Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias y algunas aplicaciones.

Autor: Ignacio Arias Barroso

Tutores: Óscar Angulo Torga
Juan Carlos López Marcos

Curso: 2024-2025

Resumen

Este trabajo profundiza en la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden utilizando series de potencias. Su objetivo consiste en analizar cómo las ecuaciones con coeficientes variables pueden ser resueltas mediante series de potencias, especialmente en casos donde las soluciones no son fácilmente obtenibles mediante métodos habituales. Se completa con el estudio de ecuaciones diferenciales que dan origen a funciones especiales y su aplicación en modelos relevantes de la física.

Palabras clave

Serie de potencias, funciones especiales, punto ordinario, punto singular regular, método de Frobenius, ecuación indicial, ecuación de Airy, ecuación de Bessel, ecuación de Legendre.

Abstract

This work studies the solution of second-order differential equations using power series methods. The main objective is to analyze how equations with variable coefficients can be solved through power series expansions, particularly in cases where closed-form solutions are not readily available. Some differential equations that give rise to special functions and their application in relevant physical models are also studied.

Keywords

Power series, special functions, ordinary point, regular singular point, Frobenius´ method, indicial equation, Airy´s equation, Bessel´s equation, Legendre´s equation.

Índice general

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias ocupan un lugar importante en el desarrollo de la matemática aplicada y la física ya que permiten modelar una gran variedad de fenómenos naturales y tecnológicos. Dentro de ellas, las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes variables destacan por su capacidad para describir sistemas donde las interacciones no son uniformes, como ocurre en numerosos contextos físicos.

La presencia de coeficientes no constantes introduce, sin embargo, importantes dificultades técnicas a la hora de obtener soluciones explícitas. Los métodos clásicos de resolución, como la separación de variables o la integración directa, suelen volverse ineficaces o directamente inaplicables en estos casos. Es en este contexto donde el desarrollo en series de potencias se convierte en una herramienta fundamental, permitiendo construir soluciones formales mediante expansiones locales centradas en un punto.

La idea principal parte de suponer que la solución puede expresarse como una serie infinita de potencias de la variable independiente, cuyos coeficientes se determinan sustituyendo dicha expresión en la ecuación original. Cuando los coeficientes de la ecuación son funciones analíticas, este procedimiento garantiza la existencia de una solución también analítica en torno a puntos ordinarios. El estudio de esta técnica permite no solo resolver ecuaciones concretas, sino también comprender en profundidad la estructura matemática de sus soluciones y su dependencia respecto a las propiedades locales de los coeficientes.

Cuando el punto de desarrollo es un punto singular regular, la técnica puede extenderse mediante el método de Frobenius, que permite obtener soluciones en forma de series generalizadas. Estas soluciones pueden incluir potencias fraccionarias o incluso términos logarítmicos, lo cual amplía considerablemente el abanico de ecuaciones que pueden resolverse y conecta directamente con la teoría de funciones especiales.

Como aplicación de estas ideas, este trabajo incluye el estudio detallado de tres ecuaciones diferenciales fundamentales, la ecuación de Airy, la ecuación de Bessel y la ecuación de Legendre. Estas surgen en diversos contextos físicos y sus soluciones, las funciones de Airy, de Bessel y la solución de la ecuación de Legendre, son ejemplos de funciones especiales que se obtienen mediante el desarrollo en series de potencias. Su análisis permite ilustrar la importancia del método tanto desde el punto de vista formal como en aplicaciones concretas, como la difracción de la luz, la propagación de ondas en medios no homogéneos o modelos relacionados con la propagación del calor, la vibración de membranas en sistemas cilíndricos o el cálculo de potenciales en sistemas esféricos.

A lo largo del trabajo se combinan el rigor matemático y el tratamiento detallado de ejemplos para ilustrar los distintos escenarios posibles, tanto en torno a puntos ordinarios como a puntos singulares regulares. Además, se destaca la conexión entre la teoría matemática y su aplicabilidad en problemas reales, subrayando el papel esencial que juegan las funciones especiales en la modelización de fenómenos físicos complejos.

Capítulo 1

EDOs lineales de segundo orden con coeficientes no constantes. Puntos ordinarios

En este primer capítulo se introducen las ecuaciones con las que se va a trabajar a lo largo de toda la exposición y se aborda su resolución y algunos ejemplos concretos en torno a puntos ordinarios. Para ello, se toman como referencia los libros [1], [2] y [3].

1.1. Contextualización

En general, no existe un procedimiento de resolución que pueda aplicarse a todas las ecuaciones diferenciales ordinarias, pero puede obtenerse de manera explícita la solución para ciertos casos particulares. Para las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes sí existe un procedimiento detallado para la obtención de la solución que se basa en encontrar raíces de la ecuación característica asociada. Por otro lado, para coeficientes variables existen algunos métodos como el de reducción de orden, que requiere conocer previamente una solución de la ecuación homogénea asociada.

Esta carencia de métodos de resolución, motiva el empleo de otros métodos, como el desarrollo en serie de potencias de la solución, lo que será el enfoque central de este trabajo.

Teniendo presentes los resultados generales de la teoría de ecuaciones diferenciales presentados en el apéndice A, este trabajo pondrá el foco en la solución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes no constantes, principalmente en las homogéneas, puesto que son aquellas con mayor número de aplicaciones en diversos ámbitos de la física. Estas aplicaciones físicas también serán comentadas a lo largo de este trabajo.

Antes de comenzar con el enunciado de diferentes resultados, debe mencionarse que durante todo el trabajo no se especificará la variable de la función solución salvo en los casos en los que sea estrictamente necesario.

Sean $a_0(x)$, $a_1(x)$ y $a_2(x)$ funciones definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Dada la ecuación diferencial ordinaria homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{1.1}$$

se puede expresar formalmente en su **forma canónica** dividiendo entre el primer coeficiente $a_2(x)$, obteniendo así:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

donde, de nuevo $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.

A continuación, se distinguen los puntos de la recta real con respecto a la analiticidad de los coeficientes de la ecuación diferencial:

Definición 1.1.1. *Un punto x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial* (1.1) *si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son analíticas en x_0. En caso contrario, se denomina **punto singular** de la ecuación.*

Observación 1.1.2. *Si se tiene el caso específico de que la ecuación* (1.1) *tenga coeficientes polinomiales, de la definición anterior se sigue que, si $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes, un punto x_0 será:*

1. *Un punto ordinario si $a_2(x_0) \neq 0$.*
2. *Un punto singular si $a_2(x_0) = 0$.*

Véanse los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1.3. *En la ecuación*

$$y'' - xy = 0,$$

conocida como Ecuación de Airy, que será estudiada más adelante, todos los puntos $x = x_0$ son ordinarios puesto que tanto $P(x) = 0$ como $Q(x) = -x$ son funciones analíticas en todos los puntos de la recta real.

Ejemplo 1.1.4. *Por otro lado, en la ecuación*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

llamada Ecuación de Bessel, que también será estudiada, no todos los puntos son ordinarios. Puesto que los coeficientes de la ecuación son polinomiales, puede usarse la observación 1.1.2. Así, como $a_2(x) = x^2$ se puede afirmar que en esta ecuación el punto $x_0 = 0$ es un punto singular, mientras que el resto de puntos $x_0 \neq 0$ son puntos ordinarios.

1.2. Puntos ordinarios

En esta sección se presentarán los resultados necesarios para el estudio y la obtención de la solución para las ecuaciones consideradas en torno a puntos ordinarios apoyándose en [4], además de las referencias citadas al inicio del capítulo.

Del teorema A.3.2 se sigue que si x_0 es un punto ordinario, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \\ y(x_0) = y_{1,0}, \\ y'(x_0) = y_{2,0}, \end{cases}$$

tiene una única solución en el intervalo J que contiene a x_0 y no contiene ceros de $a_2(x)$.

Si los coeficientes a_0, a_1 y a_2 y el término independiente b tienen extensiones analíticas en un disco centrado en el punto x_0 y, además $a_2(x_0) \neq 0$, la ecuación se puede replantear en variable compleja, es decir, $y(z)$, como función analítica en un entorno de $z_0 = x_0$:

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = D(z),$$

con $P = a_1/a_2$, $Q = a_0/a_2$ y $D = b/a_2$.

Teorema 1.2.1. *Se considera la ecuación diferencial lineal de orden 2 en la incógnita y, función de variable compleja; es decir, una ecuación del tipo*

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = D(z). \tag{1.2}$$

Al sustituir en (1.2) *cada función por su serie de potencias en torno a* z_0 *se obtienen ecuaciones cuyas incógnitas son los coeficientes de la serie de potencias que representa a* $y(z)$, *y que pueden ser resueltas recurrentemente a partir de los coeficientes de orden* $0, 1, \dots, p-1$. *esto es, los valores iniciales del problema de Cauchy asociado. Si los coeficientes* P, Q *y* D *son analíticos en* $B(z_0, R)$ *todas las soluciones de la ecuación* (1.2) *son analíticas en ese mismo disco.*

Demostración. Por hipótesis, las funciones $P(z)$, $Q(z)$ y $D(z)$ son analíticas en $B(z_0, R)$, luego admiten desarrollo en serie de potencias en torno a z_0 convergente en $B(z_0, R)$. Se propone formalmente como solución

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{1.3}$$

Aplicando el resultado B.2.8 es posible derivar la serie término a término dentro de esta bola y, por tanto, la primera y segunda derivada de la solución vienen dadas por:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z - z_0)^{n-2}.$$

Estas series tienen el mismo radio de convergencia que (1.3), lo cual justifica su sustitución en la ecuación (1.2) llegando a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z - z_0)^{n-2} + P(z) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} + Q(z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = D(z). \tag{1.4}$$

Por otro lado, como se ha mencionado antes $P(z)$, $Q(z)$ y $D(z)$ admiten desarrollos en serie de potencias en torno a z_0:

$$P(z)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m(z-z_0)^m,\quad Q(z)=\sum_{m=0}^{\infty}q_m(z-z_0)^m,\quad D(z)=\sum_{m=0}^{\infty}d_m(z-z_0)^m,$$

convergentes en $B(z_0,R)$. Se efectúan los productos de Cauchy correspondientes:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2}+\sum_{m=0}^{\infty}p_m(z-z_0)^m\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1}\\&+\sum_{m=0}^{\infty}q_m(z-z_0)^m\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{m=0}^{\infty}d_m(z-z_0)^m.\end{aligned}$$

Ahora, es necesario operar los diferentes términos de esta suma para tratar de expresarlos todos en un único sumatorio. Por un lado, en el primer término realizando la traslación de índices $k=n-2$ se llega a:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}(z-z_0)^k.$$

Por otro lado, en el segundo y tercer término se opera usando la propiedad distributiva:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_m n c_n(z-z_0)^{m+n-1},\quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}q_m c_n(z-z_0)^{m+n}.$$

Posteriormente, en el segundo término se aplica la traslación de índices $k=m+n-1$ obteniendo la expresión:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}p_m(k-m+1)c_{k-m+1}\right)(z-z_0)^k,$$

donde el límite superior de la suma interna k viene dado porque se está considerando $n\geq 1$, lo cual implica $k-m+1\geq 1$, es decir, $m\leq k$. Por otro lado, en el tercer término se aplica la traslación de índices $k=m+n$ llegando a:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}q_m c_{k-m}\right)(z-z_0)^k,$$

donde, de nuevo, el límite superior de la suma interna es k ya que en esta ocasión, se está tomando $n\geq 0$, lo cual implica $k-m\geq 0$, es decir, $m\leq k$. Y finalmente, en cuanto al término independiente, basta con realizar el cambio de índice $k=m$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k.$$

Esta reordenación realizada en el segundo y tercer término se justifica gracias a que $P(z)$, $Q(z)$ y $D(z)$ son analíticas en un entorno de z_0 y, por tanto, sus desarrollos convergen absolutamente en el intervalo de convergencia que contenga a z_0. Por el teorema B.2.9 es lícito reordenar los términos y reagruparlos según potencias de $(z-z_0)^k$. En particular, se puede conmutar el orden de sumación en las sumas dobles y luego reagrupar por potencias. Sustituyendo ahora en (1.4) se llega a:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{m=0}^{k}p_m(k-m+1)c_{k-m+1}+\sum_{m=0}^{k}q_m c_{k-m}\right)(z-z_0)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k,$$

que, operando con el término independiente puede escribirse así:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{m=0}^{k}p_m(k-m+1)c_{k-m+1}+\sum_{m=0}^{k}q_m c_{k-m}-d_k\right)(z-z_0)^k=0.$$

Observando esta expresión, para que se cumpla para todo $z\in B(z_0,R)$ cada uno de los coeficientes del sumatorio debe valer cero. Entonces, despejando se tiene la siguiente relación:

$$c_{k+2}=\frac{1}{(k+2)(k+1)}[d_k-\sum_{m=0}^{k}(p_m(k-m+1)c_{k-m+1}+q_m c_{k-m})]. \tag{1.5}$$

Se observa que el valor del coeficiente c_{k+2} de la solución final depende de los valores de los $k+1$ coeficientes anteriores y que, por tanto, los dos primeros c_0 y c_1 son libres y pueden ser determinados de forma arbitraria una vez fijadas las condiciones iniciales. Así, c_{k+2} se obtiene de manera unívoca.

Respecto a la convergencia de la serie solución, se busca demostrar que esta converge también en el disco $B(z_0,R)$. El objetivo es probar que, para cualquier $0<\rho<R$, existe una constante C (dependiente de ρ) tal que

$$|c_n|\le C\rho^{-n}\quad \text{para cada } n=0,1,2,\dots,$$

de donde se deduce la convergencia normal de $y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ en los compactos de $B(z_0,R)$. Se demostrará por inducción, así, se supone que ya se han establecido las acotaciones $|c_m|\le C\rho^{-m}$ para $0\le m\le k+1$. De (1.5), tomando módulos y aplicando la desigualdad triangular se sigue que

$$|c_{k+2}|\le|d_k|+\sum_{m=0}^{k}\frac{k-m+1}{(k+2)(k+1)}|p_m|\,|c_{k-m+1}|+\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{(k+2)(k+1)}|q_m|\,|c_{k-m}|. \tag{1.6}$$

Las series $\sum_{m=0}^{\infty}p_m(z-z_0)^m$ y $\sum_{m=0}^{\infty}q_m(z-z_0)^m$ son convergentes, entonces, por B.2.11 se verifica que

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|p_k|}\le\frac{1}{R},$$

(en el caso de que $R=\infty$ se toma 0 en lugar de $1/R$). También se tiene que

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{(k+1)\,|p_k|}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|p_k|},$$

por el lema B.2.12, por lo que, fijado $0 < \rho < R$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de la sucesión $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$) con

$$\sqrt[k]{(k+1)\,|p_k|} < \frac{1}{\rho}, \quad k \geq k_0.$$

Análogamente, sucede con los coeficientes q_k y d_k, de donde se sigue que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\max\{|p_k|\,, |q_k|\,, |d_k|\} \leq \frac{M}{(k+1)\rho^k}, \quad \text{para cada } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Llevando esto a (1.6), como $|c_m| \leq C\rho^{-m}$ para $0 \leq m \leq k+1$, por la hipótesis de inducción, se llega a

$$\begin{aligned} |c_{k+2}| &\leq \frac{M}{(k+1)\rho^k} + \frac{1}{(k+1)} \sum_{m=0}^{k} \frac{M}{(m+1)\rho^m} \frac{C}{\rho^{k-m+1}} + \frac{1}{(k+1)} \sum_{m=0}^{k} \frac{M}{(m+1)\rho^m} \frac{C}{\rho^{k-m}} \\ &= \frac{C}{\rho^{k+2}} \left(\frac{M\rho^2}{C(k+1)} + \frac{M(\rho+\rho^2)}{(k+1)} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m+1} \right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Nótese que, si desde el comienzo se toma la constante $C \geq 1$, el factor que aparece entre paréntesis en (1.7) está mayorado por

$$L_k = M \frac{\rho^2 + (\rho+\rho^2) S_{k+1}}{(k+1)},$$

donde S_k hace referencia a la k-ésima suma armónica, que crece hacia el infinito como $\ln(n)$. Así pues, la sucesión $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiende hacia cero cuando n tiende hacia infinito y, por tanto, será menor que 1 de un k_0 en adelante. Teniendo en cuenta esto, se define

$$C = \max\{1, \max\{|c_m|\,\rho^m : 0 \leq m \leq k_0\}\},$$

entonces, la desigualdad $|c_k| \leq C\rho^{-k}$ se verifica por definición para $k \leq k_0$, y si $k > k_0$ y se supone cierta la propiedad para $0 \leq m \leq k+1$, como $L_k \leq 1$ se deduce de (1.7) que también $|c_{k+2}| \leq C\rho^{-k-2}$. Así, aplicando inducción en m se llega a la conclusión buscada. □

Durante la demostración previa, en la parte referida a la obtención de la solución en forma de serie de potencias se ha visto que los coeficientes c_0 y c_1 pueden ser determinados de forma arbitraria. Así, dando dos valores iniciales distintos $(c_{0,1}, c_{1,1})$ y $(c_{0,2}, c_{1,2})$ se obtendrán dos soluciones diferentes y_1, y_2 respectivamente. Respecto a la independencia lineal de estas, en el caso de que se esté trabajando con una ecuación homogénea, puesto que las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en el punto en el cual se está trabajando, son también continuas en x_0 y, por tanto, por el resultado A.3.1 estas dos soluciones presentadas serían además linealmente independientes si los valores $(c_{0,1}, c_{1,1})$ y $(c_{0,2}, c_{1,2})$ lo son.

De hecho, esta demostración da una idea sobre el procedimiento que se suele emplear para obtener una solución en forma de serie de potencias para la ecuación (1.2) en un punto ordinario. Se deben calcular dos series de potencias y_1, y_2, esto es, dos conjuntos de coeficientes c_n desarrollados en torno al punto. Estas series serán calculadas como se hace en la demostración, suponiendo que son solución de la ecuación y, a partir de ahí, se determina el valor de los coeficientes c_n. Así, la solución general de la ecuación diferencial será una combinación lineal de ambas

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

En el caso de que ecuación a resolver presente una determinada forma, existe un teorema que permite describir la forma concreta de la solución como serie de potencias centrada en el punto x_0.

Teorema 1.2.2. *Los coeficientes c_n en una solución en serie de potencias*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \tag{1.8}$$

centrada en x_0 para una ecuación del tipo

$$(1 + \alpha(x - x_0)^2)y'' + \beta(x - x_0)y' + \gamma y = 0, \tag{1.9}$$

satisfacen la relación de recurrencia

$$c_{n+2} = -\left(\frac{p(n)}{(n+2)(n+1)}\right) c_n, \quad n \geq 0, \tag{1.10}$$

donde

$$p(n) = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma.$$

De hecho, los coeficientes de las potencias pares e impares de $(x - x_0)$ pueden calcularse de forma separada como

$$c_{2m+2} = -\frac{p(2m)}{(2m+2)(2m+1)} c_{2m}, \quad m \geq 0, \tag{1.11}$$

y

$$c_{2m+3} = -\frac{p(2m+1)}{(2m+3)(2m+2)} c_{2m+1}, \quad m \geq 0, \tag{1.12}$$

donde c_0 y c_1 son arbitrarios.

Demostración. En estas condiciones, el teorema 1.2.1 garantiza que $y(x)$, solución de (1.9) es analítica en un entorno de x_0. Por tanto, se busca una solución de la forma (1.8). Por el resultado B.2.8 es posible derivar la serie término a término dentro de este intervalo. La primera y segunda derivada de la solución vienen dadas por:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2}.$$

Introduciendo estas derivadas calculadas en (1.9) se llega a

$$(1+\alpha(x-x_0)^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2}+\beta(x-x_0)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}+\gamma\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = 0,$$

lo cual puede ser operado de la siguiente forma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}[\alpha n(n-1) + \beta n + \gamma]c_n(x-x_0)^n = 0.$$

Sustituyendo $p(n)$ por su definición, presentada en el enunciado del teorema, se tiene la siguiente ecuación:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n)c_n(x-x_0)^n = 0.$$

Para poder operar y agrupar las potencias de $(x - x_0)$ se realiza la traslación de índices $k = n-2$ en el primer sumando y se sustituye $k = n$ en el segundo sumando y se llega así a

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} + p(k)c_k](x-x_0)^k = 0.$$

Esta igualdad se verificará si y solo si para cada $k \geq 0$ se tiene que

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + p(k)c_k = 0,$$

lo cual es equivalente a (1.10). Y finalmente, separando los casos pares e impares $k = 2m$ y $k = 2m+1$ se obtienen las dos relaciones (1.11) y (1.12). □

Obsérvese el siguiente ejemplo en el que se hace aplicación de este teorema:

Ejemplo 1.2.3. ***Determinar una solución general en forma de serie de potencias en torno al punto ordinario $x = 0$ para la siguiente ecuación:***

$$y''(x) + \frac{x}{2}y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = 0. \tag{1.13}$$

Puesto que los coeficientes de (1.13) *son polinomiales y $a_2(x) \neq 0$ para todo x, todos los puntos de la recta serán puntos ordinarios. Por tanto puede buscarse una solución en forma de serie de potencias centrada en cualquier $x = x_0$. Se buscará una solución centrada en $x_0 = 0$ que, por tanto, será de la forma:*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{1.14}$$

Puesto que (1.13) *verifica las hipótesis del teorema 1.2.2 puede aplicarse el procedimiento descrito en él. En este caso,*

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{1}{2}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Entonces según el teorema 1.2.2, los coeficientes la solución (1.14) *satisface la recurrencia* (1.10) *donde*

$$p(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Incluyendo esto en la forma general de la recurrencia se llega a que los coeficientes de (1.14) *deben cumplir:*

$$c_{n+2} = -\frac{1}{2(n+2)}c_n, \quad n \geq 0.$$

De esta relación pueden separarse los coeficientes pares e impares siguiendo el teorema 1.2.2 llegando a que, por un lado, para los coeficientes pares se tiene:

$$c_{2n+2} = -\frac{1}{2(2n+2)}2n = -\frac{1}{4(n+1)}c_{2n}, \quad n \geq 0,$$

luego

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n n!}c_0, \quad n \geq 1.$$

Y, por otro lado, para los coeficientes impares se tiene:

$$c_{2n+3} = -\frac{1}{2(2n+2)}c_{2n+1}, \quad n \geq 0,$$

por lo que

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n \prod_{k=1}^{n}(2k+1)}c_1, \quad n \geq 1.$$

Así, dando valores adecuados a c_0 y c_1 se obtienen dos soluciones linealmente independientes para la ecuación (1.13)*:*

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!}x^{2n}, \quad (c_0 = 1, c_1 = 0),$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \prod_{k=1}^{n}(2k+1)}x^{2n+1}, \quad (c_0 = 0, c_1 = 1),$$

Y, por tanto, la solución general de (1.13) *es*

$$y(x) = c_0\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!}x^{2n}\right] + c_1\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \prod_{k=1}^{n}(2k+1)}x^{2n+1}\right], \tag{1.15}$$

donde c_0 y c_1 son constantes arbitrarias que serán determinadas por las condiciones iniciales y, por convención los productos vacíos para $n = 0$ que aparecen en los denominadores de las series valen 1.

En el caso de que la ecuación a resolver no sea de la forma (1.9) el cálculo de los coeficientes de la serie solución es más complicado, pero también puede llevarse a cabo siguiendo un método basado en la demostración del teorema 1.2.1. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.4. ***Determinar una solución general en forma de serie de potencias en torno al punto ordinario*** $x = 0$ ***para la siguiente ecuación***

$$y'' + x^3 y = 0. \tag{1.16}$$

En primer lugar, se supone la solución en forma de serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1.17}$$

derivando término a término, haciendo uso del resultado B.2.8 y sustituyendo esta serie de potencias en la ecuación original (1.16) *se tiene*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = 0. \tag{1.18}$$

Ahora, para tratar de simplificar la expresión obtenida en (1.18) *se realizan dos traslaciones de índices tratando de obtener en todos los sumatorios que el término general sea una constante multiplicada por* x^k. *Así, en el primer sumatorio se hace la traslación* $k = n - 2$ *y en el segundo sumatorio se hace la traslación* $k = n + 3$. *Así, la ecuación* (1.18) *puede escribirse como sigue:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-3}x^k = 0,$$

de donde pueden separarse los tres primeros términos ($k = 0, 1, 2$) *del primer sumatorio para llegar a la expresión simplificada*

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_{k-3}\right]x^k = 0. \tag{1.19}$$

Para que se verifique la ecuación (1.19) *para todo* x, *debe cumplirse que:*

- $2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0.$
- $6a_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = 0.$
- $12a_4 = 0 \Leftrightarrow a_4 = 0.$
- $$(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_{k-3} = 0, \quad k \geq 3,$$

  lo cual lleva a la relación de recurrencia

  $$a_{k+5} = -\frac{a_k}{(k+5)(k+4)}. \tag{1.20}$$

Así, la relación (1.20) *junto con los valores nulos de* a_2, a_3 *y* a_4 *llevan a concluir que los términos* a_m *con* m *congruente con* $i = 2, 3, 4$ *módulo* 5 *serán nulos y, por tanto, en la serie solución* (1.17) *únicamente habrá potencias del tipo* x^m *con* m

siendo múltiplo de 5 (cuyos coeficientes dependerán del valor de a_0) o m congruente con 1 módulo 5 (cuyos coeficientes dependerán del valor de a_1). Así, dando valores arbitrarios a a_0 y a_1 pueden obtenerse dos soluciones linealmente independientes:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^{k}(5j)(5j-1)} x^{5k}, \quad (a_0 = 1, a_1 = 0).$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^{k}(5j+1)(5j)} x^{5k+1}, \quad (a_0 = 0, a_1 = 1).$$

Por tanto, realizando una combinación lineal de ambas, la solución final será

$$y(x) = a_0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^{k}(5j)(5j-1)} x^{5k} \right] + a_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^{k}(5j+1)(5j)} x^{5k+1} \right],$$

donde, por convención los productos vacíos para $k = 0$ que aparecen en los numeradores de las series valen 1.

Tanto el método que se basa en la demostración del teorema 1.2.1, como el caso particular presentado en el teorema 1.2.2 pueden usarse también para resolver problemas con valores iniciales. Por ejemplo, en el caso concreto del ejemplo 1.2.3, si se hubieran dado como datos los valores de $y(0)$ y de $y'(0)$, observando la serie (1.15) se tendría que $c_0 = y(0)$ y $c_1 = y'(0)$ y de esta forma, se llegaría a una solución particular para el problema de valores iniciales.

Cabe mencionar que aunque los coeficientes no sean polinomiales, también se puede usar este método como se observa en el siguiente ejemplo tomado de [1].

Ejemplo 1.2.5. ***Obtener una solución general en forma de serie de potencias para la siguiente ecuación***

$$y''(x) + (\cos x)y(x) = 0. \tag{1.21}$$

A partir del desarrollo de Taylor $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ se observa que el punto $x = 0$ es un punto ordinario y, por tanto, se puede tomar como solución la serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Derivando la solución supuesta e introduciéndolo ahora en la ecuación (1.21) se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + (\cos x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

y sustituyendo el coseno por su desarrollo de Taylor mencionado antes se llega a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
$$= (2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \cdots) + (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$$
$$= 2c_2 + c_0 + (6c_3 + c_1)x + (12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0)x^2 + (20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1)x^3 + \cdots = 0.$$

Como esta última expresión debe valer cero para verificar la ecuación propuesta en el enunciado, se debe cumplir que

$$2c_2 + c_0 = 0, \quad 6c_3 + c_1 = 0, \quad 12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0, \quad 20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0, \quad \dots .$$

Como tanto c_0 como c_1 son arbitrarias, estas relaciones dadas anteriormente conducen a las dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = c_0[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots], \quad y_2(x) = c_1[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \cdots].$$

Como la ecuación diferencial no tiene puntos singulares, y verifica las condiciones del teorema 1.2.1, estas series convergen para cualquier valor finito de x y, por tanto, la solución general de la ecuación (1.21) será $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ siendo A y B constantes.

Observación 1.2.6. *En ocasiones, las relaciones de recurrencia resultan demasiado complejas o difíciles de hallar explícitamente, lo cual hace que sea imposible determinar la forma exacta de los coeficientes a_n de la serie solución.*

Cabe mencionar también que los desarrollos en serie de potencias son más fáciles de manejar si están construidos en torno a $x_0 = 0$ que si están centrados en otro punto. Si se busca calcular el desarrollo en un punto $x_0 \neq 0$, podría realizarse un sencillo cambio de variable (que después habría que deshacer) del tipo $t = x \pm k$ siendo k la distancia del punto pedido al origen.

En todo el texto anterior y los ejemplos presentados, se ha mostrado cómo este método funciona para la resolución de ecuaciones homogéneas. Pero, apoyándose en el teorema 1.2.1 también se puede aplicar, con ciertas modificaciones, a las ecuaciones no homogéneas del tipo

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = D(x),$$

siempre que el término que se encuentra a la derecha de la igualdad $D(x)$, llamado fuente o sumidero, y las funciones coeficientes sean analíticas en x_0.

Capítulo 2

Resolución de las ecuaciones en puntos singulares. Método de Frobenius

El método descrito en la sección 1.2 resulta útil para encontrar soluciones en forma de serie de potencias en torno a puntos $x = x_0$ ordinarios; sin embargo, cuando se trata de buscar soluciones en torno a puntos singulares, se deben añadir hipótesis más restrictivas para buscar soluciones en forma de series de potencias para las ecuaciones que se presenten.

En este capítulo se presentarán los resultados necesarios para el estudio y la solución de ecuaciones diferenciales en torno a puntos singulares regulares, puesto que la resolución en puntos singulares irregulares resulta considerablemente más compleja y escapa al alcance de este trabajo. Principalmente se han empleado como referencias en la redacción de este capítulo [1] y [2].

2.1. Caracterización de los puntos singulares

En el capítulo 1 se distinguen los puntos ordinarios de los regulares. En el contexto de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, los puntos singulares se dividen a su vez en regulares e irregulares. Se considera de nuevo la ecuación en su forma canónica

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{2.1}$$

Definición 2.1.1. *Diremos que un punto singular $x = x_0$ de la ecuación (2.1) es un* ***punto singular regular*** *si tanto $(x - x_0)P(x)$ como $(x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0. En caso contrario, diremos que x_0 es un* ***punto singular irregular*** *.*

Obsérvense los siguientes ejemplos de los diferentes tipos de puntos presentados en la definición previa:

Ejemplo 2.1.2. *En el ejemplo 1.1.4 se vio que la ecuación de Bessel*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

presenta un punto singular en $x_0 = 0$. Si se estudia este punto se observa que se trata de un punto singular regular. Dividiendo por x^2 se llega a la forma canónica de la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Así, se tiene que

- $p(x) = xP(x) = 1$.
- $q(x) = x^2Q(x) = x^2 - \nu^2$.

Tanto $p(x)$ como $q(x)$ son funciones analíticas en el punto $x_0 = 0$ y, por tanto, se trata de un punto singular regular.

Ejemplo 2.1.3. *La ecuación de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell + 1)y = 0,$$

presenta dos puntos singulares regulares en $x_0 = -1$ y $x_1 = 1$ como se verá a continuación. La forma canónica de la ecuación es

$$y'' + \frac{-2x}{1 - x^2}y' + \frac{\ell(\ell + 1)}{1 - x^2}y = 0.$$

Los coeficientes $P(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ y $Q(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{1-x^2}$ no son analíticos en los puntos $x_0 = -1$ y $x_1 = 1$ y, por tanto, estos dos puntos son singulares. Para $x_0 = -1$ se tiene que:

- $p(x) = (x + 1)P(x) = \frac{-2x}{1-x}$.
- $q(x) = (x + 1)^2Q(x) = \frac{\ell(\ell+1)(x+1)}{1-x}$.

Ambas funciones $p(x)$, $q(x)$ son analíticas en el punto $x_0 = -1$ y, por tanto, la ecuación presenta un punto singular regular ahí. Respecto a $x_1 = 1$ se tiene:

- $p(x) = (x - 1)P(x) = \frac{2x}{1+x}$.
- $q(x) = (x - 1)Q(x) = \frac{-\ell(\ell+1)(x-1)}{1+x}$.

Tanto $p(x)$ como $q(x)$ son analíticas en el punto $x_1 = 1$ y, por tanto, se trata de un punto singular regular.

Ejemplo 2.1.4. *La ecuación*

$$y'' + \frac{1}{x^3}y = 0,$$

presenta un punto singular irregular en $x_0 = 0$. El coeficiente $Q(x) = \frac{1}{x^3}$ no es analítico en el punto $x_0 = 0$ por lo que será un punto singular de la ecuación. Se tiene que:

- $p(x) = xP(x) = 0$.
- $q(x) = x^2Q(x) = \frac{1}{x}$.

Puesto que la función $q(x)$ no es analítica en $x_0 = 0$, se trata de un punto singular irregular para la ecuación.

2.2. Teorema de Frobenius

De manera equivalente al resultado demostrado en el capítulo 1 para los puntos ordinarios, existe un resultado que, bajo ciertas hipótesis, garantiza la existencia de soluciones en torno a puntos singulares regulares y que se debe al matemático Ferdinand Georg Frobenius.

A lo largo de esta sección, se supondrá, sin pérdida de generalidad, salvo que se indique lo contrario que el punto singular que se está estudiando se encuentra en $x_0 = 0$ puesto que se simplifican en gran medida las operaciones y no supone ningún cambio en los razonamientos al tratarse únicamente de una traslación en el eje que podría ajustarse con un cambio de variable del tipo $x = t + x_0$.

No obstante, antes de este teorema cabe mencionar un concepto que se usará a lo largo de la demostración, así como en la resolución de ecuaciones de este tipo en torno a puntos singulares regulares.

Definición 2.2.1. *Sea x_0 un punto singular regular para la ecuación* (2.1)*, entonces la **ecuación indicial** para este punto es:*

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{2.2}$$

donde

$$p_0 := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)P(x), \quad q_0 := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x).$$

Las raíces de (2.2) *son los exponentes o índices de la singularidad x_0.*

Se observa que la ecuación es de segundo grado y se pueden considerar tres casos dependiendo de como sean r_1 y r_2, las raíces de (2.2). Tres posibilidades:

1. La raíz es doble ($r_1 = r_2$).

2. Las raíces difieren por un entero (distinto de cero).

3. Las raíces no difieren por un entero.

Observación 2.2.2. *Nótese que, si las raíces de la ecuación indicial no son reales, $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$, al tratarse de una ecuación polinómica de segundo grado con coeficientes reales, las raíces serán complejas conjugadas y su diferencia será un número imaginario, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ y, por tanto, pertenece al tercer caso de la definición previa. No obstante, los cálculos se vuelven más complicados y en general, se tratarán ecuaciones cuya ecuación indicial asociada tenga raíces reales.*

Teorema 2.2.3 (Teorema de Frobenius)**.** *Sea $x = x_0$ un punto singular regular de la ecuación*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{2.3}$$

entonces existe al menos una solución en serie de la forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}, \quad x > x_0,$$

donde el número r es una constante por determinar. Esta serie converge, al menos, en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$.

Observación 2.2.4. *Puesto que el número r que se menciona en el teorema no es conocido, es posible que $(x-x_0)^r$ no esté definido para valores negativos de $(x-x_0)$, por ello, en este teorema y en el método asociado a este teorema, que se presentará posteriormente, se considerará $x > x_0$.*

En el caso de que quiera hallarse una solución válida para $x < x_0$ bastaría con realizar el cambio de variable $x = x_0 - t$ y proceder de igual forma para $t > 0$.

Demostración. Dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden (2.3), se supone que presenta un punto singular regular en $x_0 = 0$. De la definición de punto singular regular se sigue que:

1. La función $xP(x)$ es analítica en un entorno de $x_0 = 0$.
2. La función $x^2Q(x)$ es también analítica en un entorno de $x_0 = 0$.

Se busca una solución de la forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad c_0 \neq 0, \tag{2.4}$$

en la que debe determinarse bajo qué condiciones de r y c_n esta serie es una solución válida para la ecuación. Nótese que se ha impuesto la condición $c_0 \neq 0$ y esto se debe a que se busca una solución de la forma (2.4) cuyo término dominante cerca de $x_0 = 0$ sea precisamente c_0x^r. En caso contrario, la serie comenzaría en un índice $m \geq 1$, y el exponente del término dominante pasaría a ser $r + m$ con $m \geq 1$, alterando el comportamiento asintótico cerca del origen. Esta condición resulta fundamental para poder deducir la ecuación indicial que se obtiene al sustituir la serie en la ecuación diferencial. Si se permitiera $c_0 = 0$, la solución no representaría el comportamiento más singular permitido por la ecuación y se perdería la generalidad.

Se toma ahora la solución supuesta (2.4) y se calculan sus derivadas para poder después introducirlas en la ecuación. Puesto que la serie de potencias define formalmente una función infinitamente derivable, por el resultado B.2.8 se pueden calcular la primera y segunda derivada de la serie solución obteniendo

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}.$$

Se introducen ahora estas expresiones calculadas en la ecuación original (2.3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + P(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} + Q(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

Ahora, multiplicando a ambos lados por x^2 se llega a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + xP(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + x^2Q(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

Nótese que esta multiplicación puede realizarse puesto que se está trabajando en un entorno de $x_0 = 0$ y que, por tanto, $x \neq 0$ y, por ello, la ecuación se sigue verificando. Ahora, puesto que $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas en torno a $x_0 = 0$ admiten desarrollo en forma de serie de potencias convergentes centradas en $x_0 = 0$:

$$xP(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k,$$

$$x^2Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k.$$

Se introducen ahora estos desarrollos en serie en la ecuación anterior llegando a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + (\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r} + (\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

Usando el producto de Cauchy B.2.13, se puede reordenar esta expresión de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r}[c_n(n+r)(n+r-1) + \sum_{k=0}^{n} p_k c_{n-k}(n-k+r) + \sum_{k=0}^{n} q_k c_{n-k}] = 0.$$

Se busca que se verifique la ecuación obtenida en el último paso a la cual se ha llegado desde la ecuación original (2.3). Es condición necesaria y suficiente para que esto se verifique en un entorno de $x_0 = 0$ que todos los coeficientes sean nulos; es decir, que para todo $n \geq 0$:

$$c_n(n+r)(n+r-1) + \sum_{k=0}^{n} p_k c_{n-k}(n-k+r) + \sum_{k=0}^{n} q_k c_{n-k} = 0.$$

En primer lugar, en el caso $n = 0$ se obtiene

$$c_0 r(r-1) + p_0 c_0 r + q_0 c_0 = c_0[r(r-1) + p_0 r + q_0] = 0.$$

Puesto que se está considerando $c_0 \neq 0$, se llega a la ecuación indicial

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{2.5}$$

que da como resultado dos valores r_1 y r_2 posibles, reales o complejos, y que en el caso real supondremos ordenados $r_1 \geq r_2$. Posteriormente, para $n \geq 1$, la relación de recurrencia

$$c_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left(p_{n-k}(k+r) + q_{n-k}\right) c_k}{(n+r)(n+r-1) + p_0(n+r) + q_0}, \tag{2.6}$$

permite obtener los coeficientes c_n a partir de los c_j $(j < n)$ ya calculados y de los valores de r obtenidos. Debe tenerse en cuenta que esta relación implica un denominador de la forma $F(n+r)$ donde $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$.

Se distinguen ahora los tres posibles casos que pueden darse en la relación de estas dos raíces de (2.5) y que han sido mencionados previamente en la definición 2.2.1. Fijando $r = r_1$, las posibilidades son:

- Si las raíces de (2.5) son iguales, $r_1 = r_2$, la función $F(r)$ factoriza en la forma $F(r) = (r-r_1)^2$ y evaluando en $n+r_1$ se tiene $F(n+r_1) = (n+r_1-r_1)^2 = n^2$. Al estar en la relación de recurrencia (2.6), $n \geq 1$ y, por tanto, el denominador no se anula y la relación de recurrencia está bien definida y a partir de un $c_0 \neq 0$ se obtiene la solución

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

- En el caso de que ambas raíces difieran en un entero $r_1 - r_2 = m \in \mathbb{Z}$ distinto de cero, como se ha supuesto que $r_1 \geq r_2$, este entero será mayor que cero. Entonces de nuevo $F(r)$ factorizará en $F(r) = (r-r_1)(r-r_2)$ y evaluando en $n + r_1$ obtenemos

$$F(n+r_1) = (n+r_1-r_1)(n+r_1-r_2) = n(n+r_1-r_2).$$

Para que $F(n+r_1)$ se anule se requiere:

1. O bien $n = 0$.
2. O bien $n + r_1 - r_2 = 0$; es decir, $n = r_2 - r_1$.

Al estar en la recurrencia (2.6), $n \geq 1$ y, por tanto, la primera opción queda descartada. Y en cuanto a la segunda posibilidad, se tiene que $r_1 - r_2 = m$, siendo m un entero positivo, por lo que $r_2 - r_1 = -(r_1 - r_2) = -m$ será un entero negativo y, por tanto, es imposible que $n = r_2 - r_1$ para ningún $n \geq 1$ y se pueden calcular los coeficientes c_n a partir de la relación de recurrencia (2.6) y de un $c_0 \neq 0$ obteniendo así la solución

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

- Por último, en el caso de que ambas raíces no difieran en un entero, es decir, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, se tiene que $F(r)$ puede factorizarse como $F(r) = (r-r_1)(r-r_2)$. Para $r = r_1$, evaluando en $n + r_1$ se tiene:

$$F(n+r_1) = (n+r_1-r_1)(n+r_1-r_2) = n(n+r_1-r_2).$$

Para que $F(n+r_1)$ se anule se requiere:

1. O bien $n = 0$.
2. O bien $n + r_1 - r_2 = 0$; es decir, $n = r_2 - r_1$.

Pero, por un lado, al estar en la relación de recurrencia $n \geq 1$ y, por otro lado, como se esta tratando el caso $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ entonces $r_2 - r_1 \notin \mathbb{Z}$ y, por tanto, es imposible que $r_2 - r_1 = n$ para ningún $n \geq 1$. Para el caso en el que se tome $r = r_2$, de forma análoga se obtiene que el denominador no se anula y, por tanto, la relación de recurrencia (2.6) está bien definida. Entonces, partiendo de un $c_0 \neq 0$ arbitrario se obtendrán dos soluciones linealmente independientes, una para $r = r_1$

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

y otra para $r = r_2$

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

Así queda demostrada la existencia de al menos una solución para la ecuación (2.3) de la forma (2.4). De hecho, en el caso de que ambas raíces no difieren en un entero se han obtenido ambas soluciones.

Por otro lado, en cuanto a la convergencia, dado que $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas en $|x| < R$, existen desarrollos en serie de potencias

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Para todo $0 < \rho < R$ existe una constante $M > 0$ tal que

$$|p_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \qquad |q_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \qquad \forall n \geq 0.$$

Debe tenerse en cuenta la relación de recurrencia obtenida para los coeficientes c_n, (2.6). Nótese que el denominador de esta relación se puede acotar por

$$|(n+r)(n+r-1) + p_0(n+r) + q_0| \geq d_0 n^2,$$

para cierta constante $d_0 > 0$.

Se busca probar por inducción que existe una constante $C > 0$ (dependiente de ρ) tal que

$$|c_n| \leq C\rho^{-n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Para $n = 0, 1, \ldots, N$ (con N suficientemente grande), se define

$$C := \text{máx}\left\{1, |c_0|, |c_1|\rho, \ldots, |c_N|\rho^N\right\}.$$

Se supone que se verifican las acotaciones $|c_k| \leq C\rho^{-k}$, $k \leq n$ para cierto $n \geq N$ y se trata de acotar c_{n+1}. Usando la relación de recurrencia (2.6) se tiene

$$|c_{n+1}| \leq \frac{1}{|(n+1+r)(n+r) + p_0(n+1+r) + q_0|} \sum_{k=0}^{n} |p_{n+1-k}(k+r) + q_{n+1-k}|\,|c_k|.$$

Dado que $|p_m|, |q_m| \leq M\rho^{-m}$ y $|k+r| \leq k + |r| \leq (n+1) + |r|$ para $k \leq n$, existe $M' > 0$ tal que

$$|p_{n+1-k}(k+r) + q_{n+1-k}| \leq M'(n+1)\rho^{-(n+1-k)}.$$

Se aplica además la hipótesis de inducción $|c_k| \leq C\rho^{-k}$ para $k \leq n$ y se llega a

$$
\begin{aligned}
|c_{n+1}| &\leq \frac{1}{d_0(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} M'(n+1)\rho^{-(n+1-k)}C\rho^{-k} \\
&= \frac{M'C(n+1)}{d_0(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \rho^{-(n+1)} \\
&= \frac{M'C}{d_0(n+1)}(n+1)\rho^{-(n+1)} \\
&= \frac{M'C}{d_0}\rho^{-(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Puesto que tanto M como M' dependen de ρ, pueden tomarse de tal forma que verifiquen la relación $\frac{M'}{d_0} \leq 1$. Entonces, se verifica

$$|c_{n+1}| \leq C\rho^{-(n+1)},$$

y la inducción es cierta. Luego

$$|c_n| \leq C\rho^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, dado que se ha establecido la acotación $|c_n| \leq C\rho^{-n}$, la serie

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

converge absolutamente para $|x| < \rho < R$, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^{n+r} \leq C|x|^r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n,$$

y la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n$ converge para $|x| < \rho$. Como ρ era arbitrario, se concluye que converge para $0 < x < R$. □

El Teorema de Frobenius garantiza la existencia de, al menos, una solución en forma de serie de potencias en torno a un punto singular regular. Para obtener esta solución, se sigue la idea mostrada en la demostración del teorema 2.2.3. Así, siguiendo [2] puede definirse un método para obtener una solución en forma de serie de potencias en torno a un punto x_0 singular regular bajo las hipótesis citadas en el teorema del mismo nombre (2.2.3).

Procedimiento 2.2.5 (Método de Frobenius). *Suponiendo que se está trabajando con una ecuación en su forma canónica*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad x > x_0, \tag{2.7}$$

los pasos a seguir para la obtención de la solución buscada son:

1. *Sea*
$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r},$$
tras derivar término a término, se introduce $y(x)$ en la ecuación (2.7) para llegar a una ecuación de la forma
$$A_0(x - x_0)^{r+J} + A_1(x - x_0)^{r+J+1} + \cdots = 0.$$

2. *Se igualan los coeficientes A_0, A_1, A_2, ... a cero (Nótese que la ecuación $A_0 = 0$ será un múltiplo constante de la ecuación indicial asociada a la ecuación (2.7)).*

3. *Del sistema de ecuaciones*
$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad \ldots, \quad A_k = 0,$$
se determina una relación de recurrencia que permite obtener el coeficiente c_k una vez conocidos los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$.

4. *Se fija $r = r_1$, la raíz mayor de la ecuación indicial y se fija un valor c_0 arbitrario.*

5. *Usando la relación de recurrencia obtenida en pasos anteriores y los valores de c_0 y r_1 se determinan los coeficientes $c_1, c_2, \ldots$.*

6. *Un desarrollo en serie de potencias para la solución de la ecuación (2.7) es*
$$y(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad x > x_0.$$

Obsérvese el siguiente ejemplo tomado de [2] que ilustra el método que acaba de ser presentado.

Ejemplo 2.2.6. ***Determinar una solución en forma de serie de potencias en torno al punto singular regular $x_0 = 0$ para la siguiente ecuación***
$$x^2 y''(x) - x y'(x) + (1 - x) y(x) = 0, \quad x > 0.$$

En primer lugar, se debe transformar la ecuación a su forma canónica dividiendo por x^2 (nótese que esto es posible puesto que se está trabajando con $x > 0$). Se llega así a
$$y''(x) - x^{-1} y'(x) + (1 - x) x^{-2} y(x) = 0. \tag{2.8}$$
Así, $P(x) = -x^{-1}$ y $Q(x) = (1 - x)x^{-2}$ y se verifica de manera sencilla que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (2.8), por lo que se calcula
$$p_0 = \lim_{x \to 0} x P(x) = \lim_{x \to 0} (-1) = -1,$$
$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} (1 - x) = 1.$$

Por tanto, la ecuación indicial es

$$r(r-1)-r+1=r^2-2r+1=(r-1)^2=0,$$

cuyas raíces son $r_1=r_2=1$. *Se supone ahora la solución*

$$y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r},$$

y se sustituye en la ecuación (2.8) *llegando a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}-x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+(1-x)x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0.$$

Multiplicando por x^2 *(nótese que esto es posible puesto que* $x>0$*) se obtiene*

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}-x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0,$$

lo cual puede reescribirse separando el último término como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r+1}=0.$$

Para poder agrupar los sumatorios se debe ahora realizar la traslación de índices $k=n+1$ *en el último sumatorio y* $k=n$ *en el resto de sumatorios obteniendo así*

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r)(k+r-1)-(k+r)+1]c_kx^{k+r}-\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^{k+r}=0,$$

y separando el término correspondiente a $k=0$ *puede agruparse todo en un único sumatorio de la siguiente forma:*

$$[r(r-1)-r+1]c_0x^r+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\big((k+r)(k+r-1)-(k+r)+1\big)c_k-c_{k-1}\right]x^{k+r}=0.$$

Ahora, igualando a cero los coeficientes se recupera por un lado la ecuación indicial en el término $k=0$*; y, por otro lado, para* $k\geq 1$ *se tiene*

$$[(k+r)^2-2(k+r)+1]c_k-c_{k-1}=0,$$

lo cual se reduce a

$$(k+r-1)^2c_k-c_{k-1}=0.$$

Esta última ecuación proporciona una relación de recurrencia que permite calcular el coeficiente c_k *en términos del coeficiente anterior* c_{k-1}*:*

$$c_k=\frac{1}{(k+r-1)^2}c_{k-1},\quad k\geq 1.$$

Haciendo que r tome el valor obtenido como solución de la ecuación indicial $r = r_1 = 1$ se llega a

$$c_k = \frac{1}{k^2} c_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Así, se tiene que los coeficientes c_k vienen dados en función de c_0 por

$$c_k = \frac{1}{(k!)^2} c_0.$$

Por tanto, se concluye que la ecuación (2.8) *tiene una solución en forma de serie de potencias dada por*

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^{k+1}, \quad x > 0.$$

2.3. Determinación de una segunda solución linealmente independiente

Observación 2.3.1. *El Teorema de Frobenius (2.2.3) afronta el mismo problema que el teorema 1.2.1, pero al estar trabajando en esta ocasión en torno a un punto singular regular en lugar un punto ordinario no permite llegar a la conclusión de que existan siempre dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de potencias.*

En este caso, el Teorema de Frobenius solo permite afirmar la existencia de una solución en forma de serie de potencias y solo en el caso concreto de que las raíces de la ecuación indicial no difieran por un número entero garantiza la existencia de dos soluciones linealmente independientes y con la forma buscada.

Puesto que ya se ha comentado en la demostración de 2.2.3 y en la observación previa que en el caso de que las raíces de la ecuación indicial no difieran por un número entero el Método de Frobenius proporciona dos soluciones linealmente independientes, ahora deben estudiarse las otras dos posibles opciones que se pueden dar al resolver la ecuación indicial para tratar de dar forma a una segunda solución linealmente independiente que pueda emplearse para construir la solución general buscada.

- Por un lado, en el caso de que las dos raíces de la ecuación indicial coincidan, $r_1 = r_2$, se puede tomar una segunda solución, que será linealmente independiente de la primera, de la forma

  $$y_2(x) = y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_1},$$

  donde $y_1(x)$ es la primera solución ya calculada con el Método de Frobenius. Para justificar que esta segunda solución es linealmente independiente de la primera proporcionada por el teorema 2.2.3, basta con comprobar que su Wronskiano no es idénticamente nulo. El Wronskiano viene dado por

  $$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x).$$

La derivada de $y_2(x)$ se calcula como:

$$y_2' = y_1' \ln(x - x_0) + \frac{y_1}{x - x_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (n + r_1)(x - x_0)^{n+r_1-1},$$

y se llega así a

$$W = y_1 \left[y_1' \ln(x - x_0) + \frac{y_1}{x - x_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (n + r_1)(x - x_0)^{n+r_1-1} \right] - \\ y_1' \left[y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_1} \right].$$

Esta expresión puede simplificarse puesto que los términos que contienen $ln(x - x_0)$ se cancelan y se obtiene:

$$W = \frac{y_1^2}{x - x_0} + y_1 \sum_{n=1}^{\infty} b_n (n + r_1)(x - x_0)^{n+r_1-1} - y_1' \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_1}.$$

El resultado es una función continua en un entorno de x_0, $0 < |x - x_0| < R$ y, salvo si $y_1 \equiv 0$, no es idénticamente nula. Como $y_1(x)$ es una solución no trivial de la ecuación, se tiene $y_1(x) \neq 0$ en un entorno de x_0, y, por tanto, $W(y_1, y_2)(x) \not\equiv 0$. Esto demuestra que y_1, y_2 son linealmente independientes.

- Por otro lado, en el caso de que las raíces de la ecuación indicial sean distintas, pero estén separadas por un número entero (diferente de cero), $r_1 \neq r_2$, $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, existe una segunda solución, que será linealmente independiente de la primera, de la forma

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2},$$

donde C es una constante que puede ser nula, es decir, podría no incluir el término logarítmico, y donde $y_1(x)$ es la primera solución ya calculada con el Método de Frobenius. En este caso, para justificar la independencia lineal de esta segunda solución con respecto a la proporcionada por el teorema 2.2.3 debe comprobarse también que su Wronskiano no es idénticamnete nulo; no obstante, en esta ocasión deben distinguirse los casos $C \neq 0$ y $C = 0$.

  - Por un lado, en el caso $C \neq 0$, se tiene

$$y_2' = C y_1' \ln(x - x_0) + \frac{C y_1}{x - x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (n + r_2)(x - x_0)^{n+r_2-1},$$

lo cual lleva a

$$W = y_1 \left[C y_1' \ln(x - x_0) + \frac{C y_1}{x - x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (n + r_2)(x - x_0)^{n+r_2-1} \right] \\ - y_1' \left[C y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2} \right].$$

De nuevo, los términos logarítmicos pueden cancelarse llegando a

$$W = \frac{Cy_1^2}{x-x_0} + y_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_n(n+r_2)(x-x_0)^{n+r_2-1} - y_1' \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{n+r_2}.$$

La expresión obtenida es una función continua en un entorno de x_0, $0 < |x-x_0| < R$ y, salvo si $y_1 \equiv 0$ y $C = 0$, no es idénticamente nula. Como $y_1(x)$ es una solución no trivial de la ecuación, se tiene $y_1(x) \neq 0$ en un entorno de x_0, y, por otro lado, estamos considerando $C \neq 0$. Por tanto, $W(y_1, y_2)(x) \not\equiv 0$ lo cual demuestra que y_1, y_2 son linealmente independientes en este caso.

- Por otro lado, para $C = 0$,

$$y_2' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(n+r_2)(x-x_0)^{n+r_2-1},$$

y, por tanto,

$$W = y_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_n(n+r_2)(x-x_0)^{n+r_2-1} - y_1' \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{n+r_2}.$$

En este caso $y_1(x)$ y su derivada tienen desarrollos en potencias de $(x-x_0)^{n+r_1}$, mientras que los términos de y_2 y de su correspondiente derivada involucran potencias de $(x-x_0)^{n+r_2}$. Dado que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}_+$, se concluye que los exponentes de ambas familias de funciones no coinciden. Por ello, los términos del Wronskiano no se cancelan entre sí, y $W(y_1, y_2)(x)$ no es la función idénticamente nula lo cual lleva a concluir la independencia lineal de y_1, y_2.

Observación 2.3.2. *Una vez conocida la forma que tomará esta segunda solución, la obtención de la misma es un proceso ya conocido pues se debe proceder de la misma forma que se ha hecho en el resto de casos y ejemplos ya presentados.*

Sabiendo la forma que tomará la solución, deben calcularse sus derivadas haciendo uso del resultado B.2.8 e imponer que verifique la ecuación que se busque resolver en cada caso. Así, podrán fijarse los valores que deben tomar los diferentes parámetros para la obtención de esta segunda solución buscada.

En resumen, combinando el Método de Frobenius para la obtención de una primera solución y la forma presentada previamente que tomará la segunda solución en función de los valores de las raíces de la ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial que se está buscando resolver, si x_0 es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

y r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial asociada, donde $r_1 \geq r_2$.

1. Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0,$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0.$$

2. Si $r_1 = r_2$, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la forma
$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0,$$
$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_1}.$$

3. Si $r_1 \neq r_2$ pero $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, es decir, si la diferencia de ambas raíces es un entero distinto de cero, existen dos soluciones linealmente independientes de la forma
$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0,$$
$$y_2(x) = C y_1(x) \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2},$$
donde C es una constante que podría ser nula.

Observación 2.3.3. *Como se indicó en la observación 2.2.2, en caso de que las raíces de la ecuación indicial no sean reales, su diferencia será un número imaginario, $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ y, por tanto, podrían obtenerse dos soluciones linealmente independientes usando el Método de Frobenius con cada una de las dos raíces.*

No obstante, resulta más habitual calcular solo una solución y considerar su parte real e imaginaria por separado como soluciones linealmente independientes.

Observación 2.3.4. *Una vez obtenidas las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación que se busque resolver $y_1(x)$, $y_2(x)$ la solución general de la ecuación será una combinación lineal de ambas*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2.4. Ejemplos

A continuación se presentan varios ejemplos tomados de [1] y [2] en los que se obtienen dos soluciones independientes en torno a puntos singulares regulares. En estos ejemplos, la primera de las soluciones se obtendrá siguiendo el Método de Frobenius presentado en 2.2.5 y, dependiendo de las soluciones de la ecuación indicial, la segunda solución se tomará de la forma adecuada siguiendo lo presentado anteriormente.

Ejemplo 2.4.1. ***Resuélvase la ecuación***

$$2xy'' + (1 + x)y' + y = 0. \tag{2.9}$$

Si se supone una solución en serie de potencias centrada en $x_0 = 0$ *de la forma*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \tag{2.10}$$

haciendo uso del resultado B.2.8, introduciendo la solución supuesta (2.10) *y sus derivadas en la ecuación* (2.9) *se tiene la ecuación*

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0,$$

que, tras ciertas operaciones puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^{n+r} = 0.$$

Esta expresión puede simplificarse más llegando a:

$$x^r\left[r(2r-1)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k\right]x^k\right] = 0. \tag{2.11}$$

De la ecuación (2.11) *se deduce por un lado la ecuación indicial asociada a* (2.9)

$$r(2r-1) = 0, \tag{2.12}$$

y, por otro lado,

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k = 0, \quad k \geq 0. \tag{2.13}$$

De la ecuación (2.12) *se obtienen las raíces* $r_1 = \frac{1}{2}$ *y* $r_2 = 0$*. Puesto que la diferencia entre ellas no es un número entero, podrán obtenerse dos soluciones linealmente independientes de la forma*

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{1}{2}},$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

- *Por un lado, para* $r_1 = \frac{1}{2}$*, la ecuación* (2.13) *puede dividirse entre* $k + \frac{3}{2}$ *para obtener la recurrencia*

  $$c_{k+1} = -\frac{c_k}{2(k+1)},$$

  la cual conduce a la forma general de los coeficientes

  $$c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}c_0, \quad n \geq 1.$$

  Así, la primera solución será

  $$y_1(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{n+\frac{1}{2}},$$

  que convergerá para $x \geq 0$*. Para* $x < 0$ *esta serie no tiene validez por la presencia del factor* $x^{\frac{1}{2}}$*.*

- *Por otro lado, para $r_2 = 0$, la ecuación (2.13) lleva a la recurrencia*

$$d_{k+1} = -\frac{d_k}{2k+1},$$

la cual conduce a la forma general para los coeficientes

$$d_n = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} d_0, \quad n \geq 1.$$

Y, por tanto, la segunda solución será

$$y_2(x) = d_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} x^n \right],$$

la cual converge para $|x| < \infty$.

Finalmente, la solución general de la ecuación (2.9) será

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes; y convergerá para $x \in (0, \infty)$.

Ejemplo 2.4.2. ***Determinar dos soluciones independientes en torno al punto singular regular $x_0 = 0$ de***

$$x^2 y''(x) - x y'(x) + (1-x) y(x) = 0, \quad x > 0. \tag{2.14}$$

Esta ecuación ya ha sido estudiada en el ejemplo 2.2.6. En ese ejemplo previo se vio que la ecuación indicial asociada a esta ecuación es

$$r^2 - 2r + 1 = 0. \tag{2.15}$$

Las raíces de (2.15) coinciden $r_1 = r_2 = 1$ y, por tanto, deben buscarse dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad a_0 \neq 0, \tag{2.16}$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1}. \tag{2.17}$$

Haciendo uso del resultado obtenido en el ejemplo 2.2.6 y fijando $a_0 = 1$, la primera solución (2.16) toma la forma

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^{k+1}, \quad x > 0.$$

Respecto a la segunda solución, esta será de la forma (2.17). Por tanto, deben determinarse los coeficientes b_n. Para ello debemos imponer que $y_2(x)$ sea solución *de* (2.14)*. Primero, se calculan sus derivadas primera y segunda haciendo uso del resultado B.2.8 y se obtiene:*

$$y_2'(x) = y_1'(x)\ln x + x^{-1}y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n x^n,$$

$$y_2''(x) = y_1''(x)\ln x - x^{-2}y_1(x) + 2x^{-1}y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_n x^{n-1}.$$

Introduciendo (2.17) *y sus derivadas en la ecuación* (2.14) *se llega a la expresión*

$$\begin{aligned} & x^2\left[y_1''(x)\ln x - x^{-2}y_1(x) + 2x^{-1}y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_n x^{n-1}\right] \\ & -x\left[y_1'(x)\ln x + x^{-1}y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n x^n\right] \\ & +(1-x)\left[y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}\right] = 0, \end{aligned}$$

la cual puede simplificarse como

$$\begin{aligned} & \left[x^2y_1''(x) - xy_1'(x) + (1-x)y_1(x)\right]\ln x - 2y_1(x) + 2xy_1'(x) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Ahora, debe tenerse en cuenta que el factor al que multiplica $\ln x$ *coincide con la parte izquierda de la ecuación* (2.14) *sustituyendo* $y(x)$ *por* $y_1(x)$ *y, por tanto, como* $y_1(x)$ *es solución de la ecuación* (2.14)*, este factor será nulo. Por tanto, la igualdad anterior se reduce a*

$$2y_1(x) - 2xy_1'(x) - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0.$$

Ahora, para tratar de simplificar la expresión, por un lado los dos primeros sumatorios pueden agruparse en uno solo y posteriormente se sustituye $k = n$*, mientras que en el tercer sumatorio se realiza la traslación de índices* $k = n+1$ *para así obtener:*

$$2y_1(x) - 2xy_1'(x) + b_1x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(k^2b_k - b_{k-1})x^{k+1} = 0. \tag{2.18}$$

Para poder continuar con el proceso, ahora deben introducirse los desarrollos en serie de $y_1(x)$*,* $y_1'(x)$ *en* (2.18) *para llegar a*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(k+1)-2}{(k!)^2}x^{k+1} + b_1x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(k^2b_k - b_{k-1}\right)x^{k+1} = 0.$$

De aquí, pueden separarse los términos $k = 0, 1$ del primer sumatorio y agruparse los términos semejantes para obtener

$$(2 + b_1)x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{2k}{(k!)^2} + k^2 b_k - b_{k-1} \right] x^{k+1} = 0. \tag{2.19}$$

De (2.19) *se deduce que:*

- *Del término en x^2 se llega a que $b_1 = -2$.*
- *Por otro lado, al hacer cero todos los coeficientes del sumatorio se concluye que*
$$\frac{2k}{(k!)^2} + k^2 b_k - b_{k-1} = 0, \quad k \geq 2,$$
lo cual conduce a la relación de recurrencia
$$b_k = \frac{1}{k^2} \left[b_{k-1} - \frac{2k}{(k!)^2} \right], \quad k \geq 2.$$

Empleando esta relación pueden calcularse los primeros términos de la serie (2.17)*. Para $k = 2, 3$ se tiene:*

$$b_2 = \frac{1}{2^2}[b_1 - 1] = -\frac{3}{4}, \qquad b_3 = \frac{1}{3^2} \left[-\frac{3}{4} - \frac{6}{36} \right] = -\frac{11}{108}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta el valor de $b_1 = -2$ y estos primeros términos hallados, puede concluirse que una segunda solución linealmente de (2.16) *para la ecuación* (2.14) *es*

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x - 2x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{108}x^4 + \cdots .$$

Observación 2.4.3. *Como se indica en el resumen previo a los ejemplos 2.4.1 y 2.4.2, en el caso de que las dos raíces de la ecuación indicial difieran por un entero distinto de cero, pueden darse dos situaciones con la segunda solución $y_2(x)$.*

- *En el caso de que la constante C sea distinta de cero, la segunda solución tendrá un término logarítmico.*
- *En el caso de que la constante C tome valor nulo, la segunda solución tendrá la misma forma que la obtenida mediante el método de Frobenius pero con $r = r_2$.*

No obstante, no es posible saber de antemano de manera sencilla si esta constante C será nula o no, y, por tanto, el caso en que las raíces difieran por un entero debe tratarse de distinta forma al caso en el que no lo hagan. En cualquiera de los dos casos, la forma de proceder debe ser la misma que la presentada en los ejemplos 2.4.1 y 2.4.2 pero teniendo en cuenta la forma que debe adoptar la segunda solución $y_2(x)$ en este caso.

Capítulo 3

Ecuación de Airy

Como aplicación de la resolución de EDOs en puntos ordinarios, se introduce la función que debe su nombre al matemático y astrónomo británico George Biddell Airy (1801–1892). Este investigador fue quien la introdujo como parte de su estudio sobre la intensidad luminosa cerca de las sombras, fenómeno conocido como difracción de Fresnel. Airy formuló esta función especial al analizar la ecuación del mismo nombre, la cual describe el comportamiento de ondas en regiones donde el potencial varía linealmente.

Desde entonces, la función de Airy ha adquirido gran importancia en diferentes áreas de las matemáticas, siendo un ejemplo clásico de función empleada para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante series de potencias como las que se estudian en este trabajo; así como una función de gran relevancia en diversos sectores de la física que se presentarán más adelante.

3.1. Solución de la ecuación

La ecuación de Airy es la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

$$y'' - xy = 0. \tag{3.1}$$

Es evidente que esta ecuación verifica las hipótesis del teorema 1.2.1 para cualquier x y, por tanto, sus soluciones pueden expresarse mediante series de potencias centradas en cualquier $x = x_0$. Fijado $x_0 = 0$, se supone una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{3.2}$$

Por aplicación del resultado B.2.8 se calculan la primera y segunda derivada de la serie solución (3.2) obteniendo

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Sustituyendo lo obtenido en la ecuación original (3.1) se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Se busca ahora agrupar los términos en un único sumatorio; es por ello que se realizan la traslaciones $k = n - 2$ en el primer sumatorio y $k = n + 1$ en el segundo sumatorio, obteniendo

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0.$$

Si se agrupan ahora los términos por potencias de x en un único sumatorio se llega a:

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1}]x^k = 0,$$

Esta relación se verificará para todo x si y solo si $c_2 = 0$ y además, los coeficientes del sumatorio del segundo sumando son iguales a cero para todo $k \geq 1$; esto es:

$$c_2 = 0, \quad (k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1} = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Así, se llega a la relación de recurrencia

$$c_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)}c_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

que puede escribirse como

$$c_k = \frac{1}{k(k-1)}c_{k-3}, \quad k \geq 3. \tag{3.3}$$

La relación de recurrencia (3.3) muestra que los coeficientes de la solución (3.2) se agrupan en tres secuencias independientes $\{c_{3m}\}_{m=0}^{\infty}$, $\{c_{3m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ y $\{c_{3m+2}\}_{m=0}^{\infty}$:

- El primer grupo de coeficientes $\{c_{3m}\}_{m=0}^{\infty}$ lleva a la relación

  $$c_{3m} = \frac{1}{(3m)(3m-1)}c_{3m-3} = \frac{c_0}{(3m)!}\prod_{j=1}^{m}(3j-2), \quad m \geq 1,$$

  que dependerá del valor de c_0.

- El segundo grupo de coeficientes $\{c_{3m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ lleva a la relación

  $$c_{3m+1} = \frac{1}{(3m+1)(3m)}c_{3m-2} = \frac{c_1}{(3m+1)!}\prod_{j=1}^{m}(3j-1), \quad m \geq 1,$$

  que dependerá del valor de c_1.

- El tercer grupo de coeficientes $\{c_{3m+2}\}_{m=0}^{\infty}$ lleva a la relación

  $$c_{3m+2} = \frac{1}{(3m+2)(3m+1)}c_{3m-1}, \quad m \geq 1,$$

  no obstante, dado que el valor de c_2 es cero como se ha visto previamente, los coeficientes de este grupo $\{c_{3m+2}\}_{m=0}^{\infty}$ serán todos ellos nulos

  $$c_{3m+2} = 0, \quad m \geq 0.$$

Así, los coeficientes de la serie quedan determinados por los valores de c_0 y c_1 que pueden ser asignados de forma arbitraria. Esto da lugar a dos soluciones que, por aplicación del resultado A.3.1, serán linealmente independientes.

- Si se asignan los valores $(c_0, c_1) = (1, 0)$ los únicos términos no nulos aparecen en las potencias que son múltiplo de 3 $(x^0, x^3, x^6, \ldots)$ llevando así a la solución

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m}(3j-2)}{(3m)!} x^{3m}. \tag{3.4}$$

- Si se toman $(c_0, c_1) = (0, 1)$ los únicos términos no nulos surgen en las potencias congruentes con 1 módulo 3 $(x, x^4, x^7, \ldots)$ llevando a la solución

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m}(3j-1)}{(3m+1)!} x^{3m+1}. \tag{3.5}$$

Así, la solución final de la ecuación (3.1) será la combinación lineal de ambas $y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$ que resulta en:

$$y(x) = c_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m}(3j-2)}{(3m)!} x^{3m} \right] + c_1 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m}(3j-1)}{(3m+1)!} x^{3m+1} \right],$$

donde, por convención los productos vacíos para $m = 0$ que aparecen en los numeradores de las series valen 1. Respecto a la convergencia de estas dos series solución halladas (3.4), (3.5), el criterio del cociente B.2.6 resulta útil para su estudio:

- Respecto a la serie (3.4), aplicando el criterio del cociente a los términos $(c_{3m}x^{3m})$ se observa:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{c_{3m+3}x^{3m+3}}{c_{3m}x^{3m}} \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{x^3}{(3m+3)(3m+2)} \right| = 0 < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Por otro lado, en cuanto a la serie (3.5), la aplicación del criterio del cociente a los términos $(c_{3m+1}x^{3m+1})$ conduce a:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{c_{3m+4}x^{3m+4}}{c_{3m+1}x^{3m+1}} \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{x^3}{(3m+4)(3m+3)} \right| = 0 < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Esto lleva a la conclusión de que ambas series convergen absolutamente en toda la recta real y, por tanto, las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son funciones enteras.

3.2. Funciones de Airy

Tras haber obtenido las soluciones en serie linealmente independientes de la ecuación de Airy (3.4) y (3.5) se pueden definir las funciones de Airy; $Ai(x), Bi(x)$ se definen como combinaciones lineales específicas de ambas soluciones en serie $y_1(x), y_2(x)$.

Este proceso requiere la normalización de las series para cumplir unas condiciones iniciales estándar y garantizar el comportamiento asintótico físico buscado.

En las series obtenidas como soluciones de la ecuación de Airy (3.4) y (3.5) se observa que aparecen productos de la forma $\prod_{j=1}^{m}(3j-k)$, $(k=1,2)$ los cuales pueden ser expresados mediante la Función Gamma, $\Gamma(z)$, que se presenta en el apéndice B.3. Haciendo uso de la identidad B.3.6 se obtiene para $y_1(x)$ e $y_2(x)$:

$$\prod_{j=1}^{m}(3j-2)=3^m\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \tag{3.6}$$

$$\prod_{j=1}^{m}(3j-1)=3^m\frac{\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}. \tag{3.7}$$

Haciendo uso de (3.6) y (3.7) e introduciéndolo en $y_1(x), y_2(x)$ se llega a

$$y_1(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)}{(3m)!}x^{3m},$$

$$y_2(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}{(3m+1)!}x^{3m+1}.$$

Tras haber realizado estas adaptaciones puede definirse la función de Airy de primera especie (a veces llamada simplemente función de Airy), $Ai(x)$, la cual se define para cumplir:

- $Ai(0)=\frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\approx 0{,}355.$
- $Ai'(0)=-\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\approx -0{,}259.$

Estos valores están relacionados con propiedades de las Función Gamma y definen unívocamente la función $Ai(x)$ como una solución particular de la ecuación de Airy (3.1). Para que se verifiquen estas condiciones se toma la combinación lineal $Ai(x)=C_1y_(x)-C_2y_2(x)$ donde las constantes C_1 y C_2 deben determinarse evaluando en $x=0$ y teniendo en cuenta que

$$y_1(0)=1, \qquad y_2(0)=0,$$

$$y_1'(0)=0, \qquad y_2'(0)=1.$$

Así, se evalúa en $x=0$ obteniendo:

$$Ai(0)=C_1y_1(0)+C_2y_2(0)=C_1=\frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

$$Ai'(0)=C_1y_1'(0)-C_2y_2'(0)=-C_2=-\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)},$$

lo cual lleva a la conclusión de que

$$C_1=\frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \qquad C_2=\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Y finalmente puede definirse la función de Airy de primera especie como

$$Ai(x) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)}{(3m)!}x^{3m} - \frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}{(3m+1)!}x^{3m+1}.$$

Puede definirse también una segunda función, llamada función de Airy de segunda especie, $Bi(x)$, la cual se construye para garantizar dos propiedades clave:

- Independencia lineal con $Ai(x)$.
- Comportamiento asintótico divergente cuando $x \to +\infty$ (a diferencia de $Ai(x)$ como se verá más adelante).

Para que se verifiquen estas dos condiciones, la función se define como

$$Bi(x) = \sqrt{3}(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)),$$

donde C_1 y C_2 son las mismas constantes usadas en la definición de $Ai(x)$ y, por otro lado, el factor $\sqrt{3}$ asegura que el wronskiano entre $Ai(x)$ y $Bi(x)$ sea:

$$\mathcal{W}\left(Ai, Bi\right) = \frac{1}{\pi},$$

una condición esencial para su uso en problemas de valores iniciales que garantiza la independencia de las soluciones. Así la función de Airy de segunda especie queda definida por

$$\begin{aligned} Bi(x) = \sqrt{3}\Bigg[&\frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)}{(3m)!}x^{3m} \\ &+\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}{(3m+1)!}x^{3m+1}\Bigg]. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la fórmula de reflexión de la Función Gamma B.3.5, las expresiones pueden simplificarse, puesto que

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

llegando así a las expresiones finales:

$$Ai(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left[\frac{1}{3^{2/3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)}{(3m)!}x^{3m} - \frac{1}{3^{1/3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}{(3m+1)!}x^{3m+1}\right], \quad (3.8)$$

$$Bi(x) = \frac{3}{2\pi}\left[\frac{1}{3^{2/3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)}{(3m)!}x^{3m} + \frac{1}{3^{1/3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}{(3m+1)!}x^{3m+1}\right]. \quad (3.9)$$

Estas dos funciones (3.8) y (3.9) pueden definirse también mediante integrales como se presenta a continuación.

- Función de airy de primera especie:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt. \tag{3.10}$$

- Función de airy de segunda especie:

$$Bi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] dt. \tag{3.11}$$

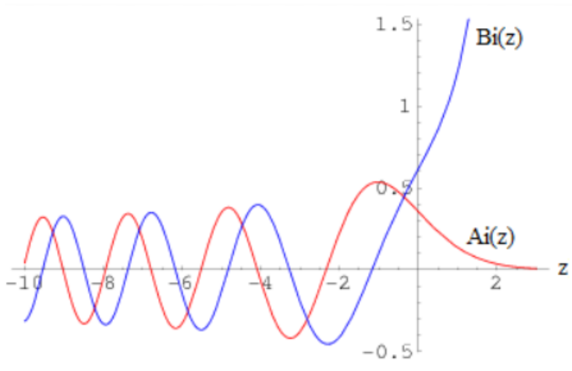

Figura 3.1: Funciones de Airy $Ai(z)$ y $Bi(z)$.

Como se aprecia en la figura 3.1, el comportamiento de las funciones (3.10) y (3.11) es similar en la parte negativa del eje real, mientras que su comportamiento es muy distinto en la parte positiva. En la parte negativa del eje, cuando $z \to -\infty$ ambas funciones se comportan de manera sinusoidal y con amplitud decreciente, mientras que para $z > 0$ se aprecia un claro cambio en el comportamiento de ambas funciones. Por un lado, la función de Airy de primera especie (3.10) decrece de manera exponencial hacia cero cuando $z \to \infty$; y, por otro lado, la función de Airy de segunda especie (3.11) diverge hacia infinito cuando $z \to \infty$. Este comportamiento hace que la función (3.11) tenga pocas aplicaciones en la física, mientras que el comportamiento de (3.10) cuando $z \to \infty$ hace que sea útil en ciertas áreas de la física que se presentarán a continuación.

3.3. Aplicaciones a la física

La función de Airy (3.10) juega un papel importante en la mecánica cuántica bajo potenciales lineales como se puede consultar en [5]. Una de sus aplicaciones más importantes es como solución de la ecuación de Schrödinger unidimensional en presencia de un potencial lineal. Para una partícula sometida a una fuerza constante, esta ecuación es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{3.12}$$

que puede ser reescrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (V(x) - E)\,\psi(x) = 0,$$

donde $\psi(x)$ es la función de onda, que describe el estado del sistema; $V(x)$ es el potencial en el que se mueve la partícula; E es la energía total asociada al estado $\psi(x)$; m es la masa de la partícula; y $\hbar$ es la constante de Planck reducida, $\hbar = 1{,}054\,571\,817 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s. Esta ecuación relaciona la energía cinética (primer término), la energía potencial (segundo término) y la energía total (tercer término) de una partícula en una dimensión. Al tratarse de un potencial lineal, se tiene que $V(x) = Fx$ donde F será una fuerza constante y, por tanto, la ecuación (3.12) resulta en

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + F\left(x - \frac{E}{F}\right)\psi(x) = 0. \tag{3.13}$$

Se define

$$\alpha = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

y el cambio de variable

$$z = \alpha\left(x - \frac{E}{F}\right), \tag{3.14}$$

justificado por el teorema B.5.2. Aplicando la regla de la cadena se tienen las derivadas primera y segunda

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dz}\frac{dz}{dx} = \alpha\frac{d\psi}{dz},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d\psi}{dx} = \alpha\frac{d^2\psi}{dz^2}\frac{dz}{dx} = \alpha^2\frac{d^2\psi}{dz^2}.$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación (3.13) y teniendo en cuenta que de (3.14) se tiene que $\left(x - \frac{E}{F}\right) = \frac{z}{\alpha}$ se llega

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + F\frac{z}{\alpha}\psi(z) = 0.$$

Esta ecuación se multiplica por $-\frac{2m}{\hbar^2\alpha^2}$ para llegar a

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} - \frac{2mF}{\hbar^2\alpha^3}z\psi(z) = 0,$$

pero como $\alpha = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se llega finalmente a la expresión

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} - z\psi(z) = 0.$$

Esta expresión coincide con la ecuación de Airy (3.1). La solución general es $\psi(z) = C_1Ai(z) + C_2Bi(z)$, pero solo $Ai(z)$ es físicamente aceptable, ya que, como se ha comentado previamente, $Bi(z)$ diverge para $z \to +\infty$.

Un caso relevante es el de una partícula confinada en un pozo potencial triangular, donde el potencial es infinito para $x < 0$ y crece linealmente para $x \geq 0$. La imposición de condiciones de contorno adecuadas conduce a una cuantización de la energía, determinada por los ceros de (3.10). Así, la función de Airy permite describir sistemas cuánticos bajo fuerzas no conservativas lineales.

Más recientemente, la función de Airy ha sido empleada en experimentos de física cuántica y óptica como se presenta en [6] y [7]. En 2013, un grupo de investigadores consiguió generar haces de electrones con forma de Airy. Esto quiere decir que la función de onda transversal de este haz tiene la forma matemática de una función de Airy como las presentadas previamente. Estos haces presentan ciertas propiedades destacables ya que viajan a lo largo de trayectorias parabólicas, mantienen su forma sin dispersarse durante la propagación, y son capaces de autorrecuperarse tras encontrar un obstáculo. Estas características los convierten en una herramienta muy prometedora para manipular electrones en escalas nanométricas.

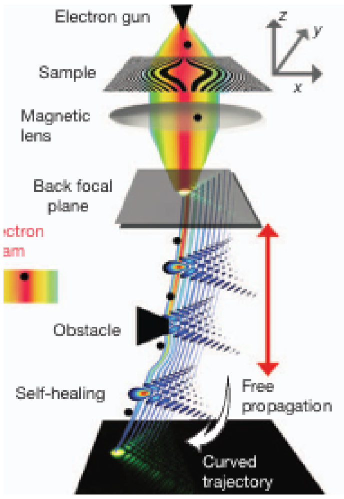

Figura 3.2: Esquema experimental de generación de un haz de Airy de electrones. Imagen tomada de [6].

En la imagen de la figura 3.2 se observa cómo el haz pasa a través de un holograma nanofabricado con fase cúbica y se enfoca mediante una lente magnética. En el plano focal posterior aparece un haz que sigue una trayectoria curva y conserva su forma. Este fenómeno se produce gracias a una analogía matemática entre la ecuación de Schrödinger (3.12), comentada previamente, y ciertas ecuaciones que describen la propagación de haces de luz en medios ópticos. De hecho, el primer caso experimental de un haz de Airy no fue de electrones, sino óptico, generado mediante un láser. Estos haces de luz también siguen trayectorias parabólicas, no se dispersan, y pueden restaurar su forma tras ser parcialmente bloqueados.

Gracias a estas propiedades, los haces de Airy (ya sean de luz o de electrones) tienen potencial en nuevas aplicaciones como la manipulación de micropartículas o la mejora de la resolución en microscopía electrónica.

Capítulo 4

Ecuación de Bessel

La ecuación de Bessel debe su nombre al astrónomo y matemático alemán Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), quien introdujo las funciones que llevan su nombre en el contexto del estudio del movimiento de cuerpos celestes. No obstante, la propia ecuación ya había aparecido anteriormente en trabajos de matemáticos como Bernoulli y Euler y en problemas físicos relacionados con la vibración de membranas y la propagación del calor.

El análisis de esta ecuación en torno al punto singular $x = 0$ ofrece una aplicación directa y detallada del método de Frobenius (2.2.5). Las funciones que se obtienen como soluciones, especialmente las de primera especie $J_\nu(x)$ tienen un comportamiento analítico bien definido, y sus propiedades matemáticas como la ortogonalidad o la existencia de ceros reales las hacen interesantes para su estudio.

4.1. Solución de la ecuación

La forma estándar de la ecuación de Bessel es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{4.1}$$

donde ν es un parámetro real o complejo. Esta ecuación ha sido estudiada en profundidad no solo por el interés de sus soluciones sino también por su papel como modelo en la teoría general de ecuaciones diferenciales puesto que sirve como ejemplo de aplicación del Método de Frobenius (2.2.5); además, surge de manera natural al resolver ecuaciones en derivadas parciales en dominios con simetría cilíndrica como la Ecuación de Laplace que se estudiará más adelante.

El parámetro ν se conoce como el orden de la ecuación y determina la forma y propiedades de las soluciones. Su valor influye en el comportamiento de las funciones de Bessel cerca del origen, así como en la estructura de la serie de potencias resultante y en la naturaleza de la ecuación indicial asociada.

La ecuación (4.1) puede escribirse en su forma canónica

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2 - \nu^2)}{x^2}y = 0.$$

De la definición 2.1.1 se sigue que el punto $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (4.1), luego se verifica la hipótesis del teorema de Frobenius 2.2.3 y, por tanto, puede aplicarse el método de Frobenius para encontrar la solución de esta ecuación.

De acuerdo con la observación 2.2.4, se considerará una solución para $x > 0$. Siguiendo el método presentado en 2.2.5 se busca una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad x > 0. \tag{4.2}$$

Puesto que la solución (4.2) define formalmente una función infinitamente derivable, por el resultado B.2.8 se calculan la primera y segunda derivada de (4.2):

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}.$$

Se sustituyen ahora las series calculadas en (4.1):

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0,$$

lo cual puede escribirse así:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

En el tercer sumatorio se realiza la traslación de índices $m = n+2$ (y en el resto de sumatorios se sustituye $m = n$) para poder agrupar todos los términos llegando a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+r)(m+r-1) + (m+r) - \nu^2 \right] c_m x^{m+r} + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^{m+r} = 0. \tag{4.3}$$

De (4.3), para el término $m = 0$ se obtiene

$$\left[r(r-1) + r - \nu^2 \right] c_0 = 0 \implies r^2 - \nu^2 = 0.$$

Puesto que $c_0 \neq 0$, se llega a la ecuación indicial asociada a (4.1)

$$(r(r-1) + r - \nu^2) = r^2 - \nu^2 = 0, \tag{4.4}$$

cuyas raíces son $r = \pm\nu$. Para construir una solución se tomará $r_1 = \nu$.

Para $m \geq 1$, a partir de (4.3) los coeficientes de la potencia x^{m+r} proporcionan:

$$\left[(m+r)^2 - \nu^2 \right] c_m + c_{m-2} = 0,$$

lo cual lleva a la relación de recurrencia

$$c_m = -\frac{c_{m-2}}{(m+r)^2 - \nu^2}.$$

Se observa que se trata de una relación de recurrencia de dos términos y que se separarán los términos pares e impares en la recurrencia. Al haber dos coeficientes c_0 y c_1 libres, se fija $c_1 = 0$, lo que implica que todos los coeficientes c_m con m impar serán nulos.

Al haber fijado $r_1 = \nu$, para los términos pares se llega a la expresión

$$c_m = -\frac{c_{m-2}}{m(2\nu + m)}, \quad m \geq 2.$$

Para $m = 2k$, puede expresarse cada coeficiente en función del valor de c_0 de la siguiente forma:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \prod_{j=1}^{k} (\nu + j)} c_0, \quad k \geq 1.$$

Introduciendo estos coeficientes en (4.2) se llega a la solución

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \prod_{j=1}^{k} (\nu + j)} x^{2k+\nu}, \quad x > 0. \tag{4.5}$$

Deben realizarse ciertos ajustes para llegar a la función buscada. En primer lugar, haciendo uso de la propiedad B.3.6, la solución (4.5) puede expresarse como

$$y(x) = c_0 \Gamma(\nu + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)} x^{2k+\nu}.$$

Para normalizar la solución y conseguir que se ajuste a la forma estándar de la función de Bessel que se presentará a continuación, se fija

$$c_0 = \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu + 1)},$$

y así se llega finalmente a la forma canónica de la función de Bessel de primera especie de orden ν:

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{4.6}$$

Aplicando el criterio del cociente (B.2.6) a la serie de $J_{\nu}(x)$ se demuestra que la serie converge en toda la recta real:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}/(k+1)! \Gamma(k + \nu + 2)}{(-1)^k / k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{x^2}{4(k+1)(k + \nu + 1)} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tomando $r_2 = -\nu$, segunda raíz de la ecuación indicial (4.4) se llega a otra solución para la ecuación (4.1):

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \tag{4.7}$$

No obstante, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ no son siempre linealmente independientes y, por tanto, no siempre puede construirse una solución general para la ecuación (4.1) a partir de estas dos funciones.

En el caso de que $\nu \notin \mathbb{Z}$, las soluciones (4.6) y (4.7) son linealmente independientes puesto que

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi x},$$

y, por tanto, la solución general para (4.1) viene dada por

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Por otro lado, en el caso que $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu = n$, teniendo en cuenta que $\Gamma(-m) = \infty$ para $m \in \mathbb{N}$, porque la Función Gamma presenta polos simples en los enteros no positivos, y la propiedad B.3.4 se tiene que

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

En esta expresión se realiza la traslación de índices $m = k - n$ para llegar a

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n},$$

donde se aprecia que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

De esta relación se sigue que en el caso que $\nu \in \mathbb{Z}$ las funciones J_n y J_{-n} son linealmente dependientes y, por tanto, no puede construirse una solución general de la forma (4.8) para (4.1). Por ello, se define la función

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

Esta función se denomina función de Bessel de segunda especie y para $\nu \notin \mathbb{Z}$ es solución de la ecuación (4.1); pero en el caso $\nu = n \in \mathbb{Z}$, siguiendo [8] se calcula el límite $v \mapsto n$ para obtener una segunda solución para (4.1) de la forma

$$\begin{aligned} Y_n(x) = {} & \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}(n-k-1)!}{k!} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \left(\psi(k+1) + \psi(k+n+1)\right), \end{aligned}$$

donde $\psi(x)$ es la función digamma (véase B.3.7).

La función $Y_\nu(x)$, que acaba de ser definida, es linealmente independiente de la función $J_\nu(x)$ definida previamente puesto que

$$W[J_\nu, Y_\nu](x) = \frac{2}{\pi x} \neq 0, \quad \text{para } x > 0,$$

y, por tanto, puede definirse una solución general para (4.1) de la forma

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4.2. Funciones de Bessel

Durante los cálculos realizados para obtener la solución de la ecuación de Bessel se han empleado dos funciones que deben ser presentadas.

- La función de Bessel de primera especie de orden ν, viene dada por:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{4.9}$$

- La función de Bessel de segunda especie de orden ν, viene dada por:

  - Para $\nu \notin \mathbb{Z}$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \tag{4.10}$$

  - Para $\nu \in \mathbb{Z}$

$$Y_\nu(x) = \lim_{\alpha \to \nu} Y_\alpha(x). \tag{4.11}$$

La función de Bessel de primera especie (4.9), para órdenes enteros puede expresarse también en forma integral:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta.$$

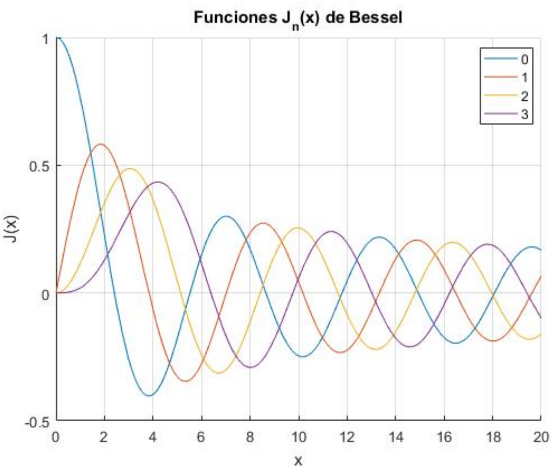

Figura 4.1: Funciones de Bessel de primera especie de orden $\nu = 0, 1, 2, 3$.

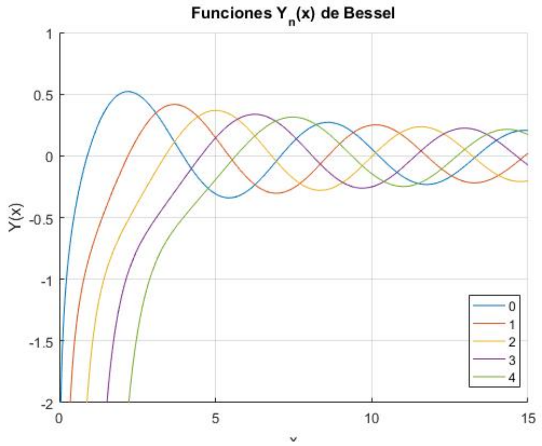

Figura 4.2: Funciones de Bessel de segunda especie de orden $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Las figuras 4.1 y 4.2 representan las funciones $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$, respectivamente, de órdenes bajos. En estas gráficas pueden intuirse ciertas propiedades sobre el comportamiento de ambas funciones que las convierten en herramientas útiles para problemas físicos que se presentarán más adelante.

4.3. Propiedades

4.3.1. Comportamiento en el origen

Propiedad 4.3.1. *En cuanto al comportamiento en torno al origen, como se aprecia en la figura 4.1, la función de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$ se comporta de forma diferente según el valor de ν:*

- *Si $\nu < 0$, $J_\nu(x)$ diverge en $x = 0$.*
- *Si $\nu = 0$, se verifica $J_\nu(0) = 1$.*
- *Si $\nu > 0$, se tiene que $J_\nu(0) = 0$.*

Demostración. Partiendo de la representación en serie (4.9), se analiza el comportamiento en $x = 0$ considerando el término dominante ($k = 0$):

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+.$$

- Caso $\nu < 0$:
  Sea $\nu = -\mu$, con $\mu > 0$. El término dominante diverge:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} = +\infty \implies J_\nu(x) \to \infty.$$

- Caso $\nu = 0$:

$$J_0(0) = \frac{(-1)^0}{(0!)^2} \left(\frac{0}{2}\right)^0 = 1.$$

- Caso $\nu > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = 0 \implies J_\nu(0) = 0.$$

$\square$

En cuanto a la función de Bessel de segunda especie $Y_\nu(x)$, su comportamiento en el origen es diferente puesto que $Y_\nu(x)$ presenta una singularidad en $x = 0$:

$$lim_{x \to 0^+} Y_\nu(x) = -\infty,$$

para cualquier valor de ν, como se comprueba en las gráficas de la figura 4.2.

Debido a este comportamiento en torno al origen, la función $J_\nu(x)$ con $\nu \geq 0$ será una solución aceptable para problemas físicos que requieran regularidad en el origen; mientras que la función $Y_\nu(x)$ no podrá usarse en problemas donde se requiera una solución definida en $x = 0$.

4.3.2. Comportamiento asintótico

El comportamiento asintótico de ambas funciones es también un detalle a tener en cuenta, ya que este describe el comportamiento de las funciones cuando $x \mapsto \infty$. Como puede apreciarse en las figuras 4.1 y 4.2, tanto $J_\nu(x)$ como $Y_\nu(x)$ se comportan de manera oscilatoria con amplitud decreciente, pero con un desfase que viene dado porque el comportamiento asintótico cuando $x \mapsto \infty$ de $J_\nu(x)$ depende de una función coseno, mientras que el de la función $Y_\nu(x)$ depende de una función seno.

Si se supone que $f(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel (4.1) y se toma $g(x) = x^{\frac{1}{2}} f(x)$ se tiene que $f(x) = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}}$. Si se introduce en la ecuación (4.1) y se multiplica por $x^{-\frac{3}{2}}$ se llega a

$$g''(x) + g(x) + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} g(x) = 0.$$

Para x muy grande, el coeficiente $\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2}$ es muy pequeño, luego se espera que las soluciones de esta ecuación se comporten como las soluciones de la ecuación

$$g''(x) + g(x) = 0,$$

las cuales son combinaciones de $\sin(x)$ y $\cos(x)$, o de forma equivalente, funciones de la forma $ax^{-\frac{1}{2}} \cos x + b$ o $ax^{-\frac{1}{2}} \sin x + b$. Así, se tiene la siguiente propiedad.

Propiedad 4.3.2. *Cuando $x \to \infty$ las funciones de Bessel de primera y segunda especie se comportan de la siguiente forma:*

- $$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

- $$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Demostración. Se tratan por separado ambas funciones.

- Para la función de primera especie, J_ν, el razonamiento previo al enunciado de la propiedad lleva a suponer un comportamiento asintótico de la forma $ax^{\frac{-1}{2}}\cos x + b$; no obstante, la determinación de los coeficientes $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ y $b = -\left(\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ requiere el uso de funciones de Bessel con argumentos complejos no tratadas en este trabajo y relaciones entre estas y las funciones de Bessel de primera especie. Esta demostración puede consultarse en el capítulo 8 de [9] o en el capítulo 7 de [10].

- En cuanto a la función de segunda especie, Y_ν, existe un razonamiento similar, basado también en la relación de esta función con las funciones de Bessel con argumentos complejos que lleva a concluir en este caso que el comportamiento es de la forma $ax^{-\frac{1}{2}}\sin x + b$ con los mismos valores de a y b para cualquier ν. No obstante, en el caso $\nu \notin \mathbb{Z}$ si puede hacerse una demostración de este comportamiento basándose en la materia conocida.

  Del comportamiento de J_ν se tiene que

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \to \infty.$$

  Además, se tiene que

$$\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\nu\pi)\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin(\nu\pi)\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

  luego

$$\sin(\nu\pi)\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\nu\pi)\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

  Recordando la definición de Y_ν para $\nu \notin \mathbb{Z}$, (4.10), se tiene finalmente

$$\begin{aligned} Y_\nu(x) &\approx \frac{\cos(\nu\pi)\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin(\nu\pi)} \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

□

Ambas funciones oscilan con la misma frecuencia y misma tasa de decrecimiento, lo cual las convierte en funciones adecuadas para el análisis de ondas, vibraciones o problemas de dispersión, especialmente en dominios no acotados.

4.3.3. Identidades recursivas de la función de primera especie

Por otro lado, las funciones de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$ satisfacen una serie de identidades recursivas que permiten expresar funciones de órdenes adyacentes y derivadas en términos de unas y otras.

Propiedad 4.3.3. *Se verifican las relaciones:*

1.
$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x). \tag{4.12}$$

2.
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right] = x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \tag{4.13}$$

Demostración. Se analizan por separado.

1. Se parte de la definición de la función J_ν, (4.9), luego se tiene:

$$x^{\nu}J_{\nu}(x) = x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu}x^{2k+2\nu}.$$

Derivando término a término esta expresión se llega a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu}x^{2k+2\nu-1}\\ &= x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu}x^{2k+\nu-1}.\end{aligned}$$

Por otro lado, de (4.9) se tiene que

$$x^{\nu}J_{\nu-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu-1}x^{2k+2\nu-1}.$$

De la identidad B.3.4 se sigue que

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu)} = \frac{(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)},$$

por lo que

$$x^{\nu}J_{\nu-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot(k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu-1}x^{2k+2\nu-1},$$

que multiplicado por 2 resulta

$$x^{\nu}J_{\nu-1}(x) = x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2(k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu}x^{2k+\nu-1}.$$

Ambas expresiones coinciden, por lo que queda demostrada la identidad.

2. De nuevo se parte de (4.9) y se tiene:

$$x^{-\nu}J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu}x^{2k}.$$

Derivando término a término la expresión se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu} x^{2k-1},$$

que puede ser reescrito haciendo el cambio de índice $m = k-1$ llegando a

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cdot 2(m+1)}{(m+1)!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2+\nu} x^{2m+1}.$$

Así, se llega a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} \cdot 2}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+\nu+2} x^{2m+1} \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+\nu+1} x^{2m+1}.\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene

$$x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+\nu+1} x^{2k+1}.$$

Ambas expresiones coinciden, quedando así probada la identidad.

□

Propiedad 4.3.4. *Se verifican las relaciones:*

1.

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \tag{4.14}$$

2.

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x). \tag{4.15}$$

Demostración. Estas relaciones se obtienen de manera sencilla derivando las relaciones de la propiedad 4.3.3

1. Derivando en la relación (4.12) se tiene que

   $$\nu x^{\nu-1}J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1},$$

   y dividiendo por x^ν se tiene la expresión buscada.

2. Derivando en la relación (4.13) se tiene que

   $$-\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) + x^{-\nu} J'_\nu(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1},$$

   y dividiendo entre $x^{-\nu}$ se llega a la identidad buscada.

□

Propiedad 4.3.5. *Se verifican las relaciones:*

1. $$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}.$$

2. $$\frac{2\nu}{x} J'_\nu(x) = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}.$$

Demostración. Estas identidades se obtienen directamente de la propiedad 4.3.4

1. Sumando (4.14) y (4.15) se llega a la expresión buscada.

2. Restando (4.15) de (4.14) se llega a la identidad buscada.

□

4.3.4. Ceros de las funciones de primera especie

Propiedad 4.3.6. *La función de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$ tienen infinitos ceros reales positivos. Además, estos ceros son todos simples.*

Demostración. Por un lado, la existencia de una infinidad de ceros positivos para esta función está directamente relacionada con el comportamiento asintótico de la misma. Se ha comentado ya que

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \to \infty.$$

De este comportamiento sinusoidal cuando $x \to \infty$ se sigue que la función cruza el eje horizontal en una infinidad de ocasiones para valores grandes positivos de x.

Por otro lado, para demostrar que todos los ceros son simples se usa el siguiente argumento. Se supone por reducción al absurdo que existe un cero múltiple de $J_\nu(x)$, $x_0 \neq 0$. Entonces se tendría que $J_\nu(x_0) = 0$ y $J'_\nu(x_0) = 0$. Si se sustituyen estos valores en la ecuación diferencial (4.1) se obtiene que también $J''_\nu(x_0) = 0$ y repitiendo el proceso se concluye que todas las derivadas serían cero. Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para estas ecuaciones A.3.2 se concluye que $J_\nu(x)$ sería la función nula, lo cual es contradictorio. Por tanto, todos los ceros son simples. □

Además, existen ciertas relaciones entre los ceros de las funciones de Bessel de primera especie de órdenes adyacentes que se presentan a continuación.

Propiedad 4.3.7. *Entre dos ceros de $J_\nu(x)$ hay al menos un cero de $J_{\nu+1}(x)$.*

Demostración. Se sabe que $J_\nu(x)$ tiene infinitos ceros positivos. Los ceros positivos de $J_\nu(x)$ y los ceros positivos de $x^{-\nu}J_\nu(x)$ son los mismos. Sean a, b dos ceros positivos de $x^{-\nu}J_\nu(x)$ y supongamos que $a < b$. La función $x^{-\nu}J_\nu(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $a^{-\nu}J_\nu(a) = b^{-\nu}J_\nu(b)$. Por el teorema de Rolle, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]\right)_{x=c} = 0.$$

Por el apartado segundo de la propiedad 4.3.3 se tiene

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]\right)_{x=c} = -c^{-\nu}J_{\nu+1}(c),$$

y, entonces, $J_{\nu+1}(c) = 0$. □

Propiedad 4.3.8. *Entre dos ceros de $J_{\nu+1}(x)$ hay al menos un cero de $J_\nu(x)$.*

Demostración. Se sabe que $J_{\nu+1}(x)$ tiene infinitos ceros positivos. Los ceros positivos de $J_{\nu+1}(x)$ son los mismos que los ceros positivos de $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$. Sean a, b dos ceros positivos de $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$ y se supone que $a < b$. $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $a^{\nu+1}J_{\nu+1}(a) = b^{\nu+1}J_{\nu+1}(b)$. Por el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\right]\right)_{x=c} = 0.$$

Aplicando el primer apartado de la propiedad 4.3.3, se tiene que

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\right]\right)_{x=c} = c^{\nu+1}J_\nu(c).$$

Por lo tanto, $J_\nu(c) = 0$ y se prueba el resultado buscado. □

4.3.5. Ortogonalidad de las funciones de primera especie

Por comodidad, en este apartado se trabajará en el intervalo $[0, 1]$. Mediante un cambio de variable puede trasladarse la propiedad que se enunciará al intervalo $[0, a]$.

Una de las propiedades fundamentales de las funciones de Bessel de primera especie, $J_\nu(x)$, es que para valores positivos de ν conforman un sistema ortogonal respecto a un producto interno ponderado como se muestra a continuación.

Propiedad 4.3.9. *Sean $x \in [0, 1]$, λ_n y λ_m ceros positivos de alguna función de Bessel fija $J_\nu(x)$ con $\nu \geq 0$. Se define el producto interno*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 x f(x) g(x) dx. \tag{4.16}$$

Se verifica:

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda_m x) J_\nu(\lambda_n x) dx = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n, \\ \frac{1}{2}\left[J_{\nu+1}(\lambda_n)\right]^2 & si\ m = n. \end{cases}$$

Demostración. La función $y = J_\nu(x)$ es solución de la ecuación (4.1). Sean a y b constantes positivas distintas. La función $u(x) = J_\nu(ax)$ satisface la ecuación

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(a^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0, \tag{4.17}$$

y la función $v(x) = J_\nu(bx)$ satisface la ecuación

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)v = 0. \tag{4.18}$$

Multiplicando la ecuación (4.17) por v se tiene que

$$u''v + \frac{1}{x}u'v + \left(a^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)uv = 0, \tag{4.19}$$

y multiplicando (4.18) u se tiene

$$v''u + \frac{1}{x}v'u + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)vu = 0. \tag{4.20}$$

Restando (4.19) − (4.20) y operando se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(u'v - v'u\right) + \frac{1}{x}\left(u'v - v'u\right) = (b^2 - a^2)uv,$$

donde multiplicando por x se llega a

$$\frac{d}{dx}\left[x(u'v - v'u)\right] = (b^2 - a^2)xuv.$$

Integrando entre 0 y 1 esta última expresión resulta:

$$(b^2 - a^2)\int_0^1 xuvdx = \left[x(u'v - v'u)\right]_0^1.$$

Se observa que la expresión a la derecha del igual se anula en $x = 0$. En $x = 1$ se tiene que $u(1) = J_\nu(a)$ y $v(1) = J_\nu(b)$. Entonces, $(b^2 - a^2)\int_0^1 xuvdx = 0$ si $a = \lambda_m$ y $b = \lambda_n$ son dos ceros distintos positivos de $J_\nu(x)$. Así,

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_m x)J_\nu(\lambda_n x)dx = 0, \quad \text{si } m \neq n.$$

Por otro lado, para $m = n$, se calcula

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_n x)J_\nu(\lambda_n x)dx.$$

Multiplicando (4.17) por $2x^2u'$ se tiene

$$2x^2u'u'' + 2x(u')^2 + 2a^2x^2uu' - 2\nu^2uu' = 0,$$

que puede reescribirse como

$$\frac{d}{dx}\left(x^2(u')^2\right) + \frac{d}{dx}(a^2x^2u^2) - 2a^2xu^2 - \frac{d}{dx}(\nu^2u^2) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2(u')^2\right) + (a^2x^2u^2) - (\nu^2u^2)\right] = 2a^2xu^2.$$

Integrando a ambos lados en $[0,1]$ se tiene:

$$2a^2\int_0^1 xu^2dx = \left[x^2(u')^2 + (a^2x^2-\nu^2)u^2\right]_0^1.$$

Se observa que $[x^2(u')^2 + (a^2x^2-\nu^2)u^2]$ se anula en $x=0$ y que $u'(1) = aJ'_\nu(a)$, luego

$$\int_0^1 x(J_\nu(ax))^2dx = \frac{1}{2}(J'_\nu(a))^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu^2}{a^2}\right)(J_\nu(a))^2.$$

Finalmente, fijando $a=\lambda_n$ y aplicando la segunda identidad de la propiedad 4.3.3 se concluye

$$\int_0^1 x(J_\nu(\lambda_n x))^2dx = \int_0^1 xJ_\nu(\lambda_n x)J_\nu(\lambda_n x)dx = \frac{1}{2}\left[J_{\nu+1}(\lambda_n)\right]^2.$$

□

Esta relación muestra que las funciones $J_\nu(\lambda_n x)$ forman un sistema ortogonal respecto al producto interno (4.16). Además, para $n=m$, se tiene una fórmula explícita para la norma cuadrada de cada función:

$$\int_0^1 x\left[J_\nu(\lambda_n x)\right]^2dx = \frac{1}{2}\left[J_{\nu+1}(\lambda_n)\right]^2.$$

Además, se tiene que este sistema ortogonal que acaba de ser descrito es completo como se presenta en el capítulo 5 de [9]. Para la demostración de la completitud de este sistema se hace referencia al capitulo 18 de [10] donde de hecho se prueba para $\nu \geq -\frac{1}{2}$. Siguiendo las notas de Hankel y Schläfi, tras realizar previamente el estudio de la función

$$T_n(x,t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{2J_\nu(\lambda_m x)J_\nu(\lambda_m t)}{J^2_{\nu+1}(\lambda_m)},$$

con $0 \leq x,t \leq 1$, y la relación de esta función y las funciones de Bessel de primera especie un profundo estudio que se presenta a lo largo de todo el capítulo 18 de [10] lleva a concluir la completitud de este sistema.

Gracias a estas propiedad, cualquier función suficientemente regular $f(x)$ definida en $[0,1]$ (o eventualmente en $[0,a]$ con los ajustes oportunos) puede desarrollarse en serie de funciones de Bessel:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x),$$

donde los coeficientes c_n se obtienen mediante el producto interno:

$$c_n = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\lambda_n)]^2}\int_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_n x)\,dx.$$

4.4. Ecuación de Laplace en conjuntos con simetría cilíndrica

Hasta ahora, se ha estudiado la ecuación de Bessel desde el punto de vista puramente matemático, como una ecuación diferencial lineal con un punto singular regular en $x = 0$. A continuación, se muestra cómo esta ecuación está muy relacionada con la resolución de la ecuación de Laplace mediante separación de variables en sistemas con simetría cilíndrica. Esta deducción justifica la presencia de esta ecuación en numerosos fenómenos físicos que se presentarán más adelante.

Se considera la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{4.21}$$

donde Δ es el operador laplaciano y $u = u(x, y, z)$ es una función escalar de tres variables.

Para estudiar problemas con simetría cilíndrica, esta ecuación puede expresarse en coordenadas cilíndricas $u = u(\rho, \phi, z)$ cuya relación con las coordenadas cartesianas se detalla en el apéndice B.4.3. Este cambio de variable se justifica con el teorema B.5.2. Así, puede aplicarse la regla de la cadena para obtener las derivadas que se necesitan como se muestra a continuación.

Antes de iniciar el desarrollo, debe mencionarse que la variable z permanece inalterada con este cambio. Por ello, las derivadas parciales respecto de z no requieren transformación alguna. Entonces, se tratará de transformar las derivadas respecto de x e y, que dependen de las variables ρ y ϕ únicamente y al final se incorporará la derivada segunda respecto de z sin realizar modificaciones. Nótese también que se está trabajando en un cilindro (o un sistema con simetría cilíndrica) con $0 < \rho < R_1$, $0 < z < a$ y que, siguiendo [11] deben verificarse las condiciones frontera

$$u(\rho, \phi, 0) = u(\rho, \phi, a), \quad u(R_1, \phi, z) = g(\phi, z).$$

En primer lugar, debe tenerse en cuenta que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho},$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2}.$$

Así, las derivadas de primer orden son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

Ahora, a partir de estas expresiones deben calcularse las derivadas de segundo orden. En primer lugar, se procede con la segunda derivada respecto de x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right),$$

donde se desarrollarán por separado los dos sumandos. Para calcular $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)$ se emplea

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right) = \frac{\rho - \frac{x^2}{\rho}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3},$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right),$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{x}{\rho} - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi}\frac{y}{\rho^2}.$$

Así, finalmente se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{x^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{xy}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi}.$$

Ahora, se calculará $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$ empleando

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\rho^2}\right) = \frac{-2xy}{\rho^4},$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = -\left[\frac{-2xy}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right],$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Así, finalmente se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = \frac{2xy}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{xy}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Entonces, uniendo las derivadas de ambos términos se llega finalmente a la expresión para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{x^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{2xy}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{2xy}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Para la segunda derivada respecto de y, el procedimiento es análogo puesto que las expresiones de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ son simétricas intercambiando y por x pero cambiando el signo del segundo sumando. Así, se obtiene para $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ la expresión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{y^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2xy}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} - \frac{2xy}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{x^2}{\rho^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Ahora, se combinan las expresiones obtenidas para calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Para ello, se calculan los coeficientes de cada derivada.

- Coeficientes de $\frac{\partial u}{\partial \rho}$:

$$\left(\frac{1}{\rho}-\frac{x^2}{\rho^3}\right)+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{y^2}{\rho^3}\right)=\frac{2}{\rho}-\frac{x^2+y^2}{\rho^3}=\frac{2}{\rho}-\frac{\rho^2}{\rho^3}=\frac{2}{\rho}-\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho}.$$

- Coeficientes de $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2}=\frac{x^2+y^2}{\rho^2}=\frac{\rho^2}{\rho^2}=1.$$

- Coeficientes de $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi}$:

$$-\frac{2xy}{\rho^3}+\frac{2xy}{\rho^3}=0.$$

- Coeficientes de $\frac{\partial u}{\partial \phi}$:

$$\frac{2xy}{\rho^4}-\frac{2xy}{\rho^4}=0.$$

- Coeficientes de $\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$:

$$\frac{y^2}{\rho^4}+\frac{x^2}{\rho^4}=\frac{x^2+y^2}{\rho^4}=\frac{1}{\rho^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Ahora, se recupera la segunda derivada respecto de z, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, que permanece inalterada como ya se ha comentado para incorporarla a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Finalmente, el primer sumando puede reescribirse para llegar a la expresión de la ecuación (4.21) en coordenadas cilíndricas:

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Se buscan soluciones mediante el método de separación de variables, luego se asume que $u(\rho,\phi,z)=R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$. Sustituyendo en la ecuación de Laplace y dividiendo entre $u=R\Phi Z$, se obtiene

$$\frac{1}{R}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}=0,$$

y se multiplica por ρ^2:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{\rho^2}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}=0.$$

La expresión previa es equivalente a

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right)=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2},$$

donde se observa que el lado izquierdo de la ecuación depende de ρ y ϕ, mientras que el lado derecho de la ecuación depende únicamente de z. Por ello, ambas expresiones deben ser constantes para que pueda verificarse la igualdad.

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right)=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=C_1,$$

de donde se tiene

$$Z''+C_1Z=0,\quad Z(0)=Z(a)=0.$$

Para la solución de esta ecuación se tendrán los autovalores $\lambda_1=\sqrt{-C_1}$, $\lambda_2=-\sqrt{-C_1}$ y se buscan autofunciones distintas de la función nula.

- El caso $C_1<0$ conduce a una solución de la forma

  $$Z(z)=Ae^{\lambda_1 z}+Be^{\lambda_2 z},$$

  pero la condición $Z(0)=Z(a)$ lleva a que $A=B=0$.

- En el caso $C_1=0$ se tendrá una solución de la forma

  $$Z(z)=A+Bz,$$

  donde de nuevo la condición $Z(0)=Z(a)$ conduce a autofunciones nulas.

- Finalmente, el caso $C_1>0$ lleva a la solución

  $$Z(z)=A\cos(\sqrt{-C_1}z)+B\sin(\sqrt{-C_1}z),$$

  donde el parámetro B queda libre y, por tanto, las autofunciones son no nulas.

Luego se necesita que $C_1>0$ y, por tanto, se toma $C_1=k^2$, $k\neq 0$, lo cual concuerda con lo necesario para obtener la ecuación buscada. Entonces

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2,$$

de modo que

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right)-k^2=0.$$

Esta expresión puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\rho^2k^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{\phi^2}.$$

De nuevo se observa que en esta ecuación, el término de la izquierda de la igualdad depende únicamente de ρ, mientras que el término de la derecha depende solo de ϕ y, por tanto, ambos deben ser constantes para que se verifique la igualdad:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\rho^2k^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=C_2.$$

De nuevo, de esta ecuación se deduce

$$\Phi''+C_2\Phi=0,\quad \Phi(0)=\Phi(2\pi),\quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi),$$

donde las condiciones iniciales vienen dadas porque se necesita que $\Phi(\phi)$ debe ser periódica con periodo 2π. En esta ocasión los autovalores vuelven a ser $\lambda_1=\sqrt{-C_2}$, $\lambda_2=-\sqrt{-C_2}$.

- En el caso $C_2<0$ se tendrá una solución de la forma

  $$\Phi(\phi)=Ae^{\lambda_1\phi}+Be^{\lambda_2\phi},$$

  donde de nuevo las condiciones iniciales llevan a concluir que $A=B=0$.

- El caso $C_2=0$ lleva a la solución

  $$\Phi(\phi)=A+B\phi,$$

  donde en esta ocasión las condiciones iniciales dejan libre el parámetro B, llevando a autofunciones no nulas.

- En el caso $C_2>0$, se tiene la solución de la forma

  $$\Phi(\phi)=A\cos(\sqrt{-C_2}\phi)+B\sin(\sqrt{-C_2}\phi),$$

  donde de nuevo las condiciones iniciales conducen a autofunciones distintas de la función nula.

Por ello, se tiene que $C_2=m^2$, m entero. Nótese, que en este caso, si que se permite $m=0$. Así,

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=m^2,$$

y

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\rho^2k^2=m^2.$$

La ecuación radial es

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\left(k^2\rho^2+m^2\right)R=0.$$

Desarrollando la derivada se tiene

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-\left(k^2\rho^2+m^2\right)R=0,$$

a la que se puede aplicar el cambio de variable

$$\rho' = k\rho, \quad R(\rho) = R'(k\rho).$$

No obstante, para facilitar la claridad de la exposición, se renombra $\rho = \rho'$, $R = R'$ y se continúan utilizando las variables anteriores. Así, se obtiene en la ecuación

$$\rho^2 R'' + \rho R' - (\rho^2 + \nu^2)R = 0. \tag{4.22}$$

La ecuación (4.22) se llama ecuación de Bessel modificada y se trata de una variante de la ecuación de Bessel (4.1) en la que el término x^2y (en este caso $\rho^2 R$) aparece con signo opuesto. Las soluciones de (4.22) se llaman funciones de Bessel modificadas y pueden ser consultadas en los capítulos 49 y 50 de [12].

4.5. Aplicaciones a la física

La aparición de la ecuación de Bessel en sistemas cilíndricos explica su relevancia en fenómenos físicos. La separación de variables en coordenadas cilíndricas conduce inevitablemente a soluciones radiales expresadas mediante funciones de Bessel de primera y segunda especie $J_m(x)$ y $Y_m(x)$, presentadas anteriormente.

En esta sección se estudiarán algunas aplicaciones de la ecuación de Bessel en la física siguiendo [8], [13] y [14].

4.5.1. Ecuación del calor en un cilindro

Se estudia la evolución temporal de la temperatura $u(x, y, z, t)$ en un cilindro de radio R y altura L. La ecuación general de conducción del calor es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{4.23}$$

donde α es la difusividad térmica, un parámetro dependiente del material. La ecuación (4.23) se reescribe como se hizo en la sección previa pasando de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) puesto que se está trabajando en un cilindro y se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{4.24}$$

Se considera que:

- La conductividad térmica k, la capacidad calorífica C y la densidad d del material son constantes. Se tiene así que la difusividad térmica $\alpha = \frac{k}{Cd}$ es constante.

- Se tiene simetría axial, sin variación angular, luego se considerará $u(\rho, \phi, z, t) = u(\rho, z, t)$.

Al descartar la dependencia angular, la ecuación (4.24) toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Si se buscan soluciones mediante separación de variables $u(\rho, z, t) = R(\rho)Z(z)T(t)$. Se introduce esta solución en la ecuación previa y se divide por RZT para llegar a

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \alpha \left[\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right].$$

El lado izquierdo depende únuicamente de t mientras que el derecho depende de ρ, entonces para que pueda verificarse la igualdad ambas expresiones deben ser constantes:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = k,$$

$$\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{k}{\alpha} = k',$$

siendo k (y, por tanto, k') una constante. La segunda ecuación se puede operar para obtener

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k' = -\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right).$$

De nuevo, se repite el argumento previo puesto que el lado izquierdo de la igualdad depende de z, mientras que el derecho depende de ρ, luego ambos deben igualarse a una constante para poder cumplir la igualdad y se tiene

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k' = \lambda,$$

$$-\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \lambda,$$

siendo λ una constante. La segunda de las dos ecuaciones se conoce como ecuación radial, pues depende únicamente de ρ y puede operarse para obtener

$$\frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{dR}{d\rho} \right) = -\lambda R,$$

que multiplicada por ρ^2 resulta

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + \lambda \rho^2 R = 0. \tag{4.25}$$

Esta ecuación es muy similar a la ecuación de Bessel de orden 0, pero incluyendo la constante de separación λ y, por tanto, la solución general de la ecuación (4.25), parte radial de la ecuación (4.24), es

$$R(\rho) = AJ_0(\sqrt{\lambda}\rho) + BY_0(\sqrt{\lambda}\rho), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

donde J_0 e Y_0 son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden 0. Habitualmente, se requiere que la solución sea finita en $\rho = 0$ por las condiciones de contorno, lo cual lleva a que el coeficiente B sea nulo y, por tanto,

$$R(\rho) = AJ_0(\sqrt{\lambda}\rho).$$

Para obtener la solución general de la ecuación (4.24) deben resolverse resto de ecuaciones que han surgido en la separación de variables; no obstante, estas no tienen relación alguna con los métodos ni funciones estudiadas en este trabajo y, por ello, no se incluye.

4.5.2. Vibración de una membrana circular

Sea $u(x, y, t)$ la función que el desplazamiento de la membrana en la posición (x, y) en el instante t. Las vibraciones de una membrana están descritas por la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{4.26}$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda. En este caso, se considera una membrana circular de radio a y, por tanto, resulta más apropiado considerar la ecuación previa en coordenadas polares $u = u(\rho, \theta, t)$ cuya relación con las coordenadas cartesianas se detalla en el apéndice B.4.2. La validez de este cambio de variable se justifica con el teorema B.5.2. Así, puede aplicarse la regla de la cadena calcular las derivadas y transformar la ecuación (4.26) a las coordenadas polares. Se busca expresar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

en términos de (ρ, θ), pero esto ya se ha estudiado en la sección 4.4 y de ahí se puede tomar la expresión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Por tanto, la ecuación (4.26) que se busca resolver es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right). \tag{4.27}$$

Para resolver esta ecuación se buscará una solución mediante separación de variables. Por tanto, se asume una solución de la forma $u(\rho, \theta, t) = R(\rho)\Theta(\theta)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación (4.27) y dividiendo entre $R\Theta T$ se tiene

$$\frac{1}{c^2 T}\frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{R\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Theta \rho^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}.$$

Se observa que el lado izquierdo depende solo de la variable t, mientras que el lado derecho depende de ρ y θ. Por tanto, necesariamente ambas expresiones deben ser iguales a una constante, que se tomará como $-\lambda^2$ de acuerdo con el significado físico del problema ya que las vibraciones deben ser finitas. Se obtienen así dos ecuaciones

$$\frac{1}{c^2 T}\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2,$$

$$\frac{1}{R\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Theta\rho^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-\lambda^2.$$

Esta segunda ecuación puede operarse de la siguiente forma:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(r\frac{dR}{d\rho}\right)+\rho^2\lambda^2=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}.$$

Se observa de nuevo que el lado izquierdo depende únicamente de ρ, mientras que el derecho depende de θ. Por tanto, la única posibilidad es que ambos lados de la ecuación sean iguales a una constante, que se tomará v^2. Se tienen así dos ecuaciones:

$$-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=v^2,$$

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(r\frac{dR}{d\rho}\right)+\rho^2\lambda^2=v^2.$$

Esta segunda ecuación puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(r\frac{dR}{d\rho}\right)=(v^2-\rho^2\lambda^2)R,$$

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}+(\rho^2\lambda^2-v^2)R=0. \tag{4.28}$$

La ecuación obtenida es, al igual que en la sección 4.5.1, muy similar a la ecuación de Bessel (4.1) de orden v, pero añadiendo la constante de separación λ^2. Por tanto, la solución general de la ecuación (4.28) es de la forma

$$R_v(\rho)=A_vJ_v(\lambda\rho)+B_vY_v(\lambda\rho),\quad A_v,B_v\in\mathbb{R}, \tag{4.29}$$

siendo J_v e Y_v las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden v. La solución debe ser finita y, en particular, debe verificarse $|R(0)|<\infty$. Entonces, como Y_v diverge en el origen, necesariamente $B_v=0$ y, por tanto, la solución general de (4.28) se reduce a

$$R_v(\rho)=A_vJ_v(\lambda\rho).$$

Al igual que en la sección 4.5.1 el resto de ecuaciones que surgen en la separación de variables no tienen relación alguna con el enfoque de este trabajo y, por tanto, no se incluyen en él.

4.5.3. Otras aplicaciones

Además de los modelos de conducción del calor y vibración de membranas, la ecuación de Bessel también aparece en otros contextos físicos relevantes. En electromagnetismo, las funciones de Bessel surgen al estudiar la propagación de ondas dentro de guías cilíndricas metálicas, como las empleadas en microondas o en ciertas fibras ópticas.

En acústica, ocurre algo análogo al analizar la resonancia en cavidades cilíndricas, como tubos o cámaras de sonido. Al aplicar la ecuación de onda acústica

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\Delta u,$$

donde $u = u(\mathbf{x}, t)$ es el campo de presión acústica y c es la velocidad del sonido en el medio, a dominios con simetría circular conduce también a la ecuación de Bessel, cuyos ceros determinan las frecuencias de resonancia del sistema.

Estas aplicaciones ponen de manifiesto cómo la ecuación de Bessel aparece de manera natural en una amplia variedad de fenómenos físicos en los que intervienen geometrías circulares o cilíndricas.

Capítulo 5

Ecuación de Legendre

La ecuación de Legendre ocupa un lugar destacado en la historia de las matemáticas aplicadas. Esta ecuación fue introducida por Adrien-Marie Legendre a finales del siglo XVIII durante sus estudios sobre la atracción gravitatoria de cuerpos elipsoidales. Legendre buscaba soluciones a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, lo cual motivó el desarrollo de una nueva familia de polinomios que hoy llevan su nombre. Aunque su origen es físico, los polinomios y funciones de Legendre han trascendido este ámbito, encontrando aplicaciones en campos muy diversos.

Como se ha presentado en el ejemplo 2.1.3, esta ecuación presenta dos puntos singulares regulares en $x = \pm 1$. El estudio de esta ecuación en el punto ordinario $x = 0$ da lugar a los polinomios de Legendre, los cuales poseen ciertas propiedades de gran utilidad. En este apartado se abordará la resolución analítica de la ecuación mediante series de potencias, se definirán los polinomios y funciones asociadas de Legendre, y se explorarán sus principales propiedades y aplicaciones.

5.1. Solución de la ecuación

La ecuación de Legendre viene dada por:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell + 1)y = 0, \tag{5.1}$$

donde ℓ es un parámetro que, en general, suele considerarse entero puesto que es en estos casos en los que esta ecuación tiene aplicaciones directas en diversos ámbitos de la física; no obstante, se resolverá la ecuación para $\ell \in \mathbb{R}$.

Puesto que $x = 0$ es un punto ordinario, se aplicarán los resultados del capítulo 1; por tanto, para la ecuación (5.1) se busca una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{5.2}$$

cuyas derivadas pueden ser calculadas por aplicación del resultado B.2.8 llegando a:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

Ahora, se introducen en la ecuación (5.1) la solución supuesta (5.2) y sus derivadas y se llega a la expresión

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Expandiendo el primer término usando la propiedad distributiva se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Esta expresión puede reescribirse agrupando los coeficientes de x^n para llegar a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\ell(\ell+1)c_n - n(n-1)c_n - 2nc_n\right] x^n = 0,$$

y, de aquí, tras realizar la traslación de índices $k = n-2$ en el primer término y sustituir $k = n$ en el resto pueden combinarse ambos sumatorios para obtener

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)c_{k+2} + \big(\ell(\ell+1) - k(k+1)\big)c_k\right] x^k = 0.$$

Esta relación se verificará para todo x si y solo sí los coeficientes son nulos para cada k; esto es:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + \big(\ell(\ell+1) - k(k+1)\big)c_k = 0, \quad k \geq 0. \tag{5.3}$$

De la ecuación (5.3) se llega a la siguiente relación para los coeficientes c_k:

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \ell(\ell+1)}{(k+1)(k+2)}c_k = -\frac{(\ell+k+1)(\ell-k)}{(k+2)(k+1)}c_k. \tag{5.4}$$

De la relación (5.4) se generarán dos familias de coeficientes. Una primera familia estará compuesta por todos los coeficientes de orden par, y dependerán del valor asignado a c_0; y la segunda familia estará formada por los coeficientes de orden impar y todos ellos dependerán del valor que se asigne a c_1. Nótese que los coeficientes c_0 y c_1 pueden ser determinados de manera arbitraria (o eventualmente serán determinados por las condiciones iniciales) al tratarse de una ecuación de orden 2. Así, los coeficientes pares vienen dados por

$$c_{2k} = c_0 \prod_{m=0}^{k-1}\left[-\frac{(\ell+2m+1)(\ell-2m)}{(2m+2)(2m+1)}\right], \tag{5.5}$$

mientras que los impares vienen dados por

$$c_{2k+1} = c_1 \prod_{m=0}^{k-1}\left[-\frac{(\ell+2m+2)(\ell-(2m+1))}{(2m+3)(2m+2)}\right],$$

donde el producto vacío, para $k = 0$ se define como 1 en ambos casos obteniendo $c_0 = c_0$ y $c_1 = c_1$ respectivamente. Por tanto, pueden obtenerse dos soluciones linealmente independientes:

$$y_1(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{m=0}^{k-1} \left[-\frac{(\ell + 2m + 1)(\ell - 2m)}{(2m+1)(2m+2)} \right] \right) x^{2k}, \tag{5.6}$$

$$y_2(x) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{m=0}^{k-1} \left[-\frac{(\ell + 2m + 2)(\ell - (2m+1))}{(2m+3)(2m+2)} \right] \right) x^{2k+1}. \tag{5.7}$$

Y finalmente, una solución general para la ecuación (5.1) vendrá dada por una combinación lineal de ambas soluciones

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$$

Por aplicación del teorema 1.2.1, esta solución será convergente para $x \in (-1, 1)$.

5.2. Polinomios de Legendre

Partiendo de las solución calculada para la ecuación (5.1) en torno al punto ordinario $x = 0$, bajo ciertas condiciones puede definirse una familia de funciones especiales denominadas polinomios de Legendre que resultan relevantes debido a sus propiedades y numerosas aplicaciones que se presentarán más adelante.

Se considerará la solución obtenida a partir de los coeficientes pares (5.6) ya que la solución con coeficientes impares, (5.7), no conduce al truncamiento de la serie. Así, si se fija $c_1 = 0$, para ciertos valores del parámetro ℓ las series dejan de ser infinitas y pasan a ser polinomios. Si se toma ℓ entero no negativo, $\ell = n$, existe un valor de k tal que $\ell - k = n - k = 0$, lo cual anula el numerador en la relación de recurrencia (5.4) y provoca que c_{n+2} sea nulo y, por ende, todos los coeficientes posteriores también. Entonces, en estos casos concretos, la serie deja de ser infinita y pasa a ser un polinomio de grado $n = \ell$.

Los coeficientes pares definen un polinomio de grado n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_{2k} x^{2k},$$

donde al función $\lfloor n/2 \rfloor$ hace referencia a la parte entera y los coeficientes c_{2k} vienen dados por la relación (5.5) tomando $n = \ell$

$$c_{2k} = c_0 \prod_{m=0}^{k-1} \left[-\frac{(n + 2m + 1)(n - 2m)}{(2m+2)(2m+1)} \right].$$

Estos polinomios de denominan polinomios de Legendre. Habitualmente, se elige la constante c_0 de tal forma que $P_n(1) = 1$, lo cual fija la normalización estándar de los polinomios.

5.3. Propiedades

Los polinomios definidos en la sección anterior presentan una serie de propiedades que pueden consultarse también en numerosas fuentes como [15], [16] y [17].

5.3.1. Fórmula de Rodrigues

Una vez definidos estos polinomios como solución de la ecuación (5.1), admiten una expresión explícita que se presenta a continuación.

Proposición 5.3.1. *El polinomio de Legendre de orden n, siendo n un entero no negativo, viene dado por:*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Demostración. Se toma $v = (x^2-1)^n$, luego

$$\frac{dv}{dx} = 2nx(x^-1)^{n-1},$$

o equivalentemente

$$(x^2-1)\frac{dv}{dx} = 2nxv.$$

Se deriva $(n+1)$ veces a ambos lados aplicando la regla de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)g(x)\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k f(x)}{dx^k}\frac{d^{n-k}g(x)}{dx^{n-k}}.$$

- En el lado izquierdo se toma $f(x) = x^2-1$ y $g(x) = \frac{dv}{dx}$. $f(x)$ solo tendrá sus tres primeras derivadas no nulas, luego, la derivada $(n+1)$-ésima será

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x^2-1)\frac{dv}{dx}\right] &= (x^2-1)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} + \binom{n+1}{1}(2x)\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \binom{n+1}{2}(2)\frac{d^n v}{dx^n}\\ &= (x^2-1)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} + 2(n+1)x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n}.\end{aligned}$$

- En el lado derecho, se separa la constante $2n$ que se añadirá al final y se toma $f(x) = x$ y $g(x) = v = (x^2-1)^n$. En este caso, $f(x)$ tiene solo sus dos primeras derivadas no nulas, luego, la derivada $(n+1)$-ésima será

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[2nxv\right] &= 2n\left[x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + \binom{n+1}{1}(1)\frac{d^n v}{dx^n}\right]\\ &= 2n\left[x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{d^n v}{dx^n}\right].\end{aligned}$$

Entonces, se tiene la igualdad

$$(x^2-1)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} + 2(n+1)x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n} = 2n\left[x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{d^n v}{dx^n}\right],$$

que puede reescribirse como

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} - 2x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n} = 0. \tag{5.8}$$

Si se sustituye $z = \frac{d^n v}{dx^n}$, de (5.8) se tiene

$$(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0,$$

que coincide con la ecuación de Legendre (5.1) con $n = \ell$. Entonces, necesariamente

$$z = \frac{d^n v}{dx^n} = cP_n(x),$$

siendo c una constante. Como se he comentado previamente, se conviene que $P_n(1) = 1$, luego

$$\begin{aligned} c = \left(\frac{d^n v}{dx^n}\right)_{x=1} &= \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\bigg|_{x=1} = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right]\bigg|_{x=1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k\bigg|_{x=1} = 2^n n!, \end{aligned}$$

puesto que en el primer factor solo es distinto de cero el término $k = n$. Entonces,

$$P_n(x) = \frac{1}{c}\frac{d^n v}{dx^n} = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

□

Esta expresión ayuda al análisis de estas funciones especiales y permite deducir algunas de sus propiedades de manera directa a través de su análisis.

5.3.2. Paridad

Propiedad 5.3.2. *Se tiene que:*

- *Si n es par, $P_n(x)$ es una función par.*
- *Si n es impar, $P_n(x)$ es una función impar.*

Demostración. Esto se deduce directamente de la simetría de la fórmula de Rodrigues 5.3.1. □

5.3.3. Relación de recurrencia

Con el objetivo de llegar a una relación de recurrencia para los polinomios y poder demostrarla se enuncia primero esta propiedad cuya demostración puede encontrarse en [15].

Propiedad 5.3.3. *Se verifica*

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{5.9}$$

Propiedad 5.3.4. *Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ satisfacen la relación*

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{5.10}$$

Demostración. Se deriva respecto de la variable t a ambos lados en la ecuación (5.9) y se tiene la igualdad

$$(x-t)(1-2xt-t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

que es equivalente a

$$(x-t)(1-2xt-t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2xt-t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad (5.9), la expresión previa puede escribirse como

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt-t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}.$$

En particular, en esta igualdad se pone el foco en los coeficientes de t^n y se observa que

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x),$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned}(n+1)P_{n+1}(x) &= (x+2xn)P_n(x) + (-1-n+1)P_{n-1}(x)\\ &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).\end{aligned}$$

□

Esta relación permite calcular todos los polinomios de manera recursiva a partir de los dos primeros polinomios $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.

5.3.4. Ceros de los polinomios

Respecto a los puntos donde se anulan estos polinomios que se están estudiando, se tiene la siguiente propiedad.

Propiedad 5.3.5. *El polinomio de Legendre de orden n, $P_n(x)$, tiene n raíces reales simples en el intervalo abierto $(-1,1)$.*

Demostración. En primer lugar, debe tenerse en cuenta que para un n entero positivo los ceros de la función real

$$f(x) = (x^2 - 1)^n = (x + 1)^n (x - 1)^n, \tag{5.11}$$

son $x = \pm 1$, cada uno de ellos con multiplicidad n. Del Teorema de Rolle se sigue que existe al menos un $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Se puede comprobar evaluando en la derivada de manera sencilla que en este caso $c = 0$, además de las raíces en $x = \pm 1$, cada una de ellas con multiplicidad $n - 1$. De manera análoga, $f''(x)$ tiene dos raíces, una en $(-1, 0)$ y otra en $(0, 1)$, además de las raíces en $x = \pm 1$, cada una de ellas con multiplicidad $n - 2$. Así, repitiendo este argumento de manera sucesiva se llega a aplicar el Teorema de Rolle a la función $f^{(n-1)}(x)$ que tendrá $n - 1$ ceros distintos distribuidos en el intervalo $(-1, 1)$, además de los ceros simples en $x = \pm 1$. Esto implica que la ecuación

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right] = 0,$$

tiene n raíces distintas. Entonces, teniendo en cuenta que según la fórmula de Rodrigues, 5.3.1, $P_n(x)$ es un múltiplo de la n-ésima derivada de la función (5.11), $f^{(n)}(x)$ se concluye que el polinomio de Legendre de orden n tiene n raíces reales distintas en el intervalo $(-1, 1)$. $\square$

5.3.5. Ortogonalidad de los polinomios

Una de las propiedades más características de los polinomios de Legendre es que forman un sistema ortogonal en el espacio de funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$ con respecto al producto escalar definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Propiedad 5.3.6. *Se verifica que*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad si\ n \neq m.$$

Además, para el caso $n = m$ se tiene la norma

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

Demostración. En primer lugar, se analiza la ortogonalidad. La ecuación (5.1) puede escribirse también como

$$\left[(1 - x^2) y'\right]' + \ell(\ell + 1) y = 0.$$

Tomando $\ell = n$ y $\ell = m$ enteros no negativos como se lleva haciendo durante la exposición y distintos, y teniendo en cuenta que los polinomios de Legendre satisfacen la ecuación (5.1) se verifican las igualdades

$$\left[(1 - x^2) P_n'(x)\right]' + n(n + 1) P_n(x) = 0, \tag{5.12}$$

$$\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' + m(m+1)P_m(x) = 0. \tag{5.13}$$

Se opera $P_m(x)(5.12) - P_n(x)(5.13)$ y reordenando los términos se tiene la igualdad

$$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' P_m(x) - \left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' P_n(x) = \left[m(m+1) - n(n+1)\right] P_n(x)P_m(x).$$

Integrando a ambos lados en el intervalo $[-1,1]$ se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' P_m(x)dx - \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' P_n(x)dx \\ &= \left[m(m+1) - n(n+1)\right] \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx. \end{aligned} \tag{5.14}$$

En el lado izquierdo, se calculan ambas integrales por partes para obtener

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' P_m(x)dx - \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)P_m'(x)\right]' P_n(x)dx \\ &= (1-x^2)P_n'(x)P_m(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx \\ &- (1-x^2)P_m'(x)P_n(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)dx. \end{aligned}$$

Esta expresión resulta nula ya que, por un lado, al evaluar tanto en $x = 1$ como en $x = -1$ se anula $(1-x^2)$ y, por otro lado, las integrales se cancelan al ser iguales con signo opuesto. Entonces, el lado derecho de la igualdad (5.14) debe anularse también. Si $m = n$, esto resulta trivial; y si $n \neq m$ se tiene entonces que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

Ahora, por otro lado, se trata de calcular $\|P_n\|^2$. De la relación (5.10) se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x), \\ xP_n(x) &= \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Usando la primera de estas igualdades se tiene que

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{n} \int_{-1}^{1} \left[(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)\right] P_n(x)dx \\ &= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx - \frac{n-1}{n} \int_{-1}^{1} P_{n-2}(x)P_n(x)dx. \end{aligned}$$

Debido a la ortogonalidad que se acaba de probar, el segundo de los términos es nulo y en el primero puede aplicarse la segunda de las igualdades obtenidas previamente para llegar a

$$\begin{aligned}\|P_n\|^2 &= \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx\\ &= \frac{2n-1}{n(2n+1)}\int_{-1}^{1}\left[(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)\right](x)P_n(x)dx\\ &= \frac{(2n-1)(n+1)}{n(2n+1)}\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx + \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n-1}(x)dx.\end{aligned}$$

De nuevo, debido a la ortogonalidad ya probada el primero de los sumandos se cancela llegando a

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}\left[P_{n-1}(x)\right]^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\|P_{n-1}\|^2.$$

De esta recurrenca se tiene que

$$\|P_n\|^2 = \frac{1}{2n+1}\|P_0\|^2 = \frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{1}[P_0(x)]^2dx = \frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{2n+1}.$$

□

5.4. Ecuación generalizada de Legendre y funciones asociadas

La ecuación (5.1) que ha sido estudiado hasta ahora es un caso concreto de una familia más grande de ecuaciones diferenciales conocida como ecuaciones generalizadas de Legendre, que surgen de la ecuación de Laplace como se verá más adelante y que vienen dadas por

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0, \tag{5.15}$$

donde se considera $m^2 < \ell^2$. Nótese que la ecuación (5.1) que se había estudiado hasta ahora se corresponde con el caso $m = 0$ de la ecuación (5.15).

Para $m > 0$, las soluciones de la ecuación (5.15) dadas por $y(x) = P_\ell^m(x)$,

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x),$$

donde $P_\ell(x)$ es el polinomio de Legendre de grado ℓ, se denominan funciones asociadas de Legendre. En el caso de que $m < 0$, las funciones asociadas de Legendre vienen dadas por

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x).$$

Estas funciones constituyen una nueva familia de funciones especiales con propiedades de ortogonalidad y recurrencia más complejas cuyo estudio escapa del alcance de este trabajo y puede consultarse en [18].

5.5. Ecuación de Laplace en conjuntos con simetría esférica

La ecuación de Legendre, además de ser importante desde el punto de vista matemático por dar origen a los polinomios del mismo nombre, tiene también aplicación a la física, especialmente en esferas o sistemas con simetría esférica puesto que, como se verá a continuación, esta ecuación tiene relación con la ecuación de Laplace considerada en coordenadas esféricas.

Se considera la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{5.16}$$

donde Δ es el operador laplaciano y $u = u(x, y, z)$ es una función escalar de tres variables.

Para el estudio de problemas con simetría esférica resulta útil considerar esta ecuación en coordenadas esféricas $u = u(r, \theta, \phi)$ cuya relación con las coordenadas cartesianas se presenta en el apéndice B.4.4. El cambio de variable viene justificado por el teorema B.5.2 y, por tanto, puede aplicarse la regla de la cadena para calcular las derivadas necesitadas.

Deben realizarse los cálculos de forma análoga a los realizados en la sección 4.4; no obstante, pese a que requieren simplemente de la aplicación de la regla de la cadena, en este caso son incluso más extensos y, por ello, se evita presentar de nuevo todos los cálculos intermedios y se pasa directamente a la expresión del operador laplaciano en coordenadas esféricas que ha sido ampliamente estudiado y puede encontrarse en numerosas fuentes como [17]:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Así, la ecuación (5.16) es equivalente a

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0. \tag{5.17}$$

En esta ecuación, al estar trabajando en una esfera (o en un sistema esférico) se tendrá $0 \leq r \leq R_1$. Se buscan soluciones mediante el método de separación de variables, luego se supone una solución de la forma $u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Sustituyendo esta solución en la ecuación (5.17) y dividiendo entre $R\Theta\Phi$ se tiene

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2(\theta)}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0,$$

que multiplicando por r^2 lleva a

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta \sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi \sin^2(\theta)}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin^2(\theta)}{\Theta\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{\phi^2}.$$

Se aprecia que en esta ecuación el término a la izquierda de la igualdad depende únicamente de r, θ mientras que el término de la derecha depende solo de ϕ. Por tanto, la única opción es que ambos términos sean constantes y se tiene

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin^2(\theta)}{\Theta\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=C_1,$$

de donde se tiene la ecuación

$$\Phi''+C_1\Phi=0.$$

Además, se impone que la función sea periódica con periodo 2π, luego debe verificarse $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$ y $\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$. Esta ecuación tiene como autovalores $\lambda_1=\sqrt{-C_1}$ y $\lambda_2=-\sqrt{-C_1}$ y se buscan autofunciones diferentes de la función nula.

- El caso $C_1<0$ conduce a una solución de la forma

  $$\Phi(\phi)=Ae^{\lambda_1\phi}+Be^{\lambda_2\phi},$$

  donde las condiciones iniciales llevan a concluir que $A=B=0$.

- El caso $C_1=0$ lleva a la solución

  $$\Phi(\phi)=A+B\phi.$$

  En este caso, el parámetro B queda libre llevando a autofunciones no nulas.

- En el caso $C_1>0$, se tiene la solución de la forma

  $$\Phi(\phi)=A\cos(\sqrt{-C_1}\phi)+B\sin(\sqrt{-C_1}\phi).$$

  De nuevo, las condiciones iniciales conducen a autofunciones distintas de la función nula.

Por tanto, se elige $C_1=m^2$. Entonces

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2,$$

y, por tanto,

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin^2(\theta)}{\Theta\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-m^2=0. \tag{5.18}$$

Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)}=0,$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\left[\frac{1}{\Theta\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right].$$

De nuevo se observa que el lado izquierdo de la igualdad depende únicamente de la variable r y el derecho solo de θ. Por tanto, la única posibilidad es que sean constantes y se tiene

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\left[\frac{1}{\Theta\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right] = \lambda.$$

De aquí se deducen las siguiente dos ecuaciones

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0,$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta = 0.$$

Siguiendo [15] esta constante λ se fija como $\lambda = \ell(\ell+1)$, lo cual concuerda con la expresión de la ecuación de Legendre que se persigue. Así, la segunda de las ecuaciones da lugar a

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta = 0. \tag{5.19}$$

Se realiza ahora la sustitución $x = \cos(\theta)$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta), \quad \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta)\frac{d\Theta}{dx},$$

se tiene la segunda derivada

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(-\sin(\theta)\frac{d\Theta}{dx}\right) = -\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} - \sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)\\ &= -\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} + \sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2}.\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta} = -\sin^2(\theta)\frac{d\Theta}{dx},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) &= \frac{d}{d\theta}\left(-\sin^2(\theta)\frac{d\Theta}{dx}\right) = -2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} - \sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2}\frac{dx}{d\theta}\\ &= -2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} + \sin^3(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -2\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} + \sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2}.$$

Si se introduce esto en la ecuación (5.19) se tiene

$$-2\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx}+\sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2}+\left(\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta=0,$$

y sustituyendo finalmente $\cos(\theta)=x$ y $\sin^2(\theta)=1-x^2$ se llega finalmente a la ecuación

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left(\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0. \tag{5.20}$$

La ecuación (5.20) coincide con la ecuación generalizada de Legendre presentada en la sección 5.4 cuyas soluciones son las funciones asociadas $P_\ell^m(x)=P_\ell^m(\cos(\theta))$. En el caso particular $m=0$, la ecuación de laplace (5.16) estudiada en coordenadas esféricas conduce a la ecuación de Legendre (5.1) estudiada en este capítulo.

5.6. Aplicaciones a la física

De esta relación entre la ecuación de Laplace considerada en sistemas esféricos y la ecuación de Legendre que se ha presentado en la sección previa se deducen una gran variedad de aplicaciones de la ecuación de Legendre que está siendo estudiada; así como de la ecuación de Legendre generalizada que se ha presentado en la sección 5.4. En la mayoría de ellas la ecuación de Legendre surge como parte del proceso de solución de un problema relacionado con el operador laplaciano en una esfera. Todas estas aplicaciones son similares, variando la ecuación a considerar en cada uno de ellos y, por tanto, se presenta a continuación el ejemplo más representativo pudiendo consultarse otros casos similares en [13].

5.6.1. Potencial eléctrico dentro de una esfera hueca

En regiones donde no hay densidad de carga eléctrica, el potencial eléctrico V satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta V=0.$$

En el caso de una esfera de radio R hueca, su interior es una región sin densidad de carga; y, por tanto, en el interior de la esfera debe verificarse esta condición. Al trabajar con una esfera se consideran coordenadas esféricas y, por tanto, debe verificarse la ecuación

$$\Delta V(r,\theta,\phi)=0,$$

o de forma equivalente, como se vio en la sección 5.5, debe verificarse

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0. \tag{5.21}$$

Como se ha estudiado en la sección previa, el análisis de esta ecuación requiere durante la separación de variables de la resolución de la ecuación de Legendre generalizada presentada en la sección 5.4.

No obstante, en electromagnetismo suele esperarse que el potencial no dependa de la variable ϕ ya que suelen considerarse condiciones frontera de la forma $V(R,\theta,\phi)=$

$V_0 \cos^2(\theta)$. Esta condición lleva a considerar el potencial como $V(r, \theta)$. Al tenerse esta condición, se cumplirá que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0,$$

y, por tanto, la ecuación (5.21) se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Esta ecuación coincide con la ecuación (5.18) de la sección previa para el caso $m = 0$ y, por tanto, siguiendo el desarrollo presentado en 5.5, la ecuación obtenida será la ecuación generalizada de Legendre con parámetro $m = 0$ que, como se ha presentado en la sección 5.4, coincide con la ecuación de Legendre (5.1). Por ello, las soluciones involucrarán a los polinomios de Legendre $P_\ell(x)$, en lugar de a las funciones asociadas de Legendre. Así, los polinomios de Legendre $P_\ell(\cos \theta)$ describen la dependencia angular del potencial en el interior de la esfera.

5.6.2. Otras aplicaciones

En regiones del espacio donde no existe masa, de manera similar al caso presentado previamente, el potencial gravitatorio Φ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta \Phi = 0.$$

Si se está trabajando en un sistema esférico esta ecuación será tratada en coordenadas esféricas, $\Phi(r, \theta, \phi)$ y un proceso similar al descrito anteriormente requerirá durante la resolución mediante el método de separación de variables del estudio de la ecuación generalizada de Legendre. En el caso de considerarse un potencial independiente de la variable de la variable ϕ, la ecuación generalizada de Legendre se reducirá a la ecuación de Legendre (5.1) y, por tanto, las soluciones del potencial estarán conformadas por los polinomios de Legendre $P_\ell(x)$.

De forma análoga al caso tratado en profundidad en la sección 4.5.1, si se considera simetría axial la temperatura en una esfera, $T(r, \theta, \phi, t) = T(r, \theta, t)$, satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

donde α es la difusividad térmica, un parámetro que depende el material considerado. Puesto que se trabaja en una esfera, resulta más conveniente considerar la ecuación en coordenadas esféricas llegando a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right].$$

De nuevo, la resolución de esta ecuación mediante separación de variables llevará a que la parte angular deba verificar la ecuación de Legendre y, por tanto, la evolución de la temperatura en una esfera dependerá angularmente de los polinomios de legendre $P_\ell(x)$.

Por último, esta ecuación también encuentra aplicación en la mecánica cuántica puesto que la ecuación de Schrödinger para partículas en un potencial central se escribe usando coordenadas esféricas. En este caso la resolución de la ecuación conduce al empleo de armónicos esféricos, una herramienta física que está definida a partir de las funciones asociadas de Legendre y que se emplea para describir los estados angulares y la estructura de los diferentes niveles energéticos. Para mayor información sobre los armónicos esféricos puede consultarse [19].

Conclusión

A lo largo de este trabajo se ha puesto de manifiesto la importancia y versatilidad del desarrollo en series de potencias como método para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes variables.

El estudio de puntos ordinarios ha permitido demostrar que la analiticidad de los coeficientes posibilita la construcción de soluciones locales en forma de series convergentes, estableciendo así un puente entre la teoría general y la práctica concreta. El análisis de puntos singulares regulares, mediante el método de Frobenius, amplía el alcance de estas técnicas, permitiendo abordar situaciones más complejas y obtener soluciones que incorporan potencias fraccionarias o términos logarítmicos.

El análisis detallado de las ecuaciones de Airy, Bessel y Legendre ha permitido apreciar la riqueza matemática de las funciones especiales que surgen como soluciones, así como su relevancia en la descripción de fenómenos físicos reales. Se ha subrayado cómo ciertas condiciones físicas, como el comportamiento asintótico o la regularidad en el origen, influyen en la selección de soluciones particulares y descartan aquellas que carecen de significado físico.

En definitiva, el presente trabajo ha permitido profundizar en la comprensión del método de series de potencias, tanto desde una perspectiva matemática como aplicada. Se evidencia que muchas de las funciones más relevantes en física y otras ciencias surgen de la resolución de ecuaciones diferenciales que, aunque no siempre admiten soluciones elementales, pueden ser abordadas de manera sistemática y precisa mediante desarrollos en serie.

Este enfoque no solo proporciona soluciones explícitas a problemas complejos, sino que también abre nuevas vías de investigación y aplicaciones en contextos más generales. Así, se consolida el papel central de las series de potencias en el estudio y la resolución de ecuaciones diferenciales.

Apéndice A

Elementos de ecuaciones diferenciales ordinarias

El estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) es un pilar fundamental en el análisis matemático y las ciencias aplicadas. A lo largo del grado, se adquieren conocimientos sobre la existencia y unicidad de soluciones, así como sobre los diferentes métodos analíticos para resolver EDOs de primer y segundo orden, y determinados casos de órdenes superiores. En aras de la completitud de la exposición, se introducen fundamentos básicos de estas tomando como referencia [20] para el desarrollo de este apéndice.

A.1. Existencia y unicidad de soluciones

En primer lugar, se presenta el resultado general de existencia y unicidad de soluciones, conocido como Teorema de Picard-Lindelöf.

Teorema A.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y sea*

$$\boldsymbol{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

$$(x, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$

una función continua y localmente de Lipschitz respecto de y. Sea $(x_0, \boldsymbol{y}_0) \in \Omega$. Entonces, existe un número $h > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Además, se tiene el siguiente corolario para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

Corolario A.1.2. *Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo de interior no vacío y sean $A(x) \in C(J, \mathbb{R}^{n\times n})$, $b(x) \in C(J, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in J$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. El problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y}(x) + b(x), \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

tiene una única solución

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} : J &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \boldsymbol{y}(x) \end{aligned}$$

definida en el intervalo J.

A.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, además del corolario A.1.2, se presenta para sistemas homogéneos el teorema siguiente.

Teorema A.2.1. *Sea $A(x)$ una matriz de tamaño $n \times n$ definida en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$. El conjunto S de soluciones del sistema*

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y},$$

forma un espacio vectorial de dimensión n. Además, son equivalentes:

1. *Las funciones $\boldsymbol{y}_1(x), \dots, \boldsymbol{y}_n(x)$ forman una base de S.*
2. *Para todo $x_0 \in J$, el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{y}_1(x_0), \dots, \boldsymbol{y}_n(x_0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.*

En este caso, la solución general del sistema viene dada por

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \quad x \in J.$$

En el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos la estructura de la solución viene dada por el teorema que se presenta a continuación.

Teorema A.2.2. *Sea $\boldsymbol{y}_p$ una solución particular de la ecuación completa*

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y} + b(x), \tag{A.1}$$

y sea S el espacio vectorial de soluciones de la ecuación homogénea asociada

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}.$$

Entonces, el conjunto S_c de todas las soluciones de la ecuación completa (A.1) *es*

$$S_c = \boldsymbol{y}_p + S.$$

A.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior

Existe relación entre las EDOs lineales de orden mayor que 1 y los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Así dada una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{A.2}$$

se realiza el cambio de variable

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad , \ldots, y_n = y^{(n-1)}.$$

Tras este cambio de variable la ecuación (A.2) se relaciona con el sistema

$$\begin{cases} y_1' & = y_2, \\ y_2' & = y_3, \\ & \vdots \\ y_{n-1}' & = y_n, \\ y_n' & = -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \ldots - a_{n-1}(x)y_n + b(x), \end{cases}$$

que puede escribirse en la forma matricial

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + b(x).$$

Para estas ecuaciones, en primer lugar, debe destacarse el siguiente resultado relativo al espacio vectorial generado por las soluciones de la ecuación homogénea.

Teorema A.3.1. *Sean a_0, a_1,..., $a_{n-1} \in C(J, \mathbb{R})$. Entonces el conjunto S de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

es un espacio vectorial de dimensión n.

En segundo lugar, la existencia y unicidad de soluciones viene dada por el teorema que se presenta a continuación.

Teorema A.3.2. *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in C(J, \mathbb{R})$. Se considera la ecuación diferencial lineal escalar de orden n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

y sean $x_0 \in J$, $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n,0} \in \mathbb{R}$. Entonces, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \\ y(x_0) = y_{1,0}, \ y'(x_0) = y_{2,0}, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n,0}, \end{cases}$$

tiene una única solución

$$y : J \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto y(x).$$

Apéndice B

Elementos de análisis matemático

Con el objetivo de conseguir la completitud del trabajo, se incluye este apéndice con definiciones y resultados que resultan necesarios a lo largo del trabajo. Estos resultados pueden encontrarse en los diferentes textos empleados a lo largo del trabajo, especialmente en [1], [2], [3] y [4].

B.1. Definiciones generales

Definición B.1.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es una* ***función analítica*** *en un punto $x_0 \in U$ si existe un entorno abierto $V \subseteq U$ de x_0 tal que f puede expresarse como una serie de potencias de la forma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

que converge a $f(x)$ para todos $x \in V$. La serie de potencias es conocida como el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de x_0.

Definición B.1.2. *Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se denomina* ***función entera*** *si es analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Equivalentemente, f es entera si puede representarse mediante una serie de potencias de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

que converge para todo $z \in \mathbb{C}$ (es decir, con radio de convergencia infinito).

Definición B.1.3. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales en Ω. El* ***operador Laplaciano****, denotado por Δ o ∇^2, es un operador diferencial de segundo orden definido como la divergencia del gradiente de u, es decir:*

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

En el caso tridimensional clásico, donde $u = u(x, y, z)$, el Laplaciano toma la forma explícita:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

B.2. Series de potencias

Por otro lado, resulta relevante introducir y definir la herramienta que a lo largo de todo el trabajo se emplea para dar una solución a las ecuaciones, así como algunos resultados clave sobre series de potencias que serán de utilidad.

Definición B.2.1. *Una **serie de potencias** centrada en el punto $x - x_0$ es una serie infinita de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. También se dice que es una serie de potencias centrada en x_0.*

Algunos de las propiedades y resultados más importantes y que conviene mencionar vienen dados a continuación.

Definición B.2.2. *Decimos que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ **converge** en el punto $x = c$ si la serie infinita (de números reales) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-x_0)^n$ converge; es decir, si el límite de las sumas parciales*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(c - x_0)^n,$$

*existe (como número finito). Si ese límite no existe, diremos que la serie de potencias **diverge** en $x = c$.*

Definición B.2.3. *Toda serie de potencias tiene un **intervalo de convergencia**, que es el conjunto de números para los cuales converge la serie.*

Definición B.2.4. *Todo intervalo de convergencia posee un **radio de convergencia** ρ. Para una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ existen tres posibilidades:*

1. *La serie converge solo en su centro x_0. En este caso $\rho = 0$.*

2. *La serie converge para toda x que satisfaga $|x - x_0| < \rho$ con $\rho > 0$. La serie diverge para $|x - x_0| < \rho$.*

3. *La serie converge para todo x. En este caso $\rho = \infty$.*

Observación B.2.5. *Respecto a la **convergencia los extremos** $x \pm \rho$, debemos tener en cuenta que la desigualdad de valor absoluto mencionada en la definición anterior $|x - x_0| < \rho$ equivale a $-\rho < x - x_0 < \rho$ o bien a $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$. Entonces estos dos puntos requieren un análisis por separado.*

Para determinar el radio de convergencia, se pueden aplicar diferentes métodos y criterios. Habitualmente se puede aplicar de manera sencilla el criterio del cociente.

Proposición B.2.6 (Criterio del cociente)**.** *Si para n suficientemente grande, los coeficientes a_n no se anulan y satisfacen*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad (0 \leq L \leq \infty),$$

entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es $\rho = 1/L$ donde $L = 0$ si $\rho = \infty$ y $L = \infty$ si $\rho = 0$.

Se debe tener en cuenta que este criterio no dará resultado en el caso de que el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ no tenga límite. En ese caso, habría que usar otros métodos para determinar el valor de ρ.

Definición B.2.7. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie de potencias centrada en $x_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que la serie* ***converge normalmente*** *en un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in K} |a_n(x-x_0)^n| < \infty.$$

Es decir, si la serie de términos dominados por el supremo en K converge absolutamente.

Teorema B.2.8 (Derivación término a término de las series de potencias)**.** *Sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces:

1. *La serie converge absolutamente para todo x tal que $|x-x_0| < R$, y define una función infinitamente derivable en ese intervalo.*

2. *Se puede derivar término a término en dicho intervalo, y la derivada es también una serie de potencias con el mismo radio de convergencia R:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}, \quad \ldots .$$

Teorema B.2.9 (Conmutatividad de sumas dobles absolutamente convergentes)**.** *Sea $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ una familia de números reales (o complejos) tal que la serie doble*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|,$$

converge. Entonces:

1. *La serie doble $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ converge absolutamente.*

2. *Se puede cambiar el orden de los sumandos:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m+n=k} a_{m,n}.$$

3. *Se puede reagrupar la serie doble como una serie simple ordenada por diagonales de $m + n = k$, sin alterar el valor de la suma.*

Teorema B.2.10 (Teorema de Taylor)**.** *Sea f una función analítica en un entorno abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) que contiene a x_0. Entonces, para todo $x \in U$, se cumple que:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Es decir, la serie de Taylor de f en torno a x_0 converge hacia la función f en un entorno de x_0.

Proposición B.2.11 (Fórmula de Cauchy-Hadamard)**.** *El radio de convergencia ρ de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ viene dado según la fórmula*

$$\rho = \frac{1}{\lambda},$$

siendo

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Lema B.2.12. *Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales no negativos y supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un número $x > 0$. Entonces,*

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n) \in [0, \infty],$$

en el caso de que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ no sea acotada se conviene que $x \cdot \infty = \infty$.

Proposición B.2.13 (Producto de Cauchy para series de potencias)**.** *Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones de números complejos (o reales). El producto de Cauchy de las series de potencias*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

es la serie de potencias

$$C(x) = A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

donde los coeficientes c_n se definen por

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Respecto a la convergencia, si al menos una de las series converge absolutamente, entonces el producto de Cauchy también converge y la fórmula anterior es válida.

B.3. Función Gamma

La Función Gamma, denotada como $\Gamma(z)$, es una función matemática que extiende el concepto de factorial a los números reales y complejos. Mientras que el factorial $n!$ solo está definido para enteros positivos, la Función Gamma permite calcular valores análogos para cualquier número complejo (excepto los enteros negativos y el cero), lo que la convierte en una herramienta fundamental en análisis matemático, teniendo utilidad también en la física. A continuación se presenta su definición y algunas propiedades empleadas en el desarrollo del trabajo que han sido tomadas de [12] y [21].

Definición B.3.1. *La* ***Función Gamma*** *se define, para todo número complejo z con parte real estrictamente positiva ($\mathrm{Re}(z) > 0$), mediante la integral impropia:*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Esta integral converge absolutamente para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Observación B.3.2. *La Función Gamma puede extenderse al resto del plano complejo (exceptuando los enteros no positivos, donde presenta polos simples) mediante prolongación analítica.*

En resumen, el dominio de definición de la Función Gamma es:

$$\Gamma(z) \text{ está definida para } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}.$$

Algunas de las propiedades más destacadas que son empleadas en este trabajo son:

Proposición B.3.3. *La Función Gamma generaliza el factorial, pues $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cualquier entero positivo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición B.3.4. *La Función Gamma satisface la siguiente relación recursiva:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

válida para todo z donde la función esté definida (es decir, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$).

Proposición B.3.5. *Para todo número complejo z que no sea un entero, $z \notin \mathbb{Z}$ se tiene:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Proposición B.3.6. *Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\prod_{j=1}^{m}(aj+b) = a^m \frac{\Gamma\left(m+1+\frac{b}{a}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{b}{a}\right)}.$$

Definición B.3.7. *La* ***función digamma****, denotada por $\psi(z)$, se define como la derivada logarítmica de la Función Gamma:*

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

La función digamma está definida para todo z complejo excepto los enteros negativos y el cero.

B.4. Sistemas de Coordenadas

En matemáticas, los sistemas de coordenadas permiten describir de manera precisa la posición de puntos en el espacio. Pese a que habitualmente se emplea el sistema de coordenadas cartesianas, existen problemas y situaciones en las que es conveniente considerar otro sistema de representación para la posición de un punto. Este apéndice resume los sistemas más utilizados: cartesiano, polar, cilíndrico y esférico, destacando sus definiciones y relaciones fundamentales.

B.4.1. Coordenadas Cartesianas

Es el sistema de coordenadas utilizado de forma general. Se trata de un sistema ortogonal en espacios euclídeos que utiliza ejes perpendiculares que se intersecan en el origen. En este sistema, un punto P se representa como:

$$P = (x, y, z).$$

En este sistema:

- La coordenada x se denomina abscisa y representa la distancia del punto al plano YZ, $x \in (-\infty, +\infty)$.
- La coordenada y se denomina ordenada y representa la distancia al plano XZ, $y \in (-\infty, +\infty)$.
- La coordenada z se denomina cota y representa la distancia al plano XY, $z \in (-\infty, +\infty)$.

Este sistema de coordenadas puede emplearse también en dos dimensiones, fijando la coordenada z y representando el punto P como

$$P = (x, y).$$

B.4.2. Coordenadas Polares

Se trata de un sistema bidimensional alternativo a las coordenadas cartesianas que resulta ideal para problemas con simetría radial. Este sistema se relaciona con las coordenadas cartesianas mediante transformaciones trigonométricas y en él, un punto P se define por:

$$P = (r, \theta).$$

En este sistema:

- La coordenada r indica la distancia al origen (radio vector), $r \geq 0$.
- La coordenada θ indica el ángulo respecto al eje polar, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Este sistema esta relacionado con las coordenadas cartesianas mediante las siguientes expresiones:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

B.4.3. Coordenadas Cilíndricas

Es la extensión a tres dimensiones de las coordenadas polares, donde se conserva la coordenada z cartesiana. Este sistema combina la simplicidad angular en el plano con la linealidad en la altura. En este sistema un punto P se expresa como:

$$P = (\rho, \phi, z).$$

En este sistema:

- La coordenada ρ representa la distancia al eje z (coordenada radial), $\rho \geq 0$.
- La coordenada ϕ representa el ángulo azimutal en el plano XY, $\phi \in [0, 2\pi)$.
- La coordenada z representa la ltura sobre el plano XY, $z \in (-\infty, +\infty)$.

La relación de este sistema con las coordenadas cartesianas viene dada por las expresiones

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = z.$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z.$$

B.4.4. Coordenadas Esféricas

Sistema tridimensional empleado de forma natural para fenómenos con simetría esférica. Este sistema generaliza el concepto de ángulos a tres dimensiones y se relaciona con las coordenadas cartesianas mediante transformaciones angular. Aquí un punto P se define como:

$$P = (r, \theta, \phi).$$

En este sistema:

- La coordenada r indica la distancia al origen, $r \geq 0$.
- La coordenada θ indica el ángulo polar (colatitud), $\theta \in [0, \pi]$.
- La coordenada ϕ indica el ángulo azimutal, $\phi \in [0, 2\pi)$.

Las coordenadas cartesianas se relacionan con este sistema mediante las expresiones

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

B.5. Teorema de la función inversa

Para poder aplicar los cambios de variable empleados para pasar de unas coordenadas a otras, es necesario incluir en el trabajo el teorema de las funciones inversas y una definición previa tomados de [22].

Definición B.5.1. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, a un punto de A y $\boldsymbol{f}$ una aplicación de A en $\mathbb{R}^n$ que es diferenciable en a. Se denomina **determinante jacobiano** (o simplemente **jacobiano**) de $\boldsymbol{f}$ en a al número real*

$$J_{\boldsymbol{f}}(a) = \det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right) = \det\left(D_j f_i(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Teorema B.5.2. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\boldsymbol{f} : A \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 1$) en A. Si $a \in A$ es tal que la aplicación lineal $\boldsymbol{f}'(a)$ es regular, o equivalentemente, tal que el jacobiano cumple $J_{\boldsymbol{f}}(a) \neq 0$, entonces existen un abierto $V \subset A$ que contiene al punto a, y un abierto W que contiene al punto $\boldsymbol{f}(a)$, tales que:*

- *$\boldsymbol{f}$ aplica biyectivamente V en W.*
- *La aplicación inversa $\boldsymbol{f}^{-1} : W \to V$ es también de clase $\mathcal{C}^k$ en W.*
- *Se cumple que:*

  $$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{f}(x)) = (\boldsymbol{f}'(x))^{-1}, \quad x \in V,$$

  o lo que es lo mismo,

  $$(\boldsymbol{f}^{-1})'(y) = (\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{f}^{-1}(y)))^{-1}, \quad y \in W.$$

Bibliografía

[1] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera, Thomson Learning, 2002.

[2] R. Kent Nagel, Edward B. Saff, Arthur David Snider, Ecuaciones diferenciales y problemas en la frontera, Pearson Educación, 2005.

[3] W. F. Trench, Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems (2nd ed.). Trinity University, 2013.

[4] F.Galindo Soto, J.Gómez Pérez, J.Sanz Gil, L.A. Tristán Vega, Guía práctica de variable compleja y aplicaciones, Ediciones Universidad de Valladolid, 2019.

[5] E. Merzbacher, Quantum Mechanics (3rd ed.), John Wiley and Sons, 1998.

[6] N. Voloch-Bloch, Y. Lereah, Y. Lilach, et al. Generation of electron Airy beams. Nature 494, 331–335, 2013. https://doi.org/10.1038/nature11840.

[7] N. Voloch-Bloch, Y. Lereah, Y. Lilach, A. Gover, and A. Arie, Generation of electron Airy beams, arXiv preprint arXiv:1205.2112, 2012.

[8] Alexey N. Karapetyans, Vladislav V. Kravchanko, Methods of mathematical physics classical and modern, Birkhäuser, 2022.

[9] G. B. Folland, Fourier Analysis and its Applications, Wadsworth, Belmont, 1992.

[10] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Funtions (2nd ed.), Cambridge Mathematical Library, 1952.

[11] H. F. Weinberger, A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods. Blaisdell (Ginn), 1965.

[12] K.B. Oldham, J.C. Myland, J. Spanier, An Atlas of Functions. Springer, 2008.

[13] F. G. Aliev, A. Lara , Mathematical Methods for Physics: Problems and Solutions, Jenny Stanford Publishing Pte., 2024.

[14] J. D. Logan, Applied Partial Differential Equations, 3rd ed., Springer, 2015.

[15] Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan, Ordinary and partial differential equations with special functions, fourier series and boundary value problems, Springer Science+Bussines Media, LLC, 2009.

[16] F. M. S. Lima, Lecture notes on Legendre polynomials: their origin and main properties. arXiv preprint arXiv:2210.10942, 2022.

[17] V. Henner, T. Belozerova, K. Forinash, Mathematical Methods in Physics: Partial Differential Equations, Fourier Series and Special Functions, A K Peter, 2009.

[18] N. Virchenko, I. Fedotova, Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications, World Scientific Publishing, 2001.

[19] G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris, Mathematical Methods for Physicists (7th ed.), Elsevier, 2013.

[20] S. Novo, R. Obaya, J.Rojo, Ecuaciones y sistemas diferenciales, Editorial McGraw-Hill, 1995.

[21] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 55). U.S. Government Printing Office, 1964.

[22] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis (3rd ed.), McGraw-Hill, 1976.