



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO
GRADO EN MATEMÁTICAS

Geometría de los productos warped.

Autor: Jaime Bajo Da Costa
Tutores: Alfonso Carriazo Rubio (Universidad de Sevilla), Fernando Sanz Sánchez
2025

Dedicado a mi familia, que siempre me ha apoyado en mi carrera.

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es realizar una introducción al estudio de las variedades semi-Riemannianas y de los principales objetos que en ellas se definen: la conexión de Levi-Civita, las geodésicas y el tensor de curvatura. Se estudiarán a fondo los productos warped como una herramienta para obtener nuevas variedades semi-Riemannianas. Finalmente, se muestra la utilidad de los productos warped en el estudio de la Relatividad General por medio de los modelos cosmológicos de Robertson-Walker.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to make an introduction to the study of semi-Riemannian manifolds and the main objects you may define in them: the Levi-Civita connection, geodesics and the curvature tensor. Warped products will be studied in depth as a tool to define new semi-Riemannian manifolds. Finally, the usefulness of warped products in the study of General Relativity is shown, via the study of the Robertson-Walker cosmological models.

PALABRAS CLAVE: Geometría semi-Riemanniana, Productos Warped, Espacio-tiempos Robertson-Walker.

KEYWORDS: Semi-Riemannian geometry, Warped Products, Robertson-Walker Space-times

Índice

1. Introducción	9
2. Preliminares	12
2.1. Variedades diferenciables	12
2.2. Cálculo tensorial	27
2.3. Espacios con producto escalar	33
3. Derivaciones tensoriales y conexiones	37
3.1. Derivaciones tensoriales	37
3.2. Conexiones lineales	41
3.3. Derivada covariante a lo largo de curvas	46
3.4. Geodésicas definidas por conexiones lineales	51
4. Geometría semi-Riemanniana	55
4.1. Definiciones Iniciales	55
4.2. Conexión de Levi-Civita	59
4.3. Cambio de tipo	66
4.4. Curvatura	73
4.5. Isometrías locales y homotecias	84
4.6. Subvariedades semi-Riemannianas	90
4.7. Variedades producto	101
5. Productos warped	107
5.1. Geodésicas en productos warped	115
5.2. Curvatura en productos warped	118
6. Espacios Robertson-Walker	124
6.1. Espacios vectoriales Lorentzianos	124
6.2. Definiciones físicas básicas	132
6.3. Ecuación de Einstein	134
6.4. Fluidos perfectos	135
6.5. Espacios Robertson-Walker	138
7. Conclusiones	146
Referencias	147

1. Introducción

Una anécdota curiosa que se cuenta sobre el origen de la teoría de la relatividad general es que, al encontrarse con Albert Einstein en un aeropuerto italiano, un periodista le preguntó: Profesor Einstein, ¿qué es lo que más le gusta de Italia? A lo que el genio de la física respondió sin pensarlo mucho: los “spaghetti” y... Levi-Civita.

El motivo de esta respuesta se remontaría a unos años antes, a 1905, denominado como *annus mirabilis* de Einstein, pues en el mismo año publicó cuatro artículos en los *Annalen der Physik*, que revolucionaron completamente la física Moderna, describiendo el efecto fotoeléctrico (lo que le valió el Premio Nobel de física), el movimiento browniano y la Teoría Especial de la Relatividad. Pero esta teoría presentaba una carencia evidente: no describía el papel de la gravedad en el Universo. Aunque Einstein parecía tener clara una concepción diferente de dicha gravedad: ésta produciría una deformación del espacio-tiempo, dotándolo de una “curvatura” que determinaría el comportamiento de los distintos cuerpos y fenómenos. Pero, ¿cómo describir la “curvatura” de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal)?

Parece ser que fue el matemático Marcel Grossmann, amigo de juventud de Einstein, quien le dirigió hacia el trabajo que estaban desarrollando en la Universidad de Padua dos matemáticos italianos: Gregorio Ricci-Curbastro y su discípulo Tullio Levi-Civita. Estos estaban formalizando las ideas que el matemático alemán Bernhard Riemann había introducido años antes en su famosa tesis de habilitación “Sobre las hipótesis en las que se basa la Geometría”. Entre ellos, el concepto de curvatura para un espacio de dimensión cualquiera, lo que se conocería más adelante como la curvatura de Riemann. Pero dicha tesis, con un carácter muy filosófico y poca notación científica, resultaba prácticamente ininteligible, aunque Gauss, miembro del tribunal, declaró que había sido muy de su agrado. Es por ello que el trabajo realizado por Ricci-Curbastro y Levi-Civita resulta hoy en día absolutamente imprescindible, siendo reconocidos ambos como los auténticos creadores de la Geometría Riemanniana y su extensión, la Geometría semi-Riemanniana [6].



Figura 1: Fotografías de Albert Einstein y Marcel Grossmann durante sus estudios en el ETH Zurich. Crédito: ETH Zurich Archive

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio de los conceptos e ideas necesarios para comprender la definición de los productos warped como una clase especial de variedades semi-Riemannianas que, presentando propiedades más ricas que las de las variedades productos, pueden ser caracterizados de forma precisa. En este contexto se probarán los principales resultados sobre los productos warped, caracterizándolos en términos de su base y su fibra y determinando su conexión, su curvatura y sus geodésicas.

Para ello, hemos de comenzar estudiando la geometría semi-Riemanniana, una generalización de la geometría Riemanniana en la que se consideran tensores métricos no degenerados, pero que pueden no ser definidos positivos. El desarrollo y las herramientas de ambas teorías son análogos, pero en el caso

de la geometría semi-Riemanniana, pueden existir vectores no nulos de norma cero, los llamados vectores luminosos. Esto lleva a que muchas de las demostraciones sean más sutiles en el caso semi-Riemanniano, por lo que se ha decidido realizar todas ellas con el máximo detalle posible, sin dejar ejercicios para el lector. La principal contribución de este trabajo es precisamente detallar estas demostraciones, lo que ha llevado a tener que corregir algunas pruebas presentes en los libros pues, al estudiarlas detalladamente no consideraban algunas situaciones posibles o fallaban para estas, como ocurre con la prueba del [Teorema 5.1.1](#).

Finalmente, como ejemplo de la utilidad de estas construcciones en otros campos de la ciencia, como la física, se estudian los espacios Robertson-Walker (también llamados espacios Robertson-Walker-Friedmann-Lemaître) en el contexto de la teoría de la relatividad general. Estos permiten modelar la evolución de universos con características similares a las observadas experimentalmente en el nuestro. Son capaces de predecir con éxito la existencia de singularidades en su evolución, una de las cuáles se identifica con el Big Bang, así como el corrimiento al rojo cosmológico.

El trabajo se estructura en 5 capítulos. En el primero de ellos se hace una introducción a los conceptos básicos sobre variedades diferenciables y, en especial, sobre campos de tensores, siguiendo los dos primeros capítulos de [\[17\]](#), así como [\[12, 18\]](#). La mayoría de los resultados han sido estudiados en la asignatura optativa del Grado en Matemáticas *Geometría Diferencial*, por lo que se ha optado por presentar los enunciados sin demostración, para poder fijar la notación y nomenclatura que se utilizará en el resto del texto, sin extendernos demasiado. En la última sección de este capítulo se hace un resumen de los resultados sobre formas bilineales y productos escalares, propios de la asignatura *Álgebra y Geometría Lineales I*, para establecer la nomenclatura y precisar las diferencias entre un producto escalar y un producto interno. Para ello se utilizan [\[14, 17\]](#).

Para poder generalizar el concepto de derivada de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ propio del análisis multidimensional, es necesario introducir las conexiones lineales. Estas permiten describir la variación de un campo de vectores en cualquier dirección tangente a una variedad y son una herramienta fundamental en los capítulos posteriores. No obstante, muchos de los resultados sobre este concepto son bastante técnicos, por lo que se ha preferido hacer un capítulo en específico para tratarlos, siguiendo [\[11, 17\]](#), y que de esta forma la discusión posterior sea más fluida.

La referencia principal para el resto del trabajo es [\[17\]](#). Basándonos en ella, en el tercer capítulo se desarrolla la teoría de la geometría semi-Riemanniana, la cual surge mediante la definición en cada espacio tangente a la variedad de un producto escalar que varíe suavemente: el tensor métrico. Este determina una forma de derivar los campos de vectores con propiedades especialmente deseables: la conexión de Levi-Civita. A partir de ella se pueden considerar los conceptos ya expuestos en el capítulo anterior como el transporte paralelo y, en especial las geodésicas. Estas últimas se consideran las curvas “más rectas posibles” en la variedad y, por ello, tienen un papel especialmente relevante en teorías físicas como la relatividad general.

Además, en este capítulo se introduce el tensor de curvatura, como una generalización de la curvatura de Gauss estudiada en la asignatura *Geometría de Curvas y Superficies*. Al tratarse de un tensor de tipo $(1,3)$, su estudio puede resultar complejo, por lo que se definen la curvatura seccional, el tensor de curvatura de Ricci y la curvatura escalar como alternativas, aunque no todas poseen la misma información, al tensor de curvatura para describir cómo se deforma una variedad. Tras ello se estudian los morfismos propios de este contexto: las isometrías y las isometrías locales, las cuales conservarán las propiedades intrínsecas de las variedades semi-Riemannianas y, en particular, la curvatura, lo que nos permite utilizar este objeto para distinguir variedades semi-Riemannianas.

Una de las principales diferencias de las variedades semi-Riemannianas respecto a las Riemannianas, es que no todas sus subvariedades diferenciables tienen por qué heredar la estructura de variedad semi-Riemanniana. Estudiar aquellas que sí la heredan nos permitirá introducir el concepto de segunda forma fundamental o tensor de forma, generalización del considerado para superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$. El cuarto capítulo se acaba con una sección sobre variedades producto, que sirve de antesala al concepto de producto warped.

Este fue introducido por O’Neil en [\[2\]](#) como una herramienta para obtener variedades Riemannianas

nuevas con propiedades exóticas, pero relativamente fáciles de estudiar. En el cuarto capítulo, estudiamos cómo se puede obtener la conexión del producto warped a partir de las de su fibra y base y, basándonos en este resultado, deducimos la expresión de los distintos tensores de curvatura en estos espacios. Además, obtenemos las ecuaciones que caracterizan las curvas que son geodésicas en los productos warped.

Finalmente, en el último capítulo, se realiza una introducción a la teoría de la relatividad general. Esta modela el espacio-tiempo por medio de una variedad Lorentziana, por lo que primero es necesario obtener algunos resultados propios de los espacios tangentes de estas variedades. Tras ello, se presentan las definiciones mediante las cuales se consiguen formalizar los aspectos físicos de esta teoría, para más tarde estudiar las propiedades de los espacio-tiempos de Robertson-Walker, que permiten describir la evolución a gran escala de nuestro Universo.

Dado que se ha procurado que todos los resultados presentados estén demostrados con la mayor cantidad de detalle posible, especialmente para destacar la complejidad añadida al trabajar con tensores métricos que pueden no ser Riemannianos, la extensión del trabajo ha resultado ser considerable. Por ello, en una primera lectura, algunas demostraciones y secciones pueden ser pasadas por alto y aún así captar las ideas esenciales de la memoria. En particular, muchas de las demostraciones del segundo capítulo y el inicio del tercero son similares y por ello pueden resultar repetitivas por lo que pueden ser omitidas en una primera lectura. Además, si bien se ha incluido por su interés a la hora de motivar la definición de conexión lineal, el transporte paralelo no será empleado con mucha asiduidad en el resto del trabajo, por lo que pueden leerse dichos resultados con menor profundidad sin afectar a la comprensión del trabajo. También destacar que el [Teorema 3.4.12](#) se ha incluido por la posibilidad que brinda de relacionar dos conceptos centrales en esta teoría: las curvas integrales y las geodésicas, pero no será relevante en los desarrollos posteriores.

Para terminar, quisiera dejar constancia de mi agradecimiento a mis dos tutores: Alfonso y Fernando. Este Trabajo Fin de Grado surge a partir de mi estancia en la Universidad de Sevilla gracias a un programa de movilidad SICUE. Allí, Alfonso estuvo dispuesto desde el primer momento a ayudarme a iniciarme en el estudio de la geometría semi-Riemanniana para llegar a entender los productos warped como una primera forma de estudiar la deformación de una variedad, siendo mi tutor durante un año en el programa *Alumnos Internos*. Desde entonces su apoyo ha sido fundamental. La ayuda de Fernando también ha sido vital para poder darle forma a este trabajo y a la posterior presentación.

2. Preliminares

El objeto principal de estudio de la presente memoria son las variedades diferenciables. Si bien se realiza una pequeña introducción a las mismas en la asignatura *Geometría de Curvas y Superficies*, no se profundiza en su descripción en ninguna asignatura obligatoria del Grado en Matemáticas. Por ello, en este capítulo realizamos una recopilación de los resultados básicos referentes a este área, los cuales serán necesarios en las secciones posteriores. Igualmente, para aclarar la nomenclatura y la notación que se utilizará más adelante, se recopilan los principales resultados relativos al estudio de los productos escales en la última sección.

2.1. Variedades diferenciables

Las variedades son espacios topológicos que se “se parecen localmente” al espacio euclídeo, $\mathbb{R}^n$. A lo largo del trabajo nos centraremos en el estudio de las variedades diferenciables, en las cuales la semejanza con $\mathbb{R}^n$ permite definir la derivación parcial y extender la mayoría de técnicas propias del análisis a estos espacios más generales.

A lo largo de esta sección se introducen los conceptos básicos sobre variedades diferenciables en los que se basa la geometría diferencial. Además, se enuncian los resultados más relevantes relativos a esta teoría y que se usarán más adelante en el texto.

La mayoría de los resultados o bien se cubren en la asignatura optativa del Grado *Geometría Diferencial* o bien son similares a teoremas probados en dicha asignatura. Por ello, se presentan solo los enunciados, sin demostración. Para la elaboración de esta sección nos hemos basado en la referencia principal empleada en la asignatura *Geometría Diferencial*, [18], así como en los textos clásicos [12, 17].

En todo el trabajo, se dirá que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable o suave cuando es de clase C^∞ , es decir, cuando existen sus derivadas parciales de cualquier orden y todas ellas son continuas.

Para poder trasladar los conceptos de derivación propios del espacio euclídeo a un espacio topológico, S , necesitamos poder identificar abiertos de S con abiertos de $\mathbb{R}^n$. Este proceso se lleva a cabo por medio de las cartas locales.

Definición 2.1.1. Una *carta local*, *sistema coordenado* o simplemente *carta* en un espacio topológico S , (U, φ) , es un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ entre un abierto U de S y un abierto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. En estas condiciones, se definen $\varphi^i : S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ como las composiciones de φ con las proyecciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, por lo que:

$$\varphi(p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^n(p)), \quad p \in S.$$

Las funciones φ^i , $i = 1, \dots, n$, se denominan *funciones coordenadas* de φ y se dice que n es la dimensión de la carta local. Dado $p \in S$, se dice que (U, φ) es una *carta en torno a p* si $p \in U$.

En algunas ocasiones diremos directamente que φ es una carta local, sin especificar su abierto de definición.

Si bien las cartas locales permiten relacionar S con el espacio euclídeo y, por ello, trasladar el cálculo de $\mathbb{R}^n$ a S , para que esta extensión pueda hacerse de forma global, se ha de considerar un conjunto de cartas locales cuyo dominio permita recubrir todo S . No obstante, esto puede llevar a que la intersección de los abiertos de definición de dos cartas sea no vacía y, por tanto, en dicha intersección, se pueda trasladar la estructura del espacio euclídeo de dos formas distintas. Para evitar inconsistencias, se introduce el concepto de cartas que se cortan suavemente.

Definición 2.1.2. Sea S un espacio topológico. Se dice que dos cartas locales (U, φ) , (V, ψ) de S de dimensión n *se cortan suavemente* o *que son compatibles*, si las funciones $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ y su inversa, $\psi \circ \varphi^{-1}$, son diferenciables. Estas funciones se denominan *cambios de carta* (entre φ y ψ).

Definición 2.1.3. Sea S un espacio topológico. Un *atlas diferenciable n-dimensional* de S es un conjunto $\mathcal{A}$ de cartas locales de dimensión n de S tales que:

1. Para cada $p \in S$ existe $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$.

2. Todo par de cartas de $\mathcal{A}$ se cortan suavemente.

Además, se dice que $\mathcal{A}$ es un *atlas completo o maximal* si contiene a toda carta local de S que corte suavemente a toda carta local de $\mathcal{A}$.

Lema 2.1.4. Todo atlas en un espacio topológico S está contenido en un único atlas maximal.

Definición 2.1.5. Una *variedad diferenciable* es un par $(M, \mathcal{A})$, donde M es un espacio de Hausdorff que cumple el segundo axioma de numerabilidad (esto es, tiene una base de abiertos numerable) y $\mathcal{A}$ es un atlas maximal sobre M . Se dice que la dimensión de M es la dimensión de su atlas maximal.

Si bien una variedad diferenciable es un par $(M, \mathcal{A})$, se suele obviar la referencia al atlas maximal y decir directamente que M es una variedad diferenciable, en cuyo caso se asume que existe un atlas maximal asociado a la misma. Además, nótese que, si bien para definir una variedad diferenciable se ha de proporcionar un atlas maximal, gracias al lema previo, basta con dar un atlas de M para determinar su estructura como variedad diferenciable de forma única.

Dicho lema también permite caracterizar cuándo la estructura de variedad diferenciable definida sobre un espacio topológico de Hausdorff y con el segundo axioma de numerabilidad, M , dada por dos atlas distintos, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, es la misma. Esta condición es equivalente a que los cambios de cartas entre una carta de $\mathcal{A}_1$ y una de $\mathcal{A}_2$ sean siempre diferenciables.

Cabe resaltar también que, gracias al lema anterior, si (U, φ) es una carta de una variedad diferenciable M , es claro que para cada $V \subset U$ abiertos, se tiene que $(V, \varphi|_V)$ es una nueva carta de M .

Observación 2.1.6. Si $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable y $U \subset M$ es un abierto suyo, entonces, definiendo $\mathcal{A}' = \{(V, \varphi) \in \mathcal{A} / V \subset U\}$, es claro que $(U, \mathcal{A}')$ es una nueva variedad diferenciable. Se dirá que U con esta estructura es una subvariedad abierta de M .

De ahora en adelante, salvo que se especifique lo contrario, M denotará a una variedad diferenciable de dimensión n . Como solo trabajamos con variedades diferenciables (también existen otros conceptos como el de variedades topológicas), prescindiremos del calificativo “diferenciable” en algunas ocasiones.

Gracias al uso de las cartas locales podemos extender el concepto de funciones diferenciables a las variedades diferenciables. Estas son las aplicaciones con las que se trabaja en el ámbito de la geometría diferencial.

Definición 2.1.7. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una *función diferenciable* si para toda carta local de M , (U, φ) , se tiene que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. El conjunto de

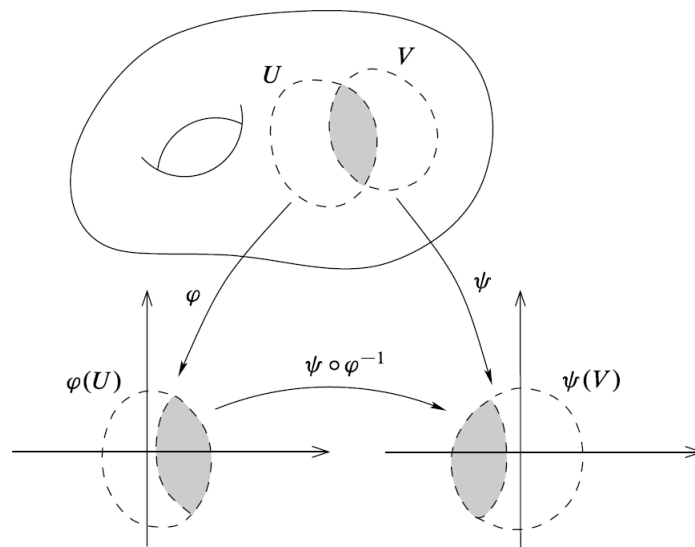


Figura 2: Representación de las aplicaciones y abiertos involucrados en un cambio de cartas. Fuente: J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* [12].

las funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$ se denota por $\mathcal{F}(M)$ y es un anillo, con las operaciones usuales de suma y producto de funciones.

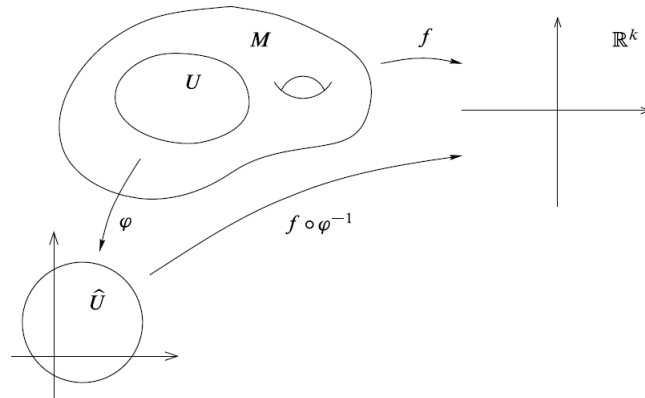


Figura 3: Definición de la diferenciabilidad de una función a través de las cartas de la variedad. Fuente: J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* [12].

Definición 2.1.8. Sean M, N variedades diferenciables de dimensiones n y d , respectivamente. Una aplicación $\phi : M \rightarrow N$ se dice que es *diferenciable* si para todas cartas locales (U, ϕ) de M y (V, ψ) de N tales que $U \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$, se tiene que $\psi \circ \phi \circ \varphi : \varphi(U \cap \phi^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{R}^d$ es diferenciable.

De forma general, se denotará $\phi(p)$ a la evaluación de ϕ en un punto $p \in M$, aunque, en algunos casos para simplificar la notación, se denota equivalentemente $\phi(p) = \phi|_p = (\phi)_p$.

No es necesario comprobar que dicha composición es diferenciable para todas las cartas del atlas maximal de M , gracias a la compatibilidad entre las cartas de un atlas maximal, como prueba el siguiente lema.

Lema 2.1.9. Sean $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{A}')$ variedades diferenciables y sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación. Entonces ϕ es diferenciable si y solo existen un conjunto de cartas locales de M , $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\} \subset \mathcal{A}$ y otro de N , $\{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in \Lambda'\} \subset \mathcal{A}'$, tales que:

1. Para cada $p \in M$ existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $p \in U_\alpha$.
2. Para cada $q \in N$ existe $\beta \in \Lambda'$ tal que $q \in V_\beta$.
3. Para cada $\alpha \in \Lambda$ y $\beta \in \Lambda'$, $\psi_\beta \circ \phi \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \phi^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \mathbb{R}^d$ es diferenciable.

Resumimos a continuación las principales propiedades de las aplicaciones diferenciables:

Proposición 2.1.10. Sean M, N, P variedades diferenciables, $\phi : M \rightarrow N$ y $\xi : N \rightarrow P$ aplicaciones diferenciables. Se cumple que:

1. $id : M \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable.
2. $\xi \circ \phi : M \rightarrow P$ es una aplicación diferenciable.
3. ϕ es una aplicación continua entre los espacios topológicos M y N .
4. Si (U, φ) es una carta local de M , φ es una aplicación diferenciable y, sus componentes, $\varphi^i, i = 1, \dots, n$, son funciones diferenciables.
5. Si $U \subset M$ es abierto, $\phi|_U : U \rightarrow N$ es diferenciable.

Ejemplo 2.1.11. El primer ejemplo de variedad diferenciable que podemos considerar es $\mathbb{R}^n$, el espacio euclídeo. En este caso, existe un atlas formado por una única carta, la identidad de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, el cual se considera para dotar al espacio euclídeo de estructura de variedad diferenciable. Con esta definición, es claro que una aplicación $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el sentido usual si y solo

si lo es considerando $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ como variedades diferenciables.

Además, esta definición nos permite comprobar que la definición de funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$ no es sino un caso particular de la definición de aplicaciones entre dos variedades cualesquiera.

En la gran mayoría de las ocasiones, para comprobar si una aplicación entre variedades es diferenciable, se comprueba que lo es al restringirnos a un conjunto de abiertos (no necesariamente coordenados) que recubren M . El siguiente resultado asegura que esto es suficiente.

Lema 2.1.12. Sean M, N variedades diferenciables. Sea Λ un conjunto de índices. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sean $U_\alpha \subset M$ abierto y $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Si para todos $\alpha, \beta \in \Lambda$ $\phi_\alpha = \phi_\beta$ es $U_\alpha \cap U_\beta$, entonces existe una única aplicación $\phi : \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \rightarrow N$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$, $\phi|_{U_\alpha} = \phi_\alpha$. Además, ϕ es diferenciable.

El siguiente concepto permite establecer cuándo dos variedades diferenciables son esencialmente iguales.

Definición 2.1.13. Sean M, N variedades diferenciables. Un *difeomorfismo* $\phi : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable y biyectiva, con inversa diferenciable. Se dice que M y N son difeomorfas si existe un difeomorfismo entre ellas.

Enunciamos ahora las principales propiedades de los difeomorfismos.

Proposición 2.1.14. Sean M, N, P variedades diferenciables. Se cumple que:

1. Si $\phi : M \rightarrow N$ y $\xi : N \rightarrow P$ son difeomorfismos, $\xi \circ \phi : M \rightarrow P$ es un difeomorfismo.
2. Todo difeomorfismo es un homeomorfismo.
3. Si $U \subset M$ es un abierto y $\phi : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, su restricción $\phi|_U : U \rightarrow \phi(U) \subset N$, es un difeomorfismo.
4. La identidad, $id : M \rightarrow M$, es un difeomorfismo.
5. Si M, N son difeomorfas tienen la misma dimensión.
6. Si (U, φ) es una carta local de M , $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo. Y, recíprocamente, si $\phi : U \subset M \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo entre un abierto de M y uno de $\mathbb{R}^n$, entonces (U, ϕ) es una carta local de M .

Nos centramos ahora en el estudio de las particiones de la unidad sobre variedades diferenciables. Estas son las herramientas que permiten extender conceptos que se definen utilizando cartas locales a toda la variedad. La existencia de las mismas necesita que M sea un espacio 2AN, es decir, que cumpla el segundo axioma de numerabilidad. Por eso se ha pedido en la definición de variedad diferenciable que M tenga esta propiedad, si bien algunos autores, como en [17], prefieren no incluir esta condición y tratar de forma diferente a las variedades que sí la cumplen.

Para ello necesitamos introducir primero cierta notación topológica.

Definición 2.1.15. Un *recubrimiento por abiertos* de una variedad diferenciable, M , es una colección de abiertos, $\mathcal{F} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, tales que $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

Se dice que una colección de subconjuntos de M , $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, es *localmente finita* si, para todo $p \in M$, existe un entorno de p , V , tal que $\{\alpha \in \Lambda / A_\alpha \cap V \neq \emptyset\}$ es finito.

Definición 2.1.16. Una *partición de la unidad* en M es una colección $\{\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciable}, i \in I\}$ tal que:

1. el conjunto $\{\text{Sop} \varphi_i : i \in I\}$ es localmente finito, donde $\text{Sop} \varphi_i$ es la adherencia del conjunto siguiente: $\{x \in M / \varphi_i(x) = 0\}$.
2. $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ para cada $p \in M$.
3. $\varphi_i \geq 0$ para todo $i \in I$.

Nótese que, si $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ es una partición de la unidad, gracias a que $\{\text{Sop} \varphi_i : i \in I\}$ es localmente finita, dado $p \in M$, existen a lo sumo una cantidad finita, $i_1, \dots, i_k \in I$ de índices tales que $p \in \text{Sop} \varphi_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$. Por tanto, está bien definida la aplicación $\sum_{i \in I} \varphi_i(p)$. De hecho, como en todo un abierto entorno a cada punto de M dicha suma será finita (al anularse en dicho abierto todas las funciones tales que su soporte no corte al abierto), se tiene que la suma de un subconjunto cualquiera de dichas aplicaciones es diferenciable. Este tipo de razonamientos para comprobar que funciones definidas como sumas, en principio arbitrarias, de funciones son diferenciables, cuando sus soportes son localmente finitos, es habitual en la geometría diferencial.

Teorema 2.1.17 (Existencia de particiones de la unidad). Sean M una variedad diferenciable y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un recubrimiento por abiertos suyos. Entonces:

- Existe $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una partición de la unidad numerable tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $\text{Sop} \varphi_m \subset U_\alpha$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\text{Sop} \varphi_m$ es compacto.
- Existe una partición de la unidad, $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, tal que para cada $\alpha \in \Lambda$, $\text{Sop} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ y, a lo sumo, una cantidad numerable de las funciones de la partición son no nulas (en este caso los soportes no tienen por qué ser compactos).

La existencia de particiones de la unidad nos permite asegurar en particular la existencia de funciones meseta en una variedad, las cuales serán de nuevo de gran ayuda para, a partir de objetos locales, extenderlos a toda la variedad. La existencia de estas funciones constituye una extensión al caso diferenciable del Lema de Uryshon.

Corolario 2.1.18 (Existencia de funciones meseta). Sean $U \subset M$ abierto y $C \subset G$ cerrado. Entonces existe $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ tal que:

1. $0 \leq \varphi(p) \leq 1$ para cada $p \in M$.
2. $\varphi|_C \equiv 1$.
3. $\text{Sop} \varphi \subset G$.

Introducimos ahora dos de los conceptos centrales de la teoría de variedades diferenciables: los vectores tangentes y el espacio tangentes. La definición de estos objetos puede hacerse de varias formas equivalentes: a partir de gérmenes de función (ver [18]); a partir de curvas definidas sobre M (ver [13]); o bien a partir de derivaciones (ver [12, 17]). Presentamos esta última posibilidad, pues, si bien todas ellas son equivalentes, la definición basada en derivaciones es la que se expresa de forma más elemental y permite deducir las propiedades básicas de los vectores tangentes de manera más sencilla, evitando la necesidad del uso de módulos (definición a partir de gérmenes de función) y de clases de equivalencias (definición con curvas).

Los vectores tangentes son objetos locales, esto es, su valor queda determinado por los de la función sobre la que actúa en un entorno del punto considerado. Por ello, definimos la actuación de un vector tangente a $p \in M$ sobre funciones diferenciables definidas en un entorno abierto del punto p cualquiera. El conjunto de todas ellas se denota por $\mathcal{F}(p)$.

Definición 2.1.19. Un *vector tangente* a M en p es una derivación en p , es decir, una aplicación lineal $v : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todas $f, g \in \mathcal{F}(p)$ se cumple la propiedad de Leibniz, es decir:

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denomina *espacio tangente a M en p* , $T_p M$, el cual es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones.

Asociados a cada carta local de M , (U, φ) , y cada $p \in U$, podemos definir unos vectores tangentes, $\left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_p$, $i = 1, \dots, n$ tales que

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i}(f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)), \quad f \in \mathcal{F}(M), \quad p \in M,$$

donde x^i , $i = 1, \dots, n$, son las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$. Haciendo uso de las propiedades de las derivadas parciales en $\mathbb{R}^n$, se comprueba que efectivamente estas aplicaciones son vectores tangentes. Para

facilitar la lectura, en ocasiones, al igual que ocurre con las aplicaciones entre variedades, se usarán también las siguientes notaciones:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) (p).$$

Estos ejemplos de vectores tangentes permiten comprobar que constituyen una generalización del concepto de derivadas parciales que existe para aplicaciones entre espacios euclídeos.

El siguiente lema nos permite concluir que los vectores tangentes a $p \in M$ actúan localmente, es decir, que solo son relevantes los valores de la función en un entorno de p para saber el valor de un vector tangente actuando sobre ella. Por ello, los espacios tangentes de abiertos de una variedad son esencialmente iguales al espacio tangente a M .

Lema 2.1.20. Sea $p \in M$ y sea $v \in T_p M$. Entonces:

1. Si $f, g \in \mathcal{F}(M)$ coinciden en un entorno de p , entonces $v(f) = v(g)$.
2. Si $h \in \mathcal{F}(M)$ es constante en un entorno de p , entonces $v(h) = 0$.

Proposición 2.1.21. Si $U \subset M$ es un abierto y $p \in U$, entonces, definiendo para cada $v \in T_p U$

$$\tilde{v}(f) = v(f|_U), \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}(M),$$

la aplicación que manda $v \mapsto \tilde{v}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por tanto podemos identificar $T_p U \equiv T_p M$.

Para poder trabajar con los vectores tangentes a un punto, resulta útil disponer de bases del espacio tangente en cada punto. El siguiente resultado nos permite concluir que los vectores tangentes asociados a una carta local en cada punto son de hecho una base del espacio tangente. Estas bases serán especialmente útiles para realizar diversos cálculos en los capítulos posteriores.

Teorema 2.1.22. Sea (U, φ) una carta local de M y sea $p \in U$. Entonces $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n} \right\}$ es una base de $T_p M$ y, para cada $v \in T_p M$:

$$v = \sum_{i=1}^n v(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p. \quad (2.1)$$

En particular, la dimensión como $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de $T_p M$ es la dimensión de M , n .

Consideremos ahora M, N variedades diferenciables de dimensiones n, d , respectivamente. Dada una aplicación diferenciable $\phi : M \rightarrow N$, es útil disponer de una aplicación que resuma la variación de ϕ en torno a cada punto. Para aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^d$, esta información está codificada en la matriz jacobiana de ϕ . Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ y cada dirección $v \in \mathbb{R}^n$, esta matriz proporciona la derivada direccional de ϕ en p en la dirección v .

Al trabajar con variedades diferenciables, el concepto de derivada direccional se sustituye por el de vector tangente, lo que lleva a la siguiente definición:

Definición 2.1.23. Para cada $p \in M$, se define la *diferencial* de ϕ en p como la aplicación:

$$d\phi|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N,$$

tal que, para cada $f \in \mathcal{F}(N)$ y cada $v \in T_p M$, $d\phi|_p(v)(f) = v(f \circ \phi)$.

En algunas ocasiones, para simplificar la notación, denotaremos $d\phi_p = d\phi|_p$. Es inmediato a partir de la definición comprobar que $d\phi|_p$ está bien definida, es decir, que para cada $v \in T_p M$, $d\phi|_p(v) \in T_{\phi(p)} N$, y además es lineal.

El siguiente lema permite apreciar de forma más directa cómo esta definición no es sino una generalización del concepto de matriz jacobiana:

Lema 2.1.24. Sea $p \in M$ y (U, φ) una carta de M en torno a p y (V, ψ) una carta de N en torno a $\psi(p)$. Entonces, para cada $i = 1, \dots, n$:

$$d\phi_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p (\psi^j \circ \phi) \frac{\partial}{\partial \psi^j} \Big|_{\phi(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\psi^j \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} (\varphi^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial \psi^j} \Big|_{\phi(p)}.$$

Definición 2.1.25. En las condiciones del lema anterior, la matriz de $d\phi|_p$ en las bases de vectores tangentes en p asociadas a las cartas locales (U, φ) y (V, ψ) se denomina *matriz jacobiana* de ϕ en p relativa a (U, φ) y (V, ψ) .

Nótese que, si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una aplicación diferenciable y $p \in \mathbb{R}^n$, la matriz de $d\phi|_p$ respecto a las bases de vectores tangentes asociadas a las cartas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^d$ dadas por la identidad es la matriz jacobiana de ϕ en p , en el sentido usual.

Al igual que ocurre para aplicaciones entre espacios euclídeos, se pueden dar tanto una regla de la cadena, como un teorema de la función inversa en variedades diferenciables, ambos basados en este caso en la diferencial de una aplicación.

Proposición 2.1.26. Sean M, N, P variedades diferenciables y $\phi : M \rightarrow N$, $\xi : N \rightarrow P$ aplicaciones diferenciables. Entonces, para cada $p \in M$:

$$d(\xi \circ \phi)_p = d\xi_{\phi(p)} \circ d\phi_p.$$

Teorema 2.1.27 (de la función inversa en variedades). Sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y sea $p \in M$. Entonces $d\phi|_p$ es un isomorfismo lineal si y solo si existe V entorno abierto de p en M tal que $\phi|_V$ es un difeomorfismo en su imagen.

Este teorema motiva la siguiente definición:

Definición 2.1.28. Se dice que una aplicación diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables es un *difeomorfismo local* si para todo $p \in M$, $d\phi_p$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Cabe mencionar que la aplicación diferencial también nos permite caracterizar las aplicaciones constantes entre variedades diferenciables, de acuerdo con el siguiente resultado:

Proposición 2.1.29. Sean M, N variedades diferenciables, con M conexa y sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Entonces $d\phi|_p = 0$ para todo $p \in M$ si y solo si ϕ es constante.

Introducimos ahora un tipo de aplicaciones entre variedades especialmente relevante: las curvas diferenciables.

Definición 2.1.30. Una *curva* en una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$ donde I es un abierto convexo de $\mathbb{R}$ (intervalo abierto, semirrecta abierta o todo $\mathbb{R}$). Para cada $t \in I$ se define el *vector velocidad* de α en t como

$$\alpha'(t) = d\alpha|_t \left(\frac{d}{ds} \Big|_t \right) \in T_{\alpha(t)} M,$$

donde $\frac{d}{ds} \Big|_t$ es el vector tangente en p asociado a la carta de $\mathbb{R}$ determinada por la aplicación identidad. Se dirá que α es *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Establecemos ahora las propiedades fundamentales de las curvas.

Proposición 2.1.31. Sea I un abierto convexo de $\mathbb{R}$ y sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva. Se cumplen:

1. Para cada $f \in \mathcal{F}(M)$ y cada $t \in I$ se tiene que:

$$\alpha'(t)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}(t).$$

2. Sean $t \in I$ y (U, φ) una carta en torno a $\alpha(t)$. En términos de los vectores tangentes en $\alpha(t)$ asociados a esta carta local:

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d(\varphi^i \circ \alpha)}{ds}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(t)}.$$

3. Sea J un abierto convexo de $\mathbb{R}$ y sea $h : J \rightarrow I$ un difeomorfismo. Entonces se dice que h es una reparametrización y que la curva $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow M$ es una reparametrización de α . En esta situación, para cada $t \in J$ se cumple que:

$$\beta'(t) = \frac{dh}{ds}(t) \alpha'(h(t)). \quad (2.2)$$

4. Si N es una variedad diferenciable y $\phi : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $\phi \circ \alpha : I \longrightarrow N$ es una curva en N y para cada $t \in I$:

$$d\phi|_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = (\phi \circ \alpha)'(t).$$

Observación 2.1.32. Nótese que, como una traslación de I es una reparametrización que no afecta al vector velocidad, podemos suponer cuando sea necesario que $0 \in I$, pues el efecto de esta reparametrización es trivial.

Pasamos ahora a hacer un estudio más detallado de los vectores tangentes. Para ello, a partir de una variedad diferenciable de dimensión n , M , construiremos otra cuyos puntos serán los vectores tangentes: el fibrado tangente.

Definición 2.1.33. Se define el *fibrado tangente* como el conjunto:

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Es decir, es la unión disjunta de todos los espacios tangentes a M . Se define la *proyección canónica* del fibrado tangente como la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

Si bien estrictamente los elementos de TM son pares (p, v) con $v \in T_p M$, en adelante prescindiremos de la mención explícita al punto en que es tangente v . Dicha etiqueta se sobreentenderá al escribir que $v \in T_p M$.

El fibrado tangente es un ejemplo de una clase más general de variedades diferenciables que se pueden definir a partir de M , los fibrados y, en particular, los fibrados vectoriales. Estos conceptos permiten estudiar de forma conjunta el fibrado tangente junto con otros que han sido estudiados en la asignatura de *Geometría Diferencial* como el fibrado cotangente, los fibrados tensoriales o los fibrados exteriores. En todos estos conjuntos, se puede definir una estructura de espacio topológico y dar un atlas diferenciable a partir de la estructura de variedad diferenciable de M (tratamientos en detalle de estas variedades se pueden consultar en el capítulo 10 de [12] y en las secciones 1.8 y 1.9 de [13]).

En la siguiente proposición establecemos la forma en que se dota al fibrado tangente de topología y de estructura de variedad diferenciable. En adelante, consideraremos a este conjunto dotado siempre de esta estructura. Las definiciones son análogas en el caso del resto de fibrados vectoriales enumerados antes, aunque no las estudiaremos en este trabajo, ya que introduciremos más adelante tanto las 1-formas como los campos tensoriales de una manera alternativa, a pesar de que se puedan entender también como secciones de estos fibrados.

Definición 2.1.34. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y consideremos $\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección canónica. Para cada (U, φ) carta local de M definimos $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ y

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \tilde{U} &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\longmapsto (\varphi(p), \lambda^1, \dots, \lambda^n), \end{aligned}$$

donde $\lambda^i = v(\varphi^i)$, $i = 1, \dots, n$, siendo φ^i las componentes de φ . El par $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ se denomina carta local de TM asociada a (U, φ) .

Nótese que, usando la notación de la definición, dado un elemento $v \in T_p M$ para cierto $p \in U$, por (2.1), existe una única expresión de v de la forma

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_p$$

y, de hecho, $\lambda^i = v(\varphi^i)$. Así, la aplicación $\tilde{\varphi}$ manda v en la imagen de p por φ junto con sus coordenadas respecto de los vectores tangentes en p asociados a esa base.

Proposición 2.1.35. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Usando la notación de la definición anterior, la familia de conjuntos

$$\{\tilde{\varphi}^{-1}(W) / W \subset \mathbb{R}^{2n} \text{ es abierto}, (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \text{ carta local adaptada}\}$$

define una topología en TM de espacio de Hausdorff que cumple el segundo axioma de numerabilidad. Dada esta topología, para cada (U, φ) carta local de M , la aplicación $\tilde{\varphi}$ es un homeomorfismo. Además, el conjunto

$$\{(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) / (U, \varphi) \text{ carta local de } M\}$$

es un atlas diferenciable sobre TM (con la topología anterior), que le dota de estructura de variedad diferenciable. Las cartas locales de este atlas se dicen que son cartas locales adaptadas o inducidas de TM .

Introducimos ahora el concepto de campo de vectores, central en el estudio de la geometría diferencial. Un campo de vectores es una forma de elegir un vector tangente en cada punto de una variedad de manera que los vectores varíen “suavemente” al movernos entre puntos vecinos.

Definición 2.1.36. Un *campo de vectores* o *campo vectorial*, X , es una sección diferenciable de la identidad en M sobre la proyección canónica de TM . Es decir, una aplicación $X : M \rightarrow TM$ diferenciable y tal que $\pi \circ X = id$. El conjunto de todos los campos diferenciables sobre M se denota $\mathfrak{X}(M)$ y es un módulo sobre $\mathcal{F}(M)$.

Cabe mencionar que en muchas situaciones, para simplificar la notación, se denotará para cada $p \in M$, $X_p = X(p)$.

El siguiente teorema nos permite caracterizar los vectores tangentes mediante su actuación sobre funciones. Más adelante utilizaremos definiciones análogas a esta caracterización para definir las 1-formas y los campos de tensores sin necesidad de introducir los correspondientes fibrados.

Teorema 2.1.37. Sea una aplicación $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = id$. Son equivalentes:

1. La aplicación X es un campo de vectores.
2. Para cada $f \in \mathcal{F}(M)$, siendo $X(f)(p) = X(p)(f)$, $p \in M$, se tiene que $X(f) \in \mathcal{F}(M)$.
3. Para cada (U, φ) carta local de un atlas diferenciable de M (no necesariamente maximal), siendo

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \lambda^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_p,$$

para cada $p \in U$, se cumple que $\lambda^i \in \mathcal{F}(U)$ para $i = 1, \dots, n$.

Usando este resultado es inmediato comprobar que, dada (U, φ) carta local, para cada $i = 1, \dots, n$, la aplicación que a cada $p \in U$ lo manda en $\left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_p$ es un campo de vectores en U . Estos campos se denominan campos de vectores asociados a la carta local (U, φ) y se denotan $\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \in \mathfrak{X}(U)$.

Existe otro concepto que es al fin y al cabo equivalente al de los campos de vectores: las derivaciones. Este es otra forma de generalizar el concepto de vector tangente directamente a partir de la definición. Más adelante generalizaremos esta noción aún más, para introducir las derivaciones tensoriales.

Definición 2.1.38. Una *derivación* de $\mathcal{F}(M)$ es una función $\mathcal{D} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ que es $\mathbb{R}$ -lineal y cumple la propiedad de Leibniz, esto es

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g),$$

para cada $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

La relación entre las derivaciones de $\mathcal{F}(M)$ y los campos de vectores la establece el siguiente resultado:

Proposición 2.1.39. Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de vectores, la aplicación que a cada $f \in \mathcal{F}(M)$ le asigna $X(f) \in \mathcal{F}(M)$ es una derivación de $\mathcal{F}(M)$. Recíprocamente, dada una derivación de $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{D}$, y un $p \in M$, la aplicación que a cada $f \in \mathcal{F}(M)$ lo manda en $V_p(f) = \mathcal{D}(f)(p)$, V_p , es un vector tangente y la aplicación $V : M \rightarrow TM$ que a cada $p \in M$ lo envía en V_p , es un campo de vectores.

El siguiente resultado nos permite afirmar que se pueden restringir los campos de vectores a abiertos de una variedad.

Proposición 2.1.40. Sean $U \subset M$ abierto y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores. Entonces $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$. Recíprocamente, si $p \in M$ e $Y \in \mathfrak{X}(U)$ para cierto abierto tal que $p \in U \subset M$, existen un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un abierto V cumpliendo que $p \in V \subset U$ tal que $X|_V = Y|_V$.

Una de las operaciones más relevantes que se puede construir entre campos de vectores es el corchete de Lie de dos campos de vectores. Éste constituye una primera formalización del concepto intuitivo de variación de un campo de vectores en la dirección dada por otro campo de vectores, que se estudia como un caso particular de la derivada de Lie. No obstante, no nos centraremos en dicho enfoque.

Definición 2.1.41. Dados $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ se define el *corchete de Lie* de los campos de vectores por:

$$\begin{aligned} [V, W] &= VW - WV : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ f &\longmapsto V(W(f)) - W(V(f)). \end{aligned}$$

Lema 2.1.42. Dados $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, su corchete de Lie, $[V, W]$, es una derivación de $\mathcal{F}(M)$ y por ello existe un único campo de vectores en M asociado a él, dado por

$$[V, W]_p(f) = V_p(W(f)) - W_p(V(f)),$$

el cual denotamos como $[V, W]$.

Estudiemos las propiedades básicas del corchete de Lie de campos de vectores:

Proposición 2.1.43. Sean $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ y sean $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Se cumple que:

1. El corchete de Lie es $\mathbb{R}$ -bilineal.
2. El corchete de Lie es antisimétrico, es decir, $[V, W] = -[W, V]$.
3. El corchete de Lie cumple la identidad de Jacobi, esto es:

$$[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0.$$

4. El corchete de Lie no es $\mathcal{F}(M)$ -bilineal, sino que:

$$[fV, gW] = fg[V, W] + fV(g)W - gW(f)V.$$

Estudiamos ahora la expresión del corchete de Lie en coordenadas, es decir, respecto de los campos de vectores asociados a una carta local.

Proposición 2.1.44. Sea (U, φ) una carta local y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. Razonando punto a punto en U , sabemos que existen $X^i, Y^j \in \mathcal{F}(U)$, $i, j = 1, \dots, n$, tales que:

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

Entonces se cumple que:

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} (Y^j) - Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} (X^i) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

En particular, para cualesquiera $i, j = 1, \dots, n$, se tiene que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right] = 0.$$

Esta última propiedad de los campos de vectores asociados a una carta local respecto de los corchetes de Lie los hace especialmente útiles a la hora de trabajar con conceptos que involucren el corchete de Lie y es consecuencia directa de la igualdad de las derivadas parciales segundas cruzadas establecidas por el Lema de Schwarz. De hecho, el corchete de Lie $[V, W]$ se puede considerar también como una medida de “cuánto falla” la igualdad de las derivadas parciales cruzadas “respecto” de V y respecto de W , que en el caso de las variedades no siempre serán iguales.

Al introducir los vectores tangentes a una variedad, hemos visto cómo, dada una aplicación $\phi : M \rightarrow N$ entre dos variedades diferenciables, podíamos construir vectores tangentes a N a partir de vectores tangentes a M por medio de la aplicación diferencial.

Para utilizar este razonamiento con campos de vectores deberíamos de poder definir, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, un campo de vectores en N , Y , tal que para cada $p \in M$, se tenga que $d\phi_p X(p) = Y(\phi(p))$. No obstante, en principio ϕ podría ni tan siquiera ser inyectiva. En tal caso, existirán $p, q \in M$ tales que $\phi(p) = \phi(q)$ y se podría tomar un campo de vectores X en M tal que $d\phi_p(X(p)) \neq d\phi_q(X(q))$, siempre que la imagen de ϕ tenga dimensión al menos 1, con lo que el campo de vectores Y que tratamos de definir en N no podría estar bien definido.

Por todo ello es necesario introducir el concepto de campos ϕ -relacionados, para poder establecer cuándo este razonamiento es posible.

Definición 2.1.45. Sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Se dice que M y N están ϕ -relacionados y se denota, $X \sim_\phi Y$ si para todo $p \in M$:

$$d\phi_p(X(p)) = Y(\phi(p)).$$

El siguiente resultado nos permite dar una caracterización alternativa de los campos ϕ -relacionados. Esto nos permite detectar un tipo de aplicaciones ϕ que siempre nos permiten definir, a partir de un campo de vectores en M , otro en N con el que esté ϕ -relacionado: los difeomorfismos.

Lema 2.1.46. Sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Entonces $X \sim_\phi Y$ si y solo si para cada $g \in \mathcal{F}(N)$ se cumple que:

$$X(g \circ \phi) = Y(g) \circ \phi.$$

En particular, si ϕ es un difeomorfismo, entonces, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiendo para cada $q \in N$, $Y(q) = d\phi_{\phi^{-1}(q)}(X(\phi^{-1}(q)))$, se cumple que $Y \in \mathfrak{X}(N)$ y $X \sim_\phi Y$.

Cabe resaltar que las operaciones de suma de campos de vectores y producto por escalar se comportan bien con la ϕ -relación, aunque el producto por una función diferenciable arbitraria no tiene por qué.

Lema 2.1.47. Sean M, N variedades diferenciables y $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $X_1 \sim_\phi Y_1$ y $X_2 \sim_\phi Y_2$, entonces $(\lambda X_1 + \mu X_2) \sim_\phi (\lambda Y_1 + \mu Y_2)$.

A continuación, comprobamos que los corchetes de Lie se comportan bien con respecto a la ϕ -relación de campos en variedades.

Proposición 2.1.48. Sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables. Sean $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Si $X_1 \sim_\phi Y_1$ y $X_2 \sim_\phi Y_2$, entonces $[X_1, X_2] \sim_\phi [Y_1, Y_2]$.

Se puede definir un concepto análogo al de campo de vectores pero que, en lugar de ser secciones diferenciables de la identidad, lo sean de aplicaciones diferenciables más generales.

Definición 2.1.49. Sean P, M variedades diferenciables y sea $\phi : P \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. Un *campo de vectores sobre ϕ* , X , es una sección de ϕ sobre la proyección canónica de TM . Esto es, una aplicación diferenciable $X : P \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = \phi$. El conjunto de todos los campos de vectores sobre ϕ se denota $\mathfrak{X}(\phi)$.

Al igual que con los campos de vectores, en ocasiones denotaremos $X(p) = X_p$ para los campos de vectores sobre una aplicación.

Este concepto lo usaremos en especial para hablar de campos de vectores sobre curvas diferenciables $\alpha : I \rightarrow M$. Estos serán formas de asignar a cada punto de I un vector tangente a M de manera que al avanzar en I estos vayan variando de forma diferenciable.

Se puede dar una caracterización de la diferenciabilidad de estas aplicaciones análoga a la que se dio para campos de vectores:

Proposición 2.1.50. En las condiciones anteriores, dada una aplicación $X : P \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = \phi$, son equivalentes:

1. La aplicación X es un campo de vectores sobre ϕ .
2. Para cada $f \in \mathcal{F}(M)$, siendo $X(f)(p) = X(p)(f)$, $p \in P$, se tiene que $X(f) \in \mathcal{F}(P)$.
3. Para cada (U, φ) carta local de un atlas diferenciable de M (no necesariamente maximal), siendo

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \lambda^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_p,$$

para cada $p \in \phi^{-1}(U)$, se cumple que $\lambda^i \in \mathcal{F}(\phi^{-1}(U))$ para $i = 1, \dots, n$.

De nuevo se pueden restringir estos objetos a abiertos de la variedad sin problemas.

Proposición 2.1.51. En las condiciones anteriores, sean $U \subset P$ abierto y $X \in \mathfrak{X}(\phi)$. Entonces $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$. Recíprocamente, si $p \in P$ e $Y \in \mathfrak{X}(U)$ para cierto abierto tal que $p \in U \subset P$, existen un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\phi)$ y un abierto V cumpliendo $p \in V \subset U$ tal que $X|_V = Y|_V$.

Introducimos un nuevo concepto sobre campos de vectores: las referencias de campos. Estos son conjuntos de campos de vectores que generan todos los demás mediante combinaciones $\mathcal{F}(M)$ -lineales. Por tanto, muchas de las propiedades que se estudian más adelante en el trabajo, bastará con estudiarlas para una referencia de campos.

Definición 2.1.52. Dada M una variedad diferenciable de dimensión n , se dice que un conjunto de campos de vectores $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, forma una *referencia de campos de vectores* si para cada $p \in M$, $X_1(p), \dots, X_k(p)$, son una base de $T_p M$. En particular, se ha de cumplir que $k = n$.

Si $U \subset M$ es un abierto de M y $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$, son campos de vectores tales que para todo $p \in U$, $X_1(p), \dots, X_n(p)$, forman una base de $T_p M$, se dice que $X_1, \dots, X_n$ son una *referencia local de campos de vectores*.

El primer ejemplo de referencia (local) de campos de vectores lo componen los campos de vectores asociados a una carta local (U, φ) de M .

Una interpretación intuitiva de los campos de vectores en una variedad es considerarlos como un conjunto de “flechas” (una sobre cada punto de la variedad) que apuntan en distintas direcciones. Así, dado un campo de vectores y partiendo de un punto de una variedad, podríamos intentar seguir estas flechas, lo que intuitivamente nos llevaría a describir una curva. Esta intuición se formaliza en el concepto de curvas integrales, que son una de las principales herramientas de la geometría para generalizar las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En lo que sigue I será un abierto convexo de $\mathbb{R}$ y $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable.

Definición 2.1.53. Dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, se dice que α es una *curva integral* de V si para cada $t \in I$, $\alpha'(t) = V(\alpha(t))$, esto es, si $\alpha' = V \circ \alpha$.

Para entender cómo este concepto permite describir ecuaciones diferenciales ordinarias sobre una variedad, estudiamos las condiciones que ha de cumplir una curva para ser curva de un campo de vectores sobre M en coordenadas, es decir, respecto a una carta local.

Proposición 2.1.54. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha : I \rightarrow M$ una curva en M . Es equivalente:

1. La curva α es una curva integral de V .

2. Existe un atlas diferenciable de M , $\mathcal{A}$, tal que para cada $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, y para cada $J \subset I$ abierto y convexo con $\alpha(J) \subset U$, se tiene que si $V = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ en U

$$\frac{d(\varphi^i \circ \alpha)}{dt} = V^i \circ \alpha, \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Para cada (U, φ) carta local de M , y para cada $J \subset I$ abierto y convexo con $\alpha(J) \subset U$, se tiene que si $V = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ en U

$$\frac{d(\varphi^i \circ \alpha)}{dt} = V^i \circ \alpha, \quad i = 1, \dots, n.$$

De hecho, los teoremas clásicos de existencia y unicidad de soluciones de las EDOs, nos permiten determinar la existencia de las curvas integrales de campos de vectores, inicialmente de forma local, y razonando de forma similar a cómo se hace en el estudio de EDOs clásicas, se pueden extender a curvas maximales.

Proposición 2.1.55. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $p \in M$ existe un intervalo I en torno a 0 y una única curva integral de V , $\alpha : I \rightarrow M$, con $\alpha(0) = p$.

Corolario 2.1.56. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ y sean $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ curvas integrales de V tales que existe $t_0 \in I$ con $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Entonces $\alpha = \beta$.

Este último corolario permite asegurar que la siguiente definición tiene sentido y que la curva integral maximal de un campo de vectores desde un punto de M existe y es única.

Definición 2.1.57. Sean $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$. Se define I_p como la unión de todos los intervalos abiertos de definición de curvas integrales de V , α , tales que $\alpha(0) = p$. Se define la *curva integral maximal de V empezando en p* como la aplicación $\alpha_p : I_p \rightarrow M$ tal que para cada $t \in I_p$, siendo $\alpha : I \rightarrow M$ curva integral de V con $\alpha(0) = p$ y $t \in I$, $\alpha_p(t) = \alpha(t)$.

Nótese que si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva integral de cierto campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(M)$, como las reparametrizaciones que consisten en una traslación no modifican el vector velocidad, la curva $\beta(s) = \alpha(s + c)$, $s \in I - c$, es una nueva curva integral de V . Esto nos permite llegar al siguiente resultado:

Corolario 2.1.58. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $p \in M$. Usando la notación de la definición anterior, sea $s \in I_p$ y denotemos $q = \alpha_p(s)$. Entonces $s + I_q = I_p$ y $\alpha_p(s + t) = \alpha_q(t)$ para todo $t \in I_q$.

Definición 2.1.59. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $\mathcal{D}_V = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \in I_p\}$. Se define el *flujo de V* como la aplicación $\psi : \mathcal{D}_V \rightarrow M$ dada por

$$\psi(p, t) = \alpha_p(t),$$

donde α_p es la curva integral maximal de V empezando en p .

Esta aplicación permite entender cómo se moverían los puntos de una variedad si siguiesen las direcciones marcadas por V . Gracias a los teoremas de derivabilidad respecto de las condiciones iniciales de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se pueden obtener las siguientes propiedades de esta aplicación.

Lema 2.1.60. Sea V un campo de vectores en M y sean $\mathcal{D}_V$ el conjunto definido anteriormente y la aplicación $\psi : \mathcal{D}_V \rightarrow M$ su flujo. Se cumple que:

1. El conjunto $\mathcal{D}_V$ es abierto, conexo y contiene a $M \times \{0\}$.
2. La aplicación ψ es una aplicación diferenciable entre variedades (entendiendo $\mathcal{D}_V$ como un abierto de la variedad producto $M \times \mathbb{R}$, ver [Sección 4.7](#)).
3. La aplicación $\psi_0 : M \rightarrow M$ dada por $\psi_0(p) = \psi(p, 0)$ es la identidad.

En particular, si nos restringimos a un abierto suficientemente pequeño en torno a un punto de la variedad, podemos conseguir mejorar las propiedades de ψ en dicho abierto:

Lema 2.1.61. Sean $V \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y ψ el flujo de V . Entonces existen $\varepsilon > 0$ y un entorno U de p en M tal que $U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}_V$. Además, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\psi_t : U \rightarrow \psi_t(U)$ dada por $\psi_t(p) = \psi(p, t)$, es un difeomorfismo.

Introducimos ahora los conceptos de covectores y de 1-formas, duales a los de vectores tangentes y campos de vectores en una variedad diferenciable, respectivamente.

Definición 2.1.62. Sea $p \in M$. Se define el *espacio cotangente* a M en p , T_p^*M como el espacio vectorial dual de T_pM . Los elementos de T_p^*M se denominan *covectores* y son aplicaciones lineales de T_pM a $\mathbb{R}$.

Observación 2.1.63. Sea $p \in M$ y consideremos (U, φ) una carta local en torno a p . Sabemos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n} \Big|_p \right\}$ es una base de T_pM . Su base dual se denota $\{d\varphi^1|_p, \dots, d\varphi^n|_p\}$, la cual es una base de T_p^*M . También denotaremos en ocasiones $d\varphi^i|_p = d\varphi_p^i$.

El siguiente resultado nos permite conocer la expresión de las coordenadas de un covector respecto de este tipo de bases de los espacios cotangentes:

Lema 2.1.64. Sea $p \in M$ y sea (U, φ) una carta local en torno a p . Sea $v^* \in T_p^*M$. Entonces se cumple que:

$$v^* = \sum_{i=1}^n v^* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p \right) d\varphi_p^i.$$

Introducimos ahora el concepto de fibrado cotangente, necesario para definir las 1-formas. Como ya hemos mencionado, este conjunto puede dotarse de una estructura de variedad diferenciable análoga a la del fibrado tangente, aunque no será necesario su estudio para el desarrollo del presente trabajo.

Definición 2.1.65. Se define el *fibrado cotangente* de M , T^*M como la unión disjunta de todos los espacios cotangentes a M

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M,$$

y se define la proyección canónica del espacio cotangente, $\sigma : T^*M \longrightarrow M$, dada por $\sigma(p, v^*) = p$ para cada $(p, v^*) \in T^*M$.

Definición 2.1.66. Una *1-forma* es una aplicación $\theta : M \longrightarrow T^*M$ tal que $\sigma \circ \theta = id$. Dada θ una 1-forma y $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define la aplicación $\theta(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}$, también denotada θX , dada por $\theta(X)(p) = \theta(p)(X(p))$.

Se dice que una 1-forma θ es *diferenciable* si para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta(X) \in \mathcal{F}(M)$. El conjunto de todas las 1-formas diferenciables se denota por $\Lambda^1(M)$ y es un módulo sobre $\mathcal{F}(M)$.

Al igual que ocurre con los campos de vectores, podemos restringir las 1-formas a abiertos de la variedad.

Proposición 2.1.67. Sea $U \subset M$ abierto y $\theta \in \Lambda^1(M)$ una 1-forma. Entonces $\theta|_U \in \Lambda^1(U)$. Recíprocamente, si $p \in M$ y $\beta \in \Lambda^1(U)$ para cierto abierto $p \in U \subset M$, existen una 1-forma $X\theta \in \Lambda^1(M)$ y un abierto V tal que $p \in V \subset U$, cumpliendo que $\theta|_V = \beta|_V$.

Cabe mencionar que, en muchas ocasiones, para simplificar la notación, denotaremos $\theta_p = \theta(p)$. El siguiente resultado nos permite caracterizar cuándo las 1-formas son diferenciables, de forma similar a la caracterización dada para los campos de vectores.

Teorema 2.1.68. Sea $\theta : M \longrightarrow T^*M$ una 1-forma. Son equivalentes:

1. La aplicación θ es una 1-forma diferenciable.
2. Para cada (U, φ) carta local de un atlas diferenciable de M (no necesariamente maximal), siendo para cada $p \in U$

$$\theta(p) = \sum_{i=1}^n \lambda^i(p) d\varphi_p^i,$$

se cumple que $\lambda^i \in \mathcal{F}(U)$ para $i = 1, \dots, n$.

De ahora en adelante, salvo que se especifique lo contrario, trabajaremos solo con 1-formas diferenciables. Por ello, prescindiremos del calificativo diferenciable.

Si bien no todas las 1-formas pueden construirse de esta forma, dada una función $f \in \mathcal{F}(M)$, podemos construir a partir de ella una 1-forma.

Definición 2.1.69. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. Se define la 1-forma $df : M \rightarrow T^*M$, y se denomina *diferencial de f* , tal que

$$df(p)(v) = v(f),$$

para todo $v \in T_pM$ y cada $p \in M$.

Nótese que, salvo la identificación canónica entre $T_t\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ para cada $t \in \mathbb{R}$, df es la aplicación diferencial de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ entendida como aplicación entre variedades diferenciables.

Lema 2.1.70. Sea (U, φ) una carta local de M y sea $p \in U$. Entonces, para cada $i = 1, \dots, n$, se cumple que

$$d\varphi^i(p) = d\varphi^i|_p,$$

donde $d\varphi^i \in \Lambda^1(U)$.

Este lema nos permite comprobar que las 1-formas $d\varphi^i$, $i = 1, \dots, n$, que denominamos 1-formas asociadas a la carta local (U, φ) , cumplen un papel similar al de la referencia de campos locales asociadas a una carta local, pues en cada punto son una base del espacio cotangente. Todo ello nos lleva al siguiente resultado, que generaliza el presentado previamente para covectores al caso de 1-formas.

Proposición 2.1.71. Sean $\theta \in \Lambda^1(M)$ y (U, φ) una carta local de M . Entonces en U se cumple:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) d\varphi^i.$$

En la próxima proposición se recogen las principales propiedades de las diferenciales de funciones.

Proposición 2.1.72. Consideremos la aplicación diferencial $d : \mathcal{F}(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$. Se cumple que:

1. La aplicación d es una aplicación $\mathbb{R}$ -lineal.
2. La aplicación d cumple la regla de Leibniz, es decir, para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$, $d(fg) = fdg + gdf$.
3. Si $f \in \mathcal{F}(M)$ y $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, entonces $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$.
4. Si $f \in \mathcal{F}(M)$ y (U, φ) es una carta local de M , entonces, en U :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi d\varphi^i.$$

Por último, pasamos a presentar los principales resultados relativos a subvariedades diferenciables. Si bien existen varios conceptos que permiten ver una variedad como parte de otra, nos centraremos en el de imbedding, y por ello nos referiremos a este último directamente como subvariedad.

Definición 2.1.73. Sean P, M variedades diferenciables con $P \subset M$ como conjuntos. Se dice que P es *subvariedad* (o imbedding) de M si:

- El conjunto P es subespacio topológico de M .
- La inclusión, $j : P \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable y tal que para todo $p \in P$, dj_p es inyectiva.

Como dj_p es inyectiva para todo $p \in P$, en ocasiones se puede prescindir de esta aplicación e identificar directamente los espacios tangentes a P como subespacios de los correspondientes espacios tangentes a M .

Introducimos ahora un tipo de subvariedades creadas a partir de cartas locales. Estas son en cierto modo una generalización de los subespacios afines de $\mathbb{R}^n$, obtenidos al mantener alguna de sus coordenadas constantes.

Definición 2.1.74. Sea (U, φ) una carta local de M . Se dice que el conjunto

$$S = \{q \in U \mid \varphi^i(q) = a^i, i = c+1, \dots, d\},$$

donde $0 \leq c \leq n$ y $a = (a^1, \dots, a^n) \in \varphi(U)$, es una *rodaja* de M de dimensión c .

Proposición 2.1.75. Si $S \subset M$ es una rodaja de dimensión c , es una subvariedad de M de dimensión c y, con la notación de la definición anterior, $(S, \varphi^1, \dots, \varphi^c)$ es una carta local de S que recubre toda la variedad.

De hecho, se puede comprobar que toda subvariedad de M es, localmente, una rodaja suya:

Proposición 2.1.76. Sea $P \subset M$ una subvariedad de dimensión c . Para cada $p \in P$ existe una carta local de M , (U, φ) , y $a = (a^1, \dots, a^n) \in \varphi(U)$, tales que:

$$V = P \cap U = \{q \in U \mid \varphi^i(q) = a^i, i = c + 1, \dots, d\}.$$

Es decir, V es una rodaja de M . En tal caso, se dice que (U, φ) es una carta local de M adaptada a P .

Nótese que cada carta local de M adaptada a P induce una carta local de P . De hecho, P está recubierto por este tipo de cartas de acuerdo con la proposición previa. Así pues, se pueden usar las cartas adaptadas a P para estudiar su estructura de variedad diferenciable, lo cual es de gran ayuda cuando ésta se quiere relacionar con la de M .

Presentamos ahora un resultado que nos permite generalizar una de las propiedades fundamentales de la topología de subespacio para aplicaciones diferenciables cuando se trabaja con subvariedades.

Proposición 2.1.77. Sea $P \subset M$ una subvariedad. Si N es otra variedad diferenciable y $\phi : N \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable con $\phi(N) \subset P$, la aplicación restringiendo la imagen, $\tilde{\phi} : N \rightarrow P$ es diferenciable.

Proposición 2.1.78. Sean $P \subset M$ una subvariedad y $j : P \rightarrow M$ la inclusión. Si N es otra variedad diferenciable y $\phi : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, entonces la aplicación $\phi|_P : P \rightarrow N$, $\phi|_P = \phi \circ j$, es diferenciable.

Finalmente, estudiamos cómo se relacionan los campos de vectores de P y de M .

Definición 2.1.79. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que X es *tangente a una subvariedad* $P \subset M$ si para todo $p \in P$, $X_p \in T_p P \subset T_p M$.

Proposición 2.1.80. Sea $P \subset M$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangentes a P .

1. La aplicación $X|_P \in \mathfrak{X}(P)$.
2. El corchete $[X, Y]$ es tangente a P y $[X, Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$.

2.2. Cálculo tensorial

Introducimos ahora una clase de aplicaciones que son ubicuas en el estudio de las variedades diferenciables: los campos de tensores. Estos permiten generalizar los conceptos de función, campo de vectores y 1-formas, presentados en la sección previa.

Una de las principales características de los campos de tensores es su multilinealidad. Para resaltar esta propiedad, así como por sus ventajas operativas, se presentan a continuación los campos de tensores como aplicaciones multilineales (sobre módulos) siguiendo el Capítulo 2 de [17], en lugar de recurrir al lenguaje de las propiedades universales. Este otro enfoque puede consultarse en textos como [18].

Definición 2.2.1. Sea M una variedad diferenciable y sean r, s enteros no negativos, ambos no simultáneamente nulos. Dado $p \in M$, se dice que una aplicación $t : (T_p^* M)^r \times (T_p M)^s \rightarrow \mathbb{R}$ multilineal es un *tensor de tipo (r, s) en p* . El conjunto de todos los tensores de tipo (r, s) en p se denota $\mathcal{T}_s^r(T_p M)$ y es un espacio vectorial real.

Definimos de manera especial los tensores de tipo $(0, 0)$ en p . Esta definición básicamente establece que un tensor de tipo $(0, 0)$ es un elemento de $\mathbb{R}$, pero será de gran utilidad en definiciones próximas.

Definición 2.2.2. Sea M una variedad diferenciable. Un *tensor t de tipo $(0, 0)$ en p* , es una aplicación $t : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Las primeras r variables sobre las que actúa un tensor en $p \in M$ de tipo (r, s) se denominan contravariantes, mientras que las últimas s se llaman covariantes.

Nótese que estas definiciones generalizan los conceptos estudiados en las secciones previas de vectores tangentes y covectores. Por tanto, podemos tratar de generalizar a partir de ellos los conceptos de campos de vectores y 1-formas para conseguir objetos globales sobre toda la superficie que nos proporcionen formas de escoger un tensor en cada punto de la variedad de forma diferenciable. Esto lo conseguiremos mediante los campos de tensores o campos tensoriales.

En adelante, salvo que se indique lo contrario, M será una variedad diferenciable de dimensión n , $p \in M$ y r, s enteros no negativos.

Definición 2.2.3. Se define el *fibrado tensorial* (r, s) de M como la unión disjunta siguiente:

$$T_s^r(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathcal{T}_s^r(T_p M).$$

Se define la proyección canónica de $T_s^r(M)$, $\pi_{(r,s)} : T_s^r(M) \rightarrow M$ por $\pi_{(r,s)}(p, t) = p$.

En la mayoría de razonamientos, cuando no haya riesgo de confusión, se prescindirá de la mención explícita al punto de los elementos de $T_s^r(M)$ y se identificarán con su segunda componente.

Como ya hemos mencionado en la sección anterior, este conjunto se puede dotar de estructura de variedad diferenciable de forma análoga a como se hace con el fibrado tangente. No obstante, no será necesario tener en cuenta esta estructura en lo que resta de trabajo.

Definición 2.2.4. Sean r, s enteros no negativos, ambos no simultáneamente nulos. Un *campo tensorial de tipo* (r, s) es una aplicación $A : M \rightarrow T_s^r(M)$ tal que $\pi_{(r,s)} \circ A = Id_M$ y tal que, para todos $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Lambda^1(M)$, $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, definiendo

$$\begin{aligned} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto A(p)(\theta_p^1, \dots, \theta_p^r, X_{1,p}, \dots, X_{s,p}), \end{aligned}$$

se tiene que $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \in \mathcal{F}(M)$. El conjunto de todos los campos tensoriales de tipo (r, s) sobre M se denota $\mathcal{T}_s^r(M)$ y es un $\mathcal{F}(M)$ -módulo.

Observación 2.2.5. Nótese que como un tensor de tipo $(0, 0)$ en un punto $p \in M$ es una elección de un elemento de $\mathbb{R}$, una elección diferenciable de un tensor de tipo $(0, 0)$ en cada punto es una función diferenciable.

En muchas ocasiones, al igual que para las 1-formas y vectores tangentes, denotaremos $A_p = A(p)$.

Nótese que la definición anterior también nos permite entender a los campos tensoriales como aplicaciones que actúan directamente sobre 1-formas y campos de vectores, devolviendo funciones diferenciables, lo cual resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.6. Sea $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} A : \Lambda^1(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s &\rightarrow \mathcal{F}(M) \\ (\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &\mapsto A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s), \end{aligned}$$

está bien definida y es $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

De hecho, se puede establecer un recíproco del resultado anterior. Para ello, es necesario tener en cuenta el lema siguiente, trivial a partir de la definición:

Lema 2.2.7. Sean $p \in M$ y $A : \Lambda^1(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{F}(M)$ una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -multilineal. Sean $\theta^1, \dots, \theta^r, \gamma^1, \dots, \gamma^r \in \Lambda^1(M)$ tales que $\theta^i(p) = \gamma^i(p)$ para cada $i = 1, \dots, r$, y sean $X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_s \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X_i(p) = Y_i(p)$ para cada $i = 1, \dots, s$. Entonces:

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = A(\gamma^1, \dots, \gamma^r, Y_1, \dots, Y_s)(p).$$

Teorema 2.2.8. Sea $A : \Lambda^1(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -multilineal. Para cada $p \in M$ se define

$$A_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A_p(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) \longmapsto A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

donde $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Lambda^1(M)$, $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta^i(p) = \alpha^i$, $i = 1, \dots, r$ y $X_j(p) = v_j$, $j = 1, \dots, s$. Entonces para cada $p \in M$, $A_p \in \mathcal{T}_s^r(T_pM)$ y la aplicación $\tilde{A} : M \longrightarrow \mathcal{T}_s^r(M)$ que manda p en A_p es un campo de tensores.

Todo ello nos permite identificar los campos de tensores como aplicaciones multilineales que actúan sobre 1-formas y sobre campos de vectores. En particular, identificaremos A y $\tilde{A}$ de la demostración anterior y usaremos la misma notación para ambas.

Proposición 2.2.9. Sea $U \subset M$ abierto y sea $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Entonces $A|_U \in \mathcal{T}_s^r(U)$.

Además, si A es un campo tensorial de tipo (r, s) en un abierto en torno a un punto p , existe $\tilde{A} \in \mathcal{T}_s^r(M)$ tal que coincide con A en un entorno abierto, quizás reducido, de p .

Es decir, los campos de tensores siguen siéndolo al restringirnos a abiertos de la variedad. Además, el lema anterior nos muestra que los campos de tensores actúan punto a punto, por lo que en muchas ocasiones prescindiremos de explicitar que se está trabajando con la restricción a un abierto de un tensor.

Esto nos permite realizar el estudio de los tensores en coordenadas de forma más cómoda, es decir, expresarlos haciendo uso de una carta local de M .

Definición 2.2.10. Sea (U, φ) una carta local de M y sea $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Se definen las *componentes de A respecto de la carta local (U, φ)* como

$$A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = A \left(d\varphi^{i_1}, \dots, d\varphi^{i_r}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_s}} \right) \in \mathcal{F}(U),$$

para $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$.

Nótese que la evaluación de un tensor se puede realizar en coordenadas, es decir, utilizando sus componentes respecto a una carta local.

Ejemplo 2.2.11. Sea $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ y sean $\theta \in \Lambda^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, si (U, φ) es una carta local de M y en U podemos expresar $\theta = \sum_k \theta_k d\varphi^k$, $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ a $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$, usando la multilinealidad:

$$A(\theta, X, Y) = \sum_{i,j,k} \theta_k X^i Y^j A \left(d\varphi^k, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = \sum_{i,j,k} \theta_k X^i Y^j A_{i,j}^k$$

Introducimos ahora una forma de construir un tensor de un orden mayor a partir de dos tensores de órdenes más pequeños.

Definición 2.2.12. Sean r, r', s, s' enteros no negativos. Sean $t_1 \in \mathcal{T}_s^r(T_pM)$ y $t_2 \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(T_pM)$. Se define la aplicación *producto tensorial de t_1 y t_2* como:

$$t_1 \otimes t_2 : (T_p^*M)^{r+r'} \times (T_pM)^{s+s'} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha^1, \dots, \alpha^{r+r'}, v_1, \dots, v_{s+s'}) \longmapsto t_1(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) t_2(\alpha^{r+1}, \dots, \alpha^{r+r'}, v_{s+1}, \dots, v_{s+s'}).$$

Lema 2.2.13. En las condiciones de la definición anterior, se cumple que $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'}(T_pM)$.

Observación 2.2.14. En el caso en que $(r', s') = (0, 0)$ (o $(r, s) = (0, 0)$), se tiene simplemente que el producto tensorial de t_1 y t_2 (el cual podemos interpretar como una constante real) es el producto $t_2 t_1$, $t_2 \in \mathbb{R}$.

Esta definición puede extenderse a campos de tensores como sigue:

Definición 2.2.15. Sean r, r', s, s' enteros no negativos. Sean $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ y $B \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$, se define la aplicación $A \otimes B : M \rightarrow \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'} M$ dada por:

$$A \otimes B(p) = A(p) \otimes B(p).$$

Lema 2.2.16. En las condiciones de la definición anterior, se tiene que $A \otimes B \in \mathcal{T}_s^r(M)$.

Además, la aplicación producto tensorial, $\otimes$, entre los espacios de tensores en un punto, tiene un comportamiento muy bueno, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.2.17. Sean r, r', r'', s, s', s'' enteros no negativos. Se cumple que:

- La aplicación $\otimes : \mathcal{T}_s^r M \times \mathcal{T}_{s'}^{r'} M \rightarrow \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'} M$ que manda $(A, B) \mapsto A \otimes B$ es bilineal.
- Si $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, $B \in \mathcal{T}_{s'}^{r'} M$ y $C \in \mathcal{T}_{s''}^{r''} M$ entonces $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$. Por ello se denota a cualquiera de ellos como $A \otimes B \otimes C$.

Las propiedades anteriores también se cumplen para la aplicación producto tensorial entre los espacios de tensores en un punto de M .

Observación 2.2.18. En general, la aplicación $\otimes$ descrita en el resultado anterior no es conmutativa, ni siquiera cuando $(r, s) = (r', s')$. No obstante, si uno de los pares es $(0, 0)$, pongamos $(r', s') = (0, 0)$, entonces, sí es conmutativa, puesto que, con la notación del resultado anterior, $B \in \mathcal{F}(M)$ y:

$$A \otimes B = BA = B \otimes A$$

Establecemos ahora algunas propiedades básicas de las componentes tensoriales:

Proposición 2.2.19. Sean r, r', s, s' enteros no negativos. Sean $A, B \in \mathcal{T}_s^r M$ y $C \in \mathcal{T}_{s'}^{r'} M$. Se cumple que:

- Si $f, g \in \mathcal{F}(M)$, entonces $(fA + gB)^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} = fA^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} + gB^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s}$.
- Las componentes del producto tensorial son $(A \otimes B)^{i_1, \dots, i_{r+r'}}_{j_1, \dots, j_{s+s'}} = A^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} B^{i_{r+1}, \dots, i_{r+r'}}_{j_{s+1}, \dots, j_{s+s'}}$.

Destacamos ahora algunos tipos de tensores especialmente interesantes por la relación con las 1-formas y con los campos de vectores previamente definidos.

Observación 2.2.20. A partir de las definiciones, es claro que $\mathcal{T}_1^0(T_p M) = T_p^* M$ para cada $p \in M$ y que $\mathcal{T}_1^0 M = \Lambda^1(M)$. Es decir, los tensores de tipo $(0, 1)$ son covectores y los campos tensoriales de tipo $(0, 1)$ son 1-formas.

Observación 2.2.21. Veamos ahora que también se puede identificar $\mathcal{T}_0^1(T_p M)$ con $T_p M$ para cada $p \in M$. Para ello, basta notar que, por definición, para cada $p \in M$, $\mathcal{T}_0^1(T_p M)$ es el espacio vectorial dual de $T_p^* M$. Por tanto, $\mathcal{T}_0^1(T_p M)$ es el bidual de $T_p M$ y, al tratarse de espacios vectoriales de dimensión finita, hay un isomorfismo natural entre ambos.

Así cada vector tangente a M en p , $v \in T_p M$, se puede identificar con la aplicación $\tilde{v} \in \mathcal{T}_0^1(T_p M)$ dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{v} : T_p^* M &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \tilde{v}(\alpha) = \alpha(v). \end{aligned}$$

En adelante, identificaremos por tanto ambos espacios vectoriales y no haremos distinción entre v y $\tilde{v}$. Esta identificación permite identificar también de forma inmediata $\mathfrak{X}(M)$ con $\mathcal{T}_0^1 M$ a partir de sus definiciones.

Observación 2.2.22. Finalmente, nótese que, gracias a la identificación anterior, cada aplicación multilineal $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, induce un campo tensorial de tipo $(1, s)$, $\bar{A}$, dado por

$$\bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = A(X_1, \dots, X_s)(\theta),$$

y, recíprocamente, cada campo tensorial de tipo $(1, s)$, $B \in \mathcal{T}_s^1(M)$ induce una aplicación multilineal $\bar{B} : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, que a cada $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ le asigna el campo tensorial de tipo $(1, 0)$ tal que para cada $\theta \in \Lambda^1(M)$, $\bar{B}(X_1, \dots, X_s)(\theta) = B(\theta, X_1, \dots, X_s)$, el cual se identifica con un único campo de

vectores.

De forma análoga, se puede identificar para cada $p \in M$, $T_s^1(T_p M)$ con el conjunto de aplicaciones multilineales de $(T_p M)^s$ en $T_p M$.

Este tipo de tensores en un punto y de campos tensoriales jugarán un papel especialmente importante en el desarrollo posterior, puesto que el tensor de curvatura, uno de los objetos más relevantes de la geometría semi-Riemanniana, será un campo tensorial de tipo $(1, 3)$.

Observación 2.2.23. Los campos tensoriales (y tensores en un punto) de tipo $(0, s)$ se denominan covariantes y los campos de tensores (y tensores en un punto) de tipo $(0, r)$ con $r \geq 1$ se denominan contravariantes. Para este tipo de tensores es inmediato comprobar que, si A es covariante y B es contravariante, $A \otimes B = B \otimes A$.

En particular, las identificaciones anteriores nos permiten afirmar que, dada una carta local de M , (U, φ) , y un punto $p \in M$, para cada $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \in \mathcal{T}_0^1(T_p M)$ y $d\varphi^i \in \mathcal{T}_1^0(T_p M)$. Esto, junto con el uso del producto tensorial de tensores en un punto, nos permite dar una base de los tensores de tipo (r, s) en cada punto.

Proposición 2.2.24. Sea $p \in M$ y sea (U, φ) una carta local con $p \in U$. Entonces una base de $\mathcal{T}_s^r(T_p M)$ está dada por:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_r}} \Big|_p \otimes d\varphi^{j_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes d\varphi^{j_s} \Big|_p / i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

En particular, esto nos permite expresar localmente los campos tensoriales en cada abierto asociado a una carta local, mediante sus componentes tensoriales.

Proposición 2.2.25. Sea $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ y sea (U, φ) una carta local de M . En U , se cumple que:

$$A = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s} A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_r}} \otimes d\varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes d\varphi^{j_s}.$$

Todo ello nos permite establecer las siguientes dos caracterizaciones de la diferenciabilidad de los campos de tensores:

Proposición 2.2.26. Se cumple que:

- Una aplicación $A : M \longrightarrow T_s^r(M)$ tal que $\pi_{(r,s)} \circ A = Id$ es un campo tensorial si y solo si para cada carta local (U, φ) de un atlas de M se tiene que las componentes de A en dicha carta cumplen

$$A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = A \left(d\varphi^{i_1}, \dots, d\varphi^{i_r}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_s}} \right) \in \mathcal{F}(U),$$

para todos $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$.

- Una aplicación $A : \Lambda^1(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathbb{R}^M$ multilineal es un campo tensorial, es decir, tiene llegada en $\mathcal{F}(M)$, si y solo si para cada carta local (U, φ) de un atlas de M

$$A \left(d\varphi^{i_1}, \dots, d\varphi^{i_r}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_s}} \right) \in \mathcal{F}(U),$$

para todos $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$.

Al igual que el producto tensorial permite construir campos de tensores diferenciables (o tensores en un punto) a partir de otros de orden menor, podemos construir campos de tensores de orden menor contrayendo un campo tensorial de orden mayor.

Lema 2.2.27. Para cada $p \in M$, existe una única aplicación $\mathbb{R}$ -lineal, $C_p : \mathcal{T}_1^1(T_p M) \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada contracción en p tal que $C(v \otimes \alpha) = \alpha(v)$ para cada $v \in T_p M$ y $\alpha \in T_p^* M$.

Esta aplicación se puede generalizar a tensores en un punto de orden mayor como sigue:

Proposición 2.2.28. Sean $r, s \geq 1$ enteros y sea $t \in \mathcal{T}_s^r(T_p M)$. Sean $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$. Se define $C_{p,j}^i t : (T_p^* M)^{r-1} \times (T_p M)^{s-1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$(C_{p,j}^i t)(\alpha^1, \dots, \alpha^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) = C_p(\tilde{t}(\alpha^1, \dots, \alpha^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1})),$$

donde $\tilde{t}(\alpha^1, \dots, \alpha^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ manda

$$(\alpha, v) \mapsto t(\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^{r-1}, v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_{s-1}),$$

y, es claramente bilineal.

Lema 2.2.29. En las condiciones de la definición anterior, $C_j^i t \in \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(T_p M)$.

Todo ello induce una aplicación entre los conjuntos de campos tensoriales, que será $\mathcal{F}(M)$ -lineal, pues actúa punto a punto.

Definición 2.2.30. Sean enteros $r, s \geq 1$. Para cada $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$, se define la *contracción* $C_j^i : \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1} M$ por:

$$C_j^i(A)(p) = C_{p,j}^i(A(p)), \quad \text{para todo } p \in M.$$

Proposición 2.2.31. Sean enteros $r, s \geq 1$. Para cada $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$, la contracción C_j^i está bien definida, es decir, para cada $A \in \mathcal{T}_s^r M$, $C_j^i A \in \mathcal{T}_{s-1}^{r-1} M$ y además, es $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

Gracias a que las contracciones, C_j^i actúan punto a punto, en particular actúan localmente, es decir, para cada $U \subset M$ y $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, $C(A) = C(A|_U)$. Por tanto, podremos expresar la contracción de cualquier campo tensorial localmente, es decir, respecto de una carta local. Para ello, de acuerdo con un resultado previo, basta con dar las componentes tensoriales del campo contraído.

Proposición 2.2.32. Sean enteros $r, s \geq 1$. Para cada $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ y $A \in \mathcal{T}_s^r M$, dada una carta local de M , (U, φ) , las componentes tensoriales de $C_j^i A$ respecto a esta carta están dadas por:

$$(C_j^i A)_{j_1, \dots, j_{s-1}}^{i_1, \dots, i_{r-1}} = \sum_{m=1}^n A_{j_1, \dots, j_{j-1}, m, j_j, \dots, j_{s-1}}^{i_1, \dots, i_{i-1}, m, i_i, \dots, i_{r-1}}.$$

Finalmente, estudiamos cómo poder trasladar los campos de tensores por medio de aplicaciones diferenciables entre variedades. De forma análoga a lo que ocurre para campos de vectores y 1-formas, en que solo las segundas pueden trasladarse de forma adecuada por aplicaciones diferenciables, solo podremos trabajar en este caso de forma general con tensores de tipo covariante.

Definición 2.2.33. Sean M, N variedades diferenciables y $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Para cada $p \in M$, s entero mayor o igual a 1 y $t \in \mathcal{T}_s^0(T_{\phi(p)} N)$ se define el *pullback* (o *retracción*) de t por ϕ en p por:

$$\begin{aligned} \phi^* t : (T_p M)^s &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_s) &\mapsto t(d\phi|_p v_1, \dots, d\phi|_p v_s). \end{aligned}$$

Además, para cada $A \in \mathcal{T}_s^r N$, se define $\phi^* A : M \rightarrow T_s^r M$, el pullback (o la retracción) de A por ϕ por:

$$\phi^* A(p) = \phi^*(A(p)).$$

Lema 2.2.34. Sean M, N variedades diferenciables y $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Sea $s \geq 1$ entero. Para cada $p \in M$ y $t \in \mathcal{T}_s^0(T_{\phi(p)} N)$, $\phi^* t \in \mathcal{T}_s^0(T_p M)$. Además, para cada $A \in \mathcal{T}_s^r N$, $\phi^* A \in \mathcal{T}_s^r M$.

Definimos de forma especial el pullback de funciones, es decir, el de tensores covariantes de tipo $(0,0)$.

Definición 2.2.35. Sean M, N variedades diferenciables y $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Sea $f \in \mathcal{F}(N)$. Se define el *pullback* (o *retracción*) de f por ϕ como $\phi^* f = f \circ \phi \in \mathcal{F}(M)$.

El pullback de tensores covariantes es especialmente interesante, ya que se comporta bien con las principales aplicaciones entre tensores que hemos definido:

Proposición 2.2.36. Sean M, N, P variedades diferenciables, $\phi : M \rightarrow N$, $\psi : N \rightarrow P$ aplicaciones diferenciables y s, s' enteros no negativos.

1. Para cada $f \in \mathcal{F}(N)$, $d(\phi^* f) = \phi^* df$.
2. La aplicación $\phi^* : \mathcal{T}_s^0 N \rightarrow \mathcal{T}_s^0 M$ es $\mathbb{R}$ -lineal.
3. Para cada $A \in \mathcal{T}_s^0 N$, $B \in \mathcal{T}_{s'}^0 N$, se cumple que $\phi^*(A \otimes B) = (\phi^* A) \otimes (\phi^* B)$.
4. Se cumple que $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathcal{T}_s^0 P \rightarrow \mathcal{T}_s^0 M$.

Finalmente estudiamos dos tipos especiales de tensores covariantes:

Definición 2.2.37. Sean $p \in M$ y $t \in \mathcal{T}_2^0(T_p M)$, $A \in \mathcal{T}_2^0 M$. Se dice que:

- t es *simétrico* si para todos $v, w \in T_p M$, $t(v, w) = t(w, v)$.
- A es *simétrico* si para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $A(X, Y) = A(Y, X)$.
- t es *antisimétrico* si para todos $v, w \in T_p M$, $t(v, w) = -t(w, v)$.
- A es *antisimétrico* si para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $A(X, Y) = -A(Y, X)$.

Lema 2.2.38. Sea $A \in \mathcal{T}_2^0 M$. Entonces A es simétrico (resp. antisimétrico) si y solo si para todo $p \in M$, $A(p)$ es simétrico (resp. antisimétrico).

2.3. Espacios con producto escalar

En la asignatura del Grado *Álgebra y Geometría Lineales I* se realiza un estudio de las formas bilineales en espacios vectoriales de dimensión finita y, en particular, de los espacios euclídeos. En esta sección pretendemos hacer una recopilación de las principales definiciones y resultados vistos en dicha asignatura. Estos se pueden encontrar en [14] (capítulo V) y [17] (capítulo 2), del cual tomamos la notación.

En toda la sección V será un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 2.3.1. Una *forma bilineal*, b , en V es una aplicación $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. Es lineal en la primera componente, es decir, $b(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda b(v_1, w) + \mu b(v_2, w)$ para todos $v_1, v_2, w \in V$ y todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Es lineal en la segunda componente, es decir, $b(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda b(v, w_1) + \mu b(v, w_2)$ para todos $v, w_1, w_2 \in V$ y todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Se dice que b es *simétrica* si para todos $v, w \in V$ se cumple que $b(v, w) = b(w, v)$

Definición 2.3.2. Se dice que una forma bilineal b es:

1. *definida positiva* (resp. *negativa*) si para todo $v \in V$ no nulo, $b(v, v) > 0$ (resp. $b(v, v) < 0$),
2. *semidefinida positiva* (resp. *negativa*) si para todo $v \in V$, $b(v, v) \geq 0$ (resp. $b(v, v) \leq 0$),
3. *no degenerada* si para todo $v \in V$ no nulo, existe $w \in V$ tal que $b(v, w) \neq 0$.

Se dice que b es *definida* si es definida positiva o definida negativa y que es *semidefinida* si es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

Nótese que es equivalente que b sea no degenerada a que si para todo $w \in V$ se cumple que $b(v, w) = 0$, entonces $v = 0$. El siguiente resultado establece la relación principal entre las propiedades de las formas bilineales.

Lema 2.3.3. Sea b una forma bilineal simétrica en b . Se cumple que:

1. Si b es definida, es no degenerada y semidefinida.
2. Si b es semidefinida y no degenerada, es definida.

El siguiente lema nos permite, a partir de una forma bilineal en V , definir formas bilineales en sus subespacios vectoriales.

Lema 2.3.4. Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial y b una forma bilineal simétrica en V . Entonces $b|_{W \times W}$ es una forma bilineal simétrica en W . Además, si b es definida positiva (resp. definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa), $b|_{W \times W}$ es definida positiva (resp. definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa).

Nótese que, si bien estas nuevas formas bilineales conservan las propiedades de ser definidas y semidefinidas, puede ocurrir que b sea no degenerada y $b|_{W \times W}$ sea degenerada. Basta considerar en $\mathbb{R}^2$ la forma bilineal $b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ y el subespacio $W = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 / z_1 = z_2\}$.

Definición 2.3.5. Sea b una forma bilineal simétrica en V . Se define su *índice*, $\text{ind}(b)$ como el mayor entero que es dimensión de un subespacio $W \subset V$ tal que $b|_{W \times W}$ es definida negativa.

Como $\{0\}$ es siempre un subespacio de V en que la restricción de b es trivialmente definida negativa, el índice está bien definido en todo espacio vectorial de dimensión finita. Por tanto, es claro que $0 \leq \text{ind}(b) \leq \dim(V)$ y que la primera igualdad se da si y solo si b es definida positiva y la segunda si y solo si b es definida negativa.

Cuando se trabaje con una forma bilineal simétrica fijada en V , b , se dirá que el índice de V , $\text{ind}(V)$, es el de la forma bilineal b .

Definición 2.3.6. Dada una forma bilineal simétrica b en V , se define la *forma cuadrática asociada*, $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$q(v) = b(v, v).$$

La forma cuadrática asociada a b contiene la misma información que b , gracias a la identidad de polarización:

$$b(v, w) = \frac{1}{2} (q(v + w) - q(v) - q(w)) \quad \text{para todos } v, w \in V$$

Cuando se realicen razonamientos utilizando expresiones similares a la anterior, se dirá que se razona por polarización.

Definición 2.3.7. Pongamos $n = \dim(V)$ y sea b una forma bilineal simétrica sobre V . Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Se define la *matriz de b en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$* como $(b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ con:

$$b_{i,j} = b(e_i, e_j).$$

Nótese que, como b es simétrica, la matriz de b en cualquier base será simétrica. Además, a partir de la matriz de b en $\{e_1, \dots, e_n\}$, se puede recuperar b gracias a su bilinealidad. Por tanto, podemos caracterizar propiedades de la forma bilineal a partir de las de su matriz en una base. En particular se tiene el siguiente lema:

Lema 2.3.8. Una forma bilineal simétrica en V es no degenerada si y solo si su matriz en una base es invertible, si y solo si su matriz en cualquier base es invertible.

Nos centramos ahora en el estudio de las formas bilineales no degeneradas.

Definición 2.3.9. Un *producto escalar* g en un espacio vectorial V de dimensión finita es una forma bilineal simétrica no degenerada en V .

Se dice que g es un *producto interno* si es definido positivo, es decir, si para todo $v \in V$ no nulo, $g(v, v) > 0$.

En el resto de la sección, salvo que se especifique lo contrario, V será un espacio vectorial de dimensión finita, n , en que se ha definido un producto escalar g .

Nótese que, en estos espacios, si $v, w \in V$ son tales que para todo $z \in V$, $g(v, z) = g(w, z)$, entonces, por la bilinealidad de g , $g(v - w, z) = 0$ para todo $z \in V$ y, por tanto, $v - w = 0$ y $v = w$.

Definición 2.3.10. Se dice que $v \in V$ es un *null vector* o un *vector luminoso* si $g(v, v) = 0$ y v es no nulo.

Nótese que, de acuerdo con el [Lema 2.3.4](#), en V existen vectores luminosos si y solo si g no es definida (se dice entonces que g es indefinida).

En los espacios con producto escalar se generaliza el concepto de ortogonalidad, propio del espacio euclídeo usual, aunque con la salvedad de que pueden existir vectores ortogonales a sí mismos, los de luminosos.

Definición 2.3.11. Sean $v, w \in V$. Se dice que son *ortogonales* y se denota $v \perp w$, si $g(v, w) = 0$.

Dados $A, B \subset V$ subconjuntos cualesquiera, se dice que son *ortogonales* si para todo $v \in A$ y todo $w \in B$, $v \perp w$.

Si $A \subset V$ se define su *ortogonal* como:

$$A^\perp = \{v \in V / v \perp w \text{ para todo } w \in A\}.$$

Lema 2.3.12. Sea $A \subset V$ cualquiera. Entonces $A^\perp$ es un subespacio vectorial de V .

En los espacios con producto escalar se siguen cumpliendo algunas de las propiedades más relevantes del espacio euclídeo en lo que se refiere a perpendicularidad:

Proposición 2.3.13. Sean $W, U \subset V$ subespacios vectoriales. Entonces:

- Se cumple que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$.
- El biortogonal de un subespacio vectorial es él mismo, $(W^\perp)^\perp = W$.
- Si $U \subset W$, entonces $W^\perp \subset U^\perp$.

No obstante, en general, incluso si $W \subset V$ es un subespacio vectorial, no tiene por qué cumplirse que $W + W^\perp = V$, como sí ocurre en el espacio euclídeo. La siguiente definición nos permite estudiar subespacios vectoriales que sí posean esta propiedad.

Definición 2.3.14. Sea $W \subset V$ subespacio vectorial. Se dice que W es *no degenerado* si $g|_{W \times W}$ es una forma bilineal no degenerada y, por tanto, un producto escalar. Si no, se dice que W es degenerado.

Si bien no todo subespacio en un espacio vectorial con producto interno es no degenerado (es más, todo vector luminoso genera un subespacio que es degenerado), si se trabaja en un espacio con producto interno, todo subespacio es no degenerado y, de hecho, la restricción de g a cada subespacio, W , proporciona un producto interno en W .

Lema 2.3.15. Un subespacio $W \subset V$ es no degenerado si y solo si $V = W \oplus W^\perp$.

Nótese que, como $(W^\perp)^\perp = W$, W es no degenerado si y solo si $W^\perp$ lo es.

Definición 2.3.16. Sea $v \in V$. Se define la *norma* de v :

$$|v| = \sqrt{|g(v, v)|}.$$

Se dice que v es unitario si tiene norma 1, es decir, si $g(v, v) \in \{-1, 1\}$. Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_k\}$ es ortogonal si para todo $i \neq j$, $v_i \perp v_j$. Un conjunto de vectores unitarios ortogonal se dice que es ortonormal.

Lema 2.3.17. Si $n = \dim(V)$, un conjunto ortonormal de n vectores es una base.

Este tipo de bases son de gran utilidad para el estudio de los espacios con producto escalar, pues permiten simplificar muchos de los cálculos. Por ello, es de vital importancia el siguiente resultado:

Teorema 2.3.18. Todo espacio con producto escalar V de dimensión finita $n \geq 1$ tiene una base ortonormal.

En una base ortonormal de V , $\{e_1, \dots, e_n\}$ la matriz de g es diagonal, pues

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \varepsilon_j,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y $\varepsilon_j = g(e_j, e_j) \in \{-1, 1\}$. Es habitual ordenar los elementos de las bases ortonormales de forma que, si hay ε_j negativas, estos estén asociados a los primeros vectores de la base.

Definición 2.3.19. Cuando una base ortonormal se ordena siguiendo el criterio anterior, la n -úpla $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ se denomina *signatura* de g .

Lema 2.3.20. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de V y sea $\varepsilon_j = g(e_j, e_j)$. Entonces cada $v \in V$ se expresa como:

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

El siguiente resultado nos permite dar una caracterización del índice de V más operativa que la definición de índice.

Teorema 2.3.21. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de V . El número de -1 que aparecen en la signatura de g es el índice de V . En particular, este número no depende de la base elegida.

Corolario 2.3.22. Si $W \subset V$ es un subespacio no degenerado, considerando en W y $W^\perp$ la estructura de producto escalar inducida por g :

$$\text{ind}(V) = \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp).$$

Al considerar aplicaciones lineales entre espacios con producto escalar, es especialmente interesante estudiar aquellas que se comportan bien respecto a g .

Definición 2.3.23. Sean V, V' espacios vectoriales de dimensión finita con sendos productos escalares g, g' . Una aplicación lineal $\phi : V \rightarrow V'$ se dice que conserva el producto escalar si para todos $v, w \in V$:

$$g'(T(v), T(w)) = g(v, w).$$

Si además, T es un isomorfismo lineal, se dice que es una isometría lineal.

Nótese que, gracias a la no degeneración de g' , si T conserva el producto escalar, es inyectiva pues, si $T(v) = 0$, para todo $w \in V$ se tiene que $g(v, w) = g'(0, T(w)) = 0$, por lo que $v = 0$. Por tanto, si T es una aplicación lineal, es isometría si y solo si conserva el producto escalar y $\dim(V) = \dim(V')$.

También podemos concluir, haciendo uso de la identidad de polarización, que una aplicación lineal $T : V \rightarrow V'$ conserva el producto escalar si y solo para todo $v \in V$, siendo q, q' las formas cuadráticas asociadas a g y g' , respectivamente:

$$q'(T(v)) = q(v).$$

Proposición 2.3.24. Sean V, V' espacios vectoriales de dimensión finita con sendos productos escalares, g, g' . Entonces existe una isometría de V a V' si y solo si ambos tienen la misma dimensión y el mismo índice.

Finalmente, definimos un último tipo de aplicaciones de gran interés al trabajar en espacios euclídeos, las proyecciones ortogonales sobre subespacios no degenerados.

Definición 2.3.25. Sea $W \subset V$ un subespacio no degenerado. Se dice que $\pi : V \rightarrow V$ es una *proyección ortogonal sobre W* si y solo si $W^\perp$ está contenido en su núcleo y $\pi|_W = Id$.

Lema 2.3.26. Sea $W \subset V$ un subespacio no degenerado. Existe una única proyección ortogonal sobre W , π . Además, π cumple que $\text{Im}(\pi) = W$ y $\text{Ker}(\pi) = W^\perp$.

El siguiente resultado utiliza la descomposición en V como suma directa de un subespacio no degenerado y su perpendicular, para caracterizar la proyección ortogonal de un vector en términos de sus productos escalares con vectores del subespacio.

Lema 2.3.27. Sea $W \subset V$ un subespacio no degenerado y sea π su proyección ortogonal. Sean $v \in V$ y $w \in W$ tales que para todo $z \in W$, $g(v, z) = g(w, z)$. Entonces $\pi(v) = w$.

3. Derivaciones tensoriales y conexiones

3.1. Derivaciones tensoriales

Los vectores tangentes en geometría diferencial se introducen como una herramienta para poder generalizar el concepto de derivada direccional para funciones definidas sobre variedades diferenciables.

A raíz de este concepto, surgen de forma natural los campos de vectores y los campos tensoriales sobre las variedades diferenciables. Ahora bien, resulta natural querer comparar estos campos en distintos puntos de la variedad y analizar su variación en distintas direcciones. Para tal fin se introducen dos conceptos de vital importancia: las derivaciones tensoriales y las conexiones. Estas últimas se definen solo para campos de vectores, pero veremos que dan lugar a su vez a derivaciones tensoriales.

Presentamos a continuación un estudio detallado de estos conceptos siguiendo [17] y [11]. Ambos serán de vital importancia en las siguientes secciones del trabajo, especialmente el de conexión. En todo el capítulo M será una variedad diferenciable de dimensión n .

Definición 3.1.1. Una *derivación tensorial*, $\mathcal{D}$, sobre una variedad diferenciable M es un conjunto de funciones $\mathbb{R}$ -lineales (una para cada par de enteros $r, s \geq 0$)

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_s^r : \mathcal{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathcal{T}_s^r(M),$$

tales que para cualesquiera campos tensoriales A, B sobre M de tipo arbitrario:

1. Cumple la regla de Leibniz, $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}(A) \otimes B + A \otimes \mathcal{D}(B)$,
2. Para cualquier contracción, C , $\mathcal{D}(CA) = C\mathcal{D}(A)$.

Es decir, $\mathcal{D}$ es $\mathbb{R}$ -lineal, conserva el tipo tensorial, cumple un análogo a la regla de Leibniz y conmuta con las contracciones. La condición sobre la conmutación con las contracciones es necesaria, como se verá posteriormente, para poder establecer una generalización de la regla del producto.

En particular, considerando $\mathcal{D}_0^0 : \mathcal{T}_0^0(M) \longrightarrow \mathcal{T}_0^0(M)$ e identificando este conjunto de campos de tensores con $\mathcal{F}(M)$, dado que $\mathcal{D}_0^0$ es $\mathbb{R}$ -lineal y además

$$\mathcal{D}_0^0(fg) = f\mathcal{D}_0^0(g) + g\mathcal{D}_0^0(f), \quad \text{para todo } f, g \in \mathcal{F}(M),$$

es claro que $\mathcal{D}_0^0$ es una derivación en el sentido de la [Definición 2.1.38](#) y, por tanto, existe un único campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$\mathcal{D}_0^0(f) = Vf.$$

Esto en particular nos muestra que $\mathcal{D}$ no es en general una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -multilineal (salvo si $V = 0$), puesto que:

$$\mathcal{D}(fA) = \mathcal{D}(f)A + f\mathcal{D}(A), \quad \text{para todos } A \in \mathcal{T}_s^r(M), f \in \mathcal{F}(M).$$

Por tanto, dado un campo tensorial A sobre M , para cada $p \in M$, $\mathcal{D}(A)(p)$ no dependerá únicamente del valor de A en dicho punto. No obstante, la siguiente proposición nos permite comprobar que dicho valor depende solo de los valores del campo tensorial en un entorno de p , gracias a que $\mathcal{D}$ sí es $\mathbb{R}$ -lineal y a la regla de Leibniz.

Proposición 3.1.2. Si $\mathcal{D}$ es una derivación tensorial en una variedad diferenciable y U es un abierto de M , entonces existe una única derivación tensorial en U , $\mathcal{D}_U$, tal que

$$\mathcal{D}_U(A|_U) = \mathcal{D}(A)|_U,$$

para cada campo tensorial A sobre M . Esta se denomina restricción de $\mathcal{D}$ a U .

Demostración. Sea $B \in \mathcal{T}_s^r(U)$. Sean $p \in U$ y f una función meseta con soporte en U y con $f \equiv 1$ en un entorno de p . Así pues, tiene sentido considerar $fB \in \mathcal{T}_s^r(M)$ como un campo tensorial sobre M . Definimos:

$$(\mathcal{D}_U B)_p = \mathcal{D}(fB)_p$$

- Veamos que esta definición no depende de la elección de la función meseta f . Para ello comencemos viendo que si H es un campo de tensores en M que es idénticamente cero en un entorno U' de un punto $p \in M$, entonces $\mathcal{D}(H)_p = 0$. Consideremos una función meseta h con soporte en U' e idénticamente igual a 1 en un entorno de p . Entonces, $hH \equiv 0$ en M y, por tanto, $2hH = hH$ y, por ello

$$\mathcal{D}(hH) = \mathcal{D}(2hH) = 2\mathcal{D}(hH),$$

de donde se deduce, $\mathcal{D}(hH) = 0$. Así pues, usando la regla de Leibniz, como para cierto campo de vectores en M , V , $\mathcal{D}(h)_p = V(h)_p = 0$ pues h es constante en un entorno de p :

$$0 = \mathcal{D}(hH)_p = h(p)\mathcal{D}(H)_p = \mathcal{D}(H)_p.$$

Consideremos ahora otra función meseta g con soporte en U e idénticamente igual a 1 en un entorno de p . Entonces $f - g$ tiene soporte en U y es idénticamente nula en un entorno de p . Así pues, $(f - g)B$ es idénticamente nulo en un entorno de p y, usando la $\mathbb{R}$ -linealidad de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}(fB)_p - \mathcal{D}(gB)_p = \mathcal{D}((f - g)B)_p = 0.$$

- Veamos que $\mathcal{D}_U B$ es un campo tensorial diferenciable en U . Teniendo en cuenta que para cada $p \in U$, $\mathcal{D}(fB)_p \in T_s^r M_p$, es claro que $\mathcal{D}_U(B)$ es un campo tensorial. Veamos que es diferenciable. Sea $p \in U$, f como en la definición de $\mathcal{D}_U$ y U' entorno abierto de p en que f es constante e igual a 1. Entonces basta ver que, dadas $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-formas en U y $X_1, \dots, X_s$ campos de vectores en U , $\mathcal{D}_U(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$ es diferenciable en U' . Para ello, nótese que $f\theta^i$, $i = 1, \dots, r$ y fX_j , $j = 1, \dots, s$ son 1-formas y campos de vectores, respectivamente, definidos sobre M . Además, para cada $q \in U'$, se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_U(B)_q(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= \mathcal{D}(fB)_q(\theta_q^1, \dots, \theta_q^r, X_{1,q}, \dots, X_{s,q}) = \\ &= \mathcal{D}(fB)_q(f(q)\theta_q^1, \dots, f(q)\theta_q^r, f(q)X_{1,q}, \dots, f(q)X_{s,q}) = \mathcal{D}(fB)(f\theta^1, \dots, f\theta^r, fX_1, \dots, fX_s)(q) \end{aligned}$$

Así pues, hemos probado que en U' :

$$\mathcal{D}_U(B)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = \mathcal{D}(fB)(f\theta^1, \dots, f\theta^r, fX_1, \dots, fX_s)$$

Esta última es diferenciable en M , pues $\mathcal{D}(fB)$ es un campo tensorial diferenciable, y en particular lo es en U' , con lo que concluye la prueba.

- Veamos que $\mathcal{D}_U$ es una derivación tensorial en U . A partir de la definición de $\mathcal{D}_U$, trabajando punto a punto, es trivial comprobar que $\mathcal{D}_U$ es $\mathbb{R}$ -lineal. Veamos que se cumple la fórmula de Leibniz. Sean A, B campos de tensores en U y $p \in U$. Sea f una función meseta en las condiciones de la definición de $\mathcal{D}_U$. Entonces, f^2 también cumple dichas condiciones y, por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_U(A \otimes B)_p &= \mathcal{D}(f^2(A \otimes B))_p = \\ &= \mathcal{D}(fA)_p \otimes f(p)B(p) + f(p)A(p) \otimes \mathcal{D}(fB)_p = \mathcal{D}_U(A)_p \otimes B(p) + A(p)\mathcal{D}_U(B)_p, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha usado la regla de Leibniz para $\mathcal{D}$.

Finalmente, para ver que $\mathcal{D}_U$ conmuta con las contracciones de U , basta notar que estas son aplicaciones $\mathcal{F}(U)$ -lineales. Así pues, usando la notación de la definición de $\mathcal{D}_U$, siendo B un campo tensorial en U y C una contracción en U cualquiera:

$$\mathcal{D}_U(CB)_p = \mathcal{D}(fCB)_p = \mathcal{D}(C(fB))_p = C(\mathcal{D}(fB))_p = C(\mathcal{D}_U(B))_p,$$

donde se ha utilizado en la segunda igualdad que, mediante una carta local entorno a p contenida en U , es inmediato comprobar que C se puede identificar con una única contracción de M y por ello conmuta con $\mathcal{D}$.

- Veamos que $\mathcal{D}_U$ cumple la condición del enunciado. Sea A un campo tensorial en M y sea $p \in U$. Entonces, con la notación de la definición de $\mathcal{D}_U$, teniendo en cuenta que fA y A coinciden en un entorno de p , usando el mismo argumento que para el primer punto de la prueba, se tiene que:

$$\mathcal{D}_U(A)_p = \mathcal{D}(fA)_p = \mathcal{D}(A)_p = \mathcal{D}(A)|_U(p).$$

- Veamos que, de hecho, esta derivación es la única con dicha propiedad. Supongamos que existe otra derivación $\tilde{\mathcal{D}}_U$ en U cumpliendo la propiedad del enunciado. Sea B un campo tensorial en U , $p \in U$ y f una función meseta entorno a p con las propiedades de la definición de $\mathcal{D}_U$. Entonces, como B y $fB|_U$ son campos tensoriales sobre U que coinciden en un entorno de p y $\mathcal{D}_U$ y $\tilde{\mathcal{D}}_U$ son derivaciones tensoriales en U

$$\mathcal{D}_U(B)_p = \mathcal{D}_U(fB|_U)(p) = \mathcal{D}(fB)_p = \tilde{\mathcal{D}}_U(fB|_U)_p = \tilde{\mathcal{D}}_U(B)_p,$$

por lo que $\mathcal{D}_U = \tilde{\mathcal{D}}_U$.

Por tanto, se concluye que $\mathcal{D}$ es única. $\square$

El siguiente resultado nos permitirá conocer el resultado de aplicar una derivación tensorial a un campo tensorial cualquiera a partir de su actuación sobre funciones, campos de vectores y 1-formas, lo que será vital para su clasificación. Para poder establecer este resultado, es necesario utilizar que las derivaciones tensoriales conmutan con las contracciones, lo que justifica que se pida esta condición en la definición de las derivaciones tensoriales.

Proposición 3.1.3 (Regla del producto). Sea $\mathcal{D}$ una derivación tensorial en M . Si $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, entonces, para todos $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Lambda^1(M)$ y para todos $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) &= (\mathcal{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) + \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\theta^1, \dots, \mathcal{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) + \sum_{j=1}^s A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_j, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos por simplicidad de notación el caso $r = s = 1$, pues la prueba en el caso general es totalmente análoga. Sea pues A un campo tensorial $(1, 1)$ sobre M , $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \Lambda^1(M)$.

Comencemos notando que, tomando $C = C_2^1$ y $\tilde{C} = C_4^2$, se tiene que:

$$A(\theta, X) = C \circ \tilde{C}(A \otimes \theta \otimes X).$$

Para ello, basta considerar en torno a cada punto $p \in M$ una carta local. Si las componentes de A , θ y X en dicha carta local son A_j^i , θ_k y X^l , respectivamente, entonces las de $A \otimes \theta \otimes X$ son $A_j^i \theta_k X^l$ y, por ello, $C \circ \tilde{C}(A \otimes \theta \otimes X)$ es $\sum_{i,j} A_j^i \theta_i X^j$, con lo que comprobamos que coincide con la expresión de $A(\theta, X)$ cuando se calcula a través de dicha carta local.

Usando lo anterior, así como que las derivaciones tensoriales conmutan con las contracciones,

$$\mathcal{D}(A(\theta, X)) = \mathcal{D}(C \circ \tilde{C}(A \otimes \theta \otimes X)) = C \circ \tilde{C}\mathcal{D}(A \otimes \theta \otimes X) =$$

$$= C \circ \tilde{C}(\mathcal{D}(A) \otimes \theta \otimes X + A \otimes \mathcal{D}(\theta) \otimes X + A \otimes \theta \otimes \mathcal{D}(X)) = \mathcal{D}(A)(\theta, X) + A(\mathcal{D}(\theta), X) + A(\theta, \mathcal{D}(X)),$$

por lo que se concluye la demostración. $\square$

En particular, podemos utilizar el resultado anterior para conocer cómo actúa una derivación tensorial sobre 1-formas, a partir de su actuación sobre campos de vectores y funciones. Consideremos θ una 1-forma sobre M y X un campo de vectores sobre M . Entonces:

$$\mathcal{D}(\theta(X)) = \mathcal{D}(\theta)(X) + \theta(\mathcal{D}(X)).$$

Reordenando se obtiene que:

$$\mathcal{D}(\theta)(X) = \mathcal{D}(\theta(X)) - \theta(\mathcal{D}(X)).$$

Todo ello nos permite concluir el siguiente resultado de clasificación de las derivaciones tensoriales.

Corolario 3.1.4. Sean $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ dos derivaciones tensoriales sobre M que coinciden al actuar sobre $\mathcal{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$. Entonces $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, es decir, coinciden al actuar sobre cualquier campo tensorial.

Demostración. Basta notar que, por la observación previa, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ coincidirán al actuar sobre 1-formas y, por tanto, de acuerdo con la regla del producto, para todo campo tensorial (r, s) , A , sobre M y para todos $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-formas y $X_1, \dots, X_s$ campos de vectores, se tiene que:

$$\mathcal{D}_1 A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = \mathcal{D}_2 A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s).$$

Por tanto, $\mathcal{D}_1 A = \mathcal{D}_2 A$. □

De hecho el siguiente teorema muestra que dadas $\mathcal{D}_0^0$ y $\mathcal{D}_0^1$, compatibles con la definición de derivación tensorial, existe una derivación tensorial a la que pertenecen (que por el corolario anterior será única).

Teorema 3.1.5. Dados un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ y una función $\mathbb{R}$ -lineal $\delta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tales que

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X) \quad \text{para todos } f \in \mathcal{F}(M), X \in \mathfrak{X}(M),$$

existe una única derivación tensorial $\mathcal{D}$ en M tal que $\mathcal{D}_0^0 = V$ y $\mathcal{D}_0^1 = \delta$.

Demostración. Si existiera dicha derivación tensorial, $\mathcal{D}$, ya hemos comentado que, por el corolario previo, habría de ser única. Por hipótesis, $\mathcal{D}_0^0 = V$ y $\mathcal{D}_0^1 = \delta$. Además, habría de cumplirse la regla del producto. Así pues, habría de definirse $\mathcal{D}$ actuando sobre 1-formas, es decir, $\mathcal{D}_1^0$, como:

$$\mathcal{D}(\theta)(X) = \mathcal{D}(\theta(X)) - \theta(\mathcal{D}(X)) = V(\theta X) - \theta(\delta X) \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M)$$

Veamos que, con esta definición, $\mathcal{D}(\theta)(X)$ es una 1-forma sobre M . Por construcción, al actuar sobre cada campo de vectores da lugar a una aplicación diferenciable, por lo que basta con probar que $\mathcal{D}(\theta)$ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Entonces usando las propiedades de θ y V , la $\mathbb{R}$ -linealidad de δ y la compatibilidad entre δ y V :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\theta)(fX + gY) &= V(\theta(fX + gY)) - \theta(\delta(fX + gY)) = V(f\theta X + g\theta Y) - \theta(\delta(fX)) - \theta(\delta(gY)) = \\ &= V(f)\theta(X) + fV(\theta(X)) + V(g)\theta(Y) + gV(\theta(Y)) - V(f)\theta(X) - f\theta(\delta(X)) - V(g)\theta(Y) - \theta(\delta(Y)) = \\ &= f(V(\theta(X)) - \theta(\delta(X))) + g(V(\theta(Y)) - \theta(\delta(Y))). \end{aligned}$$

Veamos finalmente que $\mathcal{D}_1^0$ es $\mathbb{R}$ -lineal. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\theta, \omega \in \Lambda^1(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\lambda\theta + \mu\omega)(X) &= V((\lambda\theta + \mu\omega)X) - (\lambda\theta + \mu\omega)(\delta(X)) = \\ &= \lambda V(\theta X) + \mu V(\omega X) - \lambda\theta(\delta(X)) - \mu\omega(\delta(X)) = \lambda\mathcal{D}(\theta)(X) + \mu\mathcal{D}(\omega)(X). \end{aligned}$$

Para definir el resto de aplicaciones de la derivación tensorial basta recurrir a la regla del producto y definir $\mathcal{D}$ actuando sobre un campo tensorial (r, s) sobre M , A , como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) &= (\mathcal{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) + \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\theta^1, \dots, \mathcal{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) + \sum_{j=1}^s A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_j, \dots, X_s), \end{aligned}$$

para todos $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Lambda^1(M)$ y para todos $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$.

Veamos que estas aplicaciones están bien definidas. Como todas las funciones del miembro de la derecha son diferenciables, lo es el miembro de la derecha. Por tanto, basta ver de nuevo que $\mathcal{D}A$ es $\mathcal{F}(M)$ -multilineal, razonando de forma análoga a como se ha hecho para el caso de las 1-formas.

A partir de la $\mathbb{R}$ -linealidad de V , es claro que $\mathcal{D}$ es $\mathbb{R}$ -lineal. Veamos que se cumple la propiedad de Leibniz. De nuevo, para simplificar la notación, haremos la prueba para $A, B \in \mathcal{T}_1^1(M)$, pues el caso general se razona igual. Sean $\theta, \omega \in \Lambda^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A \otimes B)(\theta, \omega, X, Y) &= \\ &= V(A \otimes B(\theta, \omega, X, Y)) - A \otimes B(\mathcal{D}\theta, \omega, X, Y) - A \otimes B(\theta, \mathcal{D}\omega, X, Y) - A \otimes B(\theta, \omega, \delta X, Y) - A \otimes B(\theta, \omega, X, \delta Y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V(A(\theta, X)B(\omega, Y)) - A(\mathcal{D}\theta, X)B(\omega, Y) - A(\theta, X)B(\mathcal{D}\omega, Y) - A(\theta, \delta X)B(\omega, Y) - A(\theta, X)B(\omega, \delta Y) = \\
&= V(A(\theta, X))B(\omega, Y) - A(\mathcal{D}\theta, X)B(\omega, Y) - A(\theta, \delta X)B(\omega, Y) + \\
&\quad + A(\theta, X)V(B(\omega, Y) - A(\theta, X)B(\mathcal{D}\omega, Y) - A(\theta, X)B(\omega, \delta Y)) = \\
&= (\mathcal{D}A \otimes B)(\theta, \omega, X, Y) + (A \otimes \mathcal{D}B)(\theta, \omega, X, Y)
\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $\mathcal{D}$ conmuta con las contracciones, con lo que podremos concluir que, efectivamente, es una derivación tensorial. Comencemos considerando la contracción $C : \mathcal{T}_1^1(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$. Veamos que $\mathcal{D}$ conmuta con C cuando actúa sobre campos tensoriales de la forma $\theta \otimes X$ con θ una 1-forma y X campo vectorial:

$$\begin{aligned}
C(\mathcal{D}(\theta \otimes X)) &= C(\mathcal{D}(\theta) \otimes X + \theta \otimes \mathcal{D}(X)) = \mathcal{D}(\theta)(X) + \theta(\mathcal{D}(X)) = \\
&= V(\theta(X)) - \theta(\delta(X)) + \theta(\delta(X)) = V(\theta(X)) = \mathcal{D}(C(\theta \otimes X))
\end{aligned}$$

Por la $\mathbb{R}$ -linealidad de C y $\mathcal{D}$, ambas conmutan cuando actúan sobre combinaciones lineales de campos tensoriales de la forma $\theta \otimes X$. Además, usando las funciones meseta, de forma análoga a cómo se hizo en la prueba de la [Proposición 3.1.2](#), se concluye que δ actúa localmente, en el sentido de que si dos campos X, Y coinciden en un entorno de un punto p , $\delta(X)_p = \delta(Y)_p$. Como V también actúa localmente, es claro que, por la forma en que se ha definido $\mathcal{D}$, actúa localmente. Así pues, basta ver que C y $\mathcal{D}$ conmutan al restringirlos a abiertos suficientemente pequeños. Trabajando en un entorno asociado a una carta local, todo campo tensorial en dicho abierto de tipo $(1, 1)$ se puede expresar como suma de campos tensoriales de la forma $\theta \otimes X$. Así pues, se concluye que C y $\mathcal{D}$ conmutan en dicho entorno al actuar sobre todo tensor $(1, 1)$. Por tanto podemos concluir que C y $\mathcal{D}$ al restringirlos a dicho entorno conmutan y, como actúan localmente, conmutan siempre.

Para extender esta conmutatividad a órdenes mayores, basta utilizar la regla del producto. Lo probaremos para D_2^1 y la contracción $C = C_2^1$, pues el caso general es análogo, pero la notación se vuelve muy compleja. Sea $A \in T_2^1 M$ y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, teniendo en cuenta que $A(\cdot, X, \cdot)$ es un tensor de tipo $(1, 1)$ y $\mathcal{D}$ y C conmutan al actuar sobre estos tensores

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}(CA))(X) &= \mathcal{D}((CA)(X)) - (CA)(\mathcal{D}X) = \mathcal{D}(C(A(\cdot, X, \cdot))) - C(A(\cdot, \mathcal{D}X, \cdot)) = \\
&= C(\mathcal{D}(A(\cdot, X, \cdot))) - C(A(\cdot, \mathcal{D}X, \cdot)) = C(\mathcal{D}(A(\cdot, X, \cdot)) - A(\cdot, \mathcal{D}X, \cdot)) = C((\mathcal{D}A)(\cdot, X, \cdot)) = (C\mathcal{D}A)(X),
\end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración. $\square$

Cabe mencionar que una de las derivaciones tensoriales más relevantes es la producida por la derivada de Lie de los campos de vectores, introducida en la asignatura de *Geometría Diferencial* del Grado de Matemáticas, aunque en este trabajo nos centraremos en otro tipo de derivaciones tensoriales, las inducidas por conexiones y, en particular, la inducida por la conexión de Levi-Civita.

3.2. Conexiones lineales

Introducimos ahora el concepto de conexión lineal. Estas son aplicaciones que, de forma intuitiva, proporcionan una forma intrínseca, que no depende de la elección de cartas, de realizar derivadas direccionales de campos de vectores. Si bien se puede dar una definición de las mismas en el contexto más general de los fibrados vectoriales (ver [\[11\]](#)), nos centramos en el caso de las conexiones lineales definidas sobre el fibrado tangente, que, a partir de dos campos de vectores V, W sobre una variedad M , proporcionan un nuevo campo de vectores que da cuenta intuitivamente del cambio de W en la dirección de V .

Definición 3.2.1. Una *conexión lineal* ∇ en una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

que se denota por $\nabla(V, W) = \nabla_V W$ para $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, tal que:

1. Es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la primera componente.
2. Es $\mathbb{R}$ -lineal en la segunda componente.

3. Cumple la propiedad de Leibniz, es decir, para todos $f \in \mathcal{F}(M)$ y $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que:

$$\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W.$$

En estas condiciones, se dice que $\nabla_V W$ es la derivada covariante de W respecto de V para la conexión ∇ .

Dados una conexión lineal ∇ sobre M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, denotaremos por ∇_V a la aplicación de $\mathfrak{X}(M)$ en sí mismo dada por que a cada $W \in \mathfrak{X}(M)$ lo manda en $\nabla_V W$.

Sobre una misma variedad es posible definir varias conexiones distintas. En el siguiente capítulo nos centraremos en un tipo de conexiones especiales, las de Levi-Civita, que son vitales en el desarrollo de la geometría semi-Riemanniana. Siempre que no se especifique lo contrario, supondremos trabajar en una variedad diferenciable M en que se ha definido una conexión lineal, que denotaremos por ∇ .

Los siguientes resultados nos permiten asegurar que, si bien las conexiones se definen actuando sobre secciones globales del fibrado tangente (campos de vectores sobre M), estas actúan localmente, es decir, el resultado de aplicar la conexión a campos de vectores que coincidan en un entorno de un punto $p \in M$ es el mismo en dicho punto, por lo que se puede calcular su valor trabajando, por ejemplo en un entorno asociado a una carta local que contenga a p . Todo ello es gracias a la $\mathbb{R}$ -linealidad en cada componente de las conexiones combinada con la regla de Leibniz.

Proposición 3.2.2 (Lema de Localización). Sea $p \in M$. Si $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ son campos de vectores tales que $X = \tilde{X}$ e $Y = \tilde{Y}$ en un entorno de p , entonces $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p = \nabla_X Y|_p$.

Demostración. Veamos en primer lugar que, si Y se anula en un entorno, U , de p , entonces $\nabla_X Y|_p = 0$ para todo campo de vectores X en M . Para ello, consideremos una función meseta $f \in \mathcal{F}(M)$ con soporte contenido en U y con $f(p) = 1$. Por hipótesis, $fY = 0$ en M y, por tanto, por la $\mathbb{R}$ -linealidad de la segunda componente de ∇ ,

$$\nabla_X(fY) = \nabla_X(0 \cdot fY) = 0 \nabla_X(fY) = 0$$

en M . Así pues, usando la regla de Leibniz:

$$0 = \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X(Y).$$

Evaluando en p , como $f(p) = 1$ y $Y_p = 0$, se tiene que $\nabla_X Y|_p = 0$.

Por tanto, si $Y, \tilde{Y}$ coinciden en un entorno U de p , $Y - \tilde{Y}$ se anulará en dicho entorno y, por tanto, $\nabla_X(Y - \tilde{Y})|_p = 0$. Haciendo uso de la $\mathbb{R}$ -linealidad en la segunda componente de ∇ , se tiene que $\nabla_X Y|_p = \nabla_X \tilde{Y}|_p$.

Supongamos ahora que $X = 0$ en un entorno U de p y veamos que para todo campo de vectores Y en M $\nabla_X Y|_p = 0$. Para ello consideremos de nuevo una función meseta $f \in \mathcal{F}(M)$ como antes, con lo que $fX = 0$ en M . Así pues, $\nabla_{fX} Y = \nabla_{0 \dots fX} Y = 0 \nabla_{fX} Y = 0$, por la $\mathbb{R}$ -linealidad en la primera componente. Por tanto, usando la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad en la primera componente

$$0 = \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y,$$

y, evaluando en p se tiene el resultado. Así pues, como si X y $\tilde{X}$ coinciden en un entorno de p , su resta se anula en dicho entorno, $\nabla_{X-\tilde{X}} Y|_p = 0$ y por ello, utilizando la linealidad en la primera componente, $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} Y|_p$. Uniendo los dos resultados probados, se concluye la afirmación del enunciado. $\square$

Proposición 3.2.3. Sea p un punto de M . Si $X, Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y se cumple que $X_p = Z_p$, entonces se cumple que $\nabla_X Y|_p = \nabla_Z Y|_p$.

Demostración. Veamos en primer lugar que si $X_p = 0$, entonces $\nabla_X Y|_p = 0$.

Consideremos una carta local (U, ϕ) entorno a p y sea $\frac{\partial}{\partial \phi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi^n}$ la referencia de campos asociada. Consideremos una función meseta $f \in \mathcal{F}(M)$ con soporte en U y con $f = 1$ en un entorno de p . El campo de vectores X tiene una expresión en U de la forma:

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial \phi^i}.$$

Como el soporte de f está contenido en U , se puede considerar $fX^i \in \mathcal{F}(M)$. Por el mismo motivo se pueden definir $f \frac{\partial}{\partial \phi^i}$ como campos de vectores sobre M . Así pues, usando la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de la primera componente de ∇ :

$$f^2 \nabla_X Y = \nabla_{\sum_i f X^i f \frac{\partial}{\partial \phi^i}} Y = \sum_i f X^i \nabla_{f \frac{\partial}{\partial \phi^i}} Y.$$

Evaluando en p , usando que $X_p = 0$ implica $X^i(p) = 0$ para todo i

$$\nabla_X Y|_p = f^2(p) \nabla_X Y|_p = \sum_i 0 \cdot \nabla_{f \frac{\partial}{\partial \phi^i}} Y|_p = 0$$

Usando la linealidad de la primera componente y que si $X_p = \tilde{X}_p$ entonces $(X - \tilde{X})_p = 0$, se concluye el resultado. $\square$

Este último resultado permite comprobar que, en la primera componente, las conexiones actúan punto a punto, gracias a que son $\mathcal{F}(M)$ -lineales en dicha componente. Por tanto, concluimos que se pueden definir, alternativamente, las conexiones como aplicaciones $\nabla : TM \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tales que son $\mathbb{R}$ -lineales en cada componente y cumplen la regla de Leibniz.

A continuación estudiaremos cómo representar localmente estas conexiones y poder trabajar con ellas. Si bien trabajaremos con una referencia de campos de vectores genéricos $\{E_1, \dots, E_n\}$ en un abierto U de una variedad diferenciable M , estos resultados se utilizan, principalmente, en el caso en que esta referencia es la asociada a una carta local.

Definición 3.2.4. Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ una referencia local en un abierto U de M . Se definen los *símbolos de Christoffel* Γ_{ij}^k como las funciones definidas en U por:

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Estas funciones determinan totalmente la acción de la conexión en el abierto U , como prueba el siguiente lema:

Lema 3.2.5. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dados en una referencia local en $U \subset M$ abierto, $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$, por $X = \sum_i X^i E_i$ e $Y = \sum_i Y^i E_i$. Entonces en U se cumple:

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k. \quad (3.1)$$

Demostración. Usando los resultados anteriores, basta trabajar en U para hallar $\nabla_X Y$. Usando la expresión de X e Y en dicho abierto, así como la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de la primera componente y la linealidad de la segunda

$$\nabla_X Y = \sum_i X^i \nabla_{E_i} Y = \sum_{i,j} X^i \nabla_{E_i} (Y^j E_j) = \sum_{i,j} (X^i E_i(Y^j) E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j),$$

donde se ha hecho uso de la regla de Leibniz en la tercera igualdad.

Sumando el primer término en i y renombrando el índice j de dicho término como k y usando la definición de los símbolos de Christoffel en el segundo término se llega a que:

$$\nabla_X Y = \sum_k (X(Y^k) E_k) + \sum_{i,j} \left(X^i Y^j \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k \right) = \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k,$$

con lo que se concluye la prueba. $\square$

Una vez estudiadas las propiedades básicas de las conexiones lineales, cabe preguntarse bajo qué condiciones se puede asegurar que estas existan. El primero de los resultados siguientes nos da una caracterización de todas las conexiones lineales posibles en variedades recubiertas por una sola carta y, en particular, de la expresión de una conexión lineal en un abierto coordinado. El segundo, utilizando razonamientos basados en particiones de la unidad, similares a los empleados a lo largo de la asignatura de *Geometría Diferencial* del Grado en Matemáticas, demuestra que siempre existen conexiones lineales definidas sobre una variedad cualquiera.

Lema 3.2.6. Supongamos que M está recubierta por una única carta global (M, φ) y sea $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\}_{i=1, \dots, n}$ la referencia de campos de vectores asociada a dicha carta. Entonces la aplicación del conjunto de conexiones lineales sobre M en $\mathcal{F}(M)^{n^3}$ que a cada conexión lineal le asigna las n^3 funciones dadas por los símbolos de Christoffel, respecto a la referencia de campos asociada a la carta global (M, φ) , es una biyección.

Demostración. En primer lugar, gracias al lema previo, es claro que esta aplicación es inyectiva, pues al existir una carta global, la conexión lineal está totalmente determinada por sus símbolos de Christoffel en dicha carta.

Veamos que es sobreyectiva. Consideremos n^3 funciones diferenciables sobre M , Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, \dots, n$. Definamos para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dados por $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$:

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}.$$

En primer lugar, es claro que las funciones entre paréntesis son diferenciables, con lo que $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ está bien definido. Veamos que cumple las tres propiedades de las conexiones lineales.

Consideremos $Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Entonces, $fX + gZ = \sum_i (fX^i + gZ^i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, con lo que:

$$\begin{aligned} \nabla_{fX+gZ} Y &= \sum_k \left((fX + gZ)(Y^k) + \sum_{i,j} (fX^i + gZ^i) Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \\ &= f \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} + g \sum_k \left(Z(Y^k) + \sum_{i,j} Z^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = f \nabla_X Y + g \nabla_Z Y. \end{aligned}$$

La $\mathbb{R}$ -linealidad de la segunda componente se razona de forma totalmente análoga, usando la linealidad de X . Veamos que se cumple la regla de Leibniz. Para ello, nótese que $fY = \sum_i fY^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, con lo que:

$$\begin{aligned} \nabla_X (fY) &= \sum_k \left(X(fY^k) + \sum_{i,j} X^i fY^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \sum_k \left(fX(Y^k) + Y^k X(f) + f \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \\ &= X(f) \sum_k Y^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k} + f \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = X(f)Y + f \nabla_X Y. \end{aligned}$$

Así pues ∇ es una conexión lineal cuyos coeficientes de Christoffel asociados a esta carta global son precisamente las n^3 funciones Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, \dots, n$, por lo que la aplicación definida es efectivamente una biyección. $\square$

Teorema 3.2.7. Existe una conexión lineal sobre toda variedad diferenciable, M .

Demostración. Consideremos un recubrimiento de M mediante cartas locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. El lema previo garantiza que en cada U_α existe una conexión lineal ∇^α .

Consideremos una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ subordinada al recubrimiento abierto de M $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Gracias a que los soportes de las particiones de la unidad son localmente finitos, podemos definir para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha \in \Lambda} \nabla_X^\alpha Y,$$

y da lugar a un campo vectorial $\mathcal{C}^\infty$. Además, es inmediato al estar definido en un entorno de cada punto como una suma finita de conexiones lineales, que ∇ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la primera componente y $\mathbb{R}$ -lineal en la segunda. Veamos que también cumple la regla de Leibniz. Sea $g \in \mathcal{F}(M)$. Por cálculo directo, usando la regla de Leibniz de cada conexión lineal:

$$\nabla_X (fY) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \nabla_X^\alpha (gY) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha (X(g)Y + g \nabla_X^\alpha Y) = X(g)Y \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha + g \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \nabla_X^\alpha Y = X(g)Y + g \nabla_X Y,$$

con lo que se concluye que ∇ es una conexión lineal en M . $\square$

Gracias a la caracterización de las derivaciones tensoriales a partir de su actuación sobre campos de vectores y funciones diferenciables (ver [Teorema 3.1.5](#)), se puede establecer una relación entre estas y las conexiones lineales, como establece el siguiente resultado.

Teorema 3.2.8. Dada una conexión lineal ∇ en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, existe una única derivación tensorial $\mathcal{D}_V$ tal que $\mathcal{D}_{V,0}^0 = V$ y $\mathcal{D}_{V,0}^1(X) = \nabla_V X$.

Demostración. Basta tener en cuenta que la aplicación $\nabla_V : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que manda $X \in \mathfrak{X}(M)$ en $\nabla_V(X)$ es $\mathbb{R}$ -lineal y además se cumple que para toda $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$\nabla_V(fX) = V(f)X + f\nabla_V(X).$$

Utilizamos el [Teorema 3.1.5](#) para concluir. $\square$

Gracias a la unicidad proporcionada por el teorema anterior y a la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad respecto de la primera componente de las conexiones lineales, es claro que para todos campos de vectores V, W y para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$, se cumple que $\mathcal{D}_{fV+gW} = f\mathcal{D}_V + g\mathcal{D}_W$.

El teorema previo permite definir el concepto de variación de los campos de tensores sobre M en la dirección dada por V asociada a cada conexión lineal. Además, gracias al siguiente lema, podremos definir un nuevo concepto, la diferencial covariante de un tensor, en que se recojan todas las variaciones direccionales de un tensor, de forma análoga a como la matriz jacobiana recoge todas las posibles derivadas direccionales de una función vectorial de varias variables. Al igual que ocurre en dicho caso, resulta razonable que el orden del tensor tenga que crecer.

Lema 3.2.9. Si ∇ es una conexión lineal sobre M , $\mathcal{D}$ su derivación tensorial asociada y $A \in \mathcal{T}_r^s(M)$, entonces la aplicación $\nabla A : \Lambda^1(M) \times \dots \times \Lambda^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ dada por

$$\mathcal{D}A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) = (\mathcal{D}_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s),$$

para cada $V, X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ y 1-formas en M $\theta^1, \dots, \theta^r$, define un campo tensorial de tipo $(r, s+1)$ sobre M que se denomina diferencial covariante de A respecto de ∇ .

Demostración. De acuerdo con el [Teorema 2.2.8](#), basta comprobar que $\mathcal{D}A$ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en cada una de sus componentes. Para las $r+s$ primeras componentes, basta utilizar que, para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{D}_V A$ es un campo tensorial de tipo (r, s) y por ello es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en cada componente. Además, como $\mathcal{D}_{fV+gW} = f\mathcal{D}_V + g\mathcal{D}_W$ para todos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ y para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$ de acuerdo con lo razonado previamente, esta aplicación también es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la última componente. $\square$

Es destacable, pues será de utilidad más adelante, que la diferencial covariante de un tensor y cualquier contracción C conmutan. Para verlo, basta tomar, para simplificar la notación, $C = C_1^1$ y $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ cualquiera y $\theta^2, \dots, \theta^r \in \Lambda^1(M)$, $X_2, \dots, X_s, V \in \mathfrak{X}(M)$ y hallar:

$$\begin{aligned} D(CA)(\theta^2, \dots, \theta^r, X_2, \dots, X_s, V) &= D_V(CA)(\theta^2, \dots, \theta^r, X_2, \dots, X_s) = C(D_V A)(\theta^2, \dots, \theta^r, X_2, \dots, X_s) = \\ &= C(D_V A)(\cdot, \theta^2, \dots, \theta^r, \cdot, X_2, \dots, X_s) = C(DA)(\cdot, \theta^2, \dots, \theta^r, \cdot, X_2, \dots, X_s, V) = \\ &= C(DA)(\theta^2, \dots, \theta^r, X_2, \dots, X_s, V). \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $D(CA) = C(DA)$.

Nótese además que, si $f \in \mathcal{F}(M)$ es una función, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $(Df)(X) = D_X(f) = X(f) = df(X)$, con lo que se puede concluir que $Df = df$.

Definición 3.2.10. En las condiciones anteriores, se dice que un campo tensorial A es *paralelo respecto a* ∇ si su diferencial covariante es nula.

Estas definiciones permiten generalizar, en cierto sentido, el concepto de paralelismo entre vectores en diferentes puntos de $\mathbb{R}^n$ al caso de campos tensoriales más generales. En el siguiente ejemplo introducimos una conexión lineal sobre $\mathbb{R}^n$, que en los siguientes capítulos veremos que tiene propiedades especialmente buenas en relación con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, para la cual comprobamos cómo los campos de vectores paralelos son efectivamente aquellos tales que los vectores tangentes en cada punto asociados al campo de vectores son paralelos entre sí y de igual longitud (tras la identificación de $T_p\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$).

Ejemplo 3.2.11. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ las coordenadas naturales $x^1, \dots, x^n$ y sean $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ los campos de vectores asociados. Consideramos la conexión lineal ∇ en $\mathbb{R}^n$ dada por la anulación de todos los símbolos de Christoffel asociados a esta carta global. Así pues, dados $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $W = \sum_i W^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que:

$$\nabla_V W = \sum_i V(W^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Esta se conoce como conexión lineal natural en $\mathbb{R}^n$. Nótese que W es paralelo si y solo si para todo campo de vectores sobre $\mathbb{R}^n$, V , y para todo i , $V(W^i) = 0$, si y solo si W^i es constante para todo $i = 1, \dots, n$. Así pues comprobamos que, tras la identificación de los espacios tangentes con $\mathbb{R}^n$, W es paralelo si y solo si en cada punto de $\mathbb{R}^n$ da lugar al “mismo” vector tangente.

Nótese que, usando esta misma identificación se puede considerar a W como una función de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo y la diferencial covariante respecto de ∇ se identificaría con su matriz jacobiana y $\nabla_V W$ con la derivada direccional de W en la dirección determinada por V .

3.3. Derivada covariante a lo largo de curvas

Nos centramos ahora en estudiar cómo entender la derivada de un campo de vectores a lo largo de una curva diferencial definida sobre una variedad a partir de una conexión lineal dada. Para ello, haremos uso del concepto de campo de vectores sobre una curva, que particulariza el de campo de vectores sobre una aplicación diferenciable.

A lo largo de toda la sección, M será una variedad diferenciable de dimensión n y ∇ una conexión lineal sobre M . Además, I será un abierto convexo de $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo abierto, una semirrecta abierta o $\mathbb{R}$, y $\alpha : I \rightarrow M$ una curva.

Teorema 3.3.1. Existe una única aplicación $D_t : \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$ (ver [Definición 2.1.49](#)) tal que:

1. Es $\mathbb{R}$ -lineal, es decir, $(\lambda Z_1 + \mu Z_2)' = \lambda Z_1' + \mu Z_2'$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todos $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$.
2. Cumple la regla del producto, es decir, $(hZ)' = \frac{dh}{dt}Z + hZ'$ para toda $h \in \mathcal{F}(I)$.
3. Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, siendo $V_\alpha = V \circ \alpha \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se cumple que $V_\alpha' = \nabla_{\alpha'} V$.

donde, para cada $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, $D_t(Z) = Z'$ se denomina derivada covariante de Z a lo largo de α (inducida por ∇).

Demostración. Supongamos que existe una aplicación D_t cumpliendo dichas condiciones. Comencemos viendo que actúa localmente. Es decir, dado $a \in I$ y un entorno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = J \subset I$, veamos que si $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ coinciden en J , entonces $V'(a) = W'(a)$.

Consideremos $f \in \mathcal{F}(I)$ una función meseta con $f(a) = 1$ y soporte contenido en J . Entonces, siendo $Z = V - W$, Z se anula en J y, por ello, fZ es idénticamente nulo en I . Usando la linealidad de D_t :

$$D_t(fZ) = D_t(0 \cdot fZ) = 0D_t(fZ) = 0.$$

Por otro lado, usando la propiedad 2. de D_t

$$0 = D_t(fZ) = \frac{df}{dt}Z + fZ',$$

con lo que, evaluando en a :

$$Z'(a) = 0,$$

y, por la linealidad de D_t , se tiene que $V'(a) = W'(a)$.

Consideremos ahora J intervalo en torno a a suficientemente pequeño para que $\alpha(J)$ esté contenido en un entorno coordenado de M , U . Sea φ la correspondiente carta local y sea $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}$ la referencia de campos de vectores asociada a la carta. En dicho entorno coordenado:

$$V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

Recordemos que $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ se puede extender a todo M (ver [Proposición 2.1.40](#)) de forma que se puede definir $W = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ de forma que coincida con V en un entorno de a (tal vez menor que J). Así pues, $V'(a) = W'(a)$, con lo que podemos calcular $V'(a)$ trabajando en la carta local. En adelante diremos que se calcula V' de forma local sin hacer referencia a las extensiones.

Usando las propiedades de D_t , así como que $\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \in \mathfrak{X}(M)$, en J :

$$\begin{aligned} V' &= \sum_i (V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i})' = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + V^i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)' \right) = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + V^i \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \\ &= \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} V^i (\alpha')^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por tanto, concluimos que, si existe D_t , su expresión está determinada de forma única por ∇ (por medio de sus coeficientes de Christoffel) y por ello es única.

Veamos ahora que D_t existe. Para ello comencemos suponiendo que $\alpha(I)$ está contenido en un único entorno coordenado U con carta local φ . Definamos V' por la expresión deducida durante la prueba de la unicidad. D_t así definida cumple las condiciones del enunciado.

En primer lugar, dados $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, siguiendo la notación habitual, $(\lambda Z_1 + \mu Z_2)^k = \lambda Z_1^k + \mu Z_2^k$, con lo que utilizando la linealidad de la derivada es inmediato que D_t es lineal.

Sean ahora $Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $h \in \mathcal{F}(I)$. Entonces, como $(hZ)^k = hZ^k$:

$$(hZ)' = \sum_k \left(\frac{dhZ^k}{dt} + \sum_{i,j} hZ^i (\alpha')^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \sum_k \left(Z^k \frac{dh}{dt} + h \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} hZ^i (\alpha')^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}.$$

Sumando los primeros términos del paréntesis por separado se concluye que :

$$(hZ)' = \frac{dh}{dt} \sum_k Z^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k} + h \sum_k \left(\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} Z^i (\alpha')^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \frac{dh}{dt} Z + hZ'.$$

Finalmente, dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que $V_\alpha^k = V^k \circ \alpha$ y, por ello, $\frac{dV_\alpha^k}{dt} = \frac{dV^k \circ \alpha}{dt} = \alpha'(V^k) \circ \alpha$. Por tanto:

$$V'_\alpha = \sum_k \left(\frac{dV_\alpha^k}{dt} + \sum_{i,j} V_\alpha^i (\alpha')^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \left(\sum_k \left(\alpha'(V^k) + \sum_{i,j} V^i (\alpha')^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) \circ \alpha.$$

Además, por la unicidad probada al inicio, esta definición no depende de la carta escogida que cubra $\alpha(I)$.

Consideremos ahora el caso general. Sea $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Dado $a \in I$, existe un intervalo abierto en torno de a , $J \subset I$, tal que $\alpha(J)$ está contenido en un abierto coordenado. Definimos $Z'(a) = (Z|_J)'(a)$, esta última bien definida puesto que $\alpha|_J(J)$ está cubierto por una sola carta. Veamos que esta definición no depende del intervalo abierto J escogido. Si se hubiera elegido otro, J' , entonces $J \cap J'$ sería un nuevo intervalo abierto en torno a a . Por tanto, $(Z|_{J \cap J'})'$ estaría definida de forma única (nótese que $\alpha(J \cap J')$ estará contenida en un abierto coordenado) y, por tanto, ha de coincidir tanto con $(Z|_J)'|_{J \cap J'}$ como con $(Z|_{J'})'|_{J \cap J'}$. Esto último se debe a que ambas restricciones de la aplicación D_t definen una aplicación sobre $\mathfrak{X}(\alpha|_{J \cap J'})$ cumpliendo las condiciones del enunciado. $\square$

El siguiente lema asegura que se pueden extender los campos de vectores sobre una curva $\alpha : I \rightarrow M$ localmente a campos de vectores en M . Además, permite relacionar la derivada covariante del campo a lo largo de α con la actuación de la conexión de M sobre la extensión.

Lema 3.3.2. Sea $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Si $s_0 \in I$ y $\alpha'(s_0) \neq 0$, existe un campo de vectores $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(U)$ definido en un abierto U de M con $\alpha(s_0) \in U$ tal que para todo s en un entorno de s_0 , J , $\tilde{Z}_{\alpha(s)} = Z(s)$. En particular, α es, localmente, una curva integral. Además, para todo $s \in J$, $Z'(s) = \nabla_{\alpha'(s)} \tilde{Z}(\alpha(s))$. Además, si α es curva integral de un campo de vectores X , para toda $f \in \mathcal{F}(M)$, $Xf \circ \alpha = \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}$.

Demostración. Comencemos notando que α es en particular una aplicación de la 1-variedad diferenciable I en M . Como $d\alpha(s_0) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{s_0} = \alpha'(s_0) \neq 0$, entonces, $d\alpha(s_0)$ es inyectiva (pues manda una base de $T_{s_0}I$ en un conjunto independiente). Así pues, combinando el Teorema 2.1.27 y la Proposición 2.1.76, concluimos que existen un entorno J de s_0 en I y una carta (U, φ) de M tal que $\alpha(J)$ es una rodaja de (U, φ) . En particular, se tiene que $\alpha|_J$ es un difeomorfismo en su imagen y que $\alpha(J) \cap U = \alpha(J)$. Así pues, siendo $\varphi(\alpha(s_0)) = (x^1, \dots, x^n)$, se tiene que dado $p \in U$, $p \in \alpha(J)$ si y solo si $\varphi^i(p) = x^i$, $i = 2, \dots, n$.

Veamos pues que $h = \varphi^1 \circ \alpha : J \rightarrow \varphi^1(\alpha(J))$ es un difeomorfismo. Para ello, basta notar que, por definición de carta local adaptada, $\varphi^1 : \alpha(J) \rightarrow \varphi(\alpha(J))$ es difeomorfismo. Por tanto, h es composición de difeomorfismos y, por ello, difeomorfismo.

Expresando en J

$$Z(t) = \sum_i Z^i(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(t)},$$

y definimos $\tilde{Z}^i(p) = Z^i(h^{-1}(\varphi^1(p)))$. Como h es difeomorfismo, es claro que $\tilde{Z}^i \in \mathcal{F}(U)$ para todo $i = 1, \dots, n$, por ser composición de funciones diferenciables. Además, es inmediato comprobar que $\tilde{Z}^i(\alpha(t)) = Z^i(t)$. Por tanto, el campo de vectores

$$\tilde{Z} = \sum_i \tilde{Z}^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i},$$

definido en U , cumple las condiciones del enunciado. Además, utilizando (3.2), para cada $s \in J$:

$$Z'(s) = \sum_i \frac{dZ^i}{ds}(s) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(s)} + \sum_i Z^i(s) \nabla_{\alpha'(s)} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}(\alpha(s)).$$

Y, por otro lado:

$$\nabla_{\alpha'(s)} \tilde{Z}(\alpha(s)) = \nabla_{\alpha'(s)} \left(\sum_i \tilde{Z}^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) (\alpha(s)) = \sum_i \alpha'(s) \tilde{Z}^i(\alpha(s)) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(s)} + \sum_i \tilde{Z}^i(\alpha(s)) \nabla_{\alpha'(s)} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}(\alpha(s)).$$

Teniendo en cuenta que $\alpha'(s)(\tilde{Z}^i)(\alpha(s)) = \frac{d(\tilde{Z}^i \circ \alpha)}{ds}(s)$, se concluye la igualdad buscada.

Finalmente, nótese que, si α es una curva integral de X

$$X(f) \circ \alpha = \alpha'(f) \circ \alpha = d\alpha \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) (f) \circ \alpha = \frac{d(f \circ \alpha)}{ds},$$

con lo que se comprueba la última de las afirmaciones del enunciado. $\square$

Esta manera de derivar nos lleva a definir el campo aceleración de una curva, lo que nos permitirá determinar más adelante qué curvas “son las más rectas” en el sentido determinado por una conexión lineal. Para ello será también necesario el concepto de campo de vectores sobre una curva paralelo, análogo a la definición ya dada para campos de vectores sobre M , dada la conexión ∇ .

Definición 3.3.3. La derivada covariante a lo largo de α inducida por ∇ del campo velocidad de la curva, $\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se denomina *aceleración de la curva* y se denota por α'' .

Definición 3.3.4. Se dice que $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es *paralelo* si su derivada covariante a lo largo de α inducida por ∇ es nula.

Buscamos ahora una forma de aprovecharnos de la noción de paralelismo entre vectores tangentes sobre una curva, introducida por medio de los campos de vectores paralelos, para poder trasladar vectores tangentes a lo largo de la curva “sin deformarlos”, lo que nos permitirá dar una caracterización de la derivada covariante a lo largo de una curva muy parecida a la habitual en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.3.5. Sean $a \in I$ y $z \in T_{\alpha(a)}M$. Existe un único campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo y tal que $Z(a) = z$, el cual se llama el transportado paralelo de z a lo largo de α .

Demostración. Comencemos probando el resultado en el caso en que $\alpha(I)$ está contenido en un abierto coordenado, U , y sea $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ la carta local asociada. Podemos expresar:

$$z = \sum_k z^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \Big|_{\alpha(a)}.$$

De acuerdo con (3.2), un campo de vectores $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, dado por $Z = \sum_k Z^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$, será paralelo si y solo si, para cada $k = 1, \dots, n$, se cumple que:

$$\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} Z^i \alpha'^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Como además, $Z(a) = z$ si y solo si $Z^k(a) = z^k$, entonces, Z cumplirá las condiciones buscadas si y solo si es solución del siguiente problema de valor inicial de Cauchy:

$$\frac{dZ^k}{dt}(t) = - \sum_{i,j} Z^i(t) \alpha'^j(t) \Gamma_{ij}^k(t), \quad t \in I; \quad Z^k(a) = z^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Al tratarse de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) lineales, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ODEs nos permite concluir que existe una única solución de dicho problema definida en todo I y, por tanto, un único campo de vectores sobre α con las condiciones pedidas.

Supongamos ahora que $\alpha(I)$ no está cubierta por una única carta local. Utilizaremos un argumento de maximalidad de la definición de los campos paralelos, similar a los que más tarde se utilizarán para geodésicas.

Construimos un campo de vectores, Z en las condiciones del enunciado punto a punto. Para cada $b \in I$ (suponemos $b > a$ por simplificar la notación pero igual se razonaría en el otro caso) como $[a, b]$ es compacto, existen $I_1, \dots, I_m$ intervalos abiertos con $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$ y $\alpha(I_i)$ contenido en un abierto coordenado, $i = 1, \dots, m$. Además, reordenando si es necesario, podemos considerar que $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, m-1$, $a \in I_1$ y, haciendo intersecciones si es necesario, que $I_i \cap I_{i+2} = \emptyset$ e $I_i \subset (a-1, b+1)$ $i = 1, \dots, m$. Sea pues $a_i \in I_i \cap I_{i+1}$. Por lo probado al inicio existe un único campo de vectores paralelo Z_1 en I_1 con $Z_1(a) = z$. Sea $Z_1(a_1) = z_1$. Construido Z_i campo paralelo en I_i con $Z(a_i) = z_i$, construimos Z_{i+1} como el único campo de vectores paralelo en I_{i+1} con $Z_{i+1}(a_i) = z_i$ y definimos $Z_{i+1}(a_{i+1}) = z_{i+1}$. Razonando por inducción finita construimos Z_i para cada $i = 1, \dots, m$. Definimos $Z(b) = Z_m(b)$. Como esta misma construcción es válida para todos los puntos de un abierto en torno a b y Z_m es diferenciable, es claro que Z es diferenciable. Además, como la derivada covariante a lo largo de α se puede calcular localmente y, en I_m , Z coincide con Z_m por construcción $Z'(b) = 0$, con lo que Z es paralelo. Nótese además que Z_i y Z_{i+1} coinciden al restringirlos a $I_i \cap I_{i+1}$ pues son dos campos de vectores paralelos que coinciden en a_i y están definidos en un intervalo cuya imagen está contenida en un

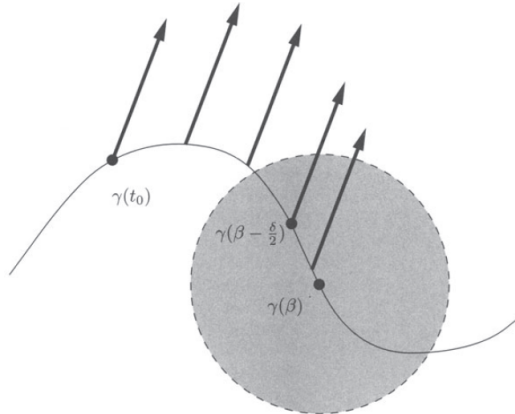


Figura 4: Esquema de la demostración de la existencia y unicidad del campo transportado paralelo. Fuente: J.M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds* [11].

único abierto coordinado.

Veamos que el valor de $Z(b)$ está bien definido. Supongamos que se escogen otros intervalos abiertos $J_1, \dots, J_r$ (ordenados como antes) y otros puntos en los mismos $b_1, \dots, b_r$, en las mismas condiciones. Sean X_j los campos de vectores paralelos contruidos en este caso. Veamos que Z_1 coincide con X_j al restringirlos a $I_1 \cap J_j$ (posiblemente vacía) por inducción en j . Denotemos $I_i = (c_i, d_i)$ y sean $J_i = (e_i, f_i)$.

Como al restringir X_1 y Z_1 a $I_1 \cap J_1$, son campos de vectores paralelos que coinciden en a y $\alpha(I_1 \cap J_1)$ está contenido en un abierto coordinado, ambos coinciden en $I_1 \cap J_1$. Si X_j y Z_1 coinciden en $I_1 \cap J_j$, entonces consideramos dos posibilidades, teniendo en cuenta que $e_j < f_{j-1} < e_{j+1} < f_j$:

- Si $d_1 < e_{j+1}$, entonces $I_1 \cap I_{j+1} = \emptyset$ y no hay nada que probar.
- Si $e_{j+1} \leq d_1$, entonces existe $a_0 \in I_0 = I_1 \cap J_j \cap J_{j+1}$ y como Z_1 y X_j coinciden en este intervalo por hipótesis de inducción y X_j y X_{j+1} coinciden también en la intersección de sus intervalos de definición, entonces I_1 y X_{j+1} coinciden en dicho intervalo. En particular lo harán en un punto. Como son dos campos paralelos sobre α , en $I_1 \cap J_{j+1}$ contenido en un abierto coordinado coinciden, al hacerlo sobre algún punto.

Razonamos ahora por inducción en i para ver que Z_i coincide con X_j para todo i y todo j . Ya hemos probado el caso $i = 1$. Supongámoslo cierto para i y probémoslo para $i + 1$. Sea j_0 el mínimo j tal que $J_j \cap I_{i+1} \neq \emptyset$. Así pues, $e_{j_0} < c_i < f_{j_0}$. Como además, $c_i < d_{i+1}$, existe $a_0 \in J_{j_0} \cap I_i \cap I_{i+1}$. Como X_{j_0} y Z_i coinciden en a_0 por hipótesis de inducción y Z_i , Z_{i+1} coinciden en su intersección, Z_{i+1} y X_{j_0} coinciden en a_0 . Razonando como en los casos anteriores, coincidirán en $I_{i+1} \cap J_{j_0}$. Haciendo el mismo razonamiento inductivo que para el caso $i = 1$, ahora sobre k se prueba que Z_{i+1} y X_{j_0+k} coinciden en la intersección de sus intervalos de definición, con lo que se puede concluir la inducción en i . En particular, como $b \in I_m \cap J_r$, el razonamiento anterior prueba que $X_r(b) = Z_m(b) = Z(b)$.

Finalmente, veamos que este campo Z es único. Supongamos que X fuese otro campo de vectores sobre α paralelo con $X(a) = z$. Entonces, usando la misma notación que antes, razonamos de forma inductiva para ver que Z_i coincide con X para todo i en Z_i , de forma análoga lo hecho para ver que Z está bien definida. Con ello se concluye que $X|_{I_m} = Z_m$ y en particular $X(b) = Z(b)$. $\square$

Definición 3.3.6. Usando la notación de la definición previa, dados $a, b \in I$, se define el *transporte paralelo a lo largo de α* de $\alpha(a) = p$ a $\alpha(b) = q$ como la aplicación $P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \rightarrow T_q(M)$ que, dado $z \in T_p M$, lo envía en $Z(b) \in T_q M$, siendo Z el transportado paralelo de z a lo largo de α .

Lema 3.3.7. Dados $a, b \in I$, el transporte paralelo a lo largo de α de $\alpha(a) = p$ a $\alpha(b) = q$ es un isomorfismo lineal.

Demostración. Comencemos viendo que el transporte paralelo es una aplicación lineal. Sean $v, w \in T_p M$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sean V, W los únicos campos de vectores paralelos sobre α con $V(a) = v$ y $W(a) = w$. Entonces, por la linealidad de la derivación covariante sobre α , $\lambda V + \mu W$ es paralelo y $(\lambda V + \mu W)(a) = \lambda v + \mu w$, con lo que es el único campo de vectores paralelo sobre α que en a vale $\lambda v + \mu w$. Por la definición del transporte paralelo,

$$P_a^b(\alpha)(\lambda v + \mu w) = (\lambda V + \mu W)(b) = \lambda V(b) + \mu W(b) = \lambda P_a^b(\alpha)(v) + \mu P_a^b(\alpha)(w),$$

con lo que se comprueba la linealidad. Al ser una aplicación lineal entre espacios vectoriales de igual dimensión, es suficiente con ver que es inyectiva para comprobar que es un isomorfismo. Supongamos que $P_a^b(\alpha)(v) = 0$. Entonces, siendo V el transportado paralelo de v a lo largo de α , se tiene que $V(b) = 0$. Como el único campo de vectores sobre α paralelo con $V(b) = 0$ es el campo vectorial 0 , entonces $V = 0$ y por ello $v = 0$. $\square$

Cabe resaltar que es inmediato comprobar a partir de la definición que $(P_a^b(\alpha))^{-1} = P_b^a(\alpha)$, lo que también se podría utilizar para probar que es una biyección.

El siguiente teorema nos permite concluir que la derivada covariante a lo largo de una curva se puede obtener a través de un límite, usando el transporte paralelo para poder trasladar todos los vectores tangentes a un mismo espacio tangente y poderlos comparar. En particular, esta igualdad permite entender la derivación covariante a lo largo de una curva de forma análoga a como se entiende la derivación usual en funciones de $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.3.8. Dado $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y $a \in I$, se cumple que:

$$V'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{(P_a^b)^{-1} V(b) - V(a)}{b - a}.$$

Demostración. Sea $\alpha(a) = p$ y sean $v_1, \dots, v_n$ una base de $T_p M$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos V_i como el único campo de vectores sobre α paralelo y con $V_i(a) = v_i$. Como el transporte paralelo es un isomorfismo lineal, para cada $b \in I$, $V_1(b), \dots, V_n(b)$ forman una base de $T_{\alpha(b)} M$, es decir, $V_1, \dots, V_n$ constituyen una referencia de campos de vectores paralelos sobre la curva α .

Sea W un campo de vectores sobre α . Entonces se puede expresar como $W(b) = \sum_i W^i(b) V_i(b)$ $b \in I$. Por tanto, a partir de la ecuación (3.2) se tiene que como los V_i son paralelos:

$$W'(a) = \sum_i \frac{dW^i}{dt}(a) V_i(a).$$

Por otro lado, usando la linealidad del transporte paralelo y la expresión de su inversa:

$$\frac{(P_a^b)^{-1} W(b) - W(a)}{b - a} = \frac{P_b^a (\sum_i W^i(b) V_i(b)) - \sum_i W^i(a) V_i(a)}{b - a} = \sum_i \frac{W^i(b) P_b^a(V_i(b)) - W^i(a) V_i(a)}{b - a}.$$

Usando que los V_i son paralelos y, por ello $P_b^a(V_i(b)) = V_i(a)$, se llega a:

$$\sum_i \frac{W^i(b) - W^i(a)}{b - a} V_i(a).$$

Tomando límites cuando b tiende a a se concluye el resultado. $\square$

3.4. Geodésicas definidas por conexiones lineales

Buscamos ahora extender el concepto de recta a las variedades diferenciales en las que se posee una conexión lineal, pues es en estas en las que se posee una forma de derivar campos de vectores sobre curvas, como hemos mostrado antes. Una de las caracterizaciones de las líneas rectas en $\mathbb{R}^n$ es que si las parametrizamos mediante aplicaciones lineales, las componentes del vector velocidad de estas curvas en las bases de los espacios tangentes asociadas a las coordenadas naturales son constantes. Por lo visto en el [Ejemplo 3.2.11](#), esto último caracteriza que el campo velocidad de la curva sea paralelo, cuando se considera la conexión natural. Así pues, entenderemos que las líneas más rectas que se pueden definir sobre una variedad diferenciable serán aquellas que son imágenes de curvas con campo velocidad paralelo.

Seguiremos haciendo uso en esta sección de la notación de las secciones precedentes.

Definición 3.4.1. Una *geodésica* en M para la conexión lineal ∇ es una curva $\gamma : I \rightarrow M$ cuyo campo de vectores de velocidad es paralelo, es decir, de aceleración nula.

El siguiente lema nos permite obtener la condición local que ha de satisfacer una curva para ser una geodésica.

Lema 3.4.2. Sea $(U, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$ una carta local de M . Entonces una curva $\gamma : I \rightarrow U \subset M$ es una geodésica de M si y solo si:

$$\frac{d^2(\varphi^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \frac{d(\varphi^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(\varphi^j \circ \gamma)}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Demostración. Nótese que si denotamos $Z = \gamma'$, entonces es claro que, siendo $Z = \sum_k Z^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$:

$$Z^k = \frac{d(\varphi^k \circ \gamma)}{dt}.$$

Basta substituir esto en (3.2). $\square$

Apoyándonos en el resultado previo, procedemos ahora a probar que existen geodésicas que salen de cada punto de M con todas las velocidades posibles y, de hecho, son únicas. Esto permite generalizar el caso usual de la geometría euclídea en que por cada punto pasa una única recta con una dirección dada (salvando las distancias entre una curva y su imagen) y el teorema de existencia y unicidad de las geodésicas de superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$. Posteriormente, nos encargaremos de estudiar cuánto se pueden extender las geodésicas, tema de especial interés en las variedades semi-Riemannianas que se estudiarán más adelante.

Teorema 3.4.3 (de existencia y unicidad de las geodésicas). Sea $p \in M$ y sea $v \in T_p M$. entonces existe un intervalo abierto I entorno a 0 y una única curva $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica con $\gamma'(0) = v$.

Demostración. Sea $(U, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$ una carta local de M con $p \in U$. Sean:

$$a = (a_1, \dots, a_n) = \varphi(p), \quad v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p.$$

Entonces, una curva $\gamma : I \rightarrow U \subset M$ es una geodésica si y solo si cumple (3.3) y

$$\varphi^i \circ \gamma(0) = a_i, \quad \frac{d(\varphi^i \circ \gamma)}{dt}(0) = v^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

es decir, si y solo si $\varphi^i \circ \gamma$, $i = 1, \dots, n$, son solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con condiciones iniciales tipo Cauchy. De acuerdo con el teorema de existencia y unicidad de solución de estos problemas, existe $H = (\varphi^1 \circ \gamma, \dots, \varphi^n \circ \gamma)$ definida en un intervalo I entorno a 0 solución del problema. Así pues $\gamma = \varphi^{-1} \circ H$ es la solución buscada. $\square$

Lema 3.4.4. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ dos geodésicas en M . Si existe $a \in I$ tal que $\gamma_1'(a) = \gamma_2'(a)$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existiera $t_0 \in I$ tal que $\gamma_1(t_0) \neq \gamma_2(t_0)$. Supongamos que $t_0 > a$, si no se razonaría de forma análoga, y definamos $A = \{t \in I : t > a, \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}$. Este conjunto está acotado inferiormente por a . Por tanto, existe $\inf(A) = b$. Supongamos que $b \in I$. Si $a = b$, entonces $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ en $I \cap (a, \infty)$ y, por continuidad $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$. Absurdo.

Supongamos pues que $b > a$. Entonces, $\gamma_1 = \gamma_2$ en (a, b) . Por la continuidad de γ_1 y γ_2 se tiene que de hecho dicha igualdad se da en $(a, b]$. Como las aplicaciones que envían $t \mapsto \gamma_1(t+b)$ y $t \mapsto \gamma_2(t+b)$ son geodésicas (basta trabajar en coordenadas) en torno a b han de coincidir en un entorno de b , en contra de la definición de A . $\square$

Teorema 3.4.5. Dado un punto $p \in T_p M$ y un vector tangente $v \in T_p M$, existe una única geodésica en M , γ_v llamada geodésica (maximal) que comienza en p con velocidad inicial v , tal que:

1. Su velocidad inicial es $\gamma_v'(0) = v$.
2. El dominio de γ_v , I_v , es maximal, es decir, que si $\alpha : J \rightarrow M$ es una geodésica en M con $\alpha'(0) = v$, entonces $J \subset I_v$ y $\gamma_v|_J = \alpha$.

Demostración. Sea G el conjunto de todas las geodésicas $\gamma : I_\gamma \rightarrow M$ con velocidad inicial v . De acuerdo con el Teorema 3.4.3, este conjunto es no vacío. Por el lema previo, si $\gamma_1, \gamma_2 \in G$, entonces ambas coinciden en $I_{\gamma_1} \cap I_{\gamma_2}$. Sea $I = \bigcup_{\gamma \in G} I_\gamma$ y definamos $\gamma_v : I \rightarrow M$. Para cada $t \in I$ existe $\gamma \in G$ tal que $t \in I_\gamma$. Definimos $\gamma_v(t) = \gamma(t)$. Por el comentario anterior esta elección no depende del elemento de G tomado. Además, γ_v es geodésica pues en un entorno de cada punto de I coincide con alguna $\gamma \in G$. Como tanto el campo velocidad como la derivada covariante a lo largo de una curva se pueden calcular de forma local, por ser γ geodésica, lo es γ_v en dicho entorno. En particular esto asegura que $\gamma_v'(0) = v$.

Finalmente, veamos que es maximal. Si existiera otra geodésica γ con velocidad inicial en 0 v , entonces $\gamma \in G$ y por ello $I_\gamma \subset I$ y $\gamma_v|_{I_\gamma} = \gamma$. $\square$

Definición 3.4.6. Una variedad M con una conexión lineal ∇ se dice que es *geodésicamente completa* si toda geodésica maximal en M está definida en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.4.7. Como es de esperar, $\mathbb{R}^n$ con la conexión natural resulta ser una variedad geodésicamente completa pues la recta por el punto p con velocidad inicial $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ está dada por

$$\gamma_v(t) = p + \sum_i t v^i e_i, \quad t \in \mathbb{R},$$

siendo e_i los vectores de la base canónica. En particular, estas parametrizaciones de las rectas son geodésicas en $\mathbb{R}^n$ con la conexión lineal, como se ha visto previamente, y son maximales al estar definidas todas ellas en $\mathbb{R}$. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ con la conexión natural es geodésicamente completo. Cabe señalar que, dada la unicidad proporcionada por los teoremas anteriores, toda geodésica en $\mathbb{R}^n$ es una restricción de las dadas previamente.

A partir de este ejemplo, es sencillo también dar con una variedad que no sea geodésicamente completa. Basta tomar un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y considerar la variedad diferenciable $M = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ con la estructura de abierto de $\mathbb{R}^n$ y de nuevo la conexión natural. En este caso, toda geodésica de M ha de ser una recta parametrizada con velocidad constante. En particular, $\alpha : (0, \infty) \rightarrow M$ dada por $\alpha(t) = p + t e_1$, con e_1 el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, será una geodésica. No obstante, su dominio no es todo $\mathbb{R}$ y no puede ser extendida en M .

Damos ahora dos propiedades básicas de la geodésicas, de gran utilidad para su clasificación.

Lema 3.4.8. Toda curva constante en M es una geodésica. Además, si γ_v es una geodésica no constante en M , $\gamma'_v(t) \neq 0$ para todo $t \in I_v$.

Demostración. La primera de las afirmaciones es trivial, pues el campo de velocidad de una curva constante es el nulo, el cual es paralelo para toda conexión.

Comprobemos la veracidad de la segunda razonando por reducción al absurdo. Supongamos que existiera $a \in I$ tal que $\gamma'_v(a) = 0$. Entonces, como la única geodésica maximal que pasa por $\gamma_v(a)$ con velocidad inicial nula es constante, y $t \mapsto \gamma_v(t + a)$ da lugar a una geodésica con velocidad inicial nula por $\gamma_v(a)$, ambas coinciden y para todo $t \in I$, $\gamma_v(t + a) = \gamma_v(a)$, en contra de que no sea constante. $\square$

Lema 3.4.9. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica no constante. Entonces una reparametrización $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ es geodésica si y solo si h es afín, es decir, de la forma $h(t) = \lambda a + \mu$ para ciertos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Demostración. Recordemos que, dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$ cualquiera y $h : J \rightarrow I$ una aplicación diferenciable entre intervalos, se cumple que $(\gamma \circ h)'(t) = \frac{dh}{dt}(t) \gamma'(h(t))$. A partir de esta expresión, calculamos la expresión de la aceleración de la reparametrización en términos de la curva original, usando las propiedades de la derivada covariante a lo largo de una curva:

$$(\gamma \circ h)''(t) = \left(\frac{dh}{dt}(t) \gamma'(h(t)) \right)' = \frac{d^2h}{dt^2}(t) \gamma'(h(t)) + \frac{dh}{dt}(t) (\gamma' \circ h)'(t) = \frac{d^2h}{dt^2}(t) \gamma'(h(t)) + \frac{dh}{dt}(t) \gamma''(h(t)).$$

Ahora bien, si γ es una geodésica, el segundo sumando es nulo. Si además es no constante, por el lema previo, $\gamma'(h(t)) \neq 0$. Por tanto, $\gamma \circ h$ es geodésica si y solo si, para todo $t \in I$, se tiene que

$$\frac{d^2h}{dt^2}(t) = 0,$$

lo que equivale a que h sea afín. $\square$

Este último resultado en particular explicita que la parametrización concreta que se haga de una curva es importante para que sea una geodésica, lo que nos lleva a introducir el siguiente término:

Definición 3.4.10. Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ se dice que es *pregeodésica* si existe una reparametrización suya que sea geodésica.

El siguiente lema es la consecuencia que tiene la derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales que presentan las soluciones de los problemas de valor inicial de Cauchy aplicada al caso de las geodésicas.

Lema 3.4.11. Sea $p \in M$ y sea $v \in T_p M$. Entonces existe un entorno U de v en TM y un intervalo I entorno a 0 tal que la aplicación

$$\begin{aligned} U \times I &\longrightarrow M \\ (w, t) &\longmapsto \gamma_w(t), \end{aligned}$$

está bien definida y es diferenciable.

Demostración. Basta considerar un entorno coordenado V en M entorno a p y la correspondiente carta local que se induce en TM . Usando las coordenadas proporcionadas por dicha carta local y el teorema de diferenciabilidad con respecto a los datos iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.3), se concluye. $\square$

Finalmente, este resultado nos permite establecer una relación entre las curvas integrales maximales de un campo de vectores en TM y las geodésicas maximales en M . Es decir, un problema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en una variedad equivale a un problema de ecuaciones diferenciales de primer orden en su fibrado tangente. Además, al reducir el orden del sistema, también conseguimos pasar de un sistema de ecuaciones diferenciales en general no lineal a uno lineal, lo que simplifica el tratamiento. A cambio, este campo de vectores no es fácil de computar y en dicho proceso se involucran derivadas segundas.

Teorema 3.4.12. Existe un campo de vectores G sobre TM tal que la proyección $\pi : TM \longrightarrow M$ establece una biyección entre sus curvas integrales (maximales) y las geodésicas (maximales) de M .

Demostración. Para cada $v \in TM$ definimos G_v como la velocidad inicial de la curva $s \mapsto \gamma'_v(s)$ en TM , la cual es una curva diferenciable en TM al ser un campo de vectores sobre una curva diferenciable en M . Veamos que G así definido es efectivamente un campo de vectores diferenciable. Para ello basta notar que, por el Lema 2.1.61, la aplicación $(w, s) \mapsto \gamma_w(s)$ es diferenciable en un entorno de $(w, 0)$ para todo $w \in TM$, que podemos tomar de la forma $U \times I$. Haciendo uso del Lema 4.7.8, que no depende de la demostración de este teorema, concluimos que la aplicación $(v, s) \mapsto \gamma'_v(s)$ es diferenciable en $U \times I$. Por tanto, razonando de nuevo usando dicho lema (y evaluando luego en $s = 0$), se concluye que también lo es la aplicación:

$$\begin{aligned} G : U &\longrightarrow T(TM) \\ w &\longmapsto (\gamma'_w)'(0). \end{aligned}$$

Nótese que esta no es la aceleración de γ_w en el sentido de las conexiones lineales, sino la velocidad inicial de la curva que define en TM el campo velocidad.

Veamos que γ es una geodésica en M si y solo si γ' es una curva integral de G .

- Comencemos suponiendo que γ es una geodésica de M y veamos que γ' es una curva integral de G . Definamos $\alpha : I \longrightarrow TM$ por $\alpha(s) = \gamma'(s)$ para evitar confusiones. Fijemos $a \in I$ y $w = \gamma'(a)$. Sea $\beta(s) = \gamma'_w(s)$ la geodésica maximal con velocidad inicial w . Por el lema anterior, $\gamma(a+s) = \gamma_w(s)$ en I , pues coinciden sus velocidad iniciales en $s = 0$ y ambas son geodésicas. Así pues, coincidirán sus campos de velocidad, es decir, $\beta(s) = \alpha(s+a)$. Por tanto coincidirán sus campos de velocidad, $\alpha'(s+a) = \beta'(s)$. Por tanto, aplicando esta igualdad a $s = 0$, se concluye que $\alpha'(a) = \beta'(0) = G_w = G_\alpha(a)$, como se quería demostrar.
- Supongamos ahora que α es una curva integral de G y veamos que $\pi \circ \alpha = \gamma$ es una geodésica de M . Sea $v = \alpha(0)$. Por el punto anterior, sabemos que $s \mapsto \gamma'_v(s)$ (definida el intervalo maximal) es también una curva integral de G que empieza en v . Por la unicidad de las curvas integrales de los campos de vectores, ambas coinciden en el entorno de 0 en que está definida α . Por tanto, en dicho entorno, $\pi \circ \alpha = \pi \circ \gamma'_v = \gamma_v$.

Este último razonamiento muestra que, con la notación utilizada, $(\pi \circ \alpha)' = \gamma'_v = \alpha$. Como además, si γ es una geodésica en M , entonces $\pi \circ \gamma' = \gamma$, pues es una propiedad general de las curvas diferenciables, se concluye que las dos aplicaciones definidas son inversas la una de la otra y por ello biyectivas. $\square$

4. Geometría semi-Riemanniana

Las bases de la geometría fueron inicialmente establecidas en los Elementos de Euclides y, desde entonces, han sido una de las ramas de las matemáticas más fructíferas y que más interés ha generado. Un nuevo enfoque de la geometría fue desarrollado en el siglo XVII, inicialmente por Descartes y Fermat, denominado geometría analítica. En el Grado de Matemáticas, se realiza un estudio de la misma en la asignatura de *Álgebra Lineal y Geometría I*, en la cual se comprueba cómo la geometría analítica se basa en gran medida en la presencia de un producto interno en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Este enfoque se generaliza introduciendo las formas bilineales, en general; y las no degeneradas, en particular.

En la asignatura *Geometría de Curvas y Superficies* se estudia una nueva generalización de la geometría euclídea habitual, que permite estudiar curvas y superficies generales inmersas en $\mathbb{R}^3$. Para ello se considera, a través del isomorfismo inducido por las coordenadas naturales $T_p\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$, un producto interno en cada espacio tangente a $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, a través de la diferencial de la inclusión, en los espacios tangentes a las superficies y curvas de $\mathbb{R}^3$.

Ya en dicha asignatura se observa que algunas propiedades de la geometría de las superficies, y en particular la curvatura de Gauss, se conservan bajo isometrías y solo dependen del producto escalar que se induce en los espacios tangentes a cada superficie, es decir, son intrínsecas. Estas propiedades son especialmente interesantes pues son las que podrían observar y medir hipotéticos habitantes de dicha superficie (como es el caso de los humanos sobre la superficie de la Tierra hasta que se tuvo acceso al espacio). No obstante, discernir qué propiedades son intrínsecas y cuáles dependen de la forma en que la superficie está inmersa en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo a través de la segunda forma fundamental, no es tarea sencilla. Por eso es útil disponer de una teoría intrínseca de la geometría de las variedades. Para ello, Riemann desarrolló el concepto de variedades Riemannianas, en las que se considera un producto interno en cada uno de los espacios tangentes, buscando que este permita recuperar la noción de medir distancias, ahora sobre variedades.

Más tarde, con el desarrollo de la relatividad especial y la relatividad general, en las cuales se trabaja con vectores que pueden tener norma cero e incluso cuyo producto escalar por sí mismos puede ser negativo, se ve necesaria la generalización de la teoría Riemanniana para poder aplicarse a estas teorías físicas. Así surge la geometría semi-Riemanniana, en que se debilita la condición de introducir un producto interno en los espacios tangentes por la de introducir un producto escalar. Es esta teoría más general la que estudiaremos en detalle.

La mayor parte de esta sección se basa en los capítulos 3 y 4 de [17], así como en los capítulos 5-8 de [11], utilizado como referencia para comparar los resultados en el caso Riemanniano. Se presentan las principales herramientas necesarias para el estudio de las variedades semi-Riemannianas, así como los principales resultados referentes a las mismas, centrándonos en el concepto de curvatura, junto con sus demostraciones completas, así como ciertos ejercicios de dichos libros. Además, se ha utilizado [15] para poder desarrollar una mayor intuición de los conceptos con los que se trabaja.

4.1. Definiciones Iniciales

Comenzamos definiendo qué se entiende por una variedad semi-Riemanniana de forma rigurosa.

Definición 4.1.1. Un *tensor métrico*, g , sobre una variedad diferenciable M , es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ simétrico, no degenerado de índice constante sobre M . Es decir, un campo tensorial tal que, para todo $p \in M$, g_p es un producto escalar sobre T_pM no degenerado y que tiene el mismo índice para todo p .

Definición 4.1.2. Una variedad *semi-Riemanniana*, también llamada pseudo-Riemanniana, es un par (M, g) , donde M es una variedad diferenciable y g un tensor métrico sobre ella. Aunque estrictamente una variedad semi-Riemanniana sea un par ordenado, la mayoría de las veces nos referiremos a (M, g) como M .

Definición 4.1.3. El valor del índice de g_p para un punto $p \in M$ cualquiera, se denomina *índice de M* , $\text{ind}(M) = \nu$. Si $\nu = 0$, se dice que M es una variedad Riemanniana (es decir, si g_p es un producto interno en cada espacio tangente) y si $\nu = 1$ y $\dim M \geq 2$ se dice que M es una variedad de Lorentz o Lorentziana.

A lo largo del trabajo utilizamos la notación habitual de producto escalar para denotar al tensor métrico actuando sobre vectores tangentes o campos de vectores tangentes (indistintamente):

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle \in \mathcal{F}(M), \quad \text{para todos } V, W \in \mathfrak{X}(M),$$

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}, \quad \text{para todos } v, w \in T_p M, \quad p \in M.$$

Con esta notación, dado un sistema coordenado en un abierto U de una variedad semi-Riemanniana M , con funciones coordenadas φ^i , $i = 1, \dots, n$, las componentes del tensor métrico se definen como

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle,$$

y por ello, siendo $V = \sum V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, $W = \sum W^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ campos de vectores en U , por la bilinealidad de g :

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} V^i W^j.$$

Además, se puede expresar el tensor métrico en esta base como:

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} d\varphi^i \otimes d\varphi^j.$$

Dado que, para cada $p \in M$, g_p es un producto escalar no degenerado, su matriz en cualquier base del espacio tangente es invertible. Las componentes de la matriz inversa en la base de cada espacio tangente asociada a la carta anterior se denotan por $g^{ij}(p)$. Utilizando la fórmula de los adjuntos para calcular la matriz inversa de $(g_{ij}(p))$ en cada punto de M , se comprueba que para todos i, j , $g^{ij}(p)$ es una función diferenciable en el abierto de definición de la carta. Además, gracias a que el tensor métrico es simétrico, se cumple que:

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}, \quad \text{para todos } i, j.$$

Al haber permitido que el tensor métrico en cada punto pueda no ser definido positivo, el producto de un vector tangente consigo mismo no es necesariamente positivo. Esto nos permite realizar la siguiente clasificación de vectores tangentes. Cabe señalar que en geometría Riemanniana solo existirán vectores tangentes de tipo espacial.

Definición 4.1.4. Sea M una variedad semi-Riemanniana. Sean $p \in M$ y $v \in T_p M$. Se dice que:

- v es *espacial* si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$,
- v es *null* o *luminoso* si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$,
- v es *temporal* si $\langle v, v \rangle < 0$.

Definición 4.1.5. En las condiciones anteriores, dado $v \in TM$ se define:

$$q(v) = \langle v, v \rangle.$$

La restricción de la aplicación q a cada espacio tangente a M es la forma cuadrática no degenerada asociada a g_p . q se denomina *elemento de línea* de M y es en ocasiones denotado ds^2 . A partir de este concepto se define la norma de v como:

$$|v| = |q(v)|^{1/2}.$$

Cabe señalar que, dado que g_p es un producto escalar, se pueden definir para vectores tangentes en cada punto de M los conceptos de vectores unitarios, ortogonalidad y ortonormalidad. Además, se dirá que un campo de vectores en M , X , es unitario si lo es X_p para todo $p \in M$. De igual forma, un conjunto de campos de vectores se dirá que es ortogonal (resp. ortonormal) si lo es el conjunto de vectores tangentes asociado en cada punto de M .

La notación ds^2 para el elemento de línea de una variedad semi-Riemanniana M no es accidental. La idea es que este dé una intuición sobre las distancias en una variedad. Intuitivamente, si consideramos dos puntos en un entorno coordenado de M cercanos, pongamos $p = (x^1, \dots, x^n)$ y $p' = (x^1 + \Delta x^1, \dots, x^n + \Delta x^n)$, podemos considerar que el vector tangente a p en M , $\Delta p = \sum_i \Delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ apunta hacia p' y se puede

aproximar la distancia al cuadrado entre p y p' por $ds^2(\Delta p)$. Cabe resaltar que este argumento es puramente intuitivo y que una formalización del mismo pasa por el estudio de las conexiones en una variedad y, en particular, de la conexión de Levi-Civita y las geodésicas. Estos conceptos serán estudiados a fondo en las siguientes secciones, aunque no llegaremos a relacionar las geodésicas con la posibilidad de establecer una distancia en M (en el caso Riemanniano). Esto último puede leerse en el capítulo 5 de [17].

Ejemplo 4.1.6. Recordemos que, para todo $p \in \mathbb{R}^n$ existe un isomorfismo canónico dado por las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$, x^i , $i = 1, \dots, n$ entre $T_p\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$:

$$v \mapsto \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \text{para todo } v \in T_p M.$$

A través de este isomorfismo, se puede introducir un producto escalar en cada espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ y por ello, un tensor métrico en $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v^i w^i, \quad \text{para todos } v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, w = \sum_i w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M; p \in M.$$

Nótese que el tensor métrico así definido es diferenciable, pues lo son sus componentes (son constantes) en la carta global dada por las coordenadas naturales.

Este tensor métrico dota a $\mathbb{R}^n$ de una estructura de variedad Riemanniana, la cual se conoce como espacio euclídeo y, en cierto sentido, es el prototipo de las variedades Riemannianas, pues existe un teorema, debido a John Nash (ver [16]), que afirma que toda variedad Riemanniana puede ser embebida en $\mathbb{R}^n$ para n suficientemente grande de forma isométrica (más adelante definiremos el concepto de isometría y de subvariedad Riemanniana). Así pues, en principio, toda la geometría Riemanniana podría estudiarse para subvariedades de $\mathbb{R}^n$. De hecho, así fue como surgió en primer lugar esta teoría. Sin embargo, como ya hemos comentado, la visión intrínseca de esta teoría es muy útil para poder estudiar de manera más sencilla los invariantes por isometrías de las variedades Riemannianas.

Podemos considerar de forma más general $0 \leq \nu \leq n$ y cambiar el signo de los primeros ν productos del producto interno usual de $\mathbb{R}^n$, con lo que, en general, dejaría de ser un producto interno para ser simplemente un producto escalar. Trasladando dicho producto escalar a los espacios tangentes de la misma manera que en el caso Riemanniano:

$$\langle v, w \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{i=\nu+1}^n v^i w^i, \quad \text{para todos } v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, w = \sum_i w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M; p \in M.$$

Esto dota a $\mathbb{R}^n$ de una estructura de variedad semi-Riemanniana de índice ν , denominada espacio semi-euclídeo $\mathbb{R}_\nu^n$. En particular, si $n \geq 2$ y $\nu = 1$, se dice que $\mathbb{R}_1^n$ es el n -espacio de Minkowski.

Utilizando la notación

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq i \leq \nu, \\ +1 & \text{si } \nu < i \leq n, \end{cases}$$

se puede expresar el tensor métrico en los espacios semi-euclídeos como:

$$g = \sum_i \varepsilon_i dx^i \otimes dx^i.$$

Los espacios semi-euclídeos juegan un papel en la geometría semi-Riemanniana análogo al del espacio euclídeo en la geometría Riemanniana. En este sentido, Clarke probó en 1970 (ver [3]) que toda variedad semi-Riemanniana puede ser embebida isométricamente en un espacio semi-euclídeo de dimensión suficientemente alta.

Las variedades semi-Riemannianas e, incluso, las variedades Riemannianas no son una estructura exótica que solo algunas variedades diferenciables admitan, sino que, de hecho, toda variedad diferenciable admite una estructura de variedad Riemanniana. Para probar este resultado, es vital recurrir al uso de particiones de la unidad y, por ello, que las variedades con las que trabajamos cumplan el segundo axioma de numerabilidad.

Teorema 4.1.7. Toda variedad diferenciable M admite una estructura de variedad Riemanniana.

Demostración. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$ un conjunto de cartas locales de M tales que los abiertos U_α recubran la variedad. Consideremos una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ subordinada a dicho recubrimiento. Para cada $\alpha \in \Gamma$ definimos en U_α

$$g_\alpha = \sum_i d\varphi_\alpha^i \otimes d\varphi_\alpha^i,$$

el cual es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, simétrico y definido positivo, en U . Definimos $g = \sum_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha f_\alpha$. Entonces, por las propiedades de las particiones de la unidad, para cada $p \in M$, dicha suma es una suma finita:

$$g(p) = f_{\alpha_1}(p)g_{\alpha_1}(p) + \cdots + f_{\alpha_k}(p)g_{\alpha_k}(p).$$

Como $f_{\alpha_j}(p) \geq 0$ para $j = 1, \dots, k$, entonces, $g(p)$ es combinación lineal con coeficientes positivos de tensores tipo $(0, 2)$ en $T_p M$ simétricos y definidos positivos. Como alguno de los $f_{\alpha_j}(p)$ es estrictamente positivo, pues la suma de todos ellos ha de ser 1, entonces concluimos que $g(p)$ es un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo.

Además, gracias a que los soportes de las funciones de la partición de la unidad son un conjunto localmente finito, trabajando en un abierto suficientemente pequeño (contenido en un compacto), g es una suma finita de producto de funciones diferenciables por campos de tensores diferenciables de tipo $(0, 2)$ y, podemos concluir que es un tensor métrico. $\square$

Introducimos ahora el concepto de isomorfismos entre variedades semi-Riemannianas: las isometrías. Dos variedades que sean isométricas serán esencialmente iguales en cuanto a propiedades de la estructura semi-Riemanniana se refiere. En la [Sección 4.5](#) se realiza un estudio detallado de sus propiedades.

Definición 4.1.8. Sean M, N variedades semi-Riemannianas con tensores métricos g_M y g_N , respectivamente. Una *isometría* de M en N es un difeomorfismo $\Phi : M \rightarrow N$ que preserva los tensores métricos, es decir, tal que $\Phi^* g_N = g_M$. Si existe una isometría de M en N , se dice que son variedades semi-Riemannianas *isométricas*.

Nótese que, dado $\Phi : M \rightarrow N$ difeomorfismo, es equivalente que Φ sea una isometría a que para todo $p \in M$, $d\Phi|_p$ sea una isometría entre espacios vectoriales puesto que:

$$\Phi^* g_N(v, w) = g_N(d\Phi|_p(v), d\Phi|_p(w)), \quad \text{para todos } v, w \in T_p M$$

También se puede dar sentido al pullback del elemento de línea de N , de modo que este se conserve mediante isometrías. Basta definir, siendo q_M y q_N los elementos de línea de M y N , respectivamente:

$$\Phi^* q_N(v) = q_N(d\Phi|_p(v))$$

De hecho, como el tensor métrico está determinado por el elemento de línea, es equivalente si Φ es un difeomorfismo que se conserven estos, es decir, que $\Phi^* q_N = q_M$, a que sea isometría.

Lema 4.1.9. Sean M, N, P variedades semi-Riemannianas. Se cumple que:

1. La aplicación identidad, $Id : M \rightarrow M$, es una isometría.
2. Si $\Phi : M \rightarrow N$ y $\Psi : N \rightarrow P$ son isometrías, entonces $\Psi \circ \Phi : M \rightarrow P$ es isometría.
3. Si $\Phi : M \rightarrow N$ es isometría, Φ^{-1} también lo es.

Demostración.

1. Como Id es un difeomorfismo, basta ver que en cada punto de M , $dId|_p$ es isometría. Dado $p \in M$, se tiene que $dId|_p : T_p M \rightarrow T_p M$ vuelve a ser la identidad. En particular es una isometría entre los espacios tangentes en p .
2. Como la composición de difeomorfismo es de nuevo un difeomorfismo, $\Psi \circ \Phi$ es un difeomorfismo. Además, para cada $p \in M$, de acuerdo con la regla de la cadena, $d(\Psi \circ \Phi)|_p = d\Psi|_{\Phi(p)} \circ d\Phi|_p$. Como la composición de isometrías entre espacios vectoriales es de nuevo una isometría, $d(\Psi \circ \Phi)|_p$ lo es y, por tanto, se concluye el resultado.
3. En primer lugar, nótese que, por ser Φ difeomorfismo, Φ^{-1} existe y es diferenciable. Además, sabemos que $d(\Phi^{-1})|_{\Phi(p)} = d\Phi|_p^{-1}$. Como la inversa de una isometría entre espacios vectoriales es de nuevo una isometría, se concluye el resultado. $\square$

4.2. Conexión de Levi-Civita

En el [Capítulo 3](#) se introduce el concepto de conexión lineal para poder estudiar la variación de los campos de vectores en distintas direcciones. El propósito de esta sección es comprobar que en las variedades semi-Riemannianas existe una conexión lineal especialmente adecuada por sus relaciones con el tensor métrico. Salvo que se indique lo contrario, M denotará una variedad semi-Riemanniana y g o $\langle, \rangle$ será su tensor métrico.

Una de las propiedades más útiles que presenta el producto escalar de $\mathbb{R}^n$ es que cumple la regla del producto de la derivación. Para generalizar esta propiedad, se define el siguiente concepto:

Definición 4.2.1. Sea dice que una conexión lineal ∇ sobre M es *compatible* con g si para todos $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que:

$$X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle.$$

El siguiente lema proporciona motivos adicionales para buscar conexiones lineales en M que sean compatibles con g , pues esta condición equivale a que muchos de los conceptos introducidos en el [Capítulo 3](#) se comporten bien con respecto al tensor métrico. En particular, si se quieren recuperar propiedades que presentan los vectores paralelos en $\mathbb{R}^n$ al introducir una conexión lineal, como que trasladar los vectores de forma paralela no afecta a sus productos escalares, se habrá de pedir que dicha conexión lineal sea compatible con la métrica g .

Lema 4.2.2. Si ∇ es una conexión lineal sobre M , son equivalentes:

1. La conexión lineal ∇ es compatible con g en el sentido definido previamente.
2. El tensor métrico es paralelo respecto a la derivación covariante que induce ∇ , es decir, $\nabla g = 0$.
3. Si V, W son campos de vectores sobre una curva $\alpha : I \rightarrow M$, se cumple que:

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle.$$

4. Si V, W son campos de vectores paralelos para ∇ sobre una curva $\alpha : I \rightarrow M$, entonces $\langle V, W \rangle$ es constante.
5. Para toda curva $\alpha : I \rightarrow M$ y todo $a, b \in I$, el transporte paralelo, P_a^b , es una isometría.

Demostración. Denotaremos, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ por ∇_X a la derivación tensorial asociada a ∇ y X . Como de costumbre, además, ∇ denotará a la diferencial covariante asociada a la conexión lineal.

- 1 $\leftrightarrow$ 2. Aplicando la regla del producto a la derivación tensorial asociada a la conexión lineal ∇ , se tiene que para todos los campos $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$

$$X \langle V, W \rangle = \nabla_X \langle V, W \rangle = (\nabla_X g)(V, W) + \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle,$$

de donde se concluye que $(\nabla_X g)(V, W) = 0$, es decir, $\nabla g = 0$, si y solo si $X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle$.

- 1 $\rightarrow$ 3. Sea $t \in I$. Consideremos una carta local entorno a $\alpha(t)$ con funciones coordenadas $\varphi^1, \dots, \varphi^n$. Podemos expresar $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ y $W = \sum_i W^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, con lo que:

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j} g_{ij} V^i W^j \right) = \sum_{i,j} \left(\frac{dg_{ij}}{dt} V^i W^j + g_{ij} \frac{dV^i}{dt} W^j + g_{ij} V^i \frac{dW^j}{dt} \right).$$

Calculando la derivada de las componentes del tensor métrico:

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \alpha'(g_{ij}) = \alpha' \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle.$$

Introduciendo este resultado en la igualdad previa,

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \sum_{i,j} \left(\frac{dV^i}{dt} W^j g_{ij} + \left\langle \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle \right) + \sum_{i,j} \left(V^i \frac{dW^j}{dt} g_{ij} + \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_j \left\langle \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + V^i \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right), W^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle + \sum_i \left\langle V^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \sum_j \left(\frac{dW^j}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + W^j \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right\rangle = \\
&= \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle,
\end{aligned}$$

recordando la expresión de la derivada covariante a lo largo de una curva en coordenadas locales, (3.2).

3 → 4. Basta notar que, como V, W son paralelos, $V' = 0 = W'$ y usar la fórmula de 3.

4 → 5. Sean $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$. Sean $v, w \in T_p M$ y V, W los únicos campos de vectores sobre α paralelos y tales que $V(a) = v$ y $W(a) = w$. Entonces:

$$\langle P_a^b(v), P_a^b(w) \rangle = \langle V(b), W(b) \rangle = \langle V(a), W(a) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

5 → 3. Sean V, W campos de vectores sobre α paralelos. Sea $a \in I$:

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{\langle V, W \rangle(b) - \langle V, W \rangle(a)}{b - a} = 0,$$

pues, el transporte paralelo es una isometría y $V(b), W(b)$ son el resultado de aplicar el transporte paralelo de a a b a $V(a)$ y $W(a)$, respectivamente.

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Sabemos que existe una referencia de campos de vectores paralelos sobre α ortonormales, $V_1, \dots, V_n$, en un entorno de un $p = \alpha(a)$. Siendo $X = \sum_i X^i V_i$ e $Y = \sum_j Y^j V_j$, se tiene que, para puntos de dicho entorno,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle &= \sum_{i,j} \frac{d}{dt} (X^i Y^j \langle V_i, V_j \rangle) = \sum_{i,j} \left(\frac{dX^i}{dt} Y^j + X^i \frac{dY^j}{dt} \right) \langle V_i, V_j \rangle = \\
&= \left\langle \sum_i \frac{dX^i}{dt} V_i, Y \right\rangle + \left\langle X, \sum_j \frac{dY^j}{dt} V_j \right\rangle = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle,
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que los V_i son paralelos y se han empleado las propiedades de la derivada covariante a lo largo de una curva.

Como este razonamiento es válido en un entorno de cada punto de I , se concluye la implicación.

3 → 1. Dados $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, y $p \in M$, consideramos una curva integral α de X que pase en $t = 0$ por p . Entonces, como $\alpha'(0) = X(p)$, usando también las propiedades de la derivada covariante a lo largo de una curva::

$$\begin{aligned}
X \langle V, W \rangle(p) &= \alpha'(0) \langle V, W \rangle = \frac{d}{dt} \langle V \circ \alpha, W \circ \alpha \rangle(0) = \langle (V \circ \alpha)', W \rangle(0) + \langle V, (W \circ \alpha)' \rangle(0) = \\
&= \langle \nabla_{\alpha'(0)} V, W(p) \rangle + \langle V(p), \nabla_{\alpha'(0)} W \rangle = \langle \nabla_{X(p)} V, W(p) \rangle + \langle V(p), \nabla_{X(p)} W \rangle = \\
&= \langle \nabla_X V, W \rangle(p) + \langle V, \nabla_X W \rangle(p).
\end{aligned}$$

Se concluye así la prueba de este lema. □

Si bien la compatibilidad de la conexión con la métrica es una propiedad deseable para las conexiones lineales definidas en una variedad semi-Riemanniana, ni siquiera en el caso Riemanniano permite asegurar la unicidad. Es por ello que se busca que la conexión tenga una propiedad adicional.

Definición 4.2.3. Se dice que una conexión lineal, ∇ , sobre una variedad diferenciable (no necesariamente semi-Riemanniana), M es *simétrica* si para todos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$:

$$[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V.$$

Observación 4.2.4. De hecho, se puede definir la aplicación $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ dada por:

$$T(V, W) = \nabla_V W - \nabla_W V - [V, W], \quad \text{para todos } V, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Esta resulta ser un tensor de tipo $(0, 2)$ que se denomina tensor de torsión, el cual es particularmente útil en el estudio de geodésicas, aunque nosotros no lo emplearemos. Con esta definición, la condición de que una conexión sea simétrica equivale a que su tensor de torsión sea nulo.

Antes de probar el teorema fundamental sobre las conexiones lineales en variedades semi-Riemannianas, es necesario probar un lema, que tiene gran relevancia en sí mismo. Este resultado muestra una de las ventajas de trabajar en variedades semi-Riemannianas: existe un $\mathcal{F}(M)$ -isomorfismo de módulos inducido por g entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\Lambda^1(M)$, que se puede entender también como un isomorfismo entre $T_p M$ y $T_p^* M$ para todo $p \in M$.

Lema 4.2.5. Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ se define la aplicación $V^* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ dada por $V^*(X) = \langle V, X \rangle$. Se cumple que $V^* \in \Lambda^1(M)$ y que la aplicación que manda V en V^* es un $\mathcal{F}(M)$ -isomorfismo de módulos.

Demostración. Gracias a que g es un tensor sobre M , es claro que V^* efectivamente tiene llegada en $\mathcal{F}(M)$. Además, a partir de la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad en la segunda componente de g , se concluye que $V^* \in \Lambda^1(M)$ pues es lineal.

Además, la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad en la primera componente de g asegura que la aplicación que manda $V \mapsto V^*$ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

Veamos que dicha aplicación es inyectiva. Sean V, W tales que $V^* = W^*$. Entonces, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$, por lo que $\langle V - W, X \rangle = 0$ y, por ser g no degenerado, $V = W$.

Finalmente, veamos que es sobreyectiva. Sea $\theta \in \Lambda^1(M)$. Veamos que existe $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $V^* = \theta$. Sea $p \in M$ y consideremos (U, φ) una carta local en torno a p . Sea $\theta = \sum_i \theta_i d\varphi^i$ en U . Definamos:

$$V|_U = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \in \mathfrak{X}(U).$$

Entonces se cumple que por la definición de (g^{ij}) , que para cada $k = 1, \dots, n$:

$$\left\langle V|_U, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right\rangle = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right\rangle = \sum_{i,j} \theta_i g^{ij} g_{jk} = \theta_k = \theta \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right).$$

Usando la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de θ y g , se concluye que $\langle V|_U, X \rangle = \theta(X)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$. Si (W, ψ) es otra carta local de M , en $U \cap W$ se cumple que para todo $X \in \mathfrak{X}(U \cap W)$, $\langle V|_U, X \rangle = \langle V|_W, X \rangle$, por lo que $V|_U = V|_W$ en $U \cap W$ y V está bien definido. Como el cálculo de una 1-forma actuando sobre un campo de vectores es local (de hecho, punto a punto), $V^* = \theta$ y se concluye el resultado. $\square$

Nótese que a partir de la expresión local de V en términos de la de $\theta = V^*$, es inmediato comprobar que, fijado g , V y θ poseen la misma información. Por eso se dice que son métricamente equivalentes.

Este tipo de isomorfismos entre los campos de vectores y las 1-formas en M , inducidos por una estructura adicional a la de variedad diferencial que se considera sobre M son centrales en otras áreas de la geometría diferencial, como en la geometría simpléctica o en la geometría cosimpléctica [13].

El siguiente teorema no solo asegura la existencia y unicidad de una conexión lineal en M cumpliendo las dos propiedades anteriores, sino que además proporciona una expresión, la fórmula de Koszul, que permite su cálculo.

Teorema 4.2.6. Existe una única conexión lineal sobre M compatible con la métrica y simétrica, la cual denotaremos por D y se denomina conexión de Levi-Civita. Además, D cumple la igualdad siguiente, llamada fórmula de Koszul,

$$2 \langle D_V W, X \rangle = V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle, \quad (4.1)$$

para todos $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Comencemos probando la unicidad y la veracidad de la fórmula de Koszul. Supongamos que existe una conexión lineal D con las condiciones del enunciado. Partiendo del miembro derecho de (4.1) y usando que D es compatible con la métrica y simétrica,

$$\begin{aligned} & V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle = \\ &= \langle D_V W, X \rangle + \langle W, D_V X \rangle + \langle D_W X, V \rangle + \langle X, D_W V \rangle - \langle D_X V, W \rangle - \langle V, D_X W \rangle - \\ & - \langle V, D_W X \rangle + \langle V, D_X W \rangle + \langle W, D_X V \rangle - \langle W, D_V X \rangle + \langle X, D_V W \rangle - \langle X, D_W V \rangle = 2 \langle D_V W, X \rangle, \end{aligned}$$

donde se ha usado la simetría del tensor métrico y cancelado términos para concluir que ∇ cumple la fórmula de Koszul.

Así pues, si D_1 y D_2 fueran dos conexiones lineales simétricas y compatibles con la métrica de M , para todos $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, usando la fórmula de Koszul, $\langle D_{1,V} W, X \rangle = \langle D_{2,V} W, X \rangle$. Por ser g no degenerado, esto implica que $D_{1,V} W = D_{2,V} W$, es decir, $D_1 = D_2$.

Probemos ahora la existencia de esta conexión. Para ello, definimos la aplicación $F : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathcal{F}(M)$ como el miembro derecho de (4.1). Consideremos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ fijos y la aplicación que manda $X \mapsto F(V, W, X)$. Entonces veamos que esta aplicación es $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

En primer lugar, es inmediato que es $\mathbb{R}$ -lineal al serlo tanto g como los campos de vectores al actuar sobre funciones. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(V, W, fX) &= V \langle W, fX \rangle + W \langle fX, V \rangle - fX \langle V, W \rangle - \langle V, [W, fX] \rangle + \langle W, [fX, V] \rangle + \langle fX, [V, W] \rangle = \\ &= V(f) \langle W, X \rangle + fV \langle W, X \rangle + W(f) \langle X, V \rangle + fW \langle X, V \rangle - fX \langle V, W \rangle - \\ & - \langle V, f[W, X] \rangle + W(f)X + \langle W, f[X, V] \rangle - V(f)X + f \langle X, [V, W] \rangle = fF(V, W, X), \end{aligned}$$

donde se ha usado la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de g y su simetría. Por tanto $F(V, W, \cdot)$ es una 1-forma. Por el lema previo, existe un único campo de vectores sobre M , $D_V W$ tal que $2 \langle D_V W, X \rangle = F(V, W, X)$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$. Así pues la aplicación $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que manda V, W en $D_V W$ cumple la fórmula de Koszul. Veamos que es una conexión lineal simétrica compatible con la métrica.

Es inmediato comprobar, pues tanto los corchetes de Lie, como g , como los campos de vectores actuando sobre funciones son $\mathbb{R}$ -lineales, que D es $\mathbb{R}$ -lineal en sus dos componentes. Además, razonando como para la tercera componente de F , se comprueba que F es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la primera componente. Por la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de la aplicación de $\mathfrak{X}(M)$ a $\Lambda^1(M)$ definida en el lema previo, se concluye que D es $\mathcal{F}(M)$ -multilineal en la primera variable.

Además, dados $f \in \mathcal{F}(M)$, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} 2 \langle D_V(fW), X \rangle &= F(V, fW, X) = V(f) \langle W, X \rangle + fV \langle X, W \rangle + fW \langle X, V \rangle - X(f) \langle V, W \rangle - fX \langle V, W \rangle - \\ & - \langle V, f[W, X] \rangle - X(f)W + f \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, f[V, W] \rangle + V(f)W = \\ &= V(f) \langle W, X \rangle - X(f) \langle V, W \rangle + X(f) \langle V, W \rangle + V(f) \langle X, W \rangle + fF(V, W, X) = \\ &= 2 \langle V(f)W, X \rangle + 2f \langle D_V W, X \rangle = 2 \langle V(f)W + fD_V W, X \rangle. \end{aligned}$$

Como esta igualdad se cumple para todo campo de vectores X , por ser g no degenerado, $D_V(fW) = V(f)W + fD_V W$, con lo que se comprueba que D es una conexión.

Veamos que es simétrica. Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios:

$$2 \langle D_V W - D_W V, X \rangle = F(V, W, X) - F(W, V, X) = \langle X, [V, W] \rangle - \langle X, [W, V] \rangle = 2 \langle [V, W], X \rangle.$$

En la segunda igualdad, los tres primeros términos de F se cancelan puesto que la suma de los dos primeros es invariante al permutar V y W , así como el tercero (por la simetría de g). Además, gracias la antisimetría de los corchetes de Lie y la simetría de g , es claro que la suma del cuarto y quinto sumando de F es invariante ante la permutación de V y W .

Usando de nuevo que g es no degenerado, se deduce que $D_V W - D_W V = [V, W]$.

Veamos que D es compatible con la métrica. Sean $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, usando la simetría de g :

$$2 \langle D_V W, X \rangle + 2 \langle W, D_V X \rangle = F(V, W, X) + F(V, X, W) = 2V \langle W, X \rangle$$

Para obtener la segunda igualdad, nótese que el primer sumando de F es invariante ante el intercambio de W y X y la suma de los dos siguientes es antisimétrica ante el intercambio de estos dos campos de vectores. Además, por la antisimetría de los corchetes de Lie, el cuarto término y la suma de los dos últimos términos de F también son antisimétricos respecto al intercambio de W y X .

Así pues, se concluye que D es una conexión con las propiedades buscadas. $\square$

De ahora en adelante consideramos siempre sobre M definida la conexión lineal de Levi-Civita, que denotaremos por D . Además, denotaremos por D también a la diferencial covariante que induce la conexión de Levi-Civita y a las correspondientes derivaciones tensoriales. Estas últimas se denominan derivadas covariantes.

Si bien la introducción de la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con la métrica es razonable, pedir que esta sea simétrica puede resultar poco claro. La razón por la que se incluyen justamente estas dos condiciones es doble. En primer lugar, que ambas condiciones se conservan por isometrías. Es decir, que si ∇ es una conexión sobre una variedad M y $\Phi : M \rightarrow N$ es una isometría, definiendo $\nabla_V^N W = \nabla_{d\Phi^{-1}V} d\Phi^{-1}W$ en N (nótese que $d\Phi^{-1}V$ es un campo de vectores en M porque Φ es difeomorfismo e igual con W), entonces es sencillo comprobar que ∇^N es una conexión lineal sobre N y, además, es simétrica y compatible con la métrica de N , si y solo si ∇ es simétrica y compatible con la métrica de M .

Además, estas condiciones aseguran que, siempre que se trabaje con variedades semi-Riemannianas sumergidas en $\mathbb{R}_v^n$, la conexión inducida por la conexión natural de $\mathbb{R}^n$ (ver la Sección 4.6) coincide con la conexión de Levi-Civita.

Dado que esta conexión está determinada por el tensor métrico considerado sobre M , se pueden obtener los símbolos de Christoffel de un sistema coordenado dado a partir de las componentes del tensor métrico en dicho sistema coordenado, como prueba la siguiente proposición.

Proposición 4.2.7. Sea (U, φ) una carta local de M . Entonces los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial \varphi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \varphi^m} \right). \quad (4.2)$$

Demostración. Sean $\varphi^1, \dots, \varphi^n$, las funciones coordenadas. Tomando $V = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, $W = \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$ y $X = \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$ en la fórmula de Koszul, (4.1), como el corchete de dos campos de vectores coordenados es siempre cero:

$$2 \langle D_V W, X \rangle = \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \varphi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \varphi^k}.$$

Por otro lado, haciendo uso de los símbolos de Christoffel:

$$2 \langle D_V W, X \rangle = 2 \sum_m \Gamma_{ij}^m \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^m}, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right\rangle = 2 \sum_m \Gamma_{ij}^m g_{mk}.$$

Multiplicando por la matriz inversa de (g_{mk}) a ambos lados de la igualdad

$$\frac{1}{2} \sum_k g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \varphi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \varphi^k} \right) = \sum_{m,k} \Gamma_{ij}^m g^{kl} g_{mk} = \sum_{m,k} \Gamma_{ij}^m \delta_{lm} = \Gamma_{ij}^l,$$

con lo que se concluye la demostración. $\square$

Al tener definida sobre toda variedad semi-Riemanniana una conexión lineal destacada, se pueden considerar conceptos como el transporte paralelo o las geodésicas sobre las mismas. En el caso del transporte paralelo, son estos ejemplos de conexiones las que justifican su nombre.

Ejemplo 4.2.8. Recuperemos el ejemplo de los espacios semi-euclídeos $\mathbb{R}_\nu^n$. Considerando las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$, $x^1, \dots, x^n$, se tiene que

$$g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j,$$

usando la notación introducida en el [Ejemplo 4.1.6](#). Así pues, la notación anterior nos lleva a que

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i, j, k \leq n,$$

con lo que se comprueba que la conexión de Levi-Civita en los espacios semi-euclídeos es la conexión natural en $\mathbb{R}^n$, introducida en el [Ejemplo 3.2.11](#). Por tanto, sabemos que, en estos casos, las geodésicas serán las rectas parametrizadas con velocidad constante.

Además, teniendo en cuenta que, para esta conexión lineal, los campos de vectores asociados a las coordenadas naturales son paralelos, es inmediato comprobar que el transporte paralelo de $\alpha(a) = p$ a $\alpha(b) = q$ para cualquier curva α es el isomorfismo canónico de $T_p\mathbb{R}_\nu^n$ a $T_q\mathbb{R}_\nu^n$ (definido a partir de los isomorfismos entre $\mathbb{R}^n$ y estos espacios tangentes). En particular, el transporte paralelo no depende de la curva tomada. Esta propiedad no es general de todas las variedades semi-Riemannianas. Cuando se cumple, se dice que se tiene paralelismo a distancia.

Al trabajar con la conexión de Levi-Civita en M , se puede realizar una clasificación de las geodésicas en la misma, gracias a que, al ser su campo velocidad paralelo, el producto escalar del campo velocidad por sí mismo permanece constante. La nomenclatura utilizada tiene sus raíces en la relatividad general.

Definición 4.2.9. Sea γ una geodésica de M . Se dice que γ es *luminosa* si $|\gamma'| = 0$, se dice que es de *tipo espacial* si $\langle \gamma', \gamma' \rangle > 0$ y se dice que es de *tipo temporal* si $\langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$.

Además, para las conexiones de Levi-Civita, podemos establecer un resultado que proporciona una condición suficiente sencilla de comprobar para que una curva sea una pregeodésica. Para ello, será necesario aplicar el siguiente lema que relaciona la derivada covariante a lo largo de una curva y de una reparametrización suya.

Lema 4.2.10. Sea $h : J \rightarrow I$ una reparametrización de una curva $\alpha : I \rightarrow M$ y sea $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Entonces $Z \circ h \in \mathfrak{X}(\alpha \circ h)$ y $(Z \circ h)' = \frac{dh}{dt}(Z' \circ h)$.

Demostración. En primer lugar, es claro que $Z \circ h \in \mathfrak{X}(\alpha \circ h)$ pues es composición de aplicaciones diferenciables y, por ello $Z \circ h$ es diferenciable.

Sea $s \in J$ y consideremos una carta local (U, φ) en torno a $\alpha(h(s))$. Entonces, usando definición de la derivada covariante a lo largo de una curva, en $(\alpha \circ h)^{-1}(U)$, entorno de s en J , así como que, por definición $(Z \circ h)^i(s) = (Z \circ h)_s(\varphi^i) = Z_{h(s)}(\varphi^i) = Z^i \circ h$ y, además, $(\alpha \circ h)' = \frac{dh}{dt}\alpha' \circ h$, usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} (Z \circ h)' &= \sum_i \frac{d(Z \circ h)^i}{ds} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \sum_i (Z \circ h)^i D_{(\alpha \circ h)'} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \\ &= \sum_i \frac{dh}{dt} \left(\frac{dZ^i}{dt} \circ h \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \sum_i (Z^i \circ h) D_{\frac{dh}{dt}(\alpha' \circ h)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \\ &= \frac{dh}{dt} \left(\sum_i \left(\frac{dZ^i}{dt} \circ h \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \sum_i (Z^i \circ h) D_{(\alpha' \circ h)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) \right) = \frac{dh}{dt}(Z' \circ h). \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es cierto. $\square$

Nótese que en el lema previo no se ha hecho uso de las propiedades específicas de la conexión de Levi-Civita, por lo que es un resultado válido para cualquier conexión que se considere sobre M . No obstante, en la demostración de la proposición siguiente sí será vital el uso de las propiedades de la conexión de Levi-Civita.

Proposición 4.2.11. Sea I un convexo abierto de $\mathbb{R}$ y $\alpha : I \rightarrow M$ una curva regular tal que α'' y α' son colineales en todo punto de I . Entonces α es pregeodésica o es de tipo luz en todo instante.

Demostración. Como α'' es colineal con α' , podemos poner $\alpha''(s) = f(s)\alpha'(s)$ para cada $s \in I$. Trabajando con una carta local en torno a $\alpha(s)$, es inmediato comprobar que $f \in \mathcal{F}(I)$.

Comencemos comprobando que, en esta situación, una reparametrización de α , $\beta = \alpha \circ h$ es una geodésica si y solo si $h'' + (f \circ h)(h')^2 = 0$. Para ello comenzamos hallando el vector velocidad de β en función del de α :

$$\beta'(s) = \frac{dh}{dt}(s)\alpha'(h(s)).$$

Con lo que, hallando su aceleración, por medio de las propiedades de la derivada covariante a lo largo de curvas y el lema previo:

$$\begin{aligned} \beta'' &= \left(\frac{dh}{dt} (\alpha' \circ h) \right)' = \frac{d^2h}{dt^2} (\alpha' \circ h) + \frac{dh}{dt} (\alpha' \circ h)' = \\ &= \frac{d^2h}{dt^2} (\alpha' \circ h) + \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 (\alpha'' \circ h) = \left(\frac{d^2h}{dt^2} + \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 (f \circ h) \right) (\alpha' \circ h). \end{aligned}$$

Como $\alpha' \neq 0$ pues es una curva regular, podemos concluir la afirmación.

Supongamos ahora que $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ nunca es cero y veamos que toda reparametrización de α , β de velocidad constante, es decir, con $\langle \beta', \beta' \rangle$ constante, es una geodésica. Sea $\beta = \alpha \circ h$ una reparametrización en estas condiciones. Entonces:

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \langle \alpha' \circ h, \alpha' \circ h \rangle = a \in \mathbb{R}.$$

Derivando la última igualdad, usando las propiedades de la derivada covariante a lo largo de curvas inducida por la conexión de Levi-Civita y, de nuevo, el lema previo, así como que α' y α'' son colineales:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \frac{dh}{dt} \frac{d^2h}{dt^2} \langle \alpha' \circ h, \alpha' \circ h \rangle + 2 \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\langle (\alpha' \circ h)', \alpha' \circ h \right\rangle = \\ &= 2 \frac{dh}{dt} \frac{d^2h}{dt^2} \langle \alpha' \circ h, \alpha' \circ h \rangle + 2 \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\langle \frac{dh}{dt} \alpha'' \circ h, \alpha' \circ h \right\rangle = \\ &= 2 \frac{dh}{dt} \frac{d^2h}{dt^2} \langle \alpha' \circ h, \alpha' \circ h \rangle + 2 \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \frac{dh}{dt} (f \circ h) \langle \alpha' \circ h, \alpha' \circ h \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle \alpha' \circ h, \alpha' \circ h \rangle \neq 0$ en todos los puntos y $\frac{dh}{dt} \neq 0$, pues h es un difeomorfismo (una reparametrización), entonces concluimos que $h'' + (f \circ h)(h')^2 = 0$ y, por ello, β es una geodésica.

La existencia de las reparametrizaciones de α de velocidad constante está asegurada por la posibilidad de llevar a cabo una reparametrización de velocidad 1 en toda curva regular, la reparametrización por longitud de arco estudiada en la asignatura de *Geometría de Curvas y Superficies* (ver Teorema 1.1.7 de [5]).

Veamos ahora que, si $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ para algún $s \in I$, entonces es siempre nulo. Para ello usaremos un argumento de conexión. Sea $A = \{t \in I / \langle \alpha', \alpha' \rangle(t) = 0\}$. Por hipótesis, A es no vacío y, además, es cerrado por ser la preimagen de 0 por una aplicación continua. Veamos que es abierto y, por tanto, $A = I$. Sea $t \in A$, por las propiedades de la derivada covariante a lo largo de una curva:

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 2 \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 2f \langle \alpha', \alpha' \rangle.$$

Así pues, siendo $g(s) = \langle \alpha', \alpha' \rangle(s)$, $g \in \mathcal{F}(I)$ es solución del problema de Cauchy de valor inicial:

$$\frac{dg}{dt} = 2fg, \quad g(t) = 0.$$

Como la aplicación nula también es solución de dicho problema de Cauchy, por la unicidad de soluciones de los mismos, existe un entorno de t en I tal que $g = 0$ y por ello, t es interior a A . Por tanto, todo punto de A es interior y A es abierto. $\square$

4.3. Cambio de tipo

Ya hemos comentado que una de las mayores herramientas que proporciona disponer de un tensor métrico en una variedad es el isomorfismo que induce entre campos de vectores y 1-formas, introducido en el [Lema 4.2.5](#). En esta sección extendaremos dicho $\mathcal{F}(M)$ -isomorfismo a campos tensoriales de orden superior.

Definición 4.3.1. Sean $1 \leq a \leq r$, $1 \leq b \leq s+1$ y A un campo tensorial de orden (r, s) sobre M . Se define $\downarrow_b^a A : \Lambda^1(M) \times \cdots \times \Lambda^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ como

$$(\downarrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) = A(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, X_b^*, \theta^a, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}),$$

para todos $\theta^i \in \Lambda^1(M)$, $i = 1, \dots, r-1$ y $X_j \in \mathfrak{X}(M)$, $j = 1, \dots, s+1$.

Lema 4.3.2. En las condiciones de la definición anterior, $\downarrow_b^a A$ es un campo tensorial de tipo $(r-1, s+1)$.

Demostración. Para comprobarlo, basta con ver que es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en cada una de sus componentes. Nótese que es inmediato que $\downarrow_b^a A$ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en todas sus componentes salvo en la $r-1+b$ -ésima, por serlo A . Teniendo en cuenta que la aplicación que manda X_b en X_b^* es también multilinear, se concluye que también es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la componente $r-1+b$. $\square$

Por tanto, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.3.3. En las condiciones anteriores, la aplicación $\downarrow_b^a : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^{r-1}(M)$ se denomina *bajada de índice*.

Lema 4.3.4. La bajada de índice es una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

Demostración. Usamos la notación de las definiciones anteriores. Tomemos $A, B \in \mathcal{T}_s^r(M)$ y sean $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Sean $\theta^i \in \Lambda^1(M)$, $i = 1, \dots, r-1$ y $X_j \in \mathfrak{X}(M)$, $j = 1, \dots, s+1$. Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} \downarrow_b^a (fA + gB)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) &= \\ &= (fA + gB)(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, X_b^*, \theta^a, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}) = \\ &= fA(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, X_b^*, \theta^a, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}) + \\ &\quad + gB(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, X_b^*, \theta^a, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}) = \\ &= f \downarrow_b^a A(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) + g \downarrow_b^a B(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}), \end{aligned}$$

con lo que se comprueba la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad. $\square$

De forma análoga, se puede definir la subida de índices. Para ello es útil introducir la siguiente notación, idéntica a la que se tiene para denotar la 1-forma métricamente equivalente a un campo de vectores.

Nótese que, gracias a lo probado en el [Lema 4.2.5](#), dada $\theta \in \Lambda^1(M)$ existe un único campo de vectores que sea métricamente equivalente a θ . Denotaremos a dicho campo de vectores como θ^* . Como la aplicación que manda θ en θ^* es la inversa de la definida en el [Lema 4.2.5](#), sabemos que también será $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

Definición 4.3.5. Sean $1 \leq a \leq r+1$, $1 \leq b \leq s$ y A un campo tensorial de orden (r, s) sobre M . Se define la aplicación $\uparrow_b^a A : \Lambda^1(M) \times \cdots \times \Lambda^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ como

$$(\uparrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = A(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, \theta^{a+1}, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, X_{b-1}, \theta^{a,*}, X_b, \dots, X_{s-1}),$$

para todos $\theta^i \in \Lambda^1(M)$, $i = 1, \dots, r+1$ y $X_j \in \mathfrak{X}(M)$, $j = 1, \dots, s-1$.

El mismo razonamiento que en el caso de la bajada de índices nos permite comprobar que $\uparrow_b^a A$ es un campo tensorial y por ello tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.3.6. En las condiciones anteriores, la aplicación $\uparrow_b^a : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r+1}(M)$ se denomina *subida de índices*. Usando el mismo razonamiento que para la bajada de índices, se comprueba que es $\mathcal{F}(M)$ -lineal.

El siguiente lema nos permite concluir que las operaciones de subida y bajada de índices son una inversa de la otra. Luego ambas son $\mathcal{F}(M)$ -isomorfismos entre los correspondientes módulos de campos de tensores. Nótese que, gracias a que ambas son aplicaciones $\mathcal{F}(M)$ -lineales, podemos considerarlas actuando sobre tensores en un punto $p \in M$, con lo que inducen también isomorfismos entre los productos tensoriales del espacio tangente de M en cada punto.

Lema 4.3.7. Supongamos $r \geq 1$ y sean $1 \leq a \leq r$ y $1 \leq b \leq s+1$. Entonces, considerando $\downarrow_b^a: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^{r-1}(M)$ y $\uparrow_b^a: \mathcal{T}_{s+1}^{r-1}(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M)$, se cumple que $\uparrow_b^a$ es la aplicación inversa de $\downarrow_b^a$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ y sean $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Lambda^1(M)$ y $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, teniendo en cuenta que el campo en la posición covariante b -ésima es precisamente $\theta^{a,*}$ en la segunda igualdad:

$$\begin{aligned} \uparrow_b^a (\downarrow_b^a A) (\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= (\downarrow_b^a A) (\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, \theta^{a+1}, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_{b-1}, \theta^{a,*}, X_b, \dots, X_s) = \\ &= A (\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, (\theta^{a,*})^*, \theta^{a+1}, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_{b-1}, X_b, \dots, X_s) = A (\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Un razonamiento análogo prueba que la composición en el orden contrario también es la identidad. $\square$

Nótese que hemos considerado en el lema anterior $r \geq 1$, pues es el único caso en que tiene sentido considerar la bajada de índices en $\mathcal{T}_s^r(M)$ ya que solo hemos definido campos de tensores de tipo (r, s) con $r, s \geq 0$.

Cabe destacar que en el caso $r = 1$ y $s = 0$, la bajada de índices se corresponde con la aplicación definida en el [Lema 4.2.5](#) y la subida de índices en el caso $r = 0$, $s = 1$ con su inversa. Por tanto, comprobamos cómo estos isomorfismos no son sino una generalización del definido en dicho lema. Esto hace más evidente aún que tanto la bajada como la subida de índices vienen determinadas por el tensor métrico de M .

Además, todos los campos tensoriales que se obtengan de uno dado mediante bajadas y subidas de índices contendrán la misma información (pues, haciendo uso del tensor métrico, se puede obtener uno cualquiera partiendo de otro). Por ello, se dice que todos ellos son métricamente equivalentes.

Consideremos ahora una carta local de M , (U, φ) y estudiemos cómo se expresa en coordenadas la actuación de estas nuevas operaciones. Para ello, comencemos notando que, como ya se ha mencionado, ambas actúan punto a punto, por lo que, en particular, se puede trabajar con la expresión de los campos de vectores en un U . Sean $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ los campos de vectores asociados a la carta local. Entonces, podemos expresar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)^* = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right)^* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) d\varphi^j = \sum_j \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle d\varphi^j = \sum_j g_{ij} d\varphi^j.$$

De forma análoga, concluimos que:

$$(d\varphi^i)^* = \sum_j g^{ij} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

Así pues, dado un campo de tensores, $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, con componentes en esta carta local, $A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$, entonces se tiene que, dados $1 \leq a \leq r$, $1 \leq b \leq s+1$, siendo $B_{j_1, \dots, j_{s+1}}^{i_1, \dots, i_{r-1}}$ las componentes de $\downarrow_b^a A$ en esta base:

$$\begin{aligned} B_{j_1, \dots, j_{s+1}}^{i_1, \dots, i_{r-1}} &= \downarrow_b^a A \left(d\varphi^{i_1}, \dots, d\varphi^{i_{r-1}}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_{s+1}}} \right) = \\ &= A \left(d\varphi^{i_1}, \dots, d\varphi^{i_{a-1}}, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{j_b}} \right)^*, \dots, d\varphi^{i_{r-1}}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_{b-1}}}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_{b+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_{s+1}}} \right) = \\ &= A \left(d\varphi^{i_1}, \dots, d\varphi^{i_{a-1}}, \sum_k g_{j_b k} d\varphi^k, \dots, d\varphi^{i_{r-1}}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_{b-1}}}, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_{b+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{j_{s+1}}} \right) = \\ &= \sum_k g_{j_b k} A_{j_1, \dots, j_{b-1}, j_{b+1}, \dots, j_{s+1}}^{i_1, \dots, i_{a-1}, k, \dots, i_{r-1}}. \end{aligned}$$

Y se razona de la misma forma para obtener que, en las mismas condiciones, las componentes $C_{j_1, \dots, j_{s-1}}^{i_1, \dots, i_{r+1}}$ de $\uparrow_b^a A$ vienen dadas por:

$$C_{j_1, \dots, j_{s-1}}^{i_1, \dots, i_{r+1}} = \sum_k g^{i_a k} A_{j_1, \dots, j_{b-1}, k, \dots, j_{s-1}}^{i_1, \dots, i_{a-1}, i_{a+1}, \dots, i_{r+1}}. \quad (4.3)$$

Gracias a estas dos operaciones (que conjuntamente se suelen denominar cambio de tipo), se puede definir la contracción de un tensor, no solo entre un índice covariante y uno contravariante, sino también entre dos índices covariantes o dos contravariantes. En estos últimos casos, la contracción dependerá del tensor métrico (al hacer los cambios de tipo), por lo que se denomina contracción métrica.

Definición 4.3.8. Sean $1 \leq a < b \leq s$ y r arbitrario. Se define la *contracción métrica* $C_{ab} : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow T_{s-2}^r(M)$ como $C_{ab} = C_a^{r+1} \circ \uparrow_b^{r+1}$.

De manera similar, dados $1 \leq a < b \leq r$ y s arbitrario, se define la *contracción métrica* $C^{ab} : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow T_s^{r-2}(M)$ como la aplicación $C^{ab} = C_{s+1}^a \circ \downarrow_{s+1}^b$.

En primer lugar, cabe destacar que, por ser composición de dos aplicaciones $\mathcal{F}(M)$ -lineales y que actúan punto a punto, todas las contracciones métricas son aplicaciones $\mathcal{F}(M)$ -lineales y que actúan punto a punto (es decir, que el valor en $p \in M$ de $C_{ab}A$ y $C^{ab}A$ es el mismo para todos los campos tensoriales, A , que sean iguales en p), por lo que se inducen aplicaciones lineales entre los productos tensoriales de los espacios tangentes a M en un punto.

Además, teniendo en cuenta cómo actúan tanto la contracción usual, como los cambios de tipo al expresar los campos de tensores respecto de una carta local (U, φ) , se tiene que, usando la notación de la definición, dado $A \in \mathcal{T}_s^r$ con componentes en dicha carta local $A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$

$$(C_{ab}A)_{j_1, \dots, j_{s-2}}^{i_1, \dots, i_r} = \sum_{p, q} g^{pq} A_{j_1, \dots, p, \dots, q, \dots, j_{s-2}}^{i_1, \dots, i_r}, \quad (4.4)$$

$$(C^{ab}A)_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_{r-2}} = \sum_{p, q} g_{pq} A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, p, \dots, q, \dots, i_{r-2}},$$

donde p y q están en las posiciones a y b , respectivamente, en ambos casos. Nótese que, gracias a la simetría de g , daría igual intercambiar el orden de p y q en todos los sumandos, por lo que concluimos que $C_{ab} = C_{ba}$ y $C^{ab} = C^{ba}$. Además, a partir de estas expresiones locales, es inmediato comprobar que la elección de $r+1$ (resp. $s+1$) a la hora de hacer el cambio de tipo en la definición de la contracción métrica C_{ab} (resp. C^{ab}) no es relevante y que, para cualquier $1 \leq c \leq r+1$ (resp. $1 \leq c \leq s+1$), se cumple $C_{ab} = C_a^c \circ \uparrow_b^c$ (resp. $C^{ab} = C_c^a \circ \downarrow_c^b$). En particular, si $X_1, \dots, X_{s-2} \in \mathfrak{X}(U)$ y $\theta_1, \dots, \theta_s \in \Lambda^1(U)$ se tiene que:

$$C_{ab}A(\theta_1, \dots, \theta_r, X_1, \dots, X_{r-2}) = \sum_{p, q} g^{pq} A\left(\theta_1, \dots, \theta_s, X_1, \dots, X_{a-1}, \frac{\partial}{\partial \varphi^p}, \dots, X_{b-2}, \frac{\partial}{\partial \varphi^q}, \dots, X_{r-2}\right). \quad (4.5)$$

Una expresión análoga se obtiene para la otra contracción métrica.

Calculemos a modo de ejemplo la expresión de la contracción métrica del tensor métrico, usando cartas locales.

Ejemplo 4.3.9. Sea $p \in M$ y sea (U, φ) una carta local entorno a p . Entonces, como $C(g) \in \mathcal{F}(M)$, la ecuación (4.4) establece que

$$C(g) = C_{12}(g) = \sum_{p, q} g^{pq} g\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^p}, \frac{\partial}{\partial \varphi^q}\right) = \sum_{p, q} g^{pq} g_{pq} = \sum_{pq} \delta_{pq} = n,$$

donde δ_{pq} es la delta de Kronecker.

Cuando se trabaja con tensores covariantes puros, es decir, de tipo $(0, s)$ con $s \geq 0$ puede ser útil expresar la actuación de los mismos usando una referencia (local) de campos ortonormales. En el Teorema 3.3.8 ya se vio la utilidad de este tipo de referencias. El siguiente teorema asegura que existen referencias de campos ortonormales definidas en un entorno de cada punto de una variedad, y no solo a lo largo de una curva. En [17] se puede encontrar una demostración basada en la aplicación exponencial de las geodésicas. La prueba presentada a continuación se basa en el algoritmo de Gram-Schmidt propio del álgebra lineal [1].

Teorema 4.3.10. Sean $p \in M$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_p M$. Entonces, existe una referencia de campos ortonormales en un entorno de p , $\{E_1, \dots, E_n\}$ tal que $E_i(p) = e_i$.

Demostración. Sabemos que existe una carta local (U, φ) en torno a p tal que los campos de vectores asociados a la misma cumplen que $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}(p) = e_i$ para $i = 1, \dots, n$. Denotaremos por simplicidad $X_i = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$.

Definimos para $i = 1$, $Z_1 = X_1$. Como $\langle Z_1, Z_1 \rangle(p) \neq 0$ pues $Z_1(p) = e_1$ es un vector unitario, entonces, por la continuidad del tensor métrico y de Z_1 , existe un entorno de p , $U_1 \subset U$, tal que Z_1 no es luminoso en U_1 .

Razonamos de forma iterada. Supongamos que hemos construido $Z_1, \dots, Z_{i-1}$, ortogonales dos a dos, que no son luminosos en un entorno de p , U_{i-1} , y que, en p , $Z_j(p) = e_j$. Definimos:

$$Z_i = X_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle X_i, Z_j \rangle}{\langle Z_j, Z_j \rangle} Z_j.$$

En primer lugar, nótese que Z_i está bien definido en U_{i-1} . Además, para cada $j < i$, se tiene que:

$$\langle Z_i, Z_j \rangle = \langle X_i, Z_j \rangle - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle X_i, Z_k \rangle}{\langle Z_k, Z_k \rangle} \langle Z_k, Z_j \rangle = \langle X_i, Z_j \rangle - \frac{\langle X_i, Z_j \rangle}{\langle Z_j, Z_j \rangle} \langle Z_j, Z_j \rangle = 0,$$

donde se ha utilizado la hipótesis de inducción para concluir que $\langle Z_k, Z_j \rangle = 0$ salvo si $k = j$. Además, en p , se cumple que $\langle X_i, Z_j \rangle(p) = \langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $j < i$, con lo que se concluye que $Z_i(p) = X_i(p) = e_i$. En particular, se tiene que $\langle Z_i, Z_i \rangle \neq 0$ en p . Por la continuidad del tensor métrico y del campo tensorial Z_i , existe un entorno U_i tal que Z_i no es luminoso en $U_i \subset U_{i-1}$.

Por tanto, comprobamos que se puede completar esta construcción de forma iterativa hasta conseguir $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ campos ortogonales (por lo que son una referencia de campos de vectores en U_n) que no son luminosos en $U_n \subset U$. Como $\langle Z_i, Z_i \rangle \neq 0$ en U_n , el cual podemos tomar conexo, se tiene que, por conexión, o bien $\langle Z_i, Z_i \rangle > 0$, en cuyo caso se define

$$E_i = \frac{1}{\langle Z_i, Z_i \rangle^{1/2}} Z_i,$$

o bien, $\langle Z_i, Z_i \rangle < 0$, y definimos:

$$E_i = \frac{1}{(-\langle Z_i, Z_i \rangle)^{1/2}} Z_i.$$

De esta forma se construye la referencia de campos ortonormales en U_n , entorno del punto p , dada por $\{E_1, \dots, E_n\}$. $\square$

Nótese que, en la demostración anterior, para cada $i = 1, \dots, n$, se cumple que, en cada punto $q \in U_n$, los subespacios generados por $E_1(q), \dots, E_i(q)$ y $X_1(q), \dots, X_i(q)$ son iguales.

Cabe destacar que, si se trabajase con variedades Riemannianas en lugar de semi-Riemannianas, al no existir vectores tangentes luminosos, no sería necesario reducir el entorno en que se trabaja en cada iteración, pues gracias a la independencia de los campos de vectores $X_1, \dots, X_n$, sabemos que $Z_i \neq 0$ y por ello se tendría que su norma tampoco es nula.

Si consideramos una referencia local de campo de vectores ortonormales $\{E_1, \dots, E_n\}$ definidos en un abierto U , siendo $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, se puede expresar todo campo de vectores, V , en U como

$$V = \sum_i \varepsilon_i \langle V, E_i \rangle E_i,$$

puesto que en cada punto p de U , $\{E_1|_p, \dots, E_n|_p\}$ forman una base de $T_p M$ en que se puede expresar $V(p)$. Hallando los productos escalares de $V(p)$ con $E_i|_p$ para todo $i = 1, \dots, n$, se comprueba la expresión anterior.

Usando dicha expresión, es inmediato comprobar que el producto escalar de dos campos de vectores V, W en U , puede obtenerse como:

$$\langle V, W \rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle V, E_i \rangle \langle W, E_i \rangle.$$

También podemos comprobar que, siendo $A \in \mathcal{T}_s^0(M)$, $1 \leq a < b \leq s$ y $X_1, \dots, X_{s-2} \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que:

$$C_{ab}A(X_1, \dots, X_{s-2}) = \sum_m \varepsilon_m A(X_1, \dots, X_{a-1}, E_m, \dots, X_{b-1}, E_m, \dots, X_{s-2}). \quad (4.6)$$

Para comprobar la veracidad de esta expresión, teniendo en cuenta que la contracción métrica actúa punto a punto, basta probar la igualdad en un punto $p \in U$. En p , podemos considerar una carta local definida en un entorno suyo tal que $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p = E_i|_p$, con lo que usando la expresión de la contracción métrica en coordenadas locales, se recupera la igualdad.

Si consideramos un tensor de tipo $(1, s)$, A , el cual se puede considerar como una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -multilineal, $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, dado $1 \leq b \leq s$ y $X_1, \dots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M)$, se puede expresar:

$$(C_b^1 A)(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, A(X_1, \dots, X_{b-1}, E_m, \dots, X_{s-1}) \rangle. \quad (4.7)$$

Para probar la expresión anterior, basta hacer un razonamiento análogo al de los tensores de tipos $(0, s)$, teniendo en cuenta que una vez se recurre a coordenadas locales en torno a p , $E_m^*|_p = \varepsilon_m d\varphi^m$.

Ya sabemos que toda contracción (no métrica) conmuta con toda derivación tensorial, por definición. Gracias a las propiedades de la conexión de Levi-Civita, las derivadas covariantes y también la diferencial covariante, conmutarán con las contracciones métricas. Este es otro de los motivos por los que la elección de la conexión de Levi-Civita para trabajar en las variedades semi-Riemannianas es especialmente interesante.

Proposición 4.3.11. Para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$, la derivación tensorial D_V conmuta tanto con los cambios de tipo como con las contracciones métricas. La diferencial covariante, D , también conmuta con los cambios de tipo y las contracciones métricas.

Demostración. Notemos que, por la definición de las contracciones métricas, teniendo en cuenta que las derivadas covariantes y la diferencial covariante conmutan con las contracciones usuales, basta con probar que también lo hacen con los cambios de tipo para comprobar que también conmutan con las contracciones métricas.

Probémoslo para la bajada de índices, pues para la subida se razona de forma análoga. Además, veremos que, dado $r \geq 1$, para todo $1 \leq a \leq r$ se tiene el resultado para $\downarrow_1^a$, pues se aligera la notación y el razonamiento es el mismo que en el caso general. Además, teniendo en cuenta que todas las aplicaciones consideradas actúan localmente, basta con comprobar que estas conmutan al actuar sobre campos tensoriales restringidos al entorno de definición de una carta local φ .

Sea $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ para cierto $s \in \mathbb{N}_0$. A partir de la expresión de las componentes respecto de dicha carta de la bajada de índices

$$(\downarrow_1^a A)_{j_1, \dots, j_{s+1}}^{i_1, \dots, i_{r-1}} = \sum_m g_{mj_1} A_{j_2, \dots, j_{s+1}}^{i_1, \dots, i_{a-1}, m, \dots, i_{r-1}} = (C_1^a g \otimes A)_{j_1, \dots, j_{s+1}}^{i_1, \dots, i_{r-1}},$$

con lo que concluimos que $\downarrow_1^a A = C_1^a g \otimes A$. Dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, como D_V conmuta con C_1^a , usando las propiedades de las derivaciones tensoriales, así como que el tensor métrico es paralelo:

$$\begin{aligned} D_V(\downarrow_1^a A) &= D_V(C_1^a(g \otimes A)) = C_1^a(D_V(g \otimes A)) = \\ &= C_1^a(D_V(g) \otimes A + g \otimes D_V(A)) = C_1^a(g \otimes D_V A) = \downarrow_1^a D_V A. \end{aligned}$$

Por tanto, se concluye el resultado para $\downarrow_1^a$ y las derivadas covariantes. Probémoslo ahora para la diferencial covariante. Sean $\theta^1, \dots, \theta^{r-1} \in \Lambda^1(M)$ y $X_1, \dots, X_{s+1}, V \in \mathfrak{X}(M)$. Se cumple que, por lo probado antes:

$$D(\downarrow_1^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}, V) = D_V(\downarrow_1^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \downarrow_1^a (D_V A) (\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) = D_V A (\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, X_1^*, \dots, \theta^{r-1}, X_2, \dots, X_{s+1}) = \\
&= DA (\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, X_1^*, \dots, \theta^{r-1}, X_2, \dots, X_{s+1}, V) = \downarrow_1^a (DA) (\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, X_2, \dots, X_{s+1}, V).
\end{aligned}$$

Y se concluye que $D(\downarrow_1^a A) = \downarrow_1^a (DA)$. $\square$

Nótese que, al igual que se hizo en la [Sección 3.1](#), solo se consideran cambios de tipo y contracciones que no afecten al último índice covariante, respecto al que se realiza la derivada covariante. Sin embargo, estas son las únicas que tiene sentido considerar, pues, por ejemplo $\downarrow_1^{r+1} A$ no está definido, aunque sí lo esté $\downarrow_1^{r+1} DA$.

Haciendo uso de las herramientas introducidas hasta el momento en las variedades semi-Riemannianas, se pueden definir generalizaciones de los operadores gradiente, divergencia, hessiana y laplaciano que se definen en $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.3.12. Dada una función $f \in \mathcal{F}(M)$, se define su *gradiente*, $grad(f)$ como el campo vectorial métricamente equivalente a $df \in \Lambda^1(M)$. Es decir, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que:

$$\langle grad(f), X \rangle = df(X).$$

Si consideramos una carta local de M , (U, φ) , se tiene que como, en U , $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} d\varphi^i$, entonces:

$$grad(f) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}. \quad (4.8)$$

Definición 4.3.13. Dado un campo tensorial $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, se denomina *divergencia* de A , $div(A)$, a la contracción del nuevo índice covariante en su diferencial covariante con cualquiera de los índices originales de A .

Nótese que la divergencia de un campo tensorial en general no está definida de forma única, si no que habrá $r+s$ divergencias de A distintas, en principio. Por ello es que son de especial interés los dos siguientes casos en que sí existe una única divergencia:

- Consideremos en primer lugar el caso en que A es un campo tensorial de tipo $(1,0)$ y por ello podemos identificarlo con un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(M)$. En este caso DV es un tensor de tipo $(1,1)$ y solo existe una contracción suya (la cual de hecho se puede definir sin necesidad de que la variedad sea semi-Riemanniana, solo es necesario que se haya elegido una conexión lineal en M).

Si consideramos una referencia local de campos ortogonales $\{E_1, \dots, E_n\}$ en M , teniendo en cuenta (4.7), se puede hallar la divergencia de V como:

$$div(V) = \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, D_{E_m} V \rangle. \quad (4.9)$$

Mientras que si se considera una carta local (U, φ) , teniendo en cuenta que, usando la notación habitual y (3.1)

$$D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} V = \sum_k \left(\frac{\partial V^k}{\partial \varphi^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k V^j \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k},$$

concluimos que las componentes de DV en esta carta local son $(DV)_i^j = \sum_k \left(\frac{\partial V^k}{\partial \varphi^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k V^j \right)$. Por ello:

$$div(V) = \sum_l (DV)_l^l = \sum_l \left(\frac{\partial V^l}{\partial \varphi^l} + \sum_j \Gamma_{lj}^l V^j \right). \quad (4.10)$$

- Consideremos ahora que $A \in \mathcal{T}_2^0(M)$ es un campo tensorial simétrico, es decir, que para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $A(X, Y) = A(Y, X)$. En este caso, es claro que $div(A) = C_{13}(DA) = C_{23}(DA) \in \Lambda^1(M)$ y solo existe una única divergencia.

Usando la misma referencia local ortonormal que en el caso anterior, podemos expresar la divergencia usando (4.6) como:

$$\operatorname{div}(A)(X) = C_{13}(DA)(X) = \sum_m (DA)(E_m, X, E_m) = \sum_m (D_{E_m} A)(E_m, X).$$

Mientras que si consideramos la carta local del caso previo, se pueden hallar las componentes de $\operatorname{div}(A)$ en ella como

$$\operatorname{div}(A)_i = \operatorname{div}(A) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \sum_{p,q} g^{pq} A_{ip;q}, \quad (4.11)$$

siendo $A_{jk;m}$ las componentes en esta carta local de DA (donde se separa con ; la componente respecto a la que se deriva) y se usa (4.4).

Ejemplo 4.3.14. Calculemos a modo de ejemplo la divergencia de fg , donde $f \in \mathcal{F}(M)$ y g es el tensor métrico de M , pues más adelante nos será de utilidad.

Como g es un tensor de tipo $(0,2)$ simétrico, fg también lo es y, de acuerdo con lo discutido previamente, existe una única divergencia suya. Usando la regla de Leibniz para la derivada covariante, así como que g es paralelo:

$$\operatorname{div}(fg) = C_{13}(D(fg)) = C_{13}(D(f) \otimes g + fD(g)) = C_{13}(df \otimes g).$$

Sean $p \in M$ y $E_1, \dots, E_n$ una referencia ortonormal en torno a p . Entonces podemos calcular para cada $k = 1, \dots, n$, usando (4.6)

$$\operatorname{div}(fg)(E_k) = C_{13}(df \otimes g)(E_k) = \sum_m \varepsilon_m df(E_m) g(E_k, E_m) = \sum_m \varepsilon_m \varepsilon_n \delta_{mk} df(E_m) = df(E_k),$$

donde δ_{mk} es la delta de Krönecker. Así pues, como ambos coinciden sobre una base de $T_p M$, $\operatorname{div}(fg)(p) = df(p)$ y como esto se cumple para todo $p \in M$, hemos concluido el ejemplo.

Definición 4.3.15. La *hessiana* de una función $f \in \mathcal{F}(M)$ se define como su diferencial covariante segunda:

$$H^f = D(Df).$$

Lema 4.3.16. Dada $f \in \mathcal{F}(M)$, su hessiana es un campo tensorial de tipo $(0,2)$ simétrico y tal que:

$$H^f(X, Y) = XYf - (D_X Y)f = \langle D_X(\operatorname{grad} f), Y \rangle, \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Por las propiedades de la diferencial covariante, sabemos que $Df = df$, por lo que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, utilizando la regla del producto de la derivada covariante en la tercera igualdad

$$\begin{aligned} H^f(X, Y) &= D(df)(X, Y) = D_Y(df)(X) = \\ &= Y(df(X)) - df(D_Y X) = YX(f) - D_Y X(f) = XY(f) - D_X Y(f), \end{aligned}$$

donde utilizamos en la última igualdad la definición de los corchetes de Lie y su relación con la conexión de Levi-Civita, $XY - YX = [X, Y] = D_X Y - D_Y X$.

Esta última igualdad permite comprobar la simetría de la hessiana de f . Además, prueba la primera de las igualdades buscadas. Para demostrar la segunda, utilizamos la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con el tensor métrico y la definición del gradiente de una función:

$$\langle D_X(\operatorname{grad}(f)), Y \rangle = X \langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle - \langle \operatorname{grad}(f), D_X Y \rangle = XY(f) - D_X Y(f).$$

Por tanto, queda probada la cadena de igualdades del enunciado. $\square$

Dada $f \in \mathcal{F}(M)$, estas igualdades nos permiten calcular de forma sencilla las componentes de H^f en una carta local (U, φ) :

$$(H^f)_{ij} = H^f \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} (f) - D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} (f) = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial \varphi^k}. \quad (4.12)$$

Definición 4.3.17. Dada $f \in \mathcal{F}(M)$ se define el *laplaciano* de f , Δf , como la divergencia de su gradiente:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) \in \mathcal{F}(M).$$

Nótese que, como $\operatorname{grad}(f)$ es un campo de vectores, Δf está definido de forma única a pesar de ser una divergencia. Además, podemos comprobar que, usando los cambios de tipo

$$\Delta(f) = CD(\operatorname{grad}(f)) = CD(\uparrow_1^1 df) = C \uparrow_1^1 (Ddf) = C_{12}(Ddf) = D_{12}H^f,$$

con lo que concluimos que el laplaciano de f es la contracción de su hessiana. Esto nos permite hallar su expresión en una carta local (U, φ) a partir de (4.12) como:

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} (H^f)_{ij} = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial \varphi^k} \right). \quad (4.13)$$

Ejemplo 4.3.18. Consideremos ahora el espacio euclídeo, $\mathbb{R}^n$, como variedad Riemanniana y comprobemos que las definiciones anteriores coinciden con las que normalmente se usan en el ámbito del Análisis Matemático. Para ello, consideremos las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$, $x^1, \dots, x^n$ y sus campos de vectores asociados que, para simplificar la notación, denotaremos $\partial_1, \dots, \partial_n$. Recordemos que respecto de esta carta local los símbolos de Christoffel son nulos y las componentes del tensor métrico y su inverso son $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$, la delta de Kronecker.

Así pues, a partir de la ecuación (4.8), concluimos que la expresión del gradiente de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ en las coordenadas naturales es:

$$\operatorname{grad}(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Tras la identificación de cada espacio tangente con $\mathbb{R}^n$, comprobamos que es el vector de las derivadas parciales de f .

Análogamente, utilizando la expresión de la divergencia de un campo de vectores, V (que interpretamos como una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo con la identificación entre los espacios tangentes y $\mathbb{R}^n$), se tiene que, por (4.10):

$$\operatorname{div}(V) = \sum_l \frac{\partial V^l}{\partial x^l}.$$

Dada $f \in \mathcal{F}(M)$, haciendo uso de las expresiones (4.12) y (4.13), concluimos que

$$(H^f)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2},$$

con lo que podemos ver que las componentes en las coordenadas naturales de H^f son las mismas que las de la matriz hessiana de f definida en Análisis y que ambos laplacianos también coinciden.

4.4. Curvatura

Al igual que en la sección anterior, M será una variedad semi-Riemanniana de dimensión n con tensor métrico g en la que consideramos la conexión de Levi-Civita D .

En esta sección introducimos el concepto de curvatura semi-Riemanniana, central en el estudio de las variedades semi-Riemannianas. En general y al contrario de lo que ocurre en $\mathbb{R}^n$ donde el Lema de Schwarz asegura la igualdad de las derivadas parciales segundas cruzadas, en variedades semi-Riemannianas las derivadas covariantes no conmutan. Por ello, se introduce este tensor que, en cierta forma, mide cómo falla la conmutación de las segundas derivadas covariantes.

La curvatura es una herramienta de gran utilidad a la hora de discernir qué variedades semi-Riemannianas son localmente iguales, pues se conserva por isometrías (locales). Esto nos permitirá probar, por ejemplo, que la esfera y el plano no son localmente isométricas (ver Sección 4.5).

Históricamente, este concepto se introduce en la geometría Riemanniana usando otro punto de partida: el estudio de la curvatura de las curvas (definida de forma similar análoga al caso de curvas en el espacio) definidas sobre los cortes de una variedad de dimensión m sumergida en $\mathbb{R}^n$ con hiperplanos de dimensión $n - m + 1$ ortogonales al plano tangente a M en un punto dado (una vez este se ve dentro de $\mathbb{R}^n$) de $\mathbb{R}^n$. Estas curvaturas dependen de la forma en que M esté inmersa en $\mathbb{R}^n$ (no se conservan por isometrías), pero a cada plano vectorial de $T_p M$, Π , se le puede asignar una combinación de estas curvaturas, denominada curvatura seccional de Π , de forma que esta esté determinada de forma intrínseca. La curvatura de Riemann se introduce entonces como un tensor que contiene la información de todas las curvas seccionales en cada punto de M y que sigue estando dado de forma intrínseca, por lo que proporciona información de cómo se curva una variedad intuitivamente. En este trabajo se introducirán los conceptos de forma intrínseca, trabajando directamente con variedades abstractas. Este otro enfoque puede encontrarse en el Capítulo 5 de [15]. Ambos enfoques se pueden relacionar utilizando el concepto de subvariedades semi-Riemannianas que se trabaja en la Sección 4.6

Lema 4.4.1. La aplicación $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R_{XY}(Z) = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z,$$

donde $[D_X, D_Y]Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z$, es $\mathcal{F}(M)$ -multilineal y, por ello, se puede entender como un campo tensorial de tipo $(1, 3)$, el cual se denomina *tensor de curvatura de Riemann* de M .

Demostración. En primer lugar, nótese que todas las operaciones que intervienen en la definición de R son $\mathbb{R}$ -lineales. Por tanto, la comprobación para la suma de campos de vectores es trivial.

Tomemos ahora $f \in \mathcal{F}(M)$ y sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

- Teniendo en cuenta que $[fX, Y] = -Y(f)X + f[X, Y]$, se cumple que:

$$\begin{aligned} R_{fX,Y}Z &= D_{[fX,Y]}Z - [D_{fX}, D_Y]Z = D_{-Y(f)X + f[X,Y]}Z - [fD_X, D_Y]Z = \\ &= -Y(f)D_X Z + fD_{[X,Y]}Z - fD_X D_Y(Z) + D_Y(fD_X Z) = \\ &= -Y(f)D_X Z + fD_{[X,Y]}Z - fD_X D_Y(Z) + fD_Y D_X Z + Y(f)D_X Z = fR_{X,Y}Z. \end{aligned}$$

- Razonando de forma análoga, usando ahora que $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{X,fY}Z &= D_{[X,fY]}Z - [D_X, D_{fY}]Z = D_{X(f)Y + f[X,Y]}Z - [D_X, fD_Y]Z = \\ &= X(f)D_Y Z + fD_{[X,Y]}Z - D_X(fD_Y(Z)) + fD_Y D_X Z = \\ &= X(f)D_Y Z + fD_{[X,Y]}Z - fD_X D_Y(Z) - X(f)D_Y Z + fD_Y D_X Z = fR_{X,Y}Z. \end{aligned}$$

- Finalmente, haciendo cálculos análogos para Z :

$$\begin{aligned} R_{X,Y}fZ &= D_{[X,Y]}fZ - [D_X, D_Y]fZ = fD_{[X,Y]}Z + [X, Y](f)Z - \\ &- D_X(Y(f)Z + fD_Y Z) + D_Y(X(f)Z + fD_X Z) = fD_{[X,Y]}Z + [X, Y](f)Z - X(Y(f))Z - Y(f)D_X Z - \\ &- X(f)D_Y Z - fD_X D_Y Z + Y(X(f))Z + X(f)D_Y Z + Y(f)D_X Z + fD_Y D_X Z = fR_{X,Y}Z. \end{aligned}$$

Así pues, concluimos que R es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en cada componente. $\square$

Como R es un campo tensorial se puede trabajar con él actuando sobre vectores tangentes, a pesar de que se haya definido actuando sobre campos de vectores y las operaciones que definen R (corchetes de Lie y derivada covariante) no estén definidas para vectores tangentes. Esto presenta una gran ventaja pues permite, como se hace con el resultado siguiente, probar las propiedades de la curvatura cuando actúa sobre vectores tangentes extendiéndolos por campos de vectores que posean propiedades útiles (pues R no puede depender de la extensión al actuar punto a punto) y, a partir de dichos resultados, concluir que estas propiedades también son ciertas cuando R actúa sobre cualesquiera campos de vectores.

Proposición 4.4.2. Sea $p \in M$ y sean $x, y, z, v, w \in T_p M$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $R_{xy} = -R_{yx}$.

2. $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$.
3. $R_{xyz} + R_{yzx} + R_{zxy} = 0$ (Identidad de Bianchi.)
4. $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$ (Simetría por pares).

Demostración. Consideramos campos de vectores X, Y, Z, V, W en un entorno U de p que extiendan a x, y, z, v, w , respectivamente. Para ello, tomamos una carta local entorno a p , y consideramos los campos de vectores X, Y, Z, V, W que extienden a x, y, z, v, w tales que, al expresarlos en la referencia asociado a la carta local, sus coordenadas son constantes. De esta forma, por la $\mathbb{R}$ -linealidad de los corchetes de Lie y como el corchete de dos campos de vectores asociados a una carta local es siempre cero, concluimos que el corchete de Lie de dos campos de vectores cualesquiera entre X, Y, Z, V, W es siempre 0. este tipo de elección de los campos de vectores que extiendan a vectores tangentes será recurrente al trabajar con el tensor de curvatura.

1. A partir de la anticonmutatividad de los corchetes de campos de vectores (y de $[D_X, D_Y]$), es inmediato comprobar que

$$R_{XY}Z = -R_{YX}Z,$$

para cualquier campo de vectores en U , Z . Por tanto, concluimos que $R_{XY} = -R_{YX}$ y, en particular, $R_{xy} = -R_{yx}$.

2. Veamos en primer lugar que $\langle R_{xy}v, v \rangle = 0$, para todo $v \in T_pM$. Una vez se tenga dicho resultado, aplicándolo a $v + w$, se tiene que, por la bilinealidad del tensor métrico:

$$0 = \langle R_{xy}v + w, v + w \rangle = \langle R_{xy}v, v \rangle + \langle R_{xy}w, v \rangle + \langle R_{xy}v, w \rangle + \langle R_{xy}w, w \rangle = \langle R_{xy}w, v \rangle + \langle R_{xy}v, w \rangle.$$

Para probar que $\langle R_{xy}v, v \rangle = 0$, partimos de la definición de la curvatura, teniendo en cuenta que, por la elección hecha, $[X, Y] = 0$, y usando la simetría de la conexión de Levi-Civita

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}V, V \rangle &= \langle D_Y D_X V, V \rangle - \langle D_X D_Y V, V \rangle = \\ &= Y \langle D_X V, V \rangle - \langle D_X V, D_Y V \rangle - X \langle D_Y V, V \rangle + \langle D_Y V, D_X V \rangle = \\ &= \frac{1}{2} Y X \langle V, V \rangle - \frac{1}{2} X Y \langle V, V \rangle = \frac{1}{2} [Y, X] \langle V, V \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado en la tercera igualdad la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita con la métrica, $X \langle V, V \rangle = \langle D_X V, V \rangle + \langle V, D_X V \rangle = 2 \langle V, D_X V \rangle$ e igual para D_Y .

3. Definimos $G(R_{XY}Z) = R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y$, con lo que una permutación cíclica de X, Y, Z no altera $G(R)$. En general, se puede definir G como una aplicación actuando sobre las aplicaciones de $\mathfrak{X}(M)^3$ en $\mathfrak{X}(M)$. De esta forma, G es claramente $\mathbb{R}$ -lineal. Teniendo en cuenta de nuevo que $[X, Y] = 0$, así como la $\mathbb{R}$ -linealidad de G

$$\begin{aligned} G(R_{X,Y}Z) &= G(D_Y D_X Z) - G(D_X D_Y Z) = G(D_X D_Z Y) - G(D_X D_Y Z) = \\ &= D_X(D_Z Y - D_Y Z) + D_Y D_X Z + D_Z D_Y X - D_Y D_Z X - D_Z D_X Y = \\ &= D_X([Z, Y]) + D_Y([X, Z]) + D_Z([Y, X]) = 0 \end{aligned}$$

usando en la penúltima igualdad la simetría de la conexión de Levi-Civita y las propiedades de los campos de vectores escogidos.

4. Utilizando el punto 3., se tiene que:

$$\langle G(R_{YV}X), W \rangle = 0.$$

Sumando esta igualdad aplicada a las cuatro permutaciones cíclicas de Y, V, X, W se tiene que:

$$\langle G(R_{YV}X), W \rangle + \langle G(R_{VX}W), Y \rangle + \langle G(R_{XW}Y), V \rangle + \langle G(R_{WY}V), X \rangle = 0.$$

Expandiendo esta expresión (se han subrayado del mismo color los términos que o bien se cancelan entre sí o se suman):

$$0 = \langle \underline{R_{YV}X}, \underline{W} \rangle + \langle \underline{R_{VX}W}, \underline{Y} \rangle + \langle \underline{R_{XW}Y}, \underline{V} \rangle + \langle \underline{R_{WY}V}, \underline{X} \rangle +$$

$$+\langle R_{XW}Y, V \rangle + \langle R_{WY}X, V \rangle + \langle R_{YX}W, V \rangle + \langle R_{WY}V, X \rangle + \langle R_{YV}W, X \rangle + \langle R_{VW}Y, X \rangle.$$

Cancelando términos dos a dos, usando las simetrías de la curvatura probadas en los apartados previos:

$$2(\langle R_{XY}V, W \rangle + \langle R_{WV}X, Y \rangle) = 0.$$

Y usando el punto 1. y la bilinealidad del tensor métrico, se concluye el resultado, evaluando la igualdad en p .

De esta forma se concluye la demostración de las cuatro simetrías de la curvatura. $\square$

Nótese que en la prueba del resultado anterior han sido fundamentales tanto la simetría de la conexión de Levi-Civita como su compatibilidad con la métrica. Así pues, estas propiedades dan lugar a simetrías en el tensor de curvatura (que se podría definir para cualquier conexión lineal), lo que justifica su elección, al menos en parte.

A partir de estas simetrías, se puede deducir una simetría sobre la derivada covariante del tensor de curvatura, DR , el cual es un tensor $(1, 4)$, que interpretamos como que asigna a cuatro campos de vectores en M , X, Y, Z, V , el campo de vectores $(D_Z R)_{XY} V$. Nótese que, al ser DR un campo tensorial, tiene sentido considerar para cada $x, y, z, v \in T_p M$ el vector tangente $(D_Z R)_{xy} v$. Por comodidad de la escritura, en ocasiones se denota $(D_Z R)(x, z)(v)$, y de forma análoga cuando se considera DR actuando sobre campos de vectores.

A continuación enunciamos el resultado relativo a dicha simetría, por su utilidad a la hora de probar algunas igualdades de la curvatura. La prueba puede hacerse mediante un cálculo en coordenadas muy extenso, aun cuando se extienden los vectores tangentes por campos de vectores cuyos corchetes de Lie son cero. No obstante, haciendo uso de los sistemas de coordenadas normales para realizar la extensión de los campos de vectores, esta se prueba de forma mucho más sencilla. Para poder centrarnos en el estudio de los productos warped, se ha decidido omitir el estudio pormenorizado de la aplicación exponencial en el contexto de las geodésicas, necesario para introducir el concepto de los entornos y las coordenadas normales. Por ello no se presenta la demostración del resultado, que puede consultarse, junto con los conceptos relativos a la aplicación exponencial en el Capítulo 3 de [17].

Proposición 4.4.3 (Segunda identidad de Bianchi). Sean $x, y, z \in T_p M$. Se cumple que:

$$(D_Z R)(x, y) + (D_X R)(y, z) + (D_Y R)(z, x) = 0.$$

Pasamos ahora a establecer la expresión local del tensor de curvatura cuando se trabaja con una carta local.

Lema 4.4.4. Sea (U, φ) una carta local. Entonces en U , se puede expresar:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^l}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \sum_i R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i},$$

donde las funciones R_{jkl}^i se denominan componentes de R y están dados por:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial \varphi^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial \varphi^k} + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m.$$

Demostración. Nótese que el corchete de Lie de dos campos de vectores asociados a una carta local cualesquiera es siempre nulo. Así pues, por la definición de la derivada covariante:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^l}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^l}} \left(D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^k}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) - D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^k}} \left(D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^l}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right).$$

Calculamos la expresión del primer término haciendo uso de los símbolos de Christoffel:

$$D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^l}} \left(D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^k}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^l}} \left(\sum_i \Gamma_{kj}^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \sum_i \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial \varphi^l} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \sum_{i,m} \Gamma_{kj}^i \Gamma_{li}^m \frac{\partial}{\partial \varphi^m}.$$

Intercambiando en el segundo sumando las etiquetas i y m se recuperan el primer y tercer sumando de la expresión de R_{jkl}^i . Razonando de forma análoga con el otro término de las derivadas covariantes y restando ambas expresiones, se llega al resultado. $\square$

Históricamente, se desarrolló primero la teoría de la geometría diferencial basada en coordenadas y, más tarde, la versión intrínseca que principalmente se estudia en este trabajo. Es por ello que la ordenación de los índices de las componentes de R no sigue el orden en que se escriben los campos de vectores. De hecho, si se quiere expresar R como actuando sobre tres campos de vectores, X, Y, Z , para dar uno nuevo, se debería expresar, $R_{XYZ} = R(Z, X, Y)$. Además, cabe destacar que la forma clásica de bajar el índice contravariante de R es mediante la bajada de índices $\downarrow_1^1$, con lo que se utiliza la notación R_{ijkl} de forma estándar para denotar a las componentes de $\downarrow_1^1 R$ respecto de una carta local (U, φ) :

$$R_{ijkl} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, R \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^l} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right\rangle.$$

El tensor de curvatura de Riemann es complejo, pues se trata de una función que dados tres campos de vectores proporciona otro. Para poder disponer de la misma información, pero expresada de forma más sencilla, se introduce la curvatura seccional que ya es una función real, pero a cambio toma valores en el conjunto de planos vectoriales de los espacios tangentes a puntos de M .

Definición 4.4.5. Sea $p \in T_p M$. Un subespacio $\Pi \subset T_p M$ de dimensión dos se denomina *plano tangente* a M en p . Se dirá que Π es *no degenerado* si $g_p|_{\Pi}$ es una forma bilineal no degenerada.

Para definir la curvatura seccional juega un papel fundamental la siguiente función definida para pares de vectores $v, w \in T_p M$:

$$Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2.$$

Lema 4.4.6. Un plano tangente Π es no degenerado si y solo si $Q(v, w) \neq 0$ para una base $\{v, w\}$ de Π , si y solo $Q(v, w) \neq 0$ para cualquier base $\{v, w\}$ de Π . Además, $Q(v, w) > 0$ si $g|_{\Pi}$ es definida y $Q(v, w) < 0$ si es indefinida.

Demostración. Comencemos notando que una de las implicaciones de la primera afirmación es inmediata. Para demostrar la implicación opuesta, consideremos $v, w, u, z \in \Pi$ tales que $\{v, w\}, \{u, z\}$, sean sendas bases de Π . Entonces podemos expresar $u = av + bw$ y $z = cv + dw$. De esta forma, es inmediato concluir que,

$$Q(u, z) = \det(B)^2 Q(v, w),$$

siendo B la matriz de cambio de base, invertible y por ello de determinante no nulo. Para el segundo resultado basta utilizar el criterio de Sylvester [14]. $\square$

Lema 4.4.7. Sea Π un plano tangente a M en un punto p , no degenerado. El número

$$K(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{Q(v, w)},$$

es independiente de la base $\{v, w\}$ de Π elegida. Se denomina *curvatura seccional* de Π y se denota por $K(\Pi)$.

Demostración. Sean $\{v, w\}$ y $\{x, y\}$ dos bases de Π . Entonces sabemos que se pueden expresar los vectores de la primera en términos de la segunda

$$v = ax + by, \quad w = cx + dy,$$

para ciertos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de forma que el determinante de la matriz de coeficientes, $ad - bc$, es no nulo. Usando la multilinealidad de $\mathbb{R}$ y la bilinealidad del producto escalar, así como las simetrías de R , en particular que, como $R_{xx} = -R_{xx}$, se tiene que $R_{xx} = 0$ y, por idénticos motivos, $R_{yy} = 0$:

$$\begin{aligned} \langle R_{vw}v, w \rangle &= \langle R_{ax+by, cx+dy}ax + by, cx + dy \rangle = \langle (acR_{xx} + bdR_{yy} + (ad - bc)R_{xy})(ax + by), cx + dy \rangle = \\ &= (ad - bc) \langle ac \langle R_{xy}x, x \rangle + bd \langle R_{xy}y, y \rangle + (ad - bc) \langle R_{xy}x, y \rangle \rangle = (ad - bc)^2 \langle R_{xy}x, y \rangle, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que, de nuevo por las simetrías de la curvatura, $\langle R_{xy}x, x \rangle = 0 = \langle R_{xy}y, y \rangle$.

Razonando de manera análoga a la demostración del lema previo

$$Q(v, w) = (ad - bc)^2 Q(x, y),$$

con lo que se demuestra la proposición de forma inmediata. $\square$

Así pues, la curvatura seccional K es una función bien definida del conjunto de los planos tangentes a M no degenerados en $\mathbb{R}$, que claramente está determinada (de forma conjunta) por el tensor de curvatura y el tensor métrico.

No obstante, en los planos tangentes degenerados de M no está bien definida la curvatura, lo cual plantea inicialmente problemas al tratar de recuperar propiedades de R a partir de K . No obstante, el resultado siguiente nos asegura que dados dos vectores tangentes que generen un plano degenerado, siempre hay otros suficientemente cerca que generan un plano no degenerado. Este hecho nos permitirá, usando argumentos de continuidad, recuperar información del tensor de curvatura a partir de la curvatura seccional.

Si bien los productos escalares en un espacio vectorial no tienen por qué dar lugar a una métrica, teniendo en cuenta que toda norma en un espacio vectorial de dimensión finita es equivalente, existe una y solo una topología de espacio normado en cada espacio vectorial de dimensión finita. Es respecto a dicha topología que se dota de sentido a la proximidad de vectores en el siguiente resultado.

Lema 4.4.8. Dados vectores v, w en un espacio de dimensión finita mayor o igual a 2 con producto escalar, V , existen vectores $\bar{v}, \bar{w}$, arbitrariamente próximos a v y w , respectivamente, que generan un plano no degenerado.

Demostración. En primer lugar, nótese que, si la dimensión del espacio es mayor o igual a 2, todo par de vectores puede aproximarse arbitrariamente por un par de vectores independientes, pues si v, w lo son, no hay nada que probar y, si no son linealmente independientes, basta tomar z independiente con ellos y unitario en la norma que se considere en el espacio vectorial y considerar $v, w + \varepsilon z$ para ε tan pequeño como se quiera. Así pues, consideraremos directamente que v y w son independientes.

Si v, w generan un plano no degenerado, Π , de nuevo no hay nada que probar. Supongamos pues que el plano que generan es degenerado:

- Si v es de tipo null, tomamos $x \in V$ tal que $\langle v, w \rangle \neq 0$, el cual sabemos que ha de existir.
- Si v no es de tipo null, tomamos $x \in V$ no nulo de carácter causal opuesto al de v , el cual existe por ser Π degenerado y el producto escalar por ello no degenerado pero tampoco definido. En particular se tendrá por tanto que v y x son linealmente independientes.

En ambos casos se cumple que $Q(v, x) < 0$. Veamos que, para δ suficientemente pequeño, v y $w + \delta x$ generan Π . Teniendo en cuenta que $Q(v, w) = 0$ y expandiendo

$$Q(v, w + \delta x) = \langle v, v \rangle (\langle w, w \rangle + 2\delta \langle x, w \rangle + \delta^2 \langle x, x \rangle) - (\langle v, w \rangle + \delta \langle v, x \rangle)^2 = 2\delta b + \delta^2 Q(v, x),$$

donde $b = \langle x, w \rangle$ es una constante. Si $b = 0$, como $Q(v, x) < 0$, entonces para todo δ , $Q(v, w + \delta x) \neq 0$ y por ello generan Π . Si $b \neq 0$, $Q(v, w + \delta x)$ se anulará si y solo si $\delta = 0$ o $\delta = 2b/Q(v, x)$, con lo que, para δ menor (en valor absoluto) que esta última cantidad, se tiene el resultado. $\square$

Al igual que se ha hecho hasta ahora, para poder afirmar que el tensor de curvatura R está determinado por K , primero comprobamos que uno es cero si y solo si lo es el otro. Por la definición de K es inmediato que si $R = 0$, entonces $K = 0$. El siguiente resultado demuestra el recíproco.

Proposición 4.4.9. Sea $p \in M$. Si $K = 0$ en p , es decir si para todo plano no degenerado de $T_p M$, Π , se tiene que $K(\Pi) = 0$, entonces, $R = 0$ en p .

Demostración. Dividamos esta demostración en tres pasos:

1. Comencemos viendo que si $K = 0$ en p , entonces para todos $v, w \in T_p M$ se tiene que $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0$. Si v, w generan un plano no degenerado, $\Pi_{v,w}$ como $K(\Pi_{v,w}) = 0$, a partir de la definición de la curvatura seccional, es inmediato que $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0$. Supongamos pues que v, w no generan un plano no degenerado.

Por el lema previo, se pueden obtener (v, w) como límite de pares de vectores de $T_p M$ tales que generen planos tangentes no degenerados, $\{(v_k, w_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Como la aplicación que a cada $(x, y, z, r) \in T_p M^4$ lo manda en $\langle R_{xyz}, r \rangle$ es multilineal, por ser V de dimensión finita (y considerar la topología de espacio normable), es continua y por ello lo es la que envía (x, y) en $\langle R_{xy}x, y \rangle$. Por tanto, como $\langle R_{v_k w_k} v_k, w_k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tomando límites usando la continuidad, se concluye que $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0$

2. Veamos que para todo $v, w \in T_p M$, $R_{vw}v = 0$. Sea $x \in T_p M$ arbitrario. Entonces por el resultado previo y las simetrías de la curvatura:

$$0 = \langle R_{v, w+x}v, w+x \rangle = \langle R_{vw}v, w \rangle + \langle R_{vx}v, w \rangle + \langle R_{vw}v, x \rangle + \langle R_{vx}v, x \rangle = 2 \langle R_{vw}v, x \rangle.$$

Como esta igualdad se cumple para cualquier vector tangente a M en p , x , por ser g no degenerado, se cumple que $R_{vw}v = 0$.

3. Veamos que $R_{vw}x = R_{wx}v$ para todo $v, w, x \in T_p M$. Para ello utilizamos de nuevo la idea de polarizar la igualdad obtenido en el punto anterior, es decir, calculamos:

$$0 = R_{v+x, w}(v+x) = R_{vw}v + R_{xw}v + R_{vw}x + R_{xw}x = R_{xw}v + R_{vw}x.$$

Usando la primera de las simetrías de la curvatura se concluye el resultado.

Utilizamos ahora la primera identidad de Bianchi de manera que, como hemos comprobado que R no se altera por una permutación cíclica de los campos de vectores sobre los que actúa, concluimos que para todos $v, w, x \in T_p M$

$$3R_{vw}x = 0,$$

con lo que concluimos finalmente que $R = 0$ en p . $\square$

El resultado anterior es útil per se, pues se puede demostrar (ver capítulo 7 de [11]) que son justamente aquellas variedades semi-Riemannianas en que la curvatura se anula las que se parecen, al menos localmente, a los espacios semi-euclídeos.

Definición 4.4.10. Se dice que una variedad semi-Riemanniana es *plana* si su tensor de curvatura es nulo en todo punto.

Definición 4.4.11. Sea $p \in M$. Se dice que una función $F : T_p M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ es de *tipo curvatura* si es multilinear y cumple que para todos $x, y, v, w \in T_p M$:

1. $F(x, y, v, w) = -F(y, x, v, w)$
2. $F(x, y, v, w) = -F(x, y, w, v)$
3. $F(x, y, v, w) + F(y, v, x, w) + F(v, x, y, w) = 0$

Nótese que estas no son sino las simetrías de la curvatura establecidas en la [Proposición 4.4.2](#) para la función $(x, y, v, w) \mapsto \langle R_{xy}v, w \rangle$, por lo que en particular esta función es de tipo curvatura. Como la cuarta de las simetrías de la curvatura se deduce exclusivamente de las tres primeras, si F es de tipo curvatura también se prueba de forma idéntica al caso de la curvatura que $F(x, y, v, w) = F(v, w, x, y)$.

Además, como los razonamientos que se usaron en la demostración lema anterior se basan exclusivamente en la multilinealidad y las simetrías de la aplicación $(x, y, v, w) \mapsto \langle R_{xy}v, w \rangle$, también permiten concluir que si F es de tipo curvatura y $F(v, w, v, w) = 0$ para todo $v, w \in T_p M$ que generen un plano tangente no degenerado, entonces $F = 0$ en p .

Este hecho nos permite afirmar que K determina el tensor curvatura en el sentido dado por el siguiente corolario.

Corolario 4.4.12. Sea F una función de tipo curvatura en $T_p(M)$ tal que

$$K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2},$$

siempre que v y w generen un plano no degenerado de $T_p M$. Entonces se cumple que:

$$\langle R_{vw}x, y \rangle = F(v, w, x, y) \quad \text{para todo } v, w, x, y \in T_p M$$

Demostración. Comencemos definiendo $\Delta(x, y, v, w) = F(x, y, v, w) - \langle R_{xy}v, w \rangle$. Por ser combinación lineal de aplicaciones multilineales, Δ es una aplicación multilinear de $T_p M^4$ en $T_p M$. Además, es inmediato comprobar que Δ es de tipo curvatura, gracias a serlo F y R .

Por hipótesis y la definición de K , se cumple que para todos $v, w \in T_p M$ que generen un plano no degenerado $\Delta(v, w, v, w) = 0$. De acuerdo con lo comentado antes, se tiene que $\Delta = 0$ en p y, por ello $F = R$ en p . $\square$

Definición 4.4.13. Se dice que M es una variedad semi-Riemanniana de *curvatura constante* si su curvatura seccional es una función constante.

Este tipo de variedades son de gran interés por sí misma. Los ejemplos más usuales de espacios con curvatura constante (todos ellos variedades Riemannianas en principio) son la n -esfera, el espacio euclídeo y el espacio hiperbólico. De hecho, si bien queda fuera del alcance del trabajo explicarlo, se puede probar que toda variedad Riemanniana geodésicamente completa y simplemente conexa es isométrica a uno de dichos espacios modelo (ver Capítulo 11 de [11]).

Corolario 4.4.14. Si la curvatura seccional de M en cada espacio tangente, $T_p M$, es una constante, que depende del punto p , $c \in \mathcal{F}(M)$, entonces para todo $p \in T_p M$:

$$R_{xy}z = c(\langle z, x \rangle y - \langle z, y \rangle x) \quad \text{para todo } x, y, z \in T_p M$$

Demostración. Definamos $F : T_p M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x, y, v, w) = c(\langle v, x \rangle \langle y, w \rangle - \langle v, y \rangle \langle x, w \rangle)$. Es inmediato que F es $\mathbb{R}$ -multilineal al serlo los dos sumandos que la definen, por la bilinealidad del tensor métrico. Además, se comprueba que dados $x, y, v, w \in T_p M$:

1. $F(x, y, v, w) = c(\langle v, x \rangle \langle y, w \rangle - \langle v, y \rangle \langle x, w \rangle) = -c(\langle v, y \rangle \langle x, w \rangle - \langle v, x \rangle \langle y, w \rangle) = -F(y, x, v, w)$.
2. Usando la simetría del tensor métrico:

$$F(x, y, v, w) = c(\langle v, x \rangle \langle y, w \rangle - \langle v, y \rangle \langle x, w \rangle) = -c(\langle y, w \rangle \langle v, x \rangle - \langle x, w \rangle \langle v, y \rangle) = -F(x, y, w, v).$$

3. Finalmente, sacando factor común c

$$\begin{aligned} F(x, y, v, w) + F(y, v, x, w) + F(v, x, y, w) &= \\ &= c(\langle v, x \rangle \langle y, w \rangle - \langle v, y \rangle \langle x, w \rangle + \langle x, y \rangle \langle v, w \rangle - \langle x, v \rangle \langle y, w \rangle + \langle y, v \rangle \langle x, w \rangle - \langle y, x \rangle \langle v, w \rangle) = 0, \end{aligned}$$

con lo se concluye que F es una función de curvatura. Además, se cumple que $F(x, y, x, y) = cQ(x, y)$ para todos $x, y \in T_p M$. Así pues, si x, y generan un plano no degenerado de $T_p M$:

$$K(x, y) = c = \frac{F(x, y, x, y)}{Q(x, y)}.$$

Utilizando el corolario anterior se concluye el resultado. $\square$

En el caso de variedades de dimensión mayor o igual a 3 conexas, un resultado de F. Schur [10] nos permite afirmar que basta con K sea constante en cada espacio tangente para que lo sea en toda la variedad.

Teorema 4.4.15. Sea M una variedad conexa semi-Riemanniana de dimensión $n \geq 3$. Si la curvatura seccional $K(\Pi)$ donde $\Pi \subset T_p M$ es un plano no degenerado, depende solo de p , entonces M es de curvatura constante.

Demostración. Comencemos definiendo el tensor $R_1 \in \mathcal{T}_4^0(M)$ dado por

$$R_1(W, Z, X, Y) = \langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle Y, W \rangle,$$

para cada $W, Z, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por la proposición anterior, se tiene que:

$$R = kR_1,$$

donde k es la curvatura en seccional en cada punto. Como g es paralelo, por la regla de Leibniz es inmediato que R_1 lo es. Por tanto, dados $U, W, Z, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple:

$$(D_U R)(W, Z, X, Y) = (D_U k)R_1(W, Z, X, Y).$$

Así, como actúan igual sobre todo campo de vectores W :

$$((D_U R)(X, Y))Z = U(k)(\langle Z, Y \rangle X - \langle Z, X \rangle Y).$$

Haciendo la suma cíclica (respecto de U, X, Y) de la identidad anterior, gracias a la segunda identidad de Bianchi (Proposición 4.4.3) la parte izquierda de la igualdad se anula y, por ello:

$$0 = U(k)(\langle Z, Y \rangle X - \langle Z, X \rangle Y) + X(k)(\langle Z, U \rangle Y - \langle Z, Y \rangle U) + Y(k)(\langle Z, X \rangle U - \langle Z, U \rangle X).$$

Dado X cualquiera tomamos Y, Z, U de forma que $Z = U$, X, Y, Z son ortogonales en un abierto y $\langle Z, Z \rangle = 1$, lo cual es posible porque la dimensión de M es mayor o igual a 3 (si el índice fuera igual a la dimensión basta razonar con la métrica opuesta). Para esta elección, razonando en el abierto:

$$X(k)Y - Y(k)X = 0.$$

Como X e Y son linealmente independientes $X(k) = 0 = Y(k)$. Por tanto k es constante en el abierto y, usando la conexión de M , se concluye que k es constante en todo M . $\square$

Otra opción para no tener que trabajar con un campo tensorial de orden 4, es utilizar campos tensoriales más simples que condensen parte de la información del tensor de curvatura. La forma más habitual para hacerlo es a través de los tensores de Ricci y la curvatura escalar, los cuales se obtienen mediante contracciones sucesivas del tensor de curvatura. Ambos pueden resultar de gran ayuda a la hora de determinar si dos variedades son isométricas (o localmente isométricas, definición en la [Sección 4.5](#)) pues se conservarán, en cierto sentido que más adelante precisaremos, por este tipo de aplicaciones.

Definición 4.4.16. Se define el *tensor de curvatura de Ricci* de M como:

$$Ric = C_3^1(R) \in \mathcal{T}_2^0(M)$$

Nótese que, considerando una carta local (U, φ) las componentes de Ric respecto de esta carta en términos de las de R son:

$$(Ric)_{ij} := R_{ij} = \sum_m R_{ijm}^m.$$

Si bien la elección de esta contracción del tensor de curvatura podría parecer en principio arbitraria, gracias a las simetrías del tensor de curvatura, todas las contracciones no nulas de R son iguales a $\pm Ric$ o, si no se contrae el índice contravariante, a $\pm (\uparrow_1^1 Ric)$.

- En primer lugar, debido a la primera de las simetrías de la curvatura de Riemann, las componentes de R respecto a cualquier carta local cumplen que $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$, con lo que es claro que $C_2^1(R) = -Ric$.
- Dado un punto $p \in M$ y una referencia de campos ortonormales en un entorno suyo, $\{E_1, \dots, E_n\}$, para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que

$$C_1^1(R)(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, R(E_m, X, Y) \rangle = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XY} E_m, E_m \rangle = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{E_m E_m} X, Y \rangle = 0,$$

donde se ha utilizado la simetría por pares de R y que $R_{E_m E_m} = 0$ para todo m .

- Veamos ahora que en cada punto $p \in M$, las contracciones métricas de R son métricamente equivalentes a $\pm Ric(p)$ o a 0. Para ello, consideramos una carta local (U, φ) tal que en p sus campos de vectores tangente asociados, que denotaremos $\partial_1, \dots, \partial_n$, por simplificar la notación, forman una base ortonormal del espacio tangente, siendo $\varepsilon_i = \langle \partial_i, \partial_i \rangle$. Se tiene que para todos $i, j = 1, \dots, n$ (sobreentendiendo que todas las 1-formas y campos de vectores empleados están evaluados en p):

$$\begin{aligned} C_{12}(R)(dx_i, \partial_j)(p) &= \sum_m \varepsilon_m R(dx^i, \partial_m, \partial_m, \partial_j) = \sum_m \varepsilon_m dx^i(R_{\partial_m \partial_j} \partial_m) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{\partial_m \partial_j} \partial_m, dx^{i,*} \rangle = \\ &= \sum_m \varepsilon_m \varepsilon_i \langle R_{\partial_m \partial_j} \partial_m, \partial_i \rangle = \varepsilon_i \sum_m -\varepsilon_m \langle R_{\partial_m \partial_j} \partial_i, \partial_m \rangle = -\varepsilon_i \sum_m dx^m(R_{\partial_m \partial_j} \partial_i) = \\ &= -\varepsilon_i \sum_m R_{ijm}^m = -\varepsilon_i R_{ij}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado en la cuarta igualdad que, en estas condiciones, se tiene que, en p , $dx^{i,*}(p) = \varepsilon_i \partial_i|_p$. Así pues, bajando el índice contravariante (de nuevo trabajando en p):

$$\downarrow_1^1(C_{12}R)(\partial_i, \partial_j) = \sum_p g_{pi}(C_{12}R)_j^p = \sum_p \varepsilon_i \delta_{pi}(-\varepsilon_p)R_{pj} = -R_{ij}.$$

Concluimos pues que $\downarrow_1^1(C_{12}R) = -Ric$. El estudio de las dos otras contracciones métricas posibles se realiza de forma análoga.

Lema 4.4.17. El tensor de curvatura de Ricci es simétrico y, siendo $\{E_1, \dots, E_n\}$ una referencia (local) de campos de vectores ortonormales, se cumple que

$$Ric(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{X E_m} Y, E_m \rangle, \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

donde $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$.

Demostración. Como $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$ podemos utilizar (4.7) para calcular la curvatura de Ricci. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y utilizando la simetría por pares de R :

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, R(X, Y, E_m) \rangle = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{Y E_m} X, E_m \rangle = \\ &= \sum_m \varepsilon_m \langle R_{X E_m} Y, E_m \rangle. \end{aligned}$$

Esta última igualdad, además de probar la igualdad del enunciado, permite concluir la simetría de la curvatura de Ricci. $\square$

Como la curvatura seccional determina el tensor de curvatura de Riemann, esta también ha de determinar el tensor de Ricci. Para comprobarlo, trabajamos en un punto $p \in M$ y sea $u \in T_p M$ unitario. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_p M$ tal que $e_1 = u$. Entonces, utilizando el resultado anterior, teniendo también en cuenta que el primer sumando se anulará por las simetrías de la curvatura:

$$\begin{aligned} Ric(u, u) &= \sum_m \varepsilon_m \langle R_{e_1 e_m} e_1, e_m \rangle = \\ &= \sum_{m>1} \varepsilon_m^2 \langle u, u \rangle K(u, e_m) = \langle u, u \rangle \sum_{m>1} K(u, e_m). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por tanto, concluimos que, salvo el signo que está determinado por el carácter de u , $Ric(u, u)$ es la suma de $n-1$ curvaturas seccionales a través de $n-1$ planos no degenerados ortogonales entre sí y que contengan a u .

A partir del valor anterior de $Ric(u, u)$ se puede obtener, para todo vector que no sea luminoso, $v \in T_p M$, $Ric(v, v) = \langle v, v \rangle \sum_{m>1} K(u, e_m) = \langle v, v \rangle \sum_{m>1} K(v, e_m)$, donde u es un vector unitario proporcional a v (recuérdese que la curvatura seccional de un plano no degenerado no depende de los vectores que formen una base suya).

En el caso Riemanniano, en que no existen vectores de tipo luz, polarizando se obtendría el valor de $R(v, w)$, para todo $v, w \in T_p M$. No obstante, para concluir el razonamiento en el caso semi-Riemanniano hace falta un razonamiento más elaborado. Consideremos $v, w \in T_p M$ vectores tangentes que no sean luminosos. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle = \langle v, v \rangle + \lambda^2 \langle w, w \rangle + 2\lambda \langle v, w \rangle.$$

Por lo que concluimos que existe algún λ no nulo tal que $v + \lambda w$ no es luminoso. Fijado un λ en tales condiciones y polarizando, usando la simetría de Ric

$$Ric(v + \lambda w, v + \lambda w) = Ric(v, v) + \lambda^2 Ric(w, w) + 2\lambda Ric(v, w),$$

de dónde se obtiene el valor de $Ric(v, w)$ a partir de la curvatura seccional por medio de:

$$Ric(v, w) = \frac{1}{2\lambda} (Ric(v + \lambda w, v + \lambda w) - Ric(v, v) - \lambda^2 Ric(w, w)).$$

Finalmente, dados vectores $v, w \in T_p M$ cualesquiera, estos se pueden expresar en una base ortonormal de $T_p M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$. Usando la bilinealidad de Ric y que conocemos el valor de $Ric(e_i, e_j)$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, pues no son vectores luminosos, podemos obtener $Ric(v, w)$ a partir de la curvatura seccional.

Definición 4.4.18. Se define la *curvatura escalar* de M como la contracción de su curvatura de Ricci, $S = C(Ric) \in \mathcal{F}(M)$.

Considerando una carta local (U, φ) , se tiene que, por (4.4):

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k} g^{ij} R_{ijk}^k.$$

Si, en cambio, se considera una referencia local de campos ortonormales $\{E_1, \dots, E_n\}$, se tiene por (4.6) que

$$S = \sum_m \varepsilon_m \text{Ric}(E_m, E_m) = \sum_m \varepsilon_m \varepsilon_m \sum_{k \neq m} K(E_m, E_k) = \sum_{m \neq k} K(E_m, E_k) = 2 \sum_{m < k} K(E_m, E_k),$$

donde hemos usado la caracterización de la curvatura de Ricci en términos de la escalar para vectores tangentes unitarios en la segunda igualdad.

El siguiente resultado en ocasiones se denomina identidad de Bianchi contraída, pues se demuestra contrayendo de forma sucesiva la expresión de la segunda identidad de Bianchi en una carta local. Permite relacionar las diferenciales covariantes del tensor de Ricci y la curvatura escalar.

Proposición 4.4.19. Se cumple que $dS = 2\text{div}(\text{Ric})$.

Demostración. Como todas las operaciones implicadas actúan de forma local, podemos trabajar usando una carta local (U, φ) . Para ello, comenzamos expresando la segunda identidad de Bianchi en términos de esta carta. Recordemos la notación de las componentes de la diferencial de R :

$$\left(D_{\frac{\partial}{\partial \varphi^r}}\right)_{\frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^l}} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) = \sum_i R_{jkl;r}^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

Así pues, al aplicar la segunda identidad de Bianchi a los campos de vectores asociados a la carta local $\frac{\partial}{\partial \varphi^r}, \frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \frac{\partial}{\partial \varphi^l}$, y aplicarla sobre el campo $\frac{\partial}{\partial \varphi^j}$, se llega a:

$$\sum_i (R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i + R_{jrk;l}^i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} = 0.$$

Por la independencia en cada punto de los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, se tiene que para cada i (y para cada r), el paréntesis de la expresión anterior ha de ser nulo.

Haciendo uso de la primera simetría de la curvatura para cambiar el orden de r y k en el tercer sumando:

$$R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i - R_{jkr;l}^i = 0.$$

Contrayendo los índices i y r en la expresión anterior, es decir, sumando la expresión para $i = r$ desde 1 hasta n :

$$\sum_r R_{jkl;r}^r + \sum_r R_{jlr;k}^r - \sum_r R_{jkr;l}^r = 0.$$

Usando que la diferencial covariante y la contracción conmuta y, por ello $D(\text{Ric}) = C_3^1(DR)$, se tiene en componentes que:

$$\sum_r R_{jkl;r}^r + R_{jl;k} - R_{jk;l} = 0.$$

Contrayendo métricamente j y k ahora:

$$\sum_{j,k} g^{jk} \sum_r R_{jkl;r}^r + \sum_{j,k} g^{jk} R_{jl;k} - \sum_{j,k} g^{jk} R_{jk;l} = 0. \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta que la contracción métrica y la diferencial covariante conmutan, $DS = C(D\text{Ric})$ y por ello, $\sum_{j,k} g^{jk} R_{jk;l} = S_{;l}$.

Usamos además la notación de subida de índices para las componentes de los tensores de forma que reescribimos $\sum_{j,k} g^{jk} R_{jl;k} = \sum_j R_{l;k}^j$. Realizando una bajada de índices se cumple también que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} g^{jk} R_{jkl}^r &= \sum_{jkm} g^{jk} r^m R_{mjkl} = \\ &= \sum_{jkm} g^{jk} r^m R_{klmj} = \sum_{km} g^{rm} R_{lmk}^k = \sum_m g^{rm} R_{lm} = R_l^r, \end{aligned}$$

donde hemos usado la simetría por pares de la curvatura.

Teniendo en cuenta que los cambios de tipo realizados en el cálculo anterior, así como las contracciones y contracciones métricas, conmutan con la diferencial covariante:

$$\sum_{j,k} g^{jk} \sum_r R_{jkl;r}^r = \sum_r R_{l;r}^r.$$

Podemos introducir las igualdades anteriores en (4.15) llegando a que:

$$\sum_r R_{l;r}^r + \sum_k R_{l;k}^k - S_{;l} = 0.$$

Reordenando, se concluye el resultado buscado. $\square$

Definición 4.4.20. Se dice que M es *Ricci plana* si su tensor de curvatura de Ricci es nulo.

Claramente, si M es plana, es decir, $R = 0$, se tiene que la variedad es Ricci plana, pero el recíproco no tiene por qué ser cierto.

Las variedades Ricci planas son de especial interés en el ámbito de la relatividad general pues, cuando se expresa la ecuación de campo de Einstein para un espacio vacío, se tiene que:

$$Ric = \frac{1}{2} Sg.$$

Aplicando la contracción métrica a ambos lados de la igualdad, teniendo en cuenta que:

$$C(g) = \sum_{i,j} g^{ij} g_{ij} = \sum_{i,j} \delta_{ij} = n.$$

Entonces, resulta que:

$$S = \frac{n}{2} S.$$

En la teoría de la relatividad general se trabaja con variedades de dimensión $n = 4$ (el espacio tiempo), con lo que concluimos que ha de ser $S = 0$ y, por ello, $Ric = 0$. Es decir, que el espacio-tiempo de un universo vacío ha de venir descrito por una variedad semi-Riemanniana Ricci plana. Por ello, como veremos en el último capítulo, la curvatura de Ricci se puede considerar un estimador de la “cantidad de materia” en el Universo, dentro de esta teoría.

4.5. Isometrías locales y homotecias

Las definiciones realizadas a lo largo de este capítulo se han realizado basándonos en el tensor métrico de M , por lo que sería razonable que se conservasen en cierto sentido a través de aplicaciones que conserven el tensor métrico, es decir, por medio de isometrías. Teniendo además en cuenta que todas las definiciones tratadas tienen un carácter local, definimos un concepto local de isometrías, las isometrías locales, que conservarán todas estas características de las variedades Riemannianas.

En esta sección (M, g_M) y (N, g_N) serán dos variedades semi-Riemannianas de dimensiones m y n , respectivamente,

Definición 4.5.1. Una aplicación diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ entre variedades semi-Riemannianas es una *isometría local* si, para todo $p \in M$, $d\phi|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ es una isometría. Si existe una isometría local entre M y N se dirá que son *localmente isométricas*.

Nótese que, si M y N son localmente isométricas, en particular se tiene que sus dimensiones son iguales. En tal caso, la dimensión de ambas la denotaremos por n .

Una aplicación inmediata del teorema de la función inversa para variedades diferenciables nos permite concluir que ϕ es una isometría local si y solo si para todo $p \in M$ existe un entorno U tal que $\phi|_U$ es una isometría entre variedades semi-Riemannianas. En particular, esto nos permite comprobar que la isometría local entre variedades semi-Riemannianas es un concepto más exigente que el de difeomorfismo local.

Ejemplo 4.5.2. Consideremos $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ como subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^2$, con lo que sabemos que $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ es una inmersión, es decir, su diferencial es inyectiva en cada punto. Definimos el tensor g en $\mathbb{S}^1$ como

$$g(v, w) = \langle di|_p(v), di|_p(w) \rangle, \quad v, w \in T_p\mathbb{S}^1,$$

donde $\langle, \rangle$ es el tensor métrico de $\mathbb{R}^2$. A partir de las propiedades del tensor métrico de $\mathbb{R}^2$ es inmediato comprobar que g es un tensor métrico sobre $\mathbb{S}^1$. De hecho esto dota a $\mathbb{S}^1$ de estructura de subvariedad semi-Riemanniana de $\mathbb{R}^2$, concepto que estudiaremos en detalle en la siguiente sección. En adelante se sobreentenderá la actuación de $di|_p$.

Consideramos la aplicación $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por:

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Recuérdese que para ver que una aplicación lineal entre espacios con producto escalar es una isometría, basta con ver que conserva los productos escalares de los elementos de una base. Por tanto, para ver que α es isometría, basta con probar que $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, porque $\{\frac{\partial}{\partial t}\}$ es una referencia global en $\mathbb{R}$ y sabemos que $\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 1$.

Consideramos los campos de vectores asociados a las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, que en cada punto de $\mathbb{R}^2$ forman una base de su espacio tangente. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} di(\alpha'(t)) &= di(\alpha'(t))(x) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + di(\alpha'(t))(y) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)} = \frac{d \cos(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \frac{d \sin(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)} = \\ &= -\sin(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \cos(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\alpha(t)}, \end{aligned}$$

con lo que se comprueba de forma inmediata el resultado.

Veamos ahora cómo se expresa de manera formal la conservación de los distintos conceptos que se han ido introduciendo en las secciones anteriores, comenzando por la conexión de Levi-Civita.

Para ello es necesario hacer una observación previa. Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una isometría local $\phi : M \rightarrow N$, sabemos que podría ser que $d\phi(X)$ no fuera un campo vectorial bien definido sobre N . No obstante, si consideramos un abierto $V \subset M$ tal que $\phi|_V$ es isometría, que sabemos que existe en torno a cada punto, se tiene que para todo $X \in \mathfrak{X}(V)$, $d\phi|_V(X)$ está bien definido como campo de vectores en $\phi(V)$, gracias a ser $\phi|_V$, en particular, un difeomorfismo.

Teorema 4.5.3 (Conservación de la conexión de Levi-Civita). Sea $\phi : M \rightarrow N$ una isometría local. Se cumple que para todo abierto V tal que $\phi|_V$ es una isometría y para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, $d\phi(D_X Y) = D_{d\phi X}(d\phi Y)$, donde se usa D para denotar a la conexión de Levi-Civita tanto de M como de N .

Demostración. Sea $p \in M$ y sea (U, φ) una carta local entorno a p en M . Reduciendo U si es necesario, podemos suponer que $U \subset V$ y ϕ es de hecho una isometría de U en su imagen y, en particular, un difeomorfismo. Así pues $(\phi(U), \varphi \circ \phi^{-1} = \psi)$ es una carta local de N entorno a $\phi(p)$.

Consideremos los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, i = 1, \dots, n$, asociados a la carta local de M y $\frac{\partial}{\partial \psi^j}, j = 1, \dots, n$ asociados a la carta local de N . Comencemos probando que para todo i , $d\phi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right) = \frac{\partial}{\partial \psi^i}$:

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right) = \sum_j d\phi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right)(\psi^j) \frac{\partial}{\partial \psi^j} = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right)(\varphi^j \circ \phi^{-1} \circ \phi) \frac{\partial}{\partial \psi^j} = \frac{\partial}{\partial \psi^i}.$$

Así pues, dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, si sus componentes en la carta (U, φ) son X^i , entonces las componentes de $d\phi(X)$ en la carta $(\phi(U), \psi)$ son $X^i \circ \phi^{-1}$, esencialmente iguales.

Nótese que, gracias a las relaciones previas, es inmediato comprobar que se conservan las componentes del tensor métrico en estas bases. Es decir, siendo g_{ij}^M y g_{ij}^N las componentes de g respecto de (U, φ) y $(\phi(U), \psi)$, respectivamente, $g_{ij}^M = g_{ij}^N \circ \phi$.

Teniendo en cuenta que, por tanto,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_{\phi(q)} (g_{jm}^N) = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_q (g_{jm}^N \circ \phi) = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_q (g_{jm}^M),$$

se comprueba usando (4.2) que los símbolos de Christoffel se conservan por ϕ . Es decir, que los símbolos de Christoffel de (U, φ) , $\Gamma_{ij}^{k,M}$ y los de $(\phi(U), \psi)$, $\Gamma_{ij}^{k,N}$, cumplen $\Gamma_{ij}^{k,M} = \Gamma_{ij}^{k,N} \circ \phi^{-1}$. Así pues, usando que para toda $f \in \mathcal{F}(N)$, $\frac{\partial}{\partial \psi^i}(f) = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}(f \circ \phi)$ y (3.1) se tiene que, siendo $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ y X^i, Y^i sus componentes respecto a la carta de M :

$$\begin{aligned} D_{d\phi(X)}d\phi(Y) &= \sum_k \left(d\phi(X) (Y^k \circ \phi^{-1}) + \sum_{i,j} (X^i \circ \phi^{-1}) (Y^j \circ \phi^{-1}) \Gamma_{ij}^{k,N} \right) \frac{\partial}{\partial \psi^i} = \\ &= \sum_k \left(X (Y^k) \circ \phi^{-1} + \sum_{i,j} (X^i \circ \phi^{-1}) (Y^j \circ \phi^{-1}) (\Gamma_{ij}^{k,M} \circ \phi^{-1}) \right) d\phi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \\ &= d\phi \left(\sum_k \left(X (Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^{k,M} \right) d\phi \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) \circ \phi^{-1} = d\phi (D_X Y) \circ \phi^{-1}. \end{aligned}$$

Así concluye la prueba. $\square$

Basándonos en el resultado anterior se puede deducir fácilmente la conservación de la derivada covariante a lo largo de una curva y, como corolarios suyos, las preservaciones de transporte paralelo y geodésicas.

Proposición 4.5.4 (Conservación de la derivada covariante inducida sobre una curva). Sea I un abierto convexo de $\mathbb{R}$ y sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva. Sea $\phi : M \rightarrow N$ una isometría local y sea $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Definimos $d\phi Y(s) = d\phi(Y(s))$ para todo $s \in I$. Entonces, $d\phi Y \in \mathfrak{X}(\phi \circ \alpha)$ y, considerando las derivadas covariantes inducidas por M a lo largo de α y por N a lo largo de $\phi \circ \alpha$, $(d\phi Y)' = d\phi(Y')$.

Demostración. En primer lugar, para cada $t \in I$, como $Y(t) \in \mathcal{T}_{\alpha(t)}M$, entonces $d\phi(Y)(t) \in T_{\phi \circ \alpha}N$. Además, consideremos $t \in I$ y una carta local (U, φ) en torno a $p = \alpha(t)$ en M . Como ϕ es isometría local, reduciendo U si es necesario, podemos suponer que $\phi|_U$ es difeomorfismo y, por ello, $(\varphi(U), \psi = \varphi \circ \phi^{-1})$ es una carta local de N en torno a $\phi(\alpha(t))$. Podemos expresar Y en un entorno, J , de t (cuya imagen por α esté contenida en U) como:

$$Y(s) = \sum_i Y^i(s) \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_{\alpha(s)}, \quad s \in J.$$

Por lo que es inmediato comprobar que:

$$d\phi Y(s) = \sum_i Y^i(s) \left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_{\phi \circ \alpha(s)}, \quad s \in J.$$

En particular, como $Y^i \in \mathcal{F}(J)$ para cada i , esto nos permite comprobar que $d\phi Y \in \mathfrak{X}(\phi \circ \alpha)$. También concluimos que, respecto de las cartas locales consideradas, las componentes de Y y de $d\phi Y$ son las mismas. Por tanto, de acuerdo con (3.2)

$$(d\phi Y)'(s) = \sum_i \frac{d(d\phi Y)^i}{dt}(s) \left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_{\phi(\alpha(s))} + \sum_i (d\phi Y)^i(s) D_{(\phi \circ \alpha)'(s)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right|_{\phi(\alpha(s))} \right) =$$

$$= \sum_i \frac{dY^i}{dt}(s) d\phi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(s)} \right) + \sum_i Y^i(s) d\phi \left(D_{\alpha'(s)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) \right)_{\alpha(s)} = d\phi(Y')(s),$$

donde hemos usado el teorema previo en el segundo sumando para obtener la segunda igualdad, junto con que $d\phi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) = \frac{\partial}{\partial \psi^i}$, y la igualdad de las componentes de Y y $d\phi Y$. $\square$

Corolario 4.5.5 (Conservación del transporte paralelo). Utilizando la notación de la proposición previa, sean $a, b \in I$ y consideremos el transporte paralelo en M a lo largo de α de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, P , y el transporte paralelo en N a lo largo de $\phi \circ \alpha$ de $\phi(\alpha(a))$ a $\phi(\alpha(b))$, $\bar{P}$. Entonces se cumple que $d\phi_{\alpha(b)} \circ P = \bar{P} \circ d\phi_{\alpha(a)}$.

Demostración. Sea $v \in T_{\alpha(a)}M$ y sea V el campo paralelo a lo largo de α con $V(a) = v$. Entonces, por la proposición anterior y la linealidad de $d\phi$, $d\phi V$ es un campo paralelo a lo largo de $\phi \circ \alpha$. Además, se cumple que $(d\phi V)(a) = d\phi_{\alpha(a)}(v)$. Por tanto:

$$\bar{P} \circ d\phi_{\alpha(a)}(v) = \bar{P}(d\phi_{\alpha(a)}(v)) = d\phi_{\alpha(b)}(V(b)).$$

Y por otro lado

$$d\phi_{\alpha(b)} \circ P(v) = d\phi_{\alpha(b)}(V(b)),$$

con lo que se comprueba la igualdad del enunciado. $\square$

Corolario 4.5.6 (Conservación de las geodésicas). Sea $\phi : M \rightarrow N$ una isometría local. Si $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica, entonces $\phi \circ \gamma$ es una geodésica de N . Es más, para todo $v \in TM$, se cumple que $\phi \circ \gamma_v = \gamma_{d\phi(v)}|_{I_v}$.

Demostración. Sea γ geodésica de M con velocidad inicial v . Entonces $\gamma'' = 0$ en su intervalo de definición (contenido en I_v). Por la [Proposición 4.5.4](#), se cumple que

$$0 = d\phi(\gamma'') = (d\phi \circ \gamma')' = ((\phi \circ \gamma)')' = 0,$$

con lo que $\phi \circ \gamma$ es geodésica de N definida en I y cumple que su velocidad inicial es $(\phi \circ \gamma)'(0) = d\phi\gamma'(0) = d\phi(v)$. $\square$

Nótese que en el resultado previo, el dominio de definición de $\gamma_{d\phi(v)}$ podría ser en principio mayor que el de ϕ , puesto que esta se trata de una isometría local y no una global. Si fuera global, razonando con ϕ^{-1} se comprueba que los intervalos maximales de definición de γ_v y de $\gamma_{d\phi(v)}$ son de hecho iguales.

A partir del [Teorema 4.5.3](#) se deduce también cómo se transforma la curvatura por isometrías, conservándose. En este caso, gracias al carácter tensorial de la curvatura, se puede establecer el resultado punto a punto, evitando el inconveniente que surge al tratar de trabajar con campos de vectores definidos en todo M .

Proposición 4.5.7 (Conservación de la curvatura). Sea $\phi : M \rightarrow N$ una isometría local y sean $p \in M$, $x, y, z \in T_pM$. Entonces $d\phi_p(R_{xyz}) = R_{d\phi_p x, d\phi_p y} d\phi_p z$, donde R denota en el primer caso a la curvatura Riemanniana de M y, en la segunda igualdad, a la de N .

Demostración. Sabemos que podemos trabajar localmente para calcular la curvatura a partir de su definición. Por tanto, consideramos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ que extiendan a x, y, z , donde U es un abierto en torno a p de forma que $\phi|_U$ es isometría. Por tanto, sabemos que $d\phi X, d\phi Y, d\phi Z \in \mathfrak{X}(\phi(U))$ están bien definidos y extienden a $d\phi(x), d\phi(y), d\phi(z)$. Usando la linealidad de $d\phi_p$:

$$d\phi_p(R_{xyz}) = d\phi_p(R_{XY}Z(p)) = d\phi_p(D_{[X,Y]}Z(p)) - d\phi_p([D_X, D_Y]Z(p)).$$

Como X está ϕ relacionado con $d\phi X$ e igualmente lo están Y y $d\phi Y$, entonces sabemos que $d\phi[X, Y] = [d\phi X, d\phi Y]$. Por tanto, de acuerdo con el [Teorema 4.5.3](#), el primer sumando de la expresión anterior es igual a $(D_{[d\phi X, d\phi Y]}d\phi Z)(\phi(p))$.

Aplicando sucesivas veces el [Teorema 4.5.3](#) en el segundo sumando (prescindiremos de explicitar el punto en que se evalúa cada derivada covariante para simplificar la notación):

$$d\phi([D_X, D_Y]Z) = d\phi(D_X D_Y z - D_Y D_X z) = D_{d\phi X} d\phi(D_Y Z) - D_{d\phi Y} d\phi(D_X Z) =$$

$$= D_{d\phi X} D_{d\phi Y} (d\phi Z) - D_{d\phi Y} D_{d\phi X} (d\phi Z) = [D_{d\phi X}, D_{d\phi Y}] d\phi Z.$$

Uniendo ambos cálculos se concluye que

$$d\phi_p (R_{xy} z) = (D_{[d\phi X, d\phi Y]} d\phi Z) (\phi(p)) - [D_{d\phi X}, D_{d\phi Y}] d\phi Z (\phi(p)) = R_{d\phi_p X, d\phi_p Y} d\phi_p Z = R_{d\phi_p(x), d\phi_p(y)} d\phi_p(z),$$

con lo que finaliza la demostración. $\square$

Corolario 4.5.8 (Conservación de las curvaturas seccional, de Ricci y escalar). Sea $\phi : M \rightarrow N$ una isometría local. Para todo plano tangente no degenerado de M , π se cumple que

$$K_N(d\phi(\pi)) = K_M(\pi),$$

siendo K_M y K_N las curvaturas seccionales de M y N , respectivamente, y $d\phi(\pi)$ la imagen del plano $\pi \subset T_p M$ para cierto $p \in M$ a través de $d\phi_p$. Además, siendo Ric_M y Ric_N las curvaturas de Ricci de M y N , respectivamente, se cumple que $\phi^*(Ric_N) = Ric_M$. Si S_N y S_M denotan a las curvaturas escalares de N y M , respectivamente, también se cumple que $S_N \circ \phi = S_M$.

Demostración. Probamos cada una de las afirmaciones por separado:

- Sea π un plano no degenerado de M en un punto $p \in M$. Como $d\phi_p$ es una isometría, entonces $d\phi(\pi)$ es un plano degenerado de N (en $\phi(p)$). Además, dados $v, w \in \pi$ base, como en particular $d\phi_p$ es isomorfismo, $d\phi_p v, d\phi_p w$ forman una base de $d\phi(\pi)$. Por tanto se puede calcular, de acuerdo con la conservación de la curvatura por isometrías locales y, teniendo en cuenta la definición de isometría, que en particular implica que $Q(d\phi_p v, d\phi_p w) = Q(v, w)$:

$$\begin{aligned} K_N(d\phi(\pi)) &= \frac{\langle R_{d\phi_p v, d\phi_p w} d\phi_p v, d\phi_p w \rangle}{Q(d\phi_p v, d\phi_p w)} = \\ &= \frac{\langle d\phi_p R_{v, w} v, d\phi_p w \rangle}{Q(v, w)} = \frac{\langle R_{v, w} v, w \rangle}{Q(v, w)} = K_M(\pi). \end{aligned}$$

- Basta probar que, dado $p \in M$, para todos $x, y \in T_p M$, $Ric_N(d\phi_p x, d\phi_p y) = Ric_M(x, y)$. Para ello, consideramos una carta local entorno a p , (U, φ) , tal que $\phi|_U$ es un difeomorfismo. Por tanto, $(\varphi(U), \psi = \varphi \circ \phi^{-1})$ es una carta local en N entorno a $\phi(p)$. Utilizando estos sistemas coordenados para calcular la contracción según (4.5) y como $\frac{\partial}{\partial \psi^m} \Big|_{\phi(p)} = d\phi_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^m} \right)_p$, por la conservación de la curvatura:

$$\begin{aligned} Ric_N(d\phi_p x, d\phi_p y) &= \sum_m d\psi_{\phi(p)}^m \left(R_{d\phi_p x, d\phi_p y} \left(\frac{\partial}{\partial \psi^m} \right)_{\phi(p)} \right) = \\ &= \sum_m d\psi_{\phi(p)}^m \left(d\phi_p \left(R_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^m} \right)_p \right) \right) = \sum_m d(\psi^m \circ \phi)_p \left(R_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^m} \right)_p \right) = \\ &= \sum_m d\varphi_p^m \left(R_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^m} \right)_p \right) = Ric_M(x, y). \end{aligned}$$

- Utilizando la misma notación que en el punto anterior, calculando la contracción métrica empleando el sistema coordenado:

$$\begin{aligned} S_N(\phi(p)) &= \sum_{m, k} g_N^{mk}(\phi(p)) Ric_N \left(\frac{\partial}{\partial \psi^m} \Big|_{\phi(p)}, \frac{\partial}{\partial \psi^k} \Big|_{\phi(p)} \right) = \\ &= \sum_{m, k} g_M^{mk}(p) Ric_N \left(d\phi_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^m} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right)_p \right) = \sum_{m, k} g_M^{mk}(p) Ric_M \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^m} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \Big|_p \right) = S_M(p). \end{aligned}$$

De esta forma se prueba la conservación por isometrías de estos tres conceptos. $\square$

Las isometrías locales entre M y N están totalmente determinadas por su diferencial en un punto cuando M es conexa. En particular, esto implica que, si $\phi : M \rightarrow N$ es una isometría local, existe una isometría $\psi : M \rightarrow N$ tal que $d\psi_p = d\phi_p$ en algún punto de M si y solo si ϕ es de hecho isometría global. Para probar el siguiente resultado se necesita utilizar el concepto de los entornos normales. En estos entornos se pueden utilizar geodésicas de distintas velocidades iniciales para caracterizar sus puntos. Así pues, utilizando la conservación de las geodésicas por isometrías, se consigue ver que si $d\phi = d\psi$ en el origen de uno de estos entornos normales, lo es en todo el entorno normal. Este hecho es vital, junto con un argumento de conexión, para la prueba, por lo que no la presentamos detalladamente. De nuevo esta se puede encontrar en el Capítulo 3 de [17].

Teorema 4.5.9. Sean $\phi, \psi : M \rightarrow N$ isometrías locales. Supongamos que M es conexa. Si existe $p \in M$ tal que $d\phi_p = d\psi_p$ (y, en particular, $\phi(p) = \psi(p)$), entonces $\phi = \psi$.

El siguiente concepto pretende generalizar el concepto de homotecia estudiado durante el Grado para los espacios eucídeos al caso de variedades semi-Riemannianas. Así, intuitivamente, las homotecias serán aplicaciones en las que se expanda o contraiga una variedad como un todo, mientras que las aplicaciones conformes serán aquellas en las que se expanda la variedad pero una cantidad distinta en cada punto.

Definición 4.5.10. Una aplicación diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ entre variedades semi-Riemannianas se dice que es *conforme* si cumple que existe $h \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\phi^*(g_N) = hg_M$, siendo h de signo constante (o bien estrictamente positiva, o bien estrictamente negativa en M).

Se dice que, en las condiciones anteriores ϕ es una homotecia de coeficiente c si $h(p) = c$ para todo $p \in M$ para cierta constante $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Es decir, $\phi : M \rightarrow N$ es una *homotecia de coeficiente* $c \neq 0$ si y solo si para todos $v, w \in T_p M$:

$$\langle d\phi_p v, d\phi_p w \rangle = c \langle v, w \rangle.$$

Es claro que, si $c > 0$, la homotecia conserva el carácter causal de los vectores tangentes, mientras que si $c < 0$ los invierte. Por ello, es de especial importancia la homotecia dada por la identidad de (M, g_M) en $(M, -g_M)$, la cual se denomina cambio de métrica, pues permite cambiar el carácter causal de los vectores tangentes sin modificar el resto de propiedades de la variedad semi-Riemanniana.

A partir de las definiciones, como en los espacios tangentes las aplicaciones conformes son homotecias (en el sentido del álgebra lineal), se comprueba que conservan los ángulos entre los vectores tangentes. Además, es claro que las aplicaciones conformes son difeomorfismos locales.

El siguiente lema nos permite demostrar que las homotecias se comportan bien con las operaciones definidas en las variedades semi-Riemannianas.

Lema 4.5.11. Las homotecias conservan las conexiones de Levi-Civita. Es decir, dada $\phi : M \rightarrow N$ homotecia, para todo abierto $V \subset M$ tal que $\phi|_V$ es difeomorfismo y para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que $d\phi(D_X Y) = D_{d\phi X} d\phi Y$.

Demostración. Consideremos N' la variedad semi-Riemanniana que se obtiene definiendo sobre la variedad diferenciable N el tensor métrico cg_N . Entonces, $\phi : M \rightarrow N'$ es una isometría y, por tanto, conserva la conexión de Levi-Civita en el sentido establecido en el Teorema 4.5.3.

Así pues, basta ver que cg_N y g_N determinan sobre la variedad diferenciable N la misma conexión de Levi-Civita. Para ello, recurrimos a la fórmula de Koszul (4.1). Sean $V, W, X \in \mathfrak{X}(N)$. Teniendo en cuenta que el corchete de Lie de dos campos de vectores no depende del tensor métrico y que en cada uno de los sumandos del miembro derecho de (4.1) aparece exactamente una vez el tensor métrico, por lo que al aplicarla para N' y expresar el miembro derecho en términos de g_N se podrá sacar c factor común

$$\begin{aligned} 2g_{N'}(D'_V W, X) &= 2c \langle D'_V W, X \rangle = \\ &= c(V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle) = 2c \langle D_V W, X \rangle, \end{aligned}$$

donde D' denota la conexión de Levi-Civita de N' , D la de N y $\langle, \rangle$ el tensor métrico de N . Concluimos que para todos $V, W, X \in \mathfrak{X}(N)$ se tiene que

$$\langle D'_V W, X \rangle = \langle D_V W, X \rangle,$$

y por ello, $D'_V W = D_V W$. □

Gracias al resultado previo, todas las propiedades que dependan exclusivamente de la conexión de Levi-Civita (derivada covariante inducida a lo largo de una curva, transporte paralelo, geodésicas, tensor de curvatura Riemanniana y tensor de curvatura de Ricci) se conservan por homotecias, en el mismo sentido que lo hacen por isometrías locales. Las demostraciones de estos resultados son análogas a las ya presentadas en el caso de las isometrías locales, pues en ellas solo se hizo uso de las propiedades de ϕ deducidas en el [Teorema 4.5.3](#).

No obstante, al definir tanto la curvatura seccional como la curvatura escalar, se hace uso del tensor métrico de forma explícita, sin ser a través de la conexión de Levi-Civita. Por tanto, no se conservarán en el mismo sentido que se obtuvo para las isometrías locales pero, siguiendo el mismo esquema de la demostración del [Corolario 4.5.8](#), se comprueba que si $\phi : M \rightarrow N$ es una homotecia de coeficiente $c \neq 0$ y π es un plano tangente de M no degenerado, $d\phi(\pi)$ es un plano tangente de N no degenerado y:

$$K_N(d\phi(\pi)) = \frac{1}{c} K_M(\pi), \quad S_N \circ \phi = \frac{1}{c} S_M.$$

4.6. Subvariedades semi-Riemannianas

En esta sección estudiaremos cómo dotar a las subvariedades embebidas de una variedad semi-Riemanniana de un tensor métrico, así como las relaciones entre las propiedades de la variedad y la subvariedad. Para ello, nos basaremos principalmente en el Capítulo 4 de [\[17\]](#).

En esta sección consideraremos una variedad semi-Riemanniana $(\bar{M}, \bar{g})$ de dimensión $n + k$ y una subvariedad (embebida) suya M , de dimensión n . Salvo que se indique lo contrario, p será un punto de M .

Definición 4.6.1. Sea $M \subset \bar{M}$ subvariedad embebida de $\bar{M}$ y j la inclusión. Entonces se dice que M es una *subvariedad semi-Riemanniana* de $\bar{M}$ si $g = j^*(\bar{g})$ es un tensor métrico sobre M .

Es decir, ha de cumplirse que para todo $p \in M$, $T_p M$ sea un subespacio vectorial de $T_p \bar{M}$ no degenerado para el tensor métrico $\bar{g}$, pues $j^*(\bar{g})$ cumple el resto de propiedades de tensor métrico de forma inmediata.

Ejemplo 4.6.2. En el caso semi-Riemanniano, existen subvariedades diferenciables de una variedad semi-Riemanniana que no son subvariedades semi-Riemannianas, al ser sus espacios tangentes degenerados en algunos puntos (o todos). Por ejemplo, la recta $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}_1^2$, pero es fácil comprobar que el espacio tangente a r en cada punto, visto como subespacio de los espacios tangentes a $\mathbb{R}_1^2$ es degenerado. Por ello r no es subvariedad semi-Riemanniana.

No obstante, en el caso Riemanniano, como la restricción de un producto interno a un subespacio cualquiera siempre da lugar a un producto interno en el subespacio (no hay problemas de degeneración), entonces es inmediato que toda subvariedad, M , de una variedad Riemanniana, $\bar{M}$, puede dotarse de estructura de subvariedad semi-Riemanniana. De hecho, M se tratará de una nueva variedad Riemanniana, por lo que se dice que es una subvariedad Riemanniana de $\bar{M}$.

Al trabajar con una subvariedad semi-Riemanniana, aparecen tres módulos de campos de vectores especialmente relevantes: los campos de vectores de $\bar{M}$ y de M , $\mathfrak{X}(\bar{M})$ y $\mathfrak{X}(M)$, respectivamente, así como los campos de vectores definidos solo sobre los puntos de M pero que no tienen por qué ser tangentes a M , $\bar{\mathfrak{X}}(M)$.

Definición 4.6.3. Sea M subvariedad de $\bar{M}$ no necesariamente semi-Riemanniana. Un campo vectorial X sobre la inclusión $j : M \rightarrow \bar{M}$ se denomina *$\bar{M}$ campo de vectores sobre M* . El conjunto de todos los $\bar{M}$ campos de vectores sobre M se denota por $\bar{\mathfrak{X}}(M)$ y es un $\mathcal{F}(M)$ -módulo.

Nótese que, por la definición de campo de vectores sobre una aplicación diferenciable, una aplicación $X : M \rightarrow T\bar{M}$ tal que $\pi \circ X = j$ es un $\bar{M}$ campo de vectores sobre M si y solo si para toda $f \in \mathcal{F}(\bar{M})$, $Xf \in \mathcal{F}(M)$. Además, para todo $Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, se tiene que $Y|_M \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$.

También cabe señalar que, ignorando la diferencial de la inclusión dj , podemos considerar $\mathfrak{X}(M) \subset \bar{\mathfrak{X}}(M)$, así como que la aplicación del tensor métrico de $\bar{M}$ sobre dos elementos de $\bar{\mathfrak{X}}(M)$ da lugar a una función en $\mathcal{F}(M)$.

Procedemos ahora a realizar una clasificación de los vectores tangentes a $\bar{M}$ en los puntos de M (y por ello de los campos de vectores de $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$), que será de utilidad en los razonamientos posteriores. Como $T_p M$ es un subespacio no degenerado de $T_p \bar{M}$, por el [Lema 2.3.15](#), podemos expresar

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

y, además, sabemos que $(T_p M)^\perp$ también es no degenerado.

Definición 4.6.4. Se define la *codimensión* de M en $\bar{M}$, k , como $k = \dim(\bar{M}) - \dim(M)$. Se define el coíndice de M en $\bar{M}$ como $\text{coind}(M) = \text{ind}(\bar{M}) - \text{ind}(M)$.

Nótese que es inmediato comprobar que la codimensión de M en $\bar{M}$ es la dimensión de $(T_p M)^\perp$ y, además, por el [Corolario 2.3.22](#), se tiene que el índice de $\bar{g}$ al restringirlo a $(T_p M)^\perp$ es $\text{coind}(M)$ para todo $p \in M$.

Definición 4.6.5. Se dice que un vector tangente $v \in T_p M$ es *tangente* a M y que un vector tangente $w \in (T_p M)^\perp$ es *normal* a M . De manera análoga, un campo de vectores $Z \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ se dice *normal* a M si para todo $p \in M$, Z_p lo es. El conjunto de todos los campos de vectores normales a M se denota $\mathfrak{X}(M)^\perp$.

Nótese en primer lugar que el conjunto de todos los campos de vectores normales a M también es un submódulo de $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$, igual que $\mathfrak{X}(M)$.

Además, gracias a la descomposición de $T_p \bar{M}$, para cada $v \in T_p \bar{M}$ existe una expresión única de la forma

$$v = \tan(v) + \text{norm}(v),$$

donde $\tan(v) \in T_p M$ y $\text{norm}(v) \in (T_p M)^\perp$.

Definición 4.6.6. Se definen para cada $p \in M$ las *proyecciones ortogonales*

$$\tan : T_p(\bar{M}) \longrightarrow T_p M, \quad \text{norm} : T_p(\bar{M}) \longrightarrow (T_p M)^\perp,$$

las cuales son claramente $\mathbb{R}$ -lineales.

Estas proyecciones no solo pueden actuar sobre vectores tangentes a $\bar{M}$ en puntos de M , sino que, como prueba el siguiente resultado, también sobre $\bar{M}$ campos de vectores sobre M .

Proposición 4.6.7. Sea $X \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$. Definimos, para cada $p \in M$, $\tan(X)(p) = \tan(X(p))$ y, análogamente, $\text{norm}(X)(p) = \text{norm}(X(p))$. Entonces se cumple que $\tan(X) \in \mathfrak{X}(M)$ y $\text{norm}(X) \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Demostración. Por la definición de $\tan(X)$ y $\text{norm}(X)$, es claro que basta con probar que ambas son aplicaciones diferenciables de M en $T\bar{M}$. Para ello, basta razonar de forma local. Sea $p \in M$.

Nótese que existen $E_1, \dots, E_{n+k} \in \tilde{\mathfrak{X}}(V)$, definidos en un entorno de p en M , V , tales que, para cada $q \in V$, $E_1(q), \dots, E_n(q)$ generan $T_q M$ y, por ello, el resto generan $(T_q M)^\perp$. Para probar su existencia, se parte de una carta local (U, φ) en torno a p en $\bar{M}$ adaptada a M . Se toma una base ortonormal $e_1, \dots, e_{n+k}$ de $T_p \bar{M}$, tal que $e_1, \dots, e_n$ generan $T_p M$, y se extiende cada vector tangente a $U \cap M$ por un campo de vectores, de forma que los n primeros estén en $\mathfrak{X}(V)$. Haciendo uso del algoritmo de Gram-Schmidt, de forma similar a la demostración del [Teorema 4.3.10](#), se prueba la existencia de dichos campos de vectores.

Trabajando localmente, haciendo uso de esta referencia de campos, podemos expresar

$$X = \sum_{m=1}^{n+k} \varepsilon_m \langle X, E_m \rangle E_m,$$

donde $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$. Nótese que para todo m , $\langle X, E_m \rangle \in \mathcal{F}(M)$. Por tanto, se tiene que

$$\tan(X) = \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \langle X, E_m \rangle E_m,$$

y, por ser una $\mathcal{F}(M)$ -combinación lineal de campos de vectores en $\mathfrak{X}(M)$, $\tan(X) \in \mathfrak{X}(M)$ y, en particular, es una aplicación diferenciable. Por ser resta de campos de vectores diferenciables, $\text{norm}(X) = X - \tan(X)$, también es diferenciable. $\square$

Esta proposición nos permite concluir que las aplicaciones $\tan : \tilde{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ y $\text{norm} : \tilde{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ están bien definidas, actúan punto a punto y, al ser lineales punto a punto, son $\mathcal{F}(M)$ -lineales. Además, se puede descomponer $\tilde{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^\perp$ en el sentido de que todo campo $X \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ se puede expresar de forma única como $X = V + W$ con $V \in \mathfrak{X}(M)$, $W \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, para lo cual se ha de tomar $V = \tan(X)$ y $W = \text{norm}(X)$.

Al introducir una estructura de variedad semi-Riemanniana en M basada en la conocida para $\bar{M}$, buscamos tratar de relacionar las propiedades de M con las de $\bar{M}$, comenzando por sus conexiones de Levi-Civita. Para distinguirlas, denotaremos por $\bar{D}$ a la conexión de Levi-Civita de $\bar{M}$ y por D a la de M . Como veremos a continuación, existen diferencias entre ellas, lo que nos permite definir el tensor de forma o segunda forma fundamental, vital en el estudio de las subvariedades.

En la asignatura de *Geometría de Curvas y Superficies* del Grado, se estudian las superficies como subvariedades Riemannianas de $\mathbb{R}^3$ con el tensor métrico usual. El estudio que presentamos a continuación es una generalización del que se hizo en dicha asignatura. En particular, comprobaremos cómo, al igual que en el caso de las superficies, el tensor de forma da cuenta de las propiedades de las subvariedades que no son intrínsecas, es decir, que no dependen únicamente de las propiedades de M , sino también de las de $\bar{M}$, de la forma en que esté sumergida la subvariedad.

Definición 4.6.8. Sean $V \in \mathfrak{X}(M)$, $X \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$. Consideremos $\bar{V}$ y $\bar{X}$ extensiones de V y X , respectivamente, en un entorno $U \subset \bar{M}$ de $p \in M$. Se define $\bar{D}_V X$ en $U \cap M$ como la restricción de $\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}$ a dicho abierto de M .

En principio, la definición anterior podría depender de las extensiones de los campos V y X escogidas (y en particular de U), por lo que es necesario comprobar que la definición dada es correcta. Además, en la demostración se observa claramente la necesidad de que el primero de los campos de vectores sea tangente a M .

Lema 4.6.9. Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $X \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ $\bar{D}_V X$ está bien definido y $\bar{D}_V X \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$.

Demostración. Sean $\bar{X}$ y $\bar{V}$ como en la definición anterior, definidos en U . Entonces, $\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X} \in \mathfrak{X}(U)$. Por tanto, al componer con la inclusión $\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}|_{U \cap M}$ es diferenciable en $U \cap M$ por la regla de la cadena. Así pues, basta con comprobar que no depende de las extensiones consideradas.

Consideremos una carta local adaptada a M , (U_1, φ) de $\bar{M}$ con $U_1 \subset U$. Escribimos en esta carta.

$$\bar{X} = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

Así pues:

$$\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X} = \sum_i \bar{V}(X^i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \sum_i X^i \bar{D}_{\bar{V}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

Sea $q \in V \cap M$. Entonces, $\bar{V}(X^i)(q) = V_q(X^i)$. Como V es tangente a M , $V_q = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_q$ y, por ello

$$V_q(X^i) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} (X^i)_q = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial (X^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} (\varphi(q)),$$

con lo que comprobamos que solo depende de los valores de $X^i \circ \varphi^{-1}$ en $\{x \in \varphi(U_1) / x^j = \varphi^j(q), j = n+1, \dots, n+k\} = \varphi(M \cap U_1)$, por haberse tomado una carta adaptada. Es decir, solo depende de los valores de X^i en $U_1 \cap M$. Además, $\bar{D}_{\bar{V}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} (q)$ solo depende del valor de $\bar{V}_q = V_q$.

Así pues, dadas otras extensiones W de V e Y de X , definidas en un entorno U_2 de q , trabajando en $U_1 \cap U_2$ usando la carta local anterior, como en $U_1 \cap U_2 \cap M$ las componentes de Y y $\bar{X}$ han de coincidir (pues solo depende su valor de X) y W y $\bar{V}$ coinciden en q , concluimos que:

$$\bar{D}_W Y(q) = \bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}.$$

Y se concluye la demostración del lema. □

Gracias al lema previo podemos considerar la siguiente aplicación, que comprobaremos a continuación que tiene las propiedades de las conexiones de Levi-Civita, aunque no es tan siquiera una conexión en el sentido definido en el trabajo (en el Capítulo 4 de [11] se puede encontrar una generalización del concepto de conexión en que entra esta aplicación), pues los módulos entre los que está definida no son los adecuados.

Definición 4.6.10. Se define la *conexión inducida*, que denotaremos también por $\bar{D}$, como la aplicación:

$$\begin{aligned}\bar{D} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (V, X) &\longmapsto \bar{D}_V X\end{aligned}$$

En el siguiente resultado, nótese que la propiedad 4. se enuncia para dos campos de vectores tangentes a M pues, si uno de ellos no lo fuera, uno de los dos sumandos del miembro derecho de la igualdad no estaría bien definido.

Corolario 4.6.11 (Propiedades de Levi-Civita de la conexión inducida). Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. La conexión inducida cumple que:

1. $\bar{D}$ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la primera componente.
2. $\bar{D}$ es $\mathbb{R}$ -lineal en la segunda componente.
3. $\bar{D}_V(fX) = V(f)X + f\bar{D}_V X$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$.
4. $[V, W] = \bar{D}_V W - \bar{D}_W V$.
5. $V \langle X, Y \rangle = \langle \bar{D}_V X, Y \rangle + \langle X, \bar{D}_V Y \rangle$.

Demostración. Consideremos $p \in M$ y sean $\bar{V}, \bar{W}, \bar{X}, \bar{Y}$ extensiones de V, W, X, Y , respectivamente, definidas en cierto entorno U de p .

1. Sean $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Consideramos extensiones $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{F}(U)$ de f, g , respectivamente. Entonces, una extensión de $fV + gW$ a U es $\bar{f}\bar{V} + \bar{g}\bar{W}$, por lo que

$$\bar{D}_{fV+gW} X(p) = \bar{D}_{\bar{f}\bar{V}+\bar{g}\bar{W}} \bar{X}(p) = \bar{f}(p)\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}(p) + \bar{g}(p)\bar{D}_{\bar{W}} \bar{X}(p) = f(p)\bar{D}_V X(p) + g(p)\bar{D}_W X(p),$$

donde hemos utilizado la $\mathcal{F}(\bar{M})$ -linealidad de la conexión de Levi-Civita en $\bar{M}$.

2. Tomemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Una extensión a U de $\lambda X + \mu Y$ es $\lambda \bar{X} + \mu \bar{Y}$, por lo que, usando la $\mathbb{R}$ -linealidad en la segunda componente de la conexión de Levi-Civita en $\bar{M}$:

$$\bar{D}_V (\lambda X + \mu Y)(p) = \bar{D}_{\bar{V}} (\lambda \bar{X} + \mu \bar{Y})(p) = \lambda \bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}(p) + \mu \bar{D}_{\bar{V}} \bar{Y}(p) = \lambda \bar{D}_V X(p) + \mu \bar{D}_V Y(p).$$

3. Utilizando de nuevo que si $f \in \mathcal{F}(M)$ y $\bar{f}$ es una extensión suya a U , entonces $\bar{f}\bar{X}$ es una extensión de fX a U y usando las propiedades de la conexión de Levi-Civita en $\bar{M}$

$$\bar{D}_V(fX)(p) = \bar{D}_{\bar{V}}(\bar{f}\bar{X})(p) = \bar{V}(\bar{f})(p)\bar{X}(p) + \bar{f}(p)\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}(p) = V(f)(p)X(p) + f(p)\bar{D}_V X(p),$$

donde hemos usado que $\bar{V}(\bar{f})(p) = V(f)(p)$, lo que se comprueba de forma análoga a cómo se hizo en la demostración del lema anterior.

4. De acuerdo con los resultados generales sobre campos de vectores definidos en subvariedades diferenciables, sabemos que $[\bar{V}, \bar{W}]|_M = [V, W]$. Por tanto,

$$[V, W](p) = [\bar{V}, \bar{W}](p) = \bar{D}_{\bar{V}} \bar{W}(p) - \bar{D}_{\bar{W}} \bar{V}(p) = \bar{D}_V W(p) - \bar{D}_W V(p).$$

5. Teniendo en cuenta que $\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle|_M = \langle X, Y \rangle$, entonces sabemos, por el mismo motivo que en el apartado 3., que

$$\begin{aligned}V \langle X, Y \rangle(p) &= \bar{V} \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle(p) = \langle \bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}, \bar{Y} \rangle(p) + \langle \bar{X}, \bar{D}_{\bar{V}} \bar{Y} \rangle(p) = \\ &= \langle \bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}(p), \bar{Y}(p) \rangle + \langle \bar{X}(p), \bar{D}_{\bar{V}} \bar{Y}(p) \rangle = \langle \bar{D}_V X(p), Y(p) \rangle + \langle X(p), \bar{D}_V Y(p) \rangle,\end{aligned}$$

con lo que comprobamos la veracidad de las 5 afirmaciones. $\square$

Establecemos ahora la relación entre la conexión de Levi-Civita en M y en $\bar{M}$, a través de la conexión inducida y las proyecciones de los campos de vectores. La parte de la conexión inducida de dos campos tangentes a M que es tangente a M coincide con la conexión de Levi-Civita de M de dichos campos.

Lema 4.6.12. Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Se cumple que, siendo D la conexión de Levi-Civita de M , $D_V W = \tan \bar{D}_V W$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ cualquiera y sea $p \in M$. Consideremos extensiones $\bar{V}, \bar{W}, \bar{X}$ de V, W, X , respectivamente, a un entorno U de p en $\bar{M}$. Utilizando la fórmula de Koszul para la conexión de Levi-Civita de $\bar{M}$, sobrentendiendo que evaluamos en p :

$$2\langle \bar{D}_V W, X \rangle = 2\langle \bar{D}_{\bar{V}} \bar{W}, \bar{X} \rangle = \bar{V}\langle \bar{W}, \bar{X} \rangle + \bar{W}\langle \bar{X}, \bar{V} \rangle - \bar{X}\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle - \langle \bar{V}, [\bar{W}, \bar{X}] \rangle + \langle \bar{W}, [\bar{X}, \bar{V}] \rangle + \langle \bar{X}, [\bar{V}, \bar{W}] \rangle.$$

Como $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces, $\langle \bar{W}, \bar{X} \rangle|_M = \langle W, X \rangle$ y, además, $\bar{V}\langle \bar{W}, \bar{X} \rangle = V\langle W, X \rangle$. Esto mismo ocurrirá con los dos primeros términos restantes. Para los tres últimos términos, basta notar que al restringir el corchete de Lie, $[\bar{W}, \bar{X}]|_M = [W, X]$, e igual en el resto de términos, con lo que, como el producto escalar actúa término a término

$$2\langle \bar{D}_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle = 2\langle D_V W, X \rangle,$$

usando ahora la fórmula de Koszul para D . En general $\bar{D}_V W \notin \mathfrak{X}(M)$, por lo que hemos de considerar la descomposición:

$$\bar{D}_V W = \tan \bar{D}_V W + \text{norm} \bar{D}_V W,$$

y como $\text{norm} \bar{D}_V W$ es normal a M , es ortogonal a X , por lo que:

$$\langle D_V W, X \rangle = \langle \bar{D}_V W, X \rangle = \langle \tan \bar{D}_V W, X \rangle.$$

Como $D_V W$ y $\tan \bar{D}_V W$ son campos de vectores tangentes a M tales que su producto escalar por cualquier otro campo de vectores tangente a M coincide, por la no degeneración de g , $D_V W = \tan \bar{D}_V W$. $\square$

El resto de la derivada covariante inducida al aplicarla sobre vectores tangentes a M , que es normal a M , se denomina tensor de forma.

Lema 4.6.13. La aplicación $\mathbf{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por:

$$\mathbf{II}(V, W) = \text{norm} \bar{D}_V W$$

es $\mathcal{F}(M)$ -bilineal y simétrica. Se denomina *tensor de forma o segunda forma fundamental*.

Demostración. En primer lugar, nótese que $\mathbf{II}$ es la composición de las aplicaciones norm y la conexión inducida. Como esta última es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la primer componente y norm es $\mathcal{F}(M)$ -lineal, entonces es claro que $\mathbf{II}$ es lineal en la primera componente.

Además, se cumple que

$$\mathbf{II}(V, W) - \mathbf{II}(W, V) = \text{norm} (\bar{D}_V W - \bar{D}_W V) = \text{norm} ([V, W]) = 0,$$

donde se usa que, como $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, sabemos que $[V, W] \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando la simetría y la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad en la primera componente de $\mathbf{II}$, se concluye de forma inmediata la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad en la segunda componente. $\square$

Otra forma de comprobar que $\mathbf{II}$ es $\mathcal{F}(M)$ -lineal en la segunda componente es notar que, por la $\mathbb{R}$ -linealidad en la segunda componente de la conexión inducida, sabemos que la $\mathbf{II}(V, W_1 + W_2) = \mathbf{II}(V, W_1) + \mathbf{II}(V, W_2)$ para todos $V, W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Así pues, basta considerar $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$ y notar que

$$\mathbf{II}(V, fW) = \text{norm} (V(f)W + f\bar{D}_V W) = f\text{norm} \bar{D}_V W,$$

usando la $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de norm y que $V(f)W \in \mathfrak{X}(M)$.

A pesar de su nombre, el tensor de forma no es un tensor en el sentido estricto, pues es una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -bilineal, pero con llegada en $\mathfrak{X}(M)^\perp$ en lugar de en $\mathfrak{X}(M)$. No obstante, la misma prueba que la

de Teorema 2.2.8, permite concluir que actúa punto a punto. Es decir, que si V_1, W_1 y V_2, W_2 coinciden en un punto $p \in M$, entonces $\mathbf{II}(V_1, W_1)(p) = \mathbf{II}(V_2, W_2)(p)$. Por tanto, podemos definir la actuación del tensor de forma sobre vectores tangentes: dados $v, w \in T_p M$, $\mathbf{II}(v, w) = \mathbf{II}(V, W)(p)$ donde $V, W \in \mathfrak{X}(U)$ son campos de vectores en un entorno $U \subset M$ que contenga a p que extienden a v, w .

Esta definición nos permite descomponer la conexión de Levi-Civita en la variedad en dos partes, una tangente a la subvariedad y otra normal, en lo que se conoce como la fórmula de Gauss

$$\bar{D}_V W = D_V W + \mathbf{II}(V, W), \quad \text{para todos } V, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Se suele distinguir entre la geometría intrínseca de M , que es aquella que depende solo de g y no de que M sea una subvariedad de $\bar{M}$ y la geometría extrínseca, que es la que observarían los "habitantes" de $\bar{M}$ (más adelante se proporciona una definición más precisa). El tensor de forma es una característica extrínseca de M . Para comprobarlo, basta considerar las subvariedades semi-Riemannianas de $\mathbb{R}^3$ siguientes: el rectángulo $M = (0, 1) \times (0, \pi) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ y el semicilindro C dado como la imagen de:

$$\begin{aligned} \phi : (0, 1) \times (0, \pi) &\longrightarrow C \\ (t, s) &\longrightarrow (t, \cos(s), \sin(s)). \end{aligned}$$

Nótese que la inversa de esta aplicación es una carta global de C que le da estructura de subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} \psi : M &\longrightarrow C \\ (t, s, 0) &\longrightarrow (t, \cos(s), \sin(s)), \end{aligned}$$

es una isometría y, por ello, las geometrías intrínsecas de M y C han de ser iguales. No obstante, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ e $Y = y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + y^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$, podemos hallar que, siendo $\bar{D}$ la conexión inducida:

$$\bar{D}_X Y = Y(a^1) \frac{\partial}{\partial x^1} + Y(a^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \in \mathfrak{X}(M),$$

con lo que $\mathbf{II} = 0$ en M . No obstante, tomando $V = d\phi \frac{\partial}{\partial t}$, $W = d\phi \frac{\partial}{\partial s} \in \mathfrak{X}(C)$, pues ϕ es difeomorfismo, entonces:

$$V(\phi(t, s)) = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\phi(t, s)}, \quad W(\phi(t, s)) = -\sin(s) \frac{\partial}{\partial x^3} \Big|_{\phi(t, s)} + \cos(s) \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_{\phi(t, s)}.$$

Con lo que W se puede extender a $\mathbb{R}^3$ como $\bar{W} = -x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}$ y por ello:

$$\bar{D}_W W(x^1, x^2, x^3) = W|_{(x^1, x^2, x^3)}(-x^3) \frac{\partial}{\partial x^2} + W|_{(x^1, x^2, x^3)}(x^2) \frac{\partial}{\partial x^3} = (x^3)^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + (x^2)^2 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

En particular, en $p = (1/2, \pi/2, \pi/2) \in C$ se tiene que una base de $T_p C \subset T_p \mathbb{R}^3$ tiene vectores de coordenadas respecto a la base asociada a las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^3$: $(1, 0, 0)$ y $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, mientras que, usando coordenadas en esa misma base, $\bar{D}_W W(p) = (0, 1/2, 1/2)$ con lo que vemos que $\bar{D}_W W(p) \in (T_p C)^\perp$ y por ello $\mathbf{II}(W, W)(p) = (0, 1/2, 1/2) \neq 0$.

Por tanto, comprobamos que el tensor de forma de C no es nulo, a pesar que sí lo es el de M , a la cual es isométrica. Así pues, el tensor de forma de C no se puede recuperar a partir del de M y por ello, no puede ser una propiedad intrínseca.

A pesar de que las isometrías pueden no conservar el tensor de forma de dos subvariedades semi-Riemannianas (incluso cuando están sumergidas en una misma variedad), éste sí se conserva por ciertas aplicaciones, que denominamos isometrías por pares. Las propiedades de una subvariedad semi-Riemanniana que se conservan por este tipo de aplicaciones (como el tensor de forma) son las que constituyen la geometría extrínseca de la misma.

Definición 4.6.14. Sean M una subvariedad semi-Riemanniana de $\bar{M}$ y N una subvariedad semi-Riemanniana de $\bar{N}$. Una *isometría por pares* de M en N es una isometría $\phi : \bar{M} \longrightarrow \bar{N}$ tal que $\phi|_M : M \longrightarrow N$ es también isometría. Si $\bar{M} = \bar{N}$, la aplicación se denomina congruencia.

Lema 4.6.15. En las condiciones de la definición anterior, ϕ conserva el tensor de forma, es decir

$$d\phi_p(\mathbf{II}(v, w)) = \mathbf{II}(d\phi_p v, d\phi_p w),$$

para cada $p \in M$ y $v, w \in T_p M$.

Demostración. Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ que extiendan a v, w . Como $\phi|_M$ es un difeomorfismo en particular, $d\phi V, d\phi W \in \mathfrak{X}(N)$ y extienden a $d\phi_p v, d\phi_p w$. Como $\phi : M \rightarrow N$ es isometría, conserva las conexiones y, por ello, razonando con una extensión cualquiera de V y W :

$$d\phi(\bar{D}_V W) = \bar{D}_{d\phi V} d\phi W.$$

Para cada $p \in M$, $d\phi_p : T_p \bar{M} \rightarrow T_{\phi(p)} \bar{N}$ es un isometría que manda $T_p M$ en $T_{\phi(p)} N$ (se puede comprobar fácilmente usando una carta local adaptada a M) y, por tanto, $(T_p M)^\perp$ en $(T_{\phi(p)} N)^\perp$. Es inmediato pues que $d\phi$ conserva las proyecciones tan y norm, es decir, que $d\phi \circ \tan = \tan \circ d\phi$ e igual para el otro caso. Por ello,

$$d\phi(\mathbf{II}(V, W)) = d\phi(\text{norm} \bar{D}_V W) = \text{norm}(d\phi \bar{D}_V W) = \text{norm}(\bar{D}_{d\phi V} d\phi W) = \mathbf{II}(d\phi V, d\phi W),$$

con lo que se concluye la demostración. $\square$

Pasamos ahora a estudiar la relación entre las curvaturas de M y $\bar{M}$ que denotaremos por R y $\bar{R}$, respectivamente. Para ello, determinamos el tensor de curvatura de M a partir del de $\bar{R}$ y de $\mathbf{II}$ por medio de la ecuación de Gauss. Nótese que, gracias a la no degeneración del tensor métrico, esta nos permite recuperar el valor de $R_{VW}X$ para $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ cualesquiera.

Teorema 4.6.16 (Ecuación de Gauss). Sean $V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se cumple que:

$$\langle R_{VW}X, V \rangle = \langle \bar{R}_{VW}X, V \rangle + \langle \mathbf{II}(V, X), \mathbf{II}(W, Y) \rangle - \langle \mathbf{II}(V, Y), \mathbf{II}(W, X) \rangle.$$

Demostración. Como todas las operaciones involucradas en la expresión del resultado son $\mathcal{F}(M)$ -lineales, basta con probar la igualdad en un entorno de cada punto para campos de vectores que, en cada punto de dicho entorno, formen una base del espacio tangente. Se pueden tomar, por ejemplo, los campos de vectores asociados a una carta local, los cuales tienen corchete de Lie nulo, por lo que podemos suponer que $[V, W] = 0$. Por tanto, por definición del tensor de curvatura:

$$\langle \bar{R}_{VW}X, Y \rangle = -\langle \bar{D}_V \bar{D}_W X, Y \rangle + \langle \bar{D}_W \bar{D}_V X, Y \rangle. \quad (4.16)$$

Usando la definición del tensor de forma, la descomposición de $\bar{D}_W X$ en su parte tangente y normal a M y la relación entre la conexión inducida y D :

$$\langle \bar{D}_V \bar{D}_W X, Y \rangle = \langle \bar{D}_V (\tan \bar{D}_W X + \text{norm} \bar{D}_W X), Y \rangle = \langle \bar{D}_V D_W X, Y \rangle + \langle \bar{D}_V \mathbf{II}(W, X), Y \rangle =$$

Como Y es tangente a M , solo es no nulo su producto escalar con la proyección tangente a M de los otros campos de vectores:

$$= \langle D_V D_W X, Y \rangle + \langle \bar{D}_V \mathbf{II}(W, X), Y \rangle =$$

Usando las propiedades de la conexión inducida y que $\mathbf{II}(W, X)$ es ortogonal a Y :

$$= \langle D_V D_W X, Y \rangle + V \langle \mathbf{II}(W, X), Y \rangle - \langle \mathbf{II}(W, X), \bar{D}_V Y \rangle =$$

Como $\mathbf{II}(W, X)$ es normal a M , solo la parte normal de $\bar{D}_V Y$ tiene producto escalar no nulo con él:

$$= \langle D_V D_W X, Y \rangle - \langle \mathbf{II}(W, X), \mathbf{II}(V, Y) \rangle.$$

Razonando de igual modo para el otro sumando de (4.16) y sumando

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}_{VW}X, Y \rangle &= -\langle D_V D_W X, Y \rangle + \langle \mathbf{II}(W, X), \mathbf{II}(V, Y) \rangle + \langle D_W D_V X, Y \rangle - \langle \mathbf{II}(V, X), \mathbf{II}(W, Y) \rangle = \\ &= \langle R_{VW}X, Y \rangle + \langle \mathbf{II}(W, X), \mathbf{II}(V, Y) \rangle - \langle \mathbf{II}(V, X), \mathbf{II}(W, Y) \rangle, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado de nuevo la definición de curvatura, ahora en M . Reordenando se concluye el resultado. $\square$

Gracias a que todas las operaciones implicadas en la ecuación de Gauss son $\mathcal{F}(M)$ -lineales, esta seguirá siendo cierta si se aplica sobre vectores tangentes en lugar de sobre campos de vectores. Esto nos permite deducir una expresión de la curvatura seccional de M en función de la de $\bar{M}$ y del tensor de forma, que también se suele denominar ecuación de Gauss.

Corolario 4.6.17. Sean $v, w \in T_p M$ base de un plano no degenerado $\pi \subset T_p M$ de M . Entonces se cumple que, siendo K la curvatura seccional de M y $\bar{K}$ la de $\bar{M}$:

$$K(\pi) = \bar{K}(\pi) + \frac{\langle \mathbf{II}(v, v), \mathbf{II}(w, w) \rangle - \langle \mathbf{II}(v, w), \mathbf{II}(v, w) \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}.$$

Demostración. Basta aplicar la ecuación de Gauss (en su versión puntual) a $v, w, v, w \in T_p M$ y dividir por $Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$. $\square$

Ejemplo 4.6.18. Consideremos $M = \mathbb{S}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\}$ como subvariedad semi-Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Como M está definida de forma implícita sabemos que, tras identificar los espacios tangentes a M con subespacios de los espacios tangentes a $\mathbb{R}^{n+1}$ a través de la diferencial de la inyección, e identificando estos con $\mathbb{R}^{n+1}$ a través del isomorfismo natural, las ecuaciones de $T_p M$ para cada $p \in M$ son (ver sección II.1 de [4]):

$$T_p M = \{(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / p_1 u_1 + \dots + p_{n+1} u_{n+1} = 0\}.$$

Por tanto, es inmediato comprobar que el campo de vectores

$$P(p) = \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad p \in M,$$

cumple que $P \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Por ello también, $U = \frac{1}{r} P \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Además, es inmediato comprobar que, siendo $\bar{D}$ la conexión de Levi-Civita en $\mathbb{R}^{n+1}$, extendiendo P a todo $\mathbb{R}^{n+1}$ por la misma expresión:

$$\bar{D}_{\bar{V}} P = \sum_i \bar{V}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = \bar{V}, \quad \text{para todo } \bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M}).$$

Veamos que $\mathbf{II}(V, W) = -\frac{1}{r} \langle V, W \rangle U$ para cualesquiera $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Como la codimensión de M es 1, sabemos que para cada $p \in M$, U_p es base de $(T_p M)^\perp$. Por tanto, como $\langle U, U \rangle = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{II}(V, W) &= \langle \mathbf{II}(V, W), U \rangle U = \frac{1}{r} \langle \text{norm } \bar{D}_V W, P \rangle U = \frac{1}{r} \langle \bar{D}_V W, P \rangle U = \frac{1}{r} (V \langle W, P \rangle - \langle W, \bar{D}_V P \rangle) U = \\ &= -\frac{1}{r} \langle W, V \rangle U. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^{n+1}$ es plana, por lo que $\bar{K} = 0$ y usando el corolario anterior, se concluye que $K(\pi) = \frac{1}{r^2}$ para todo plano tangente π (como $\mathbb{S}^n(r)$ es una variedad Riemanniana todo plano tangente es no degenerado).

Este resultado nos demuestra, en particular, que el tensor de curvatura de $\mathbb{S}^n(r)$ es no nulo. Así pues, como también hemos probado que los espacios semieuclicídeos, $\mathbb{R}_\nu^n$, son planos, es decir, su tensor de curvatura es nulo. Así pues, de acuerdo con la [Proposición 4.5.7](#), no puede existir una isometría local entre una n -esfera y un espacio semieuclicídeo, es decir, no son localmente isométricos.

Nos centramos ahora en la relación entre las derivadas covariantes a lo largo de curvas de M y $\bar{M}$, claro está, considerando curvas con llegada en M . Nos centraremos especialmente en el estudio de las geodésicas de M , lo que nos permitirá proporcionar una nueva interpretación a **II**.

Consideraremos curvas $\alpha : I \rightarrow M \subset \bar{M}$ y denotaremos para cada campo de vectores sobre α , $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$, $\dot{Y}$ a la derivada covariante inducida sobre α por $\bar{D}$ de Y y Y' a su derivada covariante inducida sobre α por D .

Teorema 4.6.19. Sea $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Se cumple que

$$\dot{Y} = Y' + \mathbf{II}(\alpha', Y),$$

donde $\mathbf{II}(\alpha', Y)(t) = \mathbf{II}(\alpha'(t), Y(t))$ se define punto a punto.

Demostración. En primer lugar, nótese que, como α es una curva con llegada en M , su campo velocidad es tangente a M en todo punto y por ello tiene sentido considerar $\mathbf{II}(\alpha', Y)$.

Como las operaciones implicadas son locales, dado $t \in I$, podemos considerar una carta local (U, φ) de $\bar{M}$ adaptada a M con $\alpha(t) \in U$ y razonar localmente. Usando los campos de vectores asociados a esta carta, como Y es un campo de vectores tangente a M , se puede expresar como:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n Y^i(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(t)}.$$

Así pues, utilizando (3.2)

$$\dot{Y}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{dY^i}{dds}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(t)} + \sum_{i=1}^n Y^i(t) \bar{D}_{\alpha'} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) (\alpha(t)),$$

donde, en los puntos de M , $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ son tangentes a M , por lo que la conexión de Levi-Civita en $\bar{M}$ es igual a la derivada covariante inducida. Utilizando la descomposición en parte tangente y parte normal de esta última y el cálculo previo

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{dY^i}{dds}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(t)} + \sum_{i=1}^n Y^i(t) \left(\tan \bar{D}_{\alpha'} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) (\alpha(t)) + \text{norm} \bar{D}_{\alpha'} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) (\alpha(t)) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{dY^i}{dds}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(t)} + \sum_{i=1}^n Y^i(t) \left(D_{\alpha'} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) (\alpha(t)) + \mathbf{II} \left(\alpha', \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right) (\alpha(t)) \right). \end{aligned}$$

Usando de nuevo (3.2) ahora para la derivada covariante inducida sobre α por D , así como la $\mathcal{F}(M)$ -bilinealidad de $\mathbf{II}$ y los cálculos previos, concluimos que

$$\dot{Y}(t) = Y'(t) + \mathbf{II} \left(\alpha'(t), \sum_{i=1}^n Y^i(t) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\alpha(t)} \right) = Y'(t) + \mathbf{II}(\alpha', Y)(t),$$

y se termina la prueba. $\square$

Aplicando el teorema anterior al campo velocidad de α , obtenemos la relación entre las aceleraciones de la curva que ven los “habitantes de M ” y los “habitantes de $\bar{M}$ ”.

Corolario 4.6.20. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva. Entonces se cumple que, siendo $\ddot{\alpha} = \dot{\alpha}'$ su aceleración como curva de I en $\bar{M}$ y α'' su aceleración como curva de I en M :

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + \mathbf{II}(\alpha', \alpha').$$

Corolario 4.6.21. Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica de M si y solo si su aceleración como curva en $\bar{M}$ es normal a M en todo punto.

Estos corolarios, de demostración inmediata, permiten interpretar el tensor de forma de M como la forma bilineal que determina la curvatura en $\bar{M}$ de las geodésicas de M . Además, nos permiten caracterizar fácilmente las curvas geodésicas de algunas subvariedades de $\mathbb{R}^n$, como por ejemplo las esferas.

Corolario 4.6.22. Las geodésicas no constantes de las esferas $\mathbb{S}^n(r)$ son todas las parametrizaciones de velocidad constante de círculos máximos en $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración. En primer lugar, sea α una parametrización de velocidad constante de un círculo máximo de $\mathbb{S}^n(r)$, es decir, del corte $\mathbb{S}^n(r) \cap \pi$ donde π es un plano de $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasa por 0. Como α es de velocidad constante, $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ es una función constante y por ello, su derivada es nula. Por las propiedades de la derivada covariante:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 2 \langle \alpha', \ddot{\alpha} \rangle.$$

Es decir, α' y $\ddot{\alpha}$ son campos de vectores ortogonales. Como α es una curva en π , plano y sabemos que el tensor de forma de los planos es nulo (lo vimos para planos de $\mathbb{R}^3$ pero el mismo razonamiento es cierto para subespacios euclídeos de $\mathbb{R}^{n+1}$), ambos son campos de vectores tangentes a π , por lo que, en cada

punto de $\pi \cap \mathbb{S}^n(r)$ generan una base del espacio tangente a π .

Consideramos el campo de vectores P introducido en el [Ejemplo 4.6.18](#), denominado campo posición. Entonces, como la recta que une el origen con un punto $\alpha(t)$ está contenida en π , parametrizándola como $r(s) = s\alpha(t)$, su vector velocidad en $s = 1$ es precisamente $P(\alpha(t))$, con lo que se comprueba que P es tangente a π . En el [Ejemplo 4.6.18](#) probamos que también era normal a $\mathbb{S}^n(r)$ y por ello, ortogonal a α' , por lo que ha de ser proporcional a $\ddot{\alpha}$. Por ello, concluimos que $\ddot{\alpha}$ es normal a $\mathbb{S}^n(r)$ y, por ello, α es una geodésica de $\mathbb{S}^n(r)$.

Supongamos ahora que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^n(r)$ es geodésica de $\mathbb{S}^n(r)$. Sea $t \in I$ y π el plano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$ y es tangente a $\alpha'(t)$. Consideremos γ una parametrización con velocidad constante de $\pi \cap \mathbb{S}^n(r)$ en I con $\gamma'(t) = \alpha'(t)$, la cual sabemos que existe. Por la unicidad de las geodésicas, ha de ser $\alpha = \gamma$. $\square$

Pasamos ahora a estudiar dos tipos de subvariedades semi-Riemannianas que serán de especial utilidad en el siguiente capítulo: las subvariedades totalmente geodésicas y las subvariedades totalmente umbilicales.

Definición 4.6.23. Se dice que M es *totalmente geodésica* si su tensor de forma se anula, es decir, $\mathbf{II} = 0$.

Es decir, las subvariedades totalmente geodésicas son aquellas extrínsecamente planas pues, en particular, de acuerdo con la ecuación de Gauss, las curvaturas de $\bar{M}$ y de M coinciden al actuar sobre campos de vectores tangentes a M .

El siguiente resultado nos proporciona caracterizaciones alternativas de la definición de subvariedad totalmente geodésica que justifican el nombre dado a estas subvariedades.

Proposición 4.6.24. Sea $M \subset \bar{M}$ una subvariedad semi-Riemanniana. Son equivalentes:

1. M es totalmente geodésica en $\bar{M}$.
2. Cada geodésica de M es también geodésica de $\bar{M}$.
3. Si $v \in T_p \bar{M}$ es tangente a M , existe $\varepsilon > 0$ tal que la imagen de $(-\varepsilon, \varepsilon)$ por la geodésica γ_v de $\bar{M}$ está contenida en M , es decir, γ_v comienza estando en M .
4. Si α es una curva en M y $v \in T_{\alpha(0)} M$, el transporte paralelo de v por α en M y en $\bar{M}$ coincide.

Demostración. Comencemos probando la equivalencia de 2. y 3.:

- 2 $\Rightarrow$ 3. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ la geodésica de M con velocidad inicial v . Entonces α también geodésica de $\bar{M}$ y, por unicidad de las geodésicas, coincide con γ_v en la intersección de sus abiertos de definición. (Nótese que γ_v podría abandonar M ; basta considerar como M el disco de radio 1 contenido en el plano $\{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y como γ_v una recta).
- 3 $\Rightarrow$ 2. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una geodésica de M y sea $t \in I$, $p = \alpha(t)$. Consideremos una carta local (U, φ) adaptada a M con $p \in U$. Consideramos $\gamma = \gamma_{\alpha'(t)}$ geodésica de $\bar{M}$ y $J = (-\varepsilon, \varepsilon)$ para el ε del enunciado (suponemos $\gamma(J) \subset U$). Como $\gamma(J) \subset M$, sabemos que $\varphi^i(\gamma)$ es constante para $i = n+1, \dots, n+k$. Así pues, en J , por (3.3) γ cumple

$$\frac{d^2(\varphi^l \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^l(\gamma) \frac{d(\varphi^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(\varphi^j \circ \gamma)}{dt}, \quad l = 1, \dots, n,$$

y, teniendo en cuenta que los símbolos de Christoffel respecto de la carta (U, φ) (para $i, j, k = 1, \dots, n$) son los mismos que los de la carta $(U \cap M, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$, por (3.3) aplicada a M , γ es una geodésica de M en J con velocidad inicial $\gamma'(0) = \alpha'(t)$. Por tanto, por la unicidad de las geodésicas, como la curva $s \mapsto \alpha(s+t)$ es geodésica de M con velocidad inicial $\alpha'(t)$, esta coincide con γ_v en un entorno de 0. En particular, en dicho entorno es geodésica de $\bar{M}$ y, por tanto, α es geodésica de $\bar{M}$ en un entorno de t . Como la propiedad de ser geodésica es local, α es geodésica de M .

Probemos ahora la equivalencia de ambos asertos con 1. y, posteriormente, con 4:

- 1 $\Rightarrow$ 2. Es inmediato a partir del [Corolario 4.6.20](#).

- 2 $\Rightarrow$ 1. Sea $v \in TM$ y sea γ_v la geodésica de M con velocidad inicial v . Entonces γ_v también es geodésica de $\bar{M}$ con velocidad inicial v y, por ello, $\gamma_v''(0) = \ddot{\gamma}_v(0) = 0$. Por tanto, usando el resultado del [Corolario 4.6.20](#) evaluando en $t = 0$:

$$\mathbf{II}(v, v) = 0.$$

Así pues, $\mathbf{II}(v, v) = 0$ para todo $v \in TM$. Usando que $\mathbf{II}$ es una forma bilineal simétrica en cada $T_p M$, $p \in M$, razonando por polarización se concluye que $\mathbf{II} = 0$.

- 1 $\Rightarrow$ 4. Sea V el campo de vectores sobre α paralelo para la conexión de Levi-Civita de M con $V(0) = v$. Entonces, por el [Teorema 4.6.19](#):

$$\dot{V} = V' + \mathbf{II}(\alpha', V) = 0 + 0 = 0.$$

Por tanto, V también es paralelo para la conexión de Levi-Civita de $\bar{M}$ y por ello es el campo que se ha de utilizar para calcular el transporte paralelo de v sobre α al considerar cualquiera de las conexiones de Levi-Civita. Por tanto, los transportes paralelos coinciden.

- 4 $\Rightarrow$ 2. Sea γ una geodésica de M . Entonces γ' es paralelo en M , con lo que el transporte paralelo de $\gamma'(0)$ a lo largo de γ de $s = 0$ a $s = t$ es $\gamma'(t)$ al considerar la conexión de Levi-Civita de M y, por 4., al considerar la de $\bar{M}$. Así pues, siendo V el único campo paralelo para la conexión de Levi-Civita de $\bar{M}$ sobre γ con $V(0) = \gamma'(0)$, sabemos que $V(t) = \gamma'(t)$ para todo t , es decir, $\gamma' = V$, por lo que $\ddot{\gamma} = 0$.

Con esto último se cierra la cadena de implicaciones y se prueba el resultado. $\square$

El siguiente lema es de gran utilidad a la hora de identificar todas las subvariedades totalmente geodésicas y geodésicamente completas de una variedad, como comprobaremos con un ejemplo, pues permite concluir que estas están caracterizadas por uno solo de sus espacios tangentes en un punto. Nótese que la condición de ser geodésicamente completas es necesaria, pues si no, siempre podríamos considerar un abierto (no igual al total), U , de una subvariedad totalmente geodésica, M , $U \subset M$, como contraejemplo del siguiente resultado.

Lema 4.6.25. Sean M, N subvariedades geodésicamente completas, conexas y totalmente geodésicas de $\bar{M}$. Si existe $p \in M \cap N$ tal que $T_p M = T_p N$, entonces $M = N$.

Demostración. Veamos que si M es conexa, N geodésicamente completa y ambas son totalmente geodésicas, $M \subset N$ (lo que permite incluir el ejemplo mencionado anteriormente tomando como N a M y como M a U).

Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una geodésica de M con $0 \in I$. Sea $\alpha(0) = p$ y para $t \in I$, $\alpha(t) = q$. Entonces, como M es totalmente geodésica, α es geodésica de $\bar{M}$ con velocidad inicial $\alpha'(0) \in T_p M = T_p N$. Así pues, como N es totalmente geodésica, por el punto 3. del apartado previo, α comienza estando contenida en N . Como N es geodésicamente completa, $\alpha(I) \subset N$ y por ello $q \in N$.

Como el transporte paralelo a través de α es igual por M y por $\bar{M}$ por el punto 4. del lema anterior, así como por N y por $\bar{M}$ (todo ello para vectores tangentes de $T_p M = T_p N$), concluimos que el transporte paralelo por α es el mismo para las conexiones de Levi-Civita de M y N . Como este es un isomorfismo entre los espacios tangentes, concluimos que $T_q M = T_q N$.

Consideremos ahora $A = \{q \in M \cap N / T_q M = T_q N\}$ y veamos que es abierto y cerrado en M , pues por hipótesis es no vacío. Una vez probado esto, la conexión de M asegura que $A = M \subset N$ con lo que se concluye la prueba (cambiando los papeles de M y N para ver la otra contención).

Sea $q \in A$. Asumiendo que existe un entorno $U \subset M$ de q tal que todo punto de U puede alcanzarse por una geodésica que empiece en q (la existencia de entornos normales, ya mencionados previamente, garantiza que U existe). Así pues, por lo probado inicialmente $U \subset A$ y por ello q es interior a A , que por tanto es abierto.

De igual forma, si $q \notin A$ entonces considerando un entorno $U \subset M$ de q como antes, si existiera $r \in U \cap A$, entonces se podría llegar desde r hasta q por una geodésica en M (invirtiendo el parámetro en la geodésica de q a r en U) y, por lo argumentado al inicio de la demostración, $q \in A$. Absurdo. Así pues, $U \subset A^c$, por lo que el complementario de A en M , A^c , es también abierto y se concluye el resultado. $\square$

Ejemplo 4.6.26. Consideremos $\mathbb{R}_\nu^n$. Denominamos k -planos de $\mathbb{R}_\nu^n$ a los subespacios afines k -dimensionales de $\mathbb{R}_\nu^n$. Veamos que las únicas subvariedades totalmente geodésicas, conexas y geodésicamente completas de $\mathbb{R}_\nu^n$ son los k -planos que sean subvariedades semi-Riemannianas (no todos ellos lo tienen que ser; por ejemplo en $\mathbb{R}_1^2$, la recta $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ no es una subvariedad semi-Riemanniana, pues $T_{(x,x)}r$ es un subespacio degenerado para todo x).

En primer lugar, es claro que los k -planos son conexos y, por lo visto en el [Ejemplo 4.2.8](#), son geodésicamente completos. Además, el mismo razonamiento que utilizamos para comprobar que los planos de $\mathbb{R}^3$ tienen $\mathbf{II} = 0$ permite comprobar que los k -planos son totalmente geodésicos.

Supongamos que $M \subset \mathbb{R}_\nu^n$ es una subvariedad de dimensión k , geodésicamente completa, conexa y totalmente geodésica. Sea $p \in M$ y consideremos $T_p M$, el cual podemos identificar canónicamente con un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el k -plano $\pi = p + W$. Entonces el espacio tangente en cada punto de W puede identificarse con W canónicamente, con lo que $T_p \pi = T_p M$ y, por el lema previo $M = \pi$. Nótese que, como M es subvariedad, sabemos que $T_p M$ es un subespacio no degenerado de $T_p \mathbb{R}_\nu^n$ y, por ello, lo es $T_q \pi \equiv W$ para todo $q \in \pi$, con lo que π es una subvariedad semi-Riemanniana de $\mathbb{R}_\nu^n$.

Un razonamiento similar permite probar que las variedades totalmente geodésicas, conexas y geodésicamente completas de $\mathbb{S}^n(r)$ son las k -esferas máximas, es decir, las intersecciones de $\mathbb{S}^n(r)$ con subespacios vectoriales k -dimensionales de $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.6.27. Un punto $p \in M$ se dice *umbilical* si existe un vector normal a M , $z \in (T_p M)^\perp$ tal que:

$$\mathbf{II}(v, w) = \langle v, w \rangle z, \quad \text{para todo } v, w \in T_p M.$$

En tal caso, z se denomina vector normal de curvatura de M en p .

Nótese que si p es umbilical, para cada $u \in T_p M$

$$\mathbf{II}(u, u) = \langle u, u \rangle z,$$

con lo que, entendiendo que el tensor de forma expresa cómo se curva M en $\bar{M}$ en cada dirección, en las direcciones determinadas por vectores tangentes espaciales, M se curva hacia z , mientras que en las determinadas por vectores tangentes temporales, lo hace en la dirección opuesta. Además, en las direcciones determinadas por vectores tangentes luminosos, M no se curva en $\bar{M}$.

Definición 4.6.28. Una subvariedad semi-Riemanniana M se dice que es *totalmente umbilical* si todo punto de M es umbilical.

Nótese que, si M es totalmente umbilical, para cada $p \in M$ existe $z_p \in (T_p M)^\perp$ tal que $\mathbf{II}(v, w) = \langle v, w \rangle z_p$ para todo $p \in T_p M$. Definiendo $Z(p) = z_p$ para cada $p \in M$, se tiene que $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Para ver que este campo de vectores es diferencial, basta probarlo localmente. Por tanto, podemos tomar un campo de vectores V que no sea luminoso en un entorno de cada $p \in M$ y, en dicho entorno, $Z = \frac{\mathbf{II}(V, V)}{\langle V, V \rangle}$, con lo que es diferenciable.

Así pues, concluimos que si M es una subvariedad totalmente umbilical si y solo si existe $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ tal que, para todos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\mathbf{II}(V, W) = \langle V, W \rangle Z.$$

Los primeros ejemplos de variedades totalmente umbilicales son las variedades totalmente geodésicas, en las que basta tomar $Z = 0$. Otro ejemplo son las n -esferas, $\mathbb{S}^n(r)$ en las que, de acuerdo con lo visto en el [Ejemplo 4.6.18](#), basta tomar $Z = -\frac{U}{r}$.

4.7. Variedades producto

En este capítulo estudiaremos cómo definir una estructura, primero de variedad diferenciable y, más tarde, de variedad semi-Riemanniana, en el producto cartesiano de dos variedades diferenciables. Además, estudiaremos algunas propiedades que se pueden deducir para la nueva variedad a partir de las originales. Para ello, nos basaremos en algunos resultados del Capítulo 1 de [\[17\]](#).

Esta sección sirve de antecedente al siguiente capítulo, en que se introduce un concepto más general al de variedad semi-Riemanniana producto: los productos warped.

En primer lugar, veamos cómo dotar al producto cartesiano de dos variedades diferenciables M, N de dimensiones m y n , respectivamente, de estructura de variedad diferenciable. Para ello, consideramos la topología producto en $M \times N$. Como M y N son Hausdorff y 2AN, por las propiedades de la topología producto, $M \times N$ también es Hausdorff y 2AN.

Consideremos (U, φ) carta local de M y (V, ψ) carta local de N . Definimos:

$$\begin{aligned} (\varphi \times \psi) : U \times V &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ (p, q) &\longmapsto (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p), \psi^1(q), \dots, \psi^n(q)). \end{aligned}$$

Lema 4.7.1. El conjunto:

$$\mathcal{A} = \{(U \times V, (\varphi \times \psi)) / (U, \varphi) \text{ es carta local de } M, (V, \psi) \text{ es carta local de } N\},$$

es un atlas diferenciable para el espacio topológico $M \times N$ que lo dota de estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + m$. Esta se denomina variedad producto de M y N y los elementos de $\mathcal{A}$ cartas locales adaptadas.

Demostración. En primer lugar, usando la notación de los comentarios previos, nótese que como tanto φ como ψ son homeomorfismos con sus imágenes, por las propiedades generales de la topología producto sabemos que $(\varphi \times \psi)$ es un homeomorfismo con su imagen, la cual es un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$. Además, es sencillo comprobar que $(\varphi \times \psi)^{-1} = (\varphi^{-1} \times \psi^{-1})$.

Además, dados $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ cartas locales de M y $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ cartas locales de N , entonces, para cada $x = (x_1, x_2) \in (\varphi_2 \times \psi_2)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) \times \psi_2(V_1 \cap V_2)$:

$$(\varphi_1 \times \psi_1) \circ (\varphi_2 \times \psi_2)^{-1}(x) = (\varphi_1 \times \psi_1)(\varphi_2^{-1}(x_1), \psi_2^{-1}(x_2)) = (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x_1), \psi_1 \circ \psi_2^{-1}(x_2)).$$

Como $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ son aplicaciones diferenciables de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ en sí mismos, respectivamente, entonces concluimos que $(\varphi_1 \times \psi_1) \circ (\varphi_2 \times \psi_2)^{-1}$ es diferenciable (Nótese que las aplicaciones que mandan $x \mapsto x_1$ y $x \mapsto x_2$ son trivialmente diferenciables). Razonando igual para la otra composición, concluimos que, de hecho, es un difeomorfismo con lo que los dos elementos de $\mathcal{A}$ tomados son compatibles. Por tanto, $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable de $M \times N$. $\square$

Establecemos ahora las propiedades básicas relativas a las aplicaciones más relevantes a la hora de trabajar con una variedad producto: las proyecciones. Además, la proposición siguiente nos permite entender cómo se pueden recuperar las variedades M y N como subvariedades dentro de $M \times N$.

Proposición 4.7.2. Se definen las proyecciones de la variedad producto $M \times N$ como:

$$\begin{aligned} \pi : M \times N &\longrightarrow M & \sigma : M \times N &\longrightarrow N \\ (p, q) &\longmapsto p, & (p, q) &\longmapsto q. \end{aligned}$$

1. Las proyecciones π y σ son diferenciables. De hecho, son sumersiones.
2. Dada una variedad diferenciable P , una aplicación $\phi : P \longrightarrow M \times N$ es diferenciable si y solo si lo son $\pi \circ \phi$ y $\sigma \circ \phi$.
3. Para cada $(p, q) \in M \times N$ los subconjuntos $M \times q = M \times \{q\}$ y $p \times N = \{p\} \times N$, son subvariedades de $M \times N$.
4. Para cada $(p, q) \in M \times N$, $\pi|_{M \times q}$ es un difeomorfismo de $M \times q$ en M y $\sigma|_{p \times N}$ es un difeomorfismo de $p \times N$ en N .

Demostración. Dado $(p, q) \in M \times N$ denotaremos por (U, φ) y (V, ψ) a cartas locales de M en torno a p y de N en torno a q , respectivamente.

1. Consideremos la carta local de $M \times N$ ($U \times V, \varphi \times \psi$) y hallemos la expresión de las proyecciones usando estas cartas. Sea $(x, y) \in \varphi(U) \times \psi(V)$:

$$\varphi \circ \pi \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(x, y) = \varphi(\pi(\varphi^{-1}(r_1), \psi^{-1}(r_2))) = \varphi(\varphi^{-1}(r_1)) = r_1.$$

Por tanto, $\varphi \circ \pi \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$ es la proyección de $\mathbb{R}^{m+n}$ en las primeras m componentes y, por ello es diferenciable. El mismo razonamiento permite completar la prueba para σ .

2. Nótese en primer lugar que, si ϕ es diferenciable, es inmediato que $\pi \circ \phi$ y $\sigma \circ \phi$ son diferenciables por ser composición de aplicaciones diferenciables. Comprobemos que se cumple el recíproco. Supongamos pues que $\pi \circ \phi$ y $\sigma \circ \phi$ son diferenciables. Sea $r \in P$ y $(p, q) = \phi(p)$. Consideremos una carta local (W, γ) de P en torno a r y las cartas del inicio de la demostración en torno a p y q . Entonces, como

$$(\varphi \times \psi) \circ \phi \circ \gamma^{-1} : \gamma(W) \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n},$$

es una aplicación entre abiertos de $\mathbb{R}^{\dim P}$ y $\mathbb{R}^{m+n}$ sabemos que es diferenciable si y solo si lo son sus componentes. Sus m primeras componentes son precisamente $\varphi \circ \phi \circ \gamma$ y sus n últimas son $\sigma \circ \phi \circ \gamma$. Y estas últimas, como $\varphi \circ \phi$ y $\sigma \circ \phi$ son diferenciables, por la definición de aplicación diferenciable, son diferenciables.

3. Veamos que π es una sumersión, pues para σ se razona igual. En primer lugar, al ser una proyección es claramente sobreyectiva. Además, dado un punto $(p, q) \in M \times N$, considerando las cartas del inicio de la proposición, sabemos que $\frac{\partial}{\partial(\varphi \times \psi)^i}(p, q)$, $i = 1, \dots, n + m$, forman una base de $T_{(p,q)}M \times N$. Para cada $i = 1, \dots, m$, se tiene que:

$$\begin{aligned} d\pi|_{(p,q)} \left(\frac{\partial}{\partial(\varphi \times \psi)^i}(p, q) \right) (\varphi^j) &= \frac{\partial}{\partial(\varphi \times \psi)^i}(p, q) (\varphi^j \circ \pi) = \frac{\partial (\varphi^j \circ \pi \circ (\varphi \times \psi)^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p), \psi(q)) = \\ &= \frac{\partial (\varphi^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p), \psi(q)) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(\varphi(p), \varphi(q)) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que $d\pi|_{(p,q)} \left(\frac{\partial}{\partial(\varphi \times \psi)^i}(p, q) \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$, $i = 1, \dots, m$, por lo que, sin importar en quien se manden el resto de elementos de la base de $T_{(p,q)}M \times N$, dicha base se envía a través de $d\pi|_{(p,q)}$ en un conjunto de generadores de T_pM , con lo que es una aplicación sobreyectiva.

Como σ es submersión, $M \times q = \sigma^{-1}(q)$ es una subvariedad de $M \times N$. Igualmente, como π es submersión, $p \times N = \pi^{-1}(p)$ es una subvariedad de $M \times N$.

4. Veámoslo en el primer caso, pues el segundo se razona de la misma manera. Consideremos la sección $s : M \longrightarrow M \times N$ dada por $s(p) = (p, q)$. Utilizando el apartado 2., como $\pi \circ s$ es la identidad y $\sigma \circ s$ es constante, s es diferenciable. Nótese que $\pi|_{M \times q} = \pi \circ i$, siendo $i : M \times q \longrightarrow M \times N$ la inclusión, la cual es diferenciable pues $M \times q$ es subvariedad, por lo que $\pi|_{M \times q}$ es diferenciable. Como además, $\pi \circ s = Id_M$ y $s \circ \pi|_{M \times q} = Id|_{M \times q}$, son inversas y, por ello, $\pi|_{M \times q}$ es difeomorfismo.

Por tanto, concluimos la demostración de las propiedades de las variedades producto. $\square$

Dado $(p, q) \in M \times N$, como $M \times q$ es una subvariedad de $M \times N$, a través de la aplicación diferencial de la inclusión, di , podemos entender $T_{(p,q)}M \times q$ como un subespacio de $T_{(p,q)}M \times N$. Para ello, usamos la notación:

$$T_{(p,q)}M = di|_{(p,q)}(T_{(p,q)}M \times q).$$

De manera análoga, denotamos:

$$T_{(p,q)}N = di|_{(p,q)}(T_{(p,q)}p \times N).$$

Estos subespacios nos permiten hacer una descomposición natural de los espacios tangentes de la variedad producto que nos permite escribir todo vector tangente a $M \times N$, de forma única, como suma de un vector “tangente a M ” y un vector “tangente a N ”.

Lema 4.7.3. Para cada $(p, q) \in M \times N$, $T_{(p,q)}M \times N$ es suma directa de $T_{(p,q)}M$ y $T_{(p,q)}N$. Además, si $v \in T_{(p,q)}M$ (resp. $v \in T_{(p,q)}N$), se tiene que $d\sigma|_{(p,q)}(v) = 0$ (resp. $d\pi|_{(p,q)}(v) = 0$).

Demostración. Comencemos notando que $\pi|_{q \times N}$ es constante. Por tanto, $d\pi|_{(p,q)}(T_{(p,q)}N) = \{0\}$. Por otro lado, $d\pi|_{(p,q)}$ es un isomorfismo de $T_{(p,q)}M$ en T_pM , pues $\pi|_{M \times q}$ es difeomorfismo. Por tanto, ha de ser $T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N = \{0\}$. Como la dimensión de $T_{(p,q)}M$ es m , la de $T_{(p,q)}N$ es n y la de $T_{(p,q)}M \times N$ es $m+n$, utilizando la fórmula de las dimensiones para subespacios vectoriales, concluimos que:

$$T_{(p,q)}M \oplus T_{(p,q)}N = T_{(p,q)}M \times N.$$

Además, como $\sigma|_{M \times q}$ es constante, concluimos que $d\sigma|_{(p,q)}(T_{(p,q)}M) = \{0\}$. $\square$

Buscamos ahora trasladar objetos definidos sobre la variedad M de partida a la variedad producto, de manera que, en cierto sentido, sigan dependiendo solo del valor de la proyección π de cada punto. Las mismas definiciones y resultados se pueden dar para levantamientos de N a $M \times N$.

Definición 4.7.4. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$ (resp. $f \in \mathcal{F}(N)$). Se define el levantamiento de f a $M \times N$ como $\tilde{f} = f \circ \pi \in \mathcal{F}(M \times N)$ (resp. $\tilde{f} = f \circ \sigma$).

Dado $p \in M$ y $v \in T_pM$ (resp. $q \in N$ y $v \in T_qN$), se define el levantamiento de v a (p, q) , $\tilde{v}$ como el único vector de $T_{(p,q)}M$ (resp. de $T_{(p,q)}N$) tal que $d\pi|_{(p,q)}\tilde{v} = v$ (resp. $d\sigma|_{(p,q)}\tilde{v} = v$). (Nótese que $d\pi|_{(p,q)} : T_{(p,q)}M \rightarrow T_pM$ es un isomorfismo por ser $\pi|_{M \times q}$ difeomorfismo)

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ (resp. $X \in \mathfrak{X}(N)$) un campo vectorial, se define su levantamiento a $M \times N$ como la aplicación $\tilde{X} : M \times N \rightarrow T(M \times N)$ tal que $\tilde{X}(p, q)$ es el levantamiento a (p, q) de $X(p)$ (resp. el levantamiento a (p, q) de $X(q)$).

Presentamos solo la demostración del siguiente lema para levantamientos de campos de vectores de M a $M \times N$ pues la prueba para los levantamientos de N a $M \times N$ es idéntica.

Lema 4.7.5. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que su levantamiento a $M \times N$, $\tilde{X}$, es un campo de vectores en $M \times N$, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

Demostración. Sea $(p, q) \in M \times N$ y $(U \times V, (\varphi \times \psi))$ una carta local adaptada de $M \times N$ en torno a (p, q) . Podemos expresar localmente:

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{m+n} \tilde{X}((\varphi \times \psi)^i) \frac{\partial}{\partial(\varphi \times \psi)^i} = \sum_{i=1}^m \tilde{X}(\varphi^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial(\varphi \times \psi)^i} + \sum_{i=1}^n \tilde{X}(\psi^i \circ \sigma) \frac{\partial}{\partial(\varphi \times \psi)^{i+m}}.$$

Calculamos, dado $(r, s) \in U \times V$:

$$\tilde{X}_{(r,s)}(\varphi^i \circ \pi)(r, s) = d\pi|_{(r,s)}(\tilde{X}_{(r,s)})(\varphi^i) = X(r)(\varphi^i).$$

Como sabemos que $X(\varphi^i) \in \mathcal{F}(M)$, entonces $\tilde{X}(\varphi^i \circ \pi) = X(\varphi^i) \circ \pi \in \mathcal{F}(M \times N)$. Además:

$$\tilde{X}_{(r,s)}(\psi^i \circ \sigma)(r, s) = d\sigma|_{(r,s)}(\tilde{X}_{(r,s)})(\psi^i) = 0.$$

Pues, como $\tilde{X}_{(r,s)} \in T_{(r,s)}M$, entonces $d\sigma|_{(r,s)}(\tilde{X}_{(r,s)}) = 0$. Por tanto, las componentes de $\tilde{X}$ en las cartas de un atlas de $M \times N$ son diferenciables y por ello, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N)$. $\square$

Los dos lemas previos nos permiten concluir que el levantamiento a $M \times N$ de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ es el único campo de vectores $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N)$ que está π -relacionado con X y σ -relacionado con 0 y que, en particular, este siempre existe.

Definición 4.7.6. El conjunto de todos los levantamientos de campos de vectores de M (resp. de N) a $M \times N$ se denota $\mathfrak{L}(M)$ (resp. $\mathfrak{L}(N)$).

Nótese que $\mathfrak{L}(M)$, e igual $\mathfrak{L}(N)$, es un $\mathbb{R}$ -subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(M \times N)$, pero no se mantiene invariante ante el producto por funciones $f \in \mathcal{F}(M \times N)$ cualesquiera, pues estas pueden depender no solo de la primera componente de cada punto, sino también de la segunda. Así pues, se podrían tomar $f \in \mathcal{F}(M \times N)$ y $\tilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$, levantamiento de $X \in \mathfrak{X}(M)$, de forma que $f(p, q_1) \neq 0$ $f(p, q_2) = 0$. Así, si $X(p) \neq 0$, $f\tilde{X}(p, q_1) \neq 0$, mientras que $f\tilde{X}(p, q_2) = 0$. Si $f\tilde{X}$ fuera el levantamiento de $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces, como $d\pi|_{(p,q_1)}(f\tilde{X}(p, q_1)) = Y(p) = d\pi|_{(p,q_2)}(f\tilde{X}(p, q_2)) = 0$, absurdo.

El siguiente resultado nos permite concluir que los levantamientos se comportan bien con respecto a los corchetes de Lie.

Lema 4.7.7. Sean $X_1, X_2, X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2, Y \in \mathfrak{X}(N)$ y denotemos por $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$ y $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y} \in \mathfrak{L}(N)$ a sus levantamientos a $M \times N$. Entonces:

1. $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = [\widetilde{X_1, X_2}] \in \mathfrak{L}(M)$.
2. $[\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2] = [\widetilde{Y_1, Y_2}] \in \mathfrak{L}(N)$.
3. $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$.

Demostración. La demostración de los apartados 1. y 2. es muy similar, por lo que solo probaremos el primero.

1. En primer lugar, nótese que, como $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ están σ -relacionado con 0, entonces, $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$ está σ -relacionado con $[0, 0] = 0$. Además, como $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ están π -relacionado con X_1 y X_2 , respectivamente, $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$ está π -relacionado con $[X_1, X_2]$. Por tanto, $[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$ es el único campo de vectores en $M \times N$ que está σ -relacionado con 0 y π -relacionado con $[X_1, X_2]$ por lo que concluimos el resultado.
3. Como $\tilde{X}$ está π -relacionado con X e $\tilde{Y}$ está π -relacionado con 0, entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ está π -relacionado con $[X, 0] = 0$.
Del mismo modo, como $\tilde{X}$ está σ -relacionado con 0 e $\tilde{Y}$ está σ -relacionado con Y , entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ está σ -relacionado con $[0, Y] = 0$.

Por tanto, para cada $(p, q) \in M \times N$, $[\tilde{X}, \tilde{Y}](p, q) \in T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N$ y, por tanto, es nulo. $\square$

El siguiente lema nos permite comprobar fácilmente la diferenciabilidad de algunas aplicaciones de uso común.

Lema 4.7.8. Sean M, P variedades diferenciables e $I \subset \mathbb{R}$ convexo abierto. Consideremos la estructura de variedad diferenciable producto en $M \times I$. Entonces, si $f : M \times I \rightarrow P$ es diferenciable, la aplicación $\frac{df}{dt} : M \times I \rightarrow TP$ dada por

$$\frac{df}{dt}(p, s) = \alpha'_p(s),$$

donde $\alpha_p(s) = f(p, s)$.

Demostración. Sea $(p_0, s_0) \in M \times I$ y consideremos $(U \times J, (\varphi \times Id))$ una carta local adaptada en torno a (p_0, s_0) , donde en la segunda componente podemos tomar la identidad, al ser una carta global de I . Consideremos (V, ψ) una carta local de P en torno a $f(p_0, s_0)$ y consideremos la carta local que esta induce en TP , $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$. Por la definición de la derivada de una curva, para cada $(p, s) \in U \times J$:

$$\frac{df}{dt}(p, s) (\psi^i) = \alpha'_p(s) (\psi^i) = \frac{d(\psi^i \circ \alpha_p)}{dt}(s).$$

Así pues, en coordenadas respecto de las cartas locales elegidas

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \frac{df}{dt} \circ (\varphi \times Id)^{-1}(x, t) &= \left(\psi^1(\alpha_{\varphi^{-1}(x)}(t)), \dots, \psi^k(\alpha_{\varphi^{-1}(x)}(t)), \frac{df}{dt}(\varphi^{-1}(x), s) (\psi^1), \dots, \frac{df}{dt}(\varphi^{-1}(x), s) (\psi^k) \right) = \\ &= \left(\psi^1 \circ f \circ (\varphi \times Id)^{-1}(x, s), \dots, \psi^k \circ f \circ (\varphi \times Id)^{-1}(x, s), \frac{d(\psi^1 \circ \alpha_{\varphi^{-1}(x)})}{dt}(s), \dots, \frac{d(\psi^k \circ \alpha_{\varphi^{-1}(x)})}{dt}(s) \right) = \\ &= \left(\psi^1 \circ f \circ (\varphi \times Id)^{-1}, \dots, \psi^k \circ f \circ (\varphi \times Id)^{-1}, \frac{\partial(\psi^1 \circ f \circ (\varphi \times Id)^{-1})}{\partial t}, \dots, \frac{\partial(\psi^k \circ f \circ (\varphi \times Id)^{-1})}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

donde k es la dimensión de P . Así pues, comprobamos que como todas las componentes de esta composición son diferenciables al serlo $\psi^i \circ f \circ (\varphi \times Id)^{-1}$ para todo $i = 1, \dots, k$. $\square$

Consideremos ahora (M, g_M) y (N, g_N) dos variedades diferenciables semi-Riemannianas. A partir de los tensores métricos de M y N y, gracias a las proyecciones π y σ , podemos dotar a $M \times N$ de una estructura de variedad semi-Riemanniana, gracias al siguiente lema:

Lema 4.7.9. Definamos en $M \times N$ el tensor:

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N).$$

Entonces g es un tensor métrico en $M \times N$ que la dota de estructura de variedad semi-Riemanniana. Además, se cumple que $\text{ind}(M \times N) = \text{ind}(M) + \text{ind}(N)$.

La demostración de este resultado surge como un caso particular del [Lema 5.0.2](#), por lo que no se realiza. Nótese que, gracias a la segunda de las propiedades, podemos concluir que el producto de dos variedades Riemannianas es de nuevo una variedad Riemanniana.

Nótese que ya hemos trabajado con algunas variedades producto a lo largo del trabajo. Los espacios semieuclicídeos $\mathbb{R}_\nu^n$, si bien han sido introducidos dotando a $\mathbb{R}^n$ de una variedad de estructura diferenciable directamente, es sencillo comprobar que se pueden construir a partir de $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}_1^1$ como las siguientes variedades semi-Riemannianas producto:

$$\mathbb{R}_\nu^n = \mathbb{R}^1 \times \overset{n-\nu}{\dots} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_1^1 \times \overset{\nu}{\dots} \times \mathbb{R}_1^1.$$

5. Productos warped

Los productos warped son una generalización de las variedades producto semi-Riemannianas. Estos consisten en definir sobre una variedad producto $M = B \times F$ un tensor métrico que deforme cada una de las fibras $p \times F$ expandiéndolas o contrayéndolas de acuerdo con una función warping f en B (de ahí el nombre “warped”, deformado en inglés).

En esta sección estudiaremos sus propiedades básicas y cómo se relacionan las subvariedades $p \times F$ y $B \times q$ de M con F y B respectivamente. Además, estudiaremos la conexión entre las conexiones de Levi-Civita en las variedades B y F y en M , así como de las geodésicas y la curvatura. Para ello, seguiremos los resultados expuestos en el Capítulo 7 de [17].

Estas variedades fueron propuestas en primer lugar por Bishop y O’Neil en [2] como una herramienta para construir variedades Riemannianas con curvatura negativa. También resulta que algunos de los modelos cosmológicos más sencillos para la evolución del Universo, los espacios Robertson-Walker que estudiaremos en la siguiente sección, son precisamente productos warped.

Comenzamos dando la definición de estas variedades semi-Riemannianas y estableciendo la notación que se seguirá a lo largo de toda la sección.

Definición 5.0.1. Sean B, F variedades semi-Riemannianas de dimensiones n y d , respectivamente, y sea $f \in \mathcal{F}(B)$ una función estrictamente positiva. Se denomina *producto warped*, $M = B \times_f F$ a la variedad diferenciable producto $B \times F$ dotada del tensor $(0, 2)$

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

donde g_B y g_F son los tensores métricos de B y F , respectivamente, y $\pi : M \rightarrow B$, $\sigma : M \rightarrow F$ son las proyecciones canónicas de la variedad producto M . Se dice que B es la base de M y F su fibra.

Usaremos la notación habitual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar el tensor métrico y la conexión de Levi-Civita tanto de M como de B . En aquellos casos en que pueda generarse confusión, utilizaremos un subíndice para distinguirlos. Denotaremos por $(\cdot, \cdot)$ al tensor métrico de F y por ∇ a su conexión de Levi-Civita.

Nótese que en el caso en que $f \equiv 1$ se recupera la definición de variedad producto semi-Riemanniana dada en la Sección 4.7. Por tanto, todos los resultados que presentamos en este capítulo pueden ser particularizados al estudio de variedades semi-Riemannianas producto.

Lema 5.0.2. En las condiciones de la definición anterior, g es un tensor métrico sobre M , lo que la convierte en una variedad semi-Riemanniana. Además, $\text{ind}(g) = \text{ind}(g_B) + \text{ind}(g_F)$.

Demostración. Por la simetría de g_B y g_F , es inmediato comprobar que g es simétrico. Sea $(p, q) \in B \times F$ y sean $v, w \in T_{(p,q)}B \times F$. Entonces se tiene por definición de producto warped que:

$$g(v, w) = \pi^*(g_B)(v, w) + f^2(p)\sigma^*(g_F)(v, w) = g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + f^2(p)g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)).$$

Supongamos que $g(v, w) = 0$ para todo $w \in T_{(p,q)}B \times F$. Recordemos que $T_{(p,q)}B \times F = T_{(p,q)}B \oplus T_{(p,q)}F$, usando la notación introducida en la Subsección 4.7. Así pues, en particular, para todo $w \in T_{(p,q)}B$, se tiene que $g(v, w) = 0$ y como $d\sigma(w) = 0$, esto implica por el cálculo anterior que:

$$g_B(d\pi(v), d\pi(w)) = 0.$$

Como $d\pi$ es un isomorfismo entre $T_{(p,q)}B$ y T_pB , entonces, $g_B(d\pi(v), z) = 0$ para todo $z \in T_pB$ y, por ser g_B no degenerado, $d\pi(v) = 0$.

Del mismo modo, si $w \in T_{(p,q)}F$, como $d\pi(w) = 0$, concluimos que:

$$f^2(p)g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)) = 0$$

Como $f^2(p) > 0$, y, además, $d\sigma$ es un isomorfismo entre $T_{(p,q)}F$ y T_qF , entonces podemos concluir que $g_F(d\sigma(v), z) = 0$ para todo $z \in T_qF$ y, por ser g_F no degenerado, $d\sigma(v) = 0$.

Por tanto concluimos que, siendo $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in T_{(p,q)}B$ y $v_2 \in T_{(p,q)}F$, como $d\pi(v) = d\pi(v_1) = 0$, entonces $v_1 = 0$ y, por un motivo análogo, $v_2 = 0$, por lo que $v = 0$ y por tanto, g es no degenerado en (p, q) . Como el punto $(p, q) \in M$ tomado era arbitrario, se concluye el primer resultado.

Consideremos ahora $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ base ortonormal de T_pM y $\tilde{e}'_1, \dots, \tilde{e}'_d$ base ortonormal de T_qN . Consideremos sus levantamientos a (p, q) , $e_1, \dots, e_n$ y $e'_1, \dots, e'_d$, respectivamente. Como $d\pi|_{(p,q)}T_{(p,q)}M \rightarrow T_pM$ es un isomorfismo lineal, $e_1, \dots, e_n$ son una base de $T_{(p,q)}M$. Por idénticos motivos, $e'_1, \dots, e'_d$ son base de $T_{(p,q)}N$, con lo que, por las propiedades de la suma directa de espacios vectoriales, $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_d$ es base de $T_{(p,q)}M \times N$. Por tanto, $e_1, \dots, e_n, \frac{1}{f(p)}e'_1, \dots, \frac{1}{f(p)}e'_d$ también será base de $T_{(p,q)}M \times N$ y, un cálculo directo, permite comprobar que es ortonormal. Además,

$$g(e_i, e_i) = g_B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) \quad g\left(\frac{1}{f(p)}e'_j, \frac{1}{f(p)}e'_j\right) = g_F(\tilde{e}'_j, \tilde{e}'_j),$$

para todo $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, d$, con lo que se concluye la segunda afirmación. $\square$

La segunda afirmación del lema anterior nos permite concluir que, al igual que ocurre con el producto de variedades, el producto warped de dos variedades Riemannianas es de nuevo una variedad Riemanniana.

Introducimos ahora los dos tipos de subvariedades más relevantes de los productos warped, en cuyo estudio nos centraremos a lo largo de la presente sección.

Lema 5.0.3. Sea $M = B \times_f F$ un producto warped. Entonces, las fibras, es decir $p \times F = \pi^{-1}(p)$, y las hojas, es decir, $B \times q = \sigma^{-1}(q)$, son subvariedades semi-Riemannianas de M .

Demostración. En primer lugar, de acuerdo con lo establecido en la [Subsección 4.7](#), como la estructura diferenciable de M es la de variedad producto, sabemos que las fibras y las hojas son subvariedades de M .

Para ver que son subvariedades semi-Riemannianas, hemos de ver que el pullback a través de la inclusión del tensor métrico de M es un tensor métrico sobre las fibras y las hojas.

Sea $p \times F$ una fibra, $j : p \times F \rightarrow M$ la aplicación inclusión y sea $q \in F$. En primer lugar, nótese que j^*g será un tensor de tipo $(0, 2)$. Sean $v, w \in T_{(p,q)}p \times F$ vectores tangentes a la fibra que identificamos con $dj(v)$ y $dj(w)$, respectivamente, para simplificar la notación. Entonces, por las propiedades de las variedades producto, sabemos que $d\pi(v) = 0 = d\pi(w)$. Así pues:

$$j^*g(v, w) = g(v, w) = f^2(p)g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)).$$

A partir de esta expresión es claro que j^*g es simétrico. Supongamos que $j^*g(v, w) = 0$ para todo $w \in T_{(p,q)}p \times F$. Entonces, como $f^2(p) > 0$ y $d\sigma$ es isomorfismo entre $T_{(p,q)}F$ (que identificamos vía dj con $T_{(p,q)} \times F$) y T_qF , sabemos que $g_F(d\sigma(v), z) = 0$ para todo $z \in T_qF$ y razonando como en demostración del lema previo, concluimos que $v = 0$, por lo que j^*g es no degenerado y por ello un tensor métrico sobre la fibra. El razonamiento para las hojas es totalmente análogo. $\square$

Observación 5.0.4. Al igual que se ha hecho en la prueba del resultado previo, en el resto del trabajo se identifica el subespacio $T_{(p,q)}F$ de $T_{(p,q)}M$ con el espacio tangente a la fibra $p \times F$ en q , así como los vectores tangentes a la fibra con sus vectores tangentes a M j -asociados. Las mismas consideraciones se aplican a las hojas.

Pasamos ahora a dar una caracterización de las variedades semi-Riemannianas definidas sobre $M = B \times F$ que son productos warped, a partir de la relación de las fibras y las hojas entre sí, así como con B y F .

Proposición 5.0.5 (Caracterización de los productos warped). Sea $M = B \times_f F$ un producto warped. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Para todo $q \in F$ la aplicación $\pi|_{B \times q}$ es una isometría con B .
2. Para todo $p \in B$ la aplicación $\sigma|_{p \times F}$ es una homotecia con F con coeficiente $\frac{1}{f^2(p)}$.
3. Para todo $(p, q) \in M$ la hoja $B \times q$ y la fibra $p \times F$ son ortogonales en (p, q) .

De hecho, si $M = B \times F$ es una variedad semi-Riemanniana, cumpliendo 1, 2 y 3 para cierta función f diferenciable y estrictamente positiva en B , entonces M es un producto warped con función warping f .

Demostración. Probemos en primer lugar los asertos 1, 2 y 3:

1. Sea $B \times q$ una hoja de M y consideremos $\pi : B \times q \rightarrow B$, la cual sabemos que es un difeomorfismo por las propiedades de las variedades producto. Además, dado $p \in B$ y dados $v, w \in T_{(p,q)}B$, como $d\sigma(v) = 0 = d\sigma(w)$, se tiene que

$$g(v, w) = g_B(d\pi(v), d\pi(w)),$$

de donde se deduce, como π es difeomorfismo y, por ello, $d\pi$ isomorfismo entre $T_{(p,q)}B$ y T_pB , que $d\pi$ es una isometría.

2. Sea $p \times F$ una fibra de M y consideremos $\sigma : p \times F \rightarrow F$, la cual sabemos que es un difeomorfismo. Dado $q \in F$ y dados $v, w \in T_{(p,q)}F$, usando que $d\pi(v) = d\pi(w) = 0$, se concluye que:

$$g(v, w) = f^2(p)g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)) \implies g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)) = \frac{1}{f^2(p)}g(v, w).$$

Usando la definición de homotecia, como ya sabemos que $d\sigma$ es isomorfismo entre $T_{(p,q)}F$ y T_qF , pues σ es difeomorfismo, se concluye el resultado.

3. Sea $(p, q) \in M$ y sean $v \in T_{(p,q)}B$, $w \in T_{(p,q)}F$. Entonces:

$$g(v, w) = g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + f^2(p)g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)) = 0.$$

Probemos ahora el recíproco. Supongamos que g es un tensor métrico sobre M de forma que se cumplen 1, 2 y 3 para cierta función f diferenciable y estrictamente positiva sobre B . Por las propiedades de la estructura de variedad diferenciable producto de M sabemos que, para todo $(p, q) \in M$:

$$T_{(p,q)}M = T_{(p,q)}B \oplus T_{(p,q)}F.$$

Sean $v, w \in T_{(p,q)}M$, entonces $v = v_1 + v_2$, $w = w_1 + w_2$ para ciertos $v_1, w_1 \in T_{(p,q)}B$ y $v_2, w_2 \in T_{(p,q)}F$. Así pues, usando la bilinealidad del tensor métrico de M en la primera igualdad y la propiedad 3. de ortogonalidad entre las fibras y las hojas en la segunda igualdad

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g(v_1, w_1) + g(v_2, w_1) + g(v_1, w_2) + g(v_2, w_2) = \\ &= g(v_1, w_1) + g(v_2, w_2) = \\ &= g_B(d\pi(v_1), d\pi(w_1)) + f^2(p)g_F(d\sigma(v_2), d\sigma(w_2)) = g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + f^2(p)g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)), \end{aligned}$$

donde se han usado las propiedades 1. y 2. de las fibras y las hojas en la tercera igualdad, así como que $d\pi(v_1) = d\pi(v)$, $d\sigma(v_2) = d\sigma(v)$ y análogo para w . Así pues, comprobamos que la expresión de g es la de una estructura de producto warped sobre M con función warping f . $\square$

Corolario 5.0.6. Sea $M = B \times_f F$ y sea $(p, q) \in M$. Entonces se cumple que:

$$(T_{(p,q)}F)^\perp = T_{(p,q)}B, \quad (T_{(p,q)}B)^\perp = T_{(p,q)}F.$$

Demostración. La contención $\supseteq$ es consecuencia inmediata de la proposición anterior en ambos casos. Usando las propiedades de los subespacios ortogonales con respecto a la contención, así como que el ortogonal del ortogonal de un subespacio es él mismo

$$T_{(p,q)}B = \left((T_{(p,q)}B)^\perp \right)^\perp \subseteq (T_{(p,q)}F)^\perp,$$

con lo que se concluye el resultado. $\square$

A continuación exponemos un resultado que caracteriza un tipo especial de isometrías de un producto warped en sí mismo, las que provienen del producto de una aplicaciones de B y F en sí mismos.

Proposición 5.0.7. Sean $\phi : B \longrightarrow B$ y $\psi : F \longrightarrow F$ aplicaciones diferenciables. Consideremos la aplicación producto:

$$\begin{aligned}\phi \times \psi : M = B \times_f F &\longrightarrow B \times_f F \\ (p, q) &\longmapsto (\phi(p), \psi(q)).\end{aligned}$$

Se cumple que, si B, F son conexas, $\phi \times \psi$ es una isometría si y solo si ψ es una homotecia positiva con coeficiente $1/C$ y ϕ es una isometría tal que $f \circ \phi = Cf$.

Demostración. En primer lugar, nótese que:

$$\pi \circ (\phi \times \psi) = \phi \circ \pi, \quad \sigma \circ (\phi \times \psi) = \psi \circ \sigma$$

- Supongamos en primer lugar que $\phi \times \psi$ es una isometría. Sean $x, y \in T_p B$ y sean $\tilde{x}, \tilde{y}$ sus levantamientos a M . Entonces se tiene que $d(\phi \times \psi)(\tilde{x})$ es el levantamiento de $d\phi(x)$, pues

$$d\sigma(d(\phi \times \psi)(\tilde{x})) = d(\sigma \circ (\phi \times \psi))(\tilde{x}) = d\psi(d\sigma(\tilde{x})) = 0,$$

$$d\pi(d(\phi \times \psi)(\tilde{x})) = d(\pi \circ (\phi \times \psi))(\tilde{x}) = d\phi(d\pi(\tilde{x})) = d\phi(x),$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena. El mismo resultado es válido para y . Así pues

$$\langle x, y \rangle = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \langle d(\phi \times \psi)(\tilde{x}), d(\phi \times \psi)(\tilde{y}) \rangle = \langle d\pi d(\phi \times \psi)(\tilde{x}), d\pi d(\phi \times \psi)(\tilde{y}) \rangle = \langle d\phi(x), d\phi(y) \rangle,$$

donde hemos utilizado que $d(\phi \times \psi)(\tilde{x})$ es horizontal e igual para y . Por tanto, concluimos que ϕ es isometría.

Consideremos ahora $v, w \in T_q F$ y sean $\tilde{v}, \tilde{w}$ sus levantamientos a M en un punto (p, q) . Razonando igual que antes se concluye que $d(\phi \times \psi)(\tilde{v})$ es el levantamiento de $d\psi(v)$ e igual para w (y en particular son verticales). Así pues

$$\begin{aligned}(v, w) &= \frac{1}{f^2(p)} \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle = \frac{1}{f^2(p)} \langle d(\phi \times \psi)(\tilde{v}), d(\phi \times \psi)(\tilde{w}) \rangle = \\ &= \frac{f^2(\phi(p))}{f^2(p)} \langle d\sigma d(\phi \times \psi)(\tilde{v}), d\sigma d(\phi \times \psi)(\tilde{w}) \rangle = \frac{f^2(\phi(p))}{f^2(p)} \langle d\psi(v), d\psi(w) \rangle,\end{aligned}$$

como esta igualdad ha de darse para todo p , entonces ha de ser $\frac{f^2(\phi(p))}{f^2(p)} = C^2$ una constante (por conexión). Así pues ψ sería una homotecia de coeficiente $1/C$.

- Probemos ahora la otra implicación. Veamos que $\phi \times \psi$ es isometría. Sean $a, b \in T_{(p,q)} M$ y hagamos la descomposición $a = \tilde{x} + \tilde{v}$ y $b = \tilde{y} + \tilde{w}$ con $\tilde{x}, \tilde{y}$ horizontales y $\tilde{v}, \tilde{w}$ verticales. Entonces se tiene que utilizando la misma notación que en la implicación anterior y las hipótesis del enunciado:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle &= \langle x, y \rangle + f^2(p) \langle v, w \rangle = \\ &= \langle d\phi(x), d\phi(y) \rangle + f^2(p) \frac{1}{C^2} \langle d\psi(v), d\psi(w) \rangle = \\ &= \langle d\pi d(\phi \times \psi)(\tilde{x}), d\pi d(\phi \times \psi)(\tilde{y}) \rangle + \frac{f^2(p)}{C^2} \frac{f^2(\phi(p))}{f^2(\phi(p))} \langle d\sigma d(\phi \times \psi)(\tilde{v}), d\sigma d(\phi \times \psi)(\tilde{w}) \rangle = \\ &= \langle d\pi d(\phi \times \psi)(a), d\pi d(\phi \times \psi)(b) \rangle + f^2(\phi(p)) \langle d\sigma d(\phi \times \psi)(a), d\sigma d(\phi \times \psi)(b) \rangle = \\ &= \langle d(\phi \times \psi)(a), d(\phi \times \psi)(b) \rangle.\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado que:

$$d\pi d(\phi \times \psi)(\tilde{x}) = d\phi(d\pi(\tilde{x})) = d\phi(d\pi(a)) = d\pi d(\phi \times \psi)(a),$$

y análogo para b y las proyecciones por σ .

□

Cabe mencionar que en [17] este resultado está propuesto como ejercicio en el Tema 4. No obstante, en dicho enunciado existe un error pues, se asegura que el resultado es cierto exigiendo que ψ sea una isometría en lugar de una homotecia, como hemos comprobado que sucede.

Los resultados que obtendremos a lo largo de la sección nos muestran que la geometría de las hojas es muy similar a la de B , pero que la de las fibras presenta mayores diferencias con la de F (en particular su tensor de forma será no nulo, al contrario que en las hojas). Por eso, centraremos nuestra atención en estas últimas y utilizaremos la misma notación que al considerar las fibras como subvariedades de M .

Definición 5.0.8. Sea $M = B \times_f F$. Se dirá que los vectores tangentes a las hojas son *horizontales* y que los vectores tangentes a la fibras son *verticales*. Se denotará por π a la proyección ortogonal de $T_{(p,q)}M$ en $T_{(p,q)}B$ y por τ a la proyección ortogonal sobre $T_{(p,q)}F$. La misma terminología será válida para los campos de vectores.

Se denotará al tensor de forma de las fibras por **II**.

Nótese que, como la estructura diferenciable de M es la de una variedad producto, los levantamientos de campos de vectores a B y F , $\mathfrak{L}(B)$ y $\mathfrak{L}(F)$, respectivamente, seguirán siendo muy útiles. Por lo general, se utilizará la misma notación para un campo de vectores sobre B o F y su levantamiento para evitar complicar la notación.

El siguiente resultado que pretendemos demostrar es la relación entre las conexiones de Levi-Civita en M , B y F . En dichas expresiones aparecerá el gradiente de la función warping y por ello es útil tener en cuenta el siguiente resultado que nos permite trabajar en M de forma equivalente con el pullback de $\text{grad}(f)$ o con $\text{grad}(f \circ \pi)$.

Lema 5.0.9. Sea $h \in \mathcal{F}(B)$. Entonces el gradiente del levantamiento de h a M , $h \circ \pi$, es el levantamiento del gradiente de h en B a M .

Demostración. Hemos de comprobar que $\text{grad}(h \circ \pi)$ es un campo de vectores horizontal que está π -relacionado con $\text{grad}(h)$.

Para lo primero, de acuerdo con la caracterización de los productos warped dada anteriormente, basta con ver que $\text{grad}(h \circ \pi)$ es en cada punto de M ortogonal a todo vector tangente vertical. Sea $(p, q) \in M$ y sea $v \in T_{(p,q)}F$ un vector tangente vertical. Entonces

$$\langle \text{grad}(h \circ \pi), v \rangle = v(h \circ \pi) = d\pi(v)(h) = 0$$

, pues $d\pi(v) = 0$ al ser vertical. Por tanto $\text{grad}(h \circ \pi)$ es horizontal.

Veamos que $d\pi(\text{grad}(h \circ \pi)) = \text{grad}(h)$. Para ello, consideremos $x \in T_{(p,q)}B$ un vector tangente a M horizontal cualquiera. Como x es horizontal, por la definición del tensor métrico en un producto warped

$$\langle d\pi(\text{grad}(h \circ \pi)), d\pi(x) \rangle_B = \langle \text{grad}(h \circ \pi), x \rangle_M = x(h \circ \pi) = d\pi(x)(h) = \langle \text{grad}(h), d\pi(x) \rangle_B,$$

donde hemos usado subíndices en el producto escalar para indicar la variedad cuyo tensor métrico consideramos. Como esta igualdad se tiene para todo elemento de $T_{(p,q)}B$ y $d\pi$ es un isomorfismo entre dicho espacio vectorial y T_pB , entonces, para todo $v \in T_pB$:

$$\langle d\pi(\text{grad}(h \circ \pi)), v \rangle_B = \langle \text{grad}(h), v \rangle_B,$$

y por ser el tensor métrico de B no degenerado:

$$d\pi(\text{grad}(h \circ \pi)) = \text{grad}(h).$$

Por tanto, se concluye el resultado. $\square$

El siguiente resultado da la forma de calcular la conexión de Levi-Civita en M a partir de las conexiones de Levi-Civita en B y en F , así como a partir de f y su gradiente. En particular, el primer apartado prueba que la segunda forma fundamental de las hojas en un producto warped es nula y justifica que se haya utilizado la notación habitual **II** solo para las fibras.

Teorema 5.0.10. Sea $M = B \times_f F$ y sean $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$, $V, W \in \mathfrak{L}(F)$. Entonces se cumple que:

1. $D_X^M Y \in \mathfrak{L}(B)$ es el levantamiento de $D_X^B Y$.
2. $D_X V = D_V X = \frac{X(f \circ \pi)}{f \circ \pi} V$.
3. $\text{norm} D_V W = \mathbf{II}(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f \circ \pi} \text{grad}(f \circ \pi)$.
4. $\tan D_V W \in \mathfrak{L}(F)$ es el levantamiento de $\nabla_V W$.

Hemos usado superíndices para la conexión de Levi-Civita allá donde podrían ocasionarse dudas de cuál se considera, si la de M o la de B .

Demostración. En toda la demostración identificaremos los campos de vectores horizontales y verticales con sus proyecciones en B y F , respectivamente.

1. En primer lugar, nótese que, por las propiedades de las variedades producto, $[X, V] = [Y, V] = 0$ y, además, por definición del tensor métrico en M , $\langle X, V \rangle = \langle Y, V \rangle = 0$. Por tanto, usando la fórmula de Koszul:

$$2 \langle D_X^M Y, V \rangle = -V \langle X, Y \rangle + \langle V, [X, Y] \rangle.$$

Además, de nuevo por las propiedades de las variedades producto, sabemos que $[X, Y]$ es el levantamiento del corchete de los correspondientes campos de vectores en B y, en particular, es horizontal, por lo que el segundo sumando es nulo. Además, como X, Y son levantamientos de ciertos campos de vectores de B , $\langle X, Y \rangle = \langle d\pi(X), d\pi(Y) \rangle$ es constante sobre cada una de las fibras de M , al serlo $d\pi(X), d\pi(Y)$. Por tanto, $\langle X, Y \rangle = h \circ \pi$ para cierta función $h \in \mathcal{F}(B)$. Por tanto:

$$V \langle X, Y \rangle = V(h \circ \pi) = d\pi(V)(h) = 0.$$

Como este resultado es cierto para todo campo de vectores vertical, concluimos que $D_X^M Y$ es horizontal y coincide con $\tan D_X^M Y$. Por tanto, de acuerdo con el [Lema 4.6.12](#), $D_X^M Y = D_X^{B \times q} Y$ para cada $q \in F$. Utilizando que π es una isometría de cada hoja de M en B y que estas respetan las conexiones de Levi-Civita:

$$d\pi(D_X^M Y) = D_{d\pi(X)}^B d\pi(Y).$$

Por definición de levantamiento se concluye el resultado.

2. Como $[X, V] = 0$, por las propiedades de la conexión de Levi-Civita:

$$D_X V = D_V X.$$

Usando de nuevo las propiedades de la conexión de Levi-Civita:

$$\langle D_X V, Y \rangle = X \langle V, Y \rangle - \langle V, D_X Y \rangle.$$

De acuerdo con 1, $D_X Y$ es horizontal y por ello el segundo sumando es nulo. Como el $\langle V, Y \rangle = 0$, entonces se concluye que $\langle D_X V, Y \rangle$. Como esto es cierto para todo campo de vectores horizontal Y , se tiene que $D_X V$ es vertical.

Por otro lado, como $[X, V] = 0 = [X, W]$ y $\langle X, V \rangle = 0 = \langle X, W \rangle$, utilizando la fórmula de Kószul:

$$\begin{aligned} 2 \langle D_X V, W \rangle &= X \langle V, W \rangle - \langle X, [V, W] \rangle = \\ &= 2 \langle D_X V, W \rangle = X \langle V, W \rangle = X(f \circ \pi)^2(V, W) \circ \sigma + (f \circ \pi)^2 X((V, W) \circ \sigma) = \\ &= 2(f \circ \pi) X(f \circ \pi)(V, W) \circ \sigma + (f \circ \pi)^2 d\sigma(X)(V, W) = 2 \frac{X(f \circ \pi)}{f \circ \pi} \langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

Como $[V, W]$ es vertical, el segundo sumando tras la primera igualdad es nulo. Por otro lado, usando la definición del tensor métrico en M , $\langle V, W \rangle = (f \circ \pi)^2(V, W) \circ \sigma$, de forma que usando la regla de Leibniz, se obtiene la cuarta igualdad. Finalmente, hemos utilizado que $d\sigma(X) = 0$.

Como esto ocurre para todo campo de vectores vertical W , por ser los subespacios de los vectores tangentes verticales de M en todo punto no degenerados y teniendo en cuenta que $D_X V$ es vertical, podemos concluir que:

$$D_X V = \frac{X(f \circ \pi)}{f \circ \pi} V.$$

En futuras ocasiones prescindiremos de la mención explícita a la composición con π cuando no sea relevante.

3. Usando de nuevo que $\langle W, X \rangle = 0$, así como las propiedades de la conexión de Levi-Civita, se tiene que:

$$\langle D_V W, X \rangle = -\langle W, D_V X \rangle = -\left\langle W, \frac{X(f \circ \pi)}{f \circ \pi} V \right\rangle = -\frac{X(f \circ \pi)}{f \circ \pi} \langle V, W \rangle = -\frac{\langle V, W \rangle}{f \circ \pi} \langle \text{grad}(f \circ \pi), X \rangle.$$

Como esto sucede para todo campo de vectores horizontal, X , podemos concluir de forma análoga al punto anterior y se tiene que, como $\text{norm} D_V W$ es en cada punto la proyección de $D_V W$ sobre el subespacio de los vectores tangentes horizontales, no degenerado:

$$\text{norm} D_V W = -\frac{\langle V, W \rangle}{f \circ \pi} \text{grad}(f \circ \pi).$$

4. Por definición de la proyección $\tan$, se tiene que $\tan D_V W$ está π -relacionado con 0. Además, por el [Lema 4.6.12](#)

$$\tan D_V^M W = D_V^{p \times F} W,$$

para cada $p \in B$. Como σ es una homotecia entre cada fibra y F y, por tanto, conserva las conexiones de Levi-Civita, $D_V^{p \times F} W$ está σ -relacionado con $\nabla_V W$ con lo que se concluye el resultado.

Así queda caracterizada la conexión de Levi-Civita en los productos warped. $\square$

Corolario 5.0.11. Las hojas, $B \times q$, de un producto warped $M = B \times_f F$ son totalmente geodésicas, mientras que las fibras, $p \times F$, son totalmente umbilicales.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los puntos 1 y 3 de la proposición anterior, teniendo en cuenta que $\text{grad}(f)$ es un campo de vectores horizontal. $\square$

Ejemplo 5.0.12. Sea M la subvariedad de $\mathbb{R}^3$ que se obtiene al hacer girar una curva plana (que sea a su vez una variedad diferenciable) C contenido en el semiplano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0, x_1 > 0\}$ alrededor del eje x_3 . Dotémosla de la estructura de subvariedad Riemanniana de $\mathbb{R}^3$ con la estructura Riemanniana habitual.

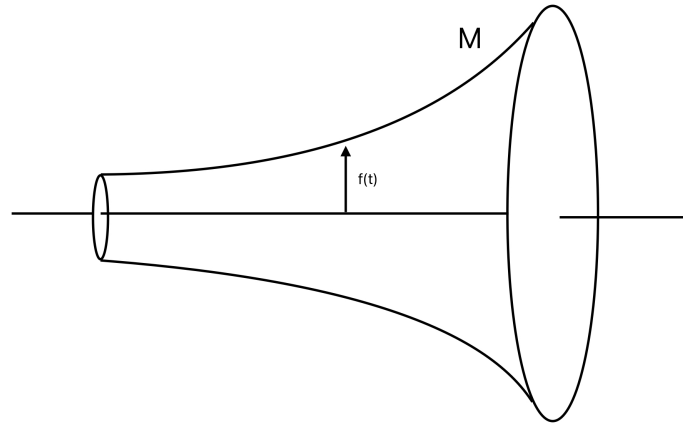


Figura 5: Representación de una superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$, junto con la warping function correspondiente.

Igualmente, consideremos C (en el plano x_1, x_3) y $\mathbb{S}^1$ como subvariedades Riemannianas de $\mathbb{R}^2$ con la estructura Riemanniana habitual. Sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación (diferenciable) que da la distancia de C a la recta $x_1 = 0$, es decir, su distancia al eje x_3 . Veamos que M es isométrico a $C \times_f \mathbb{S}$.

Para ello, consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned}\psi : C \times_f \mathbb{S}^1 &\longrightarrow M \\ ((x_1, x_3), e^{it}) &\longmapsto (x_1 \cos t, x_1 \sin t, x_3).\end{aligned}$$

Usando las propiedades de la topología de subespacio, así como que las proyecciones y las funciones seno y coseno son continuas, se comprueba que ψ es continua. Además, existe su inversa y es

$$\psi^{-1}(x, y, z) = \left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z \right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right),$$

la cual es de nuevo continua, pues la distancia de C al eje $z = 0$ es siempre estrictamente positiva. Por tanto comprobamos que ψ es un homeomorfismo.

Dado un punto de $p = ((x_1, x_3), e^{it}) \in C \times_f \mathbb{S}^1$, consideramos

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow C \\ s &\longmapsto (\alpha_1(s), \alpha_3(s)),\end{aligned}$$

parametrización de C entorno a (x_1, x_3) . Consideramos las coordenadas locales entorno a p y $\psi(p)$, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned}\phi_1 : U_1 = I \times (a, b) &\longrightarrow C \times_f \mathbb{S}^1 & \phi_2 : U_2 = I \times (a, b) &\longrightarrow M \\ (s, t) &\longmapsto (\alpha(s), e^{it}), & (u, v) &\longmapsto (\alpha_1(u) \cos v, \alpha_1(u) \sin v, \alpha_3(u)).\end{aligned}$$

Es claro que $\phi_2 = \psi \circ \phi_1$. Como esto se cumplirá para todo punto de $C \times_f \mathbb{S}^1$, concluimos que efectivamente ψ es diferenciable, así como su inversa, pues entorno a cada punto de la salida y la llegada existen coordenadas locales en las que al expresar ψ , es la identidad y por ello diferenciable. Así pues, ψ es un difeomorfismo. Veamos que, de hecho, es una isometría. Para ello, usando la notación habitual para los campos de vectores tangentes asociados a las coordenadas locales ϕ_1 y ϕ_2 , expresamos dichos campos en la base estándar de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, tras identificar los espacios tangentes en cada punto de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ con los propios espacios e ver vía la diferencial de la inclusión los espacios tangentes a $C \times_f \mathbb{S}^1$ y a M como subespacios vectoriales suyos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} &= (\alpha'_1(s), \alpha'_3(s), 0, 0), & \frac{\partial}{\partial t} &= (0, 0, -\sin t, \cos t), \\ \frac{\partial}{\partial u} &= (\alpha'_1(u) \cos v, \alpha'_1(u) \sin v, \alpha'_3(u)), & \frac{\partial}{\partial v} &= (-\alpha_1(u) \sin v, \alpha_1(u) \cos v, 0).\end{aligned}$$

Así pues, como $\phi_2^{-1} \circ \psi \circ \phi_1 = Id$, es claro que $d\psi$ envía $\frac{\partial}{\partial s}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$ en $\frac{\partial}{\partial u}$ y $\frac{\partial}{\partial v}$, respectivamente. Podemos comprobar que el tensor métrico al actuar sobre los elementos de la base asociada a ϕ_1 no se modifica debido a ψ y por ello ψ es una isometría. Nótese que una vez que tenemos las expresiones de los vectores tangentes en términos de las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ con $n = 3, 4$, para M el producto escalar se hace multiplicando componente a componente. Para hallarlo en $C \times_f \mathbb{S}^1$ se calcula el producto escalar componente a componente de las dos primera y las dos últimas componentes y se suma, multiplicando primero el producto escalar de las dos últimas componentes por la función warping $f = (\alpha_1)^2 + (\alpha_3)^2$.

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= (\alpha'_1)^2 + (\alpha'_3)^2, & \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= 0, & \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= (\alpha_1)^2 + (\alpha_3)^2, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle &= (\alpha'_1)^2 + (\alpha'_3)^2, & \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle &= 0, & \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle &= (\alpha_1)^2 + (\alpha_3)^2.\end{aligned}$$

5.1. Geodésicas en productos warped

Nos encargamos ahora del estudio de las geodésicas. Consideremos $M = B \times_f F$ un producto warped y sea γ una curva en M . Al igual que en toda variedad diferenciable producto, podemos estudiar γ a partir de sus proyecciones en B y F :

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s)).$$

Buscamos caracterizar cuando γ será una geodésica en función del comportamiento de α y β . Nótese que, gracias a que tanto las isometrías como las homotecias conservan las geodésicas, sabemos que α es geodésica en B si y solo si (α, q) es geodésica en $B \times q$ para todo $q \in F$ y, análogamente, β es geodésica en F si y solo si (p, β) es geodésica en $p \times F$ para todo $p \in B$. Cabe mencionar que se ha completado la demostración del resultado principal, proporcionada por O'Neil en [17], donde no se considera el caso en que pueda haber geodésica en F cuyo campo de velocidad sea siempre luminoso.

Teorema 5.1.1. En las condiciones anteriores, γ es una geodésica si y solo si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $\alpha'' = (\beta', \beta') (f \circ \alpha) \text{grad}(f)$.
2. $\beta'' = \frac{-2}{f \circ \alpha} \frac{d(f \circ \alpha)}{ds} \beta'$.

Donde las derivadas de α y β se toman en B y F , respectivamente.

Demostración. Como la propiedad de que una curva sea una geodésica es local, se puede probar trabajando en un entorno de cada punto, nos centraremos en el estudio de un entorno arbitrariamente pequeño entorno a $s = 0$.

Comencemos notando que, como $\pi \circ \gamma = \alpha \circ \pi$ y de forma análoga $\sigma \circ \gamma = \beta \circ \sigma$, se tiene que

$$d\pi(\gamma'(s)) = \alpha'(s) d\sigma(\gamma'(s)) \beta'(s),$$

por lo que la proyección ortogonal de $\gamma'(s)$ sobre el subespacio de los vectores tangentes horizontales es el levantamiento a M de $\alpha'(s)$ y la proyección ortogonal sobre los vectores tangente verticales es el levantamiento a M de $\beta'(s)$. Distinguimos varios casos:

1. Supongamos en primer lugar que $\gamma'(0)$ no es ni vertical ni horizontal. Entonces, por el comentario previo, $\alpha'(0) \neq 0 \neq \beta'(0)$.

De acuerdo con el [Lema 3.3.2](#), restringiendonos al estudio de un intervalo entorno a $s = 0$ suficientemente pequeño, podemos suponer que α es una curva integral de cierto campo de vectores en B , X , y que β es curva integral de un campo de vectores en F , V . Denotamos también por X y V a los levantamientos horizontal y vertical, respectivamente, de dichos campos. Entonces, a partir del comentario inicial de la proposición, γ' está π -relacionada con X y σ -relacionada con V , por lo que γ es curva integral de $X + V$ en M .

Al ser cada espacio tangente suma directa del subespacio de los vectores tangentes horizontales y el de los verticales, $\gamma'' = 0$ si y solo si lo son $\tan \gamma''$ y $\text{norm} \gamma''$. Como en el intervalo en que trabajamos γ' coincide sobre la curva con un campo de vectores en M , por las propiedades de la derivada covariante:

$$\gamma'' = D_{X+V}(X + V) = D_X X + D_V X + D_X V + D_V V.$$

Usando el [Teorema 5.0.10](#), sabemos que:

$$D_V X + D_X V = 2 \frac{Xf}{f} V, \quad \tan D_V V = \nabla_V V, \quad \text{norm} D_V V = -\frac{\langle V, V \rangle}{f} \text{grad}(f).$$

Teniendo en cuenta que $D_X X$ es horizontal, así como $\text{grad}(f)$, $\gamma'' = 0$ si y solo si

$$\tan \gamma'' = D_X X - \frac{V, V}{f} \text{grad}(f) = 0, \quad \text{norm} \gamma'' = 2 \frac{Xf}{f} V + \nabla_V V = 0,$$

cuando ambas expresiones se evalúan sobre la curva γ (nótese que no se están explicitando los levantamientos de los campos ni de la warping function para aligerar la notación). Por otro lado,

trabajando en B y F , como α' y β' coinciden con un campo de vectores en un entorno de $s = 0$ en dicho entorno:

$$D_X X = \alpha'', \quad \nabla_V V = \beta.$$

Utilizando que estas igualdades también se darán para los correspondientes levantamientos de los campos de vectores a M , así como que $\langle V, V \rangle = f^2(V, V)$, se concluye el resultado.

2. Supongamos ahora que $\gamma'(0)$ es horizontal (en particular consideramos la posibilidad de que sea 0).

En primer lugar, si γ es geodésica, entonces, como las hojas son geodésicamente completas, γ está contenida en $B \times \beta(0)$ en un intervalo entorno a 0. Por tanto, β es constante y, en particular, $\beta'' = 0 = \beta'$ y $(\beta'\beta') = 0$. Además, $\alpha'' = 0$ pues $\gamma = (\alpha, \beta(0))$ es geodésica en $B \times \beta(0)$ por las propiedades de las subvariedades totalmente geodésicas y la isometría π de dicha hoja en B manda γ en α y conserva las geodésicas. Por tanto, comprobamos que se cumplen 1 y 2.

Recíprocamente. Supongamos que se cumplen 1 y 2. Veamos que se tiene que $(f \circ \alpha)^4(\beta', \beta') = cte$. Usando las propiedades de la derivada covariante y 2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left((f \circ \alpha)^4(\beta', \beta') \right) &= 4(f \circ \alpha)^3 \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}(\beta', \beta') + (f \circ \alpha)^4 \frac{d(\beta', \beta')}{ds} = \\ &= 4(f \circ \alpha)^3 \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}(\beta', \beta') + 2(f \circ \alpha)^4(\beta'', \beta') = \\ &= 2(f \circ \alpha)^3 \left(2 \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}(\beta', \beta') + (f \circ \alpha) \left(-\frac{2}{f \circ \alpha} \frac{d(f \circ \alpha)}{ds} \beta', \beta' \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Como $\beta'(0) = 0$, concluimos que $(f \circ \alpha)^2(\beta', \beta') = 0$. Como f es estrictamente positivo, ha de ser $(\beta', \beta') = 0$ en el intervalo de trabajo y, por tanto, por 1, $\alpha'' = 0$, con lo que α es geodésica.

Nótese que, si expresamos 2. respecto a los campos de vectores asociados a una carta local, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para las componentes de β , con término no homogéneo nulo. Las componentes de β son solución de dicho sistema de EDOs cumpliendo $\beta'(0) = 0$ y las componentes de la curva constante igual a $\beta(0)$ son también solución del mismo problema de Cauchy de valores iniciales, por la unicidad de solución de los mismos, en un intervalo J en torno a 0, ambas soluciones han de ser la misma.

Así pues $\gamma = (\alpha, \beta(0))$. Como α es geodésica en B y las isometrías conservan las geodésicas, γ lo será en $B \times \beta(0)$ y, por las propiedades de las subvariedades geodésicamente completas, es geodésica en M .

3. Supongamos finalmente que $\gamma'(0)$ es vertical y no nula.

Supongamos que γ es geodésica y distingamos dos casos:

- Si $grad(f) = 0$ en $p = \alpha(0)$, entonces, la fibra $p \times F$ sería totalmente geodésica por el [Teorema 5.0.10](#) y γ permanecería en $p \times F$ en un intervalo entorno a 0 y, como γ es geodésica en M , lo sería en $p \times F$. En particular α sería constante y $\alpha'' = 0$, con lo que 1 se cumpliría. Además, como α es constante, también lo es $f \circ \alpha$ y el lado derecho de 2 es nulo. Como $\gamma = (p, \beta)$ es geodésica en $p \times F$, usando que las homotecias respetan las geodésicas, β es geodésica y el lado izquierdo de 2 también se anula.
- Supongamos ahora que $grad(f) \neq 0$ en p . Como $\gamma'(0) \neq 0$ entonces γ no es constante. Supongamos que existe un intervalo en torno a $s = 0$ en que γ permanece en $p \times F$. En particular α es constante y $\alpha'' = 0$. Además, γ es vertical en dicho intervalo. Usando el [Lema 3.3.2](#) existe un campo de vectores V en F tal que β es curva integral suya y γ sería curva integral de su levantamiento, que denotaremos también V . Así pues, usando las propiedades de la derivada covariante y el [Teorema 5.0.10](#):

$$0 = \text{norm} \gamma'' = \text{norm} D_V V = -\frac{\langle V, V \rangle}{f} grad(f).$$

Como $\text{grad}(f)$ es no nulo, concluimos que $\langle V, V \rangle = 0$ y, por ello, $(\beta', \beta') = 0$, con lo que se da la igualdad 1. Por otro lado

$$0 = \tan D_V V = \nabla_V V = \beta'',$$

con lo que concluimos que β es geodésica y 2 también se cumple pues $\frac{d(f \circ \alpha)}{ds} = 0$.

Si no existe un intervalo entorno a 0 en que γ permanezca en $p \times F$, existiría una sucesión $\{s_i\}_{i=1}^\infty \rightarrow 0$ tal que para cada i $\gamma'(s_i)$ no es ni horizontal ni vertical (por continuidad, como la proyección vertical de γ' en 0 es no nulo, lo será en un entorno y si fuese vertical en todo un entorno entonces γ permanecería en $p \times F$). En cada uno de dichos puntos, se cumplen 1 y 2 por lo probado en el primero de los casos considerado. Utilizando la continuidad de todas las expresiones implicadas en 1 y 2 (la cual se puede comprobar utilizando coordenadas inducidas en el fibrado tangente, aunque siempre tratamos con aplicaciones continuas y por ello lo son las expresiones que obtenemos), se concluye el resultado buscado.

Recíprocamente, supongamos que 1 y 2 se cumplen y distingamos los mismos casos:

- Si $\text{grad}(f) = 0$ en p , entonces $\alpha''(0) = 0$. Como además, por hipótesis, $\alpha'(0) = 0$, entonces, a partir de la ecuación de las geodésicas, se concluye que α es constante. Por tanto, de 2, se tiene que $\beta'' = 0$ en un intervalo y β es geodésica. Por las propiedades de las homotecias, $(p, \beta) = \gamma$ es geodésica en $p \times F$, que es totalmente geodésica y, por tanto, γ es geodésica en M .
- Supongamos que $\text{grad}(f) \neq 0$ en p . Si no existe una sucesión $\{s_i\}_{i=1}^\infty \rightarrow 0$ tal que $\gamma'(s_i)$ no es ni vertical ni horizontal para cada i , entonces, γ' es vertical en un intervalo entorno a $s = 0$, con lo que $\alpha' = 0$ en dicho entorno y α es constante. Por tanto, por 2, $\beta'' = 0$ y β es geodésica de F y por ello $\gamma = (p, \beta)$ es geodésica de $p \times F$. Como $\alpha'' = 0$, de 1, deducimos que $(\beta', \beta') = 0$. Como $\beta'(0) \neq 0$, existe un campo de vectores en F V tal que β es curva integral suya. Así pues γ será curva integral de su levantamiento (que también denotamos por V). Usando las propiedades de la derivada covariante

$$\text{norm} \gamma'' = \text{norm} D_V V = -\frac{\langle V, V \rangle}{f} \text{grad}(f) = -f \langle V, V \rangle \text{grad}(f) = 0,$$

con lo que $\gamma'' = \tan \gamma'' = \tan D_V V = \nabla_V V = \beta'' = 0$ y concluimos que γ es geodésica.

De lo contrario, existe una sucesión $\{s_i\}_{i=1}^\infty \leftarrow 0$ tal que $\gamma'(s_i)$ no es ni vertical ni horizontal. Por el primer caso considerado, γ es geodésica en un entorno de s_i para cada i y, en particular, $\gamma''(s_i) = 0$. Utilizando la continuidad de γ'' , se tiene que $\gamma''(0) = 0$. En un entorno de 0, para cada punto, se dará alguno de los casos considerados previamente y por ello γ'' se anulará en todos los puntos de dicho entorno y γ será geodésica.

Tras haber analizado todas las posibilidades de $\gamma'(0)$, se concluye el resultado. $\square$

Observación 5.1.2. Si γ es una geodésica, entonces, teniendo en cuenta que, tal y como se ha probado en la demostración anterior

$$(f \circ \alpha)^4 (\beta' \beta') = C,$$

es constante. Por 2., β' y β'' son colineales y, por la [Proposición 4.2.11](#) β es una pregeodésica si es regular (y en algún punto no es de tipo luz) y, si no es regular, se ha visto en la demostración que β es geodésica constante. Además, se puede reescribir 1 como

$$\alpha'' = \frac{C \text{grad}(f)}{(f \circ \alpha)^3} = -\text{grad}(\phi),$$

tomando $\phi = \frac{C}{2f^2}$. Reparametrizando γ y por ello β , se puede conseguir que C sea $-1, 0$ o 1 en función del carácter causal de β , lo que permite simplificar 1.

Corolario 5.1.3. Sea $M = B \times F$ una variedad semi-Riemanniana producto. Entonces, con la notación del teorema anterior, γ es una geodésica en M si y solo si α y β son geodésicas en B y F , respectivamente.

Demostración. Basta notar que M es un producto warped en que la función warped es constante y por ello $\text{grad}(f) = 0$ y además $\frac{d(f \circ \alpha)}{ds} = 0$. Usando el teorema anterior se concluye de forma inmediata. $\square$

Ejemplo 5.1.4. Sea $M = \mathbb{R}_1^1 \times_{e^t} \mathbb{R}^1$ una variedad producto warped. Consideremos en $\mathbb{R}_1^1$ la coordenada natural t y en $\mathbb{R}^1$ la coordenada natural s . Entonces, trabajando en $\mathbb{R}_1^1$:

$$\left\langle \text{grad}(f), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}(f) = e^t.$$

Por otro lado, como $\text{grad}(f) = g(t) \frac{\partial}{\partial t}$ para cierta función g , se tiene que

$$\left\langle \text{grad}(f), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = -g(t),$$

con lo que concluimos que $\text{grad}(f) = -e^t$. Además, se cumple que

$$\frac{de^\alpha}{du} = e^{\alpha(u)} \alpha'(u),$$

entendiendo $\alpha'(u)$ como una función con llegada en $\mathbb{R}$ y no como un campo de vectores y siendo u la coordenada en que parametrizamos las curvas. Así pues, las ecuaciones de las geodésicas en M en función de sus proyecciones, identificando $\mathbb{R}_1^1$ y $\mathbb{R}^1$ con sus respectivos espacios tangentes en cada punto, son

$$\alpha'' = (\beta')^2 e^\alpha (-e^\alpha), \quad \beta'' = -2\alpha' \beta',$$

donde se consideran α y β como aplicaciones con llegada en $\mathbb{R}$ usuales, así como sus derivadas. Así pues, es inmediato comprobar que $\gamma(u) = (\ln(u), \frac{1}{u})$ es una geodésica de M para $u > 0$. Además, no puede ser extendida, de manera que comprobamos como aunque la base y la fibra sean variedades semi-Riemannianas geodésicamente completas, su producto warped puede no serlo. Si tanto la fibra como la base fueran de hecho Riemannianas, se puede probar que el producto warped siempre será una variedad Riemanniana completa.

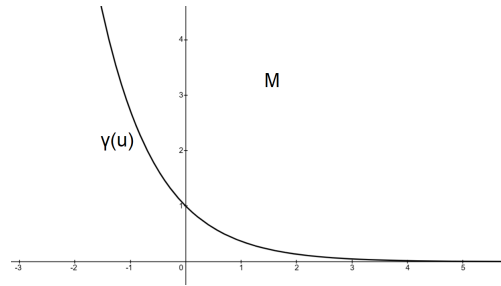


Figura 6: Representación de la geodésica γ calculada en el producto warped M .

5.2. Curvatura en productos warped

Buscamos ahora expresar la curvatura de M en función de las B y F . Para ello, tendremos que saber cómo trasladar los tensores de curvatura de B y F , de tipo $(1, 3)$, a M . Para ello interpretaremos los campos tensoriales en B de tipo $(1, s)$ como aplicaciones $A : \mathfrak{X}(B) \times \cdots \times \mathfrak{X}(B) \rightarrow \mathfrak{X}(B)$. Para trasladarlos a M se construye en primer lugar una aplicación que sale de $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)$ (y sigue llegando a $\mathfrak{X}(B)$) de manera análoga a como se trasladan las s -formas sobre B y posteriormente se considera el levantamiento de las imágenes de esta aplicación a M .

Definición 5.2.1. Sea $s \geq 0$ y $A : \mathfrak{X}(B) \times \cdots \times \mathfrak{X}(B) \rightarrow \mathfrak{X}(B)$ un campo tensorial de tipo $(1, s)$ sobre B . Sea $(p, q) \in M$. Para cada $v_1, \dots, v_s \in T_{(p,q)}M$ definimos $\tilde{A}(v_1, \dots, v_s)$ como el *levantamiento horizontal* de $A(d\pi v_1, \dots, d\pi v_s)$ en $T_p(B)$.

De igual forma, si $D : \mathfrak{X}(F) \times \cdots \times \mathfrak{X}(F) \rightarrow \mathfrak{X}(F)$ un campo tensorial de tipo $(1, s)$ sobre F , para cada $(p, q) \in M$ y $v_1, \dots, v_s \in T_{(p,q)}M$ definimos $\tilde{D}(v_1, \dots, v_s)$ como el *levantamiento vertical* de $A(d\sigma v_1, \dots, d\sigma v_s)$ en $T_q(F)$.

Obsérvese cómo es inmediato que $\tilde{A}$ se anula si uno de los vectores tangentes sobre los que actúa es vertical y que $\tilde{D}$ lo hace si uno de ellos es horizontal. Veamos ahora que, con estas definiciones, $\tilde{A}$ y $\tilde{D}$ son efectivamente campos tensoriales diferenciables de tipo $(1, s)$ sobre M .

Lema 5.2.2. Usando la notación de la definición anterior, $\tilde{A}$ y $\tilde{D}$ son campos tensoriales diferenciables sobre M .

Demostración. En primer lugar, nótese que la $\mathcal{F}(M)$ -multilinealidad de las aplicaciones $\tilde{A}$ y $\tilde{D}$ está asegurada, gracias a la correspondiente propiedad tanto de A y D como de $d\pi$ y $d\sigma$.

Veamos que son diferenciables. Gracias a la $\mathcal{F}(M)$ -multilinealidad y a que esta es una propiedad local, basta ver que para cada $(p, q) \in M$, considerando una carta local en torno a dicho punto, adaptada a la estructura de variedad producto de M , $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m, \psi_1, \dots, \psi_d)$, el resultado de hacer actuar $\tilde{A}$ y $\tilde{D}$ sobre cualesquiera s de los campos asociados a ϕ , es un campo de vectores diferenciable (todo ello de forma local). Lo probaremos para $\tilde{A}$ pues el otro caso es análogo.

En primer lugar, nótese que si $\tilde{A}$ actúa sobre algún $\frac{\partial}{\partial \psi_j}$, vertical, el campo de vectores resultante será idénticamente nula y, en particular, diferenciable. Sino

$$\tilde{A} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_{i_m}} \right) = A \left(d\pi \left(\frac{\partial}{\partial \phi_{i_1}} \right), \dots, d\pi \left(\frac{\partial}{\partial \phi_{i_m}} \right) \right) = A \left(\left(\frac{\partial}{\partial \phi_{i_1}} \right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \phi_{i_m}} \right) \right),$$

donde identificamos los campos de vectores tangentes en M con los correspondientes en B , pertenecientes a la base asociada a la carta $\varphi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ de B , con lo que este último campo de vectores es diferenciable y por ello lo es su levantamiento horizontal. De hecho, si las componentes tensoriales de A asociadas a la carta φ son $A_{i_1, \dots, i_m}^j$, hemos comprobado que:

$$\tilde{A} = \left(A_{i_1, \dots, i_m}^j \circ \pi \right) d\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes d\phi_{i_m} \otimes \frac{\partial}{\partial \phi_j}.$$

Por tanto, se concluye la demostración. $\square$

En lo que sigue denotaremos por ${}^B R$ y ${}^F R$ a los levantamientos a M de los tensores de curvatura de B y F respectivamente. Nótese que, gracias a que para todo $p \in B$, $\sigma : p \times F \rightarrow F$ es una homotecia y para todo $q \in F$, $\pi_B \times q \rightarrow B$ es una isometría, ${}^B R$ y ${}^F R$ son los tensores de curvatura de las fibras y las hojas, respectivamente.

El siguiente lema permite más adelante simplificar la notación al tratar de relacionar las curvaturas de B y F con la de M sin riesgo a confusión.

Lema 5.2.3. Si $h \in \mathcal{F}(B)$, siendo H^h el levantamiento a M de la hessiana de h se tiene que H^h y $H^{h \circ \pi}$ coinciden si uno de los vectores tangentes sobre los que actúan es horizontal.

Demostración. Comencemos considerando $x, y \in T_{(p,q)}B \times q$ vectores tangentes a M horizontales y sean X, Y campos de vectores horizontales que los extienden. Entonces

$$H^h(x, y) = H^h(d\pi x, d\pi y) = H^h(d\pi X, d\pi Y) = \left\langle {}^B D_{d\pi X} \text{grad}(h), d\pi Y \right\rangle_B,$$

donde usamos el subíndice en el tensor métrico para recalcar que se calcula en B . Por otro lado

$$H^{h \circ \pi}(x, y) = H^{h \circ \pi}(X, Y) = \langle D_X \text{grad}(h \circ \pi), Y \rangle_M = \left\langle {}^B D_{d\pi X} \text{grad}(h), d\pi Y \right\rangle_B,$$

donde hemos utilizado, como $\text{grad}(h \circ \pi)$ es horizontal, el valor de la conexión de Levi-Civita de M al actuar sobre dos vectores horizontales. Comprobamos que ambas actúan igual al hacerlo sobre dos vectores horizontales.

Además, si $v \in T_{(p,q)}p \times F$ es un vector tangente vertical y V un campo de vectores verticales que lo extiende, razonando como antes, como $D_X \text{grad}(h \circ \pi)$ es horizontal y V vertical, se concluye que $H^h(x, v) = 0 = H^{h \circ \pi}(x, v)$ $\square$

Nótese que si los dos vectores sobre los que actúa son verticales, mientras que es inmediato que H^h se anulará al actuar sobre ellos, puede que $H^{h \circ \pi}$ no lo haga.

Establecemos ahora el resultado principal de la sección que nos permite relacionar la curvatura de productos warped con la de las variedades que los generan. Gracias al carácter lineal de la curvatura y a la descomposición del espacio tangente en cada punto de M como suma directa de los vectores horizontales y los verticales, nos basta con estudiar cómo actúa la curvatura sobre los vectores horizontales y los verticales. Estudiamos cada uno de los posibles casos por separado.

Teorema 5.2.4. Sea $M = B \times_f F$ un producto warped y sea R su tensor de curvatura. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ y $U, V, W \in \mathfrak{L}(F)$, los cuales identificaremos con sus proyecciones en B y F , respectivamente, se cumple que:

1. $R_{XY}Z \in \mathfrak{L}(B)$ y es el levantamiento de ${}^B R_{XY}Z$ de B a M .
2. $R_{VX}Y = \frac{H^f(X,Y)}{f \circ \pi} V$ con H^f . Nótese que H^f coincide al actuar sobre (X, Y) con $H^{f \circ \pi}$.
3. $R_{XY}V = R_{VW}X = 0$.
4. $R_{XV}W = \frac{\langle V, W \rangle}{f \circ \pi} D_X(\text{grad}(f))$.
5. $R_{VW}U = {}^F R_{VW}U - \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2} (\langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V)$

donde hemos prescindido, sin riesgo a confusión, de la mención explícita a la composición de f con π .

Demostración.

Como las hojas son totalmente geodésicas, de acuerdo con la ecuación de Gauss, sabemos que R y ${}^B R$ coinciden al actuar sobre vectores horizontales.

2. Como $[V, X] = 0$, entonces por definición del tensor de curvatura:

$$R_{VX}Y = -D_V D_X Y + D_X D_V Y.$$

Calculamos el segundo de los sumandos de la igualdad. Usando el teorema que caracteriza la actuación de la conexión de Levi-Civita sobre campos verticales y horizontales en productos warped en la primera igualdad y usando después las propiedades básicas de la conexión de Levi-Civita y de nuevo el resultado que caracteriza su actuación en los productos warped:

$$\begin{aligned} D_X D_V Y &= D_X \left(\frac{Yf}{f} V \right) = \\ &= X \left(\frac{Yf}{f} \right) V + \frac{Yf}{f} D_X V = \frac{X(Yf)}{f} - YfX \left(\frac{1}{f} \right) V + \frac{Yf}{f} \frac{Xf}{f} V = \frac{X(Yf)}{f} V. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $D_X Y \in \mathfrak{L}(B)$ se tiene que:

$$D_V D_X Y = \frac{D_X Y(f)}{f} V.$$

Sustituyendo en la expresión original y usando una de las caracterizaciones de la hessiana:

$$R_{VX}Y = \frac{X(Yf) - D_X Y f}{f} V = \frac{H^f(X, Y)}{f} V.$$

3. Como el tensor de curvatura es $\mathcal{F}(M)$ -multilineal, para probar la igualdad basta hacerlo para un conjunto de campos de vectores que en cada punto $(p, q) \in M$ formen una base de $T_{(p,q)}M$. Podemos hacerlo en un entorno de cada punto considerando los campos de vectores tangentes asociados a una carta local. Todo ello justifica que podamos suponer, sin pérdida de generalidad, que $[V, W] = 0$. En tal caso, de nuevo se tiene que:

$$R_{VW}X = -D_V D_W X + D_W D_V X.$$

Usando de nuevo la caracterización de la conexión de Levi-Civita en los productos warped

$$D_V D_W X = D_V \left(\frac{Xf}{f} W \right) = V \left(\frac{Xf}{f} \right) W + \frac{Xf}{f} D_V W = \frac{Xf}{f} D_V W,$$

donde hemos tenido en cuenta que $\frac{Xf}{f}$ es constante sobre las fibras. Como los papeles de V y W son intercambiables, concluimos que:

$$R_{VW}X = \frac{Xf}{f} (D_WV - D_VW) = \frac{Xf}{f} [V, W] = 0.$$

Además, por las simetrías del tensor de curvatura se tiene que

$$\langle R_{XY}V, W \rangle = \langle R_{VW}X, Y \rangle = 0, \quad \langle R_{XY}V, Z \rangle = \langle R_{XY}Z, V \rangle = 0,$$

donde la última igualdad se tiene porque, por 1., $R_{XY}Z$ es horizontal, mientras que V es vertical. Como esto es cierto para todo campo de vectores vertical W y todo campo de vectores horizontal Z , el tensor métrico actuando sobre $R_{XY}V$ y cualquier otro campo de vectores será nulo. Como el tensor métrico es no degenerado, $R_{XY}V = 0$.

4. Por 3., usando las simetrías del tensor de curvatura se tiene que

$$\langle R_{XV}W, U \rangle = \langle R_{WU}X, V \rangle = 0,$$

por lo que podemos concluir que, como esto es cierto para todo campo de vectores vertical U , $R_{XV}W$ es horizontal. Además usando el resultado de 2. y la definición de Hessiana:

$$\langle R_{XV}W, Y \rangle = \langle R_{VX}Y, W \rangle = \frac{H^f(X, Y)}{f} \langle V, W \rangle = \frac{\langle V, W \rangle}{f} \langle D_X \text{grad}(f), Y \rangle.$$

Dado que esta igualdad es cierta para todo campo de vectores horizontal Y , usando que el tensor métrico es no degenerado, concluimos que:

$$R_{XV}W = \frac{\langle V, W \rangle}{f} D_X(\text{grad}(f)).$$

5. De nuevo utilizando las simetrías de la curvatura y el punto 3. de este resultado se tiene que

$$\langle R_{VW}U, X \rangle = -\langle R_{V,W}X, U \rangle = 0,$$

por lo que, como esto se cumple para todo campos de vectores horizontal, X , concluimos que $R_{VW}U$ es vertical. Haciendo uso de la fórmula de Gauss que nos relaciona la curvatura en las fibras con la vista desde M , teniendo en cuenta que el tensor de forma de las fibras está dado por:

$$\mathbf{II}(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad}(f).$$

Se tiene que, para todos U_1, U_2 campos de vectores verticales:

$$\begin{aligned} \langle R_{VW}U_1, U_2 \rangle &= \left\langle {}^F R_{VW}U_1, U_2 \right\rangle - \langle \mathbf{II}(V, U_1), \mathbf{II}(W, U_2) \rangle + \langle \mathbf{II}(V, U_2), \mathbf{II}(W, U_1) \rangle = \\ &= \left\langle {}^F R_{VW}U_1, U_2 \right\rangle - \frac{\langle V, U_1 \rangle}{f^2} \langle W, U_2 \rangle \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle + \frac{\langle V, U_2 \rangle}{f^2} \langle W, U_1 \rangle \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle = \\ &= \left\langle {}^F R_{VW}U_1 - \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2 (\langle V, U_1 \rangle W - \langle W, U_1 \rangle V)}, U_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

De nuevo usando que el tensor métrico es no degenerado, se concluye la prueba. $\square$

Nótese que todas las igualdades del teorema anterior tienen carácter tensorial y, por ello, son válidas al considerarlas punto a punto.

Estudiamos ahora cómo se relacionan las curvaturas de Ricci y escalar de M , B y F , para tener una descripción completa de estos espacios.

Corolario 5.2.5. Sea $M = B \times_f F$ un producto warped con $\dim(F) = d > 0$ y sean $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ y $V, W \in \mathfrak{L}(F)$. Entonces el tensor de curvatura de Ricci de M está caracterizado por las siguientes igualdades:

1. $Ric(X, Y) = {}^B Ric(X, Y) - \frac{d}{f} H^f(X, Y)$.
2. $Ric(X, V) = 0$.
3. $Ric(V, W) = {}^F Ric(V, W) - \langle V, W \rangle \sharp f$.

donde:

$$\sharp f = \frac{\Delta f}{f} + (d-1) \frac{\langle grad(f), grad(f) \rangle}{f^2},$$

siendo ${}^B Ric$ y ${}^F Ric$ los levantamientos de las curvaturas de Ricci de B y F , respectivamente, a M ; y Δf el levantamiento a M (su composición con π del laplaciano de f en B). Al igual que en el resultado anterior, se ha prescindido de explicitar las composiciones con π para simplificar la notación.

Demostración. Al tratarse de igualdades de tipo tensorial, es decir, que a ambos lados de la igualdad todos los objetos que actúan sobre los campos de vectores son campos de tensores, $\mathcal{F}(M)$ -multilineales, basta con probarlas para campos de vectores tales que en cada punto de un abierto de M formen una base de su espacio tangente. Sea $(p, q) \in M$. Consideramos los levantamientos horizontales de una referencia de campos de vectores de B en un abierto entorno a p , $E_1, \dots, E_n$ y los levantamientos verticales de una referencia de campos de vectores de F en un abierto entorno a q , $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_d$. Definimos $F_i = \frac{1}{f \circ \pi} \tilde{F}_i$, definidos en el mismo abierto que los $\tilde{F}_i$ y tales que $\langle F_i, F_i \rangle = (d\sigma \tilde{F}_i, d\sigma \tilde{F}_i) = f_m \in \{-1, 1\}$. Así pues $\{E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_d\}$ forman una referencia de campos de vectores en un abierto de M entorno a (p, q) por la ortogonalidad de las fibras y las hojas. Denotamos por $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle \in \{-1, 1\}$.

Para probar las igualdades del enunciado, utilizaremos la expresión de la curvatura de Ricci en términos de una referencia de campos de vectores, tanto en M como en B y F .

1. Usando que $R_{XE_m} Y = {}^B R_{XE_m} Y$ es horizontal, así como el apartado 2. del teorema previo para calcular el segundo conjunto de sumandos:

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \langle R_{XE_m} Y, E_m \rangle + \sum_{m=1}^d f_m \langle R_{XF_m} Y, F_m \rangle = \\ &= \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \left\langle {}^B R_{XE_m} Y, E_m \right\rangle + \sum_{m=1}^d f_m \left\langle \frac{H^f(X, Y)}{f} F_m, F_m \right\rangle = {}^B Ric(X, Y) - \frac{H^f(X, Y)}{f} \sum_{m=1}^d f_m^2 = \\ &= {}^B Ric(X, Y) - \frac{d}{f} H^f(X, Y). \end{aligned}$$

2. Teniendo en cuenta que, por el teorema previo, $R_{XE_m} V = 0$ y $R_{XF_m} V$ es horizontal y por ello ortogonal a F_m , se concluye que:

$$Ric(X, V) = \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \langle R_{XE_m} V, E_m \rangle + \sum_{m=1}^d f_m \langle R_{VF_m} W, F_m \rangle = 0.$$

3. Usando de nuevo los resultados del teorema previo para calcular la curvatura:

$$\begin{aligned} Ric(V, W) &= \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \langle R_{VE_m} W, E_m \rangle + \sum_{m=1}^d f_m \langle R_{VF_m} W, F_m \rangle = \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \left\langle \frac{\langle V, W \rangle}{f} D_{E_m} grad(f), E_m \right\rangle + \\ &+ \sum_{m=1}^d f_m \left\langle {}^F R_{VF_m} W, F_m \right\rangle - \sum_{m=1}^d f_m \frac{\langle grad(f), grad(f) \rangle}{f^2} (\langle V, W \rangle \langle F_m, F_m \rangle - \langle F_m, W \rangle \langle F_m, V \rangle). \end{aligned}$$

Como $\langle F_m, F_m \rangle = f_m$ y $f_m^2 = 1$ para todo m , entonces, del último sumatorio, los términos correspondientes al primer sumando del paréntesis son fáciles de sumar:

$$\sum_{m=1}^d f_m \frac{\langle grad(f), grad(f) \rangle}{f^2} \langle V, W \rangle \langle F_m, F_m \rangle = d \langle V, W \rangle \frac{\langle grad(f), grad(f) \rangle}{f^2}.$$

Como V, W son verticales, por las propiedades de los productos escalares:

$$\sum_{m=1}^d \varepsilon_m \langle E_m, V \rangle \langle E_m, W \rangle + \sum_{m=1}^d f_m \langle F_m, V \rangle \langle F_m, W \rangle = \sum_{m=1}^d f_m \langle F_m, V \rangle \langle F_m, W \rangle = \langle V, W \rangle.$$

Además, el laplaciano de f en B (identificando los campos de vectores con sus proyecciones sobre B) puede calcularse haciendo uso de la referencia de campos en B como:

$$\Delta f = \text{div}_B(\text{grad}(f)) = \sum_{m=1}^d \varepsilon_m \langle E_m, D_{E_m} \text{grad}(f) \rangle.$$

Introduciendo estos resultados en el cálculo principal:

$$\text{Ric}(V, W) = \frac{\langle V, W \rangle}{f} \Delta f + {}^F \text{Ric}(V, W) - d \langle V, W \rangle \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2} + \langle V, W \rangle \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2}.$$

Reordenando se tiene la expresión buscada. $\square$

Nótese que, siendo f la función warping, el levantamiento del laplaciano de f tomado en B no coincide en general con el laplaciano de $f \circ \pi$. Podemos calcular de hecho la expresión de este último, usando la expresión del laplaciano de una función en términos de una referencia de campos y la referencia utilizada en la prueba anterior, teniendo también en cuenta que $\text{grad}(f \circ \pi)$ es el levantamiento de $\text{grad}(f)$ y los podemos identificar sin riesgo a confusión y usando el cálculo de la curvatura realizado en el teorema previo:

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ \pi) &= \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \langle E_m, D_{E_m} \text{grad}(f \circ \pi) \rangle + \sum_{m=1}^d f_m \langle F_m, D_{F_m} \text{grad}(f \circ \pi) \rangle = \\ &= \Delta f + \sum_{m=1}^d f_m \left\langle F_m, \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f} F_m \right\rangle = \Delta f + \frac{d}{f} \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, el apartado 3. del corolario anterior se puede reexpresar como:

$$\text{Ric}(V, W) = {}^F \text{Ric}(V, W) - \langle V, W \rangle \frac{\Delta(f \circ \pi)}{f} - \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2}.$$

Corolario 5.2.6. En las condiciones anteriores, siendo ${}^B S$ y ${}^F S$ los levantamientos de las curvaturas escalares de B y F a M se tiene que

$$S = {}^B S + \frac{{}^F S}{f^2} - 2d \frac{\Delta f}{f} - d(d-1) \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2},$$

donde de nuevo Δf es el levantamiento del laplaciano de f en B a M .

Demostración. Consideramos una referencia de campos $\{E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_d\}$ análogo al empleado en la demostración del corolario anterior. En términos de este, se puede calcular la curvatura escalar de M usando su expresión en términos de una referencia de campos vectoriales y los resultados del corolario previo como

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m=1}^n \varepsilon_m \text{Ric}(E_m, E_m) + \sum_{m=1}^d f_m \text{Ric}(F_m, F_m) = \\ &= \sum_{m=1}^n \varepsilon_m {}^B \text{Ric}(E_m, E_m) - \frac{d}{f} \sum_{m=1}^n \varepsilon_m H^f(E_m, E_m) + \sum_{m=1}^d f_m {}^F \text{Ric}(F_m, F_m) - \sum_{m=1}^d f_m f_m \sharp f = \\ &= {}^B S - \frac{d}{f} {}^B CH^f + {}^F S - d \sharp f = {}^B S - \frac{\Delta f}{f} + {}^F S - d \sharp f = {}^B S + \frac{{}^F S}{f^2} - 2d \frac{\Delta f}{f} - d(d-1) \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2}, \end{aligned}$$

donde ${}^B CH^f = \Delta f$ es la contracción métrica de H^f vista en B (e identificada con su composición con la proyección π). $\square$

Al igual que ocurría con el corolario anterior, se puede reexpresar el resultado en términos de $\Delta(f \circ \pi)$:

$$S = {}^B S + \frac{{}^F S}{f^2} - 2d \frac{\Delta(f \circ \pi)}{f} + d \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2}.$$

6. Espacios Robertson-Walker

En este capítulo realizamos una breve incursión en el ámbito de la relatividad general, uno de los principales ámbitos de aplicación de la geometría semi-Riemanniana, siguiendo los capítulos 5, 6 y 12 de [17]. Nos centraremos en el estudio de los modelos cosmológicos más sencillos que permiten explicar la evolución del Universo: los espacios Robertson-Walker. El estudio de estos modelos permite entender el interés de los productos warped en la física, ya que son el objeto central de los modelos.

La teoría de la relatividad general fue desarrollada por Albert Einstein a principios del siglo pasado, para extender la teoría de la relatividad especial incluyendo la interacción gravitatoria. De hecho, se puede recuperar a partir de la relatividad general la especial como un caso particular, especialmente de forma local.

Una de las principales ideas de la teoría de la relatividad especial, que rompe con la visión newtoniana del Universo, es que el espacio y el tiempo dejan de ser conceptos irrelacionados y pasan a estar descritos de forma común por una variedad 4-dimensional Lorentziana, el espacio-tiempo. Este paradigma se mantiene en la teoría de la relatividad general pero, mientras que en la relatividad especial solo se consideran espacio-tiempos isométricos a $\mathbb{R}_1^4$, en la teoría de la relatividad general las posibilidades son mayores.

La principal diferencia entre ambas teorías es, de hecho, que el espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general no tiene por qué ser plano y, por tanto, el tensor de curvatura juega un papel relevante en ella. Tanto es así, que la gravedad se expresa en términos del mismo, concretamente de la curvatura de Ricci.

Esta curvatura está causada por la materia presente en el modelo, en concreto por su energía y momento. El efecto de la misma se introduce mediante un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, el tensor energía-impulso (stress-energy en inglés). No obstante, no existen unas reglas generales para su determinación y, en función de la situación que se quiera modelar, se determina la expresión del mismo de forma heurística, aunque existen algunas características que siempre se pide que cumpla, debido a argumentos físicos de conservación.

La otra gran idea de la teoría de la relatividad general es el principio de equivalencia que establece que es imposible distinguir, mediante un experimento sin información relativa al exterior, entre un movimiento de caída libre en un campo gravitatorio y un movimiento rectilíneo uniforme seguido por una partícula libre. En el modelo del universo dado por la teoría de la relatividad general, esto se explica estableciendo que las partículas en caída libre siguen las geodésicas del espacio-tiempo, es decir, trayectorias rectas. De esta forma, la materia determina cómo se curva el espacio-tiempo y, a su vez, esta curvatura establece cómo se mueve la materia.

6.1. Espacios vectoriales Lorentzianos

En primer lugar, realizamos un estudio detallado de algunas propiedades de los espacios tangentes de variedades semi-Riemannianas Lorentzianas. Estas propiedades son ciertas para todos los espacios vectoriales dotados de un producto escalar de índice 1, por lo que, para mayor generalidad, trabajaremos con espacios vectoriales Lorentzianos:

Definición 6.1.1. Un *espacio vectorial Lorentziano* es un espacio vectorial, V , de dimensión $n \geq 2$ con un producto escalar, g , de índice $\nu = 1$.

Utilizaremos la notación de la definición anterior en el resto de la sección, salvo que se especifique lo contrario.

En este tipo de espacios podemos generalizar la [Definición 4.1.4](#) para subespacios vectoriales cualesquiera:

Definición 6.1.2. Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial. Se dice que:

1. W es de *tipo espacial* o que su carácter causal es espacial, si $g|_W$ es definida positiva.
2. W es de *tipo temporal* o que su carácter causal es temporal, si $g|_W$ es no degenerado y de índice 1.
3. W es *luminoso* o que su carácter causal es de tipo luz, si $g|_W$ es degenerado.

En particular, si $W = \{0\}$, se dice que W es de tipo espacial.

Nótese que si W es un subespacio de tipo espacial, entonces $(W, g|_W)$ es un espacio con producto interno, mientras que si es de tipo temporal, $(W, g|_W)$ vuelve a ser un espacio vectorial Lorentziano.

Lema 6.1.3. Sea $W \subset V$ subespacio vectorial. Entonces W es de tipo espacial, de tipo temporal o de tipo luz. Dichas condiciones son además excluyentes.

Demostración. Sea W un subespacio de V . Supongamos que $g|_W$ es no degenerada. Sea $\text{ind}(W) \geq 0$ su índice. Si $\text{ind}(W) = 0$, entonces $g|_W$ es definida positiva y W es de tipo espacial. Si no, como, de acuerdo con el [Corolario 2.3.22](#)

$$1 = \text{ind}(V) = \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp),$$

y $\text{ind}(W^\perp) \geq 0$, ha de ser $\text{ind}(W) = 1$. Además, es inmediato a partir de la definición que las tres situaciones son mutuamente excluyentes. $\square$

Nótese que si en particular V es el espacio tangente a una variedad Lorentziana en un punto, para cada vector tangente $v \in V$, el carácter causal de v tal y como se definió en la [Definición 4.1.4](#) es el mismo que el del subespacio generado por v , $[v]$. Es por ello que, en el caso de un espacio vectorial Lorentziano V general, se puede definir el carácter causal de un vector directamente como el del subespacio que genera.

Esta clasificación de los subespacios de un espacio vectorial Lorentziano resulta de gran utilidad en su estudio. En primer lugar, nos permite descomponer V como una suma directa de un subespacio de tipo temporal y otro de tipo espacial. En este último, al ser $g|_W$ un producto interno, será más sencillo trabajar, pues se recuperan herramientas como la Desigualdad de Schwarz, $|g(v, w)| \leq |v||w|$, de acuerdo con la [Definición 2.3.16](#) de la norma de un vector.

Lema 6.1.4. Un subespacio vectorial $W \subset V$ es de tipo temporal si y solo si $W^\perp$ es de tipo espacial. En particular, si $z \in V$ es de tipo temporal (es decir, $[z]$ es de tipo temporal), entonces $z^\perp$ es de tipo espacial y $V = [z] \oplus z^\perp$.

Demostración. Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial de tipo temporal. En particular, W es no degenerado y, por ello, $W^\perp$ también. Además, a partir del [Corolario 2.3.22](#), deducimos que $\text{ind}(W^\perp) = 0$ y, por ello $g|_{W^\perp}$ es un producto interno, es decir, $W^\perp$ es de tipo espacial.

Recíprocamente, si $W^\perp$ es de tipo espacial, es no degenerado y $(W^\perp)^\perp = W$ es no degenerado. Usando de nuevo el [Corolario 2.3.22](#), concluimos que W es de tipo espacial.

Además, en cualquier caso, por las propiedades de los espacios con producto escalar al ser W no degenerado, $V = W \oplus W^\perp$ $\square$

Estudiamos ahora dos resultados que nos permiten caracterizar el carácter causal de los subespacios vectoriales de V de dimensión mayor o igual a 2. Nótese que el carácter causal de los subespacios de dimensión 1 está determinado por el carácter causal de un vector cualquiera suyo no nulo.

Lema 6.1.5. Sea $W \subset V$ un subespacio de dimensión mayor o igual que 2. Son equivalentes:

1. W es de tipo temporal.
2. W contiene dos vectores linealmente independientes luminosos.
3. W contiene un vector de tipo temporal.

Demostración.

- 1 $\implies$ 2. Sea $e_1, \dots, e_m$, una base ortonormal de W . Como W tiene índice 1 podemos suponer que e_1 es un vector de tipo temporal y el resto son vectores de tipo espacial. Entonces, $e_1 + e_2$ y $e_1 - e_2$ son dos vectores luminosos

$$g(e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_2) = g(e_1, e_1) \pm 2g(e_1, e_2) + g(e_2, e_2) = 1 \pm 0 - 1 = 0,$$

que son claramente independientes.

- 2 $\Rightarrow$ 3. Comencemos viendo que u, v dos vectores luminosos son colineales si y solo si $g(u, v) = 0$. Es claro que si son colineales, por ser luminosos, son perpendiculares. Supongamos que $g(u, v) = 0$ y sea $e_1, \dots, e_n$ una base ortonormal de V con e_1 de tipo temporal. Multiplicando por una constante si es necesario, podemos suponer que:

$$u = e_1 + \sum_{k=2}^n a_k e_k, \quad v = e_1 + \sum_{k=2}^n b_k e_k.$$

Como $g(u, u) = g(v, v) = g(u, v) = 0$, entonces:

$$1 = \sum_{k=2}^n a_k^2 = \sum_{k=2}^n b_k^2 = \sum_{k=2}^n a_k b_k.$$

Consideremos $U = [e_2, \dots, e_n]$, el subespacio de V generado por los últimos $n - 1$ elementos de la base, el cual es de tipo espacial (pues tiene una base ortonormal de vectores tipo espacial). Sean $u' = \sum_{k=2}^n a_k e_k$ y $v' = \sum_{k=2}^n b_k e_k$ vectores de U . Usando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz en U :

$$|u'| |v'| \geq g(u, v).$$

Como de hecho sabemos que se da la igualdad, pues ambos miembros de la ecuación son iguales a 1, de acuerdo con lo calculado antes, se tiene que u' y v' son colineales y, por tanto, u y v son colineales.

Así pues, si existen $u, v \in W$ luminosos independientes, $g(u, v) \neq 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $g(u, v) > 0$ (si no bastaría con cambiar u por $-u$). Entonces es inmediato que $g(u - v, u - v) < 0$ y, por ello, $u - v$ es de tipo temporal.

- 3 $\Rightarrow$ 1. Sea $z \in W$ vector de tipo temporal. Entonces, por las propiedades de los subespacios ortogonales, $W^\perp \subset z^\perp$. Como por el lema previo, $z^\perp$ es de tipo espacial, es un producto interno y, todos sus subespacios son de tipo espacial. Como $W^\perp$ es de tipo espacial, de nuevo por el lema previo, W es de tipo temporal.

□

El concepto de cono de luz juega un papel muy relevante en la teoría de la relatividad general, como frontera entre los sucesos posibles y los que no pueden tener lugar.

Definición 6.1.6. El *cono de luz* de V , Λ , es el conjunto de todos sus vectores luminosos, es decir:

$$\Lambda = \{v \in V \setminus \{0\}; g(v, v) = 0\}.$$

Lema 6.1.7. Sea W un subespacio de V . Son equivalentes:

1. W es de tipo luz.
2. W contiene un vector luminoso, pero no un vector tipo temporal.
3. $W \cap \Lambda = L \setminus \{0\}$, siendo L un subespacio 1-dimensional y Λ el cono de luz de V .

Demostración.

- 1 $\Rightarrow$ 2. Como W es degenerado, contiene un vector luminoso. Además, si W tuviera un vector de tipo temporal, de acuerdo con el lema previo, W sería de tipo temporal, absurdo.
- 2 $\Rightarrow$ 3. Por el lema previo, como W no contiene un vector de tipo temporal, no es de tipo temporal y no puede haber dos vectores luminosos independientes. Sea $v \in W$ luminoso, el cual existe por hipótesis. Entonces se tiene que $[v] \subset W$ y como no puede haber vectores luminosos que no sean colineales con v en W , $W \cap \Lambda = [v] \setminus \{0\}$.
- 3 $\Rightarrow$ 1. Como W contiene algún vector luminoso, $g|_W$ no puede ser definida positiva. Además, como no contiene dos vectores luminosos independientes, por el lema previo, no puede ser de tipo temporal. Por tanto W ha de ser de tipo luz.

□

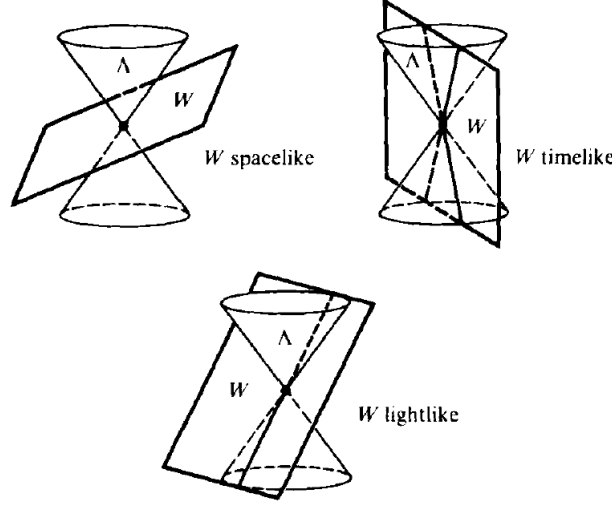


Figura 7: Conos causales en el espacio vectorial Lorentziano $\mathbb{R}^3$. En cada figura se representa un subespacio vectorial de dimensión 2 con un tipo causal distinto. Fuente: B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity* [17].

Consideremos el espacio vectorial Lorentziano $(\mathbb{R}^3, g)$, con g el producto escalar para el que la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal con $g(e_3, e_3) = -1$ y $g(e_i, e_i) = 1$, $i = 1, 2$. En la Figura 7 se representa el cono de luz del espacio vectorial así como un subespacio vectorial de capa tipo. Los vectores de tipo temporal son aquellos que se encuentran dentro del cono de luz, es decir, más próximo al eje z .

En relatividad general, los vectores de tipo temporal estarán relacionados con la evolución temporal del sistema. Por ello, interesa distinguirlos entre dos conjuntos, los que “apuntan al futuro” y los que “apuntan al pasado”. Para cada punto del espacio en relatividad general, los puntos que conforman el futuro (y el pasado) son distintos, por lo que es necesario hacer esta distinción en cada punto del espacio. Todo ello motiva la siguiente definición:

Definición 6.1.8. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los vectores de tipo temporal de V . Para cada $u \in \mathcal{T}$ se define el *cono temporal* que contiene a u como:

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} / g(u, v) < 0\},$$

y se define el *cono temporal opuesto* a u como:

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T} / g(u, v) > 0\}.$$

El siguiente resultado muestra que, tal y como se intuye en las representaciones de la Figura 7 para un ejemplo de espacio vectorial Lorentziano, es cierto en general que los dos conos temporales dividen el conjunto de vectores de tipo temporal.

Lema 6.1.9. $\mathcal{T}$ es la unión disjunta de $C(u)$ y $C(-u)$ para cada $u \in \mathcal{T}$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{T}$. Como $u^\perp$ es de tipo espacial, no contiene ningún vector de tipo temporal. Por tanto, si $v \in \mathcal{T}$, $v \notin u^\perp$ y, por ello $g(u, v) \neq 0$. Por tanto, o bien $v \in C(u)$ o bien $v \in C(-u)$. Además, ambas opciones son claramente excluyentes, con lo que se concluye el resultado. $\square$

Nótese que, como el producto escalar de un vector de tipo temporal por sí mismo es siempre negativo, es razonable considerar que dos vectores temporales “apuntan en el mismo sentido” cuando su producto escalar es negativo, al contrario de lo que ocurre en los productos internos. Esto se refleja en el siguiente resultado.

Lema 6.1.10. Sean $u, v, w \in \mathcal{T}$. Entonces v, w están en el mismo cono temporal de u si y solo si $g(v, w) < 0$.

Demostración. Supongamos que $v \in C(u)$ y veamos que $w \in C(u)$ si y solo si $g(v, w) < 0$. Pongamos $V = [u] \oplus [u]^\perp$, con lo que podemos expresar $v = au + v'$, $w = bu + w'$ con $v', w' \in [u]^\perp$. Como $g(v, v) = -a^2 + |v'|^2$ y v es un vector de tipo temporal, es claro que $|a| > |v'|$. Por el mismo motivo, $|b| > |w'|$. Por otro lado, como $v \in C(u)$, $a > 0$. Calculando

$$g(v, w) = -ab + g(v', w'),$$

y usando que por la Desigualdad de Schwarz en $[u]^\perp$, $|g(v', w')| \leq |v'| |w'| < |ab|$, se tiene que el signo de $g(v, w)$ es el mismo que el de $-ab$ y por tanto, $g(v, w) < 0$ si y solo si $b > 0$, si y solo si $w \in C(u)$. $\square$

Este resultado en particular nos permite ver que los conos temporales son propios del espacio vectorial V y no dependen del vector temporal que se elija.

Proposición 6.1.11. La relación $u \sim v$ si y solo si $g(u, v) < 0$ en $\mathcal{T}$ es una relación de equivalencia. Además, dado $u \in \mathcal{T}$ cualquiera, las clases de equivalencia de esta relación son $C(u)$ y $C(-u)$, los cuales denominamos conos temporales de V . En particular, solo existen dos conos temporales en V , los cuales forman una partición de $\mathcal{T}$.

Demostración. Nótese que $u \sim v$ si y solo si $v \in C(u)$. Es inmediato que $u \in C(u)$ para cada $u \in \mathcal{T}$ y que $v \in C(u)$ si y solo si $u \in C(v)$ para cada $u, v \in \mathcal{T}$, por la simetría de g . El lema anterior prueba la transitividad de la relación de equivalencia. Además, $C(u)$ es la clase de equivalencia de u y $C(-u)$ la de $-u$. Como su unión es $\mathcal{T}$, se concluye el resultado. $\square$

Lema 6.1.12. Los conos temporales son convexos.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{T}$. Veamos que, de hecho, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, si $v, w \in C(u)$, entonces $av + bw \in C(u)$. Para ello basta notar que

$$g(av + bw, av + bw) = a^2 g(v, v) + 2abg(v, w) + b^2 g(w, w) < 0, \quad g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w) < 0,$$

donde hemos utilizado que $g(v, w) < 0$ pues ambos están en el mismo cono temporal. Así pues, por la primera desigualdad, $av + bw \in \mathcal{T}$ y, por la segunda, $av + bw \in C(u)$. $\square$

Esta inversión de la intuición para los vectores de tipo temporal también tiene su análogo en otras propiedades típicas de los espacios con producto interno, como son la desigualdad de Cauchy (y por ello la desigualdad triangular) y la definición de un ángulo entre vectores.

Proposición 6.1.13. Sean $v, w \in \mathcal{T}$. Se cumple lo siguiente:

1. (Desigualdad de Schwarz inversa) $|g(v, w)| \geq |v||w|$ y la igualdad se da si y solo si v, w son colineales.
2. Si v, w están en el mismo cono temporal de V , existe un único $\varphi \geq 0$, llamado ángulo hiperbólico entre v y w , tal que:

$$g(v, w) = -|v||w| \cosh \varphi.$$

3. Si v, w están en el mismo cono temporal, entonces $|v| + |w| \leq |v + w|$

Demostración. Pongamos $V = [v] \oplus [v]^\perp$ y sea $w = av + w'$, con $w' \in [v]^\perp$.

1. Como w es de tipo temporal:

$$g(w, w) = a^2 g(v, v) + g(w', w') < 0.$$

Por tanto, usando que, al ser $[v]^\perp$ de tipo espacial, $g(w', w') \geq 0$ y que $g(v, v) < 0$ por ser de tipo temporal:

$$g(v, w)^2 = a^2 g(v, v)^2 = (g(w, w) - g(w', w')) g(v, v) \geq g(w, w) g(v, v) = |w|^2 |v|^2.$$

Además, la desigualdad en el razonamiento anterior es una igualdad si y solo si $g(w', w') = 0$ y, como $g|_{[v]^\perp}$ es un producto interno, esto ocurre si y solo si $w' = 0$, si y solo si v y w son colineales.

2. Si v, w están en el mismo cono temporal, $g(v, w) < 0$ y, por tanto,

$$-\frac{g(v, w)}{|v||w|} \geq 1.$$

Como $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ es una biyección, se tiene el resultado.

3. Como v, w están en el mismo cono temporal, $g(v, w) < 0$ y, por tanto, la Desigualdad de Schwarz inversa lleva a que $|v||w| \leq -g(v, w)$. Por tanto:

$$(|v| + |w|)^2 = |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 \leq |v|^2 - 2g(v, w) + |w|^2 = -g(v + w, v + w) = |v + w|^2.$$

□

El último punto de la proposición anterior establece que es más corto el camino de un punto a otro a través de un tercero no colineal que el camino recto.

Al particularizar este estudio a las variedades semi-Riemannianas, nos encontramos con que no siempre va a ser posible definir un carácter causal a una subvariedad (diferenciable), pero que sí lo será cuando esta sea una subvariedad semi-Riemanniana. En lo que resta de sección, M será una variedad semi-Riemanniana Lorentziana.

Definición 6.1.14. Una subvariedad $P \subset M$ se dice que es de *tipo espacial*, de *tipo temporal* o de *tipo luz*, si para cada $p \in P$, $T_p P \subset T_p M$ es de tipo espacial, de tipo temporal o de tipo luz, respectivamente.

Lema 6.1.15. Sea M una variedad Lorentziana. Toda subvariedad semi-Riemanniana, $P \subset M$ es o bien de tipo espacial o bien de tipo temporal.

Demostración. Basta tener en cuenta que si $P \subset M$ es una subvariedad semi-Riemanniana, para cada $p \in P$, $T_p P$ es un subespacio no degenerado de $T_p M$ y, por ello, o bien es de tipo temporal o bien es de tipo espacial. Como el índice de cada espacio tangente es fijo en una subvariedad semi-Riemanniana, o bien $T_p P$ es de tipo espacial para todo $p \in P$ (de índice 0) o bien es de tipo temporal (de índice 1). □

Ejemplo 6.1.16. En el [Ejemplo 4.6.2](#) vimos que en $\mathbb{R}_1^2$, la subvariedad diferenciable

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\},$$

no era una subvariedad semi-Riemanniana pues el espacio tangente a P en cada punto, de dimensión 1, está generado por un vector luminoso. Por tanto, cada espacio tangente es de tipo luz y P es una subvariedad de tipo luz, aunque no semi-Riemanniana.

En este contexto también podemos definir el carácter causal de ciertas curvas regulares (aunque no toda curva en M tiene por qué tener un carácter causal definido).

Definición 6.1.17. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva regular, con I un abierto convexo de $\mathbb{R}$. Se dice que el carácter causal de α es de *tipo espacial*, *temporal* o *luz* si para todo $t \in I$, $\alpha'(t)$ es de tipo espacial, temporal o luz, respectivamente.

Al estar definido a partir del producto escalar de cada espacio tangente, es de esperar que el carácter causal se conserve mediante isometrías locales. De hecho, podemos probar que se conserva incluso por homotecias, en el siguiente sentido:

Proposición 6.1.18. Sean $(M, g_M), (N, g_N)$ variedades semi-Riemannianas Lorentzianas y sea $\phi : M \rightarrow N$ una homotecia de coeficiente c .

- Para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$, el carácter causal de v es el mismo que el de $d\phi_p(v)$ si $c > 0$.
- Si $c < 0$, para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$, el carácter causal de v es tipo temporal si y solo si el de $d\phi_p(v)$ es de tipo espacial y viceversa. Además, el carácter causal de v es luminoso si y solo si el de $d\phi_p(v)$ lo es.
- Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva con carácter causal de tipo espacial, temporal o luz. Entonces $\phi \circ \alpha$ es una curva con carácter causal de tipo espacial de tipo espacial, temporal o luz, respectivamente, si $c > 0$. Si $c < 0$, $\phi \circ \alpha$ es una curva con carácter causal de tipo temporal, espacial o luz, respectivamente.
- Si $P \subset M$ es una subvariedad y $\phi(P)$ es subvariedad de N , entonces si el carácter causal de P es de tipo espacial, temporal o luz, el carácter causal de $\phi(P)$ es de tipo espacial, temporal o luz, respectivamente, si $c > 0$. Si $c < 0$, el carácter causal de $\phi(P)$ es, respectivamente, de tipo temporal, espacial o luz.

Demostración. Como h es una homotecia, sabemos que $\phi^*g_N = cg_M$, con lo que para todo $v \in T_pM$ se tiene que

$$cg_M(v, v) = g_N(d\phi_p v, d\phi_p v),$$

de donde los apartados 1,2 y 3 se deducen de forma inmediata.

Probemos el apartado 4. Comencemos notando que para todo $p \in M$, $d\phi_p : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$ es un isomorfismo. En particular, lo es al restringirnos a $d\phi_p : T_pP \rightarrow T_{\phi(p)}\phi(P)$. Como además, para cada $v, w \in T_pP$

$$g_M(v, w) = \frac{1}{c}g_N(d\phi_p v, d\phi_p w),$$

es inmediato que $g_M|_{T_pP}$ es degenerada si y solo si $g_N|_{T_{\phi(p)}\phi(P)}$ lo es. Además, si $g_M|_{T_pP}$ la imagen por $d\phi_p$ de una base ortonormal suya será una base ortogonal de $T_{\phi(p)}\phi(P)$, cuyos elementos tendrán el mismo carácter causal que los originales si $c > 0$ y el opuesto si $c < 0$. Por tanto, si $c > 0$ y T_pP es de tipo espacial (resp. de tipo temporal), $T_{\phi(p)}\phi(P)$ es de tipo espacial (resp. de tipo temporal) y si $c < 0$ y T_pP es de tipo espacial (resp. de tipo temporal), $T_{\phi(p)}\phi(P)$ es de tipo temporal (resp. de tipo espacial). $\square$

Ya hemos visto que los conos temporales son una forma de dividir los vectores de tipo temporal en el espacio tangente en cada punto de una variedad Lorentziana en dos conjuntos disjuntos. Así, en cada espacio tangente se puede elegir uno de estos conjuntos como aquel que “apunta al futuro”, lo que se conoce como orientar temporalmente el espacio tangente. No obstante, a priori no sabemos si se puede hacer esta elección de forma suave.

Definición 6.1.19. Una aplicación τ que a cada punto $p \in M$ le asigna un cono temporal se dice que es *diferenciable* si para cada $p \in M$ existe un campo de vectores definido en un entorno U de p , $V \in \mathfrak{X}(U)$, tal que $V_q \in \tau(q)$ para cada $q \in U$. En tal caso, se dice que τ es una *orientación temporal* de M . Se dice que M es *orientable temporalmente* si admite una orientación temporal. Si M es orientable temporalmente, elegir una orientación temporal se dice que es *orientar temporalmente* M .

Ejemplo 6.1.20. Si consideramos el espacio semieuclídeo $\mathbb{R}_1^n$, siendo $x^1, \dots, x^n$ componentes de la identidad, se define su orientación temporal usual como aquella que contiene al campo vectorial de tipo temporal $\frac{\partial}{\partial x^n}$.

Cabe destacar que, si bien el problema de la orientabilidad temporal de una variedad Lorentziana es formalmente similar al problema de la orientación usual de una variedad diferenciable, no hay una relación entre la orientabilidad de una variedad Lorentziana y su orientabilidad temporal. De hecho, se sabe que se puede definir un tensor métrico de índice 1 en la botella de Klein de forma que esta sea orientable temporalmente, a pesar de no ser orientable.

El siguiente resultado establece una caracterización de las variedades Lorentzianas que son orientables temporalmente.

Teorema 6.1.21. Una variedad Lorentziana M es orientable temporalmente si y solo si existe un campo vectorial de tipo temporal, $X \in \mathfrak{X}(M)$, es decir, tal que para cada $p \in M$, X_p es de tipo temporal.

Demostración. Supongamos en primer lugar que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para cada $p \in M$, X_p es de tipo temporal. Entonces la elección en cada punto del cono temporal que contiene a X_p da una orientación temporal.

Recíprocamente. Supongamos que existe una orientación temporal τ en M . Por la definición de que τ sea diferenciable, para cada $p \in M$ existe U_p abierto entorno a p y $X_p \in \mathfrak{X}(U)$ tal que para todo $q \in U$, X_q está en el cono temporal elegido por τ .

Sea $\{f_p : p \in M\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento por abiertos de M , $\{U_p : p \in M\}$, es decir, tal que para cada $p \in M$, $\text{Sop}(f_p) \subset U_p$. Definimos:

$$X = \sum_{p \in M} f_p X_p.$$

Nótese que, para cada $p \in M$, $f_p X_p \in \mathfrak{X}(M)$, sin más que definirlo como el vector tangente nulo fuera de U . Además, gracias a que la familia $\{\text{Sop } f_p : p \in M\}$ es localmente finita, en un entorno de cada punto de M , X está definido como una suma finita de campos de vectores diferenciables y, por ello, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Además, esto mismo asegura que para cada $q \in M$ existen una cantidad finita de puntos, $p_1, \dots, p_r$, tales que:

$$X(q) = \sum_{k=1}^r f_{p_k}(q) X_{p_k}(q).$$

Como $X_{p_k}(q)$ está en el cono temporal escogido por τ para $k = 1, \dots, r$ y $\sum_{k=1}^r f_{p_k}(q) = 1$, por las propiedades de la partición de la unidad, $X(q)$ es una combinación lineal convexa de elementos del cono temporal escogida por τ en q . Como este es convexo, $X(q)$ está en dicho cono temporal (y en particular es de tipo temporal). $\square$

Finalmente, introducimos los conceptos de vectores y conos causales, análogos a los temporales pero que ahora incluyen además a los vectores luminosos.

Definición 6.1.22. Sea (V, g) un espacio vectorial Lorentziano. Se dice que un vector $v \in V$ es *causal* si es de tipo temporal o luminoso. Para cada vector de tipo temporal $u \in V$, se define su *cono causal* que contiene a u como:

$$\bar{C}(u) = \{v \in V \text{ causal} / g(u, v) < 0\},$$

y su *cono causal opuesto* como $\bar{C}(-u) = -\bar{C}(u)$. Además, si M es una variedad Lorentziana, se dice que una curva $\alpha : I \rightarrow M$, con I un convexo abierto de $\mathbb{R}$, es una *curva causal* si para todo $t \in I$, $\alpha'(t)$ es causal.

Las propiedades de estos objetos son muy similares a las que poseen los respectivos conceptos temporales. De hecho, si se considera en V cualquier topología de espacio vectorial topológico (todas ellas son equivalentes), se puede ver que $\bar{C}(u)$ es la adherencia (salvo en 0) de $C(u)$. No obstante, no entraremos en estos detalles topológicos.

Proposición 6.1.23. Sea (V, g) un espacio vectorial Lorentziano. Dado u un vector de tipo temporal, se tiene que el conjunto de vectores causales de V es unión disjunta de $\bar{C}(u)$ y $\bar{C}(-u)$ y ambos son convexos. Además, dados v, w vectores causales, v, w están en el mismo cono causal de u si y solo si $g(v, w) < 0$ o ambos son luminosos y $w = av$ para cierto $a > 0$. Finalmente, se cumple que $\bar{C}(u) \subset C(u) \cup \Lambda$.

Demostración. La última de las afirmaciones es trivial a partir de la definición de cono causal.

Sea $u \in V$ de tipo temporal, el cual suponemos de norma 1 sin pérdida de generalidad, y sea v causal. Como $u^\perp$ es de tipo espacial, $v \notin u^\perp$ y, por ello, o bien $v \in \bar{C}(u)$ o bien $v \in \bar{C}(-u)$. Además, es claro que ambos conjuntos son disjuntos, por lo que forman una partición del conjunto de vectores causales de V .

Sean v, w vectores causales. Supongamos que $v \in \bar{C}(u)$. Veamos que $w \in \bar{C}(u)$ si y solo si $g(v, w) < 0$ o $w = av$ con $a > 0$ y ambos son luminosos. Como u es de tipo temporal, $V = [u] \oplus [u]^\perp$, con lo que podemos descomponer $v = au + v'$, $w = bu + w'$ con $v', w' \in [u]^\perp$ y $a, b \neq 0$, pues sino tendrían carácter espacial. Así, como $g(v, v) = -a^2 + |v'|^2$ y v es causal, $|a| \geq |v'|$. Como además $v \in \bar{C}(u)$, ha de ser $a > 0$. Razonando de igual forma para w , $b^2 \geq |w'|^2$. Como además,

$$g(v, w) = -ab + g(v', w'),$$

y usando la Desigualdad de Schwarz en $[u]^\perp$, $|g(v', w')| \leq |v'| |w'| \leq a|b|$. Así pues, o bien $g(v, w)$ tiene el mismo signo que $-ab$ y, por ello, el signo opuesto a b , o bien $g(v, w)$ es nulo.

En el primer caso, como $g(u, w) = -b$, el signo opuesto a b es el de $g(u, w)$, por lo que si $g(v, w)$ es no nulo, $w \in \bar{C}(u)$ si y solo si $g(v, w) < 0$.

Supongamos $g(v, w) = 0$, es decir, $ab = g(v', w')$. Entonces ha de darse la igualdad $|g(v', w')| = |v'| |w'|$ en la Desigualdad de Schwarz y, por tanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $w' = \lambda v'$. Además, ha de tenerse que $a = |v'|$ y que $|b| = |w'| = |\lambda| |v'| = |\lambda| a$. De hecho, para que $g(v, w) = 0$, ha de ser $b = \lambda a$, con lo que $w = \lambda a$. Además, $g(v, v) = -a^2 + |v'|^2 = 0$, con lo que son luminosos ambos. Por tanto, $g(u, w) = -\lambda a < 0$ si y solo si $\lambda > 0$, con lo que se concluye el resultado.

Veamos finalmente que $\bar{C}(u)$ es convexo. Para ello tomemos $v, w \in \bar{C}(u)$ vectores causales y veamos que, de hecho, para todos $a, b \geq 0$ (no simultáneamente nulos), $av + bw \in \bar{C}(u)$. Para ello calculamos en primer lugar

$$g(av + bw, av + bw) = a^2 g(v, v) + 2ab g(v, w) + b^2 g(w, w),$$

con lo que comprobamos que $g(av + bw, av + bw) \leq 0$. Además, es nula si y solo $g(v, w) = 0 = g(v, v) = g(w, w)$, en cuyo caso $w = \lambda v$ con $\lambda > 0$, con lo que $av + bw$ es un vector luminoso (no nulo en particular). Así pues, comprobamos que $av + bw$ es causal. Finalmente es inmediato que

$$g(u, av + bw) = ag(u, v) + g(u, w) < 0,$$

con lo que $av + bw \in \bar{C}(u)$. □

De forma análoga a lo que ocurre con los conos temporales, el resultado anterior nos permite dar la siguiente definición.

Definición 6.1.24. Se denomina *cono causal* a cada uno de los dos conjuntos que forman una partición de los vectores causales, C_1, C_2 , tales que para cada $u \in V$ de tipo temporal, o bien $C_1 = \bar{C}(u)$, o bien $C_2 = \bar{C}(u)$.

Observación 6.1.25. Cabe destacar que, como los espacios vectoriales Lorentzianos se utilizan principalmente en el estudio de la relatividad general, en lugar de considerar que en las bases ortonormales $e_1, \dots, e_n$ con e_n , el vector de tipo temporal es el n -ésimo, con lo que el tiempo sería la n -ésima dimensión, se utiliza la notación $e_0, \dots, e_{n-1}$, siendo e_0 el vector tipo temporal. El mismo comentario es aplicable a las coordenadas naturales de los espacios semi-euclídeos Lorentzianos, $\mathbb{R}_1^n$, las cuales denotaremos a partir de ahora $x^0, \dots, x^{n-1}$, siendo el elemento de línea del tensor métrico:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (dx^k)^2.$$

6.2. Definiciones físicas básicas

Para poder entender la teoría de la relatividad general, en primer lugar hemos de formalizar una serie de conceptos físicos en el lenguaje de las variedades Lorentzianas. La mayoría de ellos son habituales en el día a día, como la velocidad, la energía o el concepto de observador y su definición dentro del paradigma newtoniano, aún cuando se utiliza el lenguaje de la geometría Riemanniana para ello, es bastante directa.

No obstante, al tratar de generalizar estos conceptos para que sean válidos en las teorías de la relatividad especial y general, la dificultad es mayor. Por ejemplo, en estas teorías, no existe el concepto de simultaneidad, pues esta depende del observador. Es decir, no se puede decir que dos eventos sucedan a la vez, solo que un observador los observa a la vez. De la misma forma tampoco se puede afirmar que dos sucesos ocurran en el mismo punto en instante distintos de forma global. Todo ello hace que el concepto de observador tome una relevancia especial en la teoría.

En primer lugar, comencemos estableciendo el marco de trabajo de la relatividad general.

Definición 6.2.1. Una variedad Lorentziana de dimensión 4, M se dice que es un *espacio-tiempo* si es conexa y está orientada temporalmente (o al menos es orientable temporalmente). Cada punto $p \in M$ se denomina un evento.

Gracias a la orientación temporal, podemos establecer los conceptos de pasado y futuro en cada punto.

Definición 6.2.2. La orientación temporal de M se denomina el *futuro* y la orientación opuesta, el *pasado*. Se dice que los vectores tangentes en cada cono causal del futuro *apuntan al futuro*, mientras que los de la orientación opuesta *apuntan al pasado*.

Una curva causal se dice que *apunta al futuro* si todos sus vectores velocidad apuntan al futuro.

Para cada $p \in M$, si $C \subset T_p M$ es el cono temporal que se escoge en la orientación de M , este determina un único cono causal, $\bar{C}$. Por tanto, si $v \in T_p M$ es un vector causal luminoso, diremos que apunta al futuro si $v \in \bar{C}$. Se define de forma análoga los vectores tangentes luminosos que apuntan al pasado.

Intuitivamente, una partícula es un objeto de tamaño despreciable con respecto a las distancias típicas del modelo. Las partículas son objetos reales que, por tanto, han de moverse como mucho a la velocidad de la luz, de acuerdo con la comprensión actual del Universo. Un estudio detallado de la relatividad especial permite formalizar que el hecho de que este límite equivale a que las partículas no pueden influir en un evento si no están en su pasado.

Definición 6.2.3. Una *partícula material* es una curva de tipo temporal que apunta al futuro, $\alpha : I \longrightarrow M$, con I un abierto convexo de $\mathbb{R}$, tal que $|\alpha'(\tau)| = 1$ para todo $\tau \in I$. El parámetro τ de la curva se denomina *tiempo propio* de la partícula y el campo $\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ se denomina 4-velocidad de la partícula.

Este parámetro τ se identifica con el tiempo que marcaría un reloj que viajara con la partícula, con lo que en principio el tiempo medido por distintas partículas no tiene por qué coincidir, si su movimiento es distinto. En relatividad general, al ser el tiempo una magnitud relativa, solo importarán las diferencias de tiempo entre dos eventos, por ello la reparametrización de una partícula por una traslación de I se sigue considerando la misma partícula.

Definición 6.2.4. Una *partícula luminosa* es una geodésica luminosa que apunta al futuro, $\gamma : I \longrightarrow M$, donde I es un abierto convexo de $\mathbb{R}$.

Nótese que en este caso, como las partículas de luz siguen geodésicas luminosas, $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$ y, por ello, no tiene sentido hablar de una parametrización de la partícula por tiempo propio. Es decir, estas partículas no pueden llevar un reloj.

Una de las principales diferencias entre las partículas materiales y las luminosas es que solo las primeras tienen masa. Esta es una propiedad que determina el comportamiento dinámico de las partículas materiales, como se hará más patente al definir el campo energía-momento. Si bien para sistemas complejos la masa de una partícula puede cambiar con el tiempo, consideraremos solo sistemas cerrados, es decir, de masa constante.

Definición 6.2.5. Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ una partícula material. Se asigna a α una constante $m > 0$ que se denomina *masa* de α .

Observación 6.2.6. Hemos de realizar una puntualización en cuanto a las magnitudes físicas introducidas. Nuestra experiencia cotidiana nos dice que el tiempo y el espacio son conceptos distintos y, por ello, para medirlos, usamos distintos estándares respecto a los que compararlos, es decir, utilizamos distintas unidades para la medida del tiempo y del espacio. Esto puede dar lugar a un conflicto en la teoría pues hemos pedido, por ejemplo, que $|\alpha'(\tau)| = 1$ para una partícula material, sin preocuparnos de en qué unidades se mida el vector velocidad.

Para evitar la aparición de constantes universales de la física, como la velocidad de la luz, c o la constante de gravedad G , que podrían complicar las expresiones de la teoría se decide trabajar en un sistema unidades concreto: las unidades geométricas. En este sistema de unidades se fija el valor de $c = 1$ y $G = 1$. De esta forma, el tiempo y el espacio pasan a medirse en las mismas unidades. Esto es lo que se hace al hablar de distancias en el universo en términos de segundos-luz o años-luz. En particular, la velocidad en este sistema de unidades es adimensional y se mide respecto a la velocidad de la luz en una escala de 0 a 1.

De hecho, en este sistema, la masa también se mide en las mismas unidades que el tiempo o la distancia. Todo ello simplifica algunas comparaciones así como el estudio de los límites en los que se recuperan la teoría de la relatividad especial y la dinámica newtoniana a partir de la relatividad general.

Introducimos ahora un concepto vital en el resto de la teoría, el de observador. Si bien un observador es una partícula más, su rol en el modelo es relevante, puesto que respecto de él se realizarán las medidas de posiciones e instantes.

Definición 6.2.7. Un *observador* en M es una partícula material $\omega : I \longrightarrow M$. Además, si $p \in M$, un *observador instantáneo* en p será un vector tangente unitario que apunta al futuro, $u \in T_p M$.

Finalmente, definimos los conceptos dinámicos relacionados con las partículas que permiten entender cómo las fuerzas pueden influir en su movimiento: el campo vectorial energía-momento y su generalización en relatividad general, el campo tensorial de energía-impulso.

Definición 6.2.8. Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ una partícula material de masa m . Su *campo vectorial energía-momento* es el campo vectorial $P = m\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Si $\gamma : I \longrightarrow M$ es una partícula de luz, se define su campo vectorial energía-momento como $P = \gamma' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Estas definiciones son similares a las habituales en mecánica clásica para el momento lineal. Si bien no entraremos en detalles, en cada punto $\alpha(\tau_0) = p \in \alpha(I)$ de la imagen de una partícula, siendo $u \in T_p M$ un observador instantáneo, podemos poner $\alpha'(\tau_0) = au + u'$, con $u' \in u^\perp$ de forma única. En estas condiciones

se identifica u'/a con la velocidad de la partícula α en ese evento vista por el observador instantáneo u . Nótese que, por ser $\alpha'(\tau_0)$ de tipo temporal, la norma de esta velocidad siempre será menor que 1, que la velocidad de la luz. De forma análoga, se entiende que si $P(\tau_0)$ es el campo vectorial energía-momento en τ_0 , al hacer la descomposición $P = Eu + P'$, E se identifica con la energía de la partícula en ese instante y P' con su momento lineal, según los observa u .

El tensor energía-esfuerzo es el encargado de describir en un espacio-tiempo M dado, con una cierta distribución de materia, cuál es la energía y el momento lineal promedio en cada evento. Al tratar de describir el comportamiento de la materia, de la cual no se tiene una descripción general en relatividad general, no existen unas reglas generales que permitan construir este tensor. De hecho, es el objeto que caracteriza cada modelo de la teoría, pues determina cómo es la gravedad de ese modelo, es decir, la curvatura del espacio-tiempo.

No obstante, para que los modelos válidos sean compatibles con las observaciones del comportamiento de la materia, se piden ciertas propiedades a este campo tensorial. En primer lugar, siempre se trata de un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, que suele generalizar el concepto de tensor de esfuerzos típico de la mecánica de medios elásticos. Además, dado un observador instantáneo u en un evento $p \in M$, se identifica $T(u, u)$ con la densidad de energía que observa u entorno a ese evento, por lo que ha de ser positivo. Además, la conservación de la energía-momento en cada punto del espacio-tiempo, la cual es una de las leyes básicas de la física, se puede probar que, con las definiciones adecuadas, equivale a que $\text{div}(T) = 0$.

Definición 6.2.9. Un *campo tensorial energía-esfuerzo*, T , en un espacio-tiempo, M , es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ tal que para cada $p \in M$ y cada $u \in T_p M$ de tipo temporal, $T(u, u) \geq 0$ y $\text{div}(T) = 0$.

Incluimos finalmente por completitud, el concepto de partícula en caída libre, pues, si bien no estudiaremos en los modelos Robertson-Walker el comportamiento de partículas materiales, es uno de los pilares de la relatividad general.

Definición 6.2.10. Se dice que una partícula material $\alpha : I \rightarrow M$ está en *caída libre* si es una geodésica.

6.3. Ecuación de Einstein

La ecuación principal de la teoría de la relatividad es la ecuación de Einstein, la cual permite relacionar el campo tensorial de energía-esfuerzo con el tensor métrico del espacio-tiempo M , a través de su curvatura de Ricci. Teniendo en cuenta que $\text{div}(T) = 0$ para cualquier campo tensorial de energía-esfuerzo, se llega a la conclusión de que la relación ha de estar dada por el campo tensorial de Einstein:

Definición 6.3.1. El *campo tensorial de Einstein* de un espacio-tiempo M es $G = \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg$, siendo Ric la curvatura de Ricci de M y S su curvatura escalar.

Entre las propiedades principales del campo tensorial de Einstein que establecemos a continuación, destaca que contiene la misma información que el tensor de curvatura de Ricci, pues uno se puede obtener a partir del otro, incluso usando la misma expresión una vez se tiene en cuenta que la curvatura escalar es la contracción métrica de la curvatura de Ricci: $S = C(\text{Ric})$.

Proposición 6.3.2. El campo tensorial de Einstein de M cumple:

1. G es un campo tensorial simétrico de tipo $(0, 2)$ de divergencia nula.
2. $\text{Ric} = G - \frac{1}{2}C(G)g$, siendo $C(G)$ su contracción métrica.

Demostración.

1. En primer lugar nótese que tanto Ric como g son campos tensoriales de tipo $(0, 2)$ simétricos, mientras que $S \in \mathcal{F}(M)$. Por tanto, es inmediato que G lo es. Además, de acuerdo con la [Proposición 4.4.19](#) y el [Ejemplo 4.3.14](#):

$$\text{div}(G) = \text{div}(\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg) = \frac{1}{2}dS - \frac{1}{2}dS = 0.$$

2. Comencemos recordando que, por el [Ejemplo 4.3.9](#) se tiene que $C(g) = 4$. Por tanto, por la definición de curvatura escalar:

$$C(G) = C(\text{Ric}) - \frac{1}{2}SC(g) = -S.$$

Por tanto, a partir de la definición de G :

$$\text{Ric} = G + \frac{1}{2}Sg = G - \frac{1}{2}C(G)g.$$

Por tanto, se concluye la demostración. $\square$

De esta forma se llega a la ecuación de Einstein que gobierna el comportamiento de los espacio-tiempos en relatividad general:

Definición 6.3.3. La ecuación de Einstein establece que en un espacio-tiempo M con tensor energía-esfuerzo T

$$G = 8\pi T,$$

con G el campo tensorial de Einstein.

Cabe destacar que la ecuación de Einstein presentada en este trabajo asume la constante cosmológica igual a $\Lambda = 0$, tal y como supuso Einstein en su trabajo original. No obstante, las teorías actuales de la relatividad general incluyen este término adicional (que nosotros ignoraremos), con lo que la ecuación de Einstein se cambió por [8]:

$$G + \Lambda g = 8\pi T.$$

Ambas ecuaciones son consistentes con que el campo tensorial de energía-esfuerzo sea un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ de divergencia 0. Además, imponen una restricción adicional sobre los campos tensoriales de energía-esfuerzo con significado físico: estos han de ser simétricos.

En ellas se hace claro que es la materia y, más concretamente, el tensor energía-esfuerzo el que determina la curvatura (de Ricci) del espacio-tiempo, mientras que el hecho de que las partículas en caída libre sigan geodésicas, implica que es la curvatura la que determina cómo se mueve la materia.

Definición 6.3.4. Sea M es un espacio-tiempo Ricci plano, se dice que M es un *vacío*.

Nótese que, gracias a la ecuación de Einstein y a que el campo tensorial de Einstein determina la curvatura de Ricci, es equivalente que M sea un vacío a que $T = 0$, lo que da sentido a esta definición.

6.4. Fluidos perfectos

Consideremos ahora que el Universo está ocupado por un fluido, es decir, por un medio continuo no rígido. Una opción para describir la dinámica de estos sistemas sería considerar un gran número de partículas materiales, las “moléculas” del fluido. No obstante, este enfoque es demasiado complejo para aportar resultados significativos y, por ello, es preferible trabajar modelando el fluido como un continuo. En este caso, en vez de trabajar con la 4-velocidad de cada partícula, se define un campo de vectores en todo M que da, de forma intuitiva, la 4-velocidad promedio de las moléculas del fluido en cada evento.

Teniendo en mente esta idea, una serie de argumentos heurísticos, basados en el comportamiento físico del tensor de esfuerzo clásico, permiten concluir que las características que permiten modelar el comportamiento de un fluido perfecto a través de un campo tensorial de energía-esfuerzo son que, siendo U el campo vectorial que representa la 4-velocidad del fluido y X, Y campos vectoriales ortogonales a U en cada punto de M :

$$T(U, U) = \rho, \quad T(X, U) = T(U, X) = 0, \quad T(X, Y) = \mu \langle X, Y \rangle,$$

donde ρ representa por tanto la densidad de energía del fluido y μ la presión que este ejerce.

El adjetivo “perfectos” se debe a que, al realizar estos argumentos, se considera que no los fluidos no poseen viscosidad ni presentan fuerzas de cizalladura.

En cualquier caso, estos argumentos heurísticos llevan a la siguiente definición formal de los fluidos perfectos:

Definición 6.4.1. Un *fluido perfecto* en un espacio tiempo M es una terna (U, ρ, μ) donde:

- U es una campo vectorial unitario de tipo temporal que apunta al futuro, el cual se denomina *campo vectorial de flujo*.
- $\rho, \mu \in \mathcal{F}(M)$ se denominan (función de) *densidad de energía* y (función de) *presión*.
- El campo tensorial de energía-esfuerzo de M está dado por

$$T = (\rho + \mu) U^* \otimes U^* + \mu g,$$

donde U^* es la 1-forma métricamente equivalente a U .

Veamos que esta expresión del campo tensorial energía-esfuerzo cumple las condiciones necesarias para representar el efecto de un fluido perfecto en el espacio-tiempo.

Lema 6.4.2. Sea (U, ρ, μ) una terna tal que $U \in \mathfrak{X}(M)$ es unitario y de tipo temporal, apuntando al futuro y $\rho, \mu \in \mathcal{F}(M)$. Entonces, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ perpendiculares en todo punto a U se tiene que un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ cumple

$$T(U, U) = \rho, \quad T(U, X) = T(X, U) = 0, \quad T(X, Y) = \mu \langle X, Y \rangle,$$

si y solo si $T = (\rho + \mu) U^* \otimes U^* + \mu g$. Además, en tal caso, T es un campo tensorial simétrico.

Demostración. Comencemos suponiendo que $T = (\rho + \mu) U^* \otimes U^* + \mu g$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $p \in M$, $X_p, Y_p \perp U_p$. Entonces:

$$T(U, U) = (\rho + \mu) U^*(U) U^*(U) + \mu g(U, U) = (\rho + \mu) g(U, U)^2 + \mu g(U, U) = (\rho + \mu) - \mu = \rho.$$

Además, como $g(U, X) = U^*(X) = 0 = U^*(Y) = g(U, Y)$ se tiene que:

$$T(U, X) = (\rho + \mu) U^*(U) U^*(X) + \mu g(U, X) = 0.$$

Como $U^* \otimes U^*$ y g son dos campos tensoriales de tipo $(0, 2)$ simétricos, es claro también que T es simétrico y $T(X, U) = 0$. Finalmente:

$$T(X, Y) = (\rho + \mu) U^*(X) U^*(Y) + \mu g(X, Y) = \mu \langle X, Y \rangle.$$

Supongamos ahora que T cumple las cuatro condiciones del enunciado. Para cada $p \in M$, U_p es un vector tangente de tipo temporal unitario. Podemos extenderlo a una base ortonormal $U_p, x, y \in T_p M$. Sabemos, de acuerdo con el [Teorema 4.3.10](#) que existe un entorno de p , V y campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ tales que U, X', Y' es una referencia ortonormal en V , con $X_p = x_p$ e $Y_p = y_p$. Consideremos $V' \subset V$ entorno cerrado de p . Sabemos que existe $f \in \mathcal{F}(M)$ que es idénticamente 1 en V' y con $\text{Sop } f \subset V'$. Entonces $U, X = fX', Y = fY'$ son campos de vectores en M con X, Y ortogonales en cada punto a U . Así pues, en particular, sabemos que:

$$T(U_p, U_p) = T(U, U)(p) = \rho(p), \quad T(U_p, x_p) = T(U, X)(p) = 0 = T(x_p, U_p),$$

$$T(x_p, y_p) = T(X, Y)(p) = \mu(p) \langle x_p, y_p \rangle.$$

Siendo $S = (\rho + \mu) U^* \otimes U^* + \mu g \in \mathcal{T}_2^0 M$, por lo probado antes, se tiene que S y T actúan igual sobre los vectores tangentes de una base de cada espacio tangente. Por tanto, $T_p = S_p$ para todo $p \in M$, es decir, $S = T$. $\square$

Además, como T ha de ser un campo tensorial de divergencia nula, se obtienen las siguiente relaciones entre los elementos de un fluido perfecto.

Proposición 6.4.3. Si (U, ρ, μ) es un fluido perfecto:

1. $U\rho = -(\rho + \mu)\text{div}U$ (ecuación energética).
2. $(\rho + \mu)D_U U = -\text{grad}_\perp \mu$ (ecuación de fuerzas).

Donde $\text{grad}_\perp \mu$ se denomina gradiente espacial de presión y es la componente de $\text{grad}\mu$ ortogonal a U .

Demostración. Sea $\bar{T}$ el tensor de tipo $(2,0)$ métricamente equivalente a T , es decir, aquel que se obtiene realizando dos subidas de índices. Veamos que $\text{div}(T) = 0$ si y solo si $\text{div}(\bar{T}) = 0$. Para ello, veamos que, de hecho, $\text{div}(\bar{T}) = \uparrow_1^1 \text{div}(T)$. Consideremos una carta local (V, φ) de M . Respecto de esta carta las componentes de $\uparrow_1^1 \text{div}(T)$ de acuerdo con (4.3) y (4.11) son

$$\text{div}(T)^j = \sum_{p,q} g^{pq} T_{pj;q}, \quad (\uparrow_1^1 \text{div}(T))^j = \sum_l g^{jl} \sum_{p,q} g^{pq} T_{pl;q},$$

siendo $T_{pi;q}$ la componente p, i, q -ésima de DT , donde el último índice se refiere a la nueva componente covariante debida a la derivada covariante.

Por otro lado, como la derivada covariante y los cambios de tipo conmutan, podemos hallar las componentes de $D\bar{T}$ respecto a esta carta local como

$$D\bar{T}_k^{i,j} = \sum_{p,l} g^{ip} g^{jl} T_{pl;k},$$

con lo que la divergencia de $\bar{T}$ tiene componentes

$$\bar{T}^j = (C_1^1 D\bar{T})^j = \sum_l g^{jl} \sum_{p,q} g^{qp} T_{pl;q},$$

con lo que comprobamos que se da la igualdad. Usando de nuevo la ecuación (4.3) se comprueba que las componentes de $g^* = \uparrow_1^1 \circ \uparrow_2^1 g$, respecto a la carta local, son:

$$(g^*)^{ij} = g^{ij}.$$

Por tanto, como $T = (\rho + \mu) U^* \otimes U^* + \mu g$, aplicando $\uparrow_1^1 \circ \uparrow_2^1$ a ambos lados de la igualdad se llega a que:

$$\bar{T} = (\rho + \mu) U \otimes U + \mu g^*.$$

Por tanto, si ponemos $U = \sum_i U^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ en V , las componentes de $\bar{T}$ respecto a esta carta son:

$$\bar{T}^{ij} = (\rho + \mu) U^i U^j + \mu g^{ij}.$$

Por tanto, su divergencia tiene componente i -ésima respecto d esta carta

$$\text{div} \bar{T}^i = \sum_j T_j^{ij} = \sum_j \left((\rho + \mu)_{;j} U^i U^j + (\rho + \mu) U_{;j}^i U^j + (\rho + \mu) U^i U_{;j}^j + \mu_{;j} g^{ij} \right),$$

donde hemos utilizado la regla del producto de la derivada covariante, así como que g es paralelo, para hallar las componentes de $D\bar{T}$. Nótese que, además,

$$(D_U U)^i = U_{;j}^i U^j, \quad D_U(\rho + \mu) = U(\rho + \mu) = \sum_j (\rho + \mu)_{;j} U^j, \quad (\text{grad} \mu)^i = \sum_j \mu_{;j} g^{ij}, \quad \text{div}(U) = \sum_j U_{;j}^j,$$

por lo que podemos concluir que:

$$\text{div} \bar{T} = U(\rho + \mu)U + (\rho + \mu)D_U U + (\rho + \mu)(\text{div} U)U + \text{grad} \mu.$$

Como $\text{div} \bar{T} = 0$ y, por ser U un vector unitario y por ello $\langle U, U \rangle$ constante, derivando la expresión anterior, se obtiene que $\langle D_U U, U \rangle = 0$. Como además U es de tipo temporal, en cada $p \in M$, $T_p M = [U_p] \oplus [U_p]^\perp$, por lo que, proyectando en $U_p^\perp$ ambos lados de la igualdad:

$$0 = (\rho + \mu)D_U U + \text{grad}_\perp \mu.$$

Por otro lado, usando que $\langle \text{div} \bar{T}, U \rangle = 0$, calculando este producto:

$$0 = U(\rho + \mu) \langle U, U \rangle + 0 + (\rho + \mu)(\text{div} U) \langle U, U \rangle + \langle \text{grad} \mu, U \rangle = -U\rho - U\mu - (\rho + \mu)\text{div} U + U\mu = -U\rho - (\rho + \mu)\text{div} U.$$

Reordenando, se obtiene la ecuación energética. $\square$

La primera ecuación determina cual es la evolución temporal de la densidad de energía en un fluido perfecto (vista en el sistema de referencia que se mueve con el propio fluido, es decir, por el observador instantáneo U_p , $p \in M$).

Además, entendiendo el gradiente espacial de la presión como una generalización de las fuerzas clásicas, la segunda de las ecuaciones es el análogo a la segunda ecuación de Newton, $F = ma$, pues $D_U U$ es la aceleración promedio de las moléculas del fluido (medida en el sistema de referencia del propio fluido). Eso sí, mediante esta interpretación, no solo la energía si no también la presión aporta a la masa del sistema, cuya densidad es $\rho + \mu$.

Cabe señalar que la definición de los fluidos perfectos no dice cómo construir un espacio-tiempo para modelar un fluido perfecto. Este de hecho es una de las grandes dificultades del estudio de la relatividad general. De acuerdo con la ecuación de Einstein, la distribución de materia en el Universo viene determinada por la geometría del mismo. Por tanto, T y M no se pueden elegir arbitrariamente, sino que se han de encontrar espacio-tiempos tales que su campo tensorial energía-esfuerzo pueda representar una situación físicamente realista. Es por ello que la construcción de modelos en relatividad general es al fin y al cabo un proceso de emparejamiento entre los espacios-tiempos y sus propiedades físicas.

6.5. Espacios Robertson-Walker

A continuación presentamos uno de los modelos más sencillos para describir la evolución del Universo a gran escala. Si bien la materia en nuestro Universo se observa que se agrupa en galaxias y estas a su vez en cúmulos de galaxias, en que la densidad es mayor, cuando se realiza un estudio del Universo a las mayores escalas posibles, este parece isótropo, es decir que es aproximadamente igual en todas las direcciones.

Por tanto, un modelo cosmológico que incluya la isotropía como una característica fundamental es un buen candidato para ser físicamente razonable.

Además, por analogía con el caso newtoniano un modelo especialmente sencillo del Universo podría estar determinado por una variedad producto del tiempo y el espacio. Todo ello nos lleva a las siguientes definiciones que nos permiten determinar progresivamente las propiedades que se espera que tenga un espacio-tiempo que represente el Universo. Tras determinar cuáles son estas propiedades, daremos la definición formal de este tipo de modelos.

Definición 6.5.1. Sea I un convexo y abierto de $\mathbb{R}$ y S una variedad diferenciable de dimensión 3 conexa. Definimos $M = I \times S$ y $t : M \rightarrow I$, $\sigma : M \rightarrow S$ las *proyecciones canónicas*.

Sea $U = \frac{\partial}{\partial t}$ el levantamiento a M del campo vectorial estándar d/dt en $I \subset \mathbb{R}$.

Para cada $p \in S$ se define la *galaxia* γ_p como la curva $\gamma_p : I \rightarrow I \times \{p\}$ dada por $\gamma_p(t) = (t, p)$.

Para cada $t_0 \in I$ se define la hipersuperficie obtenida manteniendo t_0 fijo como:

$$S(t_0) = \{t_0\} \times S.$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las propiedades de las variedades producto:

Lema 6.5.2. En las condiciones anteriores, para cada $p \in S$, γ_p es una curva integral de U . Por ello, se denomina a la proyección t *tiempo propio*.

Observación 6.5.3. Para toda función $h \in \mathcal{F}(I)$, denotaremos del mismo modo a su levantamiento a M y, además, denotaremos por h' a $U(h) = \frac{dh}{dt}$.

El propósito de estas definiciones es que puedan representar un fluido en que cada punto sea una galaxia. Además, es razonable asumir que en dicho modelo el tiempo propio de las galaxias ha de venir determinado por t , dando U los observadores instantáneos respecto a los que estudiar el modelo. Además, por la isotropía del espacio, esperaríamos que el movimiento relativo entre las galaxias sea despreciable, por lo que $S(t_0)$ es esperable que sea una variedad en que todas las galaxias estén en reposo simultáneamente. Estas dos ideas, junto con la formalización del concepto de isotropía, conducen a que si se quiere dotar a M de un tensor métrico de manera que se convierta en una variedad Lorentziana que modele la evolución del Universo, ha de cumplirse que:

- U sea un campo vectorial unitario de tipo temporal, es decir, $\langle U, U \rangle = -1$.

- Para cada $s \in I$, $S(s)$ ha de ser ortogonal a U (y por ello una subvariedad Riemanniana).
- Para cada $(t, p) \in M$, existe un entorno U tal que dados vectores tangentes unitarios $x, y \in T_{(t,p)}S(t)$ existe una isometría ϕ de U en sí mismo, de la forma $\phi = id \times \phi_S$, tal que $d\phi_{(t,p)}(x) = y$. Este tipo de isometrías se dice que conservan las galaxias.

El siguiente resultado permite deducir propiedades que ha de tener M con una métrica que cumpla que cumpla los tres puntos anteriores.

Proposición 6.5.4. Si a M se le dota de un tensor métrico que cumpla las tres condiciones anteriores, se cumple que:

- a) para cada $t \in I$, $S(t)$ tiene curvatura seccional constante, $C(t)$.
- b) para cada $s, t \in I$, la aplicación $\eta_{st}(s, p) = (t, p)$ de $S(s)$ en $S(t)$ es una homotecia.

Demostración.

- a) Sea $(t, p) \in S(t)$ y sea Π un plano tangente de $T_{(t,p)}S(t)$, el cual es no degenerado. Entonces, como su subespacio ortogonal en $T_{(t,p)}S(t)$ es de dimensión 1, existe $x \in T_{(t,p)}S(t)$ unitario tal que $\Pi = x^\perp$. Así pues, dados Π, Π' planos tangentes de $T_{(t,p)}S(t)$, existen $x, y \in T_{(t,p)}S(t)$ unitarios tales que $x^\perp = \Pi$ e $y^\perp = \Pi'$ (el ortogonal en $T_{(t,p)}S(t)$). De acuerdo con la propiedad de isotropía, existe una isometría $\phi = id \times \phi_S$ de un entorno de (t, p) , V , en sí mismo que manda x en y .

Por actuar separadamente en I y S , sabemos que la restricción de ϕ a $V \cap S(t)$ es de nuevo una isometría que, por tanto, mandará $x^\perp = \Pi$ en $y^\perp = \Pi'$ (el ortogonal en $T_{(t,p)}S(t)$). Como las isometrías conservan la curvatura seccional, las curvaturas seccionales de Π y Π' serán las mismas y, de acuerdo con el Teorema 4.4.15, $S(t)$ tiene curvatura constante.

- b) Veamos en primer lugar que para todo $x \in T_{(s,p)}S(s)$ unitario se tiene que $|d\eta_{st}(x)|$ es el mismo. Para ello fijemos x en estas condiciones. Entonces, por la condición de isotropía, para todo otro vector tangente unitario existe una isometría $\phi = id \times \phi_S$ en un entorno, $V = J \times W$, de (p, s) que lleva x en dicho vector, $d\phi(x)$.

Supongamos en primer lugar que $t \in J$. Entonces es claro que ϕ y η_{st} conmutan, por lo que lo hacen sus aplicaciones diferenciales por la regla de la cadena. Como ϕ es una isometría:

$$|d\eta_{st}(d\phi(x))| = |d\phi(d\eta_{st}(x))| = |d\eta_{st}(x)|.$$

Para un t general, consideramos el compacto $[s, t]$. Por la hipótesis de isotropía, este se puede recubrir por abiertos J (que podemos tomar que sean intervalos) en las condiciones anteriores. Así pues, por compacidad, existen $J_1, \dots, J_k$ intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, entornos $W_1, \dots, W_k$ de p en S e isometrías $\phi_1, \dots, \phi_k$, $\phi_i : J_i \times W_i \rightarrow J_i \times W_i$ tales que los J_i recubren $[s, t]$. Además, siendo $J_i = (a_i, b_i)$ reordenando y reduciendo algunos intervalos si es necesario, podemos suponer que para todo $i = 1, \dots, k-1$, $a_i < a_{i+1} < b_i < b_{i+1}$ y que $t \in J_k$, $s \in J_1$. Por tanto, tomando para cada $i = 1, \dots, k-1$ $t_i \in (a_{i+1}, b_i)$ y usando que $\eta_{st} = \eta_{t, t_{k-1}} \circ \eta_{t_{k-1}, t_{k-2}} \circ \dots \circ \eta_{t_2, t_1} \circ \eta_{t_1, s}$, iterando el razonamiento previo k veces, se concluye el resultado.

Sea $h(s, p, t)$ el factor de escala en la norma de los vectores tangentes en (s, p) y veamos que es una función diferenciable. En primer lugar, como η_{st} es un difeomorfismo, para cada $x \in T_{(s,p)}S(s)$ unitario, $d\eta_{st}x$ es no nulo. Tomemos $X \in \mathfrak{X}(I \times S)$ un campo de vectores unitario en un entorno de (s, p) , $W = J \times V$, tangente a $S(t)$, el cual sabemos que existe por el Teorema 4.3.10, tomando como primer campo vectorial de la referencia de campos U , ortogonal por hipótesis a $S(t)$. Dado $x \in T_{(s,p)}S(t)$ no nulo, considerando una carta adaptada de $I \times S$ de la forma $(I \times V, id \times \phi)$ con (V, ϕ) carta de S , vemos que las coordenadas de x respecto a la base asociada a esta carta de $T_{(s,p)}I \times S$ son las mismas que las de $d\eta_{st}$ respecto a la base de $T_{(t,p)}I \times S$ asociada a la carta. Por tanto, expresando $h^2(s, p, t) = \langle d\eta_{st}(x), d\eta_{st}(x) \rangle / \langle x, x \rangle$ respecto a esta carta adaptada, comprobamos que h^2 es diferenciable y, como no se anula, h es diferenciable en $I \times S \times I$. Veamos que para todo $x \in T(I \times S \times I)$ tangente a S unitario se tiene que $x(h) = 0$. Usando cartas locales adaptadas a la estructura de variedad producto, al ser S conexa, concluiremos pues que h solo depende de su primera y última variable y, por tanto, η_{st} será una homotecia de coeficiente $h(s, t)^2 = h(s, p, t)^2$ para cualquier $p \in S$.

Sea $x \in T_{(s,p,t)}(I \times S \times \times)$ que identificamos con su proyección a $T_{(s,p)}S(s)$ y sea σ la geodésica en $S(s)$ con $\sigma(0) = (s, p)$ y $\sigma'(0) = x$. Sea $\phi = id \times \phi_S$ una isometría en un entorno de (p, s) tal que $d\phi|_{(p,s)}(x) = -x$, la cual sabemos que existe por la condición de isotropía que cumple M . Como $\sigma(-u)$ es la geodésica en $S(s)$ con velocidad inicial $-x$ y las geodésicas se conservan por isometría, $\phi \circ \sigma(u) = \sigma(-u)$, con lo que $d\phi|_{\sigma(u)}(\sigma'(u)) = -\sigma'(-u)$. Usando de nuevo que η_{st} y ϕ conmutan:

$$\begin{aligned} h(\sigma(u), t) &= |d\eta_{st}\sigma'(u)| = |d\phi|_{\eta_{st}(\sigma(u))}d\eta_{st}|_{\sigma(u)}\sigma'(u)| = |d\eta_{st}|_{\phi(\sigma(u))}d\phi|_{\sigma(u)}\sigma'(u)| = \\ &= |d\eta_{st}|_{\sigma(-u)}\sigma'(-u)| = h(\sigma(-u), t). \end{aligned}$$

Nótese que $\sigma'(u)$ es unitario para todo u pues la norma del vector velocidad de una geodésica se conserva.

Por tanto:

$$(xh)(s, p, t) = \left. \frac{d}{du}h(\sigma(u), t) \right|_{u=0} = 0,$$

con lo que se concluye el resultado. $\square$

Usando la notación de la demostración anterior, de acuerdo con la relación entre las curvaturas seccionales y las homotecias dada en la [Sección 4.5](#):

$$h(s, t)^2 C(t) = C(s).$$

Como además η es claramente un difeomorfismo, h no se anula nunca y, por ello $C : I \rightarrow \mathbb{R}$ es de signo constante, $k = -1, 0, 1$.

Proposición 6.5.5. En las condiciones anteriores, fijamos $a \in I$ y definimos $f(a) > 0$ de forma que $C(a) = f(a)^2 k$. Sea g_a la restricción del tensor métrico de M a $S(a)$ y definamos $g = \frac{1}{f(a)} j_a^* g_a$, siendo $j_a(s) = (a, s)$ para cada $s \in I$. Entonces S tiene curvatura seccional constante k y para todo $t \in I$, $j_t : S \rightarrow S(t)$ es una homotecia de coeficiente $\frac{1}{f^2(t)}$.

Demostración. Basta tener en cuenta que, con esta definición del tensor métrico en S a partir del de $S(a)$, se tiene que j_a es una homotecia de coeficiente $\frac{1}{f^2(a)}$. Por las propiedades de la curvatura seccional respecto a las homotecias y la definición de $f(a)$, se tiene que la curvatura de S es entonces k .

Además, para cada $t \in I$, podemos ver $j_t = \eta_{at} \circ j_a$. Por ser composición de dos homotecias, sabemos que j_t lo es. Además, su factor de escala es el producto de los factores de escala de cada uno. Al ser $h(a, t)$ diferenciable respecto a t , $\frac{1}{f^2(t)} = \frac{h(a, t)}{f^2(a)}$ es diferenciable. $\square$

Todos estos resultados muestran que, si en M queremos dar un tensor métrico que de lugar a un espacio-tiempo que represente correctamente nuestro Universo a gran escala, de acuerdo con la [Proposición 5.0.5](#), este tiene que dotar a M de estructura de producto warped. Es más, podemos elegir S de manera que tenga curvatura constante igual a $-1, 0$ o 1 , de acuerdo con la proposición previa.

Esto nos permite concluir que los espacio-tiempos que permiten dar una descripción a gran escala del Universo han de definirse de la siguiente forma:

Definición 6.5.6. Sea S una variedad Riemanniana conexa de curvatura constante $k \in \{-1, 0, 1\}$. Sea $f > 0$ una función diferenciable en un abierto convexo $I \subset \mathbb{R}_1^1$. Se denomina *espacio-tiempo de Robertson-Walker* al producto warped:

$$M(k, f) = I \times_f S.$$

En $M(k, f)$ se considera la orientación temporal dada por $U \in \mathfrak{X}(M(k, f))$, el levantamiento de $\frac{d}{dt} \in \mathfrak{X}(I)$, el cual se denomina campo vectorial de flujo. Además, se dice que I es maximal si f no se puede extender a una función diferenciable en un intervalo estrictamente mayor que I .

Como veremos más adelante, la denominación de U como campo vectorial de flujo es compatible con la definición de este concepto dada para flujos perfectos.

Establecemos ahora la nomenclatura relativa al espacio, S , en estos espacio-tiempos. Este es un modelo de cada una de las subvariedades $S(t)$, $t \in I$. Cabe mencionar que, dado que como es una variedad Riemanniana de dimensión 3 de curvatura constante, los modelos estándar para S son (abiertos de) H^3 , el espacio hiperbólico de 3 dimensiones, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$.

Definición 6.5.7. Sea $M(k, f)$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker. Con la notación de la definición anterior, se dice que S es el *espacio* de $M(k, f)$ y se denota a su tensor métrico por $(\cdot, \cdot)$, a su conexión de Levi-Civita, ∇ , y al conjunto de los levantamientos de campos de vectores de S a $M(k, f)$, $\mathcal{L}(S)$.

El estudio de la conexión y la curvatura en los espacio-tiempos Robertson-Walker, necesario para poder estudiar sus dinámicas, es una consecuencia inmediata de las propiedades generales de los productos warped, como muestran los resultados siguientes.

Corolario 6.5.8. Con las notaciones anteriores, sean $X, Y \in \mathcal{L}(S)$. Entonces:

1. $D_U U = 0$.
2. $D_U X = D_X U = \frac{f'}{f} X$.
3. $\text{norm} D_X Y = \mathbf{II}(X, Y) = \langle X, Y \rangle \frac{f'}{f} U$.
4. $\tan D_X Y$ es el levantamiento de $\nabla_X Y$ de S a $M(k, f)$.

Como siempre en los productos warped $\mathbf{II}$ es el tensor de forma para las fibras, en este caso $S(t)$, $t \in I$.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 5.0.10 a este caso concreto con $F = S$ y $B = I$.

Como $U \in \mathcal{L}(I)$, entonces $D_U U$ en M es el levantamiento de $D_U U$ en I . Como $I \subset \mathbb{R}_1^1$ y U es uno de sus vectores coordenados, sabemos que es paralelo, lo que demuestra 1.

2. y 4. son aplicación directa de los respectivos apartados de dicho teorema. Para 3. basta con notar que, como f solo depende de t , para todo $X \in \mathcal{L}(S)$

$$\langle \text{grad}(f), X \rangle = X(f) = 0, \quad \langle \text{grad}(f), U \rangle = U(f) = f',$$

de donde se deduce, por ser el tensor métrico no degenerado y U unitario de tipo temporal, que $\text{grad}(f) = -f'U$. $\square$

Corolario 6.5.9. Para cada $p \in S$, γ_p es una geodésica de $M(k, f)$.

Demostración. Basta aplicar el apartado 1. del corolario previo, puesto que $\gamma_p'(t) = U(t, p)$. $\square$

Corolario 6.5.10. Con las notaciones anteriores, sean $X, Y, Z \in \mathcal{L}(S)$. Entonces:

1. $R_{XY}Z = \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \left(\frac{k}{f} \right)^2 \right) (\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X)$.
2. $R_{XU}U = \frac{f''}{f} X$.
3. $R_{XY}U = 0$.
4. $R_{XU}Y = -\frac{f''}{f} \langle X, Y \rangle U$.



Figura 8: Fotografías de Howard P. Robertson y Arthur G. Walker. Fuente: AIP Niels Bohr Archives and Library [9] & Hitchin Nigel J. *Arthur Geoffrey Walker*. [7]

Demostración. Basta aplicar los resultados del [Teorema 5.2.4](#). Para ello, hemos de tener en cuenta lo siguiente:

1. Como la fibra S es de curvatura constante k , sabemos que $R_{XY}^S Z = k((Z, X)Y - (Y, Z)X) = \frac{k}{f^2} \langle Z, X \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X$ (ignorando la diferencial de la inclusión), por el [Corolario 4.4.14](#).
2. Hemos de notar que $H^f(U, U) = f''$, por lo desarrollado en el [Ejemplo 4.3.18](#).
3. Se deduce inmediatamente del punto 3. de dicho teorema.
4. Basta notar que $D_U(\text{grad}(f)) = D_U(-f'U) = -f''U$.

□

Corolario 6.5.11. Sea $M(k, f)$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker con campo vectorial de flujo, U .

1. La curvatura de Ricci está dada por:

$$\begin{aligned} Ric(U, U) &= -3\frac{f''}{f}, & Ric(U, X) &= 0, \\ Ric(X, Y) &= \left(2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + 2\frac{k}{f^2 + \frac{f''}{f}} \right) \langle X, Y \rangle, & \text{para todos } X, Y \perp U. \end{aligned}$$

2. La curvatura escalar es:

$$S = 6 \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right).$$

Demostración. Basta aplicar los resultados del [Corolario 5.2.5](#) para los resultados sobre el tensor de Ricci. Para ello hemos de notar lo siguiente:

- A partir de la definición del laplaciano, $\Delta f = -f''$.
- Usando (4.14), deducimos que, al ser S de curvatura constante

$$Ric^S(x, x) = (3 - 1)k(x, x) = 2k(x, x), \quad \text{para todo } x \in TS,$$

con lo que polarizando, $Ric(x, y) = 2k(x, y)$ para todos x, y vectores tangentes a S . Así pues, levantando dicha igualdad:

$$Ric^S(X, Y) = 2\frac{k}{f^2} \langle X, Y \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathcal{L}(S)$.

- Como I es de curvatura 0, $Ric^I(U, U) = 0$.

Para los resultados sobre la curvatura escalar, basta aplicar el [Corolario 5.2.6](#), teniendo en cuenta que la curvatura escalar de I es 0, al serlo su curvatura y que, a partir de la curvatura de Ricci, se obtiene que la curvatura escalar de S es $6k$. □

Veamos ahora que para todo espacio-tiempo de Robertson-Walker, U da lugar a un fluido perfecto, por lo que son modelos físicamente realista.

Teorema 6.5.12. Si U es el campo vectorial de flujo en un espacio-tiempo de Robertson-Walker, $M(k, f)$, entonces (U, ρ, μ) es un fluido perfecto, siendo:

$$\frac{8\pi\rho}{3} = \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}, \quad -8\pi\mu = 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}.$$

Demostración. Por la ecuación de Einstein, se tiene que $T = \frac{1}{8\pi}(Ric - \frac{1}{2}Sg)$. Por tanto, como para cada $X \in \mathcal{L}(S)$, $Ric(U, X) = 0$ y $U \perp X$, de acuerdo con un corolario previo, entonces $T(U, X) = 0$. Por otro lado si $X, Y \in \mathcal{L}(S)$:

$$\begin{aligned} 8\pi T(X, Y) &= Ric(X, Y) - \frac{1}{2}S \langle X, Y \rangle = \left(2 \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + 2 \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right) \langle X, Y \rangle - 3 \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right) \langle X, Y \rangle = \\ &= \left(- \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - \frac{k}{f^2} - 2 \frac{f''}{f} \right) \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el [Lema 6.4.2](#), se tiene la expresión para μ .

Finalmente, calculando ρ , usando de nuevo dicho lema:

$$8\pi\rho = 8\pi T(U, U) = Ric(U, U) + \frac{1}{2}S = \frac{-2f''}{f} + 3 \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right) = 3 \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right).$$

Reordenando se obtiene la expresión del enunciado. $\square$

En particular, nótese que la densidad y la presión son funciones que solo dependen de t , lo que muestra que con estos modelos se consigue recuperar efectivamente la isotropía del espacio.

Las expresiones explícitas de ρ y μ nos permiten además obtener una relación entre la densidad y la presión del modelo, a través de la warping function:

Corolario 6.5.13. Sea (U, ρ, μ) el fluido perfecto asociado a un espacio-tiempo de Robertson-Walker $M(k, f)$. Entonces:

$$3 \frac{f''}{f} = -4\pi(\rho + 3\mu).$$

Demostración. Basta sustituir en la expresión de $-8\pi\mu$ hallada en el resultado previo, los últimos dos sumandos por $8\pi\rho/3$ y reordenar. $\square$

También podemos obtener la ecuación energética para este modelo, lo que nos dice cómo evoluciona la energía, mediante una EDO. Nótese que, como $D_U U = 0$ al ser I de curvatura nula y además, como μ solo depende de t , $grad_{\perp} \mu = 0$, entonces la ecuación de fuerzas no aporta información.

Corolario 6.5.14. Sea (U, ρ, μ) el fluido perfecto asociado a un espacio-tiempo de Robertson-Walker $M(k, f)$. Entonces:

$$\rho' = -3(\rho + \mu) \frac{f'}{f}.$$

Demostración. Notemos en primer lugar que, por definición, $\rho' = U\rho$. Además, considerando una referencia local ortogonal con primer campo de vectores $E_0 = U$, podemos hallar la divergencia de U usando (4.9):

$$\operatorname{div}(U) = -\langle D_U U, U \rangle + \sum_{m=1}^3 \langle D_{E_m} U, E_m \rangle.$$

Usando el [Corolario 6.5.8](#), se concluye que cada sumando es f'/f . Basta utilizar la [Proposición 6.4.3](#) para concluir. $\square$

Los modelos Robertson-Walker dan lugar a varias predicciones importantes sobre el comportamiento del Universo a gran escala, de las cuales presentamos una selección a continuación. En lo que sigue, asumiremos que $M(k, f) = I \times_f S$ es un espacio-tiempo de Robertson-Walker dado, con I maximal, asociado al fluido perfecto (U, ρ, μ) .

La primera de ellas es que puede dar cuenta de la expansión del Universo, es decir, de la observación experimental de que los cúmulos de galaxias se alejan todos entre sí. Este hecho fue primeramente descubierto por Hubble y, por ello, la siguiente constante lleva su nombre:

Definición 6.5.15. Se denomina *constante de Hubble* a la función $H_0 \in I$ dada por:

$$H_0 = \frac{f'}{f}.$$

Teorema 6.5.16. Si existe $t_0 \in I$ tal que $H_0(t_0) > 0$ y además $\rho + 3\mu > 0$, entonces I tiene un punto inicial t_* con $T_0 - H_0(t_0)^{-1} < t_* < t_0$ y, o bien $f' > 0$ siempre, o bien f tiene un máximo tras t_0 e I es un intervalo finito, (t_*, t^*) .

Demostración. De acuerdo con el Corolario 6.5.13, como $\rho + 3\mu > 0$, entonces $f'' < 0$. Por tanto, f es estrictamente cóncava. Por tanto, todo el grafo de f (salvo en t_0), está por debajo del grafo de la recta tangente a f en t_0 , que tiene por ecuación, teniendo en cuenta la definición de H_0 :

$$F(t) = f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0).$$

Como el grafo de esta recta corta al eje $F = 0$ en $t = t_0 - H_0^{-1}$ y $H_0 > 0$, entonces f tiene que tener una singularidad antes de ese tiempo, pues $f > 0$. Es decir, ha de haber un punto a partir del cual f no se pueda extender con diferenciabilidad (o siendo positiva) para instantes anteriores, el cual será su punto inicial.

Además, como $f'' < 0$, o bien f' es siempre positiva (en t_0 lo es, por ser $H_0 > 0$) o bien f alcanza un máximo tras el cual $f' < 0$. En este último caso, para cierto instante t_1 en que $f'(t_1) < 0$, un argumento como el inicial muestra que ha de haber una singular en un instante $t^* > t_1 > t_0$. $\square$

Este resultado en particular muestra que las ideas que se tenían a principio de siglo de que el Universo era estático son incorrectas, pues las medidas actuales de H_0 muestran que esta es positiva. Además, dan lugar a la predicción de un inicio del Universo, el Big Bang. Además, a partir de las medidas de H_0 se puede estimar la edad del Universo, de acuerdo con este modelo.

La segunda predicción relevante de estos modelos que estudiaremos es el desplazamiento al rojo de las partículas luminosas. Es decir, que la luz procedente de galaxias distantes, al llegar a la Tierra, posee una longitud de onda mayor de la esperada, “más roja”.

Para hacer este estudio, consideraremos curvas $\alpha : J \rightarrow M(k, f)$, con J un convexo abierto de $\mathbb{R}$. Podemos escribir para cada $s \in J$, $\alpha(s) = (t(s), \beta(s))$, siendo t el tiempo propio de las galaxias, es decir, la proyección canónica en I . Esto da lugar a que haya dos tipos de derivadas temporales distintas de funciones $h \in \mathcal{F}(J)$ al considerar estas curvas, las derivadas respecto al parámetro s de la curva, que denotaremos $\alpha' h = h'$; y las derivadas respecto al tiempo propio de las galaxias, que denotaremos $h_t = U h$.

Haciendo uso de esta notación, gracias a los resultados generales sobre las curvas geodésicas en los productos warped, se deduce que:

Corolario 6.5.17. Una curva $\alpha = (t, \beta)$ en $M(k, f)$ es una geodésica si y solo si:

1. $\frac{d^2 t}{ds^2} + (\beta', \beta') f(t) f_t(t) = 0$.
2. $\beta'' + 2 \frac{f_t(t)}{f(t)} \frac{dt}{ds} \beta' = 0$.

Demostración. Comencemos notando que se tiene que $\text{grad}(f) = -f_t U$ con la nueva notación. Además, usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{ds}(f(t(s))) = f_t(t) \frac{dt}{ds}.$$

Usando el Teorema 5.1.1, teniendo en cuenta que, lo que en ese teorema se llamaba α , ahora lo denominamos t y $t'' = \frac{d^2 t}{ds^2} U$, se concluye el resultado de forma inmediata. $\square$

Corolario 6.5.18. Si $\alpha = (t, \beta)$ es una geodésica luminosa en $M(k, f)$, entonces la función $f(t) \frac{dt}{ds}$ es constante.

Demostración. Teniendo en cuenta que el vector velocidad de α es $\alpha' = \frac{dt}{ds}U + \beta'$, por ser luminoso:

$$0 = \langle \alpha', \alpha' \rangle = - \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + (\beta', \beta') f^2.$$

Multiplicando por f la condición 1. del corolario anterior y sustituyendo:

$$0 = f \frac{d^2 t}{ds^2} + f_t \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{d}{ds} \left(f(t) \frac{dt}{ds} \right),$$

de donde se concluye, por ser I conexo. $\square$

Definimos que es el concepto de corrimiento al rojo, que nos permite entender cómo varía la longitud de onda de la luz (esencialmente su color) recibida de galaxias lejanas, respecto a aquella con que se emitió.

Definición 6.5.19. Sea λ_p la longitud de onda con que se emite una partícula de luz y sea λ_o la longitud de onda con que se observa. Se define el *corrimiento al rojo* de dicha partícula como:

$$z = \frac{\lambda_p - \lambda_o}{\lambda_p}.$$

En física, la energía de una partícula de luz está determinada unívocamente por su longitud de onda, de acuerdo con la relación de Planck (en unidades geométricas)

$$E = \frac{h}{\lambda},$$

siendo h la constante de Planck. Así pues, a partir del concepto de observador instantáneo en la galaxia origen y en la galaxia final, se llega a la siguiente conclusión:

Teorema 6.5.20. En el espacio-tiempo de Robertson-Walker $M(k, f)$, una partícula de luz emitida en un tiempo t_p desde la galaxia $p \in S$ y recibida en $\gamma_o(t_o)$ tiene un corrimiento al rojo dado por:

$$z = \frac{f(t_o)}{f(t_p)} - 1.$$

Demostración. A partir de la definición del campo vectorial energía-momento para la partícula de luz considerada, α , se tiene que:

$$\alpha' = \frac{dt}{ds}U + \beta'.$$

Un observador galáctico en el instante s ve a la partícula con una energía $\frac{h}{\lambda(s)} = E(s) = \frac{dt}{ds}(s)$. Por el corolario anterior, se tiene que $\frac{f(t(s))}{\lambda(s)}$ es una constante a lo largo de α , por ser una geodésica luminosa. Sustituyendo en la definición de z que $\lambda(s) = Cf(t(s))$, se tiene el resultado. $\square$

7. Conclusiones

Tras realizar un estudio detallado de la geometría semi-Riemanniana hemos comprobado cómo la posible existencia de vectores luminosos complica la demostración de algunos resultados. No obstante, la mayor parte de ellos siguen siendo válidos en este marco, más general que el de la geometría Riemanniana.

Por medio del estudio detallado de los productos warped y su posterior aplicación al estudio de la Relatividad General, hemos podido comprobar la utilidad del tensor de curvatura, así como de sus contracciones: el tensor de Ricci y la curvatura escalar. Algunos resultados como el [Teorema 4.4.15](#) nos muestran la utilidad de poder describir el tensor de curvatura de forma alternativa mediante la curvatura seccional.

La caracterización de los mismos a partir de su relación con la fibra y la base nos ha permitido concluir que este tipo de variedades son las adecuadas para describir un universo isótropo. Hemos comprobado cómo los modelos de Robertson-Walker permiten predecir la existencia del Big-Bang, así como explicar el corrimiento al rojo cosmológico detectado experimentalmente.

Además, se han calculado los principales objetos geométricos definidos a lo largo del trabajo (símbolos de Christoffel, geodésicas, tensor de curvatura,...) para los espacios prototípicos de las variedades semi-Riemannianas: los espacios semieuclicídeos, comprobando que su comportamiento es similar al del espacio euclídeo.

Referencias

- [1] W. Ballmann. *Basic Differential Geometry: Semi-riemannian metrics*. Lectures on Differential Geometry. 2003. URL: <https://people.mpim-bonn.mpg.de/hwbllmnn/notes.html>.
- [2] R.L. Bishop y B. O'Neil. "Manifolds of Negative Curvature". En: *Transactions of the American Mathematical Society* **145** (1969), págs. 1-49. DOI: [10.2307/1995057](https://doi.org/10.2307/1995057).
- [3] C. J.S. Clarke. "On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds". En: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **314.1518** (1970), págs. 417-428.
- [4] J.M. Gamboa y J.M.R. Sancho. *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables: 6ª Edición*. Editorial Sanz y Torres, S.L., 2023. ISBN: 9788419433947.
- [5] J.A.P. González. *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Textos Universitarios. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2010. ISBN: 9788400091552.
- [6] J. R. Goodstein. *Einstein's Italian Mathematicians : Ricci, Levi-Civita, and the Birth of General Relativity*. American Mathematical Society, 2018. ISBN: 9781470428464.
- [7] N. J. Hitchin. "Arthur Geoffrey Walker. 17 July 1909 — 31 March 2001". En: *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **52** (2006), págs. 413-421. DOI: [10.1098/rsbm.2006.0028](https://doi.org/10.1098/rsbm.2006.0028).
- [8] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou y A.N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. General Relativity: An Introduction for Physicists. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 9780521829519.
- [9] "Howard P. Robertson". En: *Physics Today* **14.11** (nov. de 1961), págs. 90-90. ISSN: 0031-9228. DOI: [10.1063/1.3057266](https://doi.org/10.1063/1.3057266).
- [10] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Foundations of Differential Geometry vol.1. Interscience Publishers, 1963. ISBN: 9780470496480.
- [11] J.M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019. ISBN: 9783319917542.
- [12] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9780387954486.
- [13] M. de León y P.R. Rodrigues. *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*. North-Holland Mathematics Studies. North Holland, 2011. ISBN: 9780080872698.
- [14] L.M. Merino y E. Santos. *Álgebra lineal con métodos elementales*. Ediciones Paraninfo, S.A, 2006. ISBN: 9788497324816.
- [15] F. Morgan. *Riemannian Geometry: A Beginners Guide, Second Edition*. Taylor & Francis, 2009. ISBN: 9781568814711.
- [16] J. Nash. "The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds". En: *Annals of Mathematics* **63.1** (1956), págs. 20-63. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1969989>.
- [17] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1983. ISBN: 9780080570570.
- [18] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1983. ISBN: 9780387908946.

