



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Introducción a la Acústica Submarina

Autor: Arturo Cano Moraleda

Tutores: Luis M. Abia Llera, Paula M. López Pérez

Curso: 2024-2025

Índice general

1. Abstract / Resumen	5
1.1. Inglés	5
1.2. Español	6
2. Conceptos previos	7
2.1. Biología marina. Acústica de cetáceos	7
2.1.1. Conceptos básicos de acústica	7
2.1.2. Cetáceos y ecolocalización	8
2.2. Espacios de funciones	10
2.3. Ecuación de Helmholtz	13
2.4. Método de elementos finitos	16
2.4.1. Descripción del método	16
2.4.2. Error del método	16
3. Problema unidimensional Dirichlet	19
3.1. Problema modelo	19
3.2. Formulación variacional y problema débil	19
3.3. Problema discreto	22
3.4. Resultados numéricos	26
3.4.1. Planteamiento de las matrices	26
3.4.2. Resultados generales	29
3.4.3. Ejemplo real: ecolocalización de un cetáceo	30
4. Problema unidimensional Dirichlet-Robin	37
4.1. Problema modelo	37
4.2. Formulación variacional y problema débil	37
4.3. Problema discreto	40
4.4. Resultados numéricos	42
4.4.1. Resultados generales	43
4.4.2. Ejemplo real: ecolocalización de un cetáceo	44
5. Problema bidimensional	51
5.1. Problema modelo	51
5.2. Formulación variacional y problema débil	51

5.3. Discretización	52
5.4. Resultados numéricos	54
6. Conclusiones	57

Capítulo 1

Abstract / Resumen

1.1. Inglés

Applied Mathematics is responsible, among other things, for modelling, studying and solving problems in Physics and Engineering. In particular, it allows the study of phenomena related to marine biology, such as the study of the echolocation ability of some marine mammals. To do this, problems are modelled by a Partial Differential Equation (PDE) to which appropriate boundary conditions are added.

In this End of Degree Project, we will study the Finite Element Method (FEM), a numerical method that allows us to solve acoustic problems with an approximate solution by solving a linear system. The equation that models the propagation of acoustic waves is the Helmholtz equation.

The first two problems we will solve will be unidimensional situations. The first one will include Dirichlet-type boundary conditions (impenetrable object conditions), while the second one will have a Dirichlet and a Robin condition (non-reflection condition or artificial boundary that makes the problem look more like a two-dimensional one).

For both problems, in the first place, we will solve the different linear systems spanned from using different sound frequencies and meshes of a real interval. This will serve us to analyse the evolution of the error with these two variables. After that, we will choose a frequency used by a cetacean to perform its echolocation ability and try to see what happens when we apply the FEM to a problem with realistic data. The discretisation inherent in the finite element method will be carried out using the Lagrange $\mathbb{P}_1$ standard functions.

The last problem will be two-dimensional and we will use the Matlab PDEtool to solve it. For simplicity reasons, this problem will have a Neumann-type boundary condition. The chosen frequency will be that of the real exam-

ple used in the one-dimensional problems. The solution will provide us an approximate 3D graphic of the shape of the wave.

1.2. Español

La Matemática Aplicada se ocupa, entre otras cosas, de modelar, estudiar y resolver problemas de la Física y de la Ingeniería. En particular, permite estudiar fenómenos relacionados con la Biología Marina, como el estudio de la habilidad de ecolocalización que poseen algunos cetáceos. Para ello, se plantean problemas modelados por una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) a la que se le añaden unas condiciones de contorno adecuadas.

En este Trabajo de Fin de Grado, estudiaremos el Método de Elementos Finitos (FEM, por sus siglas en inglés), un método numérico que nos permite hallar una solución aproximada para un problema de Acústica resolviendo un sistema lineal. La ecuación que modela la propagación de ondas acústicas es la ecuación de Helmholtz, cuya expresión se deducirá en este trabajo.

Los dos primeros problemas que resolveremos serán situaciones unidimensionales. El primero de ellos incluirá condiciones de contorno de tipo Dirichlet (condiciones de objetos impenetrables), mientras que el segundo tendrá una condición Dirichlet y otra de tipo Robin (condición de no reflexión o frontera artificial que hace al problema asemejarse más a uno en dos dimensiones).

Para ambos, en primer lugar, resolveremos los diferentes sistemas lineales generados al utilizar diferentes frecuencias de sonido y particiones de un intervalo real. Esto nos servirá para analizar la evolución del error con estas dos variables. Después, elegiremos una frecuencia usada por un cetáceo para ejercer su capacidad de ecolocalización y trataremos de ver qué sucede al aplicar el método de elementos finitos a un problema con datos realistas. La discretización inherente al método de elementos finitos será llevada a cabo mediante las funciones Lagrange $\mathbb{P}_1$ standard.

El último problema será bidimensional y usaremos la PDEtool de Matlab para resolverlo. Por simplicidad, este problema llevará una condición frontera de tipo Neumann. La frecuencia escogida será la del ejemplo real usado en los problemas unidimensionales. La solución nos proporcionará una gráfica tridimensional aproximada de la forma de la onda.

Capítulo 2

Conceptos previos

2.1. Biología marina. Acústica de cetáceos

2.1.1. Conceptos básicos de acústica

La acústica es la rama de la Física centrada en el estudio de las ondas sonoras. Una de las magnitudes analizadas en este campo es la frecuencia, representada por f , que se define como el número de ciclos completos (vibraciones) que realiza la onda en una unidad de tiempo. En el Sistema Internacional, la frecuencia se mide en hercios (Hz), que equivalen al inverso de los segundos ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$).

Sensorialmente, podemos identificar la frecuencia con lo grave o agudo que percibimos un sonido, lo que en música suele denominarse altura del sonido. Así pues, los sonidos de mayor frecuencia serán más agudos y, los de menor frecuencia, más graves.

Otro parámetro relevante en acústica es el número de onda, representado por k , que indica el número de vibraciones que realiza la onda en una unidad de longitud. Se mide, en el Sistema Internacional, en m^{-1} . El número de onda se relaciona con la frecuencia a través de la siguiente expresión:

$$k = \frac{2\pi f}{c}, \quad (2.1)$$

donde c es la velocidad del sonido en el medio a través del que se transmite la onda.

En el océano, el valor de la velocidad del sonido no es igual en todos los puntos del mismo. Este depende de variables como la temperatura del agua, la salinidad y la presión, dependiendo todas ellas de la profundidad (por ejemplo, la presión aumenta 1 atm por cada 10 m que aumenta la profundidad).

Aunque es común emplear el valor $c = 1500 \text{ m/s}$, existen fórmulas empíricas que permiten determinar la velocidad del sonido con mayor grado de

precisión en función de la temperatura del agua, la salinidad y la presión. La utilizada por la UNESCO es la fórmula de Chen y Millero, cuya expresión es:

$$c(S, T, p) = c_w(T, p) + A(T, P)S + B(T, P)S^{3/2} + D(T, P)S^2, \quad (2.2)$$

donde los coeficientes c_w , A , B y D tienen, a su vez, sus propios desarrollos en función de los coeficientes tabulados en [12].

2.1.2. Cetáceos y ecolocalización

Dentro de la Biología, el término cetáceo se usa para el orden de mamíferos compuesto por todas las especies de ballenas y delfines, animales conocidos por vivir en el agua. Este orden, a su vez, se subdivide en odontocetos (con dientes, como los delfines y los cachalotes) y misticetos (con barbas, como las grandes ballenas).

La acústica tiene un papel muy importante en la vida de todos estos animales, ya que el sonido viaja a gran velocidad en el agua y la visibilidad subacuática está limitada. La especie más estudiada en este campo es el delfín mular (*tursiops truncatus*), con la se demostró experimentalmente que la zona más sensible al sonido en cetáceos se encuentra en su mandíbula inferior. El hecho que motiva estos experimentos es que los cetáceos carecen de pabellones auditivos como consecuencia de su adaptación a la vida acuática [15].

Respecto a la emisión y transmisión del sonido, la distinción entre odontocetos y misticetos es clave, ya que únicamente los miembros del primero de estos dos subórdenes posee en su cabeza una zona denominada melón, la cual está rellena de una sustancia grasa llamada espermaceti que, como se verá más adelante, juega un papel fundamental de cara al fenómeno de la ecolocalización.

La **ecolocalización** se define como el proceso en el que un organismo proyecta señales acústicas y obtiene información sobre su entorno procedente del eco recibido. En un sentido general del término, cualquier animal que pueda oír tendría una cierta capacidad ecolocalizadora. No obstante, un criterio más restrictivo del término otorgaría esta habilidad únicamente a aquellas especies que, mediante la recepción de ondas sonoras, pueden determinar la presencia de objetos de un tamaño notablemente menor al de ellos mismos, así como reconocerlos, localizarlos en el espacio tridimensional y distinguir entre diferentes objetos.

Bajo este sentido más exclusivo del término "ecolocalización", tan solo los cetáceos odontocetos poseen esta capacidad. Su sistema de ecolocalización puede dividirse en tres subsistemas:

- Subsistema de transmisión: engloba los mecanismos para la producción de ondas sonoras, propagación acústica desde la cabeza del delfín hasta el agua y las características de las señales en los alrededores del animal.
- Subsistema de recepción: se encarga de la escucha y recepción de señales acústicas.
- Subsistema de procesamiento/decisión: tiene que ver con el procesamiento de la información acústica por parte de los sistemas nerviosos central y periférico.

Más concretamente, es en el subsistema de transmisión en el que el melón de espermaceti resulta ser una pieza clave del fenómeno de ecolocalización, ya que las señales acústicas de este proceso se generan en el sistema nasal y se canalizan hacia el agua mediante el melón, lo que causa que solo los odontocetos posean esta capacidad.

Especie	Rango de frecuencias (Hz)	Observaciones
Delfin mular (<i>Tursiops truncatus</i>)	110 – 130	Mediciones realizadas en mar abierto
Delfin mular (<i>Tursiops truncatus</i>)	30 – 60	Mediciones realizadas en un tanque
Beluga (<i>Delphinapterus leucas</i>)	40 – 60	Mediciones realizadas en San Diego
Beluga (<i>Delphinapterus leucas</i>)	100 – 120	Mediciones realizadas en Kanehoe Bay
Falsa orca (<i>Pseudorca crassidens</i>)	20 – 60	Mediciones realizadas en un tanque
Falsa orca (<i>Pseudorca crassidens</i>)	100 – 110	Mediciones realizadas en mar abierto
Cachalote (<i>Physeter macrocephalus</i>)	15 – 25	

Cuadro 2.1: Frecuencias de emisión de odontocetos

Las frecuencias de emisión de las ondas acústicas emitidas por los odontocetos dependen de la especie que se esté estudiando. La tabla 2.1 muestra diferentes ejemplos de especies de ballenas dentadas junto a sus rangos de frecuencias de emisión [15].

Calcular la velocidad del sonido para las diferentes especies de la tabla (2.1) (y, por consiguiente, el número de onda) resulta algo más laborioso ya que, como se ha comentado en 2.2.1, esta depende de otras variables que están relacionadas, a su vez, con la profundidad. Aunque es cierto que, como

mamíferos que son, todas las especies mencionadas deben alcanzar en algún momento la superficie del agua para respirar, las profundidades hasta las que son capaces de bajar para localizar a sus presas pueden ser muy distintas entre unas especies y otras. Por ejemplo, un cachalote puede descender hasta los 1000 o 2000 m de profundidad para cazar calamares gigantes, mientras que un delfín mular acostumbra a permanecer en un rango de entre 10 y 50 m de profundidad.

2.2. Espacios de funciones

Antes de proceder con el estudio de los problemas de acústica, es necesario revisar algunos conceptos y resultados sobre los espacios de funciones en los que se trabajará, los cuales serán importantes tanto para una mejor comprensión de los problemas como para demostrar algunos de los resultados que se enunciarán en los capítulos posteriores.

Proposición. Dados dos espacios de Hilbert separables V y H tales que $V \subset H$ con inclusión continua y densa, se tendrá que el dual de esta inyección canónica será una aplicación continua e inyectiva de H' en V' . Por lo tanto, si se identifica H con su espacio dual (teorema de Riesz), se podrá considerar V como un subespacio de su dual V' :

$$V \rightarrow H \equiv H' \rightarrow V'.$$

Demostración. Ver [3]. □

Teorema (de Lax-Milgram). Sean V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, $L \in V'$ y $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ una forma bilineal continua, es decir, que verifica que:

$$\exists M > 0 : \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

Si, además, se cumple que

$$\exists \alpha > 0 : \quad \operatorname{Re}[a(v, \bar{v})] \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad v \in V, \quad (2.3)$$

entonces el problema:

$$\begin{cases} \text{Buscar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

tiene solución única.

Demostración. Ver [3], [6], [2]. □

Definición. Sea Ω un dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$. Se define el espacio $L^2(\Omega)$ como el espacio de las funciones medibles en el sentido de Lebesgue y de cuadrado integrable, es decir,

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ / Lebesgue-medibles y con } \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty \right\}.$$

En el espacio $L^2(\Omega)$, se denotará el producto escalar de dos funciones f y g mediante:

$$\langle f, g \rangle_{0,\Omega} := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

y la norma de una función $f \in L^2(\Omega)$ como:

$$\|f\|_{0,\Omega} := \left(\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \overline{f(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición. Sean Ω un dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$ y $m \in \mathbb{N}$. Se define el espacio de Sobolev de orden m $H^m(\Omega)$ como:

$$H^m(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) / \partial^{\alpha} v \in L^2(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2 \text{ y } \alpha_1 + \alpha_2 \leq m \right\},$$

donde las derivadas,

$$\partial^{\alpha} v := \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} v}{\partial^{\alpha_1} x \partial^{\alpha_2} y},$$

se interpretan en el sentido de las distribuciones.

Los espacios de Sobolev adquieren la estructura de espacio de Hilbert cuando se les dota del siguiente producto escalar:

$$\langle u, v \rangle_{m,\Omega} := \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} \langle \partial^{\alpha} u, \partial^{\alpha} v \rangle_{0,\Omega}.$$

Por otro lado, la norma de un elemento de un espacio de Sobolev vendrá dada por:

$$\|u\|_{m,\Omega} := \left(\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En este trabajo se empleará repetidamente el espacio de Sobolev de orden uno $H^1(\Omega)$, definido por:

$$H^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\},$$

donde el producto escalar y la norma vendrán dados, respectivamente, por:

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} := \langle u, v \rangle_{0,\Omega} + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{0,\Omega} + \left\langle \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_{0,\Omega},$$

$$\|u\|_{1,\Omega} := \sqrt{\|u\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{1,\Omega}^2},$$

siendo $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ la norma en el espacio $L^2(\Omega)$ (se utilizará esta notación de aquí en adelante) y $|u|_{1,\Omega}$ la seminorma en $H^1(\Omega)$ definida mediante:

$$|u|_{1,\Omega}^2 := \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{0,\Omega}^2.$$

Observación. Si I es un intervalo abierto de la recta real y $m \in \mathbb{N}$, la definición de espacio de Sobolev es trasladable al caso unidimensional:

$$H^m(I) := \left\{ v \in L^2(I) / \frac{d^j v}{dx^j} \in L^2(I), \forall j = 1, \dots, m \right\},$$

siendo el correspondiente producto escalar también análogo al caso bidimensional. En particular, para las funciones de $H^1(I)$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema. Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado, entonces el espacio $H^1(I)$ se inyecta de manera continua en $C^0(\bar{I})$, es decir, existe $C > 0$ tal que:

$$\max\{|v(x)| / x \in \bar{I}\} \leq C \|v\|_{1,I}, \quad \forall v \in H^1(I).$$

Demostración. Ver [3] □

Esta propiedad no es cierta en dimensión dos, lo que nos impide hablar de la restricción de una función $v \in H^1(\Omega)$ a la frontera $\partial\Omega$ de Ω . Sin embargo, la densidad del espacio $C^\infty(\bar{\Omega})$ de las funciones indefinidamente derivables en $\bar{\Omega}$ nos permite extender por continuidad la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\bar{\Omega}) & \rightarrow & L^2(\partial\Omega) \\ v & \mapsto & v|_{\partial\Omega} \end{array}$$

a todo $H^1(\Omega)$ dando lugar así a un operador $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ llamado aplicación traza y que representa (en un sentido amplio) el operador restricción a $\partial\Omega$ en $H^1(\Omega)$ (ver [3]).

En los espacios de Sobolev en general, y en $H^1(\Omega)$ en particular, es habitual definir los operadores de tipo traza para extender una función a la frontera de su dominio de definición según el siguiente teorema:

Teorema. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera Lipschitz continua. Entonces, existe un operador traza lineal y continuo:

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto u|_{\partial\Omega} \end{aligned} .$$

Además, la continuidad de γ implica que existe $C > 0$ tal que

$$\|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demostración. Ver [2], [3] y [7]. □

Además, la propiedad sobre la densidad anteriormente definida hace que la segunda fórmula de Green, aplicada sobre espacios de Sobolev, sea válida: si $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$, entonces se cumplirá que

$$-\int_{\Omega} \Delta u \, v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \gamma(\nabla u) \cdot \mathbf{n} \gamma v \, d\sigma,$$

siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a la superficie Lipschitz-continua $\partial\Omega$.

La siguiente desigualdad será importante en diversas pruebas en capítulos posteriores:

Proposición (desigualdad de Poincaré). Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$.

Entonces, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C|u|_{0,\Omega}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demostración. Ver [5]. □

Definición. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, se define el espacio $H_0^1(\Omega)$ como:

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) / v(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega\}.$$

2.3. Ecuación de Helmholtz

En esta sección se deducirá la ecuación de Helmholtz.

Sean $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$ y $S(\mathbf{x}, t)$ la velocidad, presión, densidad y entropía, respectivamente, de un fluido. Las leyes de comportamiento que rigen el movimiento de dicho fluido son la ecuación de conservación de la masa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

y la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0,$$

donde $\lambda(\mathbf{x})$ un coeficiente de amortiguación que se anula fuera de una zona acotada. Estas dos ecuaciones se completan con la hipótesis adiabática,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0,$$

y la ley de estado $p = f(\rho, S)$, donde f es una función que depende de las propiedades del fluido. En resumen, hemos planteado el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S &= 0, \\ p &= f(\rho, S). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por definición, una onda acústica es una oscilación de pequeña amplitud del fluido en torno a un estado estacionario. Nos interesará, entonces, encontrar una configuración en la que el movimiento del fluido resulte de una pequeña perturbación de un estado en el que S , ρ y p sean constantes y la velocidad sea nula. Bajo estas condiciones, supondremos que las variables tienen la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \xi \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) + O(\xi^2), \\ p(\mathbf{x}, t) &= p_0 + \xi p_1(\mathbf{x}, t) + O(\xi^2), \\ \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0 + \xi \rho_1(\mathbf{x}, t) + O(\xi^2), \\ S(\mathbf{x}, t) &= S_0 + \xi S_1(\mathbf{x}, t) + O(\xi^2), \end{aligned}$$

donde $\xi > 0$ es un parámetro introducido. Si sustituimos las expresiones anteriores en el sistema (2.4) y despreciamos los términos cuadráticos en ξ , obtendremos el siguiente sistema:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \lambda \mathbf{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \rho_1 + \frac{\partial f}{\partial S}(\rho_0, S_0) S_1 = p_1, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

De (2.8), deducimos que S_1 es independiente del tiempo. Además, derivando la ecuación (2.7) respecto del tiempo y teniendo en cuenta (2.8), tendremos que

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, \quad (2.9)$$

siendo $c_0 = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)}$ la velocidad del sonido.

Por otra parte, derivando (2.9) y (2.5) respecto del tiempo y combinando ambas con (2.6), obtendremos que

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c_0^2 [\lambda \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \Delta p_1]. \quad (2.10)$$

Combinando ahora (2.5) con (2.9), resulta que

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -c_0^2 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1.$$

Finalmente, sustituyendo esta última ecuación en (2.10), veremos que la presión p_1 satisface la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial p_1}{\partial t} = c_0^2 \Delta p_1. \quad (2.11)$$

Si ahora suponemos que p_1 tiene un comportamiento armónico en el tiempo con una frecuencia $\omega > 0$ y una amplitud compleja $u(\mathbf{x})$, es decir, que $p_1(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$, deduciremos que (2.10) verificará que

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 \left(1 + i \frac{\lambda(\mathbf{x})}{\omega} \right) u(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.12)$$

siendo $k = \frac{\omega}{c_0}$ el número de onda (en este trabajo, k siempre será el número de onda). En el caso de que $\lambda(\mathbf{x})$ se anule, la ecuación (2.12) recibirá el nombre de **ecuación de Helmholtz**.

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (2.13)$$

2.4. Método de elementos finitos

En este capítulo se expondrán algunas nociones básicas sobre el método numérico que se empleará en la resolución de los problemas planteados en secciones posteriores.

2.4.1. Descripción del método

El método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) es un método numérico que permite aproximar la solución de un problema modelado mediante una EDP, como la ecuación de Helmholtz, que pertenecerá de manera natural a un espacio de dimensión infinita, como $H^1(\Omega)$, por una solución perteneciente a un espacio de dimensión finita, lo que permitirá hallar una solución estimada mediante la resolución de un sistema lineal de ecuaciones, facilitando su implementación.

Dado un dominio acotado Ω de la recta o el plano real, el método de elementos finitos se aplicará sobre un problema compuesto por una ecuación en derivadas parciales, que en el caso de este trabajo de fin de grado será la ecuación de Helmholtz, y un conjunto de condiciones de contorno sobre la frontera del dominio, lo que se conoce como formulación fuerte del problema.

Para poder aproximar la solución, será necesario, en primer lugar, ayudarse del cálculo variacional para llegar a la formulación débil del problema, definiendo para ello los espacios adecuados de manera que se tengan en cuenta las condiciones de contorno.

Una vez hallada la formulación débil, se buscará un espacio de funciones de dimensión finita, que deberá verificar las mismas restricciones que existían en el problema débil. Al tener dimensión finita, tendrá una base, de modo que la solución numérica se escribirá como la combinación lineal de los elementos de la base. La formulación de la matriz de coeficientes del sistema, así como del vector de términos independientes, vendrá dada en cada caso por la formulación débil del problema.

Para llevar a cabo estas tareas de discretización, será necesario realizar una partición del dominio Ω (también conocida como mallado, especialmente en los casos bidimensionales) que tendrá por diámetro el parámetro h , el cual dependerá del tamaño de la malla.

2.4.2. Error del método

Definición. Sean u una solución exacta de un problema y u_h una solución aproximada del problema que ha sido obtenida por un método numérico. Se definirá el error relativo de la aproximación como:

$$e_{rel} = \frac{\|u - u_h\|}{\|u\|},$$

donde $\|\cdot\|$ representa alguna norma en la que se pueden medir tanto u como u_h .

Para realizar un primer acercamiento al estudio del error del método de elementos finitos, el siguiente lema cobra una gran relevancia:

Lema (de Céa). Sean V un espacio de Hilbert y $V_h \subset V$ un subespacio de dimensión finita. Si $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma bilineal continua y V -elíptica, $L : V \rightarrow \mathbb{C}$ es un operador lineal acotado y se consideran los problemas

$$\begin{cases} \text{Buscar } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \text{Buscar } u_h \in V_h \text{ tal que:} \\ a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_h, \end{cases}$$

entonces para las soluciones u y u_h de dichos problemas se verificará que:

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|, \quad \forall v \in H,$$

donde M es la constante de continuidad y α la de V -elipticidad (ver teorema de Lax-Milgram).

Demostración. Sea $e := u - u_h$. Dado $v_h \in X_h$ arbitrario, como $a(u, v_h) = L(v_h) = a(u_h, v_h)$, se tendrá que $a(e, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h$. Esto implica que e es ortogonal a X_h en el sentido de a , es decir, que $a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h$.

Bajo las hipótesis del enunciado, se sigue que:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) = a(u - u_h, u - v) \\ &\leq M \|u - u_h\|, \quad \forall v \in X_h. \end{aligned}$$

Utilizando la ortogonalidad antes deducida, se llega directamente a que:

$$a(u, v) = L(v) = a(u_h, v), \quad \forall v \in V_h.$$

□

El lema anterior implica que u_h es la mejor aproximación de u en el subespacio X_h , lo que hace que la desigualdad del lema se pueda reescribir como

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|.$$

Teorema. Sean $V \subset H^1(\Omega)$ el subespacio de $H^1(\Omega)$ establecido para un problema débil del que se ha buscado una solución aproximada a través del método de elementos finitos y $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ la misma forma bilineal del lema de Céa. Entonces, la constante de inf-sup

$$\beta = \inf_{0 \neq u \in V} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|a(u, v)|}{|u|_{1, \Omega} |v|_{1, \Omega}}$$

satisface que

$$\frac{C_1}{k} \leq \beta \leq \frac{C_2}{k},$$

para constantes C_1 y C_2 que no dependen de k .

Demostración. Ver [8]. □

Observación. La constante β del teorema anterior recibe el nombre de constante de inf-sup o constante de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi.

En la práctica, las aplicaciones a y L vendrán dadas por la formulación débil del problema, por lo que en última instancia dependerán de la ecuación (2.13), del término fuente introducido y de las condiciones de contorno.

Para valores de k y h lo suficientemente bajos, es decir, a frecuencias bajas y para una partición del dominio lo suficientemente fina, se tendrá que M y γ no dependen de k , por lo que el error cometido en las aproximaciones quedará acotado, de manera aproximada, de la siguiente forma:

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq kh + O((kh)^2),$$

lo que indica que el error varía linealmente con k . Esta situación es conocida como caso asintótico.

Conforme k va aumentando su valor, la cota de error asintótica deja de ser válida, ya que aparecen otros términos de orden superior que ganan relevancia, lo que se conoce como error de polución:

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq C_1 kh + C_2 k^3 h^2.$$

Para tratar de mantener el error controlado incluso para valores de k elevados, es habitual construir las mallas del dominio de manera que se verifique que $hk \ll 1$, lo que se conoce como *rule of the thumb*. No obstante, esta condición no es necesariamente suficiente para controlar el error cometido en la aproximación [9].

Capítulo 3

Problema con condiciones de contorno de tipo Dirichlet

3.1. Problema modelo

Sean (a, b) un intervalo de $\mathbb{R}$, $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La ecuación de Helmholtz, deducida en el capítulo anterior, se adapta a una dimensión de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Buscar } u : (a, b) \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que:} \\ u'' + k^2 u = 0, \quad \text{si } x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

En la expresión anterior, las condiciones frontera que asignan los valores de la función incógnita en los extremos del intervalo reciben el nombre de condiciones de tipo Dirichlet. Estas condiciones son las más sencillas que pueden introducirse en un problema unidimensional y hacen referencia a la existencia de obstáculos impenetrables a ambos lados del intervalo.

La motivación para resolver este problema viene dada porque puede representar la propagación de una onda acústica generada en los labios fónicos a través del melón, siendo las condiciones de contorno los valores de la onda en los extremos del melón, es decir, en el lugar por el que entra la onda ($x = a$) y el lugar por el que sale redirigiéndose al agua ($x = b$).

3.2. Formulación variacional y problema débil

Para hallar la formulación variacional del problema, deberemos multiplicar la ecuación por una función test $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ lo suficientemente regular

e integral en todo el dominio:

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx = 0.$$

Haciendo uso de la fórmula de Green (que en el caso unidimensional se traduce en una integración por partes),

$$\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx = u'(b)v(b) - u'(a)v(a),$$

se obtendrá que

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a) - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx = 0.$$

Finalmente, si le exigimos a v que se anule en los extremos del intervalo, es decir, $v(a) = v(b) = 0$, obteniendo:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx = 0. \quad (3.2)$$

El **problema débil** se sigue de (3.2). Su expresión será la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{buscar } u \in H^1(a, b) \text{ tal que } u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta \text{ y} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(a, b). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Observación. En la expresión (3.3), $H_0^1([a, b])$ se define como:

$$H_0^1(a, b) := \{v \in H^1(a, b) / v(a) = 0, \text{ y } v(b) = 0\}.$$

Teorema. Existe una única solución para el problema descrito en (3.3).

Demostración. Sean $g \in H^1(0, 1)$ tal que $g(a) = \alpha$ y $g(b) = \beta$ y $\tilde{u} = u - g$. Entonces, se tendrá que $\tilde{u} \in H_0^1(0, 1)$. Bajo estas condiciones, la formulación variacional (3.2) quedará reescrita como:

$$\int_a^b (\tilde{u}'(x) + g'(x))v'(x)dx - k^2 \int_a^b (\tilde{u}(x) + g(x))v(x)dx = 0.$$

Reordenando los términos, la expresión anterior se reformula del siguiente modo:

$$\int_a^b \tilde{u}'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b \tilde{u}(x)v(x)dx = - \left(\int_a^b g'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b g(x)v(x)dx \right).$$

Probaremos que se cumplen todas las condiciones del teorema de Lax-Milgram. Para ello, en primer lugar identificaremos los términos del problema:

- $H_0^1(a, b)$ será el espacio vectorial V en el que trabajemos.
- $a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx$ será la forma bilineal.
- La forma lineal del miembro derecho será $L = - \left(\int_a^b g'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b g(x)v(x)dx \right)$.

Una vez identificados los términos, se deberán probar las siguientes propiedades:

- Continuidad de a : Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_a^b u'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b u'(x)v'(x)dx \right| \\ &\quad + k^2 \left| \int_a^b u(x)v(x)dx \right| \leq \|u'\|_{0,\Omega} \|v'\|_{0,\Omega} + k^2 \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq (\|u'\|_{0,\Omega} + k\|u\|_{0,\Omega})(\|v'\|_{0,\Omega} + k\|v\|_{0,\Omega}) \leq C\|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

siendo $C > 0$ una constante.

- Coercividad de a : Dado que $v \in H_0^1([a, b])$, la desigualdad de Poincaré garantiza que existe una constante $D > 0$ tal que $\|v\|_{0,\Omega} \leq D\|v'\|_{0,\Omega}$. Expandiendo la forma bilineal:

$$\begin{aligned} a(v, \bar{v}) &= \int_a^b v'(x)\overline{v'(x)}dx - k^2 \int_a^b v(x)\overline{v(x)}dx = \int_a^b |v'(x)|^2 dx - k^2 \int_a^b |v(x)|^2 dx \\ &= \|v'\|_{0,\Omega}^2 - k^2 \|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \|v'\|_{0,\Omega}^2 - k^2 C^2 \|v'\|_{0,\Omega}^2 = (1 - k^2 C^2) \|v'\|_{0,\Omega}^2 \geq \|u\|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a las relaciones entre normas descritas en [13].

- Continuidad de L : Análoga a la de a .

En virtud del teorema de Lax-Milgram, el problema

$$\begin{cases} \text{Buscar } \tilde{u} \in H_0^1(a, b) \text{ tal que :} \\ a(\tilde{u}, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(a, b) \end{cases}$$

tiene solución única.

□

Observación. Para demostrar la coercividad de a , es necesario que el valor de k sea pequeño.

3.3. Problema discreto

Para poder resolver numéricamente el problema mediante el uso de herramientas informáticas de cálculo como Matlab, realizaremos una partición del intervalo $[a, b]$ y aproximaremos de manera apropiada la función u por una que pueda ser calculada de manera más sencilla.

Sea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ una partición del intervalo $[a, b]$. Se considera también el espacio de funciones $X_h = \{v \in \mathcal{C}^0(a, b) / v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall j = 0, \dots, N-1\}$. Se elige discretizar el problema mediante las funciones base Lagrange $\mathbb{P}_1$ standard, φ_j , las cuales se definen como:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j], \forall j = 0, \dots, N-1 \\ -\frac{x - x_{j+1}}{x_{j+1} - x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \forall j = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} & x \in [x_{N-1}, b] \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 muestran las gráficas de las funciones φ_0 , φ_j (para $j = 1, \dots, N-1$) y φ_N , respectivamente. Puede probarse que las funciones Lagrange $\mathbb{P}_1$ standard forman una base del espacio X_h , es decir, $X_h = \langle \{\varphi_0, \dots, \varphi_N\} \rangle$.

Bajo estas condiciones, aproximaremos la solución del problema, u , por una función $u_h \in X_h$ que verificará, por tanto, que

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(x).$$

Interesa conocer los coeficientes u_j , $j = 0, 1, \dots, N$. Para ello, se sustituye la expresión anterior en (3.3), escogiendo como función test cada una de las funciones de la base de X_h descrita anteriormente, designando estas como φ_l , $l = 0, \dots, N-1$:

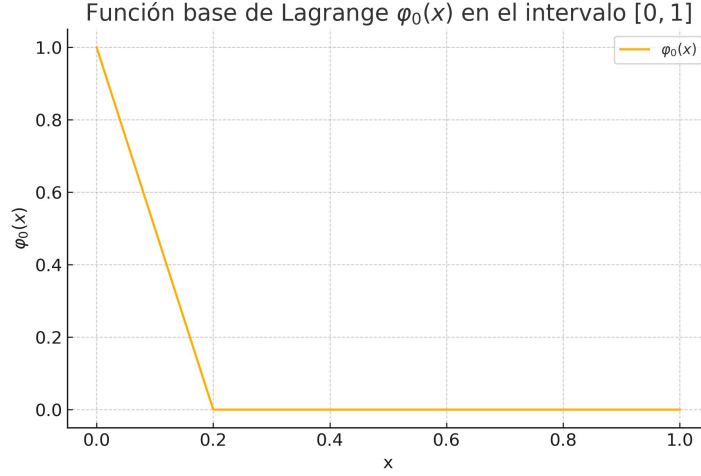


Figura 3.1: Función base de Lagrange $\mathbb{P}_1$ standard inicial en el intervalo $[0, 1]$ con $N = 5$ nodos.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_a^b \left(\sum_{j=0}^N u_j \varphi'_j(x) \right) \varphi'_l(x) dx - k^2 \int_a^b \left(\sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(x) \right) \varphi_l(x) dx = \\
 &= \sum_{j=0}^N u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_l(x) dx - k^2 \sum_{j=0}^N u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_l(x) dx, \quad \forall l = 0, \dots, N.
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior, para asegurarnos de que la solución aproximada verifique las condiciones frontera, estableceremos que $u_0 = \alpha$ y $u_N = \beta$, lo que implica que el subíndice l de la función base usada como función test no puede ser ni 0 ni N . Teniendo en cuenta esta información, la expresión discretizada se reescribe como:

$$\begin{aligned}
 &\alpha \int_a^b \varphi'_0(x) \varphi'_l(x) dx + \beta \int_a^b \varphi'_N(x) \varphi'_l(x) dx + \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_l(x) dx \\
 &- k^2 \left[\alpha \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_l(x) dx + \beta \int_a^b \varphi_N(x) \varphi_l(x) dx + \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_l(x) dx \right] = 0
 \end{aligned}$$

Observación: Dada la forma de las funciones base φ_j , los productos que aparecen dentro de las integrales solo tendrán un valor no nulo si los índices son consecutivos o iguales.

Teniendo en cuenta la observación anterior, las ecuaciones se pueden reescribir en función del valor de l , planteando el siguiente problema discreto:

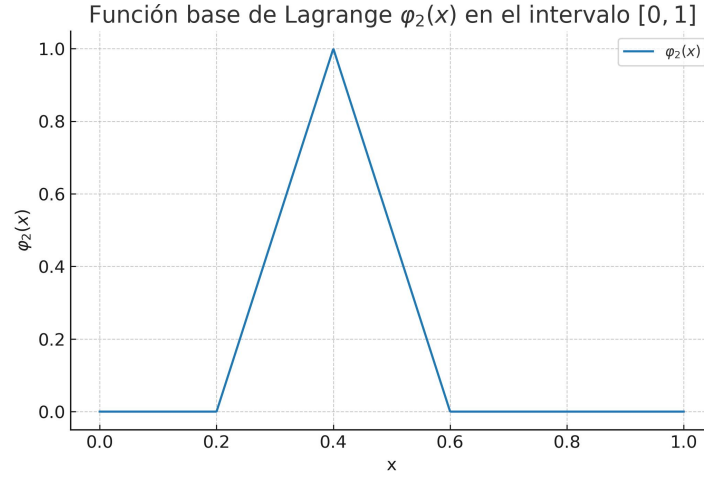


Figura 3.2: Función base de Lagrange $\mathbb{P}_1$ standard intermedia en el intervalo $[0, 1]$ con $N = 5$ nodos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Buscar } \{u_j : j = 1, \dots, N-1\} \text{ tal que:} \\ \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_1(x) dx - k^2 \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_1(x) dx = \\ \alpha \left[\int_a^b (k^2 \varphi_0(x) \varphi_1(x) - \varphi'_0(x) \varphi'_1(x)) dx \right] \\ \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_l(x) dx - k^2 \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_l(x) dx = 0, \quad \forall l = 2, \dots, N-2 \\ \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_{N-1}(x) dx - k^2 \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_{N-1}(x) dx = \\ \beta \left[\int_a^b (k^2 \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) - \varphi'_{N-1}(x) \varphi'_N(x)) dx \right] \end{array} \right. \quad (3.4)$$

La escritura de (3.4) se puede simplificar definiendo las matrices K , M y A como sigue:

$$K = \left(\int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_k(x) dx \right)_{1 \leq j, k \leq N-1} \quad (3.5)$$

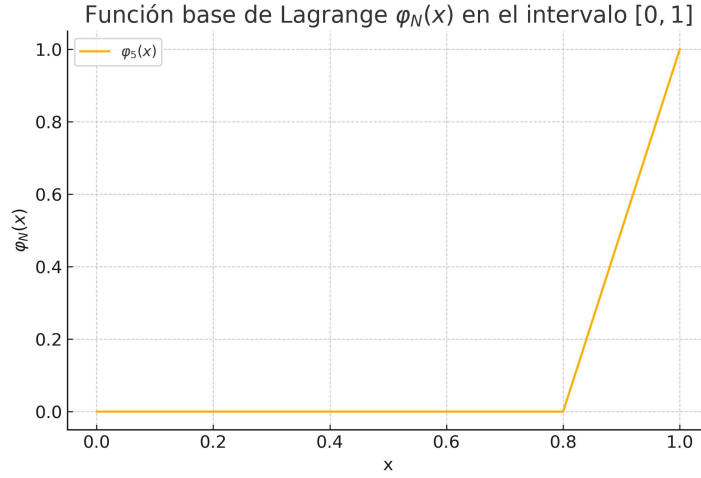


Figura 3.3: Función base de Lagrange $\mathbb{P}_1$ standard final en el intervalo $[0, 1]$ con $N = 5$ nodos.

$$M = \left(\int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx \right)_{1 \leq j, l \leq N-1} \quad (3.6)$$

$$A = K - k^2 M \quad (3.7)$$

Las matrices K y M anteriormente definidas reciben el nombre de matrices de rigidez y masa, respectivamente. Además, los términos independientes de (3.4) también se pueden escribir en un vector de la siguiente manera:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \left[\int_a^b (k^2 \varphi_0(x) \varphi_1(x) - \varphi'_0(x) \varphi'_1(x)) dx \right] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \left[\int_a^b (k^2 \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) - \varphi'_{N-1}(x) \varphi'_N(x)) dx \right] \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Haciendo uso de (3.7) y (3.8), el problema discreto queda reescrito de la forma:

$$\begin{cases} \text{Buscar } \mathbf{u}_h \text{ tal que:} \\ A\mathbf{u}_h = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (3.9)$$

siendo $\mathbf{u}_h = (\alpha, u_1, \dots, u_{N-1}, \beta)^\top$. De esta manera, el problema numérico queda reducido a resolver un sistema lineal de ecuaciones.

3.4. Resultados numéricos

Para el ejemplo de aplicación, supondremos que la partición del intervalo $[a, b]$ es uniforme, es decir, dado $h = \frac{b-a}{N}$, se tendrá que los nodos del subintervalo serán de la forma $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, N$. Nótese que, de esta forma, se mantiene que $x_0 = a$ y que $x_N = b$ y que $x_l - x_{l-1} = h \forall l = 1, \dots, N$.

3.4.1. Planteamiento de las matrices

Teniendo en cuenta las definiciones de las matrices de masa, M , y de rigidez, K , así como la del parámetro h , se tendrá que sus elementos se construirán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad M(j, j) &= \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_j(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x - x_{j-1}}{h} \right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1} - x}{h} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{(x - x_{j-1})^3}{3} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{(x_{j+1} - x)^3}{3} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{(x_j - x_{j-1})^3}{3} + \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3} \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3} \right] = \frac{2}{3}h, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad M(j, j+1) &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx \\
&= \int_{x_j}^{x_{j+1}} -\frac{x - x_{j+1}}{h} \cdot \frac{x - x_j}{h} dx \\
&= -\frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x^2 - (x_j + x_{j+1})x + x_j x_{j+1}) dx \\
&= -\frac{1}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - (x_j + x_{j+1}) \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} + x_j x_{j+1} (x_{j+1} - x_j) \right] \\
&= -\frac{1}{h^2} \left[\frac{x_{j+1}^3}{3} - \frac{x_j^3}{3} - (x_j + x_{j+1}) \left(\frac{x_{j+1}^2}{2} - \frac{x_j^2}{2} \right) + x_j x_{j+1} (x_{j+1} - x_j) \right] \\
&= -\frac{1}{h^2} \left[-\frac{1}{6} x_{j+1}^3 + \frac{1}{6} x_j^3 + \frac{1}{2} x_{j+1}^2 x_j - \frac{1}{2} x_{j+1} x_j^2 \right] \\
&= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{6} (x_j - x_{j+1})^3 \right) = \frac{1}{6} h, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad M(j-1, j) &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_{j-1}(x) \varphi_j(x) dx \\
&= \frac{1}{6} h, \quad \text{para todo } j = 2, \dots, N \quad (\text{por simetría}).
\end{aligned}$$

Para la matriz de rigidez K será necesario conocer la forma de las derivadas de las funciones base φ_j , que en el caso particular de este problema será:

$$\varphi'_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ -\frac{1}{h}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De manera similar a lo sucedido con las funciones originales, los únicos productos entre derivadas no nulos serán los de derivadas con subíndices consecutivos o iguales, lo que también originará una matriz tridiagonal.

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad K(j, j) &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \varphi'_j{}^2(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{h}{h^2} + \frac{h}{h^2} = \frac{2}{h}, \\
&\text{para todo } j = 1, \dots, N. \\
\blacksquare \quad K(j, j+1) &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi'_j(x) \varphi'_{j+1}(x) dx = -\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h^2} = -\frac{h}{h^2} = -\frac{1}{h}, \\
&\text{para todo } j = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

- $K(j-1, j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'_{j-1}(x) \varphi'_j(x) dx = \dots = -\frac{1}{h}$, para todo $j = 2, \dots, N$, por simetría con la diagonal secundaria superior.

En resumen, las matrices de masa y rigidez se escribirán de la siguiente manera:

$$M = \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$K = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Por otra parte, el vector de términos independientes $\mathbf{b}$ que aparecerá en el miembro derecho del sistema de ecuaciones será:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \left(k^2 \frac{h}{6} + \frac{1}{h} \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \left(k^2 \frac{h}{6} + \frac{1}{h} \right) \end{pmatrix}.$$

Observación: Dadas las deducciones realizadas en la sección 4.3 del trabajo, las matrices M , K y A , así como el vector $\mathbf{b}$, serán de tamaño $N - 1$, ya que las condiciones frontera ya fijan el primer y el último valor de $\mathbf{u}_h$.

Una vez se tienen las matrices de masa y rigidez, se escribe un código en Matlab para implementarlas junto al vector $\mathbf{b}$ para resolver el sistema.

El programa (o, mejor dicho, la función) que llevará a cabo estos cálculos será `helmholtz1d.m`. Dicho programa tomará los extremos del intervalo $[a, b]$, los parámetros de las condiciones frontera (α y β), el número de onda (k) y el número de nodos (N), resolverá el sistema propuesto y calculará los errores relativos en las normas infinito, $L^2(a, b)$ y $H^1(a, b)$.

3.4.2. Resultados generales

Una vez se tiene una función que resuelve el sistema lineal que plantea el método de elementos finitos, es preciso averiguar si el método es fiable al ir variando los parámetros introducidos. En particular, se han estudiado los errores obtenidos en las tres normas consideradas al aumentar tanto el número de onda como el número de nodos.

Para ello, se ha desarrollado un script en Matlab llamado `helmholtz1d_results.m`. Dicho código realiza diversas llamadas a la función `helmholtz1d.m` para un conjunto de números de onda y otro de cantidades de nodos y muestra los errores obtenidos en base a k y N en forma de tablas y gráficas.

En particular, las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 muestran los errores relativos en las normas L^2 , H^1 e infinito, respectivamente. En las tres tablas, la variable N estará registrada en las filas, mientras que la variable k , medida en m^{-1} lo estará en las columnas.

	$k = 5$	$k = 10$	$k = 25$	$k = 50$
$h = 0,1$	$2,9031 \cdot 10^{-2}$	1.2898	2.7269	0.95988
$h = 2 \cdot 10^{-2}$	$1,238 \cdot 10^{-3}$	$2,0962 \cdot 10^{-2}$	0.46494	1.1117
$h = 10^{-2}$	$3,1054 \cdot 10^{-4}$	$5,1552 \cdot 10^{-3}$	0.2314	0.47642
$h = 2 \cdot 10^{-3}$	$1,2445 \cdot 10^{-5}$	$2,0531 \cdot 10^{-4}$	$1,3597 \cdot 10^{-2}$	0.051415
$h = 10^{-3}$	$3,1118 \cdot 10^{-6}$	$5,1327 \cdot 10^{-5}$	$3,4503 \cdot 10^{-3}$	$1,3603 \cdot 10^{-2}$
$h = 2 \cdot 10^{-4}$	$1,2418 \cdot 10^{-7}$	$2,0532 \cdot 10^{-6}$	$1,3869 \cdot 10^{-4}$	$5,5452 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-4}$	$3,1647 \cdot 10^{-8}$	$5,1197 \cdot 10^{-7}$	$3,4679 \cdot 10^{-5}$	$1,3871 \cdot 10^{-4}$

Cuadro 3.1: Errores relativos en la norma L^2

Los resultados de las tablas se pueden visualizar gráficamente en las figuras de esta sección. En ellas, para cada una de las normas escogidas, se podrán observar los errores cometidos al aplicar el método de elementos finitos en función tanto del diámetro de la partición (figuras 3.4, 3.6 y 3.8), fijando k , como del número de onda (figuras 3.5, 3.7 y 3.9), fijando h .

Atendiendo tanto a las tablas como a las gráficas antes mencionadas, se observa que el error relativo, independientemente de la norma en la que

	$k = 5$	$k = 10$	$k = 25$	$k = 50$
$h = 0,1$	$2,7781 \cdot 10^{-2}$	1.1736	2.4483	1.0664
$h = 2 \cdot 10^{-2}$	$8,1713 \cdot 10^{-4}$	$1,6349 \cdot 10^{-2}$	0.45086	1.0619
$h = 10^{-2}$	$1,5902 \cdot 10^{-4}$	$3,4825 \cdot 10^{-3}$	0.21629	0.46932
$h = 2 \cdot 10^{-3}$	$3,1154 \cdot 10^{-6}$	$8,0132 \cdot 10^{-5}$	$1,0195 \cdot 10^{-2}$	0.047192
$h = 10^{-3}$	$5,5768 \cdot 10^{-7}$	$1,4799 \cdot 10^{-5}$	$2,1525 \cdot 10^{-3}$	$1,1559 \cdot 10^{-2}$
$h = 2 \cdot 10^{-4}$	$1,0053 \cdot 10^{-8}$	$2,7499 \cdot 10^{-7}$	$4,6509 \cdot 10^{-5}$	$3,2187 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-4}$	$1,8145 \cdot 10^{-9}$	$4,8728 \cdot 10^{-8}$	$8,4619 \cdot 10^{-6}$	$6,2368 \cdot 10^{-5}$

Cuadro 3.2: Errores relativos en la norma H^1

	$k = 5$	$k = 10$	$k = 25$	$k = 50$
$h = 0,1$	$3,7934 \cdot 10^{-2}$	1.8311	3.9505	1.185
$h = 2 \cdot 10^{-2}$	$1,6553 \cdot 10^{-3}$	$3,0017 \cdot 10^{-2}$	0.66588	1.7162
$h = 10^{-2}$	$4,1508 \cdot 10^{-4}$	$7,374 \cdot 10^{-3}$	0.32835	0.70943
$h = 2 \cdot 10^{-3}$	$1,6612 \cdot 10^{-5}$	$2,9343 \cdot 10^{-4}$	$1,9273 \cdot 10^{-2}$	0.073462
$h = 10^{-3}$	$4,1532 \cdot 10^{-6}$	$7,3347 \cdot 10^{-5}$	$4,8894 \cdot 10^{-3}$	$1,9429 \cdot 10^{-2}$
$h = 2 \cdot 10^{-4}$	$1,6576 \cdot 10^{-7}$	$2,9337 \cdot 10^{-6}$	$1,9652 \cdot 10^{-4}$	$7,9175 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-4}$	$4,2395 \cdot 10^{-8}$	$7,3159 \cdot 10^{-7}$	$4,9138 \cdot 10^{-5}$	$1,9805 \cdot 10^{-4}$

Cuadro 3.3: Errores relativos en la norma infinito

se calcule, aumenta con el número de onda y disminuye conforme crece el diámetro de la partición (y por tanto la cantidad de nodos).

Profundizando un poco más, aunque cabría esperar que la variación del error, al menos en la norma H^1 , fuera aproximadamente lineal con h , los datos parecen aproximarse más bien a una variación del error con h^2 . Esto se debe a que, al tratarse de un problema unidimensional en el que, además, se trabaja con una malla uniforme, el problema se asemeja a uno de diferencias finitas, lo que causa que el error decrezca más rápido de lo esperado con el tamaño de la partición (lo que se conoce como superconvergencia). El efecto de polución se hace patente conforme crece el valor de k , ya que el patrón lineal se estropea para valores altos del número de onda. Además, dado que el error aumenta con k , se deduce que el método de elementos finitos no es adecuado para frecuencias altas.

3.4.3. Ejemplo real: ecolocalización de un cetáceo

Tras el análisis de los errores cometidos al emplear el método de elementos finitos para la resolución del problema (3.1) en casos abstractos donde las frecuencias (o los números de onda) eran escogidos de manera arbitraria para mostrar una tendencia, se procede a analizar un caso (problema) con un valor de k real, es decir, que proviene de un fenómeno real.

Dado que los cálculos desarrollados a lo largo de las secciones anteriores

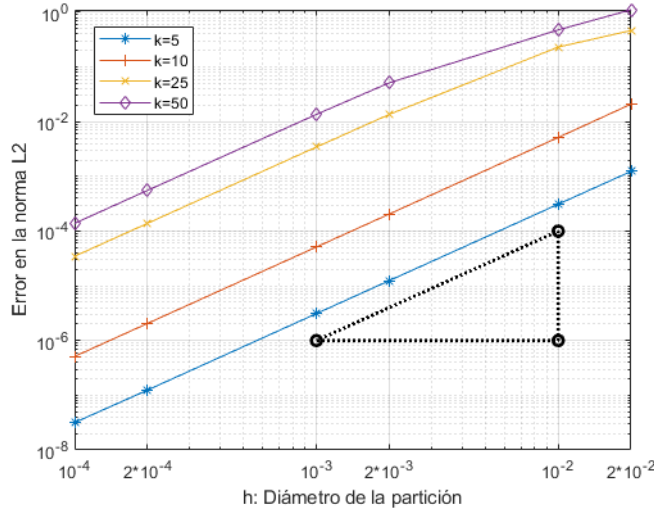
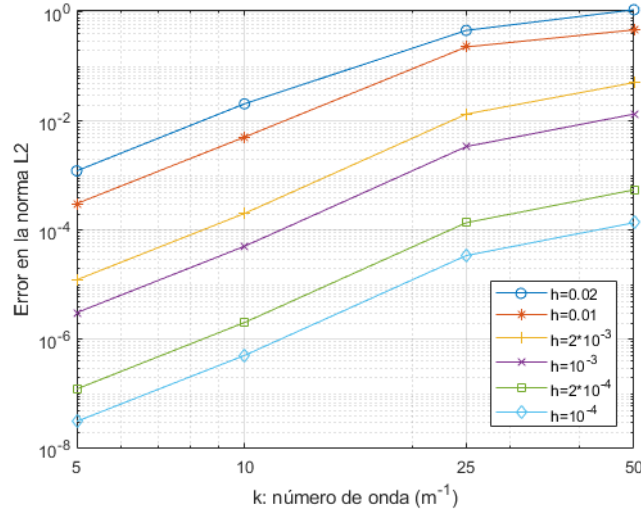


Figura 3.4: Error en la norma L^2 en función de h

permiten deducir que el método pierde efectividad (hasta volverse inútil) conforme aumenta el valor de k , y este parámetro es, a su vez, directamente proporcional a la frecuencia según la ecuación (2.1), se empleará como ejemplo de estudio las ondas acústicas emitidas por un cachalote (*Physeter macrocephalus*), ya que según la tabla 2.1, estas son las de menor frecuencia.

En dicha tabla, la mínima frecuencia de ecolocalización a la que emite un cachalote es de 15 kHz. Esta especie de cetáceo puede descender hasta profundidades de 1000 o 2000 metros para cazar calamares gigantes, su principal presa. Para una profundidad intermedia de 1500 m, la temperatura y salinidad promedio son de 2 °C y 35 PSU, respectivamente. Según la fórmula de Chen-Millero descrita en (2.2), para estos parámetros la velocidad del sonido sería de $c = 1699,55$ m/s. Entonces, sustituyendo la frecuencia y la velocidad del sonido en la expresión (2.1), se obtiene un número de onda $k = 55,45$ m $^{-1}$.

Una vez se tienen estos datos, se pretende, como en los casos generales, mostrar la evolución del error relativo con el número de nodos que conforman la partición del intervalo. Además, también se extraerá el condicionamiento de las matrices de los sistemas resueltos. Con esta información, se evaluará si el método de elementos finitos resulta adecuado para estudiar una versión simplificada, en una dimensión, del problema de la emisión de ondas acústicas de un cetáceo odontoceto, siendo este el primer paso del fenómeno de ecolocalización. El script de Matlab desarrollado para este propósito es `helmholtz1d_cachalote.m`.

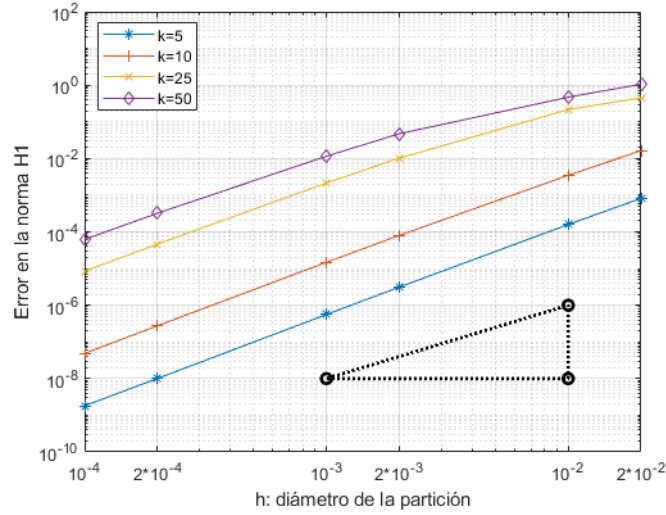
Figura 3.5: Error en la norma L^2 en función de k

h	Error norma L^2
10^{-4}	$4,8363 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$1,9342 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$4,8121 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$1,8971 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	0,39763
$2 \cdot 10^{-2}$	3,3037
0.1	0,96468

Cuadro 3.4: Errores en la norma L^2 (cachalote)

Las tablas 3.4, 3.5 y 3.5 recogen los errores que resultan de aplicar el método de elementos finitos al problema planteado en (3.1), variando el número de nodos y, por tanto, el tamaño de la partición, en las normas L^2 , H^1 e infinito, respectivamente. Las figuras 3.10, 3.11 y 3.12 ilustran los datos de las tablas.

Los comentarios realizados en la sección 5.4.2 sobre la evolución del error son aplicables también a esta situación (de hecho, el número de onda de partida, $k = 55,45 \text{ m}^{-1}$, es similar a uno de los valores que se empleó en los ejemplos generales de la sección anterior). Los efectos de polución son bastante notorios, lo que unido al hecho de que existan particiones de mallas con errores relativamente elevados lleva a que el método de elementos finitos no resulta especialmente preciso a la hora de estudiar el problema de acústica (3.1) aplicado a un cachalote.

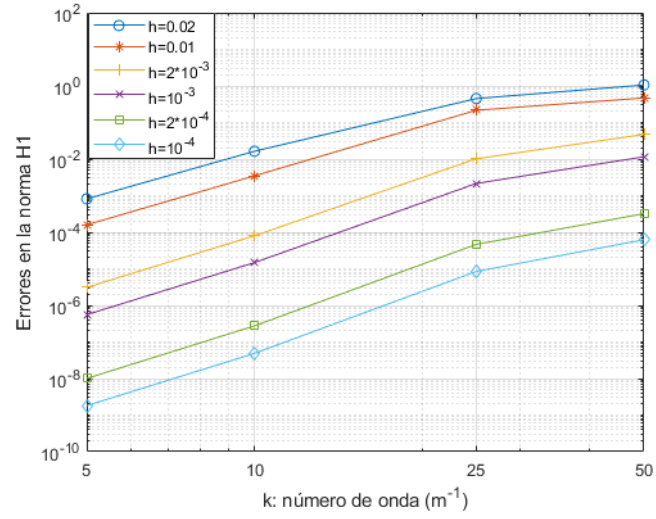
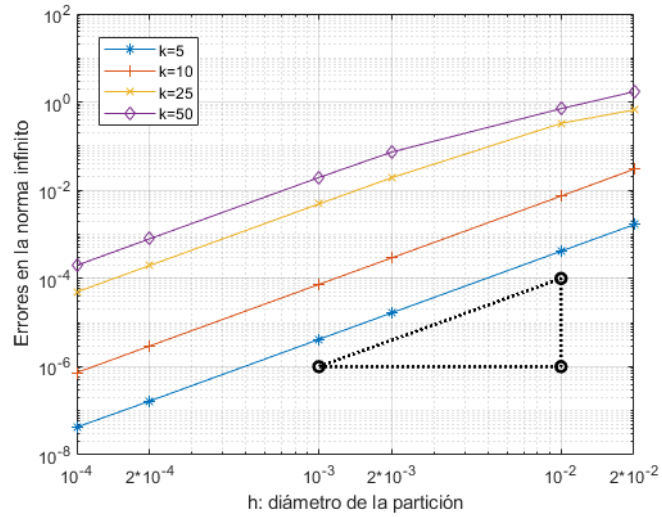
Figura 3.6: Error en la norma H^1 en función de h

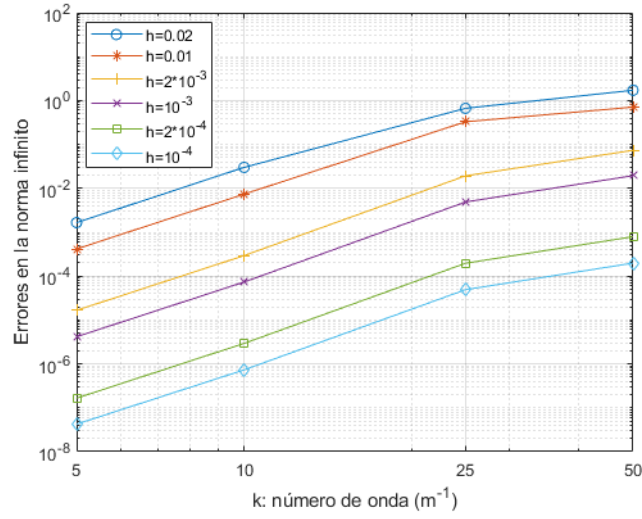
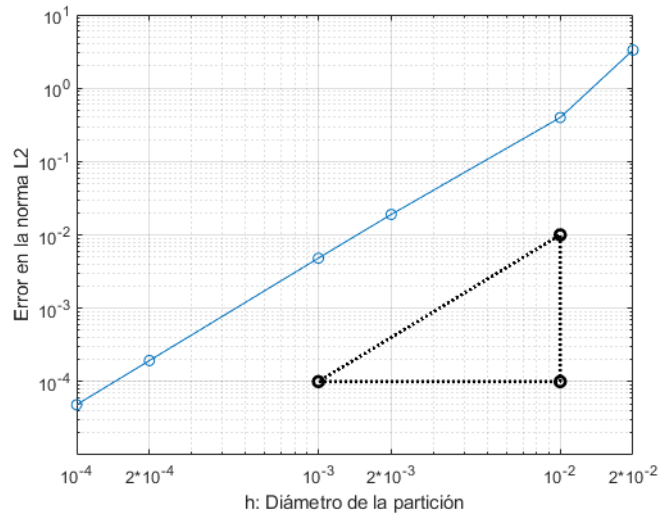
h	Error norma L^2
10^{-4}	$2,3696 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$1,2059 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$4,2229 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$1,7768 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	0,3872
$2 \cdot 10^{-2}$	3,1594
0.1	1,209

Cuadro 3.5: Errores en la norma H^1 (cachalote)

h	Error norma L^2
10^{-4}	$7,8001 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$3,1197 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$7,7685 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$3,0709 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	0,66665
$2 \cdot 10^{-2}$	4,8005
0.1	1,3052

Cuadro 3.6: Errores en la norma infinito (cachalote)

Figura 3.7: Error en la norma H^1 en función de k Figura 3.8: Error en la norma infinito en función de h

Figura 3.9: Error en la norma infinito en función de k Figura 3.10: Error en la norma L^2 (cachalote)

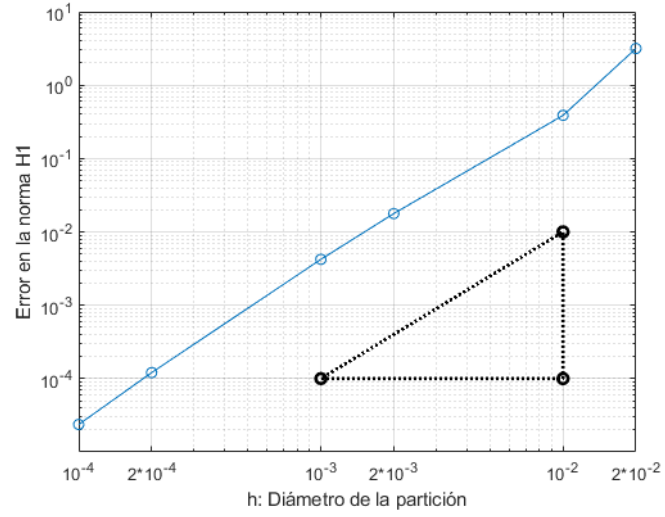
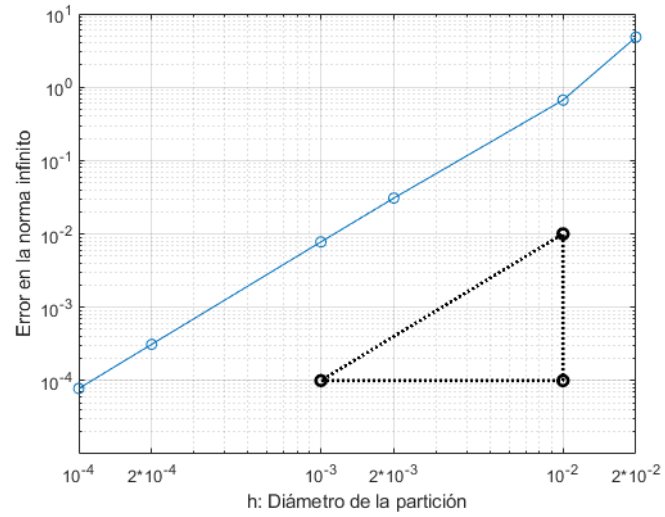
Figura 3.11: Error en la norma H^1 (cachalote)

Figura 3.12: Error en la norma infinito (cachalote)

Capítulo 4

Problema unidimensional con condiciones Dirichlet y Robin

4.1. Problema modelo

A diferencia de la sección anterior, en este capítulo se considerará un problema en una dimensión con una condición de contorno de tipo Dirichlet y otra de tipo Robin:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Buscar } u : (a, b) \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que:} \\ u'' + k^2 u = 0 \quad x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha, \quad ik \cdot u(b) + u'(b) = \delta. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.2. Formulación variacional y problema débil

De manera similar al capítulo cuatro, consideraremos una función test $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ lo suficientemente regular. Multiplicando por v la ecuación de (4.1) e integrando en el dominio, tenemos que:

$$\int_a^b u''(x)v(x)dx + k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx = 0.$$

Si integramos por partes el primer sumando de la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \int_a^b u''(x)v(x)dx &= u'(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v'(x)dx = u'(b)v(b) - u'(a)v(a) \\ &- \int_a^b u'(x)v'(x)dx = [\delta - ik \cdot u(b)]v(b) - u'(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v'(x)dx, \end{aligned}$$

y sustituimos en la primera expresión integral, llegaremos a:

$$\begin{aligned} \int_a^b u''(x)v(x)dx + k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx &= [\delta - ik \cdot u(b)]v(b) - u'(a)v(a) \\ &- \int_a^b u'(x)v'(x)dx + k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Si, como en el problema anterior, le exigimos a la función v que se anule en $x = a$ y reescribimos la expresión anterior, deduciremos que:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx + ik \cdot u(b)v(b) = \delta v(b).$$

De esta manera, la formulación débil del problema será la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Buscar } u \in H^1(a, b) \text{ tal que:} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b u(x)v(x)dx + ik \cdot u(b)v(b) = \delta v(b) \\ \forall v \in V, \quad v(a) = \alpha, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

siendo $V := \{v \in H^1(a, b) / v(a) = 0\}$.

Teorema. El problema (4.2) tiene una única solución.

Demostración. Sean $g \in H^1(a, b)$ tal que $g(a) = \alpha$ y $\tilde{u}$ tal que $\tilde{u} = u - g$. Resulta claro que $\tilde{u} \in V$. Sustituyendo este cambio de notación en (4.2),

$$\int_a^b (\tilde{u}'(x) + g'(x))v'(x)dx - k^2 \int_a^b (\tilde{u}(x) + g(x))v(x)dx + ik \cdot u(b)v(b) = \delta v(b),$$

y reordenando los sumandos, se llega a:

$$\begin{aligned} \int_a^b \tilde{u}'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b \tilde{u}(x)v(x)dx + ik \cdot \tilde{u}(b)v(b) = \\ \delta v(b) - \left(\int_a^b g'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b g(x)v(x)dx \right) - ik \cdot g(b)v(b). \end{aligned}$$

La demostración del teorema se basará en la aplicación del teorema de Lax-Milgram a la expresión anterior. Relacionando términos:

- V es el espacio de trabajo.
- $a(\tilde{u}, v) = \int_a^b \tilde{u}'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b \tilde{u}(x)v(x)dx + ik \cdot \tilde{u}(b)v(b)$ es la forma bilineal.
- $L(v) = \delta v(b) - \left(\int_a^b g'(x)v'(x)dx - k^2 \int_a^b g(x)v(x)dx \right) - ik \cdot g(b)v(b)$ será el funcional lineal.

Entonces, se deberán probar las siguientes propiedades:

- Continuidad de a : aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en las dos integrales y el teorema de la traza en el término $\delta v(b) - ik \cdot g(b)v(b)$, ya que $x = b$ pertenece a la frontera del $[a, b]$,

$$\begin{aligned} |a(\tilde{u}, v)| &\leq \|\tilde{u}'\|_{0,\Omega} \|v'\|_{0,\Omega} + k^2 \|\tilde{u}\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + |k| \cdot |\tilde{u}(b)| \cdot |v(b)| \\ &\leq M \|\tilde{u}\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

- Coercividad de a : Si

$$a(v, \bar{v}) = \int_a^b |v'|^2 dx - k^2 \int_a^b |v|^2 dx + ik |v(b)|^2,$$

entonces la parte real de $a(v, v)$ será:

$$\operatorname{Re}[a(v, v)] = \int_a^b |v'|^2 dx - k^2 \int_a^b |v|^2 dx.$$

Utilizando la desigualdad de Poincaré en V , existirá $C > 0$ tal que $\|\tilde{u}\|_{0,\Omega} \leq C \|\tilde{u}'\|_{0,\Omega}$. Por lo tanto:

$$\operatorname{Re}[a(v, v)] \geq (1 - k^2 C^2).$$

- Continuidad de L : Para probar que L es un operador continuo, se acotarán los cuatro términos que lo componen:

- $|\delta v(b)| \leq |\delta| \cdot |v(b)| \leq C_1 |\delta| \|v\|_{1,\Omega}.$
- $\left| \int_a^b g' v' \right| \leq \|g'\|_{0,\Omega} \|v'\|_{0,\Omega} \leq C_2 \|g\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$, donde la última desigualdad es debida a [13].
- $\left| \int_a^b g v \right| \leq \|g\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq C_3 \|g\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$, donde la última desigualdad es debida a [13].
- $|ik \cdot g(b)v(b)| \leq |k| \cdot |g(b)| \cdot |v(b)| \leq C_4 |k| \cdot \|g\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega}.$

Por el teorema de Lax-Milgram, existirá una única función $\tilde{u} \in V$ para el problema

$$\begin{cases} \text{Buscar } \tilde{u} \in H_0^1([a, b]) \text{ tal que :} \\ a(\tilde{u}, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(a, b), \end{cases}$$

lo que concluye la demostración de este teorema.

Observación. Para que se verifique la coercividad de a , será necesario que el valor de k sea pequeño.

Observación. Durante la demostración del teorema anterior, se ha cometido el abuso de notación de identificar a la norma en el espacio V con la del espacio $H^1([a, b])$. Recuérdese que V es un subespacio de $H^1([a, b])$. $\square$

4.3. Problema discreto

Para hallar el problema discreto, se trabajará con el mismo espacio de funciones que en el caso con dos condiciones Dirichlet y con el mismo tipo de partición del intervalo $[a, b]$. Así pues, si se escriben los dos miembros de (4.2) en base a las funciones base de X_h y se considera como función test a una función φ_l de la base de dicho espacio, se tendrá que:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\sum_{j=0}^N u_j \varphi_j'(x) \right] \varphi_l'(x) dx - k^2 \int_a^b \left[\sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(x) \right] \varphi_l(x) dx + ik \left[\sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(b) \right] \varphi_l(b) \\ &= \delta \varphi_l(b). \end{aligned}$$

Alternando los sumatorios con las integrales, nos queda que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^N u_j \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_l'(x) dx - k^2 \sum_{j=0}^N u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_l(x) dx + ik \left[\sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(b) \right] \varphi_l(b) = \\ &= \delta \varphi_l(b). \end{aligned}$$

Unificando todos los sumatorios,

$$\sum_{j=0}^N u_j \left[\int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_l'(x) dx - k^2 \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_l(x) dx + ik \cdot \varphi_j(b) \varphi_l(b) \right] = \delta \varphi_l(b).$$

En la ecuación anterior, y teniendo en cuenta cómo se definen las funciones base φ_j de acuerdo con el capítulo 4.3, se observa que el único valor de $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ para el que $\varphi_j(b)$ no se anula es $j = N$. Además, en estas condiciones se tendrá que $\varphi_N(b) = \frac{b - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Buscar } \{u_j : j = 1, \dots, N\} \text{ tal que} \\ \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_1(x) dx - k^2 \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_1(x) dx = \\ \\ = \alpha \left[\int_a^b (k^2 \varphi_0(x) \varphi_1(x) - \varphi'_0(x) \varphi'_1(x)) dx \right], \\ \\ \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_k(x) dx - k^2 \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad \forall k = 2, \dots, N-1 \\ \\ \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_N(x) dx - k^2 \sum_{j=1}^N u_j \int_a^b \varphi_N(x) \varphi_1(x) dx + ik \cdot \varphi_j(b) \varphi_l(b) = \delta. \end{array} \right.$$
$$B = (\varphi_j(b)\varphi_l(b))_{1 \leq j, l \leq N} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Por otra parte, los miembros derechos de (4.3) se pueden reescribir en un vector.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \left[\int_a^b (k^2 \varphi_0(x) \varphi_1(x) - \varphi_0'(x) \varphi_1'(x)) dx \right] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix}.$$

De esta manera, el problema discreto se podrá escribir de manera matricial como sigue:

$$\begin{cases} \text{Buscar } \mathbf{u}_h \text{ tal que:} \\ (A + ikB)\tilde{\mathbf{u}}_h = \mathbf{b}, \end{cases} \quad (4.5)$$

siendo $\tilde{\mathbf{u}}_h = (u_1, \dots, u_N)^\top$. El vector completo de coeficientes será:

$$\mathbf{u} = (\alpha, u_1, \dots, u_N).$$

4.4. Resultados numéricos

Al igual que en el problema con dos condiciones de tipo Dirichlet, consideraremos una partición uniforme del intervalo $[a, b]$, siendo h la longitud de los subintervalos. Esto permite reutilizar los cálculos desarrollados en la sección 4.4 en relación a la forma de las funciones base φ_j , $j = 0, 1, \dots, N$ y a las matrices de masa y rigidez. En particular, dado que $\varphi_N'(b) = \frac{1}{h}$, se tendrá que el vector $\mathbf{b}$ del problema matricial (4.5) será

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \left[\int_a^b (k^2 \varphi_0(x) \varphi_1(x) - \varphi_0'(x) \varphi_1'(x)) dx \right] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(k^2 \frac{h}{6} + \frac{1}{h} \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

De nuevo, estos desarrollos se implementarán en Matlab para resolver el sistema lineal. En este caso, la función desarrollada para este fin se llama `helmholtz1d_Robin.m`, recibirá argumentos análogos a los del problema anterior y mostrará también como argumentos de salida los errores relativos calculados para las normas infinito, $L^2(a, b)$ y $H^1(a, b)$.

4.4.1. Resultados generales

Una vez se tiene una función que resuelve el sistema lineal que plantea el método de elementos finitos, es preciso averiguar si el método es fiable al ir variando los parámetros introducidos. En particular, se han estudiado los errores obtenidos en las tres normas consideradas al aumentar tanto el número de onda como el número de nodos.

Para ello, se ha desarrollado un script en Matlab llamado `helmholtz1d_Robin_results.m`. Dicho código realiza diversas llamadas a la función `helmholtz1d.m` para un conjunto de números de onda y otro de cantidades de nodos y muestra los errores obtenidos en base a k y N en forma de tablas y gráficas.

En particular, las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 muestran los errores relativos en las normas L^2 , H^1 e infinito, respectivamente. En las tres tablas, la variable h estará registrada en las filas, mientras que la variable k (el número de onda) lo estará en las columnas.

	$k = 5$	$k = 10$	$k = 25$	$k = 50$
$h = 0,1$	$5,7589 \cdot 10^{-2}$	0.44928	3.1142	0.99324
$h = 2 \cdot 10^{-2}$	$2,3741 \cdot 10^{-3}$	$1,9203 \cdot 10^{-2}$	0.29406	1.8972
$h = 10^{-2}$	$5,941 \cdot 10^{-4}$	$4,8135 \cdot 10^{-3}$	$7,4834 \cdot 10^{-2}$	0.58128
$h = 2 \cdot 10^{-3}$	$2,3771 \cdot 10^{-5}$	$1,927 \cdot 10^{-4}$	$3,0082 \cdot 10^{-3}$	$2,4039 \cdot 10^{-2}$
$h = 10^{-3}$	$5,9428 \cdot 10^{-6}$	$4,8177 \cdot 10^{-5}$	$7,5216 \cdot 10^{-4}$	$6,0136 \cdot 10^{-3}$
$h = 2 \cdot 10^{-4}$	$2,3711 \cdot 10^{-7}$	$1,9271 \cdot 10^{-6}$	$3,0088 \cdot 10^{-5}$	$2,4059 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-4}$	$6,0365 \cdot 10^{-8}$	$4,8059 \cdot 10^{-7}$	$7,5221 \cdot 10^{-6}$	$6,0148 \cdot 10^{-5}$

Cuadro 4.1: Errores relativos en la norma L^2

Los resultados de las tablas se pueden visualizar gráficamente en las figuras de esta sección. En ellas, para cada una de las normas escogidas, se podrán observar los errores cometidos al aplicar el método de elementos finitos en función tanto del diámetro de la partición (figuras 4.1, 4.3 y 4.5), fijando k , como del número de onda (figuras 4.2, 4.4 y 4.6), fijando h .

En este caso, también se observa el mismo fenómeno de superconvergencia mencionado en el tratamiento de datos del problema con dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Resulta destacable el hecho de que el comportamiento resulta mucho más lineal que en el problema anterior, lo que permite deducir que el efecto de la polución es menor en este problema. Aun

	$k = 5$	$k = 10$	$k = 25$	$k = 50$
$h = 0,1$	$5,7764 \cdot 10^{-2}$	0.43074	2.6701	1.0877
$h = 2 \cdot 10^{-2}$	$2,4007 \cdot 10^{-3}$	$1,9146 \cdot 10^{-2}$	0.29126	1.8311
$h = 10^{-2}$	$6,0089 \cdot 10^{-4}$	$4,805 \cdot 10^{-3}$	$7,4621 \cdot 10^{-2}$	0.57604
$h = 2 \cdot 10^{-3}$	$2,4045 \cdot 10^{-5}$	$1,9244 \cdot 10^{-4}$	$3,0062 \cdot 10^{-3}$	$2,4027 \cdot 10^{-2}$
$h = 10^{-3}$	$6,0113 \cdot 10^{-6}$	$4,8113 \cdot 10^{-5}$	$7,517 \cdot 10^{-4}$	$6,0123 \cdot 10^{-3}$
$h = 2 \cdot 10^{-4}$	$2,3985 \cdot 10^{-7}$	$1,9245 \cdot 10^{-6}$	$3,007 \cdot 10^{-5}$	$2,4056 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-4}$	$6,1076 \cdot 10^{-8}$	$4,7994 \cdot 10^{-7}$	$7,5178 \cdot 10^{-6}$	$6,0141 \cdot 10^{-5}$

Cuadro 4.2: Errores relativos en la norma H^1

	k=5	k=10	k=25	k=50
$h = 0,1$	$8,6068 \cdot 10^{-2}$	0.64965	4.277	1.2308
$h = 2 \cdot 10^{-2}$	$3,5478 \cdot 10^{-3}$	$3,0592 \cdot 10^{-2}$	0.49179	3.0712
$h = 10^{-2}$	$8,8795 \cdot 10^{-4}$	$7,6906 \cdot 10^{-3}$	0.12532	0.9871
$h = 2 \cdot 10^{-3}$	$3,5537 \cdot 10^{-5}$	$3,0797 \cdot 10^{-4}$	$5,0458 \cdot 10^{-3}$	$4,095 \cdot 10^{-2}$
$h = 10^{-3}$	$8,8842 \cdot 10^{-6}$	$7,6996 \cdot 10^{-5}$	$1,2616 \cdot 10^{-3}$	$1,0251 \cdot 10^{-2}$
$h = 2 \cdot 10^{-4}$	$3,5451 \cdot 10^{-7}$	$3,0798 \cdot 10^{-6}$	$5,0468 \cdot 10^{-5}$	$4,1016 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-4}$	$9,0339 \cdot 10^{-8}$	$7,6815 \cdot 10^{-7}$	$1,2617 \cdot 10^{-5}$	$1,0254 \cdot 10^{-4}$

Cuadro 4.3: Errores relativos en la norma infinito

así, para valores elevados del número de onda, se obtienen valores del error altos si la malla no está lo suficientemente refinada.

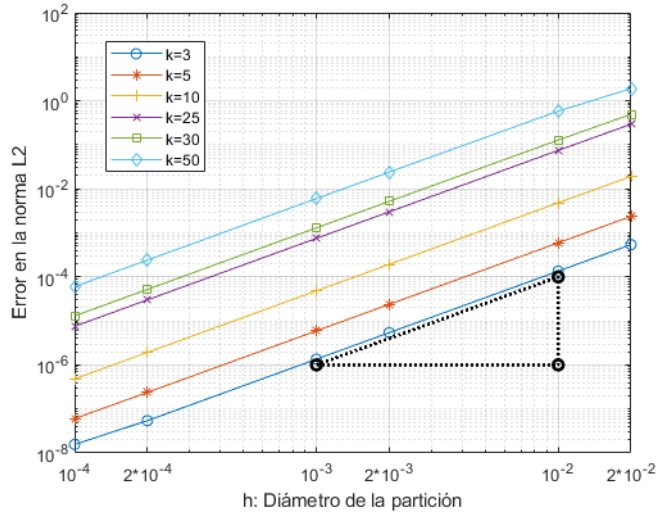
4.4.2. Ejemplo real: ecolocalización de un cetáceo

De manera similar al apartado 5.4.3, la intención aquí es la de observar la aplicación del método de elementos finitos para resolver el problema (4.2) en el caso concreto de un cachalote emitiendo ondas acústicas para el fenómeno de ecolocalización. Los datos numéricos desde los que se parte son los mismos que en el problema con dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet (esencialmente, se trabajará con un valor del número de onda de $k = 55,45 \text{ m}^{-1}$). El script de Matlab utilizado en este caso es `helmholtz1d_Robin_cachalote.m`.

Las tablas 4.4, 4.5 y 4.6 muestran los errores cometidos al aplicar el método de elementos finitos al problema (4.1) en las normas L^2 , H^1 e infinito, respectivamente.

Por otra parte, las gráficas de las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 ilustran la evolución del error conforme varía el diámetro de la partición del intervalo, midiéndose dicho error en las normas L^2 , H^1 e infinito, respectivamente.

De manera similar a lo comentado para las gráficas generales de este capítulo, se observa que las tendencias lineales son mucho más fuertes que

Figura 4.1: Error en la norma L^2 en función de h

h	Error norma L^2
10^{-4}	$8,2022 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$3,2808 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$8,1993 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$3,2761 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	0,77656
$2 \cdot 10^{-2}$	2,3594
0.1	0,99431

Cuadro 4.4: Errores en la norma L^2 (cachalote)

en el caso del problema con dos condiciones Dirichlet. Esto permite intuir que el efecto de los términos de contaminación es menor que en el primer problema, lo que aporta una mayor estabilidad al control de los errores cuando se cumpla la rule of thumb. No obstante, para tamaños de malla grandes (particiones del dominio con pocos nodos) el error sigue siendo muy alto.

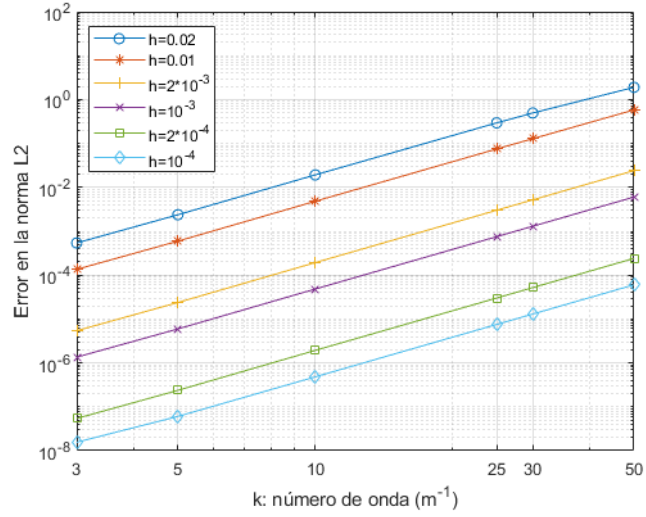


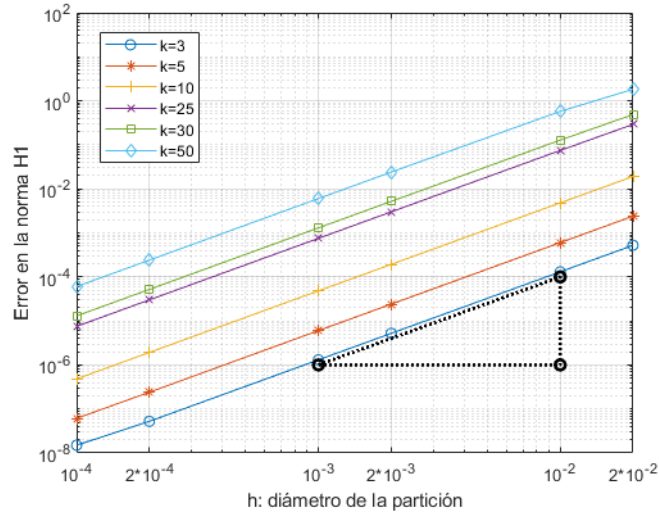
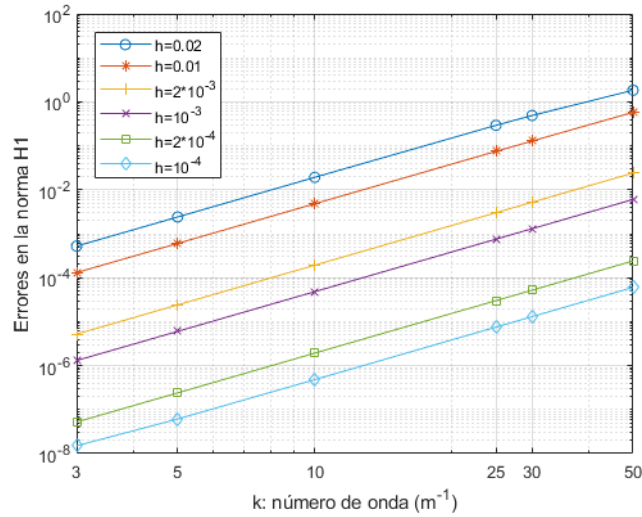
Figura 4.2: Error en la norma L^2 en función de k

h	Error norma L^2
10^{-4}	$8,2028 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$3,2811 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$8,199 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$3,2749 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	0,76803
$2 \cdot 10^{-2}$	2,2599
0.1	1,3065

Cuadro 4.5: Errores en la norma H^1 (cachalote)

h	Error norma L^2
10^{-4}	$1,4008 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$5,603 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$1,4002 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$5,9469 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	1,3195
$2 \cdot 10^{-2}$	3,5526
0.1	1,3051

Cuadro 4.6: Errores en la norma infinito (cachalote)

Figura 4.3: Error en la norma H^1 en función de h Figura 4.4: Error en la norma H^1 en función de k

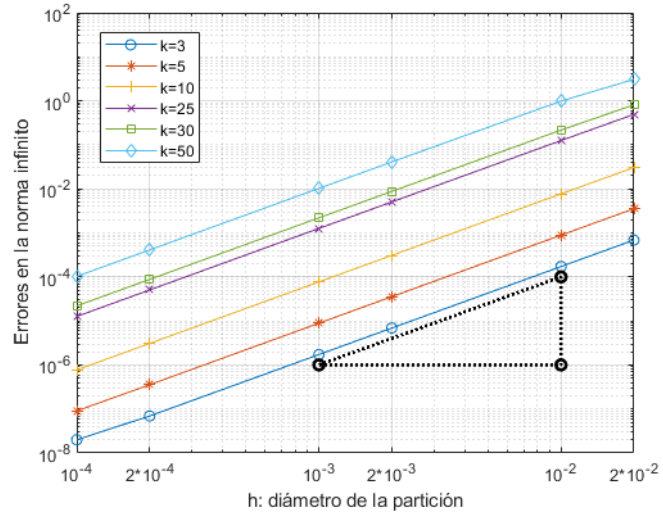


Figura 4.5: Error en la norma infinito en función de h

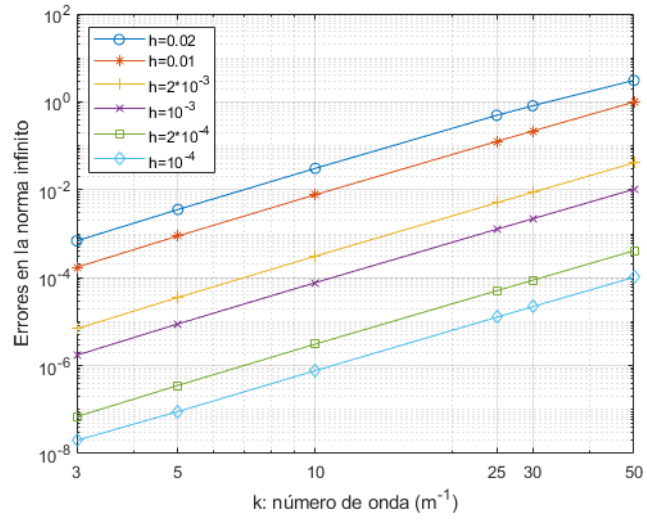
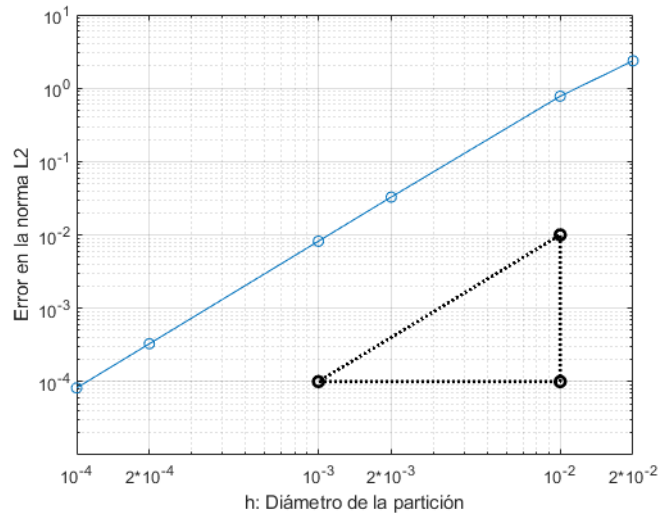
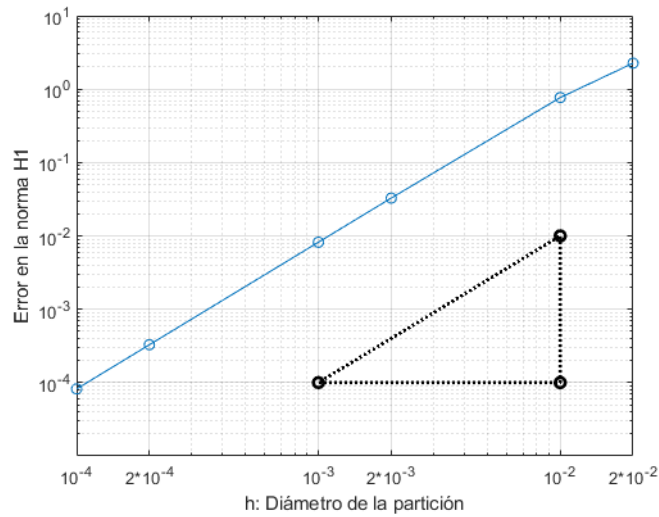


Figura 4.6: Error en la norma infinito en función de k

Figura 4.7: Errores en la norma L^2 (cachalote)Figura 4.8: Errores en la norma H^1 (cachalote)

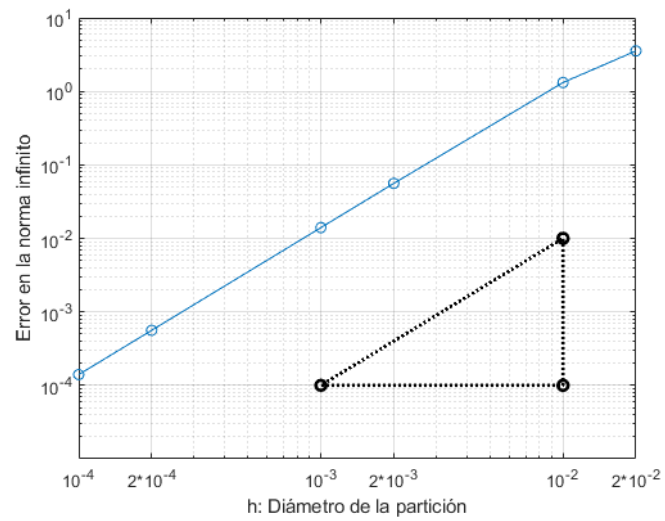


Figura 4.9: Errores en la norma infinito (cachalote)

Capítulo 5

Problema bidimensional

5.1. Problema modelo

Sean Ω un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ su frontera y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. El problema fuerte parte de la ecuación (2.13), a la que se le añaden una o varias condiciones frontera, en función de la situación a considerar. En particular, en esta sección se estudiará el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Buscar } u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que:} \\ \Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}). & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.1)$$

A la condición frontera empleada en (5.1) se le denomina condición de tipo Neumann.

5.2. Formulación variacional y problema débil

Sea $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función test lo suficientemente regular. De manera análoga al capítulo anterior, la formulación variacional del problema comenzará multiplicando a la ecuación en derivadas parciales de (5.1) por v e integrando en Ω :

$$\int_{\Omega} (\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (5.2)$$

Si empleamos la fórmula de Green,

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

en (5.2), con $\mathbf{F} = \nabla u$, tendremos que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\Omega} u v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) v \, ds = 0.$$

Finalmente, aplicando la condición de contorno, llegaremos a:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\Omega} u v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g v \, ds = 0.$$

El **problema débil** se sigue inmediatamente de la formulación variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Buscar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\Omega} u v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g v \, ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Los argumentos clásicos basados en la alternativa de Fredholm [3] y el hecho de que el operador resolvente asociado a este problema sea un operador compacto autoadjunto, muestran que el problema variacional (5.3) tiene solución única excepto para una secuencia infinita de valores reales del número de onda $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, que deben entenderse como las resonancias del sistema mecánico asociado a este problema modelo. A lo largo del resto de esta sección, todos los valores del número de onda serán seleccionados de tal manera que no coincidan con ninguno de los valores de resonancia donde la solución no es única.

5.3. Discretización

Sea τ_h una partición de Ω en triángulos T de diámetro menor o igual que un cierto h tal que $0 < h \leq 1$. Bajo estas condiciones, el diámetro de la partición se definirá como:

$$\delta := \max_{T \in \tau_h} \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

La triangulación τ_h debe verificar que, dados dos triángulos $T_1, T_2 \in \tau_h$, con $T_1 \neq T_2$, entonces se cumplirá alguna de las tres situaciones siguientes:

$$T_1 \cap T_2 = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \text{un lado en común} \\ \text{un vértice en común} \end{array} \right.$$

Sean $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^N$ el conjunto de todos los vértices de los triángulos de la partición τ_h y $X_h := \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}_1, T \in \tau_h\}$, con $\mathbb{P}^1 = \{ax + by + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, el espacio discreto considerado. Entonces, a todo vértice a_j de τ_h se le puede asociar la función $\varphi_j \in V_h$ definida por:

$$\varphi_j(\mathbf{a}_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (5.4)$$

De manera inmediata, se comprueba que el conjunto $\{\varphi_j : j = 1, \dots, N\}$ es una base de X_h . Así pues, si $v \in V_h$, se tendrá que $v(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N v(\mathbf{a}_j) \varphi_j(\mathbf{x})$.

Sean ahora T un triángulo de la partición y $a_{1,T}$, $a_{2,T}$ y $a_{3,T}$ sus tres vértices. Entonces, las funciones φ_j de la base de V_h se pueden formular de manera local sobre T , utilizando la notación $\varphi_j|_T = \lambda_j^T$. Si $\mathbf{a}_{j,T} = (x_j, y_j)^\top$, las funciones λ_j^T se podrán escribir como:

$$\lambda_j^T = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}}{2|T|}, \quad (5.5)$$

donde los subíndices de las coordenadas han de interpretarse módulo 3.

Así pues, se aproximará la solución del problema mediante la búsqueda de una función $u_h \in X_h$ tal que

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(\mathbf{x}).$$

Bajo estas condiciones, el problema discreto se escribirá como

$$\begin{cases} \text{Buscar } u_h \in X_h \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\Omega} u_h v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g v \, ds, \quad \forall v \in X_h, \end{cases} \quad (5.6)$$

donde $X_h = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle$.

5.4. Resultados numéricos

Dado el aumento de la complejidad a la hora de escribir un código similar al del caso unidimensional, para el ejemplo bidimensional se ha optado por hacer uso de la herramienta Partial Differential Equation Toolbox (PDEtool) de Matlab. En particular, el problema que se va a resolver mediante este método es el siguiente:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = e^{ikx}, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.7)$$

PDEtool es una herramienta incluida en Matlab que permite dibujar y mallar un dominio en dos dimensiones, así como establecer la ecuación en derivadas parciales y las condiciones frontera, para resolver un problema. La siguiente figura muestra la interfaz general de PDEtool junto al dominio dibujado.

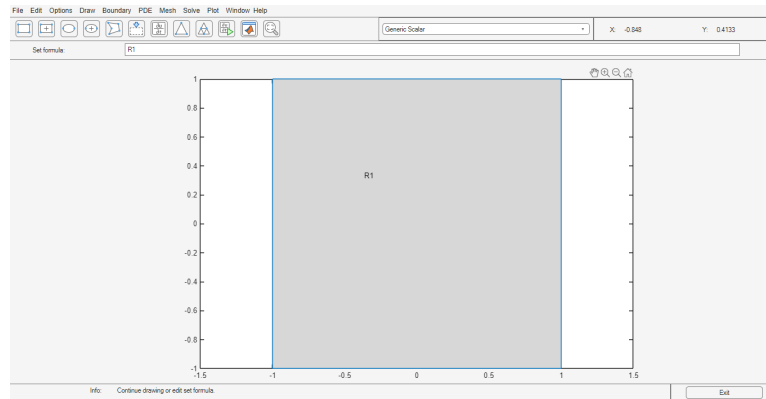


Figura 5.1: Interfaz de PDEtool. Dibujo del dominio

Una vez se ha diseñado el dominio, se establecen la ecuación en derivadas parciales y las condiciones frontera seleccionando las opciones "PDEz" "Boundary", respectivamente.

Comparando la ecuación (5.7) con la figura del PDE Mode, el coeficiente a coincide con el valor k^2 de la ecuación (en este caso, se tendría que $k = 10$). El coeficiente c debe ser -1 para conservar los signos.

Los últimos pasos para resolver el problema consisten en crear la malla y seleccionar la opción "Solve".

En la gráfica 5.5, se observa que la frecuencia de la onda emitida por el cachalote, directamente ligada al número de onda según la ecuación (2.1),

PDE Specification

Equation: $-\text{div}(c \cdot \text{grad}(u)) + a \cdot u = f$

Type of PDE:	Coefficient	Value
☒ Elliptic	c	-1.0
☐ Parabolic	a	3074.7
☐ Hyperbolic	f	0
☐ Eigenmodes	d	1.0

OK Cancel

Figura 5.2: Coeficientes de la EDP

Boundary Condition

Boundary condition equation: $n \cdot c \cdot \text{grad}(u) + q \cdot u = g$

Condition type:	Coefficient	Value	Description
☒ Neumann	g	$-\exp(i \cdot 55.45 \cdot x)$	
☐ Dirichlet	q	0	
	h	1	
	r	0	

OK Cancel

Figura 5.3: Condiciones frontera

resulta bastante elevada para poder aplicar el FEM de manera fiable, ya que se observa que las ondas dibujadas no poseen exactamente la forma que cabría esperar (dicho en otras palabras, se notan mucho los errores cometidos al aplicar el método).

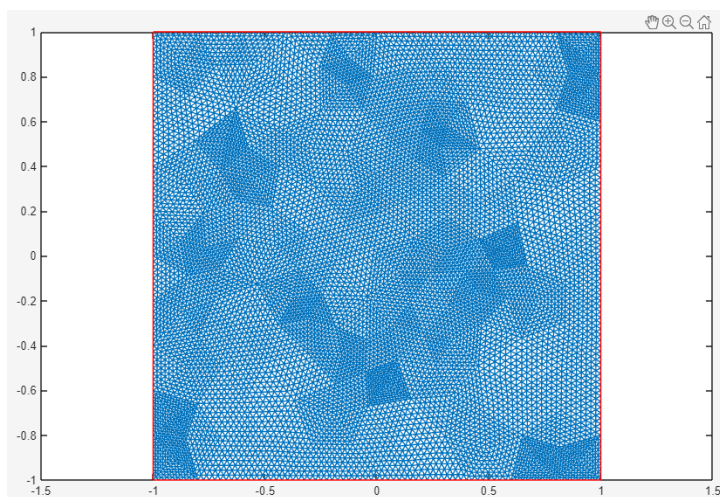


Figura 5.4: Mallado del dominio

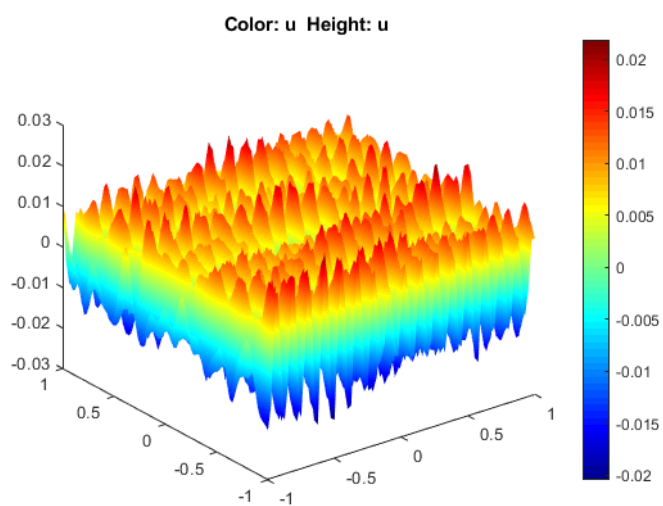


Figura 5.5: Solución del problema

Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado ha sido el de estudiar la aplicación de un método numérico conocido para resolver un problema de acústica cuyos datos están extraídos (o al menos motivados) del comportamiento real de una especie animal.

La conclusión más relevante que se puede extraer de las simulaciones realizadas por ordenador es que el método de elementos finitos permite estudiar numéricamente el fenómeno de la ecolocalización perpetrada por un cetáceo odontoceto cuando la malla es lo suficientemente fina para que los errores sean del orden de 10^{-2} o inferiores.

Se ha observado que, si el valor de k es demasiado elevado, el método da errores bastante grandes, especialmente si el mallado del dominio no es muy fino. Además, en la capacidad de controlarlos será menor (incluso si se cumple la rule of the thumb, el papel de la polución no se puede desestimar). Si se tienen estos problemas para el valor más bajo de frecuencias recogido en la tabla (2.1), es evidente que para frecuencias más elevadas el método fallará más. Aun así, para valores de h muy pequeños se han podido alcanzar errores razonablemente pequeños.

La principal mejora para el trabajo sería la de cambiar de método numérico y pasar a utilizar el método de elementos finitos con partición de la unidad (Partition of Unity Finite Element Method, PUFEM), el cual emplea fun-

ciones base que cumplen que $\sum_{j=0}^N \varphi_j(\mathbf{x}) = 1$ para todo $x \in \Omega$, que luego

se combinarán con otras funciones ψ_j cuya forma estará adaptada al problema que se vaya a tratar, principalmente exponenciales, sin necesidad de restringirse únicamente a funciones polinómicas básicas.

La ventaja principal del PUFEM es que funciona bien a frecuencias altas, como las que puedan involucrar a un cetáceo o a un submarino [11]. Además, este método permite trabajar con problemas más complejos (e interesantes)

para estudiar, por ejemplo, qué sucede cuando una onda acústica choca contra un objeto en el mar y/o cuando la onda que rebota es interceptada por el emisor original.

Por otro lado, para la realización de este trabajo han sido necesarios conocimientos de varias materias. Fundamentalmente, los contenidos de esta memoria se podrían relacionar con las asignaturas de Introducción a los Espacios de Funciones, Análisis Numérico y Ampliación de Ecuaciones Diferenciales, vistas en el Grado de Matemáticas. La parte más práctica, aquella relativa al uso de Matlab, estaría vinculada con las asignaturas de Cálculo Numérico, Análisis Numérico y Ampliación de Análisis Numérico, también del mismo grado, ya que son en las que se enseña a manejar este software. Además, aquellos conceptos más puramente de Acústica se podrían relacionar con el Grado de Física.

En resumen, el desarrollo de este Trabajo de Fin de Grado me ha permitido partir de los contenidos estudiados a lo largo de la duración del Grado de Matemáticas para aprender cómo se puede aplicar un método numérico procedente de razonamientos abstractos para describir un fenómeno real, obteniendo aproximaciones relativamente buenas en algunos casos (cuando la malla del dominio es lo suficientemente fina) y estableciendo qué acciones se podrían llevar a cabo en el futuro para mejorar el estudio de la ecolocalización submarina.

Bibliografía

- [1] D. Braess, *Finite Elements, Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, 2001.
- [2] C.S. Brenner, L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [3] H. Brézis, *Análisis funcional*, Alianza Universidad textos, 1984.
- [4] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976
- [5] I. Drelichman, R. G. Durán, *Improved Poincaré inequalities in fractional Sobolev spaces*, Improved Poincaré inequalities in fractional Sobolev spaces, Vol 43, 2018
- [6] A. Ern, J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [7] E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Università di Padova, 1957
- [8] F. Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer-Verlag, New York, 1998
- [9] F. Ihlenburg, I. Babuska, *Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number Part I: The h -Version of the FEM*, Institute for Physical Science and Technology University of Maryland at College Park, 1995
- [10] P. M. López, *Análisis numérico de un problema de dispersión acústica*, Universidad de Oviedo, departamento de Matemáticas

- [11] M.S. Mohamed, O. Laghrouche, A. El-Kacimi, *Some numerical aspects of the PUFEM for efficient solution of 2D Helmholtz problems*, School of the Built Environment, Heriot-Watt University, 2010
- [12] National Physical Laboratory, <https://http://resource.npl.co.uk/acoustics/techguides/soundseawater/underlying-phys.html>, Speed of sound in sea water - Underlying Physics
- [13] A. M. Salort, *Equivalencia de normas en $H_0^1(\Omega)$ y $H_0^2(\Omega)$* , Universidad de Buenos Aires
- [14] Au, Whitlow W. L.; M. C. Hastings, *Principles of Marine Bioacoustics*, Springer, 2008
- [15] Au, Whitlow W. L.; Lammers, Marc O., *Springer Handbook of Acoustics*, Springer Science+Business Media, 2014