



---

**Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE CIENCIAS

## TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

# Métodos de perturbación

Autora: Paula Carnero Morán

Tutores: Begoña Cano Urdiales

Año: 2025

# Índice general

Resumen/Abstract . . . . .	3
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Perturbación regular</b>	<b>7</b>
2.1. Movimiento en un medio con resistencia . . . . .	10
2.2. Oscilaciones no lineales . . . . .	12
2.3. El método de Poincaré-Lindstedt . . . . .	15
<b>3. Perturbación singular</b>	<b>18</b>
3.1. Problema de contorno . . . . .	20
3.1.1. Aproximación exterior y análisis de condiciones de contorno . .	20
3.1.2. Aproximación interior . . . . .	21
3.1.3. Matching . . . . .	22
3.1.4. Aproximación uniforme . . . . .	23
3.2. Procedimientos generales . . . . .	23
3.3. Capas múltiples . . . . .	26
3.3.1. Solución de orden principal . . . . .	27
3.3.2. Capas límite y matching . . . . .	27
3.3.3. Aproximación uniforme . . . . .	28
3.3.4. Ecuaciones no lineales . . . . .	29
3.4. Problemas de valor inicial . . . . .	31
3.4.1. Problema lineal de valor inicial de primer orden . . . . .	31
3.4.2. Sistema masa-resorte amortiguado . . . . .	32
3.4.3. Problema no lineal de la cinética de las enzimas . . . . .	35
<b>4. Aproximación WKB</b>	<b>40</b>
4.1. Introducción . . . . .	40
4.1.1. El caso oscilatorio . . . . .	42
4.1.2. El caso no oscilatorio . . . . .	44
4.2. El método WKB para la aproximación de autovalores grandes y sus autofunciones . . . . .	44
4.3. Segundo término del desarrollo WKB . . . . .	46
4.4. Ecuación de Schrödinger . . . . .	48
4.5. Puntos de inflexión . . . . .	50
4.5.1. Caso donde $q'(x_i) > 0$ . . . . .	50
4.5.2. Solución en la capa de transición . . . . .	50
4.5.3. Matching . . . . .	52



# Resumen

Este trabajo estudia el uso de métodos de perturbación para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales dependientes de un pequeño parámetro  $\epsilon$ . Distinguiremos los casos de perturbación regular y singular, ilustrados mediante ejemplos clásicos de la física como las oscilaciones no lineales, y de la química como la cinética de las enzimas. En particular, se analiza el método WKB como herramienta para tratar perturbaciones en ecuaciones diferenciales lineales, su aplicación en problemas de valores propios, el estudio del error de dicho método y su comportamiento en regiones cercanas a los puntos de inflexión.

Palabras clave: métodos de perturbación, perturbación regular, método de Poincaré-Lindstedt, perturbación singular, método WKB, ecuaciones diferenciales, capas límite, aproximación asintótica, puntos de inflexión.

# Abstract

This work examines the use of perturbation methods for the approximate solution of differential equations depending on a small parameter  $\epsilon$ . We distinguish between regular and singular perturbation cases, illustrated with classical examples from physics, such as nonlinear oscillations, and from chemistry, such as enzyme kinetics. In particular, the WKB method is analyzed as a tool for handling perturbations in linear differential equations, with emphasis on its application to eigenvalue problems, the study of its associated error, and its behavior in regions near turning points.

Keywords: perturbation methods, regular perturbation, Poincaré-Lindstedt method, singular perturbation, WKB method, differential equations, boundary layers, asymptotic approximation, turning points.

# Capítulo 1

## Introducción

Existen numerosos problemas en las ciencias aplicadas que constan de ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse exactamente de forma analítica. Para obtener una solución, es habitual recurrir a métodos de aproximación y métodos numéricos. Entre las herramientas más destacadas se encuentran los métodos de perturbación y el análisis asintótico, especialmente útiles cuando el modelo involucra un parámetro pequeño, que denotamos por  $\epsilon$ .

Los métodos de perturbación, utilizados inicialmente por astrónomos para predecir los efectos de pequeñas perturbaciones sobre los movimientos de cuerpos celestes, se han convertido hoy en día en herramientas analíticas ampliamente empleadas en prácticamente todas las ramas de la ciencia. Un problema es adecuado para el análisis por perturbación si se aproxima a otro más simple que puede resolverse exactamente. Generalmente, esta cercanía se cuantifica mediante la presencia del parámetro  $\epsilon$ , de forma que, para  $\epsilon = 0$ , se tiene un sistema resoluble.

La idea general de estos métodos es construir soluciones en forma de series de potencias en torno a este parámetro. Podemos utilizar los métodos de perturbación para resolver ecuaciones algebraicas, integrales y ecuaciones diferenciales, en las que centraremos este estudio. Estudiaremos dos tipos de perturbaciones: la perturbación regular y la perturbación singular [4, 3].

En un problema de perturbación regular, un procedimiento directo conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno para cada término de la serie de potencias. Este sistema puede resolverse de forma recursiva, y la precisión del resultado mejora conforme el valor de  $\epsilon$  disminuye, manteniéndose válida la solución en todo el dominio de interés. Para ilustrar un ejemplo de problema de perturbación regular, se ha obtenido una solución aproximada para el movimiento de un cuerpo en un medio con resistencia. También se ha analizado el método Poincaré-Lindstedt, utilizado para los casos en los que el método de perturbación regular no se puede aplicar en todo el intervalo.

Por otro lado, en un problema de perturbación singular existen una o varias regiones, ya sea en la frontera o en el interior del dominio, donde el procedimiento anterior falla. Esto se debe a menudo a que el parámetro  $\epsilon$  multiplica a la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial; por ello, la aproximación principal satisface una ecuación de orden inferior que no puede cumplir con todas las condiciones de contorno impuestas [6].

A lo largo de este trabajo se presentarán ejemplos clásicos de perturbación singular, aplicados tanto a problemas de valor inicial como a problemas con condiciones de contorno, detallando el procedimiento general para obtener soluciones aproximadas. Entre los casos analizados destacan el sistema masa-resorte con amortiguamiento y la cinética de las enzimas. Además, se han abordado ejemplos que presentan múltiples capas límite y casos donde la ecuación es no lineal.

La teoría de perturbaciones singulares es un área amplia y en constante desarrollo. Existen diversos métodos que se utilizan para abordar problemas en este campo. Los más básicos incluyen desarrollos asintóticos y la aproximación WKB. La teoría WKB se utiliza para obtener una aproximación global a la solución de una ecuación diferencial lineal perturbada singularmente de cualquier orden. Se aplica en problemas de autovalores, problemas con condiciones iniciales y problemas de contorno [7].

En este trabajo nos centraremos en la aplicación del método WKB a través de ejemplos concretos, diferenciando los dos regímenes principales en los que puede aplicarse: el caso oscilatorio y el caso no oscilatorio. Analizaremos la utilidad del método para obtener aproximaciones de autovalores grandes en problemas de valores propios. Asimismo, se estudiará el error asociado a la aproximación WKB en función de los parámetros del problema. Finalmente, abordaremos el comportamiento de la solución aproximada en presencia de puntos de inflexión, analizando cómo afecta su aparición dentro del intervalo de estudio.

En este trabajo hemos utilizado conocimientos adquiridos en diversas asignaturas del grado de matemáticas: ecuaciones diferenciales, cálculo y análisis numérico. La bibliografía más utilizada ha sido Applied Mathematics [8], Introduction to Perturbation Methods [5] y Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations [10], textos de referencia fundamentales para el estudio y aplicación de los métodos tratados.

# Capítulo 2

## Perturbación regular

Consideramos una ecuación diferencial

$$F(t, y, y', y'', \epsilon) = 0, \quad t \in I,$$

donde  $t$  es la variable independiente,  $I$  es el intervalo de tiempo, e  $y$  es la variable dependiente. La aparición de un parámetro  $\epsilon$  se muestra explícitamente. En general tendremos condiciones iniciales o condiciones de frontera junto a la ecuación diferencial. En este caso, el parámetro  $\epsilon$  es pequeño, es decir,  $\epsilon \ll 1$ .

Por una serie de perturbación entendemos una serie de potencias en  $\epsilon$  de la forma

$$y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \dots$$

La base del método de perturbación regular consiste en asumir que la solución de la ecuación diferencial será de la forma descrita, donde las funciones  $y_0, y_1, y_2, \dots$  se encuentran sustituyendo en la ecuación diferencial. Los primeros términos de esta serie constituyen una solución aproximada, llamada solución perturbada o aproximación.

De forma general, el método tendrá éxito si la aproximación es uniforme en  $I$ . En muchos problemas, es de especial interés estudiar el comportamiento de las soluciones cuando  $\epsilon$  tiende a cero. El término  $y_0$  de la serie de perturbación se denomina término de orden principal. Los términos  $\epsilon y_1, \epsilon^2 y_2$  son términos de corrección de mayor orden. Si el método funciona,  $y_0$  será la solución del problema sin perturbar

$$F(t, y, y', y'', 0) = 0, \quad t \in I.$$

Por tanto, cuando en la ecuación de un modelo aparecen parámetros que son pequeños, podemos entender la misma como una ecuación perturbada donde los parámetros pequeños representan perturbaciones o cambios sobre un problema sin perturbar. La ecuación sin perturbar debe ser siempre resoluble para poder encontrar el comportamiento del término principal.

Ilustraremos la idea básica del método de perturbación con un ejemplo algebraico simple.

**Ejemplo 2.1.** Consideramos la ecuación cuadrática

$$x^2 + 2\epsilon x - 3 = 0, \tag{2.1}$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro pequeño positivo. Vamos a asumir que la solución del problema tiene la forma de una serie de perturbación  $x = x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + \dots$ . Sustituyendo en la

ecuación tendremos

$$(x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + \dots)^2 + 2\epsilon(x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + \dots) - 3 = 0.$$

Desarrollando los paréntesis y ordenándolos se obtiene

$$x_0^2 - 3 + 2x_0(x_1 + 1)\epsilon + (x_1^2 + 2x_0x_2 + 2x_1)\epsilon^2 + \dots = 0,$$

e igualando los coeficientes a cero debe cumplirse que

$$x_0^2 = 3, x_1 = -1, x_1^2 + 2x_0x_2 + 2x_1 = 0, \dots$$

Resolviendo, se tiene que

$$x_0 = \pm\sqrt{3}, x_1 = -1, x_2 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}, \dots$$

Por tanto, obtenemos dos soluciones

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} - \epsilon + \frac{1}{2\sqrt{3}}\epsilon^2 + \dots \\ x &= -\sqrt{3} - \epsilon - \frac{1}{2\sqrt{3}}\epsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

que son dos aproximaciones perturbadas de tres términos. Podemos comparar la solución aproximada con la solución exacta de (2.1), que sabemos calcular,

$$x = \frac{1}{2}(-2\epsilon \pm \sqrt{4\epsilon^2 + 12}) = -\epsilon \pm \sqrt{3 + \epsilon^2}.$$

Desarrollando el radical con la fórmula del binomio,

$$\sqrt{3 + \epsilon^2} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\epsilon^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\epsilon^2}{6} + \dots\right)$$

con lo que la solución exacta se puede escribir como

$$x = \pm\sqrt{3} - \epsilon \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\epsilon^2 + \dots$$

que corresponde a la expresión de la aproximación perturbada de tres términos.

Lo interesante es que podamos llevar a cabo este procedimiento para obtener una solución aproximada incluso cuando no podamos resolver el problema de forma exacta.

**Ejemplo 2.2.** En el siguiente ejemplo obtendremos una solución perturbada de dos términos para la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} u' + u &= \frac{1}{1 + \epsilon u}, \\ u(0) &= 0, \quad 0 < \epsilon < 1. \end{aligned}$$

Partimos de que la solución tiene la forma

$$u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + O(\epsilon^2),$$

donde  $u_0(t)$  es la solución sin perturbar y  $u_1(t)$  la corrección de primer orden.

Para obtener la solución principal debemos resolver la siguiente ecuación

$$u_0' + u_0 = 1,$$

cuya solución es conocida

$$u_0(t) = 1 + Ce^{-t}.$$

Aplicando la condición inicial llegamos a que  $C = -1$ . Por tanto,

$$u_0(t) = 1 - e^{-t}.$$

Para obtener la corrección de primer orden  $u_1(t)$  suponemos que la solución tiene la forma  $u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + O(\epsilon^2)$  y sustituimos en la ecuación inicial

$$u_0' + \epsilon u_1' + u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2) = \frac{1}{1 + \epsilon u_0 + O(\epsilon^2)} \approx 1 - \epsilon u_0 + O(\epsilon^2).$$

Dado que  $u_0(t) = 1 - e^{-t}$ , se tiene que debe cumplirse

$$e^{-t} + \epsilon u_1' + 1 - e^{-t} + \epsilon u_1 = 1 - \epsilon(1 - e^{-t}).$$

Por tanto,

$$u_1' + u_1 = -(1 - e^{-t}).$$

Luego  $u_1(t) = -1 + te^{-t} + Ce^{-t}$ . La solución aproximada de dos términos será

$$u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) = 1 - e^{-t} + \epsilon(-1 + te^{-t} + Ce^{-t}).$$

Finalmente obtendremos  $C$  aplicando la condición inicial  $u(0) = 0$ , que implica  $C = 1$ , con lo que

$$\boxed{u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) = 1 - e^{-t} + \epsilon(-1 + te^{-t} + e^{-t})} \quad (2.2)$$

En la siguiente figura mostramos la solución exacta y la solución aproximada por el método de perturbación para dos valores de  $\epsilon$  distintos, donde se puede ver cómo la solución aproximada es más cercana a la solución exacta cuanto menor sea  $\epsilon$ . Para representar la solución exacta en matlab hemos utilizado la función *ode45* con tolerancia  $10^{-6}$  que utiliza métodos de tipo Runge-Kutta.

Veamos ahora dos ejemplos de aplicación del método de perturbación regular a problemas diferenciales. En el primero veremos que la aproximación es buena para todo  $t > 0$ , pero no ocurre así en el segundo.

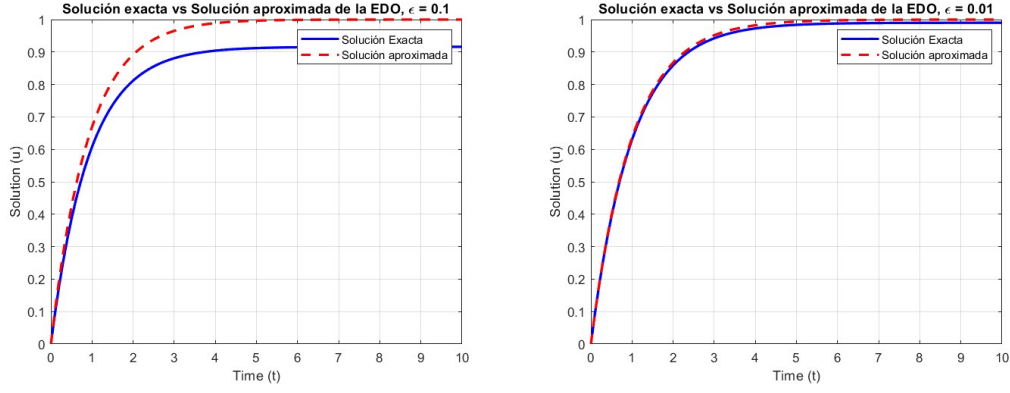


Figura 2.1: Solución aproximada y la solución exacta

## 2.1. Movimiento en un medio con resistencia

Suponemos un cuerpo de masa  $m$ , con velocidad inicial  $V_0$ , que se mueve linealmente en un medio que ofrece una fuerza de resistencia de magnitud  $av - bv^2$ , donde  $v = v(\tau)$  es la velocidad del objeto en función del tiempo  $\tau$ , y  $a$  y  $b$  son constantes positivas con  $b \ll a$ . Por tanto, la parte no lineal de la fuerza se supone pequeña en comparación con el término lineal. Las constantes  $a$  y  $b$  tienen unidades de fuerza por velocidad y fuerza por velocidad al cuadrado, respectivamente. Aplicando la segunda ley de Newton, el problema viene descrito por

$$m \frac{dv}{d\tau} = -av + bv^2, \quad v(0) = V_0.$$

Primero convertiremos el problema en un problema adimensional. Una posible escala de la velocidad es  $V_0$ . Si no apareciera el término no lineal, la velocidad decaería de la forma  $e^{-\frac{a\tau}{m}}$ , por lo que tendremos como tiempo característico  $m/a$ . De esta manera, en las variables adimensionales

$$y = \frac{v}{V_0}, \quad t = \frac{\tau}{\frac{m}{a}},$$

la ecuación del movimiento y la condición inicial quedan escritas como

$$\frac{dy}{dt} = -y + \epsilon y^2, \quad t > 0 \tag{2.3}$$

$$y(0) = 1, \tag{2.4}$$

siendo  $\epsilon \equiv bV_0/a \ll 1$ .

La ecuación (2.3) es una ecuación de Bernoulli. Según se vio en la asignatura 'Ecuaciones Diferenciales' de segundo curso del grado de matemáticas, la forma general de estas ecuaciones es

$$a(t) \frac{dy}{dt} + b(t)y = c(t)y^n.$$

Estudiamos que dividiendo la ecuación entre  $a(t)$ , se tiene

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)y^n,$$

y que dividiendo a continuación entre  $y^n$  y haciendo el cambio de variable  $w = y^{1-n}$  se obtiene una ecuación diferencial de primer orden. En nuestro caso,  $n = 2$ ,  $w = y^{-1}$ , y como la ecuación puede escribirse como

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{y} = \epsilon,$$

tras el cambio de variable se tiene

$$-\frac{dw}{dt} + w = \epsilon.$$

Puesto que la solución es  $w = \epsilon + Ce^t$ ,  $y = 1/(\epsilon + Ce^t)$ . Imponiendo entonces la condición inicial se tiene que

$$y(0) = 1 = \frac{1}{\epsilon + C},$$

lo que implica que

$$C = 1 - \epsilon.$$

Sustituyendo el valor de C, tendremos la solución exacta de la ecuación de Bernoulli

$$y_{ex}(t) = \frac{1}{\epsilon + (1 - \epsilon)e^t} = \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon(e^{-t} - 1)}.$$

Notemos que (2.3)-(2.4) es una perturbación del problema

$$\frac{dy}{dt} = -y, \quad y(0) = 1,$$

cuya solución es  $y(t) = e^{-t}$ . Como  $\epsilon \ll 1$ , la función  $e^{-t}$  parece una buena aproximación del problema. La solución exacta puede desarrollarse en una serie de Taylor en potencias de  $\epsilon$  como

$$y_{ex} = e^{-t} + \epsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \epsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) + \dots$$

Para aplicar el método de perturbación en este caso, asumiremos que la solución a la ecuación del modelo tiene la forma

$$y = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \dots$$

Las funciones  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2 \dots$  se pueden determinar sustituyendo en la ecuación diferencial y la condición inicial, e igualando coeficientes

$$y'_0 + \epsilon y'_1 + \epsilon^2 y'_2 + \dots = -(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots) + \epsilon(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots)^2.$$

Agrupando coeficientes se obtiene una sucesión de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} y'_0 &= -y_0, \\ y'_1 &= -y_1 + y_0^2, \\ y'_2 &= -y_2 + 2y_0 y_1, \dots \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$y_0(0) = 1, y_1(0) = y_2(0) = \dots = 0.$$

Por tanto, tenemos un conjunto recursivo de problemas de valores iniciales lineal para  $y_0, y_1, y_2, \dots$ . Resolvemos recursivamente y obtenemos que

$$\begin{aligned} y_0(t) &= e^{-t}, \\ y_1(t) &= e^{-t} - e^{-2t}, \\ y_2(t) &= e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}, \dots \end{aligned}$$

Notemos que  $y_1$  y  $y_2$  son las correcciones de primer y segundo orden de la aproximación de primer orden  $y_0(t) = e^{-t}$ . Por tanto la solución perturbada de tres términos será

$$y_a(t) = e^{-t} + \epsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \epsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}),$$

que es una aproximación de  $y_{ex}$  e incluye los efectos no lineales debidos al término  $\epsilon y^2$  en la ecuación diferencial inicial. En este caso podemos comparar la solución exacta con la solución aproximada. Para ello, el error cometido en la aproximación vendrá dado por la diferencia

$$y_{ex} - y_a = m_1(t)\epsilon^3 + m_2(t)\epsilon^4 + \dots, \quad t > 0,$$

para funciones acotadas  $m_1, m_2, \dots$ .

Notemos que, para un valor positivo de  $t$  dado, el error tiende a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Es más, por la forma que tienen las funciones  $m_j(t)$  ( $j \leq 1$ ), se puede probar que la convergencia es uniforme para  $0 \leq t < \infty$ .

## 2.2. Oscilaciones no lineales

Consideremos ahora el sistema de masa-resorte donde la masa  $m$  se conecta a un resorte con fuerza de recuperación  $ky + ay^3$ , donde  $y$  es el desplazamiento de la masa, y  $k$  y  $a$  son constantes positivas que caracterizan la rigidez del resorte. Supondremos que la parte no lineal correspondiente a la fuerza de recuperación es pequeña comparada con la parte lineal,  $a \ll k$ . En este ejemplo la aproximación perturbada solo será válida si se plantean ciertas restricciones en el intervalo de tiempos del problema a estudiar, mostrando la necesidad de modificar el método de perturbación regular y desarrollar un método de perturbación singular.

Supondremos que inicialmente la masa se suelta desde un desplazamiento positivo  $A$ , luego el movimiento vendrá dado por la función  $y = y(\tau)$  de tiempo  $\tau$ , que satisface la segunda ley de Newton

$$m \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -ky - ay^3, \quad \tau > 0,$$

junto con las condiciones iniciales

$$y(0) = A, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0.$$

Debido al término  $ay^3$ , el problema no puede resolverse de forma exacta. Como  $a \ll k$  parece razonable aplicar el método de perturbación. Para analizar el problema correctamente buscamos una escala apropiada de tiempos y longitud que reduzca el problema a una forma adimensional. Las constantes  $k$ ,  $a$ ,  $m$  y  $A$  tienen dimensiones

$$[k] = \frac{\text{masa}}{\text{tiempo}^2}, \quad [a] = \frac{\text{masa}}{\text{longitud}^2 \text{tiempo}^2}, \quad [m] = \text{masa}, \quad [A] = \text{longitud}.$$

Para hacer adimensional la variable  $y$  utilizaremos la amplitud  $A$  del desplazamiento inicial. El razonamiento para escalar  $\tau$  es el siguiente. Si despreciamos el término  $ay^3$ , la ecuación diferencial es  $my'' = -ky$ , que tiene soluciones periódicas de la forma  $\cos(\sqrt{k/m}\tau)$  cuyo periodo es  $2\pi\sqrt{m/k}$ . Por lo tanto, elegiremos como tiempo característico  $\sqrt{m/k}$  e introduciremos las variables  $t$  y  $u$  como

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{m/k}}, \quad u = \frac{y}{A}.$$

Tras el cambio de variable, la ecuación diferencial y las condiciones iniciales pasan a ser

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u + \epsilon u^3 &= 0, \quad t > 0, \\ u(0) &= 1, \quad \dot{u}(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $\epsilon \equiv aA^2/k$  es un parámetro adimensional, muy pequeño si se asume  $aA^2 \ll k$ . La ecuación (2.5) corresponde a la ecuación de Duffing, una ecuación diferencial de segundo orden no lineal que se utiliza para modelar ciertos osciladores amortiguados y controlados. Suponemos que la solución tiene la forma  $u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots$  donde  $u_0, u_1, \dots$  se deben determinar. Sustituyendo en la ecuación diferencial y la condición inicial, e igualando coeficientes por potencias de  $\epsilon$ , tendremos la sucesión de problemas lineales con condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + u_0 &= 0, \quad u_0(0) = 1, \quad \dot{u}_0(0) = 0, \dots \\ \ddot{u}_1 + u_1 &= -u_0^3, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0, \dots \end{aligned}$$

La solución para el primer problema es  $u_0(t) = \cos(t)$ , con lo que el segundo problema se reescribe de la siguiente forma

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\cos^3(t), \quad u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0.$$

Teniendo en cuenta que  $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$ , la ecuación diferencial queda de la siguiente forma

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{1}{4}(3\cos(t) + \cos(3t)),$$

que puede resolverse por métodos estándar. Es bien conocido que la solución general de la ecuación homogénea es  $c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$  y una solución particular puede encontrarse por el método de coeficientes indeterminados y es de la forma

$$u_p = C \cos(3t) + Dt \cos(t) + Et \sin(t).$$

Sustituyendo  $u_p$  en la ecuación diferencial e igualando términos encontramos que  $C = 1/32$ ,  $D = 0$ ,  $E = -3/8$  con lo que la solución general es

$$u_1 = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \frac{1}{32} \cos(3t) - \frac{3}{8} t \sin(t),$$

e imponiendo la condición inicial a  $u_1$  obtenemos

$$u_1 = \frac{1}{32}(\cos(3t) - \cos(t)) - \frac{3}{8} t \sin(t).$$

Por tanto, la solución aproximada de dos términos toma la forma

$$u_a = \cos(t) + \epsilon \left[ \frac{1}{32}(\cos(3t) - \cos(t)) - \frac{3}{8} t \sin(t) \right]. \quad (2.6)$$

El comportamiento de la solución aproximada de primer orden es  $\cos(t)$ . El segundo término, sin embargo, no es necesariamente pequeño. Para un valor fijo de  $t$ , el término tenderá a cero según  $\epsilon \rightarrow 0$ , pero si  $t$  es del orden de  $1/\epsilon$  o mayor según  $\epsilon \rightarrow 0$ , entonces el término  $(3/8)t \sin t$  será grande. Llamaremos a este término *término secular*.

La amplitud de la solución aproximada no puede crecer con el tiempo, puesto que no sería consistente con la situación física ni con la solución exacta, que se conoce acotada para  $t > 0$ , según veremos ahora. Si multiplicamos (2.5) por  $\dot{u}$  en ambos lados de la ecuación tendremos que, para todo  $t > 0$ ,

$$\dot{u}\ddot{u} + \dot{u}u + \epsilon \dot{u}u^3 = 0,$$

que puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 + \epsilon \frac{1}{4} u^4 \right) = 0.$$

Integrando la expresión anterior se tiene que

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 + \epsilon \frac{1}{4} u^4 = C, \quad (2.7)$$

siendo  $C$  una constante independiente del tiempo, y que en  $t = 0$  debe tomar el valor  $1/2 + \epsilon/4 = (2 + \epsilon)/4$ . De (2.7) se deduce la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2} u(t)^2 \leq \frac{2 + \epsilon}{4}, \quad t > 0$$

con lo que

$$u(t) \leq \sqrt{\frac{2 + \epsilon}{2}}, \quad t > 0$$

y por tanto, la solución de (2.6) estará acotada para todo  $t > 0$ .

En la aproximación, la corrección no puede ser arbitrariamente pequeña para  $t \in (0, \infty)$  escogiendo  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Tampoco es posible mejorar la solución calculando términos adicionales de mayor orden ya que estos tendrán también términos seculares que no cancelarán los efectos de los términos de orden inferior. Por tanto, esta aproximación es solo válida en un intervalo finito  $[0, T]$ , donde el término de corrección se puede hacer arbitrariamente pequeño escogiendo un  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

### 2.3. El método de Poincaré-Lindstedt

En situaciones como la anterior, en las que el método de perturbación regular no es aplicable para todos los intervalos de tiempo, se recurre al método de Poincaré-Lindstedt, una técnica para aproximar uniformemente principalmente soluciones casi periódicas a ecuaciones diferenciales ordinarias, cuando fallan los enfoques de perturbación regulares. La clave está en darse cuenta de que el método de perturbación regular no solo estropea la amplitud de la oscilación a tiempos largos sino también el propio periodo de oscilación.

El método se basa en redefinir la escala de tiempos para la serie de perturbación. En particular, se considera entonces

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \epsilon u_1(\tau) + \epsilon^2 u_2(\tau) + \dots, \quad (2.8)$$

donde

$$\tau = wt$$

con

$$w = 1 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots \quad (2.9)$$

Escogemos que  $w_0$  sea la unidad, la frecuencia de la solución del problema sin perturbar. Podemos entonces reescribir el problema de valor inicial del ejemplo anterior (2.5) como

$$\begin{aligned} w^2 u'' + u + \epsilon u^3 &= 0, \quad \tau > 0, \\ u(0) &= 1, \quad u'(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $u = u(\tau)$  y la derivada es respecto a  $\tau$ . Sustituyendo (2.8) y (2.9) en (2.10), obtenemos

$$(1 + 2\epsilon w_1 + \dots)(u''_0 + \epsilon u''_1 + \dots) + (u_0 + \epsilon u_1 + \dots) + \epsilon(u_0^3 + 3\epsilon u_0^2 u_1 + \dots) = 0,$$

y

$$u_0(0) + \epsilon u_1(0) + \dots = 1, \quad u'_0(0) + \epsilon u'_1(0) + \dots = 0.$$

Agrupando entonces coeficientes en potencias de  $\epsilon$ , resulta

$$u''_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad u'_0(0) = 0, \dots \quad (2.11)$$

$$u''_1 + u_1 = -2w_1 u''_0 - u_0^3, \quad u_1(0) = u'_1(0) = 0, \dots \quad (2.12)$$

La solución de (2.11) es

$$u_0(\tau) = \cos(\tau),$$

luego la ecuación diferencial en (2.12) se convierte en

$$u''_1 + u_1 = 2w_1 \cos(\tau) - \cos^3(\tau) = (2w_1 - \frac{3}{4}) \cos(\tau) - \frac{1}{4} \cos(3\tau). \quad (2.13)$$

Como  $\cos(\tau)$  es solución de la ecuación homogénea, el término  $\cos(\tau)$  en la parte derecha de la ecuación nos lleva a una solución particular con un término  $\tau \cos(\tau)$ , que es un

término secular. La clave es que podemos evitar el término secular escogiendo  $w_1 = 3/8$ . De esta manera, la ecuación (2.13) queda reducida a

$$u_1'' + u_1 = -\frac{1}{4} \cos(3\tau),$$

que tiene como solución general

$$u_1(\tau) = c_1 \cos(\tau) + c_2 \sin(\tau) + \frac{1}{32} \cos(3\tau).$$

La condición inicial en  $u_1$  conduce a

$$u_1(\tau) = \frac{1}{32}(\cos(3\tau) - \cos(\tau)),$$

luego, una solución perturbada de primer orden uniformemente válida para (2.5) será

$$u(\tau) = \cos(\tau) + \frac{1}{32}\epsilon(\cos(3\tau) - \cos(\tau)) + \dots$$

donde  $\tau = t + \frac{3}{8}\epsilon t + \dots$

En general, el método de Poincaré-Lindstedt funciona con éxito cuando tratamos con ecuaciones de la forma

$$u'' + w_0^2 u = \epsilon F(t, u, u'), \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Estos son problemas cuyo término principal es oscilatorio con frecuencia  $w_0$ . Básicamente, la técnica consiste en cambiar las variables a unas con diferente frecuencia  $\tau = (w_0 + w_1\epsilon + \dots)t$  y suponer que  $u = u(\tau)$  es una serie de perturbaciones en  $\epsilon$ . Las constantes  $w_0, w_1, \dots$  se escogen en cada paso para evitar términos seculares en el desarrollo.

**Ejemplo 2.3.1** En este ejemplo utilizaremos el método de Poincaré-Lindstedt para obtener una aproximación perturbada de 2 términos del siguiente problema:

$$y'' + y = \epsilon y y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Asumimos que la solución podría escribirse de la forma

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \epsilon u_1(\tau) + \epsilon^2 u_2(\tau) + \dots$$

y definimos la frecuencia como  $w = w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots$  donde  $w_0$  es la frecuencia del sistema sin perturbar ( $w_0 = 1$ ). Haremos un cambio de variable,  $\tau = wt$ , de manera que al derivar respecto de  $t$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= w \frac{d}{d\tau}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= w^2 \frac{d^2}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

Y por tanto nuestra ecuación diferencial inicial pasa a ser

$$w^2 u'' + u = \epsilon u (w^2 u'^2).$$

Desarrollando  $u(\tau)$  y agrupando en potencias de  $\epsilon$  obtendremos las siguientes expresiones de  $u_0, u_1, \dots$

$$(1 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots)^2 (u_0'' + \epsilon u_1'' + \epsilon^2 u_2'' + \dots) + (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) \\ = \epsilon (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) (1 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots)^2 (u_0' + \epsilon u_1' + \epsilon^2 u_2' + \dots)^2,$$

lo que implica que  $u_0$  y  $u_1$  deben cumplir

$$u_0'' + u_0 = 0, \\ u_1'' + u_1 = u_0 u_0'^2 - 2w_1 u_0''.$$

Teniendo en cuenta que  $u_0(t) = \cos(t)$ , la ecuación para  $u_1$  queda

$$u_1'' + u_1 = 2w_1 \cos(\tau) + \cos(\tau) \sin^2(\tau) = (2w_1 + 1) \cos(\tau) - \cos^3(\tau) = (2w_1 + \frac{1}{4}) \cos(\tau) - \frac{1}{4} \cos(3\tau).$$

Notemos que el valor de  $w_1$  que nos permite eliminar el término secular es  $w_1 = -1/8$  y para obtener  $u_1$  tenemos que resolver

$$u_1'' + u_1 = -\frac{1}{4} \cos(3\tau).$$

La solución homogénea para este problema tiene la forma

$$u_{1h}(\tau) = A \cos(\tau) + B \sin(\tau),$$

y buscaremos una solución particular que tenga la forma

$$u_{1,p}(\tau) = C \sin(3\tau) + D \cos(3\tau).$$

Derivando esta expresión y sustituyendo

$$(-9C + C) \sin(3\tau) + (-9D + D) \cos(3\tau) = -\frac{1}{4} \cos(3\tau),$$

y agrupando términos se tiene que  $D = 1/32$  y  $C = 0$ . Por tanto, la solución particular tendrá la forma

$$u_{1,p}(\tau) = \frac{1}{32} \cos(3\tau).$$

La solución general para  $u_1$  será la suma de la solución homogénea y la solución particular

$$u_1(t) = A \cos(\tau) + B \sin(\tau) + \frac{1}{32} \cos(3\tau).$$

Imponiendo las condiciones iniciales, resulta que  $A = -1/32$  y  $B = 0$ , luego la solución aproximada de primer orden será

$$u_a(\tau) = \cos(\tau) + \epsilon \left( \frac{1}{32} \cos(3\tau) - \frac{1}{32} \cos(\tau) \right)$$

con  $\tau = t - \epsilon t/8 + \dots$

# Capítulo 3

## Perturbación singular

Un problema de perturbación regular  $P_\epsilon(y_\epsilon) = 0$  depende del parámetro  $\epsilon$  de tal manera que su solución  $y_\epsilon(t)$  converge cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  (uniformemente con respecto a la variable independiente  $t$  en el dominio relevante) a la solución  $y_0(t)$  del problema límite  $P_0(y_0) = 0$ . Un ejemplo de este tipo de problema es el sistema masa-resorte en un intervalo de tiempo finito visto anteriormente. El parámetro  $\epsilon$  generalmente representa la influencia de muchos factores físicos casi despreciables. Por lo general, prestamos especial atención a los problemas de valor en la frontera donde  $P_\epsilon$  está definido por operadores diferenciales y condiciones de frontera, aunque también se pueden estudiar ecuaciones integrales, operadores de otro tipo o condiciones auxiliares más globales. Bajo la suposición de suficiente regularidad, la solución de un problema de perturbación regular puede aproximarse mediante un desarrollo en potencias de  $\epsilon$ , cuyo término principal (o límite asintótico) es  $y_0$ .

Una perturbación singular se dice que ocurre siempre que el límite de la perturbación regular  $y_\epsilon(t) \rightarrow y_0(t)$  falla. Típicamente esto ocurre en intervalos cortos de tiempo o espacio (dependiendo de lo que represente la variable independiente) [10], aunque también son comunes los problemas seculares con comportamiento no uniforme en el infinito, como vimos en el caso del oscilador armónico.

Una posible definición de este tipo de problemas es la siguiente [9]:

**Definición 3.1.** En términos generales, un sistema en el que la supresión de pequeños parámetros es responsable de la degeneración de la dimensión se denomina un sistema de perturbación singular. Es decir, un problema descrito por una ecuación diferencial que involucra un pequeño parámetro  $\epsilon$  se llama un problema de perturbación singular si el orden de la ecuación diferencial se vuelve menor para  $\epsilon = 0$  que para  $\epsilon \neq 0$ .

Para comprender mejor el concepto de perturbación singular consideraremos un problema algebraico simple.

**Ejemplo 3.1** Consideremos la ecuación cuadrática

$$\epsilon x^2 + 2x + 1 = 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (3.1)$$

Esta ecuación podría resolverse de forma exacta, pero nuestro objetivo es ilustrar cuándo

el método de perturbación regular falla. La ecuación sin perturbar será

$$2x + 1 = 0,$$

que tiene como solución  $x = -1/2$ . Vemos que el problema sin perturbar, lineal, es distinto del problema original, que es cuadrático. Aplicamos el método de perturbación regular sustituyendo la serie

$$x = x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + \dots,$$

agrupando por potencias de  $\epsilon$  tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_0 + 1 &= 0, \\ x_0^2 + 2x_1 &= 0, \\ 2x_1x_0 + 2x_2 &= 0 \dots \end{aligned}$$

luego  $x_0 = -1/2$ ,  $x_1 = -1/8$ ,  $x_2 = -1/16 \dots$  Por tanto, la solución perturbada es

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\epsilon - \frac{1}{16}\epsilon^2 - \dots$$

Notemos que solo hemos obtenido una de las dos soluciones de la ecuación cuadrática. La perturbación regular supone que el término principal es del orden de la unidad, luego cabe esperar que solo obtenga una raíz, también del orden de la unidad. La otra raíz podría ser de un orden diferente, ya sea grande o pequeño. Para encontrar la segunda raíz debemos examinar los tres términos de la ecuación más detalladamente. Cuando eliminamos el término  $\epsilon x^2$  se tiene una raíz cercana a  $x = -1/2$ , y en este caso, el término  $\epsilon x^2$  es pequeño comparado con  $2x$  y  $1$ . Para conseguir la segunda raíz,  $\epsilon x^2$  puede no ser pequeño, por ejemplo si  $x$  es muy grande. Para despreciar algún término de la ecuación y hacer una simplificación existen dos opciones:

- $\epsilon x^2$  y  $1$  son del mismo orden, luego  $2x \gg 1$ .

En este caso tenemos que  $x \approx 1/\sqrt{\epsilon}$ . Por tanto, tomando el cambio de variable  $y = \sqrt{\epsilon}x$ , obtendríamos la siguiente ecuación

$$y^2 + \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}y + 1 = 0. \quad (3.2)$$

Luego, si  $\epsilon \rightarrow 0$  se tiene que  $y = 0$ , por lo que no podríamos obtener una posible solución.

- $\epsilon x^2$  y  $2x$  son del mismo orden, grandes comparados con la unidad.

Consideremos la nueva variable  $y$  que definiremos como

$$y = \frac{x}{1/\epsilon} = \epsilon x,$$

y con este cambio de variable en (3.1) se tiene

$$y^2 + 2y + \epsilon = 0. \quad (3.3)$$

De nuevo, consideremos la serie

$$y = y_0 + y_1\epsilon + y_2\epsilon^2 + \dots$$

y sustituyendo en (3.3) se obtiene

$$\begin{aligned} y_0^2 + 2y_0 &= 0, \\ 2y_0y_1 + 2y_1 + 1 &= 0, \dots \end{aligned}$$

luego  $y_0 = -2$ ,  $y_1 = 1/2$ , y por tanto

$$y = -2 + \frac{1}{2}\epsilon + \dots,$$

o en términos de  $x$

$$x = -\frac{2}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \dots,$$

como segunda raíz de la ecuación. En resumen, las dos raíces son de órdenes distintos y con un solo desarrollo no podemos obtener ambas. El razonamiento que usamos en este ejemplo se llama balance dominante, donde examinamos cada término y determinamos el balance de las posibles combinaciones. En las siguientes secciones veremos que este tipo de argumentos podemos aplicarlos también a ecuaciones diferenciales.

### 3.1. Problema de contorno

El problema que estudiaremos es

$$\begin{aligned} \epsilon y'' + 2y' + 2y &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Vemos de nuevo en este caso que si  $\epsilon = 0$ , el problema ya no es de segundo orden. Esto conduce a un problema de perturbación singular, aunque la singularidad puede ocurrir por otras razones. Para construir una aproximación de primer orden de la solución para un  $\epsilon$  pequeño, procederemos en cuatro pasos.

#### 3.1.1. Aproximación exterior y análisis de condiciones de contorno

Comenzaremos calculando la aproximación externa para el problema (3.4). Asumiremos que la solución se puede expresar como una serie de potencias de  $\epsilon$ , es decir

$$y(x) \approx y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \dots \tag{3.5}$$

Sustituyendo en (3.4) se obtiene

$$\epsilon(y_0'' + \epsilon y_1'' + \dots) + 2(y_0' + \epsilon y_1' + \dots) + 2(y_0 + \epsilon y_1 + \dots) = 0.$$

Por tanto, la solución de orden principal debe cumplir

$$y_0' + y_0 = 0,$$

con lo que  $y_0$  tendrá la siguiente expresión

$$y_0(x) = ae^{-x}, \quad (3.6)$$

donde  $a$  es una constante arbitraria. Notemos que en la solución (3.6) solo hay una constante arbitraria pero dos condiciones que cumplir correspondientes a  $x = 0$  y  $x = 1$ , lo que significa que la solución (3.6) y el desarrollo (3.5) son incapaces de describir la solución en todo el intervalo  $0 \leq x \leq 1$ . En este momento, no sabemos qué condición de contorno, si es que hay alguna, debe satisfacer  $y_0(x)$ , y la determinación de esto tendrá que hacerse más adelante.

Es razonable asumir como hipótesis que la ecuación (3.6) describe la solución en la mayor parte del intervalo, pero existe una capa límite en  $x = 0$  o  $x = 1$ , donde debe utilizarse una aproximación diferente. Dado que vamos a determinar aproximaciones de la solución en diferentes regiones, nos referiremos a la ecuación (3.6) como el primer término en el desarrollo de la solución externa.

### 3.1.2. Aproximación interior

Para analizar el comportamiento de la solución en la aproximación interior, supongamos que existen cambios significativos en  $y$  para intervalos de  $x$  muy pequeños, lo que sugiere cambiar la escala de la longitud en un orden en función de  $\epsilon$ . El cambio de variable que utilizaremos es

$$\bar{x} = \frac{x}{\epsilon^\alpha}, \quad (3.7)$$

donde  $\alpha > 0$ . A partir de este cambio de variable y aplicando la regla de la cadena tendremos

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} \frac{d}{d\bar{x}} = \frac{1}{\epsilon^\alpha} \frac{d}{d\bar{x}}.$$

Consideramos  $Y(\bar{x})$ , que denota la solución del problema usando el cambio de variable para la capa límite. Por tanto, (3.4) se escribirá como

$$\epsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + 2\epsilon^{-\alpha} \frac{dY}{d\bar{x}} + 2Y = 0, \quad (3.8)$$

donde

$$Y(0) = 0.$$

Hemos incluido la condición inicial de  $y(0) = 0$  porque la capa límite está en extremo izquierdo del intervalo.

El desarrollo de la solución aproximada de la capa límite será entonces

$$Y(\bar{x}) \approx Y_0(\bar{x}) + \epsilon^\gamma Y_1(\bar{x}) \dots$$

donde  $\gamma > 0$ . Ahora tendremos que encontrar el balance correcto entre los términos de la expresión anterior para encontrar cuánto vale  $\alpha$ . Supongamos que el primer y el segundo término de (3.8) son aproximadamente del mismo orden mientras que el tercer término es de un orden superior. Esto implica que  $1 - 2\alpha = -\alpha$ , luego  $\alpha = 1$ . En este caso tendríamos que el primer y segundo término son  $O(1/\epsilon)$  mientras que el tercero es  $O(1)$ .

Tenemos el siguiente problema a resolver

$$\begin{aligned} Y_0'' + 2Y_0' &= 0, \quad 0 < \bar{x} < \infty, \\ Y_0(0) &= 0. \end{aligned}$$

La solución general para este problema es

$$Y_0(\bar{x}) = A(1 - e^{-2\bar{x}}), \quad (3.9)$$

donde  $A$  es una constante. El desarrollo de la capa límite en la ecuación (3.8) está destinada a describir la solución en un entorno de  $x = 0$ . Por lo tanto, podemos esperar que la solución externa (3.6) se aplique en el resto del intervalo. Esto significa que la solución externa debe satisfacer la condición de contorno en  $x = 1$ . Al imponer la condición de contorno derecha para la solución externa se obtiene

$$y_0(x) = e^{1-x}.$$

Si suponemos que el primer y tercer término de (3.8) son del mismo orden entonces  $\alpha = 1/2$ , y la ecuación quedaría como

$$\frac{dY_0}{d\bar{x}} = 0, \quad Y_0 = 0.$$

por tanto, la solución general para este problema sería  $Y_0 = 0$ .

### 3.1.3. Matching

La clave ahora es que tanto la capa interna como la externa son aproximaciones de la misma función. Por lo tanto, en la región de transición entre las capas interna y externa, deberíamos esperar que ambos desarrollos den el mismo resultado. Esto se logra al exigir que el valor de  $Y_0$  cuando se sale de la capa límite (es decir, cuando  $\bar{x} \rightarrow \infty$ ) sea igual al valor de  $y_0$  al entrar en la capa límite (es decir, cuando  $x \rightarrow 0$ ). En otras palabras, requerimos que:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} Y_0(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x). \quad (3.10)$$

De esta condición, considerando la aproximación (3.9), obtenemos que  $A = e$ . Sustituyendo en (3.9) se tiene que

$$Y_0(\bar{x}) = e - e^{1-2\bar{x}}.$$

En el caso de suponer que el primer y tercer término son del mismo orden vemos que no es posible hacer cumplir la condición de matching, ya que la solución en la capa externa no será nula cuando  $x \rightarrow 0$ . Por tanto, el balance correcto es el considerado en la primera opción. Así quedan descritas las capas interna y externa. El último paso consistirá en combinar ambas en una sola expresión. A menudo utilizaremos la condición (3.10), aunque es importante notar que su aplicabilidad es limitada y, para problemas más complejos se requiere un procedimiento más sofisticado.

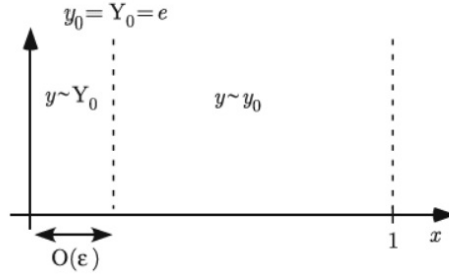


Figura 3.1: Esquema de las regiones interna y externa y sus aproximaciones

### 3.1.4. Aproximación uniforme

Nuestra descripción de la solución consta de dos partes: una que se aplica cerca de  $x = 0$  y otra que funciona en el resto del intervalo. Debido a que ninguna de estas soluciones puede usarse en todo el intervalo, no son válidas de forma uniforme para  $0 \leq x \leq 1$ . Ahora nos preguntamos si es posible combinarlas para producir una aproximación uniforme, es decir, una que funcione en todo el intervalo. Superponiendo ambas soluciones y restando la constante común en la zona de solapamiento, que tendrá el valor  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} Y_0(\bar{x})$  o  $\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x)$ , construimos una solución aproximada válida para todo el intervalo. El hecho de que sean iguales es una consecuencia de la condición (3.10).

El resultado de la aproximación uniforme, que representará el comportamiento de la solución en las dos regiones definidas, será

$$y_0(x) + Y_0(x/\epsilon) - y_0(0) = e^{1-x} - e^{1-2x/\epsilon}.$$

Notemos que satisface exactamente la condición de contorno en  $x = 0$ , pero la de  $x = 1$  solo se cumple de forma asintótica. Esto no es particularmente preocupante, ya que el desarrollo también satisface la ecuación diferencial en un sentido asintótico.

A continuación describiremos un procedimiento general para abordar un problema de perturbación singular como es el caso del ejemplo anterior.

## 3.2. Procedimientos generales

Hemos visto en el ejemplo anterior que la capa límite tenía lugar en  $x = 0$ . En general, las capas límite pueden ocurrir en cualquier punto del intervalo; de hecho, pueden darse múltiples capas límite en el mismo problema.

Al resolver un problema, se debe asumir inicialmente una capa límite en  $x = 0$  (o en el extremo izquierdo) y luego proceder. Si la hipótesis es incorrecta, el procedimiento fallará al intentar igualar las aproximaciones internas y externas. En este caso supondremos que una capa límite está en el extremo derecho. El análisis es exactamente el mismo, pero la transformación de escala para definir la variable interna en la capa límite del extremo derecho se convierte en

$$\xi = \frac{x_0 - x}{\delta(\epsilon)},$$

donde  $x = x_0$  es el extremo derecho del intervalo, e  $Y(\xi) = y(x_0 - \delta(\epsilon)\xi)$ . Según la regla de la cadena, las derivadas podrán escribirse como sigue

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\delta(\epsilon)} \frac{dY}{d\xi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\delta(\epsilon)^2} \frac{d^2Y}{d\xi^2}.$$

La condición que imponremos entre las capas límites es

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} Y_0(\xi) = \lim_{x \rightarrow x_0} y_0(x). \quad (3.11)$$

Es decir, el límite de la solución interna (a medida que la variable interna sale de la capa límite) es igual al límite de la solución externa (a medida que la variable externa entra en la capa límite).

Además, aunque los ejemplos anteriores muestran una anchura de capa límite de  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ , este no es siempre el caso. Solo hemos igualado las aproximaciones de orden principal de las soluciones interna y externa. Los procedimientos de igualación refinados pueden incluir igualar los términos de mayor orden en los desarrollos. La existencia de un dominio de solapamiento implica que el desarrollo interno de la solución externa debe, hasta órdenes apropiados, coincidir con el desarrollo externo de la solución interna [12].

Finalmente, señalamos que este método no es una técnica universal. Para ciertos problemas este procedimiento funciona, pero en otros casos se deben hacer cambios significativos. La perturbación singular es un campo de investigación actual en Matemática Aplicada y solo existe una teoría rigurosa para cierto tipo de ecuaciones diferenciales. Nos centraremos por el momento en este resultado relativo a ecuaciones lineales con coeficientes variables [8].

**Teorema 4.4.1** Consideramos el problema de contorno

$$\epsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (3.12)$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad (3.13)$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son funciones continuas en  $0 \leq x < 1$  con  $p(x) > 0$ . Entonces existen capas límite en  $x = 0$  con aproximaciones interna y externa que vienen dadas por

$$Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = C_1 + (a - C_1)e^{-p(0)x/\epsilon}, \quad (3.14)$$

$$y_0(x) = b \exp\left(\int_x^1 \frac{q(s)}{p(s)} ds\right). \quad (3.15)$$

donde

$$C_1 = b \exp\left(\int_0^1 \frac{q(s)}{p(s)} ds\right). \quad (3.16)$$

**Demostración**

Demostraremos que la hipótesis sobre una capa límite en  $x = 0$  es consistente y que da lugar a las aproximaciones descritas anteriormente. Si la capa límite se encuentra en  $x = 0$ , entonces la solución externa  $y_0(x)$  satisface que

$$p(x)y_0' + q(x)y_0 = 0$$

y la condición  $y_0(1) = b$ . Dado que  $p(x) > 0$  para  $0 \leq x < 1$  podemos dividir ambos lados de la ecuación y obtendremos

$$y_0'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}y_0(x) = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} = -\frac{q(x)}{p(x)}.$$

Integrando ambos lados de la igualdad y tomando exponenciales se tiene

$$\ln(y_0(x)) = -\int_0^x \frac{q(s)}{p(s)}ds + C$$

luego la solución tendrá la siguiente expresión

$$y_0(x) = K \exp\left(-\int_0^x \frac{q(s)}{p(s)}ds\right). \quad (3.17)$$

Aplicando la condición de contorno  $y_0(1) = b$ , tenemos que

$$b = K \exp\left(-\int_0^1 \frac{q(s)}{p(s)}ds\right),$$

lo cual implica que

$$K = b \exp\left(\int_0^1 \frac{q(s)}{p(s)}ds\right)$$

y sustituyendo la expresión de  $K$  en (3.17) se tiene

$$y_0(x) = b \exp\left(\int_x^1 \frac{q(s)}{p(s)}ds\right),$$

que coincide con la expresión de (3.15). En la capa límite introduciremos la variable  $\xi$  definida por  $\xi = x/\delta(\epsilon)$ , donde  $\delta(\epsilon)$  se debe determinar. Si  $Y(\xi) = y(\delta(\epsilon)\xi)$ , la ecuación diferencial pasa a ser

$$\frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)^2}Y'' + \frac{p(\delta(\epsilon)\xi)}{\delta(\epsilon)}Y' + q(\delta(\epsilon)\xi)Y = 0. \quad (3.18)$$

Cuando  $\xi \rightarrow 0^+$ , los coeficientes se comportan como

$$\frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)^2}, \quad \frac{p(0)}{\delta(\epsilon)}, \quad q(0).$$

Haciendo balance entre los coeficientes de los dos primeros términos,  $\epsilon/\delta(\epsilon)^2 \sim p(0)/\delta(\epsilon)$ , y por tanto la capa límite tendrá un espesor de  $\delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ . Tomando  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ , (3.18) puede reescribirse como

$$Y'' + p(\epsilon\xi)Y' + \epsilon q(\epsilon\xi)Y = 0,$$

cuyo término de orden principal es

$$Y_0'' + p(0)Y_0' = 0,$$

y su solución general es

$$Y_0(\xi) = C_1 + C_2 e^{-p(0)\xi}.$$

Aplicando la primera condición de contorno, se tiene que  $C_2 = a - C_1$  y la aproximación interna es

$$Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = C_1 + (a - C_1)e^{-p(0)x/\epsilon}.$$

Para unir las dos aproximaciones, introduciremos la variable intermedia  $\eta = x/\sqrt{\epsilon}$ . El matching (3.10) implica entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} Y_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y_0(\sqrt{\epsilon}\eta), \quad (3.19)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( C_1 + (a - C_1)e^{-p(0)\eta/\sqrt{\epsilon}} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( b \exp \left( \int_{\sqrt{\epsilon}\eta}^1 \frac{q(s)}{p(s)} ds \right) \right),$$

con lo que

$$C_1 = b \exp \left( \int_0^1 \frac{q(s)}{p(s)} ds \right),$$

y por tanto la aproximación interna viene dada por (3.14) y (3.16), como queríamos demostrar.  $\square$

Una aproximación compuesta uniforme vendrá dada por

$$y_u(x) = y_0(x) + Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - C_1 = y_0(x) + (a - C_1)e^{-\frac{p(0)x}{\epsilon}}.$$

### 3.3. Capas múltiples

En esta sección, aplicaremos las ideas anteriores y las ampliaremos a problemas más complicados. A continuación estudiaremos qué sucede cuando hay múltiples capas límite. Para ello vamos a considerar el siguiente problema donde tendremos una capa límite en cada uno de los extremos del intervalo [5]

$$\epsilon^2 y'' + \epsilon x y' - y = -e^x \quad \text{para } 0 < x < 1, \quad (3.20)$$

donde

$$y(0) = 2, \quad e \quad y(1) = 1.$$

Vemos que en este caso los coeficientes de la ecuación dependen de  $x$ . Las múltiples capas límites no son debidas a esto, pero como veremos, esto resulta en diferentes ecuaciones para cada capa.

### 3.3.1. Solución de orden principal

Supongamos que la solución de este problema tiene la forma

$$y(x) \approx y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x).$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (3.20), se tiene que la solución de orden principal es

$$y_0(x) = e^x. \quad (3.21)$$

Es evidente que esta función es incapaz de satisfacer ninguna de las condiciones de contorno del problema, lo cual indica que tenemos una capa límite en cada uno de los extremos del intervalo.

### 3.3.2. Capas límite y matching

Comenzaremos estudiando la capa límite en el extremo izquierdo. Considerando la coordenada  $\bar{x} = x/\epsilon^\alpha$ , podemos reescribir la ecuación (3.20) de la siguiente forma

$$\epsilon^{2-2\alpha} \frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + \epsilon \bar{x} \frac{dY}{d\bar{x}} - Y = -e^{\epsilon^\alpha \bar{x}}. \quad (3.22)$$

Notemos que podemos escribir

$$e^{\epsilon^\alpha \bar{x}} \approx 1 + \epsilon^\alpha \bar{x} + \dots$$

De nuevo, utilizaremos  $Y(\bar{x})$  para designar la solución en la región de la capa límite. Tomando  $\alpha = 1$  y utilizando el desarrollo en serie de  $Y \approx Y_0(\bar{x}) + \dots$ , obtenemos el siguiente problema de primer orden

$$Y_0'' - Y_0 = -1, \quad 0 < \bar{x} < \infty, \quad (3.23)$$

donde

$$Y_0(0) = 2. \quad (3.24)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de coeficientes constantes no homogénea cuya solución será la suma de una solución homogénea y una solución particular. Dado que las raíces de su polinomio característico son  $r_1 = 1$  y  $r_2 = -1$  la solución tendrá la forma

$$Y_0(\bar{x}) \approx 1 + A_1 e^{-\bar{x}} + A_2 e^{\bar{x}}.$$

Aplicando la condición  $Y(0) = 2$ , tendremos que  $2 = 1 + A_1 + A_2$ , luego la solución en la capa límite tendrá la forma

$$Y_0(\bar{x}) \approx 1 + A_1 e^{-\bar{x}} + (1 - A_1) e^{\bar{x}}.$$

Esta solución debe de cumplir la condición  $Y_0(\infty) = y_0(0) = 1$  para poder combinarla con la solución de orden principal. De esta forma se tiene que  $A_1 = 1$ . Es decir,

$$Y_0(x/\epsilon) = 1 + e^{-x/\epsilon}. \quad (3.25)$$

Para determinar la solución en la capa límite del extremo derecho, vamos a considerar la siguiente coordenada

$$\tilde{x} = \frac{x-1}{\epsilon^\beta}.$$

La solución en esta región la escribiremos como  $\tilde{Y}(\tilde{x})$ . Introduciendo esta variable en (3.20) y teniendo en cuenta que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\epsilon^\beta} \frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon^{2\beta}} \frac{d^2\tilde{Y}}{d\tilde{x}^2},$$

podemos reescribir la ecuación (3.20) como

$$\epsilon^{2-2\beta} \frac{d^2\tilde{Y}}{d\tilde{x}^2} + \epsilon^{1-\beta}(1 + \epsilon^\beta \tilde{x}) \frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{x}} - \tilde{Y} = -e^{1+\epsilon^\beta \tilde{x}}.$$

Para el caso donde  $\beta = 1$ , sustituyendo el desarrollo  $\tilde{Y} \approx \tilde{Y}_0 + \epsilon \tilde{Y}_1 + \dots$  en la ecuación y agrupando en potencias de  $\epsilon$  obtendremos el siguiente problema

$$\tilde{Y}_0'' + \tilde{Y}_0' - \tilde{Y}_0 = -e, \quad -\infty < \tilde{x} < 0, \quad (3.26)$$

donde

$$\tilde{Y}_0(0) = 1.$$

La ecuación (3.26) tiene al menos un término en común,  $\tilde{Y}_0$ , con la ecuación del problema principal (3.20). De nuevo tenemos una ecuación lineal con coeficientes constantes no homogénea, cuyas raíces de su polinomio característico son  $r_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$  y  $r_2 = (-1 - \sqrt{5})/2$ . La solución general a este problema es

$$\tilde{Y}_0(\tilde{x}) = e + B e^{\tilde{x}(-1+\sqrt{5})/2} + (1 - e - B) e^{\tilde{x}(-1-\sqrt{5})/2}. \quad (3.27)$$

La condición para poder combinar la solución de la capa límite y la región de orden principal es la misma que anteriormente, pero al estar estudiando la región del extremo derecho podremos expresarla como  $\tilde{Y}_0(-\infty) = y_0(1)$ . Por tanto, de (3.27) se tiene que  $B = 1 - e$ . Es decir,

$$\tilde{Y}_0((x-1)/\epsilon) = e + (1 - e) e^{\frac{x-1}{\epsilon} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}. \quad (3.28)$$

### 3.3.3. Aproximación uniforme

Como vimos en la sección anterior, el último paso consiste en combinar los tres desarrollos en una sola expresión. La forma de hacerlo es sumar los tres desarrollos y eliminar las partes comunes. De (3.21), (3.25) y (3.28), el desarrollo de primer orden de la solución para el intervalo de estudio es

$$y \approx y_0(x) + Y_0(\bar{x}) - Y_0(\infty) + \tilde{Y}_0(\tilde{x}) - \tilde{Y}_0(-\infty) \approx e^x + e^{-x/\epsilon} + (1 - e) e^{\frac{(-1+\sqrt{5})(x-1)}{2\epsilon}}$$

En la figura 3.2 podemos ver las capas límites en los extremos del intervalo, la aproximación de orden principal y cómo se ajustan ambas funciones según decrece el valor de  $\epsilon$ . Para representar la solución exacta hemos utilizado un código en Matlab basado en la función *bvp4c*, con tolerancia  $10^{-10}$  utilizado para resolver problemas de contorno.

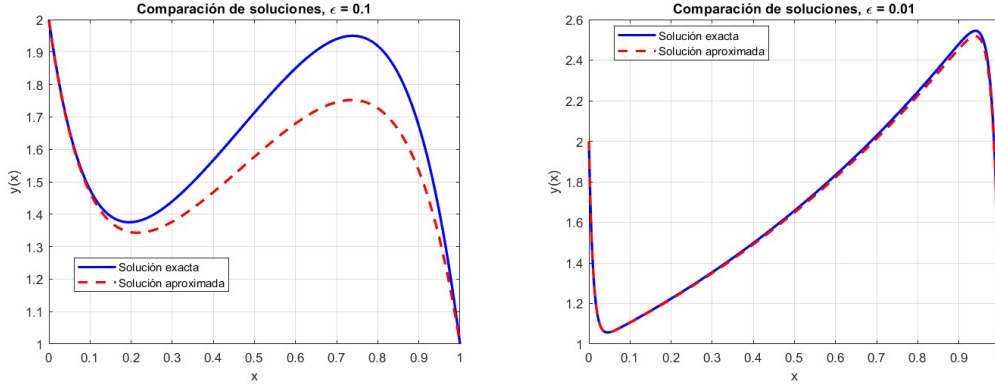


Figura 3.2: Solución aproximada por el método de perturbación singular y la solución exacta

### 3.3.4. Ecuaciones no lineales

A continuación veremos algunas complicaciones que surgen al usar el método de perturbación singular en ecuaciones no lineales. En el caso siguiente la solución de la ecuación no lineal se define de manera implícita

$$\epsilon y'' + \epsilon y' - e^y = -2 - x, \quad 0 < x < 1, \quad (3.29)$$

donde  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ . La expresión del término de orden principal podemos obtenerla asumiendo que  $\epsilon = 0$

$$e^{y_0} = 2 + x.$$

Por tanto, la solución en esta región es

$$y_0(x) \approx \ln(x + 2).$$

Notemos que esta función no cumple ninguna de las dos condiciones de contorno, luego tenemos una capa límite en cada uno de los extremos del intervalo.

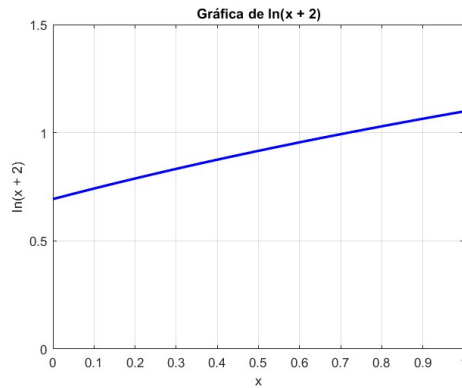


Figura 3.3: Solución en la región de orden principal

Para estudiar la capa límite en el extremo izquierdo vamos a considerar la coordenada  $\bar{x} = x/\sqrt{\epsilon}$ . Sustituyendo esta coordenada en (3.29) y aplicando la regla de la cadena

podemos reescribir el problema como

$$\frac{dY^2}{d\bar{x}^2} + \epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{dY}{d\bar{x}} - e^Y = -2 - \bar{x}\sqrt{\epsilon},$$

y tomando  $Y \approx Y_0$  obtenemos la ecuación no lineal

$$Y_0'' - e^{Y_0} = -2,$$

donde  $Y_0(0) = 0$ . Multiplicando por  $Y_0'$  a ambos lados de la ecuación e integrando se tiene, para cierta constante  $B$ ,

$$\frac{1}{2}(Y_0')^2 = B - 2Y_0 + e^{Y_0}.$$

Luego la expresión para  $Y_0'$  es

$$Y_0' = \pm \sqrt{2(B - 2Y_0 + e^{Y_0})}. \quad (3.30)$$

Asumiremos que  $Y'(\bar{x}) \rightarrow 0$  cuando  $\bar{x} \rightarrow \infty$  y que  $Y(\bar{x}) \rightarrow y_0(0) = \ln(2)$  cuando  $\bar{x} \rightarrow \infty$ . Con estas hipótesis, se tiene que  $B = 2(1 - \ln(2))$ .

Notemos que la solución en la capa límite aumentará de  $Y_0(0) = 0$  a  $Y_0(\infty) = y_0(0) = \ln(2)$ , luego tomaremos el signo positivo de la derivada. Separando variables en (3.30) e integrando obtenemos que

$$\int_0^{Y_0} \frac{ds}{\sqrt{2(B - 2s + e^s)}} = \bar{x}. \quad (3.31)$$

Luego la solución de orden  $O(1)$  para la capa límite  $Y_0$  viene definida de forma implícita en función de  $\bar{x}$ . Para estudiar la capa límite en el extremo derecho del intervalo,  $x = 1$ , utilizaremos la coordenada  $\tilde{x} = (x - 1)/\sqrt{\epsilon}$  para reescribir (3.29) como

$$\frac{d\tilde{Y}^2}{d\tilde{x}^2} + \epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{x}} - e^{\tilde{Y}} = -3 - \tilde{x}\sqrt{\epsilon}.$$

Tomando  $Y \approx Y_0$  obtenemos la ecuación no lineal

$$\tilde{Y}_0'' - e^{\tilde{Y}_0} = -3.$$

Análogamente, suponiendo que  $\tilde{Y}'(-\infty) = 0$  tendremos que la solución en la capa límite del extremo derecho viene descrita de la siguiente forma implícita

$$\int_0^{\tilde{Y}_0} \frac{ds}{\sqrt{2(A - 3s + e^s)}} = -\tilde{x}.$$

siendo  $A = 3(-1 + \ln(3))$  y donde se ha elegido el signo  $-$  porque  $\tilde{Y}_0(-\infty) = y_0(1) = \ln(3)$  e  $\tilde{Y}_0(0) = 1$

Para obtener una solución uniforme en todo el intervalo, sumaremos las tres expresiones y eliminaremos la parte común. Luego la solución descrita de forma implícita es

$$y \approx y_0(x) + Y_0(\bar{x}) - y_0(0) + \tilde{Y}_0(\tilde{x}) - y_0(1) \approx \ln\left(\frac{1}{6}(x + 2)\right) + Y_0(\bar{x}) + \tilde{Y}_0(\tilde{x}).$$

## 3.4. Problemas de valor inicial

### 3.4.1. Problema lineal de valor inicial de primer orden

Consideramos el problema

$$\epsilon \dot{x} + x = 1,$$

con  $x(0)$  fijo, donde  $\epsilon$  es un parámetro pequeño positivo. Podemos anticipar dificultades a la hora de resolver el problema para cualquier intervalo  $(0, t)$  con  $t > 0$  debido a la constante de Lipschitz  $1/\epsilon$ , que debe estar acotada para la validez de la mayoría de las teorías de existencia y unicidad, y que en este caso no está acotada cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Notemos que la presencia del parámetro  $\epsilon$  antes de la derivada más alta en la ecuación diferencial, aunque no tiene por qué llevarnos a un problema de perturbación singular, es un indicio de la posibilidad de este. Esta ecuación tiene como solución

$$x(t, \epsilon) = 1 + (x(0) - 1)e^{-t/\epsilon}.$$

Para  $\epsilon < 0$  y  $x(0) \neq 1$  la solución no está acotada para  $\epsilon \rightarrow 0$  para cualquier  $t > 0$ . Para  $\epsilon > 0$ , sin embargo, la solución tiende a 1 para cualquier  $t > 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si  $x(0) \neq 1$ , entonces  $x(t, \epsilon)$  tendrá una discontinuidad en  $t = 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  ya que

$$x(t, \epsilon) \rightarrow \begin{cases} x(0), & t = 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Esto muestra que la convergencia no es uniforme cerca de  $t = 0$ . La región de convergencia no uniforme se dice que tiene un grosor de  $O(\epsilon)$ . A este intervalo de convergencia no uniforme lo llamaremos una *capa límite*.

Es importante observar que la solución exacta de este problema de perturbación singular es la suma de (i) una función de la variable independiente  $t$  y (ii) una función del tiempo "*estirado*"

$$\tau = \frac{t}{\epsilon}$$

que decae a cero cuando  $\tau \rightarrow \infty$ . La *solución exterior* será

$$X(t, \epsilon) = 1, \tag{3.32}$$

que es una solución regular de la ecuación diferencial que nos proporciona una solución asintótica para  $t > 0$ , y la corrección de la capa inicial

$$\xi(\tau, \epsilon) = e^{-\tau}(x(0) - 1)$$

proporciona la convergencia no uniforme en la capa límite cerca de  $t = 0$ .

Una técnica alternativa para encontrar una solución aproximada al problema sería buscar de forma separada una solución para la región *interna*,  $\tau \geq 0$ , y otra para la región *externa* en  $t > 0$ , e igualarlas en el límite de ambas zonas. Buscaremos primero la solución interna  $\bar{x}(\tau, \epsilon) = x(t/\epsilon, \epsilon)$  con  $\tau \geq 0$ . El problema en la región interior toma la siguiente forma

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = -(\bar{x} - 1), \quad \bar{x}(0) = x(0), \tag{3.33}$$

que para todos los valores de  $\epsilon$ , tiene como solución

$$\bar{x}(\tau, \epsilon) = 1 + (x(0) - 1)e^{-\tau}$$

para  $\tau \geq 0$ . En particular notemos que  $\bar{x}(\infty, \epsilon) = 1$ . Busquemos una solución exterior como solución regular a

$$\epsilon \dot{X} + X = 1$$

haciendo uso del desarrollo en serie de potencias

$$X(t, \epsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(t) \epsilon^j. \quad (3.34)$$

Igualando coeficientes de potencias de  $\epsilon$  en ambos lados de la ecuación obtenemos que

$$X_0 = 1,$$

y para  $j > 0$

$$X_j = -\dot{X}_{j-1}.$$

Luego  $X_j(t) = 0$  para cada  $j > 0$ , y por tanto la solución externa será

$$X(t, \epsilon) = X_0(t) = 1, \quad (3.35)$$

que es constante para  $t$  y  $\epsilon$ .

### 3.4.2. Sistema masa-resorte amortiguado

El modelo que describe el movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento lineal es

$$m\ddot{y} + a\dot{y} + ky = 0 \quad (3.36)$$

donde  $m$  es la masa,  $k$  la constante correspondiente al muelle y  $a$  la constante de amortiguamiento. Suponemos que el desplazamiento en el momento inicial es nulo y que la masa se pone en movimiento a través de un impulso inicial positivo,  $I$ . De esta forma, las condiciones iniciales son

$$y(0) = 0, \quad m\dot{y}(0) = I.$$

Por ser esta una ecuación lineal con coeficientes constantes homogénea de segundo orden, sus soluciones dependerán de las raíces de su polinomio característico

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + a\lambda + k = 0,$$

es decir, de los valores

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4mk}}{2m}.$$

Dependiendo del valor del discriminante  $a^2 - 4mk$ , tendremos tres tipos de oscilaciones:

- Modelo subamortiguado:  $4km > a^2$
- Modelo sobreamortiguado:  $a^2 > 4km$

- Modelo críticamente amortiguado:  $a^2 = 4km$

Consideraremos en este trabajo el caso en el que se tiene una masa de magnitud muy pequeña, con lo que estaríamos en el segundo caso de los expuestos anteriormente. El impulso positivo dado a la masa causará un desplazamiento rápido hasta un valor máximo, momento en el cual la fuerza del resorte intentará restaurarla a su posición de equilibrio. Dado que la masa es pequeña, habrá muy poca inercia, y por lo tanto, no oscilará alrededor del equilibrio; el sistema está fuertemente sobreamortiguado [11].

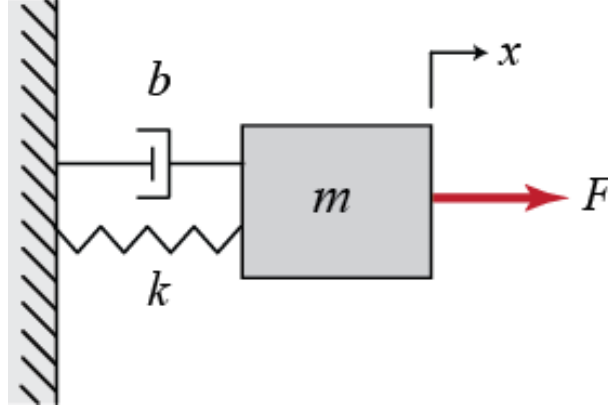


Figura 3.4: Sistema masa-resorte amortiguado [2].

Comenzaremos por redefinir el problema con el objetivo de hacerlo adimensional. Las variables independiente y dependiente son  $t$  e  $y$  respectivamente, cuyas dimensiones son tiempo  $T$  y longitud  $L$ . Las constantes  $m$ ,  $a$ ,  $k$  e  $I$  tienen las dimensiones

$$[m] = M, \quad [a] = MT^{-1}, \quad [k] = MT^{-2}, \quad [I] = MLT^{-1}$$

donde  $M$  es la dimensión de la masa. Al hacer el balance entre la masa y el amortiguamiento, la inercia y el término correspondiente al muelle y entre el amortiguamiento y el muelle, respectivamente, obtenemos tres escalas posibles para el tiempo

$$\frac{m}{a}, \quad \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \frac{a}{k}.$$

Las posibles escalas de longitud son

$$\frac{I}{a}, \quad \frac{I}{\sqrt{km}}, \quad \frac{aI}{km}. \quad (3.37)$$

Suponemos que  $m \ll 1$ , y por tanto  $m/a \ll 1$ ,  $\sqrt{m/k} \ll 1$ ,  $I/\sqrt{km} \gg 1$ , y  $\frac{aI}{km} \gg 1$ . Estas relaciones serán importantes para determinar las escalas apropiadas de tiempo y longitud, de forma que las variables sean de orden 1.

En la región cercana a  $t = 0$ , donde hay un cambio abrupto, esperamos utilizar una escala de tiempo corta, que definiremos como fase inicial. En general, el problema tiene las características de un problema de perturbación singular, es decir, múltiples escalas de tiempo y un parámetro pequeño multiplicando el término de la derivada de mayor orden. De las escalas de longitud dadas en (3.37), utilizaremos  $I/a$ .

De las escalas de tiempo, solo  $a/k$  es del orden de la unidad. Las otras dos son pequeñas, y por tanto una puede ser adecuada en la capa inicial cerca de  $t = 0$ . Dado que  $m/a$  depende de la masa y el amortiguamiento, y  $m/k$  depende de la masa y el resorte, supondremos que  $m/a$  será dominante. Esta suposición se debe a los procesos dominantes durante las primeras etapas del movimiento: la alta velocidad inicial debería influir más en la fuerza de amortiguamiento que en la fuerza debida al muelle. Por tanto los términos  $m\ddot{y}$  y  $a\dot{y}$  deberían dominar en la fase inicial, mientras que  $m\ddot{y}$  deberá ser de un orden pequeño para una fase más avanzada.

Por tanto, las nuevas variables para el problema adimensional serán

$$\bar{t} = \frac{t}{a/k}, \quad \bar{y} = \frac{y}{I/a}.$$

Esta escala será la apropiada para estudiar la fase externa, lejos de la fase inicial alrededor de  $t = 0$ . Sustituyendo estas variables en (3.36) se tiene

$$\epsilon \bar{y}'' + \bar{y}' + \bar{y} = 0, \quad \bar{y}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \epsilon \bar{y}'(0) = 1, \quad (3.38)$$

donde estamos considerando la derivada respecto  $\bar{t}$ , y la constante adimensional  $\epsilon = mk/a^2 \ll 1$ . Tomando  $\epsilon = 0$ , la solución de orden principal debe de cumplir

$$\bar{y}' + \bar{y} = 0,$$

cuya solución es

$$\bar{y}_0(\bar{t}) = Ce^{-\bar{t}},$$

la cual no puede cumplir la condición inicial. Por tanto, para obtener la solución en la fase inicial, vamos a reescalar el problema utilizando las variables

$$\tau = \frac{\bar{t}}{\delta(\epsilon)}, \quad Y = \bar{y}.$$

Sustituyendo en (3.38) se tiene

$$\frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)^2} Y'' + \frac{1}{\delta(\epsilon)} Y' + Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad \frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)} Y'(0) = 1.$$

Tomando  $\delta(\epsilon) = \epsilon$  podemos reescribir el problema diferencial como

$$Y'' + Y' + \epsilon Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1.$$

Suponiendo de nuevo que  $\epsilon = 0$ , la aproximación de la fase inicial será  $Y_0(\tau) = A + Be^{-\tau}$ . De la condición inicial  $Y(0) = 0$  se obtiene que  $B = -A$ , y como  $Y'(0) = 1$ ,  $A = 1$ . Por tanto, la aproximación interna es

$$\bar{Y}_0(\tau) = 1 - e^{-\tau}.$$

Ambas soluciones deben cumplir la condición de matching para conseguir una solución uniforme en todo el dominio, es decir,

$$\lim_{\bar{t} \rightarrow 0} \bar{y}_0(\bar{t}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y_0(\tau),$$

luego  $C = 1$ . De esta forma tomemos como aproximación a una solución uniforme en todo el intervalo de estudio

$$\bar{y}_u(\bar{t}) = \bar{y}_0(\bar{t}) + Y_0(\bar{t}/\epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} y_0(\bar{t}) = e^{-\bar{t}} - e^{-\bar{t}/\epsilon},$$

que en términos de las variables originales, es

$$y_u(t) = \frac{I}{a}(e^{-kt/a} - e^{-at/m}).$$

En la figura 3.5, se muestra la evolución del desplazamiento de la masa en función del tiempo. Se observa un cambio abrupto en la capa límite alrededor de  $t = 0$ , donde el desplazamiento alcanza un máximo. Posteriormente, la masa regresa a su posición de equilibrio sin oscilaciones, debido a la baja inercia del sistema. En este caso se ha utilizado la función *ode45* para obtener la solución numérica de la ecuación diferencial, donde se ha representado el problema adimensional con un  $\epsilon = 0,01$ .

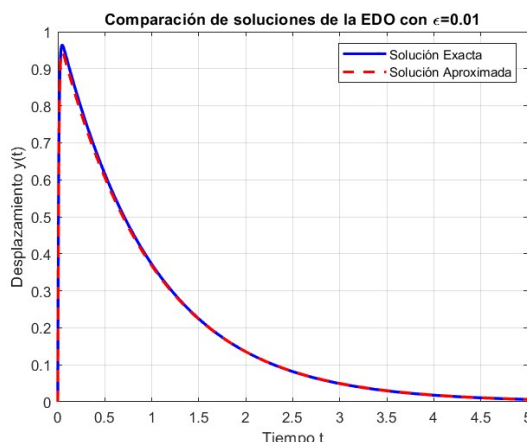


Figura 3.5: Desplazamiento  $y$  frente al tiempo  $t$

El diagrama de fases del sistema masa-resorte muestra la relación entre el desplazamiento  $y(t)$  (posición de la masa en el sistema) y la velocidad  $y'(t)$  (derivada del desplazamiento). En la figura 3.6 vemos que, para un sistema sobreamortiguado, la trayectoria es una curva que converge suavemente hacia el punto de equilibrio sin oscilaciones. En el caso de un sistema subamortiguado, la trayectoria oscilaría alrededor del equilibrio antes de estabilizarse.

### 3.4.3. Problema no lineal de la cinética de las enzimas

En las ecuaciones diferenciales de la cinética química es común que aparezcan fenómenos de perturbación singular, ya que las reacciones en cadena a menudo ocurren en escalas de tiempo diferentes. Por ejemplo, puede suceder que algunas sustancias químicas intermedias permanezcan durante un breve espacio de tiempo, y las reacciones que las generan pueden ser ignoradas, lo que conduce a una simplificación del sistema. Muchas reacciones en procesos metabólicos son catalizadas por enzimas. Las enzimas son proteínas que pueden reaccionar con sustratos moleculares para descomponerlos; aceleran significativamente la reacción y reducen la energía de activación.

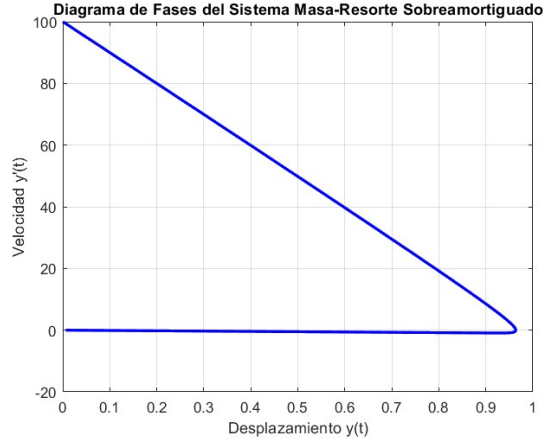
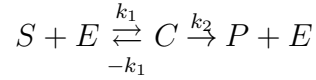


Figura 3.6: Diagrama de fases de un sistema sobreamortiguado

Una reacción enzimática que sirve como modelo para muchos otros procesos biológicos es la siguiente



donde S es un sustrato que es convertido de manera irreversible por una enzima E en un producto P, y también existe un complejo intermedio sustrato-enzima, C. La formación del complejo C es una reacción rápida, y generalmente la concentración inicial de la enzima es pequeña en comparación con la del sustrato. Usando la ley de acción de masas, tomaremos las tasas de reacción como proporcionales a las concentraciones de los reactivos.

Introduciendo s, e, c y p para denotar las concentraciones respectivas de S, E, C y P, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -k_1 se + k_{-1}c, \\ \frac{de}{dt} = -k_1 se + (k_{-1} + k_2)c, \\ \frac{dc}{dt} = k_1 se - (k_{-1} + k_2)c, \\ \frac{dp}{dt} = k_2 c, \end{cases}$$

donde suponemos que  $s(0) = s_0 > 0$ ,  $e(0) = e_0 > 0$ ,  $p(0) = 0$  y  $c(0) = 0$ . Como  $d(e + c)/dt = 0$  y  $d(s + c + p)/dt = 0$ ,

$$e(t) = e_0 - c(t)$$

y

$$p(t) = s_0 - s(t) - c(t),$$

luego seguimos teniendo un problema de valor inicial para las concentraciones s y c

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c, & s(0) = s_0, \\ \frac{dc}{dt} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2)c, & c(0) = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Suponemos que  $dc/dt \approx 0$ , luego  $c \approx k_1 e_0 s / (k_1 s + k_{-1} + k_2)$ . Sustituyendo la expresión de  $c$  se tiene

$$\frac{ds}{dt} \approx -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1}) \frac{k_1 e_0 s}{(k_1 s + k_{-1} + k_2)} \approx \frac{-k_2 k_1 e_0 s}{(k_1 s + k_{-1} + k_2)}.$$

Este enfoque de estado cuasi-estacionario fija una de las derivadas del sistema a cero, pero conserva la otra. Para comprender mejor el comportamiento de la solución vamos a reescalar las variables

$$x(\tau) = \frac{s(t)}{s_0}, \quad y(\tau) = \frac{c(t)}{e_0} \quad y \quad \tau = \frac{t}{T},$$

Sustituyendo las nuevas variables en (3.40) se tiene

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -k_1 e_0 T x + (k_1 s_0 x + k_{-1}) T \frac{e_0}{s_0} y, & x(0) = 1, \\ \frac{dy}{d\tau} = k_1 s_0 T x - (k_1 s_0 x + k_2 + k_{-1}) T y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

De estas ecuaciones podemos ver que hay dos posibles formas de escalar el tiempo

$$T_l = \frac{1}{k_1 e_0}, \quad T_r = \frac{1}{k_1 s_0},$$

cuyos subíndices denotan una escala de tiempos lenta y otra rápida. En este tipo de reacciones el valor de  $e_0$  suele ser mucho más pequeño que  $s_0$ , habitualmente  $\epsilon = e_0/s_0 \approx 10^{-6}$ . Empezaremos escogiendo la escala de tiempos más lenta,  $T_l$ , y simplificaremos las ecuaciones definiendo las siguientes constantes

$$\mu = \frac{k_{-1}}{k_1 s_0}, \quad \lambda = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1 s_0}.$$

Sustituyéndolas en las ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -x + (x + \mu)y, & x(0) = 1 \\ \epsilon \frac{dy}{d\tau} = x - (x + \lambda)y & y(0) = 0. \end{cases}$$

Suele ocurrir que  $\mu$  y  $\lambda$  son constantes positivas del orden de la unidad.

El problema de valor inicial para la aproximación de primer orden será

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{d\tau} = -x_0 + (x_0 + \mu)y_0, & x_0(0) = 1, \\ 0 = x_0 - (x_0 + \lambda)y_0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$y_0 = \frac{x_0}{x_0 + \lambda},$$

y obtenemos el problema de valor inicial para  $x_0$

$$\frac{dx_0}{d\tau} = \frac{(\mu - \lambda)x_0}{x_0 + \lambda}, \quad x_0(0) = 1.$$

Estas ecuaciones juntas corresponden a la hipótesis de estado cuasiestacionario de Michaelis y Menten.

La solución al resolver la ecuación viene definida de forma implícita como

$$x_0 + \lambda \ln x_0 = (\mu - \lambda)\tau + A.$$

La función  $y_0$  tendrá un comportamiento similar a  $x_0$ . Además el hecho de que  $y_0(0) = 1/(1 + \lambda) \neq y(0) = 0$  muestra que la aproximación de primer orden no puede describir la rápida variación de  $y$  alrededor de  $t = 0$ . Esto nos sugiere que existe una capa límite alrededor de  $t = 0$ . Consideremos ahora  $\bar{t} = \tau/\epsilon$ . Notemos que, por la definición de  $\epsilon$  y  $\tau$  se tiene que

$$\bar{t} = \frac{\tau}{\epsilon} = \frac{t}{T_l \frac{e_0}{s_0}} = \frac{t}{\frac{1}{k_1 e_0} \frac{e_0}{s_0}} = \frac{t}{\frac{1}{k_1 s_0}} = \frac{t}{T_r},$$

es decir, que este cambio equivale a elegir la escala de tiempos rápida. Las ecuaciones diferenciales de las nuevas variables que denotaremos por  $X(\bar{t})$  e  $Y(\bar{t})$  son entonces

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\bar{t}} = \epsilon(-X + (X + \mu)Y), & X(0) = 1, \\ \frac{dY}{d\bar{t}} = X - (X + \lambda)Y, & Y(0) = 0. \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que la aproximación de primer orden es

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{d\bar{t}} = 0, \\ \frac{dY_0}{d\bar{t}} = X_0 - (X_0 + \lambda)Y_0, \end{cases}$$

luego  $X_0$  es una constante, en concreto  $X_0 = 1$ , mientras que

$$\frac{dY_0}{d\bar{t}} = 1 - (\lambda + 1)Y_0, \quad Y_0(0) = 0.$$

La solución general para esta ecuación diferencial es

$$Y_0(\bar{t}) = M e^{-(\lambda+1)\bar{t}} + \frac{1}{\lambda+1}.$$

Aplicando la condición inicial tenemos que  $M = -1/(\lambda + 1)$  luego la solución general en la capa límite es

$$Y_0(\bar{t}) = \frac{1}{\lambda+1}(1 - e^{-(\lambda+1)\bar{t}}).$$

De forma similar a los ejemplos anteriores, para obtener una aproximación válida en todo el intervalo debemos verificar que las soluciones en ambas regiones cumplen las siguientes condiciones

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_0(t) = \lim_{\bar{t} \rightarrow \infty} X_0(\bar{t}), \quad \lim_{t \rightarrow 0} y_0(t) = \lim_{\bar{t} \rightarrow \infty} Y_0(\bar{t})$$

o

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_0(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_0}{\lambda + x_0} = \frac{1}{\lambda + 1},$$

y por tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} (x_0 + \ln x_0 + (\mu - \lambda)t - A) = 1 - A = 0,$$

de lo que  $A=1$ . La aproximación uniforme en todo el intervalo será la suma de la solución en la capa límite y la solución exterior, menos la parte común en el límite. De esta forma tendremos

$$x_{uniforme}(t) = x_0 + 1 - 1 = x_0$$

$$y_{uniforme}(t) = \frac{x_0}{\lambda + x_0} + \frac{1}{\lambda + 1}(1 - e^{-(\lambda+1)t/\epsilon}) - \frac{1}{\lambda + 1} = \frac{x_0}{\lambda + x_0} - \frac{1}{\lambda + 1}e^{-(\lambda+1)t/\epsilon}$$

En la figura 3.7 hemos representado la evolución de la concentración de sustrato y complejo a lo largo del tiempo, donde podemos ver que la concentración del complejo varía rápidamente para valores de tiempo cercanos a cero. En la región de orden principal podemos ver que decrece exponencialmente según crece el tiempo.

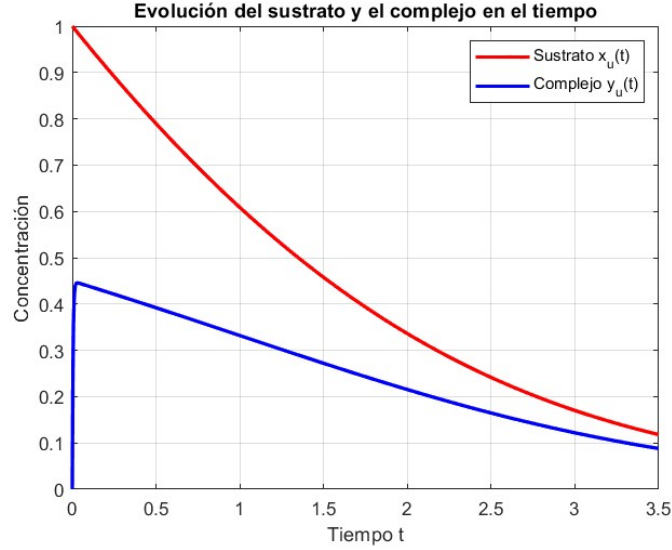


Figura 3.7: Concentración de sustrato y complejo a lo largo del tiempo

# Capítulo 4

## Aproximación WKB

### 4.1. Introducción

En el método WKB se parte de una dependencia exponencial como hipótesis. Esta es una suposición razonable, ya que muchos de los problemas estudiados terminaron teniendo una dependencia exponencial en la coordenada de la capa límite. Además, con esta suposición el trabajo necesario para encontrar una aproximación asintótica de la solución se reduce significativamente.

La popularidad del método WKB se remonta a la década de 1920, con el desarrollo de la mecánica cuántica. En particular, se utilizó para encontrar soluciones aproximadas de la ecuación de Schrödinger. El nombre del método viene de los investigadores que participaron en su desarrollo: Wentzel, Kramers y Brillouin. Algunos lo llaman el método de Liouville y Green, dado que ambos publicaron artículos sobre el procedimiento en 1837.

**Ejemplo 4.1.1** Ilustraremos las ideas en las que se basa el método WKB con un ejemplo ilustrativo [5]. Consideremos el siguiente problema

$$\epsilon^2 y'' - q(x)y = 0. \quad (4.1)$$

La única restricción que haremos a la función  $q(x)$  es que sea regular. El objetivo es construir una aproximación de la solución general de esta ecuación. Si  $q(x)$  fuera constante se tendría que la solución general del problema es

$$y(x) = a_0 e^{-x\sqrt{q}/\epsilon} + b_0 e^{x\sqrt{q}/\epsilon}. \quad (4.2)$$

La hipótesis planteada en el método WKB es que la solución exponencial en (4.2) se puede generalizar para dar una solución aproximada de (4.1). Para que esto sea posible es necesario asegurar que el desarrollo sea lo suficientemente general como para controlar el coeficiente variable en la ecuación. La hipótesis que aplicaremos en este método es que el desarrollo aproximado de la solución tenga la siguiente forma

$$y \approx e^{\theta(x)/\epsilon^\alpha} (y_0(x) + \epsilon^\alpha y_1(x) + \epsilon^{2\alpha} y_2 \dots). \quad (4.3)$$

La característica principal del método WKB es que es bastante específico en cuanto a cómo depende la solución en la capa límite, es decir, se supone que la dependencia

es exponencial. Esto puede limitar el método pero también lo hace más sencillo que los métodos estudiados anteriormente. De (4.3) se tiene la siguiente expresión para la primera derivada

$$y' \approx (\epsilon^{-\alpha} \theta' y_0 + y'_0 + \theta' y_1 + \epsilon^\alpha (y'_1 + \theta' y_2) + \dots) e^{\theta/\epsilon^\alpha},$$

y la correspondiente ecuación para la segunda derivada

$$y'' \approx (\epsilon^{-2\alpha} (\theta')^2 y_0 + \epsilon^{-\alpha} (\theta'' y_0 + 2\theta' y'_0 + (\theta')^2 y_1) + y''_0 + \theta'' y_1 + 2\theta' y'_1 + \theta'^2 y_2 + \dots) e^{\theta/\epsilon^\alpha}. \quad (4.4)$$

A continuación sustituimos (4.3) y (4.4) en (4.1) y se tiene

$$\epsilon^2 \left( \frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} (\theta')^2 y_0 + \frac{1}{\epsilon^\alpha} (\theta'' y_0 + 2\theta' y'_0 + (\theta')^2 y_1) + \dots \right) - q(x) (y_0 + \epsilon^\alpha y_1 + \dots) = 0. \quad (4.5)$$

En este paso la exponencial se simplifica. Esto no ocurriría si la ecuación fuera no lineal. Ahora, agrupando los términos por potencias de  $\epsilon$  en (4.5) y considerando  $\alpha = 1$  tenemos las siguientes ecuaciones:

- La ecuación eikonal  $(\theta')^2 = q(x)$ , cuyas soluciones son

$$\theta(x) = \pm \int^x \sqrt{q(s)} ds. \quad (4.6)$$

- La ecuación de transporte  $\theta'' y_0 + 2\theta' y'_0 + (\theta')^2 y_1 = q(x) y_1$ . Como  $\theta(x)$  cumple la ecuación eikonal, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\theta'' y_0 + 2\theta' y'_0 = 0. \quad (4.7)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre  $y_0$  y  $\theta'$ , en el caso de ser no nulos, se tiene

$$\frac{\theta''}{\theta'} + 2 \frac{y'_0}{y_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} (\ln(|\theta'|)) + 2 \frac{d}{dx} \ln |y_0| = 0.$$

Integrando y tomando exponenciales

$$\ln |\theta'| + 2 \ln |y_0| = C_1 \quad \Rightarrow \quad |\theta'| y_0^2 = C,$$

tendremos que la solución de  $y_0$  es

$$y_0(x) = \frac{c}{\sqrt{|\theta'|}},$$

donde  $c$  es una constante arbitraria.

De esta forma tenemos una aproximación a primer orden de la solución general de (4.1)

$$y(x) \approx |q(x)|^{-1/4} (a_0 \exp(-\frac{1}{\epsilon} \int^x \sqrt{q(s)} ds) + b_0 \exp(\frac{1}{\epsilon} \int^x \sqrt{q(s)} ds)), \quad (4.8)$$

donde  $a_0$  y  $b_0$  son dos constantes arbitrarias que pueden ser complejas. A partir de (4.8) vemos que  $q(x)$  debe ser distinta de cero. Los valores de  $x$  donde  $q(x)$  es cero se llaman puntos de inflexión, y los discutiremos más adelante. A partir de esta expresión vemos que se tienen dos posibles situaciones, dependiendo de si  $q(x)$  es estrictamente positiva o negativa.

### 4.1.1. El caso oscilatorio

En el caso en el que  $q(x)$  sea estrictamente negativo, la solución tendrá forma oscilatoria. Consideramos la ecuación

$$\epsilon^2 y'' + k(x)^2 y = 0, \quad (4.9)$$

donde  $k(x) > 0$  y  $q(x) = -k(x)^2$ . Para aplicar el método WKB supondremos que la solución  $y(x)$  puede expresarse de la siguiente forma

$$y \approx e^{\theta(x)/\epsilon} (y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \dots).$$

Como es un caso particular del ejemplo (4.1), obtendremos la ecuación eikonal  $(\theta')^2 = -k(x)^2$  cuyas soluciones son

$$\theta(x) = \pm \int_a^x i k(s) ds.$$

Sustituyendo  $\theta(x)$  y  $q(x)$  en (4.8), obtenemos la aproximación WKB a primer orden de la ecuación de Schrödinger

$$y_{WKB}(x) = \frac{c_1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \int_a^x k(s) ds\right) + \frac{c_2}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_a^x k(s) ds\right).$$

Como  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , podemos reescribirla en términos de senos y cosenos

$$y_{WKB}(x) = \frac{c_1}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\frac{1}{\epsilon} \int_a^x k(s) ds\right) + \frac{c_2}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\frac{1}{\epsilon} \int_a^x k(s) ds\right). \quad (4.10)$$

### Ejemplo 4.1.2

Para verificar la precisión de el método WKB compararemos la aproximación con la solución exacta suponiendo que  $q(x) = -e^{2x}$ . En este caso,

$$y \approx e^{-x/2} (a_0 e^{-ie^x/\epsilon} + b_0 e^{ie^x/\epsilon}) = e^{-x/2} (\alpha_0 \cos(\lambda e^x) + \beta_0 \sin(\lambda e^x)), \quad (4.11)$$

donde  $\lambda = \epsilon^{-1}$ . Aplicando las condiciones iniciales  $y(0) = a$  e  $y(1) = b$  tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y(0) &= \alpha_0 \cos(\lambda) + \beta_0 \sin(\lambda) = a \\ y(1) &= e^{-1/2} (\alpha_0 \cos(e\lambda) + \beta_0 \sin(e\lambda)) = b. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  son

$$\alpha_0 = \frac{a \sin(e\lambda) - b e^{1/2} \sin(\lambda)}{\sin(\lambda(e-1))} \quad \text{y} \quad \beta_0 = \frac{b e^{1/2} \cos(\lambda) - a \cos(e\lambda)}{\sin(\lambda(e-1))}, \quad (4.12)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$ , luego  $\sin(e\lambda)\cos(\lambda) - \cos(e\lambda)\sin(\lambda) = \sin(\lambda(e-1))$ .

Sustituyendo (4.12) en (4.11) se tiene que

$$y \approx e^{-x/2} \left[ \left( \frac{a \sin(e\lambda) - be^{1/2} \sin(\lambda)}{\sin(\lambda(e-1))} \right) \cos(\lambda e^x) + \left( \frac{be^{1/2} \cos(\lambda) - a \cos(e\lambda)}{\sin(\lambda(e-1))} \right) \sin(\lambda e^x) \right],$$

y agrupando términos concluimos que la solución aproximada puede expresarse como

$$y \approx e^{-x/2} \left( \frac{be^{1/2} \sin \lambda(e^x - 1) - a \sin \lambda(e^x - e)}{\sin(\lambda(e-1))} \right). \quad (4.13)$$

Además, la ecuación que estamos estudiando

$$\epsilon^2 y'' + e^{2x} y = 0$$

puede reescribirse, utilizando el cambio de variable  $z = e^x/\epsilon = e^x \lambda$ , como

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + z^2 y = 0,$$

donde hemos tenido cuenta que  $e^{2x} = \epsilon^2 z^2$  y que

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{e^x}{\epsilon} = z \frac{dy}{dz} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left( z \frac{dy}{dz} \right) = z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz}. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene una ecuación de la forma

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - n^2) y = 0,$$

es decir, una ecuación de Bessel con  $n = 0$  cuya solución exacta es

$$y(z) = A J_0(z) + B Y_0(z),$$

donde  $J_0$  e  $Y_0$  son las funciones de Bessel [1, 13] que vienen definidas por

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \quad \text{y} \quad Y_n(z) = \frac{J_n(z) \cos(n\pi) - J_{-n}(z)}{\sin(n\pi)}.$$

En particular, para  $n = 0$ , tendremos

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad \text{e} \quad Y_0(z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(z \cosh(\theta)) d\theta$$

y las constantes A y B serán

$$A = \frac{b Y_0(\lambda) - a Y_0(\lambda e)}{J_0(\lambda e) Y_0(\lambda) - Y_0(\lambda e) J_0(\lambda)} \quad B = \frac{a J_0(\lambda e) - b J_0(\lambda)}{J_0(\lambda e) Y_0(\lambda) - Y_0(\lambda e) J_0(\lambda)}.$$

En la figura 4.2 hemos representado en Matlab la solución exacta, que viene descrita por las funciones de Bessel, y la solución aproximada calculada por el método WKB. Para ello hemos fijado los valores  $a = 1$ ,  $b = 0$  y  $\epsilon = 0,1$ . En ella podemos ver que ambas gráficas son indistinguibles, por lo que la solución aproximada se ajusta correctamente a la solución exacta.

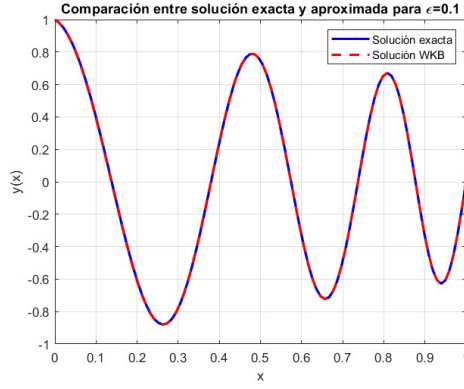


Figura 4.1: Solución exacta descrita con funciones de Bessel y solución aproximada calculada con el método WKB

#### 4.1.2. El caso no oscilatorio

Ahora consideraremos el caso en el que  $q(x)$  es estrictamente positivo en (4.1). Más concretamente,  $q(x) = k(x)^2$  con  $k(x) > 0$ .

Aplicando el método WKB, sustituyendo en la ecuación (4.6) se tiene

$$\theta(x) = \pm \int^x k(s) ds.$$

Por tanto, sustituyendo en (4.8),

$$y_{WKB}(x) = \frac{c_1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \int_a^x k(s) ds\right) + \frac{c_2}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \int_a^x k(s) ds\right). \quad (4.14)$$

## 4.2. El método WKB para la aproximación de autovalores grandes y sus autofunciones

Podemos aplicar el método WKB para determinar autovalores grandes para operadores diferenciales simples. Consideramos el siguiente problema de condiciones frontera

$$y'' + \lambda q(x)y = 0, \quad 0 < x < \pi; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \quad (4.15)$$

siendo  $q(x) > 0$ . A un número  $\lambda$  lo llamaremos *autovalor* del problema de condiciones frontera (4.15) si existe una solución no trivial de (4.15) para ese valor particular de  $\lambda$ . Además, las correspondientes soluciones no triviales se llaman autofunciones. Para obtener todos los autovalores definiremos  $\epsilon$  como  $\epsilon = 1/\sqrt{\lambda}$  y  $k(x) = \sqrt{q(x)}$ , luego podemos reescribir la ecuación (4.15) como

$$\epsilon^2 y'' + k(x)^2 y = 0. \quad (4.16)$$

De esta forma podemos aplicar el método WKB para un  $\epsilon$  pequeño, o lo que es lo mismo, para valores de  $\lambda$  grandes. La solución de la aproximación WKB es la dada por

(4.10), que en nuestro caso se escribe como

$$y_{WKB}(x) = \frac{1}{q(x)^{1/4}} \left( c_1 \sin \left( \sqrt{\lambda} \int_0^x \sqrt{q(\xi)} d\xi \right) + c_2 \cos \left( \sqrt{\lambda} \int_0^x \sqrt{q(\xi)} d\xi \right) \right).$$

Aplicando las condiciones frontera, de  $y(0) = 0$  se tiene que  $c_2 = 0$ , y de  $y(\pi) = 0$  se tiene que

$$\frac{c_1}{q(\pi)^{1/4}} \sin \left( \sqrt{\lambda} \int_0^\pi \sqrt{q(\xi)} d\xi \right) = 0.$$

Como estamos buscando la solución no trivial, llegamos a la siguiente condición

$$\sin \left( \sqrt{\lambda} \int_0^\pi \sqrt{q(\xi)} d\xi \right) = 0,$$

que se cumple cuando

$$\sqrt{\lambda} \int_0^\pi \sqrt{q(\xi)} d\xi = n\pi,$$

donde  $n$  es un número entero. Por tanto los autovalores grandes del problema (4.15) serán aproximadamente

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{\int_0^\pi \sqrt{q(\xi)} d\xi} \right)^2 \quad (4.17)$$

para  $n$  grande. Las correspondientes autofunciones serán

$$y_{WKB} = \frac{c_1}{q(x)^{1/4}} \sin \left( \frac{n\pi \int_0^x \sqrt{q(\xi)} d\xi}{\int_0^\pi \sqrt{q(\xi)} d\xi} \right).$$

En el siguiente ejemplo ilustraremos el procedimiento anterior para obtener autovalores grandes de un problema concreto.

**Ejemplo 4.2.1** Consideremos el problema de autovalores

$$y'' + \lambda(x + \pi)^4 y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \quad (4.18)$$

Notemos que esta ecuación es un caso particular de la expresión (4.15) donde

$$q(x) = (x + \pi)^4$$

donde se cumple que  $q(x) > 0$ . Sabemos que sus autovalores grandes vendrán definidos por (4.17) y que

$$\int_0^\pi \sqrt{q(\xi)} d\xi = \int_0^\pi (\xi + \pi)^2 d\xi = \frac{7\pi^3}{3}.$$

Por tanto, los autovalores grandes para este problema son aproximadamente

$$\lambda_n = \frac{9n^2}{49\pi^4},$$

y sus correspondientes autofunciones serán

$$y_{WKB} = \frac{c_1}{q(x)^{1/4}} \sin \left( \frac{n\pi(x^3 + 3x^2\pi + 3x\pi^2)}{7\pi^3} \right).$$

### 4.3. Segundo término del desarrollo WKB

Para realizar una estimación del error cometido al usar (4.8) para aproximar la solución al problema, calcularemos el término  $y_1$  del desarrollo (4.3). Agrupando términos por potencias de  $\epsilon$  en (4.5), la ecuación correspondiente a  $O(\epsilon^2)$  es

$$\theta'' y_1 + 2\theta' y_1' + (\theta')^2 y_2 + y_0'' = q(x) y_2.$$

Sustituyendo la ecuación eikonal (4.6), la ecuación queda reducida a

$$2\theta' y_1' + \theta'' y_1 = -y_0''.$$

Suponiendo que  $y_1(x) = y_0(x)w(x)$ , y como  $\theta' = \pm\sqrt{q}$ , se tiene que

$$2\theta' y_0 w' = (-2\theta' y_0' - \theta'' y_0)w - y_0''.$$

Podemos ver que esta ecuación tiene la forma de

$$\frac{dw(x)}{dx} = a(x)w(x) + b(x)$$

cuya solución será una solución homogénea más una solución particular. Puesto que la ecuación homogénea es

$$w' = \left( \frac{-2\theta' y_0' - \theta'' y_0}{2\theta' y_0} \right) w,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} w(x) &= C \exp \int^x \left[ -\frac{y_0'(s)}{y_0(s)} - \frac{\theta''(s)}{2\theta'(s)} \right] ds \\ &= C \exp(-\ln(|y_0|) - \frac{1}{2} \ln |\theta'|) = C|y_0|^{-1}(|\theta'|)^{-1/2} = C_1. \end{aligned}$$

Para determinar la solución particular, necesitaremos la expresión de  $y_0''$ , que es

$$y_0'' = -\frac{c}{2} \left( -\frac{3}{2}(\theta')^{-5/2}(\theta'')^2 + (\theta')^{-3/2}\theta''' \right),$$

luego

$$-\frac{y_0''}{2\theta' y_0} = \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2}(\theta')^{-5/2}(\theta'')^2 + (\theta')^{-3/2}\theta''' \right)}{2(\theta')^{1/2}} = \left( -\frac{3}{8}(\theta')^{-3}(\theta'')^2 + \frac{1}{4}(\theta')^{-2}\theta''' \right).$$

Por tanto se tiene que

$$w(x) = C_1 + \int^x \frac{1}{4} \frac{\theta'''}{(\theta')^2} - \int^x \frac{3}{8} \frac{(\theta'')^2}{(\theta')^3}.$$

Integrando por partes el segundo término obtenemos que

$$w(x) = d + \frac{1}{4} \frac{\theta''}{(\theta')^2} + \frac{1}{4} \int^x 2 \frac{(\theta'')^2}{(\theta')^3} - \frac{3}{8} \int^x \frac{(\theta'')^2}{(\theta')^3},$$

por lo que, finalmente

$$w(x) = d + \frac{1}{4} \frac{\theta''}{(\theta')^2} + \frac{1}{8} \int^x \frac{(\theta'')^2}{(\theta')^3} dx. \quad (4.19)$$

Teniendo en cuenta la ecuación eikonal y que  $\theta'' = \pm(1/2)(q'/\sqrt{q(x)})$  podemos escribir (4.19) en términos de  $q$

$$w(x) = d \pm \frac{1}{4} \frac{q'}{2q(x)^{1/2}q(x)} \pm \frac{1}{8} \int^x \frac{1}{4} \frac{(q')^2}{q(x)q(x)^{3/2}} dx = d \pm \frac{1}{8} \frac{q'}{q(x)^{3/2}} \pm \frac{1}{32} \int^x \frac{(q')^2}{q(x)^{5/2}} dx.$$

Se espera que la aproximación de primer orden sea una buena aproximación a la solución si  $\epsilon y_1(x) \ll y_0$ . Dado que  $y_1(x) = y_0(x)w(x)$ , esto ocurrirá si  $|\epsilon w(x)| \ll 1$ . De la fórmula para  $w(x)$  dada por (4.19), podemos expresar esta condición en términos de  $q(x)$  y su primera derivada. En particular, en un intervalo  $x_0 \leq x \leq x_1$ , tendremos una buena aproximación si

$$\epsilon \left( |d| + \frac{1}{32} \left| \frac{q'}{q^{3/2}} \right|_{\infty} \left( 4 + \int_{x_0}^{x_1} \left| \frac{q'}{q} \right| dx \right) \right) \ll 1$$

donde  $|h(x)|_{\infty} = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |h(x)|$ . Esto se mantiene si el intervalo de estudio no tiene puntos de retorno, esto es, puntos donde  $q(x) = 0$ . La fórmula anterior también se puede usar para determinar cuánto podemos aproximarnos a un punto de retorno antes de que el desarrollo se vuelva no uniforme.

La solución general dada en (4.8) y (4.19) contiene constantes que deben determinarse con las condiciones de contorno. El problema principal que surge al usar la aproximación WKB es que estas constantes pueden depender de  $\epsilon$ . Entonces es necesario asegurar que esta dependencia no interfiere con la acotación supuesta en el desarrollo de (4.3). Para ilustrar esta situación, consideramos el siguiente problema de contorno

$$\epsilon^2 y'' + e^{2\kappa x} y = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

Para este caso, como  $\theta' = \pm i e^{\kappa x}$ , de (4.19) se tiene que

$$w(x) = d \pm \frac{i\kappa}{8} e^{-\kappa x}.$$

Notemos que  $w(x)$  no depende de  $\epsilon$  y está acotado para  $x \in (0, 1)$ , luego es seguro podemos obtener una buena aproximación.

El desarrollo de la aproximación WKB tomando el segundo término será de la forma

$$y \approx e^{\theta/\epsilon} (y_0 + \epsilon y_1) \approx e^{\theta/\epsilon} y_0 (1 + \epsilon w),$$

donde  $y_1 = (d \pm (i\kappa e^{-\kappa x})/8) y_0$ . Sustituyendo

$$y \approx \frac{1}{(q(x))^{1/4}} \left( a_0 e^{-\frac{i\epsilon\kappa x}{\epsilon\kappa}} \left( 1 + \epsilon \left( a_1 - \frac{i\kappa}{8} e^{-\kappa x} \right) \right) + b_0 e^{\frac{i\epsilon\kappa x}{\epsilon\kappa}} \left( 1 + \epsilon \left( b_1 + \frac{i\kappa}{8} e^{-\kappa x} \right) \right) \right).$$

Un desarrollo de dos términos para la solución general de (4.20) es por tanto

$$y \approx e^{-\kappa x/2} \left( a_0 e^{-\chi} \left( 1 + \epsilon \left( a_1 - \frac{i\kappa}{8} e^{-\kappa x} \right) \right) + b_0 e^{\chi} \left( 1 + \epsilon \left( b_1 + \frac{i\kappa}{8} e^{-\kappa x} \right) \right) \right), \quad (4.21)$$

donde

$$\chi = \frac{i}{\kappa\epsilon} e^{\kappa x}$$

y  $a_0$  y  $b_0$  son constantes a determinar con las condiciones iniciales.

La característica más importante de la aproximación WKB es la suposición de una dependencia exponencial para una variación rápida. Al hacer esta suposición, podemos calcular la aproximación del primer término de la solución resolviendo dos ecuaciones diferenciales de primer orden. La primera, la ecuación eikonal, es no lineal y determina la variación rápida en la solución. En este caso no fue difícil resolver la ecuación eikonal pero puede ser uno de los pasos más difíciles al utilizar el método WKB. La segunda ecuación es la ecuación de transporte, que determina la variación lenta. La ecuación de transporte es lineal, al igual que las ecuaciones para determinar los términos de orden superior en el desarrollo.

## 4.4. Ecuación de Schrödinger

Veamos ahora cómo aparecieron en Mecánica Cuántica ecuaciones del tipo (4.1).

Consideramos una partícula de masa  $m$  que se mueve en el eje  $x$  bajo la influencia de un potencial  $V(x)$ . Utilizando el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mx'^2 + V(x) = E,$$

de donde se obtiene que las órbitas que describe la partícula pueden expresarse como

$$x' = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}.$$

Estas órbitas serán válidas para el dominio de  $E > V(x)$ , que llamaremos la región clásica.

En 1900 se descubrió que el modelo clásico fallaba a escala atómica. La teoría cuántica establece que la partícula no tiene una posición o velocidad definida; postula una interpretación estadística del estado de la partícula en términos de una función de onda  $\psi(x, t)$  que es compleja. El módulo al cuadrado de la función de onda es la densidad de probabilidad para la posición, que es una variable aleatoria  $X$ . Por lo tanto,

$$Pr(a < X \leq b) = \int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx$$

es la probabilidad de que una partícula esté en el intervalo  $a < x \leq b$  en un tiempo  $t$ . Además

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1,$$

porque la partícula esta localizada en algún lugar del eje  $x$ . La ecuación que modela la evolución de un sistema mecánico cuántico es la ecuación de Schrödinger, que tiene la forma

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi, \quad (4.22)$$

donde  $V$  es la energía potencial,  $m$  es la masa y  $\hbar = h/(2\pi)$ , donde  $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$  es la constante de Plank.

Asumiendo que la solución tiene la forma  $\psi(x, t) = y(x)\phi(t)$ , sustituyendo en (4.22) y dividiendo por  $\psi$  siempre y cuando se pueda, obtenemos

$$\frac{i\hbar \frac{d\phi}{dt}}{\phi} = \frac{-\frac{\hbar^2}{2m}y'' + V(x)y}{y}.$$

El lado izquierdo de la ecuación solo depende de  $t$ , mientras que el lado derecho solo depende de  $x$ . La única forma en la que esta igualdad puede ocurrir para todo  $x$  y para todo  $t$  es que los dos lados de la ecuación sean igual a la misma constante, que llamaremos  $E$ . De esta forma obtenemos las siguientes dos ecuaciones, una para  $\phi$

$$\frac{d\phi}{dt} = (-iE/\hbar)\phi,$$

y la segunda para  $y(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}y'' + (V(x) - E)y = 0. \quad (4.23)$$

La ecuación para el tiempo es la ecuación periódica de  $\phi = Ce^{-iEt/\hbar}$ , donde  $C$  es una constante. La ecuación (4.23), cuya solución será la parte espacial de la función de onda, la definiremos como la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Además se debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(x)|^2 dx = 1$$

para que la solución este normalizada, es decir,  $C = 1$ . Definimos el parámetro  $\epsilon = \hbar/\sqrt{2m} \ll 1$ , dado que  $\hbar$  es muy pequeño. Así, obtenemos un problema de la forma (4.1) donde  $0 < \epsilon \ll 1$ , y  $q(x) = V(x) - E$ . Para  $q(x) < 0$  la solución variará rápidamente de forma oscilatoria, mientras que si  $q(x) > 0$  esperamos soluciones que crezcan y decaigan exponencialmente. Esa región no puede darse en la física clásica, aunque en mecánica cuántica existe una probabilidad no nula de que la partícula exista en esta región.

## 4.5. Puntos de inflexión

Como vimos en la sección 4.1, es necesario evitar los puntos donde  $q(x)$  se anula. Para estudiar el comportamiento en estos puntos, supondremos que  $q(x)$  es una función suave y posee un único cero simple en  $x = x_i$ . Es decir, asumimos que  $q(x_i) = 0$  y que su derivada  $q'(x_i) \neq 0$ . Primero, analizaremos el caso en el que solo hay un punto de inflexión.

### 4.5.1. Caso donde $q'(x_i) > 0$

En este caso asumiremos que solo existe un punto de inflexión  $x_i$ , con  $q(x) > 0$  si  $x > x_i$  y  $q(x) < 0$  si  $x < x_i$ . Esto significa que la solución de (4.1) será oscilatoria si  $x < x_i$  y exponencial para  $x > x_i$ .

Podemos usar la aproximación WKB a ambos lados del punto de inflexión. De esta forma tendremos la siguiente solución general

$$y \approx \begin{cases} y_I(x) & \text{si } x < x_i, \\ y_D(x) & \text{si } x_i < x. \end{cases}$$

donde

$$y_D(x) \approx \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} \left( a_D \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \int_{x_i}^x \sqrt{q(s)} ds\right) + b_D \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \int_{x_i}^x \sqrt{q(s)} ds\right) \right), \quad (4.24)$$

y

$$y_I(x) \approx \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} \left( a_I \exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_{x_i}^x \sqrt{-q(s)} ds\right) + b_I \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{x_i}^x \sqrt{-q(s)} ds\right) \right). \quad (4.25)$$

Estas expresiones provienen de (4.8) donde hemos fijado uno de los extremos en las integrales en el punto de inflexión. Notemos que los coeficientes en (4.24) y (4.25) no son independientes, por lo que debemos determinar cómo están relacionados. Para ello, analizaremos lo que ocurre en una capa de transición centrada en  $x = x_i$ . Después del análisis, la aproximación de la solución general contendrá solo dos constantes arbitrarias en lugar de las cuatro.

### 4.5.2. Solución en la capa de transición

Para determinar la solución cerca del punto de inflexión introduciremos la variable

$$\bar{x} = \frac{x - x_i}{\epsilon^\beta}$$

o lo que es lo mismo

$$x = x_i + \epsilon^\beta \bar{x}.$$

Dado que conocemos el punto  $x_i$ , solo debemos determinar el valor de  $\beta$ . Utilizando el desarrollo de Taylor

$$q(x_i + \epsilon^\beta \bar{x}) \approx q(x_i) + \epsilon^\beta \bar{x} q'(x_i) + \dots = \epsilon^\beta \bar{x} q'(x_i) + \dots$$

supondremos que  $q(x)$  tiene un cero simple en  $x_i$ , luego  $q'(x_i) \neq 0$ . Si definimos  $Y(\bar{x})$  como la solución en esta capa, tenemos

$$\epsilon^{2-2\beta} Y'' - (\epsilon^\beta \bar{x} q'(x_i) + \dots) Y = 0. \quad (4.26)$$

luego si  $2 - 2\beta = \beta$ , entonces  $\beta = \frac{2}{3}$ . El desarrollo para la solución en esta capa es

$$Y \approx \epsilon^\gamma Y_0 + \dots \quad (4.27)$$

Sustituyendo en (4.26) obtenemos la siguiente ecuación

$$Y_0'' - \bar{x} q'(x_i) Y_0 = 0 \quad \text{para } -\infty < \bar{x} < \infty. \quad (4.28)$$

Podemos transformar esta ecuación en una cuyas soluciones conocemos. Considerando  $s = (q'(x_i))^{1/3} \bar{x}$  obtendremos una *ecuación de Airy*, que es

$$\frac{d^2}{ds^2} Y_0 - s Y_0 = 0, \quad \text{para } -\infty < s < \infty.$$

Esta ecuación se puede resolver utilizando desarrollos en series de potencias o la transformada de Fourier. La solución general puede escribirse como

$$Y_0 = a Ai(s) + b Bi(s), \quad (4.29)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias y  $Ai(\cdot)$  y  $Bi(\cdot)$  son funciones de Airy de primer y segundo tipo, respectivamente, dadas por [5]

$$Ai(x) \equiv \frac{1}{3^{2/3}\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) \sin\left[\frac{2\pi}{3}(k+1)\right] (3^{1/3}x)^k$$

y

$$Bi(x) \equiv e^{\pi i/6} Ai(xe^{2\pi i/3}) + e^{-\pi i/6} Ai(xe^{-2\pi i/3}).$$

En la figura 4.2 hemos representado las funciones de Airy de primer y segundo tipo. Las funciones  $Ai(x)$  y  $Bi(x)$  y sus derivadas al evaluarlas en  $x = 0$  toman el valor

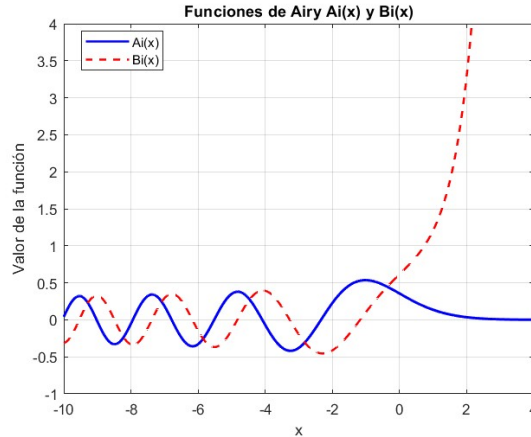


Figura 4.2: Funciones de Airy

$$\begin{aligned} Ai(0) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\pi 3^{1/6}}, & Ai'(0) &= -\frac{3^{1/6}\Gamma(\frac{2}{3})}{2\pi}, \\ Bi(0) &= \sqrt{3}Ai(0), & Bi'(0) &= -\sqrt{3}Ai'(0). \end{aligned}$$

Además, al integrar estas funciones se cumple que

$$\int_0^\infty Ai(x)dx = \frac{1}{3}, \quad \int_{-\infty}^0 Ai(x)dx = \frac{2}{3}, \quad \int_{-\infty}^0 Bi(x)dx = 0.$$

Con esto, podemos reescribir la ecuación (4.28) como

$$Y_0(\bar{x}) = aAi[(q'(x_i)^{1/3}\bar{x})] + bBi[(q'(x_i)^{1/3}\bar{x})]. \quad (4.30)$$

De (4.24), (4.25) y (4.30) tenemos 6 constantes que determinar. Sin embargo, dado que (4.30) debe cumplir la condición de matching con las soluciones externas de (4.24) y (4.25), existirán relaciones entre las constantes, lo que nos lleva finalmente a dos constantes en la solución general.

### 4.5.3. Matching

La solución en la capa de transición debe cumplir la condición de matching con la solución externa de (4.24) y (4.25). Utilizaremos la siguiente variable intermedia

$$x_\eta = \frac{x - x_i}{\epsilon^\eta}$$

donde  $0 < \eta < 2/3$ . Notemos que las 2 soluciones externas para  $x > x_i$  contienen los términos

$$\int_{x_i}^x \sqrt{q(s)}ds = \int_{x_i}^{x_i + \epsilon^\eta x_\eta} \sqrt{q(s)}ds \approx \int_{x_i}^{x_i + \epsilon^\eta x_\eta} \sqrt{(s - x_i)q'(x_i)}ds = (q'(x_i))^{1/2}(\epsilon^\eta x_\eta)^{3/2} \frac{2}{3}.$$

Si definimos el parámetro  $r = (q'(x_i))^{1/3}\epsilon^{\eta-2/3}x_\eta$  podemos reescribir la integral anterior como

$$\int_{x_i}^x \sqrt{q(s)}ds = \frac{2}{3}\epsilon r^{3/2}.$$

Además

$$|q(x)|^{-1/4} \approx |q(x_i) + (x - x_i)q'(x_i)|^{-1/4} = \epsilon^{-1/6}(q'(x_i))^{-1/6}r^{-1/4}.$$

Para hacer el matching entre la capa de transición utilizaremos el desarrollo asintótico de las funciones de Airy [5]

$$Ai(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \left( \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) + \eta(x) \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) \right) & \text{si } x \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\zeta}(1 - \eta(x)) & \text{si } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

y

$$Bi(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \left( \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) + \eta(x) \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right) & \text{si } x \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{\zeta}(1 + \eta(x)) & \text{si } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

donde  $\zeta = \frac{2}{3}|r|^{3/2}$  y  $\eta = 5/(72\zeta)$ .

Para verificar que cumple la condición de matching en ambos lados del punto de inflexión, comenzaremos con  $x_i < x$ . Sustituyendo estos desarrollos en la expresión (4.29) y considerando que  $s = (q'(x_{x_i}))^{1/3}\bar{x}$  y que  $x_\eta = \bar{x}/(\epsilon^{\eta-2/3})$  se tiene que

$$\begin{aligned} Y &\approx \epsilon^\gamma Y_0(\epsilon^{\eta-2/3}x_\eta) + \dots \approx \epsilon^\gamma [aAi((q'(x_{x_i}))^{1/3}\bar{x}) + bBi((q'(x_{x_i}))^{1/3}\bar{x})] \\ &= \epsilon^\gamma \left[ \frac{a}{2\sqrt{\pi}((q'(x_i))^{1/3}\bar{x})^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}(q'(x_i)^{1/3}\bar{x})^{3/2}} \left( 1 - \frac{5}{72 \cdot \frac{2}{3} |(q'(x_i)^{1/3}\bar{x})|^{3/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{\sqrt{\pi}((q'(x_i))^{1/3}\bar{x})^{1/4}} e^{\frac{2}{3}(q'(x_i)^{1/3}\bar{x})^{3/2}} \left( 1 - \frac{5}{72 \cdot \frac{2}{3} |(q'(x_i)^{1/3}\bar{x})|^{3/2}} \right) \right] \\ &\approx \frac{a\epsilon^\gamma}{2\sqrt{\pi}r^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}r^{3/2}} + \frac{b\epsilon^\gamma}{\sqrt{\pi}r^{1/4}} e^{\frac{2}{3}r^{3/2}}, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$1 - \frac{5}{72 \cdot \frac{2}{3} |(q'(x_i)^{1/3}\bar{x})|^{3/2}} \rightarrow 1 \quad \text{si} \quad \bar{x} \rightarrow \infty.$$

Para la solución WKB en (4.24)

$$y_D \approx \frac{\epsilon^{-1/6}}{(q'(x_i))^{1/6}r^{1/4}} \left( a_D e^{-\frac{2}{3}r^{3/2}} + b_D e^{\frac{2}{3}r^{3/2}} \right).$$

Para que estas expresiones cumplan la condición de matching debe suceder que  $\gamma = -\frac{1}{6}$ ,

$$a_D = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}(q'(x_i)^{1/6}) \quad \text{y} \quad b_D = \frac{b}{\sqrt{\pi}}(q'(x_i))^{1/6}.$$

Al hacer cumplir la condición de matching en  $x < x_i$ , en este caso  $x_\eta < 0$ , lo cual introduce números complejos en (4.25). De nuevo, utilizando el desarrollo asintótico de las funciones de Airy y que  $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ , se tiene que

$$\begin{aligned} Y &\approx \epsilon^\gamma Y_0(q'(x_i)^{1/3}\epsilon^{\eta-2/3}x_\eta) + \dots \\ &\approx \frac{a\epsilon^\gamma}{\sqrt{\pi}|r|^{1/4}} \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{b\epsilon^\gamma}{\sqrt{\pi}|r|^{1/4}} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{a\epsilon^\gamma}{\sqrt{\pi}|r|^{1/4}} \frac{e^{i(\zeta-\pi/4)} + e^{-i(\zeta-\pi/4)}}{2} + \frac{b\epsilon^\gamma}{\sqrt{\pi}|r|^{1/4}} \frac{e^{i(\zeta+\pi/4)} + e^{-i(\zeta+\pi/4)}}{2} \\ &= \frac{\epsilon^\gamma}{2\sqrt{\pi}|r|^{1/4}} ((ae^{-i\pi/4} + be^{i\pi/4})e^{i\zeta} + (ae^{i\pi/4} + be^{-i\pi/4})e^{-i\zeta}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por otro lado, en la aproximación WKB tendremos

$$y_I \approx \frac{\epsilon^{-1/6}}{(q'(x_i))^{1/6}|r|^{1/4}} (a_I e^{-i\zeta} + b_I e^{i\zeta}). \quad (4.32)$$

Haciendo el matching para (4.31) y (4.32) nos lleva a

$$a_I = \frac{(q'(x_i))^{1/6}}{2\sqrt{\pi}}(ae^{i\pi/4} + be^{-i\pi/4}) \quad y \quad b_I = \frac{(q'(x_i))^{1/6}}{2\sqrt{\pi}}(ae^{-i\pi/4} + be^{i\pi/4}).$$

Sustituyendo las constantes en (4.25) y siendo  $\theta(x) = \int_x^{x_i} \sqrt{|q(s)|} ds$  se tiene

$$\begin{aligned} y_I(x) &= \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} \left( \frac{(q'(x_i))^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} (ae^{i\pi/4} + be^{-i\pi/4}) \exp\left(-i\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q'(x_i))^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} (ae^{-i\pi/4} + be^{i\pi/4}) \exp\left(i\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) \right) \\ &= \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} \left( \frac{(q'(x_i))^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} (ae^{i\pi/4} + be^{-i\pi/4}) \left( \cos\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) - i \sin\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q'(x_i))^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} (ae^{-i\pi/4} + be^{i\pi/4}) \left( \cos\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) + i \sin\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Como  $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ , se puede escribir como

$$\begin{aligned} y_I(x) &= \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} \frac{(q'(x_i))^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} \left( a \cos\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + b \cos\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + a \sin\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - b \sin\left(\frac{\theta(x)}{\epsilon}\right) 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

y como  $2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$  y  $2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$  se tiene

$$y_I(x) = \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} \frac{q'(x_i)^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} \left( 2a \cos\left(\frac{\theta}{\epsilon} - \frac{\pi}{4}\right) + 2b \cos\left(\frac{\theta}{\epsilon} + \frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Finalmente, la aproximación WKB uniforme para todo el intervalo podremos escribirla como

$$y \approx \begin{cases} \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} \left( (2a_D \cos\left(\frac{1}{\epsilon}\theta(x) - \frac{\pi}{4}\right) + b_D \cos\left(\frac{1}{\epsilon}\theta(x) + \frac{\pi}{4}\right)) \right) & \text{si } x < x_i, \\ \frac{1}{|q(x)|^{1/4}} (a_D e^{-\kappa(x)/\epsilon} + b_D e^{\kappa(x)/\epsilon}) & \text{si } x_i < x. \end{cases}$$

donde

$$\theta(x) = \int_x^{x_i} \sqrt{|q(s)|} ds \quad (4.33)$$

y

$$\kappa(x) = \int_{x_i}^x \sqrt{|q(s)|} ds \quad (4.34)$$

A continuación ilustraremos los puntos de inflexión con un ejemplo.

**Ejemplo 4.4.1** Consideremos el problema

$$\epsilon^2 y'' - x(2-x)y = 0 \quad \text{para } -1 < x < 1, \quad (4.35)$$

donde  $y(-1) = y(1) = 1$ . En este caso,  $q(x) = x(2 - x)$ , luego hay un único punto de inflexión simple en  $x = 0$  con  $q'(0) = 2$ . Al resolver las respectivas integrales de (4.33) y (4.34) obtenemos

$$\theta(x) = \frac{1}{2}(1 - x)\sqrt{x(x - 2)} - \frac{1}{2}\ln(1 - x + \sqrt{x(x - 2)})$$

y

$$\kappa(x) = \frac{1}{2}(x - 1)\sqrt{x(2 - x)} - \frac{1}{2}\arcsin(x - 1) + \frac{\pi}{4}$$

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestra la solución numérica y la solución aproximada por el método WKB del problema (4.35). Para representar la solución numérica hemos utilizado un código en Matlab basado en la función *bvp4c*, con tolerancia  $10^{-10}$  utilizado para resolver problemas de contorno.

Podemos ver que la solución calculada por el método WKB se aproxima bien a la solución numérica tanto para el caso oscilatorio como para el no oscilatorio. En este caso se tiene que el punto de inflexión se encuentra en  $x_i = 0$ , donde se tiene la capa de transición definida por las funciones de Airy. En esta región podemos comprobar de nuevo que el método WKB se ajusta a la solución numérica.

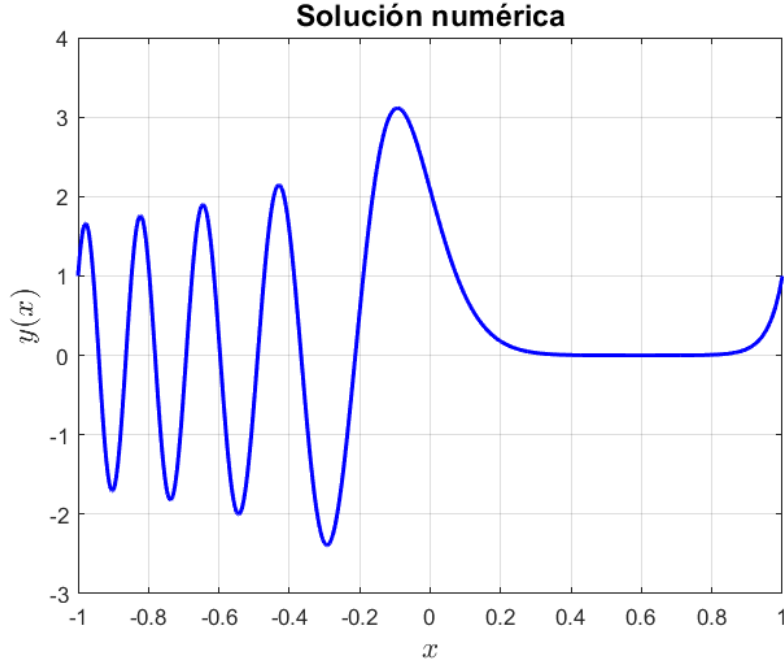


Figura 4.3: Solución numérica de (4.35)

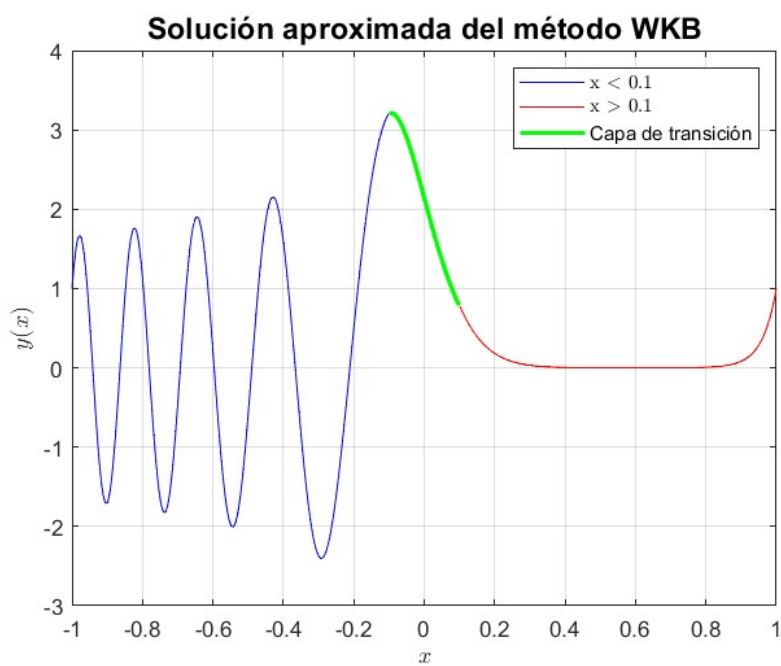


Figura 4.4: Solución aproximada por el método WKB de (4.35)

# Bibliografía

- [1] G. B. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Elsevier Academic Press, 6th edition, 2005.
- [2] L. H. Cortés, *Control robusto de un sistema mecánico simple mediante una herramienta gráfica*, 2010.
- [3] E. J. Hinch, *Matched asymptotic expansion*, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1991.
- [4] E. J. Hinch, *Regular perturbation problems in partial differential equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1991.
- [5] M. H. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer New York, NY, New York, 2nd edition, 2012.
- [6] J. Kevorkian & J. D. Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer New York, NY, 1st edition, 1996.
- [7] M. Kumar, *Methods for solving singular perturbation problems arising in science and engineering*, Mathematical and Computer Modelling, 54(1):556–575, 2011.
- [8] J. D. Logan, *Applied Mathematics*, Wiley, 4th edition, 2013.
- [9] D. S. Naidu, *Singular Perturbation Methodology in Control Systems*, Institution of Engineering and Technology, New York, illustrated edition, 1988.
- [10] R. E. O'Malley, *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer New York, NY, New York, 1 edition, 1991.
- [11] S. Pérez, *Modelos en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. El oscilador armónico*, Material del curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Universidad de La Laguna, 2023.
- [12] M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, California, annotated edition, 1975.
- [13] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1995.