



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**FLUJOS POTENCIALES EN MECÁNICA DE
FLUIDOS**

Autor: Juan Celada Martínez

Tutor: Manuel Núñez Jiménez

Año 2025

Resumen: El presente Trabajo de Fin de Grado aborda la teoría clásica de la dinámica de fluidos incompresibles, centrada en el estudio de perfiles inmersos en un flujo plano ideal, es decir, sin viscosidad. Se introducen las ecuaciones fundamentales del movimiento, como la ecuación de continuidad, la de Euler, la de la vorticidad y el teorema de Bernoulli. Se analiza el concepto de flujo potencial mediante funciones analíticas y su aplicación al caso del flujo alrededor de un cilindro, con apoyo en el teorema del círculo. Se desarrollan las fórmulas de Blasius para el cálculo de fuerzas sobre cuerpos, así como las nociones de sustentación y resistencia. Finalmente, se estudian los perfiles de Joukowski y la fórmula de Kutta-Joukowski, concluyendo con una discusión sobre la paradoja de D'Alembert.

Palabras clave: ecuación de Euler, vorticidad, flujo potencial, fórmula de Blasius, perfiles de Joukowski, arrastre, sustentación, paradoja de D'Alembert.

Abstract: This work explores the classical theory of incompressible fluid dynamics, focusing on profiles immersed in a two-dimensional inviscid flow. The fundamental equations of motion are introduced, including the continuity equation, Euler's equations, the vorticity equation, and Bernoulli's theorem. The concept of potential flow is analyzed using complex analytic functions, with application to the flow around a cylinder via the circle theorem. Blasius formulas for calculating forces on bodies are developed, along with the notions of lift and drag. Finally, Joukowski airfoils and the Kutta-Joukowski theorem are studied, concluding with a discussion of D'Alembert's paradox.

Keywords: Euler's equation, vorticity, potential flow, Blasius formula, Joukowski airfoils, lift, drag, D'Alembert's paradox

Índice general

Introducción	1
1. Física de fluidos	3
1.1. Generalidades. Líneas de corriente y derivadas materiales	3
1.2. Teorema de convección	8
1.3. Fuerzas ejercidas por la presión	12
1.4. Ecuaciones diferenciales del movimiento	14
1.5. Ecuaciones de Navier-Stokes	15
1.6. Flujo estacionario de un fluido de densidad constante	16
1.7. Vorticidad y circulación de un fluido	19
1.8. Velocidad inducida por una vorticidad	25
2. Flujos potenciales	29
2.1. Condiciones de contorno	31
2.2. Flujos potenciales multiformes	33
2.3. Flujos potenciales en dimensión 2	36
2.4. Teorema de Blasius	43
3. Aerodinámica bidimensional	49
3.1. Fuerza aerodinámica: arrastre y sustentación	49
3.2. Perfiles de Joukowski	53
3.3. La fórmula general de Kutta-Joukowski	57
3.4. La fórmula de Kutta-Joukowski para el momento	60
3.5. Paradoja de D'Alembert	63
Lista de figuras	69

A. Teorema de Liouville	71
Bibliografía	73

Introducción

El estudio del movimiento de los fluidos ha sido históricamente uno de los pilares fundamentales de la física clásica y la ingeniería. En particular, la dinámica de fluidos incompresibles - aquellos cuya densidad se considera constante - constituye un marco teórico esencial para la comprensión de fenómenos que van desde el flujo del aire alrededor de las alas de un avión hasta la circulación sanguínea en el cuerpo humano. Dentro de esta área, el análisis de flujos ideales, es decir, sin viscosidad ni efectos disipativos, permite obtener modelos matemáticos exactos y soluciones elegantes que, pese a sus limitaciones físicas, ofrecen una comprensión profunda de los mecanismos que gobiernan el comportamiento del fluido.

Este Trabajo de Fin de Grado se centra en el estudio de la dinámica de perfiles sumergidos en un flujo bidimensional ideal. El objetivo es presentar y desarrollar los conceptos fundamentales que permiten modelar y analizar el flujo alrededor de cuerpos en movimiento relativo con respecto al fluido. Para ello, se parte de las ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos: la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la masa; la ecuación de Euler, que describe la conservación de la cantidad de movimiento en ausencia de viscosidad; la ecuación de la vorticidad, útil para caracterizar la rotación del fluido; y el teorema de Bernoulli, que relaciona presión, velocidad y altura a lo largo de una línea de corriente en régimen estacionario.

A continuación, se introduce el concepto de flujo potencial, una idealización útil para flujos irrotacionales, donde el campo de velocidades puede derivarse de una función escalar potencial. En el caso bidimensional, esta descripción se enriquece mediante el uso de funciones analíticas de una variable compleja, lo que permite aprovechar herramientas del análisis complejo, como las condiciones de Cauchy-Riemann o el teorema de los residuos. Con esta formulación, se pueden modelar flujos reales mediante combinaciones de soluciones elementales y transformaciones conformes.

Uno de los ejemplos paradigmáticos tratados en este trabajo es el flujo alrededor de un cilindro, analizado mediante el teorema del círculo y otras herramientas del análisis complejo. A partir de este modelo, se derivan las fórmulas de Blasius, que permiten calcular directamente la fuerza total (suma de sustentación y resistencia al avance) ejercida por el fluido sobre un cuerpo. El análisis se extiende a perfiles más generales, como los perfiles de Joukowski, obtenidos por transformaciones conformes del cilindro, que permiten modelar formas aerodinámicamente eficientes. En este contexto, se introduce la fórmula de Kutta–Joukowski, una de las piezas clave en la teoría clásica de la sustentación, que relaciona la circulación del flujo alrededor del perfil con la fuerza de sustentación generada.

Por último, se discute la llamada paradoja de D'Alembert, una de las aparentes contradicciones de la teoría del flujo ideal, que establece que la fuerza de arrastre sobre un cuerpo inmerso en un flujo potencial es nula, lo cual entra en conflicto con la experiencia empírica. Esta paradoja motiva la necesidad de extender el modelo clásico hacia teorías más completas que incorporan la viscosidad, como la ecuaciones de Navier–Stokes.

El enfoque adoptado en este trabajo es fundamentalmente teórico, orientado a proporcionar una base matemática rigurosa y bien estructurada para entender los fenómenos que aparecen en la dinámica de fluidos incompresibles. A lo largo del texto se combinan el análisis vectorial, la teoría del potencial y el análisis complejo para construir un marco coherente que permita no solo modelar, sino también interpretar físicamente los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Física de fluidos

Se denomina fluido a cualquier sustancia susceptible a ser deformada continuamente, y sin límite, debido a unos esfuerzos o fuerzas, llamadas *de corte*. Esta definición, un tanto genérica, incluye gases y líquidos de cualquier índole. Los gases se caracterizan por adaptar su volumen al del recipiente donde estén contenidos, y reciben el nombre de *fluidos compresibles*. Por su parte los líquidos no cambian apreciablemente su volumen en función del recipiente que los contiene. Por ello, se conocen como *fluidos incompresibles*. En realidad, ningún fluido es totalmente incompresible, pero para líquidos se puede considerar mínima la variación de su densidad. A modo de ejemplo, la densidad del agua de mar en la superficie es de 1025 kg/m^3 , mientras que en el fondo de una fosa marina, de 1050 kg/m^3 .

1.1. Generalidades. Líneas de corriente y derivadas materiales

En el estudio matemático de los fluidos resulta importante el concepto de línea de corriente, como curva que es tangente en cada instante de tiempo a la velocidad del fluido. Más formalmente se define como sigue.

Definición 1.1. Sean $N = 2, 3$, Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ el campo de velocidades de un fluido. Se definen las *líneas de corriente* (en inglés, *streamlines*) como las curvas $x(t)$ solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x).$$

La intuición física indica que dos líneas de corriente no pueden cortarse. De lo contrario, dicho fluido presentaría dos velocidades distintas en un mismo punto, lo cual no es físicamente posible. Matemáticamente es sencillo matizar este aspecto, a partir del teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.2. Sea u el campo de velocidades de un fluido tal que $u : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una función Lipschitziana. Entonces la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x),$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in I$) es única.

Observación 1.3. Se toma como notación para el presente trabajo la presentada en la definición 1.1. Así, se consideran los valores $N = 2, 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto cualquiera e $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo, quizá infinito, de la recta real. En adelante, se hará uso de estos símbolos sin mayor explicación, y simplemente detallando lo necesario en casos particulares que se alejen de lo estándar. Además, todas las aplicaciones que se consideren se supondrán con la suficiente regularidad como para aplicar teoremas clásicos del análisis como el teorema de la divergencia, teorema de derivación de Leibniz, teorema fundamental del cálculo, etc.

Definición 1.4. Se denomina *tubo de corriente* a una región del espacio limitada por líneas de corriente.

Para entender el movimiento de un fluido, es posible tomar dos perspectivas distintas: euleriana y lagrangiana. La primera, que se prefiere para desarrollar la presente teoría, se centra en el estudio de un punto concreto del fluido. Con esta, adaptar el estudio clásico del movimiento (*cinemática*) a los fluidos resulta más sencillo. La segunda enfoca el estudio en una partícula concreta del fluido, atendiendo a la evolución temporal de esta.

Desde ambas perspectivas es posible determinar la cinemática del fluido de manera relativamente sencilla. En particular, a través del concepto de *derivada material*, que relaciona las derivadas temporales y espaciales en una misma expresión.

Se parte de querer estudiar la variación de una expresión del tipo $t \longrightarrow f(t, x(t))$ res-

pecto del tiempo. La regla de la cadena asegura que

$$\frac{d}{dt}f(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}(t)) \frac{dx_i}{dt}(t),$$

donde $\frac{dx_i}{dt}(t) = u_i(t)$ se reconoce como la componente i -ésima de la velocidad del fluido en el instante t , y $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}(t))$ resulta la componente i -ésima del vector gradiente de f . De la definición de producto escalar y su propiedad de conmutatividad se desprende que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

Dada esta derivación, se sigue la siguiente definición.

Definición 1.5. Sea $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se define su *derivada material* como

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

Observación 1.6. Esta definición se generaliza para el caso en el que $\mathbf{f} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sea una función vectorial, sin más que escribir

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f},$$

entendiendo que $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f} = (\mathbf{u} \cdot \nabla f_1, \mathbf{u} \cdot \nabla f_2, \mathbf{u} \cdot \nabla f_3)$.

Observación 1.7. Es convenio en física de fluidos emplear la notación de las definiciones anteriores, de forma que una expresión del tipo $\frac{D}{Dt} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ se referirá al operador derivada material. Es importante no confundirlo con derivadas ordinarias, parciales o totales, pues esta nueva definición aporta información más allá sobre el movimiento de la partícula.

Más concretamente, el término $\frac{\partial f}{\partial t}$ da idea de la tasa local de cambio del fluido en un intervalo de tiempo, mientras que el término $\mathbf{u} \cdot \nabla f$, a menudo llamado *convectivo*, representa la tasa de cambio del fluido debido a su propio desplazamiento.

Observación 1.8. Es claro que la derivada material es, en esencia, una derivada de una función de varias variables. Por ello, goza de todas las propiedades de derivación usuales, a destacar: linealidad, regla del producto, regla de la cadena, etc.

A lo largo del trabajo se utilizarán fluidos en diversos regímenes para el estudio. Por ello, se recuerdan las definiciones de campos solenoidales e irrotacionales, que se usarán a discreción a lo largo del trabajo.

Definición 1.9. Sea $\mathbf{u}$ el campo de velocidades de un fluido. Se dice $\mathbf{u}$ es solenoidal, o que el fluido es solenoidal, si es de divergencia nula, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Además, se dice que es irrotacional si su rotacional es nulo, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Para $N = 2$, el hecho de que $\mathbf{u} = (u, v)$ sea solenoidal implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

o, equivalentemente, que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-v).$$

Esto ocurre en particular (y siempre si Ω es simplemente conexo) si existe un potencial ψ tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Definición 1.10. Para $N = 2$, la función $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que hace que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

se llama *función de corriente* (en inglés, *stream function*).

La razón del nombre elegido para ψ se deriva del siguiente resultado.

Proposición 1.11. Si $N = 2$, se consideran las líneas de corriente del campo de velocidades (u, v) , dadas por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Entonces las líneas de corriente son de la forma $\psi = C$, para cualquier constante real C .

Demostración. De la definición anterior se deduce que

$$\nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = (-v, u)$$

Resulta entonces claro que $\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = 0$. Por tanto, ψ es constante a lo largo de una línea

de corriente, i.e. las líneas de corriente se describen por expresiones del tipo $\psi = C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante. $\square$

Observación 1.12. De la demostración anterior se extrae que $\nabla\psi$ es, en cada punto y para este tipo de fluidos, el vector normal a una línea de corriente en ese punto.

Ejemplo 1.13. Sea el campo de velocidades $\mathbf{u} = (x, -y)$. Se busca ψ tal que verifique las ecuaciones 1.1. Entonces

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = x, \quad \text{de donde } \psi = \int x dy = xy + C(x),$$

donde $C(x)$ es cierta función que depende de x . Imponiendo la otra condición,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = y + C'(x) = -(-y) = y, \quad \text{luego } C'(x) = 0.$$

En consecuencia, $C(x) = C$ una constante real y, en particular, se puede tomar $C = 0$. Por lo tanto la función de corriente es $\psi(x, y) = xy$.

Hay otros casos en los que el campo $\mathbf{u}$ no está definido en un dominio simplemente conexo. En tales situaciones, se trabaja en abiertos más generales a la hora de buscar una función de corriente, que podría no ser única, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14. Sea el campo de velocidades

$$\mathbf{u} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

De nuevo, en busca de ψ que verifique las ecuaciones 1.1, se tiene que

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \text{de donde } \psi = \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C(x),$$

donde $C(x)$ es cierta función que depende de x . De la otra condición se tiene que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + C'(x) = -\left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \text{luego } C'(x) = 0.$$

Análogamente, $C(x)$ es una constante real y, en particular, tomando la constante nula, una función de corriente resulta ser $\psi(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$. Por tanto,

las líneas de corriente son de la forma $\psi = C$ para C cierta constante real. Así, estas verifican la ecuación $x^2 + y^2 = e^{2C}$, que son circunferencias centradas en el origen.

En coordenadas polares, las líneas de corriente será de la forma

$$(x, y) = (r_0 \cos(\theta(t)), r_0 \sin(\theta(t))),$$

y deben ser solución del sistema de ecuaciones diferenciales dado en la definición 1.1.

Por un lado,

$$\frac{dx}{dt} = -r_0 \sin(\theta(t))\theta'(t)$$

y, por otro,

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{r_0 \sin(\theta(t))}{r_0^2} = \frac{\sin(\theta(t))}{r_0}.$$

Luego se tiene que

$$-r_0 \sin(\theta(t))\theta'(t) = \frac{\sin(\theta(t))}{r_0} \quad \text{o bien} \quad \theta'(t) = -\frac{1}{r_0^2}.$$

Esto implica que las trayectorias circulares que describen las líneas de corriente van cada vez más deprisa según el radio disminuye hacia $r_0 = 0$.

1.2. Teorema de convección

El objetivo de esta sección es estudiar la variación con respecto del tiempo de una función del tipo

$$F(t) = \int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

donde V_t es un dominio variable con t . Dicho estudio llevará al que se llamará *teorema de convección*. Para ello, es necesario establecer una serie de definiciones y resultados previos, como sigue.

Definición 1.15. La aplicación $X : I \times \Omega \longrightarrow \Omega$ dada por $X(t, \mathbf{a}) = \mathbf{x}(t)$, si $\mathbf{x}$ es la solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \end{cases},$$

se llama *flujo del campo de velocidades* $\mathbf{u}$.

Observación 1.16. La aplicación X anterior representa la trayectoria seguida por una partícula situada en el seno del campo de velocidades $\mathbf{u}$ si parte del punto $\mathbf{a}$.

Sea J el determinante jacobiano de la aplicación $\frac{\partial X}{\partial \mathbf{a}} : I \times \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, y se plantea calcular la derivada material $\frac{DJ}{Dt}$.

Lema 1.17. En las condiciones anteriores, $\frac{DJ}{Dt}(t, \mathbf{x}(t)) = (\nabla \cdot \mathbf{u})(t, \mathbf{x}(t)) J(t, \mathbf{x}(t))$.

Demostración. De la definición de derivada material (definición 1.5) se tiene que

$$\frac{DJ}{Dt}(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial J}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{u} \cdot \nabla J(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial J}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^N \frac{dx_i}{dt}(t) \frac{\partial J}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{d}{dt} J(t, \mathbf{x}(t)).$$

La segunda de las igualdades anteriores es consecuencia de desarrollar el producto escalar de $\mathbf{u} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_N}{dt} \right)$ por el gradiente de $J(t, \mathbf{x}(t))$, y la última es la definición de derivada total de J respecto de t , a partir de la regla de la cadena.

Por otro lado, como $\mathbf{a}$ es en un parámetro, se tiene que $\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a}))$. Derivando respecto de la variable a_i , e intercambiando el orden de derivación en el primer miembro en virtud del teorema de Schwarz, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}(t, \mathbf{a})) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial a_i} \mathbf{x}(t, \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) \frac{\partial x_j}{\partial a_i}(t, \mathbf{a}).$$

En consecuencia, $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}}(t, \mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}}(t, \mathbf{a})$. Con la notación del flujo del campo $\mathbf{u}$ se tiene que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial X}{\partial \mathbf{a}},$$

que representa un sistema diferencial lineal con matriz solución $Y = \frac{\partial X}{\partial \mathbf{a}}$ y matriz de coeficientes $A = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$.

Del *teorema de Liouville* (apéndice A), se deduce que

$$\frac{d}{dt} J(t, \mathbf{x}(t)) = \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t)) \right) J(t, \mathbf{x}(t)).$$

Como se tiene que

$$\text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t)) \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u_N}{\partial x_N} = \nabla \cdot \mathbf{u},$$

la ecuación de Liouville resulta

$$\frac{d}{dt}J(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{DJ}{Dt}(t, \mathbf{x}(t)) = (\nabla \cdot \mathbf{u})(t, \mathbf{x}(t)) J(t, \mathbf{x}(t)),$$

como se quería ver. □

Es posible ahora establecer el teorema buscado. Para ello, se considera una región $V_0 \subset \Omega$ y su desplazado por el fluido, $V_t = \mathbf{X}(t, -)(V_0)$. Sea $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y se define $F(t) = \int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Teorema 1.18 (*Teorema de convección*). En las condiciones descritas, se tiene que

$$F'(t) = \int_{V_t} \left(\frac{Df}{Dt}(t, \mathbf{x}) + f(\nabla \cdot \mathbf{u})(t, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}. \quad (1.2)$$

Demostración. Se puede escribir $\int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{V_0} f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) |J(t, \mathbf{a})| d\mathbf{a}$, en virtud del teorema del cambio de variables.

Se observa que $\mathbf{X}(0, \cdot) = \mathbf{I}$, la matriz identidad, luego $J(0, \cdot) = 1$. En estas condiciones, la ecuación de Liouville tiene por solución

$$J(t, \mathbf{x}(t)) = J(0, \mathbf{a}) \exp \left(\int_0^t \nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(s)) ds \right),$$

con $\mathbf{a} = \mathbf{x}(0)$. Luego, en particular, $J(t, \mathbf{x}(t)) > 0$ y también $J(t, \mathbf{a}) > 0$. Unificando todo, se llega a que

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) J(t, \mathbf{a}) d\mathbf{a}.$$

En virtud del teorema de derivación de Leibniz y de la regla de derivación del producto, se deduce que

$$F'(t) = \int_{V_0} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) + \mathbf{u} \cdot \nabla f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) \right) J(t, \mathbf{a}) + f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) \frac{dJ}{dt}(t, \mathbf{a}) \right] d\mathbf{a}.$$

Substituyendo la expresión para la derivada material de f y usando el lema previo, se obtiene que

$$F'(t) = \int_{V_0} \left(\frac{Df}{Dt}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) J(t, \mathbf{a}) + f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{a})) (\nabla \cdot \mathbf{u}) J(t, \mathbf{a}) \right) d\mathbf{a}.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variables inicial se obtiene el resultado:

$$F'(t) = \int_{V_t} \left(\frac{Df}{Dt}(t, \mathbf{x}) + f(\nabla \cdot \mathbf{u})(t, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}.$$

□

Manipulando ligeramente la expresión anterior, y como aplicación del teorema de la divergencia, se puede obtener el siguiente resultado.

Corolario 1.19 (*Teorema del transporte de Reynolds*). En las condiciones del teorema anterior, resulta que

$$F'(t) = \int_{V_t} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

donde ∂V_t representa, como de costumbre, el borde de la región V_t y $\mathbf{n}$ su normal exterior.

Demostración. Partiendo del teorema de convección y desarrollando la expresión de la derivada material según la definición 1.5 se obtiene

$$F'(t) = \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right) d\mathbf{x},$$

dado que $\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{u} + f(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{u})$.

La linealidad de la integral y el teorema de la divergencia aplicado al segundo sumando permiten concluir:

$$F'(t) = \int_{V_t} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

□

Un resultado clave en física de fluidos que se deriva del teorema de convección es la *ecuación de continuidad*. Esta constituye la expresión matemática, en forma diferencial, de un principio físico básico: la conservación de la masa.

Se puede caracterizar un fluido por una función densidad $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ de forma que la masa de una región $V = V(t)$ en el instante de tiempo t viene dada por la expresión

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Admitiendo que la masa se conserva por el flujo dado por la definición 1.15, de la

ecuación de convección (ecuación 1.2) se sigue que

$$M'(t) = \int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0.$$

Como $V = V(t)$ es un dominio arbitrario, se deduce que sólo puede ser

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.4)$$

La ecuación 1.4 será llamada *ecuación de continuidad*, y es la primera de las ecuaciones de Navier-Stokes. Motiva, además, la siguiente definición.

Definición 1.20. Un fluido se dice que es *incompresible* si la densidad permanece constante a lo largo del flujo, i.e. $\rho = \text{const.}$

Es interesante notar que, en virtud de la ecuación de continuidad, para un fluido incompresible se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$; esto es, el campo $\mathbf{u}$ es solenoidal.

1.3. Fuerzas ejercidas por la presión

Antes de establecer las ecuaciones diferenciales de movimiento de un fluido, es preciso estudiar las posibles fuerzas que pueden actuar sobre este. Por lo general, se dividen en fuerzas causadas por campos externos y fuerzas de contacto.

Las fuerzas causadas por campos externos pueden ser, por ejemplo, gravitatorias o electromagnéticas (si el fluido posee carga eléctrica). Por su parte, las fuerzas de contacto, o de superficie, son aquellas ejercidas sobre la superficie de una unidad elemental de volumen del fluido. Son las que se estudiarán en la presente sección.

En física, se define la *presión* como fuerza por unidad de superficie. Será de interés el caso en el que las fuerzas de contacto vengan dadas a partir de la presión. La presión como función escalar depende de otras variables termodinámicas, como la densidad, la temperatura o la entropía. Dos de las variables determinan el resto a partir de la ecuación de estado, diferente para cada fluido. Un caso de especial interés es aquel en el que las líneas de presión constante (*isóbaras*) coinciden con las de densidad constante (*isopícnas*). Ello motiva la siguiente definición.

Definición 1.21. Un fluido se dice que es *barotrópico* si el campo de presiones ejercidas

sobre el fluido es función únicamente de la densidad, i.e. $p = p(\rho)$.

En ausencia de otras fuerzas externas, la fuerza ejercida sobre un fluido se calcula como $\mathbf{F} = -\nabla p$, siendo p el campo de presiones sobre el fluido. Como aplicación del teorema de la divergencia, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.22. Sea V un volumen que alberga un fluido. Se denota por ∂V al borde de V y $\mathbf{n}$ a su normal exterior. Entonces la fuerza total ejercida por la presión sobre V vendrá dada por $\left(\int_{\partial V} -pn_i d\sigma \right)_{i=1}^N$.

Demostración. Si $F_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$ es la componente i -ésima de la fuerza de contacto, la fuerza total ejercida en V tiene por componente i -ésima

$$\int_V F_i dV = \int_V -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV.$$

Resulta que $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nabla \cdot (0, \dots, p, \dots, 0)$, donde la única componente no nula es la i -ésima. Luego aplicando el teorema de la divergencia se obtiene que la componente i -ésima de la fuerza total viene dada por

$$\int_V -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_V -\nabla \cdot (0, \dots, p, \dots, 0) dV = \int_{\partial V} -pn_i d\sigma,$$

como se buscaba. □

Teorema 1.23. Sea W un subdominio de V , ambos inmersos en el seno de un fluido estático, i.e. $\mathbf{F} - \nabla p = 0$. La fuerza total ejercida por el fluido sobre W resulta ser $-\int_W \mathbf{F} d\mathbf{x}$.

Demostración. La componente i -ésima de la fuerza ejercida por la presión en la región $V \setminus W$ vendrá dada, en virtud del lema previo, por $\int_{\partial V} -pn_{i,V} d\sigma + \int_{\partial W} -pn_{i,W} d\sigma$, donde se utiliza la notación habitual para el borde de una región, y $\mathbf{n}_V$ y $\mathbf{n}_W$ denotan las normales exteriores a V y W , respectivamente. Así, la fuerza ejercida por el fluido sobre W , que contribuye a la fuerza total sobre $V \setminus W$, será $\int_{\partial W} -pn_{i,W} d\sigma$.

Por otro lado, integrando la relación $\mathbf{F} - \nabla p = 0$ sobre W , de nuevo por el lema previo se tiene que $\int_W (\mathbf{F} - \nabla p)_i d\mathbf{x} = \int_W F_i d\mathbf{x} - \int_{\partial W} pn_{i,W} d\sigma = 0$. En consecuencia, la componente i -ésima de la fuerza sobre W será $\int_{\partial W} -pn_{i,W} d\sigma = -\int_W F_i d\mathbf{x}$, y la fuerza total sobre W resulta $-\int_W \mathbf{F} d\mathbf{x}$. □

Corolario 1.24 (*Principio de Arquímedes*). La fuerza ejercida por un fluido en equilibrio estático sobre un cuerpo sumergido en él es vertical y hacia arriba y tiene el valor del peso del fluido desalojado.

Demostración. Se considera en el teorema anterior que la fuerza sea la de gravitación, de forma que $\mathbf{F} = -g\rho(\mathbf{x})\hat{k}$, si $\hat{k}$ denota el vector unitario según la dirección del eje OZ . La fuerza total ejercida sobre W será $-\int_W -g\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}\hat{k} = gM(W)\hat{k}$, donde $M(W)$ es la masa del fluido en la región W , tal y como se estableció en la ecuación 1.3, y $gM(w)$ es el peso del fluido. $\square$

1.4. Ecuaciones diferenciales del movimiento

Es momento de hallar las ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido. Para ello, se plantea inicialmente la ecuación de la dinámica de Newton, $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$, donde $\mathbf{F}$ representa las fuerzas externas y $\mathbf{p}$ es el momento lineal del fluido, que en su definición general toma la forma $\mathbf{p} = \rho\mathbf{u}$, con ρ la densidad del fluido. Para el caso en el que el fluido sea incompresible, se tiene la ecuación $\mathbf{F} = \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$.

Las fuerzas externas vienen dadas por las causas descritas en la sección anterior - campos externos y fuerzas de contacto -, pero también por esfuerzos de tensión. Entre los campos externos que pueden afectar al fluido, se considera el caso del campo gravitatorio: $\mathbf{F} = -\rho\nabla\Phi = \rho\mathbf{g}$, donde Φ representa el potencial gravitatorio y $\mathbf{g}$, el campo. Para las fuerzas de contacto, se toma un fluido donde estas toman la forma $-\nabla p$, si p es el campo de presiones.

Entre los esfuerzos de tensión destacan para un fluido los esfuerzos debidos a la viscosidad del propio fluido. Los efectos de viscosidad representan la oposición del fluido al movimiento y pueden tomar distintas formas. En el caso en el que la viscosidad sea función lineal de las derivadas de la velocidad, se dice que el fluido es *newtoniano*. Entonces los efectos viscosos vienen medidos por $\mu\Delta\mathbf{u}$. Aquí $\Delta\mathbf{u}$ representa el laplaciano de $\mathbf{u}$, mientras μ es el *coeficiente de viscosidad dinámica*, que mide la oposición del fluido al movimiento por sus propias fuerzas de cohesión intermolecular, y suele depender de la temperatura.

Por comodidad y claridad en la presentación de los resultados, conviene definir $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ como el *coeficiente de viscosidad cinemática*, en el que ya no queda patente la contribución

a la viscosidad por parte de las fuerzas, sino sólo por la propia velocidad del fluido.

Ignorando inicialmente efectos de viscosidad, se llega a la *ecuación de Euler*:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad (1.5)$$

que describe el movimiento de un fluido no viscoso en el seno de un campo gravitatorio.

En la mayoría de casos, no obstante, es preciso considerar los esfuerzos viscosos, llegando a la conocida como *ecuación de Cauchy*:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (1.6)$$

Si en la esta ecuación se simplifica un factor ρ en cada miembro introduciendo el coeficiente de viscosidad cinemática, y se desarrolla la derivada material del miembro izquierdo de acuerdo con la observación 1.6, se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1.7)$$

que es la forma desarrollada de la ecuación de Cauchy, o *ecuación del momento*, y describe el movimiento de un fluido newtoniano viscoso en el seno de un campo gravitatorio. Esta es la segunda de las ecuaciones de Navier-Stokes.

1.5. Ecuaciones de Navier-Stokes

A modo de recopilación, se incluye esta sección donde se unifican las dos ecuaciones de Navier-Stokes presentadas, ecuación 1.4 y ecuación 1.7, obteniendo el sistema diferencial siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \end{array} \right. . \quad (1.8)$$

Su resolución ofrece unas ecuaciones que representan con total generalidad el movimiento preciso de una partícula inmersa en el seno de un fluido arbitrario. No obstante, el grado de acoplamiento y la presencia del término no lineal $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ complican enormemente su resolución exacta. Sólo en los casos más elementales y considerando varias

simplificaciones es posible integrar las ecuaciones de Navier-Stokes con cierta sencillez.

De hecho, este problema de integración es a día de hoy un problema abierto de las matemáticas modernas. En efecto, no está demostrada la existencia y unicidad de soluciones a las ecuaciones 1.8, en dimensión $N = 3$, dado un dato inicial. Tanto es así que el Instituto Clay incluyó en el año 2000 este problema entre uno de los célebres *problemas del milenio*.

1.6. Flujo estacionario de un fluido de densidad constante

A partir de ahora en el presente trabajo, se utilizarán sólo las ecuaciones de Euler; esto es, se ignorarán los efectos viscosos, resultando la ecuación del momento a considerar la dada en ecuación 1.5. Se tiene, además, la siguiente definición.

Definición 1.25. Un fluido se dice que es *ideal* si es incompresible y no viscoso.

En busca de casos particulares donde el sistema diferencial dado en la ecuaciones 1.8 se simplifique, se estudia un fluido ideal (y, por tanto, $\rho = \text{const.}$, pues es incompresible) en el que $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$, eliminando así la dependencia con t de la densidad y la velocidad. Ello motiva la siguiente definición.

Definición 1.26. Un fluido se dice que es *estacionario*, que está en *régimen estacionario* o que tiene *flujo estacionario* si se cumple que $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$.

En vista de simplificar aún más la ecuación del momento, se presenta el caso de un fluido ideal sobre el que se ejerce una fuerza *conservativa*, esto es, que proviene de un potencial $\mathbf{F} = -\rho \nabla \Phi$.

Definición 1.27. Sea un fluido ideal sobre el que actúa una fuerza conservativa de la forma $\mathbf{F} = -\rho \nabla \Phi$. Se define la *función de Bernoulli* como $\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{1}{2}u^2$.

Teorema 1.28 (*Teorema de Bernoulli*). A lo largo de una línea de corriente la función de Bernoulli es constante.

Demostración. Con todas las hipótesis de la definición 1.27 en la mano, la ecuación 1.5 se simplifica hasta $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi$.

Las identidades vectoriales clásicas implican que $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \nabla u^2 = 2\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$, de donde se llega a que

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (1.9)$$

Se obtiene entonces a que $\frac{1}{2}\nabla u^2 + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ y, de la linealidad del operador ∇ , se obtiene que

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{1}{2}u^2 \right) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

si se considera ρ constante.

De las propiedades del producto vectorial se deduce que el miembro derecho es ortogonal a $\mathbf{u}$, luego multiplicando toda la expresión escalarmente por $\mathbf{u}$ se tiene que se verifica la relación

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{1}{2}u^2 \right) = 0.$$

Lo anterior implica que

$$\frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{1}{2}u^2 = \mathcal{B}$$

es constante a lo largo de las líneas de corriente, como se quería. $\square$

Observación 1.29. Atendiendo al resultado anterior, y despreciando los cambios en Φ (como ocurre frecuentemente en la práctica), es posible relacionar las variaciones en la presión y en la velocidad de un fluido. En efecto, para mantener constante el valor de $\mathcal{B}$, un aumento de p conlleva una disminución de u^2 , y, a la postre, en $\mathbf{u}$. Igualmente, disminuciones en de la presión desembocarán en aumentos de velocidad. En definitiva, la presión y velocidad de un fluido se entenderán, en cierto sentido, como inversos.

Como consecuencia del teorema de Bernoulli, se tiene el siguiente resultado, que permite escribir la ecuación de continuidad en forma integral.

Corolario 1.30. Para un fluido en las condiciones del teorema anterior atravesando un tubo de corriente de tapas S_0 y S_1 , se verifica que

$$\int_{S_0} \mathcal{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{S_1} \mathcal{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (1.10)$$

Demostración. Para un fluido estacionario y de densidad constante, la ecuación de continuidad (ecuación 1.4) se escribe como $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Se considera entonces la divergencia del campo $\mathcal{B}\mathbf{u}$. Las identidades vectoriales de nuevo implican que $\nabla \cdot (\mathcal{B}\mathbf{u}) = \nabla \mathcal{B} \cdot \mathbf{u} + \mathcal{B} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, y el campo $\mathcal{B}\mathbf{u}$ es solenoidal.

Llamando V al volumen delimitado por el tubo de corriente, se puede calcular el flujo del campo $\mathcal{B}u$ a través de la superficie $S = \partial V$. Para ello, se emplea el teorema de la divergencia, con lo que $\int_S \mathcal{B}u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \nabla \cdot (\mathcal{B}u) dx = 0$. Ahora bien, la superficie S está dividida en tres superficies. S_0 y S_1 son, respectivamente, las tapas de entrada y salida de fluido en el volumen V , y S_ℓ , la cara lateral. Por las propiedades de la integral, se tiene entonces $\int_S \mathcal{B}u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{S_1} \mathcal{B}u \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{S_0} \mathcal{B}u \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{S_\ell} \mathcal{B}u \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$, donde el signo negativo de la segunda integral se incluye por ser el flujo entrante en V .

Si $\mathbf{n}$ denota la normal exterior, en la cara lateral de un tubo de corriente se tiene que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Luego la última de las integrales de la expresión anterior es idénticamente nula. Ello implica la relación buscada $\int_{S_0} \mathcal{B}u \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{S_1} \mathcal{B}u \cdot \mathbf{n} d\sigma$. $\square$

Observación 1.31. La ecuación 1.10 es una de las *representaciones integrales de la ecuación de continuidad*.

Como aplicación de los resultados anteriores, se presenta el siguiente ejemplo que, pese a ser elemental, aglutina todo lo descrito en la presente sección.

Ejemplo 1.32. Sea una tubería en ausencia de gravedad, rígida, de sección circular y diámetro variable de variación lenta, como la representada en la figura 1.1.

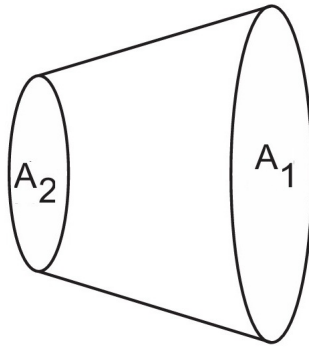


Figura 1.1: Tubería de sección lentamente variable. Adaptado de [3].

Por simplicidad, se supone que la velocidad en las tapas A_1 y A_2 es horizontal y dependiente sólo de la primera coordenada, i.e. $\mathbf{u} = (u(x), 0, 0)$. Cabe destacar que esta hipótesis no puede ser estrictamente cierta. También se añade la hipótesis de que $p = p(x)$.

Se fijan dos extremos de la tubería, de secciones A_1 y A_2 . Sea $x = x_1$ la abscisa en la que se encuentra la tapa A_1 y $x = x_2$ la correspondiente a A_2 . Entonces la ecuación de

continuidad (ecuación 1.10) se escribe como

$$\int_{A_1} \mathcal{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{A_2} \mathcal{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

En ambos casos, $\mathcal{B} \mathbf{u}$ es constante sobre cada superficie ($\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ y $p = p(x)$), luego se obtiene que $\mathcal{B}_1 u_1 A_1 = \mathcal{B}_2 u_2 A_2$, donde $u_1 = u(x_1)$ y $u_2 = u(x_2)$. Como $\mathcal{B}$ es constante a lo largo de una línea de corriente, resulta que $u_1 A_1 = u_2 A_2$. De aquí, se define el *caudal* o *flujo* de un fluido como $Q = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$. En particular en este caso, $u = \frac{Q}{A}$. Finalmente, por el teorema de Bernoulli se llega a

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2} = \text{constante}.$$

En definitiva, la presión será mayor cuanto mayor sea el área de la sección circular. En otras palabras, los “puntos débiles” de una tubería son aquellos de mayor sección, en contra de la intuición natural.

1.7. Vorticidad y circulación de un fluido

Uno de los parámetros más relevantes a la hora de estudiar un fluido es su tendencia a efectuar movimientos de rotación. Esto viene medido por una magnitud vectorial llamada vorticidad.

Definición 1.33. Dado un campo de velocidades de un fluido $\mathbf{u}$, se define la *vorticidad* $\mathbf{w}$ del fluido como el rotacional de $\mathbf{u}$, i.e. $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$. Una *línea de vórtice* es la tangente instantánea al vector vorticidad en cada punto.

Se considera un ejemplo ilustrativo, a partir del cual se empezará a trabajar con el concepto de vorticidad.

Ejemplo 1.34. Para $N = 2$, el campo de velocidades es bidimensional y se puede identificar $\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y))$ con $\hat{\mathbf{u}} = (u(x, y), v(x, y), 0)$, a través de la inyección de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. En este caso,

$$\mathbf{w} = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

por lo que a menudo se considera la vorticidad un escalar de valor $w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.

Siguiendo en el caso $N = 2$, sea U una región del plano que tiene a la curva cerrada y simple, C , por frontera. De la teoría de campos se desprende la definición de circulación del campo de velocidades $\mathbf{u}$ a lo largo de C como $\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$. En virtud del teorema de Green, se escribe $\Gamma_C = \iint_U \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_U w dx dy$.

Ejemplo 1.35. Se recuerda que un campo $\mathbf{u}$ se dice que es conservativo si existe un potencial φ tal que $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. Es un resultado conocido que la circulación a lo largo de una curva cerrada y $\mathcal{C}^1$ a trozos de un campo conservativo es nula.

Ejemplo 1.36. Sea el campo de velocidades de un fluido dado por

$$\mathbf{u} = (u, v) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-y}{r^2}, \frac{x}{r^2} \right),$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. La representación del flujo se ofrece en la figura 1.2. Resulta que la circulación a lo largo de cualquier curva cerrada y simple que contiene al origen es 1.

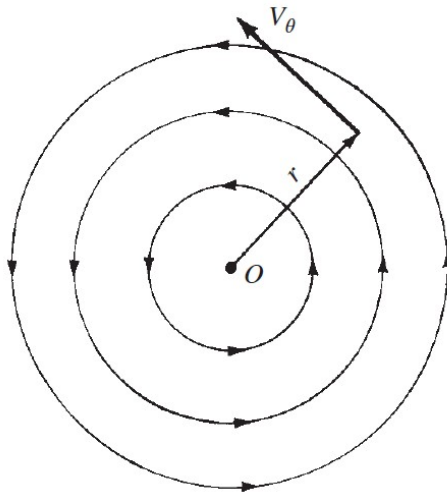


Figura 1.2: Vórtice puntual. Adaptado de [1].

Se observa que, para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\pi r^2} + \left(-\frac{1}{2\pi r^2} \right) = 0,$$

donde se ha utilizado la notación del ejemplo 1.34. Luego el campo $\mathbf{u}$ es irrotacional salvo en el origen (donde ni siquiera está definido). Entonces la circulación a calcular es independiente de la curva cerrada y simple elegida. En particular, se toma la circunferencia centrada en 0 y de radio R , que se denota por $C(0, R)$. Para calcular $\oint_{C(0, R)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$,

se emplea la parametrización de la circunferencia dada por

$$\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi].$$

En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{C(0,R)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi R^2} (-R \sin(t), R \cos(t)) \cdot (-R \sin(t), R \cos(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \end{aligned}$$

como se quería.

Este ejemplo ilustra el caso de un fluido irrotacional en todo punto salvo el origen, que es un punto singular donde se concentra toda la vorticidad. El origen en este caso acostumbra a recibir el nombre de *vórtice puntual*, o sencillamente *vórtice*, que induce a su alrededor el flujo circular mostrado en la figura 1.2.

Resulta entonces de interés estudiar qué ocurre con la circulación de un fluido no viscoso sobre el que actúan fuerzas conservativas. Es clave el siguiente resultado.

Teorema 1.37 (*Teorema de Kelvin*). Sea $C(t)$ una curva cerrada y simple en un fluido no viscoso sobre el que actúa una fuerza de la forma $-\rho \nabla \Phi$, con Φ un potencial escalar. Si o bien ρ es constante (fluido ideal) o bien el fluido es barotrópico, entonces la circulación es invariante bajo el flujo. Más precisamente, si $C(t)$ describe la transportada de una misma curva en cada instante, entonces $\frac{d}{dt} \Gamma_{C(t)} = 0$.

Demostración. Sea, para cada t , $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ dada por $\varphi(s) = \mathbf{x}(s, t)$ una parametrización de $C(t)$ de modo que la aplicación $\eta(t) = \mathbf{x}(s, t)$ describe la trayectoria de una partícula bajo el flujo de velocidades. Entonces se puede escribir que

$$\Gamma_{C(t)} = \int_a^b \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(s, t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, t) ds.$$

Por el teorema de Leibniz de derivación bajo el signo integral, se tiene que

$$\frac{d\Gamma_{C(t)}}{dt} = \int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x}(s, t)) + \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(s, t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(s, t) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, t) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(s, t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, t) \right\} ds.$$

Escrito en coordenadas,

$$\Gamma_{C(t)} = \sum_i \int_a^b u_i(t, \mathbf{x}(s, t)) \frac{\partial x_i}{\partial s} ds.$$

Por tanto, utilizando el teorema de Schwarz para las derivadas parciales cruzadas y omitiendo los argumentos de las funciones,

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{C(t)} = \int_a^b \left[\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} + \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} + \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] ds,$$

Dado que $\frac{\partial x_i}{\partial t} = u_i$ es la componente i -ésima del flujo de velocidad, la linealidad de la integral aplicada sobre la igualdad anterior implica

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{C(t)} = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} ds + \int_a^b \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} ds.$$

La segunda integral es sencilla de evaluar, a partir del teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow:

$$\int_a^b \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} dx = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{\partial s} ds = \frac{1}{2} [u^2(t, \mathbf{x}(b, t)) - u^2(t, \mathbf{x}(a, t))].$$

Por ser $C(t)$ cerrada, $\mathbf{x}(a, t) = \mathbf{x}(b, t)$ y, en consecuencia, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(b, t)) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(a, t))$. Luego la integral es nula.

Por otro lado, para la primera integral se hace uso de la ecuación de Euler (ecuación 1.5), según la cual

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi.$$

Luego basta con estudiar la integral $\int_a^b \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi \right) d\mathbf{x}$.

Si ρ es constante, el integrando se transforma en

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi = \nabla \left(\Phi - \frac{p}{\rho} \right),$$

que es el gradiente de un potencial escalar. Por tanto, la circulación es nula al ser $C(t)$ cerrada.

Por otra parte, en caso de que ρ no sea constante, pero el fluido sea barotrópico,

entonces $p = p(\rho)$ y entonces el sumando $\frac{1}{\rho}\nabla p$ se puede ver como el gradiente de la función

$$F(\rho) = \int \frac{p'(\rho)}{\rho} d\rho.$$

En efecto, el teorema fundamental del cálculo permite escribir:

$$\nabla F(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho} \nabla \rho = \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Luego de nuevo el integrando resulta ser el gradiente de un potencial escalar, en este caso $\Phi - F(\rho)$, luego la circulación es nula por ser $C(t)$ cerrada. $\square$

A continuación se propone derivar la ecuación de la vorticidad para un fluido como el considerado en el teorema anterior. Esto es, un fluido no viscoso, donde la fuerza externa es de la forma $-\rho\nabla\Phi$ y o bien ρ es constante o bien p es barotrópica.

Se parte de la ecuación de Euler:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi = \mathbf{0}.$$

Desarrollando la derivada material y tomando el rotacional de la expresión, se llega a que

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

donde

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi \right) = \mathbf{0}$$

por ser $\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi$ el gradiente de un potencial, según lo explicado anteriormente.

Permutando el orden de derivación en virtud del teorema de Schwarz para las derivadas cruzadas, el primer sumando resulta $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$.

Por su parte, para el segundo sumando se desarrolla la expresión

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla u^2.$$

Ahora bien, como el segundo sumando es un campo conservativo, al tomar rotacionales se tiene que $\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$.

Para desarrollar el último producto se emplea la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}.$$

Por tanto, se obtiene que

$$\nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{w} - (\nabla \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

Ahora bien, como $\mathbf{w}$ es un rotacional, $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$. Luego la ecuación final resulta

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0,$$

donde se reconoce la derivada material

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}.$$

Ahora, si ρ es constante, la ecuación 1.4 implica que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por tanto, se obtiene la ecuación

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (1.11)$$

Si el fluido es barotrópico, la ecuación 1.4 implica que $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$. Luego se obtiene la ecuación

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

Ahora bien, por la regla de derivación del producto se tiene que

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{w}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\mathbf{w}}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \mathbf{w} = \frac{1}{\rho} \frac{D\mathbf{w}}{Dt} - \frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{w} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{D\mathbf{w}}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{w} \right).$$

Resulta, por tanto, la ecuación

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{w}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (1.12)$$

En ambos casos, el factor $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}$ se corresponde con el cambio en la vorticidad debido a estrechamientos o cambios de inclinación de las líneas de vórtice. Para $N = 2$, dicho factor resulta $\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u} = 0$. Entonces la ecuación de la vorticidad se reduce a $\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = 0$, que

significa que la vorticidad se mantiene constante a lo largo de una línea de corriente.

1.8. Velocidad inducida por una vorticidad

Para acabar el capítulo se presenta el problema de, dada una vorticidad $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, hallar los campos $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que hacen $\nabla \times u = w$. A priori, la solución no es única, pues si u es solución, $u + \nabla\varphi$ es también solución, donde φ es un potencial escalar arbitrario. El problema tiene solución única si se imponen condiciones adicionales de decrecimiento. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.38. Sea w una vorticidad dada y $R > 0$ arbitrario. Se supone que $\|w\| \leq \frac{C}{r^3}$, con C una constante positiva y $r = \|x\|$, $r > R$. Entonces existe un único campo solenoidal u tal que $w = \nabla \times u$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} \|u\| = 0$. Además, u viene dado por

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(y-x) \times w(y)}{\|x-y\|^3} dy. \quad (1.13)$$

Demostración. Se propone aquí una prueba constructiva; esto es, partiendo de que el problema tiene solución, construirla explícitamente a partir de las propiedades buscadas. Se procede entonces como sigue.

Como debe ser $w = \nabla \times u$, tomando rotacionales en la igualdad y aplicando la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A$, se sigue que $\nabla \times w = \nabla(\nabla \cdot u) - \Delta u$. Ahora, para ser u solenoidal (i.e. $\nabla \cdot u = 0$), debe ser solución de la ecuación de Poisson $\Delta u = -\nabla \times w$. El problema de Dirichlet asociado (w tiende hacia 0 cuando r tiende hacia ∞) tiene por solución el potencial newtoniano dado por la expresión

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \times w(y)}{\|x-y\|} dy.$$

Falta ver que esta expresión se puede reescribir como en la ecuación 1.13.

Dada la identidad vectorial $\nabla \times (fF) = f\nabla \times F + \nabla f \times F$, donde f es un campo escalar y F uno vectorial, resulta que

$$\nabla \times \left(\frac{w(y)}{\|x-y\|} \right) = \frac{1}{\|x-y\|} \nabla \times w(y) + \nabla \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) \times w(y),$$

donde x se considera constante respecto de la variable de derivación y .

Además, como $\nabla \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) = -\frac{x - y}{\|x - y\|^3} = \frac{y - x}{\|x - y\|^3}$ al derivar respecto de y , se obtiene que

$$\frac{\nabla \times w(y)}{\|x - y\|} = \nabla \times \left(\frac{w(y)}{\|x - y\|} \right) - \frac{(y - x) \times w(y)}{\|x - y\|^3}.$$

Por tanto,

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \left(\frac{w(y)}{\|x - y\|} \right) dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(y - x) \times w(y)}{\|x - y\|^3} dy,$$

en virtud de la linealidad de la integral. El problema radica entonces en comprobar que la primera integral se anula.

Primeramente se justifica la integrabilidad del término

$$\nabla \times \left(\frac{w(y)}{\|x - y\|} \right).$$

Para ello, es suficiente con observar que, con un cambio de variable a coordenadas esféricas y utilizando la hipótesis $\|w\| \leq \frac{C}{r^3}$, el integrando está acotado, para $r > R$, por $\frac{C}{r \cdot r^3} \cdot r^2$, donde el r^2 procede del jacobiano de la transformación. Por tanto, la integral en la coordenada radial se acota por

$$\int_R^\infty \frac{C}{r^2} dr < \infty,$$

luego $\nabla \times \left(\frac{w(y)}{\|x - y\|} \right)$ es integrable y es de aplicación el teorema de Fubini.

La coordenada i -ésima del integrando resulta ser

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{w_k(y)}{\|x - y\|} \right) dy,$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de permutación de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Aplicando el teorema de Fubini se puede integrar en primer lugar respecto de la variable

y_j , obteniéndose

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{w_k(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \Big|_{y_j \rightarrow -\infty}^{y_j \rightarrow \infty} d\mathbf{y}',$$

en virtud del teorema fundamental del cálculo. Como $w(\mathbf{y})$ decrece en el infinito más rápido que $\frac{1}{\|\mathbf{y}\|^3}$, el último integrando se anula tras aplicar la regla de Barrow sobre la integral impropia. Así, cada componente de la integral de interés es nula, y la integral total será nula, obteniendo la expresión en la ecuación 1.13 para $\mathbf{u}$.

Finalmente, la solución es única, pues si $\mathbf{u}'$ es otra solución, se considera el campo $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$. De la linealidad de los operadores diferenciales se deduce que $\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}') = 0$ y que $\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}') = \mathbf{0}$. Por tanto, debe ser que $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \nabla \phi$ para un ϕ cuyo gradiente se haga cero en infinito. Al ser $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ solenoidal, resulta que $\Delta \phi = 0$, por lo que $\nabla \phi$ será constante. Para que sea cero en infinito debe ser $\nabla \phi = \mathbf{0}$. Luego $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{0}$ y la solución $\mathbf{u}$ es única. $\square$

La ley anterior se reconoce también válida para el campo magnético $\mathbf{B}$, cuyo rotacional es la densidad de corriente $\mathbf{J}$ (*ley de Biot y Savart*).

Capítulo 2

Flujos potenciales

La teoría del flujo potencial o irrotacional es un pilar fundamental de la dinámica de fluidos por dos razones. Históricamente, su importancia creció junto con el desarrollo de herramientas matemáticas aplicables a esta clase de flujos. Sin embargo, un segundo punto, más importante, es que el flujo potencial se manifiesta realmente en la naturaleza, o al menos se aproxima bien, en muchas situaciones de interés práctico. El flujo uniforme alrededor de un cuerpo rígido es un ejemplo importante en el que los flujos potenciales encuentran aplicación. En este caso, la irrotacionalidad existe fuera de las capas límite viscosas.

Definición 2.1. Dado el campo de velocidades de un fluido u definido en Ω , se dice que el flujo es *potencial* o *irrotacional* si $w = 0$ en todo Ω .

Observación 2.2. El nombre de *potencial* para los flujos irrotacionales se justifica mediante el siguiente teorema, que es una consecuencia del ya conocido lema de Poincaré.

Teorema 2.3. Sea u un flujo potencial en un dominio Ω simplemente conexo. Entonces existe un potencial escalar φ tal que $u = \nabla\varphi$ en Ω .

La teoría del flujo potencial resulta de especial utilidad en la aplicación a situaciones con densidad constante. En tal caso, se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 2.4. Sea u un flujo potencial de densidad constante y φ un potencial tal que $u = \nabla\varphi$. Entonces φ es una función armónica.

Demostración. Si la densidad es constante, la ecuación 1.4 se reduce a $\nabla \cdot u = 0$. Sustituyendo la definición de u en términos del potencial se llega a que $0 = \nabla \cdot u = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \Delta\varphi$. Por tanto, $\Delta\varphi = 0$ y φ es una función armónica. $\square$

Si, partiendo del teorema anterior, además se exige que las fuerzas externas sean conservativas y, por tanto, tengan la forma $\mathbf{F} = -\rho \nabla \psi$, con ψ un cierto potencial, se reescribe la ecuación de Euler (ecuación 1.5) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \psi.$$

Como en la demostración del teorema de Bernoulli (teorema 1.28), se substituye el término convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ por una expresión más manejable, dada en la ecuación 1.9. Además, se intercambia el orden de derivación en el primer miembro, en virtud del teorema de Schwarz, $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$, obteniéndose que:

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \psi.$$

Como $\mathbf{u}$ es un flujo potencial, se tiene que $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Así, reordenando, y en virtud de la linealidad del operador gradiente, se obtiene que

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + \psi \right) = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + \psi \right) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Es decir, existirá cierta función $h = h(t)$, a priori arbitraria sin conocer más datos sobre el flujo, tal que se cumpla que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + \psi = h(t)$. Más aún, se puede redefinir el potencial asociado a la fuerza

$$\mathbf{F} = -\rho \nabla \left(\psi - \int h(t) dt \right),$$

de forma que la función h puede elegirse como la idénticamente nula, sin alterar las condiciones del flujo. En consecuencia, se obtiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + \psi = 0. \quad (2.1)$$

Esta ecuación representa un teorema de Bernoulli generalizado al caso de un flujo no necesariamente estacionario. Una situación un poco más general se obtiene al suponer un fluido barotrópico. En tal caso, se reescribe el sumando $\frac{p}{\rho} = \int \frac{dp}{\rho}$, resultando la

ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \psi = 0.$$

2.1. Condiciones de contorno

Se analizan ahora las condiciones de contorno para flujos potenciales en ausencia de viscosidad, lo que le otorga al fluido la cualidad de ser *resbaladizo* y poder moverse a lo largo de una frontera sólida.

Se parte de una situación en la que la presión varíe a lo largo de una frontera sólida. En consecuencia, la única fuerza que podrá impulsar a las moléculas del fluido a lo largo de la pared es la asociada al gradiente de presión. En efecto, si la componente tangencial del gradiente de presiones en la pared es no nula, el fluido será acelerado y habrá una componente tangencial de su velocidad en la pared. Dado que, por lo general, no se tiene un control directo sobre el campo de presiones en la pared, no es viable imponer ninguna restricción sobre la componente tangencial de la velocidad en la frontera del fluido.

No obstante, a través de una pared rígida el fluido no puede penetrar, y en consecuencia se debe imponer la condición de que la componente de la velocidad en la dirección normal a la frontera sea nula, i.e. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n = 0$. Esto es equivalente a que la derivada normal del potencial φ sea nula:

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (2.2)$$

Sea ahora el caso en que la pared no es fija, sino que es móvil con el tiempo, luego cada punto x de ella viajará con el fluido. Se define la ecuación de la superficie de la pared por $g(x, t) = 0$. La evolución temporal de la pared vendrá dada por la derivada (material) de g :

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla g = 0. \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.5. Sea un cilindro de radio a que se mueve a lo largo de la dirección del eje OX con velocidad constante U . La ecuación de la superficie es $g(x, y, t) = (x - Ut)^2 + y^2 - a^2$. Denotando por $\mathbf{u} = (u, v)$ y derivando acorde a la ecuación 2.3:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + (u, v) \cdot \nabla g = -2U(x - Ut) + 2(x - Ut)u + 2yv = 0,$$

que es la ecuación de movimiento de la pared.

Atendiendo a la velocidad normal al cilindro:

$$u_n = (u, v) \cdot \mathbf{n} = (u, v) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)) = u \cos(\theta) + v \sin(\theta).$$

Sea la transformación a coordenadas polares dada por

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) + Ut \\ y = a \sin(\theta) \end{cases},$$

que llevada a la ecuación de movimiento resulta en que

$$-2Ua \cos(\theta) + 2a \cos(\theta)u + 2a \sin(\theta)v = 0.$$

Simplificando un factor $2a \neq 0$ y reordenando, se llega a $u \cos(\theta) + v \sin(\theta) - U \cos(\theta) = 0$, donde se reconoce la componente normal de la velocidad $u_n = u \cos(\theta) + v \sin(\theta)$. Por lo tanto,

$$u_n = U \cos(\theta),$$

lo cual equivale a que la velocidad normal de la pared y del fluido deben coincidir.

Estos mismos argumento son aplicables a casos más generales, como en el que la frontera no sea una pared sino la interfaz entre dos fluidos. De hecho, para el caso de un flujo no estacionario es necesaria la introducción de unas condiciones iniciales o de frontera. A ello se dedica el último ejemplo de la sección.

Ejemplo 2.6. Sea un flujo potencial a través de un cilindro sólido bidimensional de radio a con densidad constante tal que el campo de velocidades tiende a $(U, 0)$ para $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$.

La ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$ escrita en coordenadas polares resulta ser

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Desarrollando la solución φ en serie de Fourier se tiene que

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}_{1,n}(r) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_{2,n}(r) \sin(n\theta),$$

donde los coeficientes de Fourier $\hat{\varphi}_{i,n}(r)$ verifican la ecuación de Cauchy con coeficientes variables $r^2\hat{\varphi}_{i,n}''(r) + r\hat{\varphi}_{i,n}'(r) - n^2\hat{\varphi}_{i,n} = 0$, para $i = 1, 2$. Sus soluciones vienen dadas por

$$\hat{\varphi}_{i,n}(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(r) & \text{si } n = 0 \\ c_1 r^n + c_2 r^{-n} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

El único de los sumandos anteriores que puede dar $\nabla\varphi = \mathbf{u} = (U, 0)$ cuando $r \rightarrow \infty$ es aquel que haga $\varphi \sim_{\infty} Ux$ (considerando superfluas las constantes). En coordenadas polares, esto equivale a que $\varphi \sim_{\infty} Ur \cos(\theta)$, que se corresponde con el sumando $\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right) \cos(\theta)$ sin más que tomar $c_1 = U$.

Además, la condición para la derivada normal obtenida en la ecuación 2.2 en coordenadas polares resulta $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$. Derivando y haciendo $r = a$, se tiene que

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = c_1 - \frac{c_2}{r^2}\bigg|_{r=a} = U - \frac{c_2}{a^2} = 0,$$

de donde se obtiene que $c_2 = a^2 U$. Por tanto, se obtiene un potencial

$$\varphi(r, \theta) = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\theta),$$

que cumple lo pedido. Es importante notar que la solución no es única, pues el dominio de existencia del flujo potencial (el exterior del disco de radio a) no es simplemente conexo.

Para finalizar, en la figura 2.1 se representan las líneas de corriente para el flujo potencial y el cilindro considerados. Sólo las líneas exteriores al cilindro, en la región $r > a$, son reales. Las líneas interiores corresponden a un flujo virtual, singular en el origen, 0.

2.2. Flujos potenciales multiformes

Sea $\mathbf{u}$ un flujo potencial y φ el potencial escalar tal que $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. Se ha visto en al inicio del capítulo que para el caso de densidad constante, φ es una función armónica, i.e. $\Delta\varphi = 0$. Añadiendo la condición de contorno obtenida en ecuación 2.2 se obtiene el

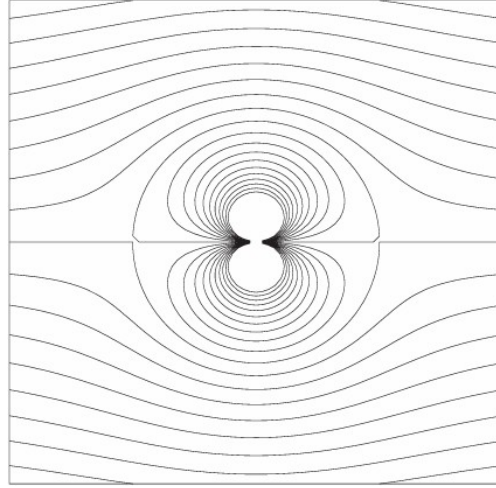


Figura 2.1: Líneas de corriente del flujo potencial a través del cilindro. Adaptado de [3].

problema de Neumann asociado a la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \end{cases}.$$

Se sabe que este problema tiene solución única φ , salvo constantes aditivas, que desaparecen al hallar el campo de velocidades $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. Luego el flujo obtenido es único.

No obstante, el dominio Ω de definición de dicho flujo podría no ser simplemente conexo. En tal caso, pese a ser $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (es un flujo potencial), no se tiene garantía de que exista un único φ definido en todo Ω de forma que $\mathbf{u} = \nabla\varphi$. En tales casos, es usual admitir φ como función multiforme. Los siguientes ejemplos ilustran estas nociones.

Ejemplo 2.7. Sea el flujo $\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-y}{r^2}, \frac{x}{r^2} \right)$, ya estudiado en el ejemplo 1.36. Como allí se vio, $w = 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y el flujo es irrotacional en el abierto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pero A no es un conjunto simplemente conexo, luego no se puede garantizar que exista un único φ en A tal que $\nabla\varphi = \mathbf{u}$.

En este caso, φ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{2\pi(x^2 + y^2)} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{2\pi(x^2 + y^2)} \end{cases}.$$

De la segunda de las ecuaciones,

$$\varphi = \frac{x}{2\pi} \int \frac{1}{x^2 + y^2} dy = \frac{x}{2\pi x^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dy = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C(x),$$

donde C es cierta función que puede depender de la variable x . Imponiendo que se cumpla la primera de las ecuaciones, se llega a que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + C'(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{-y}{x^2 + y^2} + C'(x) = \frac{-y}{2\pi(x^2 + y^2)},$$

luego $C'(x) = 0$ y resulta que $C(x) = C$ para cierta constante real C . Por lo tanto, un potencial que resuelve el problema es $\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$, para cualquier $C \in \mathbb{R}$. Nótese que φ es discontinuo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, al presentar la función arcotangente un salto cuando se describe una circunferencia entorno a 0 .

Este ejemplo presenta un flujo potencial armónico en un dominio no simplemente conexo que excluye el origen. Como ya se calculó, la circulación en cualquier curva cerrada y simple que encierre al origen es 1. Aquí la vorticidad está concentrada únicamente en el origen, fuera del dominio del potencial armónico (*vórtice puntual*).

Ejemplo 2.8. Se retoma ahora el ejemplo del flujo alrededor del cilindro, expuesto en ejemplo 2.6. Allí se presentó un potencial tal que u tiende a $(U, 0)$ cuando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$:

$$\varphi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\theta) = Ux \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Sin embargo, el potencial del ejemplo anterior, $\varphi' = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, es tal que u tiende a 0 si $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$, luego sumado al potencial φ anterior, también resuelve el problema:

$$\phi = \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Aquí Γ se identifica con $\oint_C u \cdot dr$ para cualquier camino cerrado que rodee al círculo $r \leq a$, luego es la circulación del flujo. Veremos que la presencia de Γ será fundamental para calcular la sustentación en este caso.

El hecho de que se admitan potenciales multiformes se debe a que en realidad sólo estamos interesados en encontrar u , mientras que φ es una simple herramienta.

2.3. Flujos potenciales en dimensión 2

En dos dimensiones, los flujos potenciales pueden ser estudiados con la poderosa herramienta de la teoría de funciones de una variable compleja. Sea $\mathbf{u} = (u, v)$ un flujo irrotacional y de densidad constante. Se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(-v)}{\partial y} = 0, \\ w &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función compleja $f = u - iv$. Por tanto, f es holomorfa en Ω .

Se supone que f posee primitiva en Ω , $w = \varphi + i\psi$. En consecuencia, en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $w' = f = u - iv = \varphi_x + i\psi_x = \varphi_x - i\varphi_y = \psi_y + i\psi_x$. Por tanto, se puede escribir que $\mathbf{u} = (u, v) = (\varphi_x, \varphi_y) = (\psi_y, -\psi_x)$.

Así, φ es un potencial para $\mathbf{u}$, para $f(u, v)$. Por tanto, se tiene que $\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = 0$. Luego $\psi = \text{const.}$ define las líneas de corriente, y resulta que estas son ortogonales en cada punto a las líneas equipotenciales.

En definitiva, la primitiva de f , $w = \varphi + i\psi$, proporciona la función potencial y la función de corriente del flujo de velocidades $\mathbf{u}$.

Ejemplo 2.9. El flujo de velocidad constante Q , que forma un ángulo α con la horizontal, dado por $\mathbf{u} = Q(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, tiene como función holomorfa asociada:

$$f(z) = Q \cos(\alpha) - iQ \sin(\alpha) = Qe^{-i\alpha}.$$

Esta viene dada por el potencial que resulta de la integración de f : $w(z) = Qze^{-i\alpha}$.

Ejemplo 2.10. Sea un vórtice en (x_0, y_0) con campo de velocidades dado por

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(-\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right).$$

Nótese la correspondencia con el flujo del ejemplo 1.36. Con cuentas similares a las realizadas en aquel ejemplo, la circulación de este flujo es, precisamente, Γ . Su función

holomorfa asociada es $f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$, donde $z_0 = x_0 + iy_0$. En efecto,

$$\begin{aligned} -i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} &= -i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|^2} = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - i\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left(-\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - i\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right), \end{aligned}$$

y basta con tomar $\mathbf{u} = (\text{Re}(f), -\text{Im}(f))$. En consecuencia, el potencial complejo viene dado por una primitiva de f , $w(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0)$.

Si se consideran N vórtices, cada uno centrado en z_k y con circulación a lo largo de cualquier curva cerrada y simple que contiene a z_k dada por Γ_k , el potencial global viene dado por la suma

$$W(z) = \sum_{k=1}^N w_k(z) = \sum_{k=1}^N -i\frac{\Gamma_k}{2\pi} \log(z - z_k).$$

Dado un punto complejo $z = z(t)$ dado por sus parte real e imaginaria, $z(t) = x(t) + iy(t)$, se tiene que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = u + iv,$$

con u y v las componentes del campo de velocidades. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de z viene dada por $\frac{d\bar{z}}{dt} = u - iv = W'(z)$, siempre que $z \neq z_k$ para todo k :

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = W'(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{z - z_k},$$

Análogamente, para el vórtice j -ésimo, se tiene también que

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\Gamma_k}{z - z_k},$$

que representa el movimiento de cada vórtice en el flujo potencial creado por los $N - 1$ vórtices restantes.

Ejemplo 2.11. El potencial presentado en el ejemplo 2.8 para el flujo alrededor del cilindro se escribe en versión compleja como

$$\varphi(r, \theta) = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \text{Re} \left[U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z) \right] = \text{Re} [w(z)],$$

donde se elige la rama principal del logaritmo; i.e. debe ser $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Para hallar la velocidad del flujo, basta con derivar w , como sigue:

$$\begin{aligned} w'(z) &= U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = U - U \frac{a^2}{|z|^4} \bar{z}^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \\ &= U - U \frac{a^2}{r^4} (x - iy)^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{x - iy}{r^2} = U - U \frac{a^2}{r^4} (x^2 - y^2 - 2ixy) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y + ix}{r^2} = \\ &= U - \frac{Ua^2}{r^4} (x^2 - y^2) - \frac{\Gamma y}{2\pi r^2} + i \left(2 \frac{Ua^2}{r^4} xy - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{r^2} \right). \end{aligned}$$

En consecuencia, dado que $\mathbf{u} = (\operatorname{Re}[w'(z)], -\operatorname{Im}[w'(z)])$, se tiene que

$$\mathbf{u} = \left(U - \frac{Ua^2(x^2 - y^2)}{r^4} - \frac{\Gamma y}{2\pi r^2}, -2 \frac{Ua^2 xy}{r^4} + \frac{\Gamma x}{2\pi r^2} \right).$$

Además, la condición frontera $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ se traduce en $\psi = \text{const.}$ allí. Esto puede ser útil a la hora de hallar w utilizando una transformación conforme.

Sea el isomorfismo analítico $G : \Omega \rightarrow U_0$, que se extiende a las fronteras como un homeomorfismo y w , holomorfa en U_0 (y multiforme, eventualmente), tal que $\operatorname{Im}(w)$ es constante en el borde de U_0 . Entonces la composición $w \circ G$ satisface las mismas condiciones en Ω , y se recupera el potencial deseado. Esto es especialmente útil en los casos en que U_0 sea más sencillo que Ω .

Ejemplo 2.12. Se desea calcular el campo de velocidades de un fluido sobre un cuerpo en forma de cuña de ángulo 2α , como se muestra en la figura 2.2.

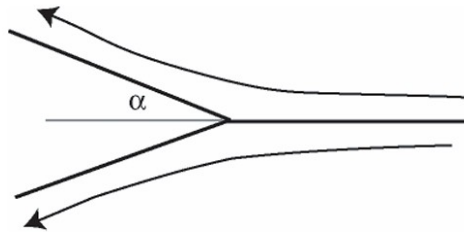


Figura 2.2: Sólido en forma de cuña con ángulo α . Adaptado de [3].

Si se parte del semiplano superior, Π^+ , la velocidad inicial es $(-U, 0)$, luego es sencillo notar que $w(z) = -Uz$ es el potencial del que procede. Además, $w'(z) = -U$.

La transformación conforme de Ω en Π^+ viene dada por $z \xrightarrow{G} z^{\pi/(\pi-\alpha)}$ que lleva

$$r \mapsto r^{\pi/(\pi-\alpha)} \quad \text{y} \quad re^{(\pi-\alpha)i} \mapsto r^{\pi/(\pi-\alpha)} e^{i\pi} = -r^{\pi/(\pi-\alpha)}.$$

En este caso, fijada una rama del logaritmo, por ejemplo la principal, se tiene que

$$G'(z) = \frac{\pi}{\pi - \alpha} z^{[\pi/(\pi-\alpha)]-1} = \frac{\pi}{\pi - \alpha} z^{\alpha/(\pi-\alpha)}.$$

Por lo tanto, el potencial para la velocidad es $(w \circ G)(z) = -U z^{\pi/(\pi-\alpha)}$. Derivando, se tiene que

$$f(z) = (w \circ G)'(z) = -U \frac{\pi}{\pi - \alpha} z^{\alpha/(\pi-\alpha)}.$$

Denotando $z = re^{i\theta}$, se tiene que

$$z^{\alpha/(\pi-\alpha)} = r^{\alpha/(\pi-\alpha)} e^{i\theta\alpha/(\pi-\alpha)} = r^{\alpha/(\pi-\alpha)} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\theta\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\theta\right) \right],$$

y se llega a que

$$f(z) = -U \frac{\pi}{\pi - \alpha} r^{\alpha/(\pi-\alpha)} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\theta\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\theta\right) \right].$$

Por lo tanto, el campo de velocidades resulta ser

$$\mathbf{u} = (u, v) = (\operatorname{Re}(f), -\operatorname{Im}(f)) = -U \frac{\pi}{\pi - \alpha} r^{\alpha/(\pi-\alpha)} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\theta\right), -\sin\left(\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\theta\right) \right),$$

donde $\theta = \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$ y $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejemplo 2.13. Sea la aplicación $z \mapsto z + \frac{b^2}{z}$. Para cada $a > b$ y $\theta \in (-\pi, \pi)$, los puntos de la circunferencia centrada en el origen y de radio a , $z = ae^{i\theta}$, son transformados vía G en puntos de la elipse de semiejes $\frac{a^2 + b^2}{a}$ (mayor) y $\frac{a^2 - b^2}{a}$ (menor): $G(z) = ae^{i\theta} + \frac{b^2}{a}e^{-i\theta}$. Retomando el caso del flujo sobre el cilindro de radio a con velocidad $(U, 0)$ en el infinito (ejemplo 2.10), el potencial complejo asociado en ausencia de vorticidad se puede escribir como $w(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$. Se puede entonces determinar el potencial para el flujo sobre la elipse, mediante la inversa de G . Para hallar dicha inversa, se denota por $\xi = z + \frac{b^2}{z}$. Luego $\xi z = z^2 + b^2$ o bien $z^2 - \xi z + b^2 = 0$, que es una ecuación de segundo grado en z . Resolviendo, se obtienen las dos soluciones $z = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4b^2}}{2}$. Por lo tanto, la inversa buscada es

$$H_{\pm}(z) = G^{-1}(z) = \frac{1}{2} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 4b^2} \right).$$

Ahora bien, G no es inyectiva en $\mathbb{C}$. En efecto,

$$G(z) = z + \frac{b^2}{z} = \frac{b^2}{z} + \frac{b^2}{b^2/z} = \frac{b^2}{z} + z = G\left(\frac{b^2}{z}\right).$$

No obstante, sí que lo es en el exterior del disco de radio b . Para ello, si G no fuese inyectiva, existirían z_1 y z_2 distintos, con $|z_i| > b$ para $i = 1, 2$, tales que $G(z_1) = G(z_2)$. En tal caso, $z_1 - z_2 = b^2 \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) = b^2 \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$. O bien, al ser $z_1 - z_2 \neq 0$, $z_1 z_2 = b^2$. En particular, $z_2 = \frac{b^2}{z_1}$. Pero si $|z_1| > b$, entonces $\frac{1}{b} > \frac{1}{|z_1|}$ y, multiplicando por b , $b > \left| \frac{b^2}{z_1} \right| = |z_2|$, en contra de la hipótesis.

En particular, es inyectiva en la circunferencia de radio a . Como esta es la región de interés, y se busca que se siga cumpliendo la condición frontera $|z| \rightarrow \infty$ si $|\xi| \rightarrow \infty$, debe elegirse la solución positiva, H_+ . En tal caso, el potencial resultante sobre la elipse es

$$W(z) = (w \circ H_+)(z) = U \left(\frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4b^2} \right) + \frac{2a^2}{z + \sqrt{z^2 - 4b^2}} \right).$$

Por su parte, la solución H_- se corresponde con llevar el interior del disco en el exterior de la elipse.

Se presenta ahora el resultado que da el significado matemático al concepto de “sumergir un sólido en un fluido ideal”, al menos en el caso bidimensional.

Teorema 2.14 (Teorema del círculo). Sea f el potencial complejo de un flujo en el plano que no presenta singularidades en $\overline{B}(0, a)$. Si se coloca un disco circular de radio a en el origen, entonces el potencial complejo del nuevo flujo viene dado por

$$w(z) = f(a) + \overline{f\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}.$$

Demostración. Se debe probar que las propiedades de analiticidad del nuevo flujo coinciden con las del inicial, en particular respecto a la posición de las singularidades. Así mismo, hay que comprobar que la frontera del disco, $C(0, a)$, es una línea de corriente.

Abordando primero la segunda cuestión, es suficiente con ver que $\text{Im}(w)$ es constante en $C(0, a)$. Para cada $z \in S(0, a)$, $z = \frac{a^2}{\bar{z}}$. Por lo tanto, $w(z) = f(z) + \overline{f(\bar{z})} = 2\text{Re}(f) \in \mathbb{R}$; luego $\text{Im}(w) = 0 = \text{const.}$ y $C(0, a)$ es, en efecto, una línea de corriente.

Por otro lado, la función

$$z \mapsto \overline{f\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}$$

es holomorfa allí donde está definida, y también lo es w . Por no presentar f singularidades si $|z| \leq a$, tampoco las presenta allí $\overline{f(a^2/\bar{z})}$. Además, para $|z| > a$, también $|\bar{z}| > a$ y $\frac{a^2}{|\bar{z}|} < \frac{a^2}{a} = a$, luego el término $\overline{f(a^2/\bar{z})}$ no presenta singularidades para $|z| > a$. Luego las únicas singularidades de $w(z)$ en la región $|z| > a$ vienen dadas por las singularidades del sumando f , que eran las del flujo inicial, como se quería ver. $\square$

Ejemplo 2.15. Para un flujo uniforme con potencial $f(z) = Uz$, al colocar un disco de radio a en el origen se obtiene el potencial

$$w(z) = Uz + U \frac{a^2}{\bar{z}} = U \left(z + \frac{a^2}{\bar{z}} \right),$$

como ya es conocido.

Ejemplo 2.16. Una *fente* colocada en $z_0 = (x_0, y_0)$ es el flujo dado por la velocidad

$$\mathbf{u} = \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right),$$

que irradia desde z_0 , y es singular ahí. El caudal, Q , (en forma bidimensional) que atraviesa la circunferencia $C(z_0, r)$ viene dado por

$$\int_{C(z_0, r)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r \cos(t)}{r^2}, \frac{r \sin(t)}{r^2} \right) \cdot (r \cos(t), r \sin(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) \, dt = 2\pi,$$

donde se ha hecho uso de la parametrización de la circunferencia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow C(z_0, r)$, dada por $\gamma(t) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t))$. Luego se puede reescribir el campo como $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{Q}{2\pi} \mathbf{u}$ para que tenga valor de caudal Q .

Se supone ahora una fuente colocada en $(b, 0)$, para la que el campo de velocidades con caudal Q es

$$\mathbf{u} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x - b}{(x - b)^2 + y^2}, \frac{y}{(x - b)^2 + y^2} \right).$$

La función holomorfa asociada es $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z - b}$. En efecto, se tiene que

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z - b} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\overline{z - b}}{|z - b|^2} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x - b}{(x - b)^2 + y^2} - i \frac{y}{(x - b)^2 + y^2} \right),$$

y se recupera el flujo sin más que hacer $u = (\operatorname{Re}(f), -\operatorname{Im}(f))$. Luego el potencial asociado viene dado por una primitiva de $\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z-b}$; esto es, $w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z-b)$.

Si, en presencia de este flujo, se dispone un disco $\bar{B}(0, a)$, con $a < b$, por el teorema del círculo el potencial del nuevo flujo viene dado por

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \left(\log(z-b) + \overline{\log\left(\frac{a^2}{\bar{z}} - b\right)} \right),$$

donde la rama del logaritmo elegida es la definida en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > b, \operatorname{Im}(z) = 0\}$.

De la definición de logaritmo complejo,

$$\overline{\log\left(\frac{a^2}{\bar{z}} - b\right)} = \ln\left|\frac{a^2}{\bar{z}} - b\right| - i\operatorname{Arg}\left(\frac{a^2}{\bar{z}} - b\right).$$

Operando la parte real se obtiene que

$$\ln\left|\frac{a^2}{\bar{z}} - b\right| = \ln|a^2 - b\bar{z}| - \ln|\bar{z}| = \ln|-b| + \ln\left|\bar{z} - \frac{a^2}{b}\right| - \ln|z| = \ln\left|z - \frac{a^2}{b}\right| + \ln|b| - \ln|z|.$$

Análogamente, con la parte imaginaria se llega a

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\left(\frac{a^2}{\bar{z}} - b\right) &= \operatorname{Arg}(a^2 - b\bar{z}) - \operatorname{Arg}(\bar{z}) = \operatorname{Arg}(-b) + \operatorname{Arg}\left(\bar{z} - \frac{a^2}{b}\right) + \operatorname{Arg}(z) = \\ &= -\operatorname{Arg}\left(z - \frac{a^2}{b}\right) - \operatorname{Arg}(b) + \operatorname{Arg}(z). \end{aligned}$$

Luego, dado que se cumple que

$$\log\left(z - \frac{a^2}{b}\right) = \ln\left|z - \frac{a^2}{b}\right| + i\operatorname{Arg}\left(z - \frac{a^2}{b}\right),$$

$$\log(-b) = \ln|-b| + i\operatorname{Arg}(-b), \text{ y}$$

$$\log(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z),$$

se puede escribir que

$$\overline{\log\left(\frac{a^2}{\bar{z}} - b\right)} = \log\left(z - \frac{a^2}{b}\right) + \log(b) - \log(z).$$

De esta forma, el nuevo potencial resulta

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \left(\log(z - b) + \log\left(z - \frac{a^2}{b}\right) - \log(z) + \log(b) \right),$$

que presenta tres fuentes: dos positivas, en b y en $\frac{a^2}{b}$, y una negativa en el origen (ver figura 2.3).

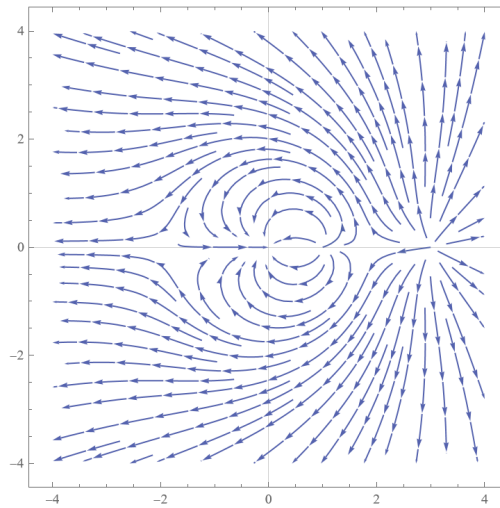


Figura 2.3: Líneas de corriente para el caso en que $a = 1$, $b = 3$ y $Q = 5$.

2.4. Teorema de Blasius

Un cálculo importante en dinámica de fluidos es el de la fuerza ejercida por el fluido sobre un cuerpo rígido. En dos dimensiones, y en un flujo potencial estacionario, el siguiente resultado, debido a Blasius, es clave.

Teorema 2.17 (Teorema de Blasius). Sea un flujo estacionario de densidad ρ dado por un potencial armónico w en el exterior de un cuerpo rígido limitado por una curva C . En ausencia de fuerzas externas, la fuerza $\mathbf{F} = (X, Y)$ ejercida por el fluido sobre el cuerpo viene dada por

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C (w'(z))^2 dz,$$

donde C se recorre en sentido positivo.

Demostración. Se sabe que, en ausencia de fuerzas externas, la fuerza ejercida por el

fluido sobre el cuerpo viene dada en términos de la presión p por la expresión

$$\mathbf{F} = \int_C p \mathbf{n} d\sigma.$$

Si la curva frontera del cuerpo viene dada por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, con $a \leq s \leq b$, entonces la normal exterior es $\mathbf{n} = (-y'(s), x'(s))$. Luego la fuerza total resulta

$$\mathbf{F} = (X, Y) = \int_a^b p(-y'(s), x'(s)) ds = \int_C -p dy + p dx.$$

En expresión compleja, resulta

$$X - iY = \int_a^b p(-y'(s) - ix'(s)) ds = \int_C p(-dy - idx) = \int_C -ip d\bar{z}.$$

Por el teorema de Bernoulli (teorema 1.28), si ρ es la densidad del fluido y $\mathbf{u}$ su campo de velocidades, $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = C$, con C cierta constante. Ahora bien, como el flujo viene dado por el potencial complejo w , resulta que $\mathbf{u}$ se identifica con $w'(z)$ y, por tanto,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|w'(z)|^2 = C$$

De aquí, se obtiene que $p = -\frac{\rho}{2}|w'(z)|^2 + C$, y como la integral de una constante a lo largo de un camino cerrado es nula,

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_C |w'(z)|^2 dz = \frac{i\rho}{2} \int_C w'(z) \overline{w'(z)} dz.$$

Ahora bien, como $d\bar{z} = (x'(s) - iy'(s)) ds$ y $w'(z) = \varphi_x + i\psi_x$, con φ y ψ un potencial y una función de corriente para el flujo, respectivamente, se tiene que (eliminando la dependencia explícita con s , por brevedad)

$$\begin{aligned} \overline{w'(z)} d\bar{z} &= (\varphi_x - i\psi_x) (x' - iy') ds = \\ &= (\varphi_x x' - \psi_x y' - i\psi_x x' - i\varphi_x y') ds = ((\varphi_x x' - \psi_x y') - i(\psi_x x' + \varphi_x y')) ds. \end{aligned}$$

Por su parte,

$$\begin{aligned} w'(z) dz &= (\varphi_x + i\psi_x) (x' + iy') ds = \\ &= (\varphi_x x' - \psi_x y' + i\psi_x x' + i\varphi_x y') ds = ((\varphi_x x' - \psi_x y') + i(\psi_x x' + \varphi_x y')) ds. \end{aligned}$$

En virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\varphi_x = \psi_y$, y se obtiene

$$\begin{aligned} w'(z)dz &= ((\varphi_x x' - \psi_x y') + i(\psi_x x' + \psi_x y')) ds, \\ \overline{w'(z)}d\bar{z} &= ((\varphi_x x' - \psi_x y') - i(\psi_x x' + \psi_x y')) ds. \end{aligned}$$

Por ser el borde C una línea de corriente, ψ es constante allí, se cumple que

$$\frac{d\psi}{ds} = \psi_x x' + \psi_y y' = 0 \quad \text{en } C.$$

En consecuencia, se tiene que $w'(z)dz = \overline{w'(z)}d\bar{z}$ en C , y se puede escribir que

$$\int_C w'(z)\overline{w'(z)} d\bar{z} = \int_C w'(z)w'(z) dz = \int_C (w'(z))^2 dz,$$

obteniéndose el resultado buscado:

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_C (w'(z))^2 dz.$$

□

Observación 2.18. Al tratarse de un potencial armónico, la curva C del teorema puede deformarse hasta obtener cualquier otra curva cerrada y simple que encierre al cuerpo, sin alterar el resultado obtenido. En tal caso, la integral se puede calcular, vía el teorema de los residuos, incluyendo la contribución de los puntos singulares que queden en su interior.

Ejemplo 2.19. Sea un disco de radio a dispuesto en el origen en el seno de un flujo uniforme de velocidad U , como el considerado en el ejemplo 2.15. Se sabe que

$$w(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \text{ y } w'(z) = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right).$$

Elevando al cuadrado $w'(z)$ y desarrollando, se tiene que

$$(w'(z))^2 = U \left(1 - \frac{2a^2}{z^2} + \frac{a^4}{z^4} \right).$$

Ahora es posible calcular la fuerza ejercida sobre el disco utilizando el teorema de Blasius.

Dado que la expresión de $(w'(z))^2$ no presenta ningún término en $\frac{1}{z}$, el residuo de $(w'(z))^2$ es nulo. En virtud del teorema de los residuos, la integral del teorema de Blasius es nula, y también lo es la fuerza total aplicada.

Ejemplo 2.20. Se considera, ahora, el caso del ejemplo 2.16: una fuente colocada en $(b, 0)$ y un disco $B(0, a)$, con $a < b$. Es conocido el potencial complejo

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \left(\log(z - b) + \log\left(z - \frac{a^2}{b}\right) - \log(z) + \log(b) \right),$$

y su derivada

$$w'(z) = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{z - b} + \frac{1}{z - a^2/b} - \frac{1}{z} \right).$$

Elevando al cuadrado $w'(z)$ y desarrollando, se llega a que

$$(w'(z))^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{(z - b)^2} + \frac{1}{(z - a^2/b)^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{(z - b)(z - a^2/b)} - \frac{2}{z(z - b)} - \frac{2}{z(z - a^2/b)} \right).$$

Se trata de hallar la fuerza sobre el disco $B(0, a)$ vía el teorema de Blasius. Los tres primeros sumandos del término anterior tienen polos de orden dos en b (fuera del círculo), $\frac{a^2}{b}$ y 0. Como no tienen potencias de orden -1 , su contribución a la integral del teorema de Blasius es nula, en virtud del teorema de los residuos. Para los otros tres sumandos, es preciso efectuar su descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2}{(z - b)(z - a^2/b)} - \frac{2}{z(z - b)} - \frac{2}{z(z - a^2/b)} = \frac{A}{z - b} + \frac{B}{z - a^2/b} + \frac{C}{z},$$

donde $A = \frac{2a^2}{b(b^2 - a^2)}$, $B = \frac{2b^3}{a^2(a^2 - b^2)}$ y $C = \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2b}$.

Sólo los polos de $\frac{a^2}{b}$ y 0 están dentro del círculo de radio a , y son los que contribuyen a la integral del teorema de Blasius. Calculando dicha integral vía el teorema de los residuos, se tiene que

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2} (B + C) = \frac{i\rho}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2} 2\pi i \frac{2a^2}{b(a^2 - b^2)} = \frac{\rho Q^2}{2\pi} \frac{a^2}{b(b^2 - a^2)}.$$

Es decir, $Y = 0$ y $X = \frac{\rho Q^2}{2\pi} \frac{a^2}{b(b^2 - a^2)} > 0$ (dado que $b > a$) y el disco sufre una fuerza de atracción hacia la fuente en $(b, 0)$.

Se presenta, para cerrar el capítulo, una versión alternativa del teorema de Blasius,

en términos del momento experimentado por un cuerpo.

Teorema 2.21 (Fórmula de Blasius para el momento). Sea un flujo estacionario de densidad ρ dado por un potencial armónico w en el exterior de un cuerpo rígido limitado por una curva C . En ausencia de fuerzas externas, el momento respecto al origen de coordenadas viene dado por

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \int_C z (w'(z))^2 dz \right),$$

donde C se recorre en sentido positivo.

Demostración. Por definición, el momento viene dado por $M = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición del cuerpo y $\mathbf{F}$ la fuerza aplicada sobre él. En el caso bidimensional, $\mathbf{r} = (x, y)$ y en ausencia de fuerzas externas, resulta que $\mathbf{F} = -\nabla p$. Luego el momento es

$$M = -\mathbf{r} \times \nabla p = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, y \frac{\partial p}{\partial x} - x \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \left(0, 0, \frac{\partial(y p)}{\partial x} - \frac{\partial(x p)}{\partial y} \right).$$

Es decir, el momento se identifica con el escalar $\frac{\partial(y p)}{\partial x} - \frac{\partial(x p)}{\partial y}$.

Si se denota por Ω la región ocupada por el cuerpo, que tiene a C como borde, el momento total sobre este resulta ser, en virtud de la fórmula de Green,

$$M = \iint_U \left(\frac{\partial(y p)}{\partial x} - \frac{\partial(x p)}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (x p dx + y p dy).$$

Ahora bien, resulta que $x dx + y dy = \operatorname{Re} [(x + iy)(dx - idy)] = \operatorname{Re} (z d\bar{z})$, luego

$$M = \operatorname{Re} \left(\int_C p z d\bar{z} \right).$$

Igual que en la demostración del teorema de Blasius, $p = -\frac{\rho}{2}|w'(z)|^2 + C$, para cierta constante C . Por lo tanto,

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \int_C z |w'(z)|^2 d\bar{z} + C \int_C z d\bar{z} \right).$$

Para el segundo sumando, $z d\bar{z} = x dz + y dy = d \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$, cuya integral sobre la curva

cerrada C es nula. Luego basta con evaluar el primer sumando.

De manera análoga a la demostración del teorema de Blasius se tiene que si C es una línea de corriente para el flujo, $\overline{w'(z)}d\bar{z} = w'(z)dz$ en C , de donde

$$\int_C z|w'(z)|^2 d\bar{z} = \int_C zw'(z)\overline{w'(z)} d\bar{z} = \int_C zw'(z)w'(z) dz = \int_C z(w'(z))^2 dz.$$

Por consiguiente, se obtiene la fórmula para el momento buscada:

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \int_C z (w'(z))^2 dz \right).$$

□

Capítulo 3

Aerodinámica bidimensional

El aire es un fluido compresible y la *aerodinámica* es la rama de la mecánica de fluidos que estudia el movimiento de este u otros gases y su interacción con los cuerpos que se mueven entre ellos.

3.1. Fuerza aerodinámica: arrastre y sustentación

Se supone para empezar un cuerpo (digamos, una aeronave) sumergido en el aire. Por el principio de Arquímedes (corolario 1.24), el cuerpo sufrirá una fuerza vertical y hacia arriba igual al peso del fluido desalojado (empuje). Se denota a esta fuerza por w y al peso del cuerpo por W . La fuerza total sobre el cuerpo debido a su peso y al empuje del fluido es $W + w$, de magnitud $W - w$, y actuará independientemente de que el cuerpo esté en movimiento o en reposo.

En caso de que el cuerpo se mueva a velocidad constante y horizontal V , deberá existir una fuerza T que mantenga este movimiento uniforme (propulsores de la aeronave). En consecuencia, por la 1ª ley de Newton, deberá existir una fuerza adicional, A , tal que $T + W + w + A = 0$. Esta fuerza A es la llamada *fuerza aerodinámica* ejercida sobre el cuerpo. Uno de los grandes problemas de la aerodinámica es el estudio pormenorizado de esta fuerza.

La fuerza aerodinámica puede expresarse en términos de dos componentes: una perpendicular a la velocidad, L , y otra opuesta a ella, D , como en la figura 3.1. Si se denota por γ el ángulo entre la fuerza aerodinámica y la vertical (ángulo de planeo), resulta que

los módulos de estas fuerzas vienen dados en términos del módulo de A y de γ según

$$L = A \cos(\gamma) \quad \text{y} \quad D = A \sin(\gamma).$$

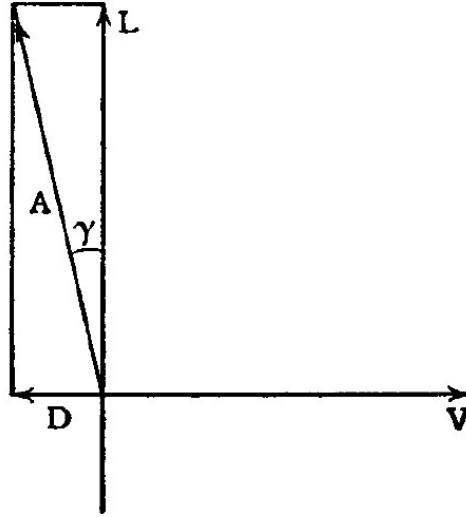


Figura 3.1: Componentes de la fuerza aerodinámica. Adaptado de [8].

Además, la relación entre ellas viene descrita por $\tan(\gamma) = \frac{D}{L}$. De este estudio se desprende la siguiente definición.

Definición 3.1. Se llama *arrastre* o *resistencia al avance* (en inglés, drag) a la componente de la fuerza aerodinámica opuesta al sentido de movimiento. Se llama *sustentación* (en inglés, lift) a la componente de la fuerza aerodinámica perpendicular a la dirección de movimiento.

Observación 3.2. Por convenio, se considera que la sustentación es positiva cuando se opone a la atracción gravitatoria, como en la figura 3.1.

Ejemplo 3.3. Sea una placa plana colocada en un flujo uniforme Q de ángulo α con la horizontal, como el del ejemplo 2.9, donde la velocidad viene dada por $u = Q(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Sea la transformación

$$f(z) = z + \frac{a^2}{z},$$

que lleva la circunferencia centrada en el origen y de radio a en

$$f(ae^{i\theta}) = ae^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 2a \cos(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

esto es, en el segmento horizontal $[-2a, 2a]$, que se identifica con la placa plana inicial. Como se razonó en el ejemplo 2.13, la aplicación f no es inyectiva globalmente. No obstante, sí lo es en el exterior del disco $B(0, a)$.

El potencial asociado al campo de velocidades alrededor del disco, que se comporta como $(Q, 0)$ en el infinito, viene dado en el ejemplo 2.11 por la expresión

$$w_0(z) = Q \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z),$$

elegida la rama principal de logaritmo.

Si se desea alterar su comportamiento en infinito y que pase a ser $(Q \cos(\alpha), Q \sin(\alpha))$, basta con componer con la aplicación conforme $z \mapsto e^{-i\alpha}z$, que es un giro de ángulo α que conserva la forma del disco $B(0, a)$:

$$W_0(z) = Q \left(e^{-i\alpha}z + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z),$$

donde se ignoran posibles constantes aditivas que aparezcan tras el giro. En consecuencia, el potencial asociado a la placa vendrá dado por $w(z) = W_0(f^{-1}(z))$. Se toma la inversa de f asociada al exterior del disco, donde esta era inyectiva. La expresión de $f^{-1}(z)$ se deducía también en el ejemplo 2.13, y venía dada por

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4a^2} \right).$$

Se estudia inicialmente el caso en que $\Gamma = 0$ y, por lo tanto,

$$W_0(z) = Q \left(e^{-i\alpha}z + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right) \quad \text{y} \quad W'_0(z) = Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right).$$

La velocidad viene dada por la regla de la cadena: $w'(z) = W'_0(f^{-1}(z)) (f^{-1})'(z)$. Por un lado,

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} \right),$$

luego la velocidad tiende hacia infinito en los extremos de la placa, $z = \pm 2a$ (singularidades). Por otro, la velocidad se anula allí donde $W'_0(f^{-1}(z)) = 0$. Esto es, en los puntos solución de

$$e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{(f^{-1}(z))^2} e^{i\alpha} = 0 \quad \text{o bien} \quad \xi = f^{-1}(z) = \pm a e^{i\alpha}.$$

Aplicando f , la velocidad se anula en $z = \pm 2a \cos(\alpha)$ (puntos de estancamiento). Las líneas de corriente se muestran en figura 3.2.



Figura 3.2: Líneas de corriente sobre la placa en caso de que $\Gamma = 0$. Adaptado de [3].

No obstante, esta forma de líneas de corriente no es la que se obtiene de la experimentación en túneles de viento. El flujo en la parte trasera de la placa, $z = 2a$, permanece regular, en contra de lo que sugería el estudio anterior. En el punto delantero, $z = -2a$, se forma un pequeño remolino o vórtice que no se puede describir mediante la teoría de fluidos ideales. Para ángulos de ataque α muy grandes, el flujo se separa completamente de la placa, y se forman vórtices. Esto se traduce, en aeronaves, por ejemplo, en una pérdida de velocidad (en inglés, *stall*).

Lo que puede describirse con la teoría ideal es la modificación necesaria para que no haya una singularidad en la cola. Para ello, se debe considerar la circulación, Γ , anteriormente despreciada. En tal caso,

$$W_0(z) = Q \left(e^{-i\alpha} z + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z) \quad \text{y} \quad W'_0(z) = Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}.$$

Tomando $\xi = f^{-1}(z)$, como antes, resulta que la velocidad del flujo es

$$w'(z) = \left[Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{\xi^2} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\xi} \right] \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} \right),$$

y, de nuevo, el segundo factor presenta sendas singularidades en $z = \pm 2a$. Para eliminar la singularidad en $z = 2a$, debe ser que el primer factor se anule. El punto final de la placa $z = 2a$ es la imagen por $\xi = a$ de la aplicación f . Haciendo $\xi = a$ en el primer factor,

e imponiendo su anulaci3n, se obtiene el valor de Γ :

$$Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{a^2} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{a} = 0 \quad \text{de donde} \quad -4\pi Q a \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \Gamma.$$

Que arroja el valor de $\Gamma = -4\pi Q a \sin(\alpha)$. Esta es la conocida como *condici3n de Kutta-Joukowski*.

Ser3a posible ahora hallar la fuerza sobre la placa, v3a la f3rmula de Blasius (teorema 2.17),

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_C (w'(z))^2 dz,$$

pero se presentan dos problemas. Por un lado, el contorno C no es realmente la frontera de ning3n dominio (es ir y volver sobre la longitud de la placa, cubriendo el segmento $[-2a, 2a]$). Adem3s, w' presenta singularidades a lo largo de la placa, como ya se ha visto. Por ello, si bien algunos autores dan en este punto resultado para el arrastre sobre la placa, se prefiere esperar a situaciones m3s realistas.

3.2. Perfiles de Joukowski

La transformaci3n de Joukowski $z \mapsto z + \frac{a^2}{z}$ lleva el disco $B(0, a)$ en el segmento $[-2a, 2a]$, que representa un perfil de ala elemental. Para este perfil, ya se han comentado los problemas presentes a la hora de tratar de calcular la fuerza sobre el ala. Para mantener la condici3n de Kutta-Joukowski pero obtener perfiles mejores, con un punto singular en el 3ngulo de ataque y que el flujo no presente m3s singularidades, se toma el disco de centro $z_0 = \varepsilon + i\delta$ y de radio $c = \sqrt{(a - \varepsilon)^2 + \delta^2}$, con $\varepsilon < 0$ y $\delta > 0$. La imagen por la aplicaci3n de Joukowski es sim3trica respecto del eje OX si $\delta = 0$, y una sola curva si $\varepsilon = 0$ (ver figura 3.3). De hecho, ε determina el grosor del perfil, mientras que δ , su *comba* (*camber*, en ingl3s), esto es, el arco relativo al eje OX .

Para todos estos perfiles, el punto $z = a$ est3 sobre la circunferencia de centro z_0 y radio c , y su imagen por la aplicaci3n de Joukowski es $a + \frac{a^2}{a} = 2a$. Adem3s, llamando ξ a la imagen por la transformaci3n de Joukowski,

$$\xi = z + \frac{a^2}{z}, \quad \text{de donde} \quad z = \frac{\xi}{2} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 4a^2}}{2}.$$

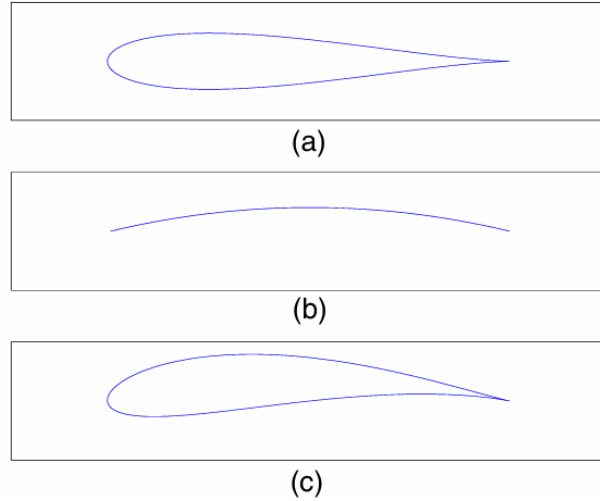


Figura 3.3: Perfiles de Joukowski, con $a = 1$ y (a) $\varepsilon = -1$, $\delta = 0$, (b) $\varepsilon = 0$, $\delta = 0,1$ y (c) $\varepsilon = -0,1$, $\delta = 0,1$. Adaptado de [3].

Derivando respecto de ξ ,

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{2} \pm \frac{2\xi}{4\sqrt{\xi^2 - 4a^2}} = \frac{\sqrt{\xi^2 - 4a^2} \pm \xi}{2\sqrt{\xi^2 - 4a^2}},$$

que sigue teniendo una singularidad cuando $\xi = 2a$ (si, y sólo si, $z = a$), pero no en el resto de la circunferencia. En efecto, la otra singularidad se alcanzaría para $\xi = -2a$ o $z = -a$. Si $z = -a$ perteneciera a la circunferencia de centro z_0 y radio c , entonces $|-a - \varepsilon - i\delta|^2 = |a + \varepsilon + i\delta|^2 = (a - \varepsilon)^2 + \delta^2$; es decir, $(a + \varepsilon)^2 + \delta^2 = (a - \varepsilon)^2 + \delta^2$. De aquí, debería ser que $(a + \varepsilon)^2 - (a - \varepsilon)^2 = (a + \varepsilon + a - \varepsilon)(a + \varepsilon - a + \varepsilon) = 0$. Esto es, $a\varepsilon = 0$. Como $\varepsilon \neq 0$, sería $a = 0$, y en tal caso no existen singularidades en la circunferencia.

Partiendo, de nuevo, del flujo uniforme e inclinado un ángulo α , para el que la transformación de Joukowski se compone con $z \mapsto e^{-i\alpha}z$, en presencia de un disco de centro z_0 y radio c el potencial asociado viene dado por

$$w(z) = Q \left(e^{-i\alpha}(z - z_0) + \frac{c^2 e^{i\alpha}}{(z - z_0)} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0),$$

y cuya derivada viene dada por

$$w'(z) = Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{c^2 e^{i\alpha}}{(z - z_0)^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}.$$

Si se transforma este flujo de acuerdo a la transformación de Joukowski, como en el

ejemplo 3.3 resulta que

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\xi} = \left[Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{c^2 e^{i\alpha}}{(z - z_0)^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} \right] \left[\frac{\sqrt{\xi^2 - 4a^2} \pm \xi}{2\sqrt{\xi^2 - 4a^2}} \right].$$

En efecto, en $\xi = 2a$, que es imagen de $z = a$ por la transformación, la velocidad es infinita. Como antes, haciendo que el primer factor se anule para evitarlo, resulta que

$$Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{c^2 e^{i\alpha}}{(a - z_0)^2} \right) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{a - z_0}.$$

De aquí, como $z = a$ está sobre la circunferencia del disco, $c^2 = |a - z_0|^2$, luego

$$i \frac{\Gamma}{2\pi} = Q \left((a - z_0) e^{-i\alpha} - \frac{|a - z_0|^2}{a - z_0} e^{i\alpha} \right) = Q \left((a - z_0) e^{-i\alpha} - (\overline{a - z_0}) e^{i\alpha} \right).$$

Luego

$$i \frac{\Gamma}{2\pi} = i 2Q \operatorname{Im} \left((a - z_0) e^{-i\alpha} \right), \quad \text{de donde} \quad \Gamma = 4\pi Q \operatorname{Im} \left((a - z_0) e^{-i\alpha} \right).$$

Ahora bien,

$$\operatorname{Im} \left[(a - z_0) e^{-i\alpha} \right] = \operatorname{Im} \left[(a - \varepsilon - i\delta) (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)) \right] = -(a - \varepsilon) \sin(\alpha) - \delta \cos(\alpha).$$

Luego se tiene que

$$\Gamma = 4\pi Q \left(-(a - \varepsilon) \sin(\alpha) - \delta \cos(\alpha) \right),$$

o bien

$$\Gamma = -4\pi Q a \sin(\alpha) + 4\pi Q (\varepsilon \sin(\alpha) - \delta \cos(\alpha)),$$

que es la condición de Kutta-Joukowski.

Se obtiene ahora la fuerza ejercida por el fluido sobre estos perfiles de Joukowski. Sea la transformación de Joukowski $z \mapsto \xi = z + \frac{a^2}{z}$ que lleva la circunferencia C_0 , de centro z_0 y radio c , en el perfil de Joukowski correspondiente, que se denota por C . La fuerza sobre este perfil viene dada por la fórmula de Blasius (teorema 2.17):

$$\overline{F} = \frac{i\rho}{2} \int_C w'(\xi)^2 d\xi,$$

donde se tenía que

$$w'(\xi) = \left[Q \left(e^{-i\alpha} - \frac{c^2 e^{i\alpha}}{(z - z_0)^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} \right] \left[\frac{\sqrt{\xi^2 - 4a^2} \pm \xi}{2\sqrt{\xi^2 - 4a^2}} \right].$$

La función $w'(\xi)$ tiene polos en $\xi = 2a$ (que desaparece tras imponer la condición de Kutta-Joukowski), en $\xi = -2a$ y en $\xi(z_0) = z_0 + \frac{a^2}{z_0}$. Además, todos son interiores a la curva C .

Denotando por $G(z)$ al primer factor de $w'(\xi)$, se tiene que $w'(\xi) = G(z(\xi)) \frac{dz}{d\xi}$ de donde la fórmula de Blasius se escribe como

$$\bar{F} = \frac{i\rho}{2} \int_C w'(\xi)^2 d\xi = \frac{i\rho}{2} \int_{C_0} G(z)^2 \frac{dz}{d\xi}(z) dz = \frac{i\rho}{2} \int_{C_0} \frac{G(z)^2}{d\xi/dz} dz = \frac{i\rho}{2} \int_{C_0} G(z)^2 \left(\frac{z^2 - a^2}{z^2} \right)^{-1} dz,$$

donde ahora los polos para el integrando aparecen en $z = -a$ y en $z = z_0$.

Para hallar la integral, vía el teorema de los residuos, se calculan los residuos en el infinito. Esto es, se busca el desarrollo de Laurent del integrando en un entorno de infinito, en potencias de $1/z$, y se toman los coeficientes que acompañan al término z^{-1} . Los factores conflictivos se desarrollan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - a^2}{z^2} &= 1 - \frac{a^2}{z^2} \quad (\text{sin potencias en } 1/z), \\ \frac{1}{z - z_0} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - z_0/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z} \right)^n, \\ \frac{1}{(z - z_0)^2} &= \frac{1}{z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z} \right)^n \right)^2 \quad (\text{sin potencias en } 1/z). \end{aligned}$$

Luego al calcular el producto

$$G(z)^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1}$$

el único término en $1/z$ que se obtiene procede de multiplicar el 1 del segundo factor por el término en $1/z$ del primer factor, que viene dado por

$$-2Qe^{-i\alpha} \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}.$$

Luego el residuo en infinito viene dado por $-Qe^{-i\alpha} \frac{i\Gamma}{\pi}$, y al multiplicar por $2\pi i$ aplicando el teorema de los residuos a la integral, se obtiene que

$$\bar{F} = \frac{i\rho}{2} \cdot 2Qe^{-i\alpha} \Gamma = i\rho Q \Gamma (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)) = \rho Q \Gamma (\sin(\alpha) + i \cos(\alpha)).$$

De aquí, se tiene que las componentes de la fuerza (arrastre y sustentación, respectivamente) son

$$F_x = \rho Q \Gamma \sin(\alpha) = \rho \Gamma v_\infty, \quad F_y = -\rho Q \Gamma \cos(\alpha) = -\rho \Gamma u_\infty,$$

donde se identifican las componentes del flujo de velocidad $\mathbf{u} = (u, v)$ en el infinito

$$\mathbf{u}_\infty = Q (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (u_\infty, v_\infty).$$

3.3. La fórmula general de Kutta-Joukowski

El resultado hallado en la sección anterior es general siempre que la función velocidad $w'(z)$ tenga límite en ∞ y los polos (o, en general, las singularidades) estén concentradas en el interior de la curva C (que es una línea de corriente). En efecto, en tal caso, existe una circunferencia C_0 de radio R tal que si $|z| > R$, entonces se desarrolla $w'(z)$ en serie de Laurent según

$$w'(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \quad \text{con } a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} w'(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (u - iv) = u_\infty - iv_\infty.$$

Además, en la expresión anterior,

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} w'(z) dz$$

o también, por el teorema de los residuos,

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C w'(z) dz,$$

pues $w'(z)$ es holomorfa entre C y C_0 . Resulta entonces que

$$2\pi i a_1 = \int_C (u - iv)(dx + idy) = \int_C (u dx + v dy) + i \int_C (u dy - v dx).$$

La primera integral es

$$\int_C \mathbf{u} d\mathbf{r} = \Gamma,$$

pues Γ se identifica con la circulación del campo de velocidades. Para la segunda, basta notar que, por ser C una línea de corriente

$$\int_C udy - vdx = \int_C d\psi = 0,$$

donde ψ es la función de corriente, que es constante sobre las líneas de corriente.

En consecuencia, $2\pi ia_1 = \Gamma$ y $a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}$. Luego se tiene que

$$w'(z)^2 = a_0^2 + 2\frac{a_0 a_1}{z} + O(z^{-2}) = a_0^2 + \frac{a_0 \Gamma}{\pi i z} + O(z^{-2}).$$

Finalmente, la fuerza sobre el cuerpo se calcula vía la fórmula de Blasius y a través del teorema de los residuos, dando lugar a

$$\overline{F} = \frac{i\rho}{2} \int_C w'(z)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{a_0 \Gamma}{\pi i} = i\rho a_0 \Gamma = i\rho \Gamma (u_\infty - iv_\infty).$$

De nuevo, se obtienen las componentes de la fuerza

$$F_x = \rho \Gamma v_\infty, \quad F_y = -\rho \Gamma u_\infty.$$

Ahora bien, por la condición de Kutta-Joukowski, $\Gamma = -4\pi Q ((a - \varepsilon) \sin(\alpha) + \delta \cos(\alpha))$ y resulta que $F_y = -\rho \Gamma u_\infty = -\rho [-4\pi Q ((a - \varepsilon) \sin(\alpha) + \delta \cos(\alpha))] Q \cos(\alpha)$, de donde

$$F_y = 4\pi \rho Q^2 [(a - \varepsilon) \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \delta \cos^2(\alpha)].$$

Para el análisis se supone que desprecia el término $\delta \cos^2(\alpha)$ (por ejemplo, un ala simétrica, o con muy ligera comba). Dado que $a > \varepsilon$, resulta que la fuerza de sustentación F_y es positiva para ángulos α en $(0, \pi/2)$. Además, como $F_y = 2\pi \rho Q^2 (a - \varepsilon) \sin(2\alpha)$, derivando se tiene que $F'_y(\alpha) = 4\pi \rho Q^2 \cos(2\alpha)$ y F'_y se anula para $2\alpha = \pi/2$; esto es, $\alpha = \pi/4$. Además, como $F''_y(\alpha) = -8\pi \rho Q^2 \sin(2\alpha) < 0$ en $(0, \pi/2)$, la sustentación alcanza un máximo para $\alpha = \pi/4$. Así mismo, es nula para $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$.

En realidad, la sustentación desaparece mucho antes de que la velocidad sea ortogonal al ala ($\alpha = \pi/2$). De hecho, la teoría del flujo potencial sólo es válida para ángulos de ataque pequeños. En caso contrario, se forman vórtices sobre el ala, el flujo se separa de su superficie, y aparece el fenómeno de la pérdida de velocidad (*stalling*, en inglés). Esto

comienza a ocurrir usualmente para ángulos de ataque entre 10° y 15° .

Es costumbre escribir la sustentación en términos del ángulo β del radio que une z_0 con a en los perfiles de Joukowski (ver la figura 3.4).

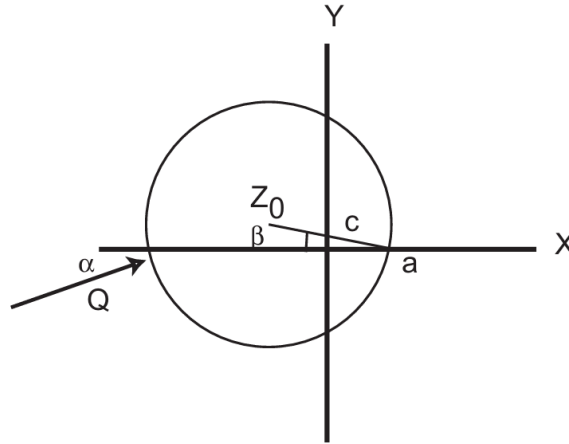


Figura 3.4: Ángulo β que define la sustentación. Adaptado de [3].

Se tiene que

$$\tan(\beta) = \frac{\delta}{a - \varepsilon}, \quad \text{o bien } \delta = (a - \varepsilon) \tan(\beta).$$

Entonces

$$(a - \varepsilon) \sin(\alpha) + \delta \cos(\alpha) = (a - \varepsilon) (\sin(\alpha) + \cos(\alpha) \tan(\beta)) = \frac{a - \varepsilon}{\cos(\beta)} (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)),$$

de donde

$$(a - \varepsilon) \sin(\alpha) + \delta \cos(\alpha) = \frac{a - \varepsilon}{\cos(\beta)} \sin(\alpha + \beta),$$

dado que $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Recordando que $c = \sqrt{(a - \varepsilon)^2 + \delta^2}$, se tiene finalmente que

$$(a - \varepsilon) \sin(\alpha) + \delta \cos(\alpha) = (a - \varepsilon) \cdot \frac{c}{(a - \varepsilon)} \cdot \sin(\alpha + \beta) = c \sin(\alpha + \beta).$$

Además, las fórmulas trigonométricas implican que

$$\cos^2(\beta) = \frac{1}{1 + \tan^2(\beta)} = \frac{1}{1 + \delta^2/(a - \varepsilon)^2} = \frac{(a - \varepsilon)^2}{(a - \varepsilon)^2 + \delta^2}, \quad \text{o bien } \cos(\beta) = \frac{a - \varepsilon}{\sqrt{(a - \varepsilon)^2 + \delta^2}}.$$

En consecuencia, la fórmula de Kutta-Joukowski se reescribe como $\Gamma = -4\pi Q c \sin(\alpha + \beta)$, y las componentes de la fuerza vendrán dadas por

$$F_x = 4\pi \rho c Q^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha), \quad F_y = -4\pi \rho c Q^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha.$$

En consecuencia, la fuerza es de módulo $4\pi\rho cQ^2 \sin(\alpha + \beta)$ y ortogonal al ángulo de ataque. De hecho, el efecto de la comba es modificar el ángulo de ataque para el que la sustentación se anula.

Los perfiles de Joukowski no son realistas en el sentido de que el punto singular tiene una única tangente. Este es un hecho materialmente irrealizable. Una generalización de los perfiles de Joukowski son los perfiles de *Kármán-Trefftz*. Para los perfiles de Joukowski, $\xi = z + a^2/z$, de donde

$$\begin{aligned}\xi - 2a &= z + \frac{a^2}{z} - 2a = \frac{z^2 + a^2 - 2az}{z} = \frac{(z - a)^2}{z}, \\ \xi + 2a &= z + \frac{a^2}{z} + 2a = \frac{z^2 + a^2 + 2az}{z} = \frac{(z + a)^2}{z}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\xi - 2a}{\xi + 2a} = \frac{(z - a)^2}{(z + a)^2}.$$

Para los perfiles de *Kármán-Trefftz* se cumple la relación generalizada

$$\frac{\xi - ka}{\xi + ka} = \frac{(z - a)^k}{(z + a)^k}.$$

Estos permiten la fabricación de perfiles con tangentes múltiples en el punto singular. En el presente trabajo, no se insiste en estos métodos.

3.4. La fórmula de Kutta-Joukowski para el momento

Se investiga en la presente sección la tendencia de un perfil de Joukowski a girar en torno al origen, dado por el momento angular hallado previamente vía la fórmula de Blasius (teorema 2.21):

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \int_C \xi (w'(\xi))^2 d\xi \right).$$

De forma análoga a lo descrito para la fuerza en las secciones previa, y con la notación allí presentada, se tiene que

$$\int_C \xi (w'(\xi))^2 d\xi = \int_{C_0} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) w'(z)^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1} dz.$$

El integrando resulta

$$H(z) = \left(z + \frac{a^2}{z}\right) \left(Qe^{-i\alpha} - \frac{Qc^2e^{i\alpha}}{(z-z_0)^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z-z_0}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1}.$$

Para calcular la integral, se atiende al residuo del integrando en infinito. Los factores se desarrollan análogamente al caso anterior, de forma que:

$$\begin{aligned} Qe^{-i\alpha} - \frac{Qc^2e^{i\alpha}}{(z-z_0)^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z-z_0} &= Qe^{-i\alpha} - Qc^2e^{i\alpha} \frac{1}{z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n\right)^2 - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n. \\ \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{z^2}\right)^n. \end{aligned}$$

El residuo será el coeficiente del término en $1/z$ del desarrollo de Laurent.

Por un lado,

$$\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1} = \left(z + \frac{a^2}{z}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{z^2}\right)^n\right) = z + \frac{2a^2}{z} + O(z^{-3}),$$

luego al multiplicar esto por el cuadrado, los sumandos en $1/z$ se obtienen del producto del término de orden 0 procedente del cuadrado por el término $2a^2/z$ y del producto del término de orden 2 procedente del cuadrado por z .

Ahora, el término de orden 0 procedente del cuadrado es $Q^2e^{-2i\alpha}$, mientras que el término de orden 2 procedente del cuadrado resulta ser

$$\left(-2Q^2c^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} - 2i\frac{Q\Gamma e^{-i\alpha}}{2\pi} z_0\right) \frac{1}{z^2}.$$

Combinando todo, resulta que el residuo del integrando en infinito es

$$2Q^2e^{-i2\alpha}a^2 - 2Q^2c^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} - i\frac{Q\Gamma e^{-i\alpha}}{\pi} z_0,$$

que al multiplicar por $2\pi i$ resulta

$$4\pi i Q^2e^{-i2\alpha}a^2 - 4\pi i Q^2c^2 - i\frac{\Gamma^2}{2\pi} + 2Q\Gamma z_0e^{-i\alpha}.$$

Luego, aplicando el teorema de los residuos,

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \int_{C_0} H(z) dz \right) = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \left(4\pi i Q^2 e^{-i2\alpha} a^2 - 4\pi i Q^2 c^2 - i \frac{\Gamma^2}{2\pi} + 2Q\Gamma z_0 e^{-i\alpha} \right) \right).$$

Al tomar partes reales queda que

$$M = -\frac{\rho}{2} 4\pi Q^2 \sin(2\alpha) a^2 - \frac{\rho}{2} 2Q\Gamma(x_0 \cos(\alpha) + y_0 \sin(\alpha)),$$

donde se ha escrito $z_0 = x_0 + iy_0$; o bien $M = -2\pi\rho Q^2 a^2 \sin(2\alpha) - \rho Q\Gamma(x_0 \cos(\alpha) + y_0 \sin(\alpha))$.

Además, si se trata de un perfil de ala parecido al de la placa dada en el ejemplo 3.3, entonces $z_0 \sim 0$ (luego, en particular, $x_0 \sim 0$ e $y_0 \sim 0$), y si también α es lo suficientemente pequeño, resulta que

$$M \sim -2\pi\rho Q^2 a^2 2\alpha + 0 = -4\pi\rho Q^2 a^2 \alpha.$$

Por la fórmula de Blasius, $X - iY = \rho\Gamma Q(\sin(\alpha) + i \cos(\alpha))$, luego $|\mathbf{F}| = \rho\Gamma Q$, donde además $\Gamma = -4\pi Qa \sin(\alpha)$ por la condición de Kutta-Joukowski. Luego se tiene que $M \sim -a|\mathbf{F}|$.

Esto quiere decir que el ala tiende a girar como si toda la fuerza se aplicara en el punto $z = -a$. Como el ala se extiende desde $-2a$ hasta $2a$, el punto está a longitud transversal $1/4$. Es conveniente hacer que el centro de masa del perfil esté también cerca de ese punto, para ganar estabilidad en el movimiento horizontal. En efecto, a partir de la expresión de la fuerza para α pequeño (esto es, $\sin(\alpha) \approx \alpha$ y $\cos(\alpha) \approx 1$), y por definición de momento,

$$\mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} = (-a, 0) \times (\rho\Gamma Q\alpha, -\rho\Gamma Q) = \begin{vmatrix} -a & 0 \\ \rho\Gamma Q\alpha & -\rho\Gamma Q \end{vmatrix} = a\rho\Gamma Q,$$

donde se identifica el resultado del producto vectorial $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}$ con su tercera componente, como se hizo en el ejemplo 1.34. Tras imponer la condición de Kutta-Joukowski se convierte en $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_z = -4\pi Q^2 a^2 \alpha$. Luego

$$-\int \mathbf{r} \times \nabla p d\mathbf{r} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \times \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = \mathbf{0},$$

y el momento respecto de $\mathbf{r}_0 = (-a, 0)$ es 0. En otras palabras, la fuerza de sustentación puede considerarse como aplicada toda sobre ese punto (centro de presión). La gravi-

tación está aplicada hacia abajo en el centro de masa del cuerpo. Si estos puntos no coinciden, se produce un torque que tiende a hacer girar el ala.

3.5. Paradoja de D'Alembert

Para finalizar el capítulo y el presente trabajo, se expone a continuación la *paradoja de D'Alembert*, establecida en 1752 por el matemático francés Jean le Rond D'Alembert.

Teorema 3.4 (Paradoja de D'Alembert). En un flujo potencial, incompresible y no viscoso la fuerza de arrastre experimentada por un cuerpo sólido es nula.

Demostración. La fuerza ejercida por la presión del fluido sobre el cuerpo sólido V viene dada por la integral en la frontera, ∂V , del sólido:

$$\mathbf{F} = - \int_{\partial V} p \mathbf{n} d\sigma.$$

En las condiciones del enunciado, la dinámica del fluido de flujo $\mathbf{u}$ y densidad ρ está gobernada por la ecuación de Euler (ecuación 1.5):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Recordando la identidad vectorial dada en la ecuación 1.9,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

se obtiene que, al ser $\mathbf{u}$ potencial y darse que $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 = - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Si φ es un potencial tal que $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, y como el flujo es incompresible ($\rho = \text{const.}$) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \nabla \frac{u^2}{2} + \nabla \frac{p}{\rho} = \mathbf{0}.$$

Permutando el orden de derivación, en virtud del teorema de Schwarz, en el primer sumando, se obtiene que

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{0},$$

luego existirá una constante C tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C.$$

Más aún, asumiendo que tanto u como p se anulan en infinito (o, en general, tienden a una constante), se puede sumar una constante a φ para conseguir que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0.$$

Esta es una formulación del teorema de Bernoulli donde ahora la función de Bernoulli es constante en el exterior del sólido. De aquí, se obtiene que la presión se expresa como

$$-p = \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right),$$

y la fuerza sobre el sólido vendrá dada por

$$\mathbf{F} = \rho \int_{\partial V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right) d\sigma.$$

Si el sólido se mueve a velocidad $\mathbf{v}$, como la configuración del flujo a su alrededor debe ser la misma en todo instante de tiempo, debe verificarse que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, 0)$. Derivando respecto del tiempo, en virtud de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N -v_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_k}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, 0) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Es decir, como $\mathbf{u} = \nabla \varphi$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \mathbf{v} \cdot \nabla (\nabla \varphi) = 0.$$

Ahora bien, como la velocidad del sólido es constante,

$$v_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = v_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right),$$

de donde se obtiene que

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \right) = 0.$$

En consecuencia, existirá una función del tiempo $R(t)$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = R(t), \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + R(t).$$

Luego la cuestión estriba en calcular

$$\int_{\partial V} \left(\frac{1}{2} u^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + R(t) \right) \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Por un lado, aplicando el teorema de la divergencia a la componente k -ésima del sumando de la fuerza correspondiente a la función $R(t)$, se obtiene que

$$\int_{\partial V} R(t) n_k \, d\sigma = \int_V \frac{\partial R(t)}{\partial x_k} \, dV = 0,$$

al depender R sólo del tiempo. Luego la componente k -ésima de la fuerza viene dada por

$$F_k = \rho \int_{\partial V} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} u_i^2 - v_i u_i \right) n_k \, d\sigma.$$

Se denota por Ω el exterior del cuerpo V , donde $\mathbf{u}$ está bien definida. Si se supone que $\mathbf{u}$ decrece lo suficientemente rápido hacia 0 en el infinito o, en general, tiende hacia una constante, es posible aplicar el teorema de la divergencia a Ω , que tiene por frontera ∂V . De hecho, de teoría general de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para la ecuación de Laplace, $\mathbf{u}$ decrece al menos como $\frac{1}{r^N}$ con N la dimensión del espacio. Particularmente, en este caso $N = 2$ y es de aplicación el teorema.

Aplicando el teorema de la divergencia al vector $\left(0, \dots, \sum_{i=1}^N u_i^2, \dots, 0 \right)$, donde la única componente no nula es la k -ésima, resulta entonces que

$$\frac{1}{2} \int_{\partial V} \sum_{i=1}^N u_i^2 n_k \, d\sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 \right) \, dV,$$

donde el signo negativo se debe a que $\mathbf{n}$ es interior a Ω (exterior al sólido V).

Como $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, resulta que

$$\frac{1}{2} \nabla u^2 = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

luego el integrando se transforma según

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i},$$

donde la última igualdad es consecuencia de que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

por ser el flujo incompresible. Se tiene, además, que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i} = \nabla \cdot (u_k \mathbf{u}).$$

Nuevamente por el teorema de la divergencia,

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 \right) dV = - \int_V \sum_{i=1}^N \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i} dV = \int_{\partial V} u_k \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

luego es posible escribir la componente k -ésima de la fuerza como

$$F_k = \rho \int_{\partial V} \sum_{i=1}^N (u_k u_i n_i - v_i u_i n_k) d\sigma.$$

En la dirección del movimiento, la fuerza resultante es la resistencia al avance, y viene dada por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \sum_{k=1}^N v_k F_k = \rho \int_{\partial V} \sum_{i,k} (v_k u_k u_i n_i - v_k v_i u_i n_k) d\sigma = \rho \int_{\partial V} \sum_{i,k} (u_k v_k u_i n_i - u_i v_i v_k n_k) d\sigma.$$

Como el fluido no puede penetrar en el cuerpo, la componente normal de la velocidad del flujo sobre el borde del cuerpo es nula; esto es, $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0$. De donde se tiene que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, o bien $\sum_{k=1}^N u_k n_k = \sum_{k=1}^N v_k n_k$. Se tiene entonces que

$$\sum_{i,k} (u_k v_k u_i n_i - u_i v_i v_k n_k) = \sum_{i,k} (u_k v_k v_i n_i - u_i v_i v_k n_k) = 0.$$

En consecuencia, la fuerza de arrastre experimentada por el cuerpo es nula. $\square$

Es posible probar un resultado similar a este en dimensión 3, donde se producen

fenómenos como el vuelo de las aves y de aeronaves. Según este, es imposible estudiar el arrastre y la sustentación en ejemplos como esos mediante la teoría del flujo potencial. Ello sugiere, tal y como se ha ido comentando a lo largo del capítulo, que la existencia de arrastre y sustentación implica la presencia de vorticidad en el fluido.

Índice de figuras

1.1. Tubería de sección lentamente variable. Adaptado de [3].	18
1.2. Vórtice puntual. Adaptado de [1].	20
2.1. Líneas de corriente del flujo potencial a través del cilindro. Adaptado de [3].	34
2.2. Sólido en forma de cuña con ángulo α . Adaptado de [3].	38
2.3. Líneas de corriente para el caso en que $a = 1$, $b = 3$ y $Q = 5$	43
3.1. Componentes de la fuerza aerodinámica. Adaptado de [8].	50
3.2. Líneas de corriente sobre la placa en caso de que $\Gamma = 0$. Adaptado de [3]. . .	52
3.3. Perfiles de Joukowski, con $a = 1$ y (a) $\varepsilon = -1$, $\delta = 0$, (b) $\varepsilon = 0$, $\delta = 0,1$ y (c) $\varepsilon = -0,1$, $\delta = 0,1$. Adaptado de [3].	54
3.4. Ángulo β que define la sustentación. Adaptado de [3].	59

Apéndice A

Teorema de Liouville

El objetivo de este apéndice es el de establecer el *teorema de Liouville* para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

Para ello, se consideran $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ y $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, donde $N \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$. Sea sistema diferencial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Se supone que $Y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ es una matriz solución del sistema. Es decir, Y es tal que $Y' = AY$; donde si $Y = (y_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ entonces $y'_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} y_{kj}$. También, en forma de filas, se tiene que, dado $1 \leq i \leq N$,

$$(y'_{i1} \ y'_{i2} \ \dots \ y'_{iN}) = a_{i1}(y_{11} \ y_{12} \ \dots \ y_{1N}) + \dots + a_{ii}(y_{i1} \ y_{i2} \ \dots \ y_{iN}) + \dots + a_{iN}(y_{N1} \ y_{N2} \ \dots \ y_{NN}). \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.1 (*Teorema de Liouville*). En las condiciones anteriores, siendo $\Delta(t) = \det(Y)$ y verificándose $\Delta(t) = \Delta(0)$ para $t = 0$, resulta que

$$\Delta(t) = \Delta(0) \exp \left(\int_0^t \text{tr}(A)(s) \, ds \right).$$

Demostración. En virtud de la fórmula de Leibniz para el determinante, se puede escribir $\Delta = \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) y_{1\sigma(1)} y_{2\sigma(2)} \dots y_{N\sigma(N)}$, donde S_N denota el grupo de permutaciones de N elementos y $\varepsilon(\sigma)$ la signatura de cada $\sigma \in S_N$.

Derivando en la igualdad respecto de t se obtiene que $\Delta'(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \dots + \Delta_N(t)$, donde cada $\Delta_i(t)$ es el determinante de la matriz cuya fila i -ésima es de la forma dada

por la ecuación A.1 y el resto de filas idénticas a las de la matriz Y . Esto es,

$$\Delta_i(t) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{i1} & y'_{i2} & \cdots & y'_{iN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NN} \end{vmatrix}.$$

Al sustituir la fila i -ésima por su expresión dada en ecuación A.1 se obtiene un determinante cuya fila i -ésima está formada por N sumandos en cada elemento. Se separa dicho determinante en la suma de N determinantes, todos ellos idénticos salvo por que cada uno tiene, en la fila i -ésima, cada uno de los sumandos de la fila i -ésima original. Todos ellos resultan nulos, por tener dos filas idénticas, a excepción del correspondiente al sumando $a_{ii}(y_{i1} y_{i2} \cdots y_{iN})$. Dicho determinante resulta valer $a_{ii}\Delta(t)$.

Así, se escribe

$$\Delta'(t) = \sum_{i=1}^N \Delta_i(t) = \sum_{i=1}^N a_{ii}\Delta(t) = (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN})\Delta(t) = \text{tr}(A)\Delta(t),$$

si $\text{tr}(A)$ denota la traza de la matriz A .

Se obtiene entonces la llamada *ecuación de Liouville*: $\Delta'(t) = \text{tr}(A)\Delta(t)$, que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden homogénea. Su solución es bien conocida, en términos de la función exponencial,

$$\Delta(t) = C \exp \left(\int_0^t \text{tr}(A)(s) ds \right),$$

donde C es una constante de integración.

Imponiendo la condición inicial $\Delta(t) = \Delta(0)$ para $t = 0$, el problema de Cauchy asociado tiene por solución única

$$\Delta(t) = \Delta(0) \exp \left(\int_0^t \text{tr}(A)(s) ds \right),$$

que es el resultado buscado.

□

Bibliografía

- [1] J.D. Anderson y C. P. Cadou. *Fundamentals of Aerodynamics*. Mc Graw Hill, 2024.
- [2] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] S. Childress. *An Introduction to Theoretical Fluid Dynamics*. AMS, 2009.
- [4] F.Galindo, J.Sanz. y L.A. Tristán. *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en Una Variable Real*. Thomson, 2003.
- [5] F.Galindo, J.Sanz. y L.A. Tristán. *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en Varias Variables*. Thomson, 2005.
- [6] J.H.Spurk y N.Askel. *Fluid Mechanics*. Springer, 2008.
- [7] L.D.Landau y E.M.Lifshitz. *Mecánica De Fluidos*. Reverté, 2001.
- [8] L.M.Milne-Thomson. *Theoretical Aerodynamics*. Dover, 1966.
- [9] P.K.Kundu, I.M.Cohen y D.R.Dowling. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2012.