



---

# Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

*Grado en Matemáticas*

## CONSECUENCIAS Y VARIANTES DEL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO

Autor: Pedro Cidoncha Molina

Tutor: Javier Sanz Gil

2025



**Resumen:** El teorema del módulo máximo establece que una función holomorfa y no constante definida en un dominio conexo del plano complejo no puede alcanzar un máximo local del módulo en el interior. Este resultado, fundamental en análisis complejo, admite múltiples generalizaciones y extensiones que han dado lugar a un amplio conjunto de consecuencias teóricas. En este trabajo se presenta una selección de dichas consecuencias, incluyendo su adaptación al marco de funciones armónicas y subarmónicas, los teoremas de Phragmén-Lindelöf en dominios no acotados como sectores y bandas, así como una serie de resultados sobre el comportamiento del módulo máximo en regiones circulares o sectoriales. Estas herramientas permiten estudiar de forma precisa tanto el crecimiento de funciones analíticas como su estructura geométrica.

**Palabras clave:** Funciones subarmónicas, funciones armónicas, principio del módulo máximo generalizado, Teoremas de Phragmén-Lindelöf, constante de Bloch, teoremas de Landau, transformaciones de Möbius, teorema de Ahlfors, desarrollos asintóticos, transformada de Borel-Laplace.

---

**Abstract:** The maximum modulus theorem states that a holomorphic and non-constant function defined on a connected domain of the complex plane cannot reach a local maximum of the modulus in the interior. This result, fundamental in complex analysis, admits multiple generalisations and extensions that have given rise to a wide range of theoretical consequences. This document exposes a selection of these consequences, including their adaptation to the framework of harmonic and subharmonic functions, the Phragmén-Lindelöf theorems in unbounded domains such as sectors and strips, as well as a series of results on the behaviour of the maximum modulus in circular or sectoral regions. These tools allow for the precise study of both the growth of analytic functions and their geometric structure.

**Keywords:** Subharmonic functions, harmonic functions, generalised maximum modulus principle, Phragmén-Lindelöf theorems, Bloch's constant, Landau theorems, Möbius transformations, Ahlfors' theorem, asymptotic expansions, Borel-Laplace transform.

---

## Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar, a mis amigos, por estar ahí siempre que los he necesitado, por todo el apoyo durante estos años de carrera. Sé que cuando los vuelva a necesitar, seguirán ahí, y por eso, más que unos amigos, me llevo una familia.

Agradezco también a mi tutor, por su orientación y ayuda a lo largo del desarrollo de este trabajo.

A mi hermana, por su cariño y apoyo constante. Y sobre todo a mis padres, porque ellos son quienes me han brindado esta oportunidad. Siempre lo han dado todo por mí, por ofrecerme un futuro lleno de posibilidades y por mi felicidad. Han estado a mi lado en cada paso del camino, y sé que siempre los tendré ahí, acompañándome. Este trabajo también es fruto vuestro.



# Índice general

<b>1. Funciones subarmónicas</b>	<b>9</b>
1.1. Recordatorio de funciones armónicas . . . . .	9
1.2. Funciones subarmónicas . . . . .	14
1.3. Generalización del principio del módulo máximo y sus aplicaciones . . . . .	20
<b>2. Teoremas de Phragmén-Lindelöf</b>	<b>29</b>
2.1. Teorema de Phragmén-Lindelöf para un ángulo . . . . .	29
2.2. Teorema de Phragmén-Lindelöf para una banda . . . . .	36
<b>3. La constante de Bloch</b>	<b>39</b>
3.1. Transformaciones de Möbius . . . . .	39
3.2. Teoremas de Landau . . . . .	40
3.3. El teorema de Bloch . . . . .	44
3.4. El teorema de Ahlfors . . . . .	47
<b>4. Aplicaciones en los desarrollos asintóticos</b>	<b>57</b>
4.1. Desarrollos asintóticos . . . . .	58
4.1.1. Desarrollos asintóticos nulos . . . . .	59
4.2. Transformada de Borel-Laplace . . . . .	64
4.3. Vínculo entre la teoría asintótica real y compleja . . . . .	67
<b>A. Algunos resultados clásicos</b>	<b>71</b>



# Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo estudiar diversas consecuencias y generalizaciones del Teorema del Módulo Máximo en el marco del Análisis Complejo. Se encuadra dentro de la asignatura “Variable Compleja”, correspondiente al plan de estudios del Grado en Matemáticas, y tiene como finalidad profundizar en algunos de los resultados más relevantes que se derivan o relacionan con este teorema fundamental, tanto desde un punto de vista teórico como aplicado.

En el capítulo 1 se introduce el concepto de funciones subarmónicas, que generalizan a las funciones armónicas, y se establecen sus propiedades fundamentales. Se comienza con un repaso de los resultados clásicos sobre funciones armónicas, incluyendo la resolución del Problema de Dirichlet en un disco mediante herramientas de Variable Compleja, tal como se expone en el libro de Robert B. Ash [3]. A continuación, se presenta la definición de funciones subarmónicas siguiendo a M. Heins [6] y A. I. Markushevich [7], destacando ejemplos importantes como el logaritmo del módulo de una función holomorfa. Este capítulo culmina con la demostración del principio generalizado del módulo máximo, aplicable a funciones subarmónicas, y sus consecuencias: el teorema de los tres círculos de Hadamard, el teorema de las dos constantes para un disco y otras estimaciones de crecimiento. Para esta parte se ha consultado también el texto de John B. Conway [4].

El capítulo 2 se centra en los teoremas de Phragmén-Lindelöf, que extienden el principio del módulo máximo a dominios no acotados como sectores o bandas. Se demuestra que si una función holomorfa está acotada en el borde de un dominio y su crecimiento en el interior es suficientemente controlado, entonces dicha acotación se mantiene en todo el dominio. Se estudian casos específicos para ángulos y bandas horizontales. Esta parte se ha elaborado fundamentalmente a partir del material de A. I. Markushevich [7] y Walter Rudin [8].

En el capítulo 3 se aborda el estudio de la constante de Bloch, un resultado de tipo geométrico que asegura la existencia de discos en los que una función holomorfa se comporta de forma controlada. Para llegar a este resultado se introducen herramientas previas como las transformaciones de Möbius y los teoremas de Landau, que establecen cotas para el radio de inyectividad de funciones holomorfas. También se incluye el teorema de Ahlfors, que mejora los resultados anteriores en términos cuantitativos. El desarrollo de este capítulo se ha basado principalmente en los textos clásicos de M. Heins [6], John B. Conway [4], L. Ahlfors [1] y [2] y en resultados clásicos que se han visto a lo largo de los estudios de Grado.

Finalmente, en el capítulo 4 se estudian aplicaciones del principio del módulo máximo al campo de los desarrollos asintóticos, tanto reales como complejos. Se introducen los desarrollos asintóticos nulos y se analiza la transformada de Borel-Laplace como herramienta fundamental para la reconstrucción de funciones analíticas a partir de series divergentes que representan a aquellas en sentido asintótico. Se establece además una conexión entre la teoría asintótica real y compleja, mostrando cómo conceptos de la teoría de funciones holomorfas pueden aplicarse al análisis de funciones reales. Esta parte del trabajo se ha basado principalmente en el artículo de Augustin Fruchard [5].

A través de todos estos capítulos, se busca mostrar la riqueza de consecuencias que se derivan de un teorema tan central como el del módulo máximo, y cómo sus generalizaciones permiten

abordar problemas más complejos en Análisis y Teoría de Funciones. Lo que comienza como un principio elemental de acotación para funciones holomorfas en dominios acotados, se transforma, mediante herramientas más avanzadas como las funciones subarmónicas o los teoremas de Phragmén-Lindelöf, en una potente maquinaria teórica con aplicaciones en geometría compleja, análisis asintótico e incluso en estimaciones cuantitativas del comportamiento local y global de funciones. Este trabajo pretende no solo recopilar resultados clásicos, sino también ofrecer una visión cohesionada de cómo estos conceptos se interrelacionan y se apoyan entre sí para formar un cuerpo teórico robusto y versátil, con proyecciones hacia otros campos de las matemáticas.

# Capítulo 1

## Funciones subarmónicas

En este capítulo se introduce el concepto de función subarmónica, fundamental para la generalización del teorema del módulo máximo. Para ello, se comienza con un recordatorio de las funciones armónicas, repasando sus propiedades básicas y la resolución del problema de Dirichlet en un disco mediante técnicas de Variable Compleja. A continuación, se define formalmente qué es una función subarmónica, se presentan ejemplos relevantes y se analizan sus propiedades clave. Finalmente, se demuestra el principio generalizado del módulo máximo para funciones subarmónicas, a partir del cual se deducen resultados como el teorema de los tres círculos de Hadamard o el teorema de las dos constantes para un disco. Las referencias principales utilizadas en este capítulo son los textos de Robert B. Ash [3], M. Heins [6], A. I. Markushevich [7] y John B. Conway [4].

### 1.1. Recordatorio de funciones armónicas

En esta sección se repasan brevemente las nociones fundamentales sobre funciones armónicas necesarias para el desarrollo posterior del trabajo, al igual que la demostración del Problema de Dirichlet para un disco con técnicas de Variable Compleja.

El contenido de este apartado se basa en la exposición teórica desarrollada en el libro de Robert B. Ash [3].

**Nota.** De aquí en adelante trabajaremos constantemente con el concepto de *dominio*, que será un conjunto abierto y conexo del plano complejo.

**Definición 1.1.** Una función  $u(x, y)$  real se dice armónica en un dominio  $G$  si las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

existen y son continuas en  $G$ , y además en todo punto de  $G$ ,  $u(x, y)$  satisface la *Ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Además de la definición, cabe destacar que si una función  $u$  es armónica en un dominio  $G$ , entonces  $u$  satisface la *propiedad de la media*, es decir, si  $\Delta(z_0)$  es la distancia entre  $z_0 = (x_0, y_0) \in G$  y la frontera de  $G$  (que podría ser infinita), entonces

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi \quad (1.1)$$

para cada  $0 < \rho < \Delta(z_0)$ .

**Nota.** En la igualdad anterior se ha abusado de la notación, escribiendo  $u(\rho, \varphi)$  para el valor de la función  $u$  en el punto  $(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi)$ . Se seguirá este mismo criterio en los enunciados siguientes cuando se utilicen coordenadas polares con centro en un punto prefijado, dado por el contexto.

Una vez recordada la definición de función armónica, vamos a pasar a otro resultado que usaremos posteriormente, la resolución del Problema de Dirichlet para un disco. Este problema se ha resuelto en el Grado con técnicas de Variable Real, aquí vamos a dar una solución alternativa con herramientas de la Variable Compleja.

Recordemos que el problema en cuestión, en un dominio  $G$  con frontera  $\Gamma$  y para una función real  $\mu(z) = \mu(x, y)$  definida en  $\Gamma$ , busca encontrar una función  $u(x, y)$  que satisfaga que:

- $u(x, y)$  es armónica en  $G$  y continua en  $\overline{G}$ .
- $u(x, y) = \mu(x, y)$  para todo punto  $(x, y) \in \Gamma$ .

Se tiene el siguiente resultado cuando el dominio  $G$  es un disco

**Teorema 1.2** (Problema de Dirichlet para un disco). Sea  $G$  el disco  $|z - z_0| < \rho$  con frontera  $\Gamma : |z - z_0| = \rho$ , y sea  $\mu(\varphi)$  una función real continua en el intervalo  $[0, 2\pi]$  de forma que  $\mu(0) = \mu(2\pi)$ , entonces la función

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi$$

definida para todo punto  $(r, \theta)$  en  $G$  y con  $u(\rho, \varphi) = \mu(\varphi)$  para todo punto  $(\rho, \varphi)$  en  $\Gamma$ , resuelve el problema de Dirichlet para el dominio  $G$ .

Haremos la demostración de este teorema para el disco abierto unidad  $B(0, 1)$ , de centro 0 y radio 1, y después generalizaremos para un disco arbitrario. La circunferencia unidad se denotará por  $C(0, 1)$ .

**Teorema 1.3** (Problema de Dirichlet en el disco unidad). Supongamos que  $u_0$  es una función real continua en  $C(0, 1)$ . Definimos una función  $u$  en el disco cerrado  $\overline{B}(0, 1)$  por

$$u(z) = \begin{cases} u_0(z) & \text{si } |z| = 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(t) u_0(e^{it}) dt & \text{si } |z| < 1, \end{cases}$$

donde

$$P_z(t) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}.$$

Entonces  $u$  es continua en  $\overline{B}(0, 1)$  y armónica en  $B(0, 1)$ . Además, como  $P_z$  es la parte real de

$$Q_z(t) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$$

para  $z \in B(0, 1)$ , se tiene que

$$u(z) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_z(t) u_0(e^{it}) dt \right].$$

En particular, la función continua  $u_0$  en  $C(0, 1)$  tiene una extensión continua a  $\overline{B}(0, 1)$  que es armónica en  $B(0, 1)$ , y esta extensión es única.

**Demostración.**

Tenemos que  $\varphi(z, t) = Q_z(t)u_0(e^{it})$  es continua en  $B(0, 1) \times [0, 2\pi]$  ya que es composición de funciones continuas en este conjunto, y para cada  $t$  fijo  $\varphi(z, t)$  es analítica en  $B(0, 1)$ . Entonces,

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_z(t)u_0(e^{it}) dt$$

es, por el teorema de holomorfía bajo el signo integral, analítica en  $B(0, 1)$ . Por tanto, como  $u$  es la parte real de esta función,  $u$  es armónica y continua en  $B(0, 1)$ .

Entonces lo único que nos faltaría por ver es que  $u$  es continua en los puntos de la frontera  $C(0, 1)$ .

Vamos a ver que

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = u_0(e^{i\theta}) \quad \text{uniformemente en } \theta.$$

Vamos a tomar para esto dos números reales  $\theta$  y  $r$  con  $r \in (0, 1)$  y vamos a ver algunas propiedades de  $P_z$ .

Primero tenemos que

$$P_{re^{i\theta}}(t) = \frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|} = \frac{1 - r^2}{|e^{i(t-\theta)} - r|^2} = P_r(t - \theta)$$

y

$$\int_0^{2\pi} P_z(t) dt = 2\pi.$$

Y también usaremos la propiedad de que  $P_r$  es una función par, propiedad fácil de ver simplemente desarrollando el denominador,

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{|e^{ix} - r|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x) + r^2}.$$

Podemos ahora escribir la siguiente igualdad

$$u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta)[u_0(e^{it}) - u_0(e^{i\theta})] dt. \quad (1.2)$$

Ahora para centrar la integral en  $\theta$  hacemos el cambio de variable  $x = t - \theta$ . La integral de (1.2) por tanto, pasa entonces a ser

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{2\pi-\theta} P_r(x)[u_0(e^{i(\theta+x)}) - u_0(e^{i\theta})] dx \quad (1.3)$$

y como el integrando es  $2\pi$ -periódico, podemos cambiar los límites de integración a  $-\pi$  y  $\pi$ .

Ahora fijamos un  $\delta$  con  $0 < \delta < \pi$  y ponemos (1.3) como la suma de tres integrales como sigue

$$\begin{aligned} (1.3) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)[u_0(e^{i(\theta+x)}) - u_0(e^{i\theta})] dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(x)[u_0(e^{i(\theta+x)}) - u_0(e^{i\theta})] dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(x)[u_0(e^{i(\theta+x)}) - u_0(e^{i\theta})] dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Podemos ahora estimar cada una de estas integrales:

- La **segunda** y la **tercera** integral las estudiaremos juntas ya que  $P_r(-x) = P_r(x)$ . Además, como  $P_r(x)$  es positiva y decreciente en  $[0, \pi]$ , tenemos que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(x) [u_0(e^{i(\theta+x)}) - u_0(e^{i\theta})] dx \right| \leq \sup\{|u_0(e^{it})| : -\pi \leq t \leq \pi\} \cdot P_r(\delta)$$

por tanto, podemos acotar la suma de la primera y la tercera integral por

$$2P_r(\delta) \cdot \sup\{|u_0(e^{it})| : -\pi \leq t \leq \pi\}.$$

- En cuanto a la **primera** integral, esta podemos acotarla en valor absoluto por

$$\sup\{|u_0(e^{i(\theta+x)}) - u_0(e^{i\theta})| : -\delta \leq x \leq \delta\}$$

ya que si  $|z| < 1$ , entonces  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(t) dt = 1$ .

Para un  $\delta > 0$  fijo,  $P_r(\delta) \rightarrow 0$  cuando  $r$  tiende a 1, mientras que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup\{|u_0(e^{i(\theta+x)}) - u_0(e^{i\theta})| : -\delta \leq x \leq \delta\}) = 0 \quad \text{uniformemente en } \theta$$

ya que  $u_0$  es uniformemente continua en el compacto  $C(0, 1)$ .

Finalmente, si juntamos todo, tenemos que para un  $\varepsilon > 0$  dado, existe un  $r_0$  con  $0 < r_0 < 1$ , tal que para  $r_0 < r < 1$  y todo  $\theta$

$$|u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta})| < \varepsilon.$$

Esto unido a la continuidad de  $u_0$  en  $C(0, 1)$  nos da que  $u$  es continua en todo punto de  $C(0, 1)$ .

Para ver la unicidad de la solución basta con considerar 2 soluciones  $u_1, u_2$  en  $\overline{B}(0, 1)$  con función  $u_0$  en la frontera. Tenemos entonces que  $u_1 - u_2$  es continua en  $\overline{B}(0, 1)$ , y se anula en  $C(0, 1)$ . Como además tanto  $u_1$  como  $u_2$  son la parte real de una función semejante a la definida en el enunciado del teorema, y estas dos funciones son holomorfas en  $B(0, 1)$ , entonces  $u_1 - u_2$  es la parte real de una función holomorfa en  $B(0, 1)$ .

Podemos en estas condiciones afirmar (debido al primer resultado del apéndice) que  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo y su mínimo en la frontera de  $B(0, 1)$ , es decir, en  $C(0, 1)$ , y como  $u_1 - u_2$  es nula en  $C(0, 1)$ , tenemos que

$$0 \leq u_1 - u_2 \leq 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \equiv 0$$

en  $\overline{B}(0, 1)$ . Lo que implica que  $u_1 \equiv u_2$ , por lo que la solución al problema de Dirichlet es única.  $\square$

**Nota.** Se deduce entonces de este teorema que si  $G$  es el disco  $|z - z_0| < \rho$  con frontera  $\Gamma : |z - z_0| = \rho$ , y dada  $\mu(\varphi)$ , una función real continua en el intervalo  $[0, 2\pi]$  de forma que  $\mu(0) = \mu(2\pi)$ , entonces la función

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi$$

definida para todo punto  $(r, \theta)$  en  $G$  y con  $u(\rho, \varphi) = \mu(\varphi)$  para todo punto  $(\rho, \varphi)$  en  $\Gamma$ , resuelve el problema de Dirichlet para el dominio  $G$ , con lo que tendríamos demostrado el teorema (1.2), veamos esto.

Tenemos que en  $B(0, 1)$  la solución del problema de Dirichlet es

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(t) u_0(e^{it}) dt \quad \text{con } P_z(t) = \frac{1 - |z|}{|e^{it} - z|},$$

y queremos generalizar esto a  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$  con frontera  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ . Si  $z \in G$  y  $\xi \in \Gamma$ , podemos escribirlos como

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad r < \rho \quad \text{y} \quad \xi = z_0 + \rho e^{i\varphi}.$$

Si escribimos ahora  $Q_z(t)$  para este caso

$$Q_z(t) = \frac{\rho e^{it} + z}{\rho e^{it} - z},$$

y calculando su parte real

$$P_z(t) = \frac{\rho^2 - r^2}{|\xi - z|^2}.$$

Vamos a desarrollar el denominador de la expresión anterior

$$\begin{aligned} |\xi - z|^2 &= |z_0 + \rho e^{i\varphi} - z_0 - \rho e^{i\theta}|^2 \\ &= |\rho e^{i\varphi} - \rho e^{i\theta}|^2 \\ &= (\rho e^{i\varphi} - \rho e^{i\theta})(\rho e^{-i\varphi} - \rho e^{-i\theta}) \\ &= \rho^2 + \rho^2 - \rho^2(e^{i(\varphi-\theta)} + e^{i(\theta-\varphi)}) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\cos(\varphi - \theta) + \cos(\theta - \varphi) = 2 \cos(\varphi - \theta) \quad \text{y} \quad \sin(\varphi - \theta) + \sin(\theta - \varphi) = 0$$

concluimos que

$$|\xi - z|^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta).$$

Por tanto, en  $G$ , la función  $P_z(t)$  es

$$P_z(t) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)},$$

y sustituyendo entonces en la función  $u(z)$  tendremos demostrada la nota.

Es sencillo comprobar, como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy, que una función armónica en un disco satisface la *propiedad de la media* indicada en el siguiente resultado. Probaremos que, de hecho, ambos asertos son equivalentes para una función continua.

**Teorema 1.4.** Sea  $\varphi$  una función real y continua en  $\Omega$  de modo que, para todo  $\overline{B}(z_0, R) \subseteq \Omega$ , se cumple que

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + Re^{it}) dt.$$

Entonces  $\varphi$  es armónica en  $\Omega$ .

**Demostración.**

Sea  $B(z_0, R)$  un disco con  $\overline{B}(z_0, R) \subseteq \Omega$ . Sea  $u_0$  la restricción de  $\varphi$  a  $C(z_0, R)$ , usamos el problema de Dirichlet en el disco  $B(z_0, R)$  para obtener una función  $u$  continua en  $\overline{B}(z_0, R)$  tal que  $u = u_0 = \varphi$  en  $C(z_0, R)$ .

La función  $\varphi - u$  es continua en  $\overline{B}(z_0, R)$ , entonces tiene que tener un máximo y un mínimo, que se alcanzarán respectivamente en puntos  $z_1$  y  $z_2$ . Si ambos pertenecen a  $C(z_0, R)$ , entonces, como  $\varphi = u$  en  $C(z_0, R)$ , tenemos que dichos máximo y mínimo son nulos y entonces  $\varphi - u \equiv 0$  en  $\overline{B}(z_0, R)$  con lo que concluiríamos que  $\varphi = u$  en  $\overline{B}(z_0, R)$ .

En caso contrario, supongamos que el máximo  $z_1 \in B(z_0, R)$ , en este caso definimos el siguiente conjunto

$$A := \{z \in B(z_0, R) : (\varphi - u)(z) = (\varphi - u)(z_1)\}.$$

Como  $z_1 \in A$ ,  $A$  no es vacío. Tenemos que  $A$  es cerrado en  $B(z_0, R)$ , ya que  $\varphi - u$  es continua en  $B(z_0, R)$ . Si conseguimos ver que  $A$  es abierto, entonces, como  $B(z_0, R)$  es conexo, se daría que  $A = B(z_0, R)$ .

Tomamos para ello un  $a \in A$  y un  $r > 0$  de forma que  $\overline{B}(a, r) \subseteq B(z_0, R)$ , entonces, para  $0 < \rho < r$  como  $u$  es armónica en  $B(z_0, R)$ ,

$$\varphi(a) - u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi(a + \rho e^{it}) - u(a + \rho e^{it})) dt.$$

Por cómo hemos elegido  $a$ , tenemos que  $(\varphi - u)(a + \rho e^{it}) \leq (\varphi - u)(a)$ , entonces

$$0 \leq \int_0^{2\pi} (\varphi - u)(a) - (\varphi - u)(a + \rho e^{it}) dt = 2\pi(\varphi - u)(a) - \int_0^{2\pi} (\varphi - u)(a + \rho e^{it}) dt = 0,$$

y como  $(\varphi - u)$  es continua en  $B(a, r)$ , concluimos que  $(\varphi - u)$  es constante e igual a  $(\varphi - u)(a)$  en  $C(a, \rho)$  y, por ser  $\rho$  arbitrario, en todo  $B(a, r) \subseteq A$ .

Con esto concluimos que  $A$  es abierto, por tanto  $A = B(z_0, R)$  y  $(\varphi - u)$  es constante en  $\overline{B}(z_0, R)$ . Como  $(\varphi - u) = 0$  en  $C(z_0, R)$ ,  $\varphi$  es idéntica a  $u$  en  $\overline{B}(z_0, R)$ .

Por tanto, si el máximo está en  $B(z_0, R)$ , y análogamente si el mínimo está en  $B(z_0, R)$ , tenemos que  $\varphi \equiv u$  en  $B(z_0, R)$ .

Como hemos visto que  $\varphi = u$  en cualquier disco arbitrario de  $\Omega$  y  $u$  es armónica, entonces  $\varphi$  es armónica en  $\Omega$ .

□

Como el carácter armónico es una propiedad local, se puede dar la siguiente versión del resultado anterior.

**Teorema 1.5.** Sea  $u(x, y)$  una función real continua en un dominio  $G$ , y supongamos que  $u(x, y)$  satisface la condición

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi$$

para cada punto  $z_0 = (x_0, y_0) \in G$  y para todo  $\rho$  suficientemente pequeño. Entonces,  $u(x, y)$  es armónica en  $G$ .

## 1.2. Funciones subarmónicas

En esta sección se va a introducir la definición de *función subarmónica* y se presentarán algunas de sus propiedades fundamentales, junto con algunos ejemplos. Además, se presentarán algunos resultados clave que nos servirán como herramientas en los siguientes capítulos.

La información de este apartado ha sido recopilada a partir de los libros de M. Heins [6] y A. I. Markushevich [7].

**Definición 1.6.** Siendo  $G$  un dominio, se dice que una función  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(z) = h(x, y)$  es *subarmónica* en  $G$  si tiene las siguientes propiedades:

1.  $h(z)$  está bien definida y es continua en  $G \setminus A$  donde  $A \subset G$  no tiene puntos de acumulación, es decir,  $A' \cap G = \emptyset$ . Para los puntos  $z_0 \in A$  se cumple que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = -\infty, \quad (1.5)$$

y, por convención, definimos

$$h(z_0) := -\infty.$$

2. Siendo  $z_0$  un punto de  $G$ , entonces definimos  $\Delta(z_0) > 0$  como la distancia entre  $z_0$  y la frontera de  $G$ . Entonces para cada  $z_0 \in G$  y cada  $0 < \rho < \Delta(z_0)$  suficientemente pequeño existe la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi$$

y se cumple la desigualdad

$$h(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (1.6)$$

Si consideramos  $d(z_0, A)$ , la distancia desde  $z_0$  al conjunto  $A$ , entonces para los puntos  $z_0$  que no pertenecen a  $A$ , el valor que puede tomar  $\rho$  está limitado por  $d(z_0, A)$ . Y en el caso de que  $z_0 \in A$ , entonces  $\rho$  será menor que  $d(z_0, A \setminus \{z_0\})$ .

**Nota.** Esta no es la definición más general de una función subarmónica, pero es suficiente para el propósito de este trabajo.

**Ejemplo 1.7.** Para cada función  $u(z) = u(x, y)$  armónica en un dominio  $G$  la desigualdad (1.6) se convierte en una igualdad

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Por tanto, de acuerdo con nuestra definición, toda función armónica es subarmónica, veámos esto.

Sea  $u(z) = u(x, y)$  una función armónica en  $G$ , consideramos dos radios  $r$  y  $R$  de forma que  $r < R < \Delta(z_0)$ . Sabemos que entonces  $B(z_0, R)$  es un dominio estrellado y que está contenido en  $G$ , por lo que podemos en este caso afirmar que  $u(z)$  es la parte real de una función  $f \in \mathcal{H}(B(z_0, R))$ .

Como  $r < R$  entonces  $\overline{B(z_0, r)} \subset B(z_0, R)$ , por tanto, podemos aplicar la propiedad de la media a  $f$  y deducir que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi$$

y tomando partes reales llegamos a que

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

**Ejemplo 1.8.** Si  $f(z)$  es analítica en un dominio  $G$  conexo, entonces  $|f(z)|$  es subarmónica en  $G$ . De hecho

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\varphi})| d\varphi \quad (1.7)$$

para cada  $z_0 \in G$  y todo  $\rho$  suficientemente pequeño. Además, se da la igualdad en (1.7) si y solo si  $f(z)$  es constante, veamos esto.

Primero supongamos que  $f$  es constante, entonces se tiene que  $f(z_0) = f(z)$  para todo  $z \in G$ , ya que  $G$  es conexo, en particular  $f(z_0) = f(z_0 + \rho e^{i\varphi})$ , por tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\varphi})| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\varphi = |f(z_0)| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = |f(z_0)|.$$

Ahora suponemos que se cumple la igualdad (1.7) para todo  $z_0 \in G$  y todo  $\rho$  suficientemente pequeño. En el caso de que  $|f(z_0)| = 0$ , para algún  $z_0$ , entonces como  $|f(z)|$  es continua en  $G$ ,  $|f(z)| \geq 0$  y

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\varphi})| d\varphi = 0,$$

tenemos que  $|f| \equiv 0$ , lo que implica que  $f \equiv 0$  en  $G$ . En el caso de que  $|f(z_0)| \neq 0$  entonces tenemos que como  $|f|$  es continua en  $\overline{B}(z_0, \rho)$ , alcanza un máximo en  $\overline{B}(z_0, \rho)$ . Sea  $z_1$  ese máximo y  $\rho_1 > 0$  de forma que se cumpla la igualdad en (1.7), entonces  $|f(z_1)| \geq |f(z_1 + \rho e^{i\varphi})|$  para todo  $\varphi$ , o escrito de otra forma

$$\frac{|f(z_1 + \rho e^{i\varphi})|}{|f(z_1)|} \leq 1,$$

entonces

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{|f(z_1 + \rho e^{i\varphi})|}{|f(z_1)|}\right) d\varphi = 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_1 + \rho e^{i\varphi})|}{|f(z_1)|} d\varphi \leq 0.$$

Por lo que  $|f(z_1 + \rho e^{i\varphi})| = |f(z_1)|$  para todo  $\varphi$ , pero como esto se cumple para todo  $\rho \leq \rho_1$ , entonces  $|f(z)| = |f(z_1)|$  en  $\overline{B}(z_1, \rho_1)$ , y como  $f$  es continua,  $f(z_1) \neq 0$  y  $\overline{B}(z_1, \rho_1)$  es conexo, tenemos que  $f(z) = f(z_1)$  en  $\overline{B}(z_1, \rho_1)$ . Por el principio de identidad y como  $G$  es conexo concluimos que  $f$  es constante en  $G$ .

Por tanto  $|f(z)|$  es subarmónica pero no armónica en  $G$  a menos que  $f(z)$  sea constante.

**Ejemplo 1.9.** Sea  $f$  una función analítica no idénticamente nula en un dominio  $G$ , llamemos  $A$  al conjunto de ceros de  $f$ , entonces  $\ln |f(z)|$  es subarmónica en  $G$ , de hecho  $\ln |f(z)|$  es armónica en  $G \setminus A$ . Veamos esto.

Como  $f$  es analítica en  $G$  y  $G$  es conexo, entonces por el principio de los ceros aislados podemos afirmar que  $A$  no tiene puntos de acumulación en  $G$ , es decir,  $A' \cap G = \emptyset$ .

Tenemos ahora que  $\ln |f|$  es continua en  $G \setminus A$ , ya que es composición de funciones continuas, y tenemos que si  $a \in A$ ,

$$\lim_{z \rightarrow a} \ln |f(z)| = -\infty$$

por tanto podemos definir  $\ln |f(a)| := -\infty$  para todo  $a \in A$ .

Si ahora  $z_0$  no es un cero de  $f$ , entonces, tomando un  $\rho > 0$  suficientemente pequeño (con  $\rho < d(z_0, A)$ ) y dado que  $f$  es continua en  $G$ ,  $f$  no se anulará en  $B(z_0, \rho)$ , que es simplemente conexo. Entonces,  $f$  admite un logaritmo analítico  $g$  en dicho disco, cuya parte real será necesariamente  $\ln |f(z)|$  y es naturalmente armónica. Podemos aplicar la propiedad del valor medio y deducir que

$$\ln |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + \rho e^{i\varphi})| d\varphi.$$

En cambio, si  $z_0$  es un punto de  $A$ , en este caso  $\rho$  solo podrá tomar valores menores a  $d(z_0, A \setminus \{z_0\})$ , y como por definición  $\ln |f(z_0)| = -\infty$ , entonces se da que

$$\ln |f(z_0)| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + \rho e^{i\varphi})| d\varphi.$$

Por lo que concluimos que  $\ln |f(z)|$  es subarmónica en  $G \setminus A$ .

Una vez vistos estos ejemplos, vamos a pasar a ver algunos resultados.

**Lema 1.10.** Sea  $h(z)$  una función real definida en un dominio acotado  $G$ , y sea

$$\sup_{z \in G} h(z) = M \tag{1.8}$$

pudiendo  $M$  ser infinito. Entonces existe al menos un punto  $\xi \in \overline{G}$  con

$$\sup_{z \in \mathcal{N}(\xi) \cap G} h(z) = M \tag{1.9}$$

para cada entorno  $\mathcal{N}(\xi)$  de  $\xi$ .

**Demostración.**

Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que el lema es falso. En este caso, todo punto  $\xi \in \overline{G}$  tiene un entorno  $\mathcal{N}(\xi)$  tal que

$$M(\xi) := \sup_{z \in \mathcal{N}(\xi) \cap G} h(z) < M.$$

De acuerdo con el teorema de *Heine-Borel* tenemos que  $\overline{G}$  es compacto (es cerrado y es acotado), por tanto existe un número finito de puntos  $z_1, \dots, z_n \in \overline{G}$  tal que, si  $\mathcal{N}(z_i)$  es el entorno anterior de  $z_i$ , entonces

$$\overline{G} \subset \mathcal{N}(z_1) \cup \dots \cup \mathcal{N}(z_n).$$

Ahora si tomamos

$$M_0 = \max\{M(z_1), \dots, M(z_n)\}$$

siendo

$$M(z_i) := \sup_{z \in \mathcal{N}(z_i) \cap G} h(z)$$

entonces

$$\sup_{z \in \overline{G}} h(z) = M_0 < M$$

en contra de (1.8). Esta contradicción prueba el lema. □

A continuación vamos a ver un resultado que nos servirá como herramienta básica en nuestra investigación sobre las funciones subarmónicas, pero antes vamos a recordar la definición de límite superior y algunas de sus propiedades.

**Definición 1.11.** Sea  $G \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto, y sea  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Sea  $\xi \in \mathbb{C}$  un punto de acumulación de  $G$ . Entonces, el *límite superior* de  $f$  cuando  $z$  tiende a  $\xi$  se define como:

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} f(z) := \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) : z_n \in G, z_n \rightarrow \xi \right\},$$

donde el superior se toma sobre todos los límites reales posibles de sucesiones  $\{z_n\}$  en  $G$  tales que  $z_n$  tiende a  $\xi$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El límite superior, cuando es finito, satisface las siguientes dos propiedades:

- Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un entorno  $\mathcal{N}(\xi)$  de  $\xi$  tal que

$$f(z_0) < \limsup_{z \rightarrow \xi} f(z) + \varepsilon$$

para todo  $z_0 \in \mathcal{N}(\xi) \cap G$ .

- Para todo  $\varepsilon > 0$  se puede encontrar una sucesión  $\{z_n\}$  con  $z_n \rightarrow \xi$  de forma que

$$f(z_n) > \limsup_{z \rightarrow \xi} f(z) - \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una vez recordada la definición y las propiedades del límite superior, vamos a ver el siguiente resultado.

**Lema 1.12.** Sea  $h(z)$  subarmónica en un dominio acotado  $G$  con frontera  $\Gamma$ . Suponemos que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} h(z) \leq 0 \tag{1.10}$$

para todo  $\xi \in \Gamma$ . En este caso se cumple que

$$h(z) \leq 0$$

para todo  $z \in G$ . Además, si  $h(z_0) = 0$  para algún punto  $z_0 \in G$  entonces

$$h(z) \equiv 0$$

**Demostración.**

Sea

$$\sup_{z \in G} h(z) = M$$

y sea  $E$  el conjunto de todos los puntos  $\xi \in \overline{G}$  tal que se cumple (1.9), es decir,

$$E = \{\xi \in \overline{G} / \sup_{z \in \mathcal{N}(\xi) \cap G} h(z) = M, \text{ siendo } \mathcal{N}(\xi) \text{ un entorno arbitrario de } \xi\}$$

De acuerdo con el lema 1.10,  $E$  no es vacío.

- Suponemos primero que ningún punto interior de  $G$  pertenece a  $E$ . Entonces  $E$  contiene al menos un punto  $\xi_0 \in \Gamma$ . Si tenemos en cuenta la primera propiedad vista para los límites superiores y debido a (1.10), podemos afirmar que para todo  $\varepsilon > 0$ , hay un entorno  $\mathcal{N}(\xi_0)$  de  $\xi_0$  en el que  $h(z) < \varepsilon$  para todo punto  $z \in \mathcal{N}(\xi_0)$ .

Por una parte entonces

$$\sup_{z \in \mathcal{N}(\xi_0) \cap G} h(z) \leq \varepsilon$$

mientras que por otra parte, por cómo hemos tomado  $E$ ,

$$\sup_{z \in \mathcal{N}(\xi_0) \cap G} h(z) = M \tag{1.11}$$

debido a que  $\xi_0 \in E$ .

Por tanto de esto deducimos que  $M \leq \varepsilon$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , lo que implica que  $M \leq 0$ , y como  $h(z) < M$  en todo punto de  $G$  por hipótesis, queda probado el lema en el caso de que  $E$  no tenga puntos interiores a  $G$ . (Nótese que en este caso no tiene sentido contemplar el caso en el que  $h(z_0) = 0$  para algún  $z \in G$ ).

- Ahora supongamos que  $E$  contiene puntos de  $G$  y consideramos  $E_G = E \cap G$ . Entonces como la función subarmónica  $h(z)$  es (en sentido amplio) continua en  $G$ ,  $h(z)$  debe ser igual a  $M$  en todos los puntos de  $E_G$ . De hecho, todo punto  $z_0 \in G$  para el cual se cumpla que  $h(z_0) < M$ , tiene un entorno  $\mathcal{N}(z_0)$  para el que  $h(z) < M - \delta$  para algún  $\delta > 0$ , y por tanto no se puede cumplir (1.9) en ese punto. En particular, como  $M$  es un valor que toma la función subarmónica  $h(z)$  en algún punto de  $G$ , se sigue que  $M < \infty$ .

Por otra parte, ya que una función subarmónica solo toma el valor  $-\infty$  por definición en los puntos de un conjunto  $A$  discreto en  $G$ , podemos afirmar razonando por continuidad que  $M > -\infty$ .

Ahora veremos que  $E_G$  es un conjunto abierto. Sea  $z_0 \in E_G$ , sea  $\rho_0 > 0$  tal que la desigualdad

$$M = h(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi \quad (1.12)$$

se cumpla para todo  $0 < \rho < \rho_0$  (la existencia de este  $\rho_0$  viene garantizada ya que  $h(z)$  es subarmónica). Entonces el disco  $|z - z_0| < \rho_0$  no contiene puntos en los que  $h(z) < M$ . De hecho, si  $z_1$  fuera un punto en el que  $h(z_1) < M$ , entonces, tendría un entorno en el que  $h(z) < M - \delta$  para algún  $\delta > 0$ , y por lo tanto para  $\rho = |z_1 - z_0|$  la integral (1.12) sería menor que  $M$ , lo que sería imposible.

**Nota.** Para ver que la integral sería menor que  $M$  basta considerar la circunferencia

$$\gamma_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\}$$

por la definición de  $\rho$ , tenemos que  $z_1 \in \gamma_\rho$ . Dividimos ahora  $[0, 2\pi]$  en

$$\gamma_A = \{\theta \in [0, 2\pi] : h(z_0 + \rho e^{i\theta}) < M\} \quad \text{y} \quad \gamma_B = \{\theta \in [0, 2\pi] : h(z_0 + \rho e^{i\theta}) = M\}.$$

Sabemos que  $\gamma_A$  tiene interior no vacío. En este caso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\gamma_A} h(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi + \int_{\gamma_B} h(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi \right) \\ &< \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\gamma_A} M d\varphi + \int_{\gamma_B} M d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} M \left( \int_{\gamma_A} d\varphi + \int_{\gamma_B} d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} M \int_0^{2\pi} d\varphi = M. \end{aligned}$$

Por tanto todo punto  $z_0 \in E_G$  tiene un entorno  $\mathcal{N}(z_0)$  en el que  $h(z) = M$ , es decir,  $\mathcal{N}(z_0) \subset E_G$ , con lo que podemos afirmar que  $E_G$  es abierto. Además, supongamos que  $z' \in G$  es un punto de acumulación de  $E_G$ , como  $h(z) = M$  para todo punto  $z \in E_G$ , y como  $h(z)$  es continua en  $E_G \subset G$ , entonces  $h(z')$  debe ser igual a  $M$ , por lo que  $z' \in E_G$ .

Como  $G$  es conexo, y  $E_G$  es un subconjunto abierto no vacío de  $G$  con la propiedad de que todo punto de acumulación de  $E_G$  que pertenece a  $G$  también pertenece a  $E_G$ , entonces  $E_G = G$ , por lo que  $h(z) \equiv M$ . Pero entonces

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} h(z) = \lim_{z \rightarrow \xi} h(z) = M$$

para todo punto de la frontera  $\xi \in \Gamma$ , donde  $M \leq 0$  debido a (1.10). Con lo que queda probado el lema para el caso en el que  $E$  contenga algún punto interior de  $G$ .

Además, si  $h(z_0) = 0$  en algún punto  $z_0 \in G$ , entonces  $M = 0$  y se da que  $h(z) \equiv 0$ . Esto completa la prueba del lema.

□

Una consecuencia del lema 1.12 es el Principio generalizado del módulo máximo, que se verá en la siguiente sección.

### 1.3. Generalización del principio del módulo máximo y sus aplicaciones

En esta sección se va a presentar una extensión del Principio del módulo máximo para funciones subarmónicas. A partir de este resultado podremos deducir diversas aplicaciones, como el Teorema de los tres círculos de Hadamard y el Teorema de las dos constantes para un disco. Estos resultados nos permitirán estimar el crecimiento de funciones analíticas en distintos dominios. A parte de los libros utilizados en secciones anteriores, también se usará como fuente de información el libro de John B. Conway [4].

Hablando en términos generales, el teorema siguiente afirma que una función armónica  $u(z)$  que *mayoriza* una función subarmónica  $h(z)$  (es decir, es mayor que  $h(z)$ ) en todos los puntos excepto un número finito de puntos de la frontera de un dominio  $G$ , también mayoriza  $h(z)$  en todos los puntos de  $G$  en sí.

**Teorema 1.13** (Principio generalizado del módulo máximo). Sea  $h(z) = h(x, y)$  una función subarmónica en un dominio  $G$  con frontera  $\Gamma$ , y sea  $u(z) = u(x, y)$  una función armónica en  $G$ . Suponemos que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} [h(z) - u(z)] \leq 0 \quad (1.13)$$

para todo  $\xi \in \Gamma$  excepto posiblemente para un número finito de puntos  $\xi_1, \dots, \xi_n$  donde

$$\limsup_{z \rightarrow \xi_k} [h(z) - u(z)] < +\infty. \quad (1.14)$$

Entonces  $u(z)$  es un *mayorante armónico* de  $h(z)$  en  $G$ , es decir

$$h(z) \leq u(z)$$

para todo  $z \in G$ . Además, si  $h(z_0) = u(z_0)$  para cualquier punto  $z_0 \in G$ , entonces

$$h(z) \equiv u(z).$$

#### Demostración.

Consideremos las funciones

$$v_k(z) = \ln |z - \xi_k| \quad (k = 1, \dots, n).$$

Cada función  $v_k(z)$  es localmente la parte real de un logaritmo analítico de  $(z - \xi_k)$ , que no se anula en  $G$ , por lo que  $v_k(z)$  es armónica en  $G$ . Además, como es estándar, definiremos

$$v_k(\xi_k) := -\infty \quad (k = 1, \dots, n).$$

Si ahora tomamos  $R = \text{diam}(G)$ , entonces

$$v_k(z) \leq \ln R \quad (z \in \overline{G})$$

para cada función  $v_k(z)$ . Por lo tanto, las funciones

$$u_k(z) = v_k(z) - \ln R \quad (k = 1, \dots, n)$$

no pueden tomar valores positivos en  $\overline{G}$ , pero, por lo demás, tienen las mismas propiedades que las funciones  $v_k(z)$ .

Ahora sea  $\varepsilon$  un parámetro positivo, el cual será hecho tender a cero, y consideremos la función

$$d_\varepsilon(z) = h(z) - u(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^n u_j(z).$$

Dado cualquier punto  $z_0 \in G$ , como  $h(z)$  es subarmónica entonces para cualquier  $\rho$  suficientemente pequeño se tiene que

$$h(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi,$$

mientras que, como tanto  $u(z)$  como cada  $u_k(z)$  son armónicas, se da para estas funciones que para cualquier  $\rho$  suficientemente pequeño

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi \quad \text{y} \quad u_k(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que para cualquier  $\rho$  suficientemente pequeño

$$d_\varepsilon(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d_\varepsilon(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi,$$

por lo que  $d_\varepsilon(z)$  es subarmónica en  $G$ . Además, para cada punto de acumulación  $\xi$  de la frontera que sea distinto de cualquier  $\xi_k$  con  $k = 1, \dots, n$ ,  $d_\varepsilon(z)$  satisface la relación

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} d_\varepsilon(z) = \limsup_{z \rightarrow \xi} \left[ h(z) - u(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^n u_j(z) \right] \leq 0, \quad (1.15)$$

mientras que para cada punto de acumulación  $\xi = \xi_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  se cumple que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi_k} d_\varepsilon(z) = -\infty \leq 0$$

ya que las funciones  $h(z) - u(z)$  y  $u_j(z)$ ,  $j \neq k$ , están acotadas superiormente en un entorno de  $\xi_k$ , mientras que  $u_k(z) \rightarrow -\infty$  cuando  $z \rightarrow \xi_k$ .

Podemos entonces en estas condiciones aplicar el lema 1.12 a la función  $d_\varepsilon(z)$ , y así podemos afirmar que

$$d_\varepsilon(z) \leq 0 \quad (z \in G) \quad \Rightarrow \quad h(z) \leq u(z) - \varepsilon \sum_{j=1}^n u_j(z).$$

Y dejando que  $\varepsilon$  tienda a cero, obtenemos

$$h(z) \leq u(z) \quad (z \in G),$$

de modo que  $u(z)$  es un mayorante armónico de  $h(z)$  en  $G$ , como se afirmó.

Finalmente, observemos que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} [h(z) - u(z)] \leq 0$$

para cada  $\xi \in \Gamma$ , incluidos los puntos excepcionales  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Además, por el lema 1.12, si se da que

$$h(z_0) - u(z_0) = 0$$

para cualquier punto  $z_0 \in G$ , entonces  $h(z) - u(z) = 0$  para todo  $z \in G$ , es decir,

$$h(z) \equiv u(z)$$

y el teorema está demostrado. □

**Nota.** Al permitir puntos excepcionales donde la condición (1.13) no se sostenga, anticipamos aplicaciones subsecuentes del Teorema 1.13. El hecho de que los puntos excepcionales deban cumplir la condición (1.14) para que el teorema sea cierto se muestra mediante el ejemplo del núcleo de Poisson

$$P(r, \theta) = \frac{\rho^2 - r^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \theta_0)},$$

que es armónica y por lo tanto subarmónica en el disco  $|z| < \rho$ , y satisface la condición

$$\lim_{(r, \theta) \rightarrow (\rho, \varphi)} P(r, \theta) = 0$$

en cada punto de la circunferencia  $\gamma_\rho : |z| = \rho$ , excepto en el punto  $z = \rho e^{i\theta_0}$ . Por lo tanto,  $P(r, \theta)$  es mayorizada por la función armónica  $u(r, \theta) = 0$  en todos los puntos de  $\gamma_\rho$  excepto en  $z = \rho e^{i\theta_0}$ . Sin embargo,

$$P(r, \theta) > 0 = u(r, \theta)$$

para todo  $z \in B(0, \rho)$ . La explicación radica en el hecho de que  $P(r, \theta)$  toma valores arbitrariamente grandes cerca del punto  $z = \rho e^{i\theta_0}$ , y por lo tanto ni la función que es idénticamente cero ni ninguna otra función acotada pueden mayorizar  $P(r, \theta)$  en  $\gamma_\rho$ .

Veamos ahora un resultado que se deduce como consecuencia inmediata del teorema 1.13.

**Corolario 1.14.** Sea  $f(z)$  analítica en un dominio acotado  $G$  con frontera  $\Gamma$ , y supongamos que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} |f(z)| \leq M < \infty$$

para todo  $\xi \in \Gamma$  excepto para un número finito de puntos  $\xi_1, \dots, \xi_n$  donde

$$\limsup_{z \rightarrow \xi_k} |f(z)| < \infty.$$

Entonces  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in G$ . Además, si  $|f(z_0)| = M$  para un punto cualquiera  $z_0 \in G$ , entonces

$$f(z) \equiv M.$$

**Demostración.**

Para la demostración basta tomar  $h(z) = |f(z)|$  (función que ya habíamos visto que es subarmónica en un ejemplo anterior) y  $u(z) \equiv M$  y aplicar el principio del módulo máximo generalizado. □

A continuación vamos a demostrar un resultado que nos va a servir como núcleo técnico para la demostración del Teorema de los tres círculos de Hadamard.

**Teorema 1.15** (Teorema de convexidad logarítmica en bandas verticales). Sea  $f$  una función analítica y acotada en una banda vertical infinita

$$G = \{x + iy \in \mathbb{C} : a < x < b\} \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{R},$$

y además continua en  $\overline{G}$ . Definimos entonces

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|.$$

En este caso, la función  $\ln M(x)$  es convexa en  $x \in [a, b]$ , es decir, para todo  $x \in [a, b]$  se cumple que

$$\ln M(x) \leq \ln M(a) \frac{b-x}{b-a} + \ln M(b) \frac{x-a}{b-a}.$$

**Demostración.**

Para empezar la demostración construiremos la función auxiliar

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} \cdot M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}.$$

Si calculamos su módulo

$$|g(z)| = \left| M(a)^{\frac{b-x-iy}{b-a}} \cdot M(b)^{\frac{x+iy-a}{b-a}} \right| = M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} \cdot M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}$$

deducimos que el módulo de  $g(x + iy)$  solo depende de  $x = \operatorname{Re}(z)$ .

Consideremos ahora la función cociente

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

que está bien definida y es analítica en  $G$ .

Fijamos  $\varepsilon > 0$ , y definimos la función

$$H_\varepsilon = h(z) \cdot g_\varepsilon(z)$$

donde

$$g_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon(z - a)}.$$

Esta función  $H_\varepsilon(z)$  tiene las mismas propiedades que  $h(z)$ , y además, el módulo de  $H_\varepsilon(z)$  decae cuando  $|Im(z)| = |y| \rightarrow \infty$ . Vamos ahora a ver que  $|H_\varepsilon(z)| \leq 1$  para todo  $z \in G$ , lo haremos mediante el principio del módulo máximo. Para ello fijamos  $T > 0$ , y consideramos el rectángulo

$$R_T = \{x + iy \in \mathbb{C} : a \leq x \leq b, |y| \leq T\}.$$

Estudiemos ahora el comportamiento de la función  $H_\varepsilon(z)$  en los bordes de  $R_T$ :

- En  $x = a$  se tiene que  $|g(a + iy)| = M(a)$  por lo que se cumple que  $|f(z)/g(z)| \leq 1$ , y consecuentemente  $|H_\varepsilon(z)| \leq 1$
- En  $x = b$  se cumple que  $|g(b + iy)| = M(b)$  por lo que se cumple que  $|f(z)/g(z)| \leq 1$ , y nuevamente  $|H_\varepsilon(z)| \leq 1$ .

- En los bordes horizontales ( $y = \pm T$ ), como  $f$  es acotada y continua en  $\overline{R_T}$ , también lo es  $H_\varepsilon(z)$ . Además, como  $|g_\varepsilon(z)| \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$ , y  $h(z)$  está acotada, se cumple que cuando  $T \rightarrow \infty$  entonces  $|H_\varepsilon(z)| \rightarrow 0$ . Es por esto que para un  $T$  suficientemente grande, podemos asegurar que  $|H_\varepsilon(z)| \leq 1$  en la frontera de  $R_T$ .

Podemos entonces en estas condiciones aplicar el teorema del módulo máximo sobre  $H_\varepsilon(z)$  y afirmar que

$$|H_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \text{para todo } z \in R_T.$$

Como esto se cumple para todo  $T \in \mathbb{R}$  suficientemente grande, tenemos que

$$|H_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \text{para todo } z \in G$$

y haciendo tender  $\varepsilon$  a 0 tenemos que

$$|h(z)| \leq 1 \tag{1.16}$$

para todo  $z \in G$ , lo que implica que

$$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \text{para todo } z \in G.$$

Si ahora recordamos la definición de  $M(x)$ , y tomando superiores en ambos lados tenemos que

$$M(x) \leq M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} \cdot M(b)^{\frac{x-a}{b-a}},$$

y tomando logaritmos finalmente obtenemos que

$$\ln M(x) \leq \ln M(a) \frac{b-x}{b-a} + \ln M(b) \frac{x-a}{b-a},$$

que es lo que queríamos probar.

□

**Nota.** En la demostración anterior, si además se da la igualdad en (1.16) para algún  $z \in G$ , el teorema 1.13 nos garantiza que

$$h(z) \equiv 1 \Rightarrow f(z) \equiv g(z),$$

por tanto

$$f(z) \equiv M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} \cdot M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}.$$

Una vez demostrado el resultado anterior, vamos ahora a demostrar el Teorema de los tres círculos de Hadamard.

**Teorema 1.16.** Sea  $f(z)$  analítica y no idénticamente nula en una corona

$$D := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\},$$

definimos

$$M(\rho) := \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |f(\rho e^{i\theta})|.$$

Entonces para  $r_1 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r_2$  se tiene que

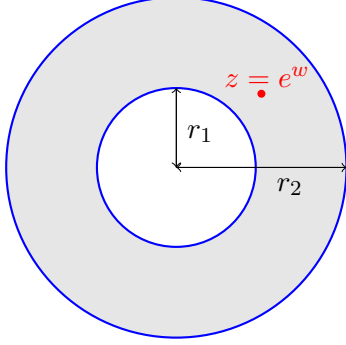
$$\ln M(\rho) \leq \ln M(\rho_1) \frac{\ln(\rho_2) - \ln(\rho)}{\ln(\rho_2) - \ln(\rho_1)} + \ln M(\rho_2) \frac{\ln(\rho) - \ln(\rho_1)}{\ln(\rho_2) - \ln(\rho_1)}. \tag{1.17}$$

**Demostración.**

Para empezar, vamos a transformar la corona  $D$  en una banda vertical en el plano, esto lo haremos con el cambio de variable  $z = e^w$ . La banda resultante sería

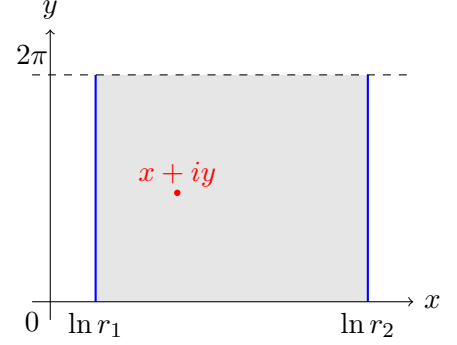
$$G = \{w = x + iy : \ln r_1 < x < \ln r_2\}$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$$



(a) Corona circular

$$G = \{w = x + iy : \ln r_1 < x < \ln r_2\}$$



(b) Banda horizontal

Figura 1.1: Transformación de la corona a la banda horizontal

Como  $w \mapsto e^w$  es entera y envía  $G$  en  $D$ , y  $f$  es analítica en  $D$ , tenemos que su composición es analítica en  $G$ , definimos entonces

$$h(w) = f(e^w),$$

en este caso  $|h(z)| = |f(e^w)|$ , y definimos

$$M(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} |h(x + iy)| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} |f(e^x e^{i\theta})|.$$

En estas condiciones podemos aplicar el teorema 1.15 a la función  $h(w)$  y afirmar que  $\ln M(x)$  satisface la desigualdad enunciada en aquel resultado. Basta poner  $x = \ln(\rho)$ , de acuerdo con el cambio de variable realizado, para deducir que

$$\ln M(\rho) \leq \ln M(\rho_1) \frac{\ln(\rho_2) - \ln(\rho)}{\ln(\rho_2) - \ln(\rho_1)} + \ln M(\rho_2) \frac{\ln(\rho) - \ln(\rho_1)}{\ln(\rho_2) - \ln(\rho_1)},$$

que es lo que queríamos demostrar. □

**Nota.** El teorema 1.16 tiene una interpretación geométrica muy simple, la cual se muestra cuando consideramos  $\eta = \ln M(\rho)$  como una función de  $\xi = \ln \rho$ ,

$$\eta = \varphi(\xi). \tag{1.18}$$

Tomando  $\xi_1 = \ln \rho_1$ ,  $\xi_2 = \ln \rho_2$  y  $\eta_1 = \ln M(\rho_1)$ ,  $\eta_2 = \ln M(\rho_2)$ , podemos escribir (1.17) de la forma

$$\eta \leq \eta_1 \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} + \eta_2 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \tag{1.19}$$

donde  $\xi_1 < \xi < \xi_2$ . En coordenadas cartesianas  $\xi$  y  $\eta$ ,

$$\eta = \eta_1 \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} + \eta_2 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \quad (1.20)$$

es la ecuación de la línea recta que une los puntos  $(\xi_1, \eta_1)$  y  $(\xi_2, \eta_2)$ . Comparando (1.19) y (1.20), podemos ver que ningún arco que una dos puntos de la curva con ecuación (1.18) puede estar más alto que la cuerda con los mismos extremos. Ambos, la curva con esta propiedad y la correspondiente función  $\varphi(\xi)$  se dicen *convexas*. Así el *Teorema de los tres círculos de Hadamard* tiene la siguiente formulación más concisa. “*El logaritmo del máximo módulo de una función analítica en una corona  $D : \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$  es una función convexa del logaritmo del radio del círculo en el que se alcanza el máximo*”.

Otra aplicación importante del principio del módulo máximo generalizado es el siguiente enunciado.

**Teorema 1.17** ( Teorema de las dos constantes para un disco). Sea  $f(z)$  analítica en el disco  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , y sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  dos puntos de la circunferencia  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ . Sea  $\sigma$  el arco entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$  y  $\Sigma$  el arco entre  $\xi_2$  y  $\xi_1$ , ambos recorridos en sentido positivo, y ambos sin sus puntos finales. Suponemos que

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \xi \\ \xi \in \sigma}} \ln |f(z)| \leq \ln m, \quad \limsup_{\substack{z \rightarrow \xi \\ \xi \in \Sigma}} \ln |f(z)| \leq \ln M, \quad (1.21)$$

mientras que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi_k} \ln |f(z)| < +\infty, \quad k = 1, 2.$$

Además, sean  $2\alpha$  y  $2\beta$  los ángulos abarcados en el punto  $z = 0$  por los arcos  $\sigma$  y  $\Sigma$ , respectivamentes ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\alpha + \beta = \pi$ ), y sea  $U(z)$  la rama armónica de valor único de la función

$$\text{Arg} \frac{\xi_1 - z}{\xi_2 - z}$$

que cumple que  $U(0) = 2\beta$  (gráficamente este valor correspondería con el ángulo formado entre  $\xi_1 - z$  y  $\xi_2 - z$ ). Entonces

$$|f(z)| \leq M^{u(z)} m^{1-u(z)} \quad (1.22)$$

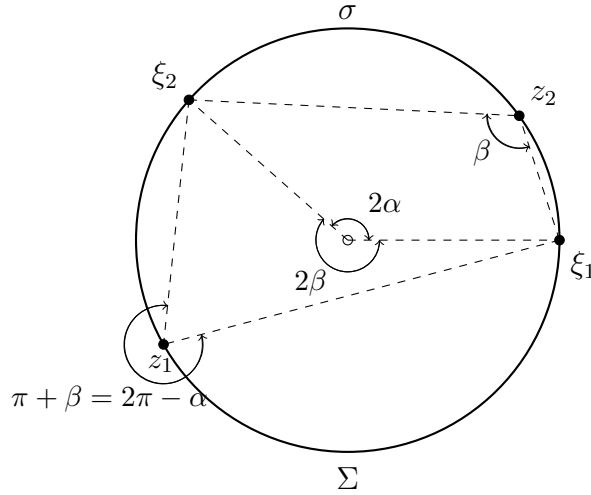
para todo  $z \in K$ , donde

$$u(z) = \frac{1}{\pi} [U(z) - \beta],$$

y en particular

$$|f(0)| \leq M^{\beta/\pi} m^{\alpha/\pi}. \quad (1.23)$$

Antes de comenzar con la demostración se van a dar unas aclaraciones sobre el significado geométrico de la función  $U(z)$ . Primero vamos a comenzar viendo gráficamente los ángulos que hemos llamado  $2\beta$  y  $2\alpha$ , esto se muestra en la siguiente figura.

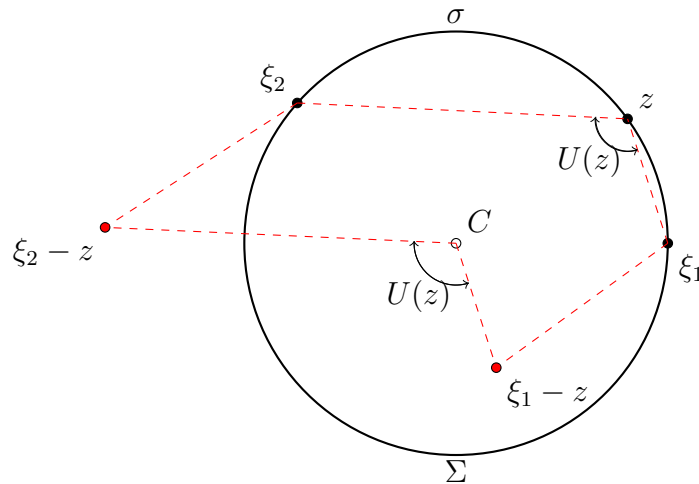

 Figura 1.2: Representación de  $\alpha$  y  $\beta$ 

Podemos ver aquí que  $2\beta$  es el ángulo formado por el radio que va desde el centro a  $\xi_1$  y el radio que va desde el centro a  $\xi_2$ . Vemos también que  $2\alpha$  es su complementario. Además, en esta figura se puede observar que en cualquier punto  $z_2$  que esté en el arco  $\sigma$ , el ángulo formado por las cuerdas que van desde  $z_2$  a  $\xi_1$  y desde  $z_2$  a  $\xi_2$  va a ser  $\beta$ .

Esto se cumple debido al teorema del ángulo inscrito, que dice lo siguiente: “En toda circunferencia, la medida de un ángulo inscrito equivale a la mitad de la medida del ángulo en el centro que subtiende al mismo arco”.

Por esto también podemos ver que el ángulo formado en cualquier punto  $z_1$  de  $\Sigma$ , por las cuerdas que van desde  $z_1$  a  $\xi_1$  y desde  $z_1$  a  $\xi_2$  es igual a  $2\pi - \alpha$ , que por cómo hemos definido  $\alpha$  y  $\beta$  es igual a  $\pi + \beta$ .

Una vez aclarado el significado geométrico de los ángulos  $2\alpha$  y  $2\beta$ , vamos a ver el significado gráfico de la función  $U(z)$  con la siguiente figura.


 Figura 1.3: Significado gráfico de la función  $U(z)$ 

En esta representación podemos ver que la función  $U(z)$  es la función que va tomando los ángulos que forman los segmentos  $\xi_1 - z$  y  $\xi_2 - z$ . Es por esto que  $U(0) = 2\beta$ , y podemos ver que los valores que toma  $U(z)$  están en el rango de valores  $[\beta, \pi + \beta]$ , llegándose a tomar los valores extremos en los arcos  $\sigma$  y  $\Sigma$ , respectivamente.

Una vez aclarada la representación gráfica de esta función  $U(z)$  vamos con la demostración.

**Demostración.**

Como  $z$  varía en el disco  $K$ , comenzando por el centro  $z = 0$ , la función  $U(z)$  varía en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , comenzando por el valor  $U(0) = 2\beta$ . Está claro por el valor geométrico de  $U(z)$  visto anteriormente, que

$$U(z) = \begin{cases} \beta & \text{if } z \in \sigma, \\ \pi + \beta & \text{if } z \in \Sigma \end{cases}$$

y por tanto

$$u(z) = \frac{1}{\pi}[U(z) - \beta] = \begin{cases} 0 & \text{if } z \in \sigma, \\ 1 & \text{if } z \in \Sigma \end{cases}.$$

La función  $U(z)$  es la parte imaginaria de la función

$$\log \left( \frac{\xi_1 - z}{\xi_2 - z} \right),$$

donde se toma la rama del logaritmo cuya parte imaginaria toma valores en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Esta función es holomorfa en el disco  $K$ , por tanto  $U(z)$  es subarmónica en  $K$ , por lo que  $u(z)$  es una función subarmónica en  $K$ .

Además, tanto  $U(z)$  como  $u(z)$  están acotadas en un entorno de  $\xi_1$  o  $\xi_2$ . Aplicando el Principio del módulo máximo generalizado (teorema 1.13), podemos ver que la función  $u(z)$  está mayorizada por 1 en  $\Gamma$  y por tanto en  $K$ . Similarmente, la función  $-u(z)$  está mayorizada por 0 en  $\Gamma$  y por tanto en  $K$ . Por lo tanto

$$0 < u(z) < 1 \quad \forall z \in K, \quad (1.24)$$

y en particular,  $u(0) = \frac{\beta}{\pi}$ .

Consideremos ahora la función

$$\ln(m) + (\ln(M) - \ln(m)) \cdot u(z)$$

que se reduce a  $\ln(m)$  en  $\sigma$  y a  $\ln(M)$  en  $\Sigma$ , mientras que permanece acotada en un entorno de  $\xi_1$  o  $\xi_2$ . De acuerdo con (1.21), esta función es un mayorante armónico de  $\ln |f(z)|$  (que ya hemos visto en el ejemplo (1.9) que es una función subarmónica) en  $\Gamma$ , y por tanto en  $K$  nuevamente por el teorema 1.13, es decir,

$$\ln |f(z)| \leq \ln m + (\ln M - \ln m)u(z)$$

o, escrito de otra forma

$$\ln |f(z)| \leq \ln M u(z) + \ln m(1 - u(z))$$

para todo  $z \in K$ , que es solo otra forma de escribir (1.22). En particular, como  $u(0) = \frac{\beta}{\pi}$ , tenemos que

$$|f(0)| \leq M^{\beta/\pi} m^{1-\beta/\pi} = M^{\beta/\pi} m^{\frac{\pi-\beta}{\pi}} = M^{\beta/\pi} m^{\alpha/\pi}.$$

□

**Nota.** Supongamos que  $m < M$  y que en vez de explotar toda la información disponible sobre los valores acotados de  $f(z)$ , remplazamos las condiciones (1.21) por la siguiente desigualdad

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \xi \\ \xi \in \sigma \cup \Sigma}} |f(z)| \leq M.$$

Entonces, de acuerdo con el Principio del módulo máximo generalizado (teorema 1.13)

$$|f(z)| \leq M$$

para todo  $z \in K$ . Sin embargo, (1.22) es una mejor estimación de  $|f(z)|$  ya que

$$\frac{M^{u(z)} m^{1-u(z)}}{M} = \left( \frac{m}{M} \right)^{1-u(z)} < 1 \quad (0 < u(z) < 1).$$

# Capítulo 2

## Teoremas de Phragmén-Lindelöf

En este capítulo se van a desarrollar los Teoremas de Phragmén-Lindelöf, que son refinamientos del Principio del módulo máximo, en situaciones donde una función analítica indicada puede crecer de manera controlada.

La información ha sido extraída mayormente del libro de A. I. Markushevich [7], donde se analizan los casos generales y sus implicaciones en la teoría de funciones analíticas, con apoyo en el contenido del libro de W. Rudin [8].

Se presentarán distintas versiones del teorema, aplicadas a dominios como sectores y bandas, proporcionando así herramientas esenciales para el estudio del comportamiento asintótico de funciones holomorfas.

### 2.1. Teorema de Phragmén-Lindelöf para un ángulo

De acuerdo con el corolario del teorema 1.13, si  $f(z)$  es analítica en un dominio  $G$  con frontera  $\Gamma$ , y si

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \xi \\ \xi \in \Gamma}} |f(z)| \leq C < \infty$$

excepto en un punto  $\xi_0$  donde

$$\limsup_{z \rightarrow \xi_0} |f(z)| < \infty, \quad (2.1)$$

entonces  $|f(z)| \leq C$  para todo  $z \in G$ ; además, si  $|f(z_0)| = C$  en un punto  $z_0 \in G$ , entonces esto implica que  $f(z) \equiv C$ . Sin embargo, si tenemos información sobre el carácter de  $\Gamma$  cerca del punto excepcional  $\xi_0$ , la condición (2.1) puede a menudo relajarse. Por ejemplo, supongamos que en el punto  $\xi_0$ ,  $\Gamma$  forma un ángulo de  $\alpha\pi$  radianes ( $0 < \alpha \leq 2$ ). Entonces podemos deshacernos de la condición (2.1), siempre que  $|f(z)|$  no crezca demasiado rápido cuando  $z \rightarrow \xi_0$ . Para simplificar, vamos a considerar el caso en el que  $\xi_0 = \infty$  y  $G$  es el interior de un ángulo o una banda.

Pero antes de comenzar con los resultados de esta sección, vamos a recordar brevemente la definición de límite inferior y algunas de sus propiedades al igual que hicimos con el límite superior.

**Definición 2.1.** Sea  $G \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto, y sea  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Sea  $\xi \in \mathbb{C}$  un punto de acumulación de  $G$ . Entonces el *límite inferior* de  $f$  cuando  $z$  tiende a  $\xi$  se define como:

$$\liminf_{z \rightarrow \xi} f(z) := \inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) : z_n \in G, z_n \rightarrow \xi \right\},$$

donde el inferior se toma sobre todos los límites reales posibles de sucesiones  $\{z_n\}$  en  $G$  tales que  $z_n$  tiende a  $\xi$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El límite inferior, cuando es finito, satisface las siguientes dos propiedades:

- Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un entorno  $\mathcal{N}(\xi)$  de  $\xi$  tal que

$$f(z_0) > \liminf_{z \rightarrow \xi} f(z) - \varepsilon$$

para todo  $z_0 \in \mathcal{N}(\xi) \cap G$ .

- Para todo  $\varepsilon > 0$  se puede encontrar una sucesión  $\{z_n\}$  con  $z_n \rightarrow \xi$  de forma que

$$f(z_n) < \liminf_{z \rightarrow \xi} f(z) + \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una vez recordada esta definición y las propiedades del límite inferior, comencemos a ver los resultados de esta sección.

**Teorema 2.2** ( Teorema de Phragmén-Lindelöf para un ángulo). Sea  $G$  el interior de un ángulo de  $\alpha\pi$  radianes ( $0 < \alpha \leq 2$ ), con frontera  $\Gamma$ , y sea  $f(z)$  una función analítica en  $G$ . Supongamos que  $f(z)$  satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada punto finito  $\xi \in \Gamma$ ,

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} |f(z)| \leq C < \infty. \quad (2.2)$$

- 2.

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \frac{1}{\alpha} \quad (2.3)$$

donde

$$M(r) = \sup_{\substack{|z|=r \\ z \in G}} |f(z)|. \quad (2.4)$$

Entonces,

$$|f(z)| \leq C \quad (2.5)$$

para todo  $z \in G$ . Además, si  $|f(z_0)| = C$  para algún punto  $z_0 \in G$ , entonces  $f$  es constante en  $G$ .

### Demostración.

Vamos primero a ver que la condición (2.3) implica la siguiente restricción en el crecimiento de  $|f(z)|$  cuando  $z \rightarrow \infty$ : Dado un  $\rho_1$  con

$$\frac{1}{\alpha} > \rho_1 > \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r},$$

existe una sucesión  $\{r_n\}$ , donde  $r_n < r_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) y  $r_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  de modo que

$$|f(z)| < e^{|z|^{\rho_1}} \quad \text{si } |z| = r_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.6)$$

Para ver esto, basta tener en cuenta los comentarios tras la definición del límite inferior y aplicar el segundo de ellos para  $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - \rho_1$ : existe una sucesión creciente  $\{r_n\}$  de radios de forma que para todo  $n$  se cumple

$$\frac{\ln \ln M(r_n)}{\ln r_n} < \rho_1.$$

Entonces

$$\rho_1 > \frac{\ln \ln M(r_n)}{\ln r_n} \geq \frac{\ln \ln |f(z)|}{\ln |z|} \quad \text{si } |z| = r_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

que es simplemente otra forma de escribir (2.6).

No hay pérdida de generalidad al suponer que el vértice finito de  $G$  cae en el origen y que la bisectriz del ángulo coincide con el eje real positivo, pues el caso general se puede reducir a este haciendo una transformación lineal preliminar consistente en una rotación, una traslación o ambas, sin afectar a las hipótesis del teorema.

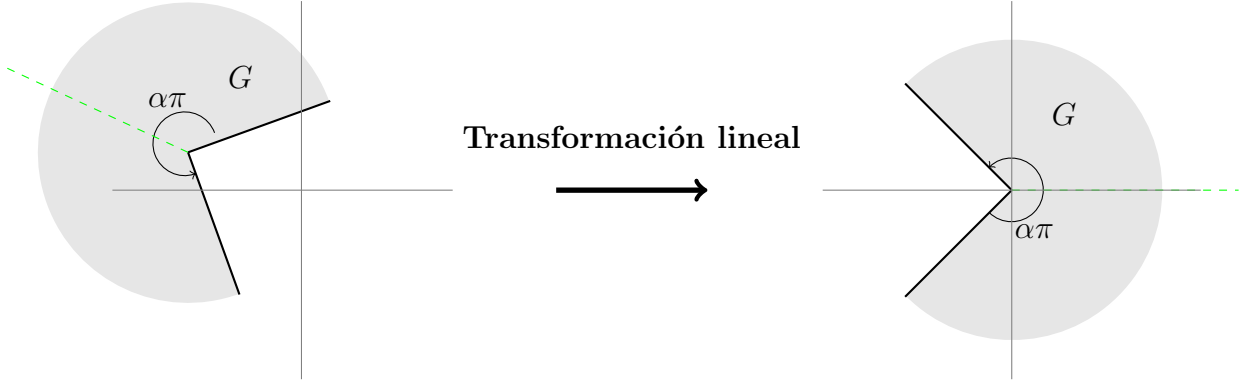


Figura 2.1: Situación tras hacer las transformaciones lineales correspondientes

Ahora consideremos la función

$$F_\varepsilon(z) = f(z)e^{-\varepsilon z^{\rho_2}} \quad (2.7)$$

donde  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{\alpha}$  y  $\rho_1$  es el mismo que en (2.6).

Aquí  $z^{\rho_2}$  denota la rama de valor único de la función  $e^{\rho_2 \ln z}$ , donde  $\ln z$  es la rama principal del logaritmo, es decir, aquella que toma valores del argumento en el intervalo  $[-\pi, \pi)$ . Esta rama es analítica en  $G$ , y además  $z^{\rho_2}$  toma valores positivos para valores de  $z$  reales positivos. Sean  $G_n$  el sector  $|\arg z| < \frac{\alpha\pi}{2}$ ,  $|z| < r_n$ , acotado por dos segmentos y un arco circular abierto  $\lambda_n$ . De acuerdo con (2.2), para cada punto  $\xi$  perteneciente a estos segmentos

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} |F_\varepsilon(z)| \leq C \lim_{z \rightarrow \xi} |e^{-\varepsilon z^{\rho_2}}| = C \lim_{z \rightarrow \xi} e^{-\varepsilon r^{\rho_2} \cos(\rho_2 \theta)} \leq C$$

donde  $z = e^{i\theta}$  (en el dominio  $G$ , tenemos que

$$|\rho_2 \theta| < \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

y entonces  $\cos(\rho_2 \theta) > 0$ ).

Además, de acuerdo con (2.6), en el arco  $\lambda_n$

$$|F_\varepsilon(z)| < e^{r_n^{\rho_1} - \varepsilon r_n^{\rho_2} \cos(\rho_2 \theta)} \leq e^{r_n^{\rho_1} - \varepsilon r_n^{\rho_2} \cos(\rho_2 \frac{\alpha\pi}{2})}$$

donde la expresión de la derecha tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que

$$\cos\left(\rho_2 \frac{\alpha\pi}{2}\right) > 0 \quad \text{y} \quad \rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{\alpha}.$$

Tomando un  $n$  suficientemente grande para que  $|F_\varepsilon(z)| \leq C$  en  $\lambda_n$ , tenemos que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} |F_\varepsilon(z)| \leq C$$

para todo  $\xi$  en la frontera de  $G_n$ . Entonces, por el Principio del módulo máximo generalizado (teorema 1.13)

$$|F_\varepsilon(z)| \leq C$$

para todo  $z \in G_n$ .

Sustituyendo en (2.7) y haciendo tender  $\varepsilon$  a 0, encontramos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |f(z)e^{-\varepsilon z^{\rho_2}}| = |f(z)| \leq C \quad \forall z \in G_n$$

si  $n$  es suficientemente grande. Esto prueba (2.5), ya que  $n$  puede siempre ser elegida de forma que  $G_n$  contenga cualquier punto preasignado de  $G$ .

Finalmente, notemos que si  $|f(z_0)| = C$  para algún punto  $z_0 \in G$ , entonces  $f$  ha de ser constante en  $G$  por la forma usual del Principio del módulo máximo generalizado.

□

Vamos a probar ahora una versión más fuerte del teorema anterior donde la condición (2.3), es reemplazada por la condición

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leq 0, \quad (2.8)$$

que implica la siguiente restricción en el crecimiento de  $|f(z)|$  cuando  $z \rightarrow \infty$ : Dado un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, existe una sucesión  $\{r_n\}$  con  $r_n < r_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) y  $r_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  de forma que

$$|f(z)| < e^{\varepsilon|z|^{1/\alpha}} \quad \text{si } |z| = r_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

De hecho, a partir de la condición (2.8) y las propiedades del límite inferior, se deduce que existe una sucesión creciente de radios que tiende a  $\infty$  de modo que

$$\frac{\ln |f(z)|}{|z|^{1/\alpha}} \leq \frac{\ln M(|z|)}{|z|^{1/\alpha}} \leq \varepsilon \quad \text{cuando } |z| = r_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

que es simplemente otra forma de escribir (2.9).

Es fácil ver la implicación de la condición (2.9) a la condición (2.6), que es más restrictiva, dado que, si tenemos un  $\varepsilon > 0$  y un  $\rho_1 < \frac{1}{\alpha}$  cualesquiera, tenemos que

$$e^{|z|^{\rho_1}} < e^{\varepsilon|z|^{\frac{1}{\alpha}}}$$

para un  $|z|$  suficientemente grande. Sin embargo, la implicación inversa no es verdad, como muestra el ejemplo

$$f(z) = e^{\frac{z^2}{1+(\ln z)^2}}$$

tomando  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

De hecho, el grupo de funciones que satisface (2.9) o (2.8), es más grande que el grupo de funciones que satisface (2.6) o (2.3).

Una vez vista la nueva condición que vamos a usar y su significado sobre el crecimiento de la función, vamos a ver el siguiente resultado, que es una ampliación del teorema 2.2.

**Teorema 2.3.** El Teorema de Phragmén-Lindelöf para un ángulo (teorema 2.2) sigue válido si la condición (2.3) se sustituye por la condición (2.8)

### Demostración.

Vamos a empezar esta demostración suponiendo que sabemos que

$$|f(z)| \leq C \quad (2.10)$$

en todo punto  $z = x$  del eje real positivo. En este caso, podemos aplicar el Teorema de Phragmén-Lindelöf para un ángulo, a cada uno de los dos dominios en los que el eje real positivo

divide a  $G$ . Cada uno de estos dominios es el interior de un ángulo de  $\frac{\alpha\pi}{2}$  radianes, y entonces, para poder aplicar el teorema anterior, solo necesitaríamos verificar que (2.6) se cumple para todo  $\rho_1$  menor que  $\frac{2}{\alpha}$  y suficientemente cerca de  $\frac{2}{\alpha}$ . Ahora bien, los comentarios previos al enunciado han justificado esta afirmación.

Entonces, la prueba se reduce a establecer la desigualdad (2.10) para un punto  $x > 0$  real fijo, pero arbitrario. Dado un  $\varepsilon > 0$ , sea  $\{r_n\}$  una sucesión que cumple (2.9). Como en la demostración del teorema anterior, sea  $G_n$  el sector en el que se cumple que  $|\arg(z)| < \frac{\alpha\pi}{2}$ ,  $|z| < r_n$  y cogiendo un  $n$  suficientemente grande para que  $x \in G_n$ . La frontera de  $G_n$  consiste en dos segmentos lineales y en un arco circular abierto  $\lambda_n$ , donde

$$|f(z)| < e^{\varepsilon r_n^{\frac{1}{\alpha}}}$$

en  $\lambda_n$ , por construcción, mientras que

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} |f(z)| \leq C$$

para todo punto  $\xi$  perteneciente a los segmentos, por hipótesis.

Nuestra estrategia para la demostración será transformar  $G_n$  de manera conforme en el interior del disco unidad, con el punto  $x$  en el origen, y aplicar a continuación la desigualdad (1.23), demostrada en relación con el Teorema de las dos constantes para un disco (teorema 1.17).

Empezaremos haciendo las siguientes transformaciones consecutivas

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(z) = i \left( \frac{z}{r_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ z_2 &= f_2(z_1) = \left( \frac{1+z_1}{1-z_1} \right)^2 \end{aligned}$$

La primera transformación lleva  $G_n$  a la mitad del disco unidad que llamamos

$$D_n = \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| < 1, \quad \text{Im}(z_1) > 0\}$$

con el arco  $\lambda_n$  siendo transformado en el semicírculo  $|z_1| = 1$ ,  $\text{Im}(z_1) > 0$  y con el punto  $x$  yendo al punto  $f_1(x) = i \left( \frac{x}{r_n} \right)^{1/\alpha}$ .

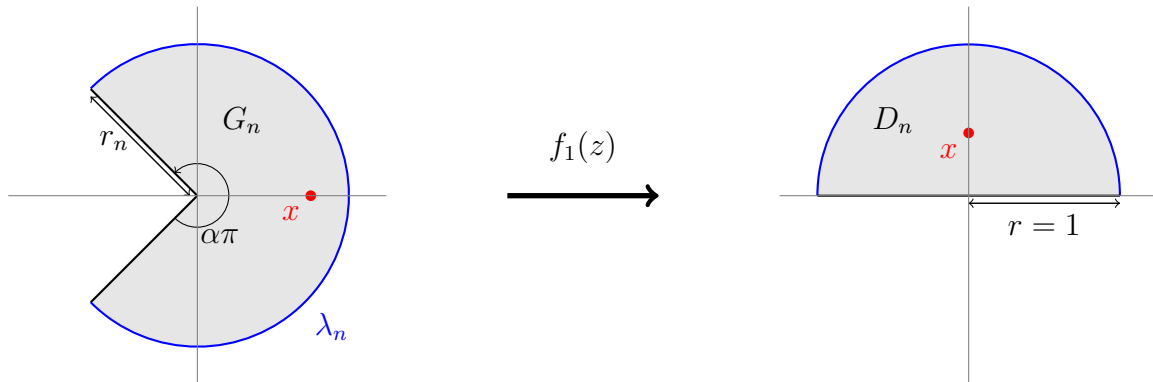


Figura 2.2: Transformación por  $f_1$

La segunda transformación lleva  $D_n$  a la mitad superior del plano complejo, transformando

$\lambda_n$  en el eje real negativo, y el punto  $x_1 = i \left( \frac{x}{r_n} \right)^{1/\alpha}$  en el punto

$$\xi_n = \left[ \frac{1 + i \left( \frac{x}{r_n} \right)^{1/\alpha}}{1 - i \left( \frac{x}{r_n} \right)^{1/\alpha}} \right]^2. \quad (2.11)$$

La función  $f_2$  es una homografía, que manda el 1 al punto del infinito, el 0 al 1 y el  $-1$  al 0. Eso quiere decir que manda la frontera de la imagen de  $G_n$  por  $f_1$  (que contiene a los puntos  $-1, 0$  y  $1$ ) a la única circunferencia que contiene el  $\infty, 1$  y  $0$ , que es el eje real.

Aparte de esto, las componentes conexas del complementario de la frontera de  $D_n$  están en biyección con las componentes conexas del complementario de la imagen por  $f_2$  de dicha frontera, ya que las homografías son homeomorfismos en la esfera de Riemann. Esto implica que el interior de  $D_n$  tendrá como imagen por  $f_2$  una de las componentes conexas de la imagen, es decir, o el semiplano superior, o el inferior, y el exterior de  $D_n$  irá a parar a la otra.

Para determinar qué semiplano corresponde con cada componente conexa, basta con tomar un punto del interior de  $D_n$  y ver dónde cae la imagen. Tomamos por ejemplo el punto  $z = 0,5i \in D_n$ , es fácil ver que la imagen de este punto por  $f_2$ , está contenida en el semiplano superior. Por lo tanto la imagen de  $D_n$  por  $f_2$  es el semiplano superior.

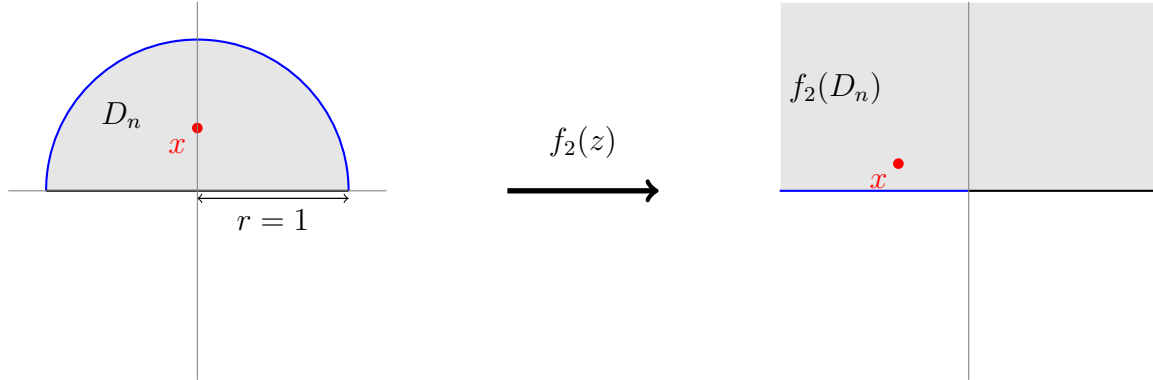


Figura 2.3: Transformación por  $f_2$

Ahora hacemos una tercera transformación

$$z_3 = f_3(z_2) = \frac{z_2 - \xi_n}{z_2 - \overline{\xi_n}},$$

que transforma la mitad superior del plano en el interior del círculo unidad  $\gamma : |z_3| = 1$ , con el eje real negativo transformado en un arco abierto  $\Sigma_n$  con un punto inicial 1 y final  $\frac{\xi_n}{\xi_n}$  ( $\gamma$  recorrido en sentido positivo).

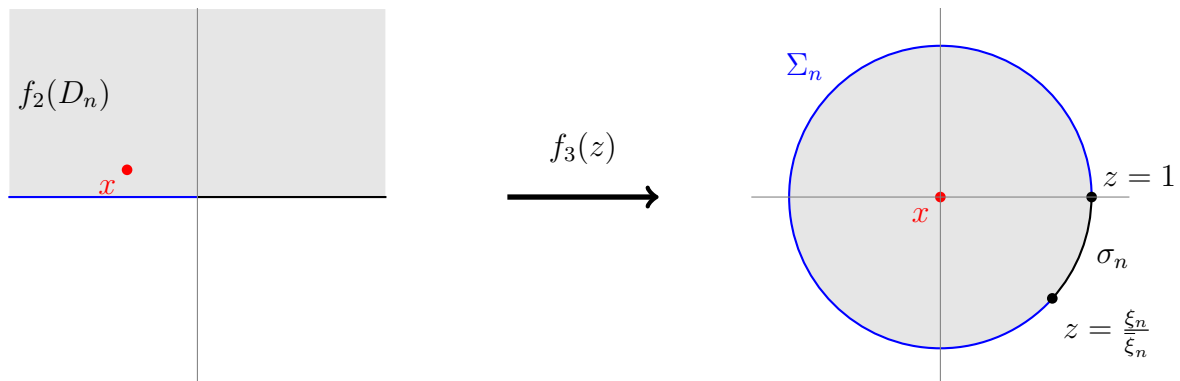


Figura 2.4: Transformación por  $f_3$

Por tanto, el deseo de transformar  $G_n$  en el interior del círculo unidad viene dado por

$$z_3 = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$$

Como resultado,  $f(z)$  se transforma en la función

$$f^*(z_3) = f(f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1}(z_3))$$

de forma que  $f^*(0) = f(x)$ , y

$$|f^*(z_3)| < e^{\varepsilon r_n^{\frac{1}{\alpha}}}$$

para todo  $z_3 \in \Sigma_n$ , y también

$$\limsup_{z_3 \rightarrow \xi} |f^*(z_3)| \leq C$$

para todo  $\xi$  en el arco complementario cerrado  $\sigma_n = \gamma \setminus \Sigma_n$ .

Si ahora tenemos en cuenta el teorema 1.17, se sigue de la desigualdad (1.23) que

$$|f^*(0)| = |f(x)| \leq (e^{\varepsilon r_n^{\frac{1}{\alpha}}})^{\frac{\beta_n}{\pi}} C^{\frac{a_n}{\pi}}$$

donde  $2a_n$  y  $2\beta_n$  son los ángulos formados en el punto  $z_3 = 0$  por los arcos  $\sigma_n$  y  $\Sigma_n$  respectivamente ( $a_n > 0$ ,  $\beta_n > 0$  y  $a_n + \beta_n = \pi$ ).

Ahora, de acuerdo con (2.11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 1$$

lo que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg(\xi_n) = 0$$

y entonces, para un  $n$  suficientemente grande

$$\arg(\xi_n) = 4 \arg \left[ 1 + i \left( \frac{x}{r_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = 4 \arctan \left( \frac{x}{r_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

y

$$\arg \left( \frac{\xi_n}{\bar{\xi}_n} \right) = 2 \arg(\xi_n) = 8 \arctan \left( \frac{x}{r_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0.$$

Además, 1 es el punto inicial y  $\frac{\xi_n}{\bar{\xi}_n}$  es el punto final del arco  $\Sigma_n$ , por lo que

$$2\beta_n = 8 \arctan \left( \frac{x}{r_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ es decir, } \beta_n = 4 \arctan \left( \frac{x}{r_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

y

$$\alpha_n = \pi - 4 \arctan \left( \frac{x}{r_n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Pero entonces

$$|f(x)| \leq e^{\frac{4}{\pi} \varepsilon r_n^{1/\alpha} \arctan(\frac{x}{r_n})^{1/\alpha}} C^{1 - \frac{4}{\pi} \arctan(\frac{x}{r_n})^{1/\alpha}},$$

y pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos que

$$|f(x)| \leq C e^{\frac{4}{\pi} \varepsilon x^{1/\alpha}}.$$

Dado que  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, esto implica que  $|f(x)| \leq C$ , y la prueba queda terminada

□

**Nota.** El Teorema anterior no puede ser más reforzado, en el sentido de que el teorema no es cierto si sustituimos la condición

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \frac{1}{\alpha}$$

por la condición de que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{1/\alpha}} > 0. \quad (2.12)$$

Para ver esto, consideremos la función

$$f(z) = e^{\varepsilon z^{1/\alpha}} \quad (\varepsilon > 0)$$

que obviamente satisface (2.12). En la frontera del dominio  $G$ , tenemos que

$$|\arg(z)| = \frac{\alpha\pi}{2}$$

y entonces

$$|f(re^{\pm i\frac{\alpha\pi}{2}})| = \left| e^{\varepsilon r^{1/\alpha} e^{\pm i\frac{\pi}{2}}} \right| = \left| e^{\varepsilon r^{1/\alpha} (\cos(\pm\frac{\pi}{2}) + i\sin(\pm\frac{\pi}{2}))} \right| = e^{\varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}} \cos(\frac{\pi}{2})} = 1.$$

Por otra parte,  $|f(z)| \rightarrow \infty$  a lo largo de cada recta

$$\arg(z) = \theta, \quad |\theta| < \frac{\alpha\pi}{2}.$$

**Nota.** Como nota de cierre de sección, merece la pena indicar que a este teorema también se le denota como *Teorema de Phragmén-Lindelöf para un sector*.

## 2.2. Teorema de Phragmén-Lindelöf para una banda

Habiendo visto y demostrado el resultado del teorema de Phragmén-Lindelöf para un sector, vamos a ver este mismo resultado pero cambiando el dominio en forma de sector por un dominio con forma de banda horizontal.

**Teorema 2.4** (Teorema de Phragmén-Lindelöf para una banda). Sea  $D$  la banda horizontal

$$-\frac{h\pi}{2} < y < \frac{h\pi}{2}$$

de altura  $h$ , con frontera  $\Gamma$ , y sea  $f(z)$  una función analítica en  $D$ . Supongamos que  $f(z)$  satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada punto finito  $\xi \in \Gamma$ ,

$$\lim_{z \rightarrow \xi} |f(z)| \leq C < \infty.$$

- 2.

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |f(x + iy)| \leq C.$$

- 3.

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(x)}{e^{x/h}} \leq 0 \quad \text{donde} \quad \mu(x) = \sup_{-\frac{h\pi}{2} < y < \frac{h\pi}{2}} |f(x + iy)|.$$

Entonces,  $|f(z)| \leq C$  para todo  $z \in D$ . Además, si  $|f(z_0)| = C$  para algún punto  $z_0 \in D$ , entonces  $f$  es constante en  $D$ .

**Demostración.**

La función  $z' = e^{z/h}$  transforma la banda  $D$  en el semiplano derecho  $G$  (que es el interior de un ángulo de  $\pi$  radianes), con los puntos finales de la banda,  $x = -\infty$  y  $x = +\infty$ , yendo a los puntos  $z' = 0$  y  $z' = \infty$  respectivamente, y los segmentos en los que la parte real  $x$  es constante siendo transformados en semicírculos con el centro común  $z' = 0$ .

Escribiendo

$$f(h \ln z') = F(z'),$$

donde  $\ln$  denota la rama principal del logaritmo, vemos que  $F(z')$  es analítica en  $G$  y satisface la desigualdad

$$\limsup_{z' \rightarrow \xi'} |F(z')| \leq C$$

en cada punto finito  $\xi'$  de la frontera de  $G$ . Además, si  $r' = |z'|$  y  $x = \operatorname{Re}(z)$ , donde  $r' = e^{x/h}$ , entonces

$$M(r') = \sup_{|z'|=r'} |F(z')| = \sup_{\operatorname{Re}(z)=x} |f(z)| = \mu(x)$$

y por tanto

$$\frac{\ln M(r')}{r'} = \frac{\ln \mu(x)}{e^{x/h}}.$$

Se sigue entonces que

$$\liminf_{r' \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r')}{r'} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(x)}{e^{x/h}} \leq 0.$$

Aplicando en este caso el Teorema de Phragmén-Lindelöf para un ángulo en su versión reforzada, es decir, el teorema 2,3, al dominio  $G$ , para el que  $\alpha = 1$ , obtenemos que

$$|F(z')| \leq C$$

para todo  $z' \in G$ , lo que implica que

$$|f(z)| \leq C$$

para todo  $z \in D$ .

De forma similar, si  $|f(z_0)| = C$  para algún  $z_0 \in D$ , entonces  $|F(z'_0)| = C$  para  $z'_0 = e^{z_0/h}$ , y entonces  $F$  es constante en  $G$ , lo que implica que  $f$  también lo es en  $D$ .

□



# Capítulo 3

## La constante de Bloch

Este capítulo está dedicado al estudio de la constante de Bloch, un valor de interés en el Análisis Complejo que describe un comportamiento universal de las funciones holomorfas acotadas en el disco unidad. Para llegar a su formulación y estimación, exploraremos una cadena de resultados clásicos que incluyen transformaciones de Möbius, los teoremas de Landau y técnicas basadas en funciones subarmónicas y estimaciones extremales.

La presentación sigue de cerca las exposiciones de M. Heins [6] y J. B. Conway [4], cuyas obras proporcionan tanto la base teórica como las herramientas técnicas necesarias para comprender el resultado. En particular, se enfatiza el uso de transformaciones conformes, métodos del análisis potencial y el lema de Schwarz-Pick para establecer cotas inferiores explícitas para la constante de Bloch. El capítulo culmina con el teorema de Ahlfors, donde se demuestra que dicha constante excede un valor positivo explícito, conectando elegantemente técnicas de análisis funcional, geometría conforme y teoría de funciones.

### 3.1. Transformaciones de Möbius

Como preliminar para este capítulo vamos a introducir un cierto tipo de *transformaciones de Möbius*, que desempeñan un papel fundamental al preservar estructuras geométricas importantes.

En particular, a nosotros nos interesan las que actúan sobre el disco unidad

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

y tienen el aspecto siguiente: dada una constante  $a \in \mathbb{D}$ , se define la función  $L_a$  como

$$L_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Esta transformación racional es una biyección conforme del disco unidad sobre sí mismo, y cumple las siguientes propiedades fundamentales:

- Preserva el disco unidad:  $L_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .
- Preserva la frontera: Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = 1$ , se tiene que  $|L_a(z)| = 1$ .
- Su inversa está dada por  $L_{-a}(z)$ , es decir,

$$L_a^{-1}(z) = L_{-a}(z).$$

Estas transformaciones permiten 'mover' puntos dentro del disco unidad de forma controlada, y son frecuentemente utilizadas en la formulación de problemas de valor en la frontera,

como el problema de Dirichlet, y en la construcción de núcleos como el de Poisson mediante cambios de variable adecuados.

El estudio de estas funciones no solo facilita el análisis de funciones armónicas y analíticas en el disco, sino que también proporciona herramientas elegantes y potentes para resolver problemas clásicos mediante simetrías y transformaciones conformes.

## 3.2. Teoremas de Landau

Antes de entrar de lleno con el enunciado y demostración del teorema de Bloch, vamos a mencionar unos resultados clásicos denominados teoremas de Landau. Estos teoremas nos ofrecen una cota inferior explícita para el tamaño de discos donde ciertas funciones analíticas en el disco unidad, y que están normalizadas de una forma específica, son inyectivas. Para cada  $0 < a < 1$ , esta familia de funciones la denotaremos como  $\Phi_a$ , y se define como las funciones analíticas en el disco unidad que satisfacen que:

- $f(0) = 0$ ,
- $f'(0) = a$ ,
- $|f(z)| < 1$  para  $|z| < 1$ .

Dada una función  $f$ , definimos

$$r(f) = \sup\{r > 0 : f \text{ es inyectiva en } B(0, r)\}.$$

Este valor representa el máximo radio de un disco centrado en 0 para el cual la función  $f$  conserva el carácter inyectivo (también llamado univalente). A partir de esta definición, consideramos el valor

$$\rho = \inf\{r(f) : f \in \Phi_a\}.$$

donde el inferior se toma sobre la familia de funciones holomorfas introducida anteriormente. Este valor representa el mínimo radio tal que toda función de la familia considerada es inyectiva en el disco de radio  $\rho$  centrado en el origen. Este tipo de cantidades tiene un papel central en el análisis de propiedades geométricas de funciones holomorfas y en particular en la estimación de la constante de Bloch.

Una vez vistos estos conceptos, en el siguiente resultado determinaremos el valor de  $\rho$  en función de  $a$ .

**Teorema 3.1.** Sea  $a \in (0, 1)$ .

1. Se tiene que

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

2. Existe  $f \in \Phi_a$  para la cual  $r(f) = \rho$ .
3. Las funciones extremales donde se alcanza el valor de  $r(f) = \rho$  son las de la forma  $eta^{-1}F(\eta z)$ , donde  $\eta$  es un número complejo de módulo 1 y

$$F(z) = z \frac{a - z}{1 - az}.$$

**Demostración.**

Antes de empezar con la demostración vamos a ver que se cumple la siguiente cadena de desigualdades

$$|L_{|b|}(|z|)| \leq |L_{-b}(z)| \leq L_{-|b|}(|z|) \quad \text{para } |z|, |b| < 1. \quad (3.1)$$

Para ver la primera desigualdad recordemos que

$$L_{|b|}(|z|) = \frac{|z| - |b|}{1 - |b||z|} \quad \text{y} \quad |L_{-b}(z)| = \frac{|z + b|}{|1 + \bar{b}z|},$$

ahora elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad y desarrollando

$$\begin{aligned} \frac{||z| - |b||}{|1 - |b||z||} &\leq \frac{|z + b|}{|1 + \bar{b}z|} \Rightarrow \frac{||z| - |b||^2}{|1 - |b||z||^2} \leq \frac{|z + b|^2}{|1 + \bar{b}z|^2} \\ \frac{|z|^2 + |b|^2 - 2|z||b|}{1 + |b|^2|z|^2 - 2|z||b|} &\leq \frac{|z|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(b\bar{z})}{1 + |b|^2|z|^2 + 2\operatorname{Re}(b\bar{z})} \\ -2|z||b|(1 + |z|^2|b|^2) + 2\operatorname{Re}(b\bar{z})(|z|^2 + |b|^2) &\leq -2|z||b|(|z|^2 + |b|^2) + 2\operatorname{Re}(b\bar{z})(1 + |z|^2|b|^2) \\ 2(\operatorname{Re}(b\bar{z}) + |z||b|)(|z|^2 + |b|^2) &\leq 2(\operatorname{Re}(b\bar{z}) + |z||b|)(1 + |z|^2|b|^2) \\ |z|^2 + |b|^2 \leq 1 + |z|^2|b|^2 &\Rightarrow |z|^2(1 - |b|^2) \leq 1 - |b|^2 \Rightarrow |z| \leq 1, \end{aligned}$$

desigualdad que es cierta ya que  $|z| < 1$ . Para ver la otra desigualdad recordemos que

$$L_{-|b|}(|z|) = \frac{|z| + |b|}{1 + |b||z|},$$

observamos que  $L_{-|b|}(|z|)$  y  $L_{|b|}(|z|)$  tienen la misma expresión cambiando los signos, es por eso que no hace falta hacer el desarrollo como antes, simplemente basta con cambiar los signos pertinentes y reordenar. Elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad

$$|L_{-b}(z)| \leq L_{-|b|}(|z|)$$

llegamos a que

$$2(\operatorname{Re}(b\bar{z}) - |z||b|)(|z|^2 + |b|^2) \geq 2(\operatorname{Re}(b\bar{z}) - |z||b|)(1 + |z|^2|b|^2),$$

observemos ahora que

$$|z||b| = |\bar{z}||b| = |\bar{z}b| \geq |\operatorname{Re}(b\bar{z})| \geq \operatorname{Re}(b\bar{z}) \Rightarrow (\operatorname{Re}(b\bar{z}) - |z||b|) \leq 0,$$

por lo que llegamos nuevamente a la desigualdad

$$|z|^2 + |b|^2 \leq 1 + |z|^2|b|^2 \Rightarrow |z|^2(1 - |b|^2) \leq 1 - |b|^2 \Rightarrow |z| \leq 1.$$

Visto ahora que se cumple (3.1), vamos a ver también que si  $b \in (-1, 1)$ , entonces la aplicación  $x \mapsto L_{-b}(x)$  es monótona creciente en  $x \in [-1, 1]$ , esto sale directamente teniendo en cuenta que la derivada es

$$\frac{1 - b^2}{(1 - bx)^2} \geq 0 \quad \text{para } x \in [-1, 1].$$

Vamos ahora con la demostración, supongamos que  $f \in \Phi_a$  y que  $r(f) < 1$ . Entonces, o bien existe  $\xi$  con módulo  $r(f)$  para el cual  $n(\xi, f) > 1$  (donde  $n(\xi, f)$  es el orden de  $\xi$  como cero

de la función  $z \mapsto f(z) - f(\xi)$ , o bien existen  $\xi_1, \xi_2$  distintos, ambos con módulo  $r(f)$ , para los cuales  $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ . Vamos a denotar por  $\alpha$  a  $f(\xi)$  o al valor común  $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ .

Por el lema de Schwarz tenemos que  $|f(z)| \leq |z|$ , y como ambas transformaciones,  $L_\alpha$  y  $L_\xi$ , son continuas en  $\overline{B}(0, 1)$  y mandan la circunferencia unidad en sí misma, podemos afirmar que

$$\limsup_{|z| \rightarrow 1} \left| \frac{(L_\alpha \circ f)(z)}{(L_\xi(z))^2} \right| \leq 1,$$

y por el principio generalizado del módulo máximo 1.13, podemos afirmar que en  $B(0, 1)$  se cumple que

$$|L_\alpha \circ f| \leq |L_\xi|^2. \quad (3.2)$$

y de forma análoga

$$|L_\alpha \circ f| \leq |L_{\xi_1}| |L_{\xi_2}|.$$

Tomando  $z = 0$ , en ambos casos obtenemos que

$$|\alpha| \leq r(f)^2. \quad (3.3)$$

Por otra parte, tenemos que como  $f(0) = 0$ , podemos escribir  $f(z)$  como  $zg(z)$  donde  $g(z)$  es una función analítica en  $B(0, 1)$ , además, ya hemos visto antes que  $|f(z)| \leq |z|$ , es por esto que  $g(z)$  tiene módulo menor que 1, y si derivamos  $f$  y evaluamos en  $z = 0$ , obtenemos que  $g(0) = a$ , ya que por definición  $f'(0) = a$ .

De la misma forma tenemos que  $L_\alpha \circ g(z)$  puede escribirse como  $zh(z)$ , donde  $h$  es analítica en  $B(0, 1)$ , y con módulo menor o igual que 1. Podemos entonces escribir que

$$f(z) = zL_{-a}(zh(z)). \quad (3.4)$$

Si ahora tenemos en cuenta (3.1)

$$|f(z)| \geq |z| \frac{a - |zh(z)|}{1 - a|zh(z)|} \geq |z| \frac{a - |z|}{1 - a|z|}, \quad \text{para } |z| < 1, \quad (3.5)$$

donde la segunda desigualdad viene de que  $x \rightarrow L_{-b}(x)$  es monótona creciente en  $x \in [-1, 1]$ .

Si ahora evaluamos  $z = \xi$  (respectivamente en  $\xi_1$  y  $\xi_2$ )

$$|\alpha| \geq r(f) \frac{a - r(f)}{1 - ar(f)} \quad (3.6)$$

y teniendo en cuenta (3.3) y que  $r(f) > 0$  concluimos que

$$r(f) \geq \frac{a - r(f)}{1 - ar(f)}.$$

Es por esto que para toda  $f \in \Phi_a$ ,  $r(f)$  no puede ser menor que la menor raíz  $\sigma$  de la ecuación

$$x = \frac{a - x}{1 - ax},$$

que es justamente el valor  $\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$  del enunciado del teorema. Esto demuestra que  $\rho \geq \sigma$ .

Tenemos ahora que si derivamos la función  $F(z)$  del enunciado,

$$F'(z) = \frac{a - 2z + az^2}{(1 - az)^2} = \frac{1}{1 - az} \left( \frac{a - z}{1 - az} - z \right),$$

es fácil ver que  $F'(\sigma) = 0$ , por lo que  $r(F) = \sigma$ , y solo puede ser ya que  $\rho = \sigma$ , la primera afirmación del teorema.

Supongamos ahora que  $f$  es de la forma  $F(\eta z)\eta^{-1}$ , con  $\eta \in \mathbb{C}$  de módulo 1. Basta tomar  $z_0 = \rho\eta^{-1}$  y comprobar que

$$f'(z_0) = F'(\eta z_0) = F'(\rho) = 0$$

para deducir que  $r(f) = \rho$ .

Tomamos ahora una función  $f \in \Phi_a$ , que satisfaga que  $r(f) = \rho$ . Por (3.3) y (3.6), tenemos que  $|\alpha| = r(f)^2$ . Por tanto, para  $z = 0$ , se da la igualdad en (3.2). Como  $\alpha \neq 0$ , entonces deducimos que  $L_\alpha \circ f$  es una rotación de  $L_\xi^2$ , es decir, que existe un  $\eta \in \mathbb{C}$  de módulo 1 de forma que

$$L_\alpha \circ f = \eta L_\xi^2$$

y respectivamente con  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , con lo que concluimos que  $f$  es de grado 2, es decir, es una fracción racional cuyos numerador y denominador tienen grado a lo sumo 2. La única forma de que esto ocurra es que la función  $h(z)$  de (3.4) sea una constante, y como las igualdades se alcanzan en (3.2), (3.3) y (3.6), es de módulo 1. Con esto entonces queda demostrada la segunda afirmación del teorema. □

Antes de mencionar el segundo teorema vamos a establecer la siguiente notación. Dada  $f \in \Phi_a$ , sea  $E(f)$  el conjunto de números  $r$  positivos para los cuales existe una región  $\Omega_r$ , con  $0 \in \Omega_r \subset B(0, 1)$ , tal que  $f$  transforma  $\Omega_r$  de manera inyectiva en  $B(0, r)$ .

También consideraremos

$$R(f) = \sup E(f) \quad \text{y} \quad P = \inf_{f \in \Phi_a} R(f).$$

Ahora podemos enunciar el segundo teorema de esta sección, que será el resultado que nos permitirá acotar inferiormente en la demostración del *Teorema de Bloch*.

**Teorema 3.2.** Podemos asegurar que  $P = \rho^2$  siendo  $\rho$  el definido en el teorema 3.1. Además,  $R(f) = P$ , si y solo si,  $f$  es una de las funciones extremales de la forma  $F(\eta z)\eta^{-1}$  del teorema 3.1.

### Demostración.

Por la desigualdad (3.5) vista en el teorema anterior, tenemos que

$$\min_{|z|=r} |f(z)| \geq r \frac{a-r}{1-ar}, \quad 0 < r < 1. \quad (3.7)$$

También tenemos que

$$g(r) = r \frac{a-r}{1-ar} \Rightarrow g'(r) = \frac{1}{1-ar} \left( \frac{a-r}{1-ar} - r \right),$$

que solo se anula en los puntos  $\frac{1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$ , y como  $r \in (0, 1)$ , entonces solo se anula en  $r = \rho$ , además tenemos que  $g'(0) > 0$  y  $g'(1) < 0$ , por tanto concluimos que el valor máximo de  $g(r)$  cuando  $r \in (0, 1)$  se alcanza en  $r = \rho$ , y además, este valor es  $\rho^2$ . Como  $a < 1$ , entonces  $1 - a^2 < 1$  y

$$\sqrt{1-a^2} > 1-a^2 \Rightarrow \rho = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} < a.$$

Si ahora tomamos  $r \in (0, \rho]$ , entonces

$$r \leq \rho < a \Rightarrow a-r > 0 \Rightarrow r \frac{a-r}{1-ar} > 0,$$

y por la desigualdad (3.7) tenemos que  $f(z) \neq 0$  para  $0 < |z| \leq \rho$ .

Denotemos por  $\Omega$  a la componente conexa de  $f^{-1}(B(0, \rho^2))$  que contiene  $z = 0$ , entonces  $\Omega \subset B(0, \rho)$ . Por lo tanto, la restricción de  $f$  a  $\Omega$  es una función que transforma la frontera de  $\Omega$  en la frontera de  $B(0, \rho^2)$ . Y el único punto de  $\Omega$  en el que  $f$  se anula es  $z = 0$ , con  $n(0, f) = 1$ .

Es por esto, que  $f$  transforma de forma inyectiva  $\Omega$  en  $B(0, \rho^2)$ . Como esto se cumple para toda  $f \in \Phi_a$ , deducimos que  $\rho^2 \leq P$ .

Observemos que  $F'(\rho) = 0$ ,  $F$  es una fracción racional de grado 2 y  $F(z)$  solo alcanza el valor  $\rho^2$  en  $z = \rho$ , todo esto unido al razonamiento del teorema anterior nos indica que  $R(F) = \rho^2$ , ya que, en el teorema 3.1 dedujimos que  $r(F) = \rho^2$ . Por tanto como  $\rho^2 \leq P$ , y  $R(F) = \rho^2$ , concluimos que

$$P = \rho^2.$$

Por el mismo razonamiento usado en la demostración del teorema 3.1, tenemos que para toda función  $f$  de la forma  $F(\eta z)\eta^{-1}$ , donde  $\eta \in \mathbb{C}$  y tiene módulo 1, se cumple que  $R(f) = P$ .

Para ver el contrarrecíproco, vamos a suponer en (3.5) que  $h(z)$  no es constante de módulo 1, entonces se daría que

$$\mu = \min_{|z|=\rho} |f(z)| > \rho \frac{a - \rho}{1 - a\rho}.$$

Por lo que la componente conexa de  $f^{-1}(B(0, \mu))$  que contiene a  $z = 0$  estaría en  $B(0, \rho)$ , y por el mismo razonamiento seguido anteriormente tendríamos que  $R(f) \geq \mu$  y a su vez  $\mu > P$ . Queda entonces demostrado que si  $R(f) = P$ , entonces  $f$  tiene que ser de la forma  $f = F(\eta z)\eta^{-1}$  con  $\eta \in \mathbb{C}$  de módulo 1, con lo que completamos la prueba del teorema.

□

### 3.3. El teorema de Bloch

Supongamos que  $f$  es una función analítica no constante en el dominio  $\Omega$ . Sea el *número de Bloch*  $b(f)$  de  $f$  el supremo del conjunto de números positivos  $r$  que satisfacen la siguiente condición: existe un subdominio  $\Omega_1 \subset \Omega$  que  $f$  transforma de manera inyectiva sobre un disco de radio  $r$ .

Sea el *número de Landau* de  $f$ , denotado por  $l(f)$ , el supremo del conjunto de números positivos  $r$  tales que  $f(\Omega)$  contiene un disco de radio  $r$ .

Sea  $\Phi$  la familia de funciones  $f$  que son analíticas en  $B(0, 1)$  y que están normalizadas por la condición

$$f'(0) = 1. \tag{3.8}$$

La *constante de Bloch*  $\beta$  se define como

$$\beta = \inf_{f \in \Phi} b(f)$$

y la *constante de Landau*  $\lambda$  se define como

$$\lambda = \inf_{f \in \Phi} l(f).$$

Claramente, se cumple que  $b(f) \leq l(f)$  y  $\beta \leq \lambda$ .

Una vez vistas estas definiciones, vamos a demostrar una mejora del Lema de Schwarz.

**Lema 3.3** (Lema Schwarz–Pick). Sea  $f$  analítica en  $B(0, 1)$  de forma que  $|f| < 1$  y sea  $a \in B(0, 1)$ , entonces

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2},$$

y se da la igualdad si y solo si  $f$  es un automorfismo (es decir, una aplicación holomorfa y biyectiva, luego de inversa holomorfa) del disco unidad en si mismo.

**Nota.** Queremos con este resultado comparar la derivada de  $f$  en un punto  $a$  con los valores de  $f$  y  $a$  mismos, mediante una desigualdad que tiene un sabor geométrico: está controlando cuánto puede estirarse  $f$  en términos de su comportamiento en el disco.

**Demostración.**

Para comenzar vamos a denotar  $b := f(a)$ , y vamos a considerar las funciones

$$L_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} \quad \text{y} \quad L_{-a}(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z},$$

ahora construimos la función  $F(z) = L_b \circ f \circ L_{-a}(z)$ . Si evaluamos  $F$  en  $z = 0$  entonces

$$F(0) = L_b \circ f \circ L_{-a}(0) = L_b \circ f(a) = L_b(b) = 0.$$

Tenemos ahora que como  $|f| < 1$ , y las funciones  $L_{-a}$  y  $L_b$  son transformaciones de Möbius, entonces  $F : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ . Además,  $F$  es analítica en  $B(0, 1)$  por ser composición de funciones analíticas. En estas condiciones podemos, por tanto, aplicar el Lema de Schwarz clásico y deducir que

$$|F(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad |F'(0)| \leq 1.$$

Vamos ahora a relacionar  $F'(0)$  con  $f'(a)$ , para ello vamos a calcular

$$F'(0) = L'_b(f(a)) \cdot f'(a) \cdot L'_{-a}(0),$$

derivando tenemos que

$$\begin{aligned} L_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} &\Rightarrow L'_b(z) = \frac{1 - |b|^2}{(1 - \bar{b}z)^2} \Rightarrow L'_b(b) = \frac{1}{1 - |b|^2} \\ L_{-a}(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} &\Rightarrow L'_{-a}(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 + \bar{a}z)^2} \Rightarrow L'_{-a}(0) = 1 - |a|^2 \end{aligned}$$

y si lo juntamos todo

$$F'(0) = \frac{1}{1 - |f(a)|^2} \cdot f'(a) \cdot (1 - |a|^2).$$

Tomando módulos y aplicando lo deducido por el Lema de Schwarz,

$$|F'(0)| = \frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \cdot (1 - |a|^2) \leq 1 \Rightarrow \frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}, \quad (3.9)$$

que es lo que queríamos ver.

De la aplicación del Lema de Schwarz clásico también deducimos que si se da la igualdad en (3.9), entonces  $F(z) = e^{i\theta}z$ , denotaremos por  $R_\theta(z)$  a esta rotación. Por tanto,

$$L_b \circ f \circ L_{-a}(z) = R_\theta(z) \Rightarrow f \circ L_{-a}(z) = L_{-b} \circ R_\theta(z) \Rightarrow f = L_{-b} \circ R_\theta \circ L_a(z),$$

donde  $L_{-b} \circ R_\theta \circ L_a(z)$  es un automorfismo de  $B(0, 1)$ , por ser composición de automorfismos en  $B(0, 1)$ . Con esto queda concluida la demostración.

□

Una vez visto este resultado podemos enunciar el Teorema de Bloch, que establece que, a pesar de la gran amplitud de la clase  $\Phi$ , la constante de Bloch no es nula.

**Teorema 3.4** (Teorema de Bloch). La constante de Bloch  $\beta$  es estrictamente positiva.

**Demostración.**

Sea  $\Phi_1$  la subfamilia de  $\Phi$  consistente en aquellas funciones pertenecientes a  $\Phi$  cuyo desarrollo en potencias en torno a  $z = 0$  tiene un radio de convergencia mayor que 1. Podemos afirmar que

$$\beta \leq \inf_{f \in \Phi_1} b(f).$$

Por otro lado, dada  $f \in \Phi$ , sea  $g$  definida por  $g(x) = f(rx)r^{-1}$ , con  $0 < r < 1$ . Entonces  $g$  es analítica en  $B(0, \frac{1}{r})$  por lo que  $g \in \Phi_1$ , y se tiene claramente que  $b(g) \leq b(f)r^{-1}$ . Por tanto,

$$\inf_{f \in \Phi_1} b(f) \leq \beta r^{-1},$$

y, en consecuencia, por ser  $r \in (0, 1)$  arbitrario,

$$\inf_{f \in \Phi_1} b(f) = \beta. \quad (3.10)$$

Supongamos ahora que  $f \in \Phi_1$ . Observamos que cada una de las funciones  $g_a = f \circ L_{-a}$ , con  $|a| < 1$ , satisface que  $b(g_a) = b(f)$ , ya que cada  $L_{-a}$  es una biyección del círculo unidad en sí mismo, y que

$$g'_a(z) = f'(L_{-a}(z)) \cdot \left( \frac{1 - |a|^2}{(1 + \bar{a}z)^2} \right) \Rightarrow g'_a(0) = f'(a)(1 - |a|^2).$$

Como  $f'$  es continua en el compacto  $\overline{B}(0, 1)$  (ya que el radio de convergencia de  $f$  es mayor que 1), el máximo de  $|g'_a(0)|$  al variar  $a$  en  $\overline{B}(0, 1)$  es finito y se alcanza en un punto  $a_0 \in B(0, 1)$  (obsérvese que la expresión se anula en la frontera). Este valor máximo tiene que ser al menos 1, ya que si tomamos  $a = 0$  entonces  $g'_0(0) = 1$ .

Sea

$$g = \frac{g_{a_0}}{|g'_{a_0}(0)|},$$

entonces se tiene que  $b(g) \leq b(f)$ , ya que  $b(g_{a_0}) = b(f)$  y  $|g'_{a_0}(0)| \geq 1$ ; y que, por el lema 3.3,  $g$  satisface la desigualdad

$$(1 - |z|^2)|g'(z)| \leq 1 \quad (3.11)$$

Gracias a esta desigualdad, podemos obtener una cota inferior para  $b(f)$  que es independiente de  $f$ . De hecho, sea  $h = g - g(0)$ , de forma que  $b(h) = b(g)$ . Entonces

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right). \quad (3.12)$$

Para justificar esta desigualdad, observamos que, como  $g$  es holomorfa, se puede expresar como

$$h(z) = \int_0^z g'(w) dw,$$

y parametrizando el segmento que une 0 con  $z$  mediante  $t \mapsto tz$  con  $t \in [0, 1]$ , obtenemos

$$h(z) = z \int_0^1 g'(tz) dt.$$

Tomando módulos y usando la desigualdad (3.11), deducimos que

$$|h(z)| \leq |z| \int_0^1 \frac{1}{1 - t^2|z|^2} dt.$$

Esta integral se puede calcular explícitamente mediante el cambio de variable  $x = t|z|$ , y da como resultado

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right),$$

lo cual justifica la desigualdad (3.12).

Aplicando el Teorema 3.2 a

$$z \mapsto \frac{h(rz)}{\frac{1}{2} \log \left( \frac{1+r}{1-r} \right)}, \quad |z| < 1$$

donde  $0 < r < 1$ , se obtiene que:

$$b(f) \geq b(h) \geq \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+r}{1-r} \right) \delta \left( \frac{2r}{\log \left( \frac{1+r}{1-r} \right)} \right), \quad (3.13)$$

donde

$$\delta(x) = \left( \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right)^2.$$

Fijando  $r = \frac{1}{2}$  en la parte derecha de (3.13), obtenemos que

$$b(f) \geq 0,21.$$

Por tanto  $\beta \geq 0,21$  y el teorema queda probado.

□

### 3.4. El teorema de Ahlfors

En esta subsección desarrollamos una serie de resultados interconectados cuyo objetivo final es demostrar que la constante de Bloch satisface la desigualdad

$$\beta \geq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Este resultado, clásico en Análisis Complejo, tiene una gran relevancia tanto por su valor teórico como por ilustrar el uso de técnicas métricas y subarmónicas en el estudio de funciones holomorfas.

La estrategia sigue el enfoque del matemático L. Ahlfors, quien mejoró el Lema de Schwarz, resultado que limita cómo pueden deformarse las funciones dentro del disco unidad.

Lo que hacemos es construir una función auxiliar,  $\lambda(z)$ , que mide localmente hasta qué punto puede crecer una función sin perder ciertas propiedades. Luego analizamos cómo cambia esa  $\lambda(z)$  usando herramientas de teoría del potencial, y comprobamos que se comporta de forma controlada, es decir, que su logaritmo es subarmónico. Esta idea nos permitirá imponer un límite a  $\lambda(z)$ , y a partir de ahí, deduciremos la cota deseada para la constante de Bloch.

Este método combina geometría, análisis complejo y propiedades métricas de las funciones, y representa una de las formas más elegantes y potentes de abordar este tipo de problemas en matemáticas modernas. Para la elaboración de esta sección se han usado como fuentes los libros de J. B. Conway [4], L. Ahlfors [2] y un artículo también de L. Ahlfors [1].

Antes de empezar, enunciemos el teorema que da nombre a esta sección y que será nuestro objetivo durante el desarrollo de la misma.

**Teorema 3.5** (*Teorema de Ahlfors*). La constante de Bloch es mayor o igual que  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Comenzamos con los resultados auxiliares.

**Lema 3.6.** Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Supongamos que  $|f(z)| < A < +\infty$  y que  $f'(a) \neq 0$  para un  $a \in \Omega$ . Sean

$$\lambda(z) = \frac{A|f'(z)|}{A^2 - |f(z)|^2} \quad \text{y} \quad u(z) = \log \lambda(z).$$

Entonces

$$\Delta u(a) = 4[\lambda(a)]^2.$$

**Demostración.** Para empezar, tenemos que  $\lambda$  está bien definida. Y ahora tenemos que

$$u(z) = \log \left( \frac{A|f'(z)|}{A^2 - |f(z)|^2} \right) = \log A + \log |f'(z)| - \log(A^2 - |f(z)|^2).$$

Sabemos que el logaritmo del valor absoluto de una función analítica es armónico excepto en los ceros de dicha función analítica. Vamos entonces a estudiar cada término:

- Si  $f$  es analítica y  $f'(a) \neq 0$  entonces sabemos que  $\log |f'(z)|$  es armónica en  $a$ , y por tanto

$$\Delta \log |f'(a)| = 0.$$

- El término  $\log A$  es constante por lo que tiene

$$\Delta \log A = 0.$$

Por tanto concluimos que el único término que puede contribuir al laplaciano en el punto  $a$  es

$$-\log(A^2 - |f(z)|^2),$$

por lo que

$$\Delta u(a) = -\Delta \log(A^2 - |f(a)|^2).$$

Vamos ahora a calcular el laplaciano de forma explícita, para ello vamos a tener en cuenta que

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}},$$

entonces

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(A^2 - |f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2 \frac{A^2}{(A^2 - |f(z)|^2)^2}.$$

Por tanto

$$\Delta u(a) = 4 \frac{A^2 |f'(a)|^2}{(A^2 - |f(a)|^2)^2} = 4\lambda(a)^2.$$

□

**Lema 3.7.** Supongamos que  $f$  es analítica en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , que  $|f| < A^2$ , siendo  $0 < A < +\infty$  y que para un punto  $a \in \Omega$  se tiene que  $f(a) \neq 0$  y  $f'(a) \neq 0$ . Si consideramos

$$\lambda(z) = \frac{A|f'(z)|}{2|f(z)|^{1/2}(A^2 - |f(z)|)} \quad \text{y} \quad u(z) = \log \lambda(z),$$

entonces se cumple que

$$\Delta u(a) = 4[\lambda(a)]^2.$$

**Demostración.**

Como  $f$  es analítica y  $f(a) \neq 0$ , entonces existe una función  $g$  analítica en un entorno de  $a$ , tal que

$$g(z)^2 = f(z),$$

es decir,

$$g = e^{\frac{1}{2} \ln f(z)}$$

localmente, eligiendo una rama adecuada del logaritmo. Además como  $f$  es analítica, entonces

$$f'(z) = 2g(z)g'(z) \Rightarrow |f'(z)| = 2|g(z)| \cdot |g'(z)| = 2|f(z)|^{1/2} \cdot |g'(z)|.$$

Si ahora sustituimos esto en la expresión de  $\lambda(z)$  tenemos que

$$\lambda(z) = \frac{2A|f(z)|^{1/2} \cdot |g'(z)|}{2|f(z)|^{1/2}(A^2 - |f(z)|)} = \frac{A|g'(z)|}{(A^2 - |f(z)|)} = \frac{A|g'(z)|}{(A^2 - |g(z)|^2)}.$$

Tenemos entonces que  $g$  es una función analítica en un entorno de  $a$ , que  $|g(z)| < A$ , y que  $g'(a) \neq 0$  ya que  $g(a) \neq 0$ . Estamos entonces en condiciones de aplicar el lema anterior a la función  $g$  y afirmar que

$$\Delta u(a) = 4[\lambda(a)]^2.$$

□

Antes de seguir con el siguiente resultado vamos a dar una definición que usaremos.

**Definición 3.8.** Consideramos una función continua no negativa  $\lambda$  en  $B(0, 1)$ . Supongamos que  $\lambda(a) \neq 0$  para un punto  $a \in B(0, 1)$ . Entonces, una función positiva  $\lambda_a$  que posee derivadas parciales continuas de segundo orden en algún entorno de  $a$  se dice que *soporta* a  $\lambda$  en  $a$  si se cumple que

1.  $\lambda_a(a) = \lambda(a)$ ,
2.  $\lambda_a(x) \leq \lambda(x)$  en algún entorno de  $a$ ,
3. Con  $u_a(x) = \log \lambda_a(x)$ ,

$$\Delta u_a(x) \geq 4[\lambda_a(x)]^2 \tag{3.14}$$

en algún entorno de  $a$ .

A continuación vamos a dar una versión ligeramente generalizada de la extensión del Lema de Schwarz dada por Ahlfors. Este teorema difiere de la versión de Ahlfors en que se permite un conjunto excepcional, donde no se imponen requisitos sobre funciones de soporte. De hecho, se podrían permitir incluso conjuntos cerrados de capacidad cero como conjuntos excepcionales. La demostración sería esencialmente la misma salvo por el uso de herramientas más sofisticadas de la teoría del potencial, como el teorema de Evans. Para establecer la estimación inferior de Ahlfors para la constante de Bloch, se puede operar con esta extensión del Lema de Schwarz de Ahlfors.

**Teorema 3.9.** Sea  $\lambda$  una función continua no negativa en  $B(0, 1)$ . Supongamos que para cada  $z \in B(0, 1)$  para el cual  $\lambda(z) \neq 0$ , salvo posiblemente en un conjunto de puntos  $E$  que no tiene puntos de acumulación en  $B(0, 1)$ , existe una función  $\lambda_z$  que soporta a  $\lambda$  en  $z$ .

Entonces

$$\lambda(z) \leq (1 - |z|^2)^{-1}, \quad |z| < 1. \tag{3.15}$$

**Nota.** Cabe observar que el lema 3.3 puede ser incluido dentro de este teorema, como se deduce del lema 3.6 de esta sección. La función  $\lambda$  definida en el lema 3.6 se soporta a sí misma en cada  $x$  para el cual  $\lambda(x) \neq 0$ .

**Demostración.**

Tomemos el conjunto  $E$  descrito en el enunciado del teorema, ahora, sea  $0 < r < 1$ , demos-  
tremos que

$$\lambda(z) \leq \frac{r}{r^2 - |z|^2} =: \mu(z) \quad \text{si } |z| < r, \quad (3.16)$$

que es lo mismo que

$$\frac{\lambda(z)}{\mu(z)} \leq 1 \quad \text{si } |z| < r, \quad (3.17)$$

de donde obtendremos la desigualdad (3.15) para cada  $z \in B(0, 1)$  haciendo que  $|z| < r \rightarrow 1$ .

Sea  $\eta > 0$  y sea

$$\lambda^*(z) = \lambda(z) \prod_{k=1}^n |L_{a_k}(z)|^\eta \quad (3.18)$$

donde  $a_k$ , para  $k = 1, \dots, n$  son los distintos puntos de  $E$  en  $B(0, r)$ , siendo  $n$  posiblemente 0 (serán necesariamente finitos por ser  $E$  discreto en  $B(0, 1)$ ).

Veamos que (3.16) se cumple reemplazando  $\lambda$  por  $\lambda^*$  y después haciendo tender  $\eta \rightarrow 0$  y usando la continuidad de  $\lambda$  concluiremos que se cumple (3.16).

Si (3.16) no se cumple con  $\lambda^*$  reemplazando a  $\lambda$ , la continuidad de  $z \mapsto \lambda^*(z)/\mu(z)$  en el compacto  $\overline{B}(0, r)$  garantiza que existe  $b \in B(0, r)$  tal que

$$\lambda^*(b) > \mu(b) \Rightarrow \frac{\lambda^*(b)}{\mu(b)} > 1,$$

y de modo que

$$\frac{\lambda^*(b)}{\mu(b)} \geq \frac{\lambda^*(z)}{\mu(z)} \quad \text{si } |z| < r. \quad (3.19)$$

Sea  $\lambda_b$  que soporta a  $\lambda$  en  $b$ , entonces

$$\lambda_b^* = \lambda_b \prod_{k=1}^n |L_{a_k}(z)|^\eta$$

soporta  $\lambda^*$  en  $b$ . Esto es fácil de ver ya que, como por definición  $\lambda_b(b) = \lambda(b)$ , entonces:

- $\lambda_b^*(b) = \lambda^*(b)$ .
- $\lambda_b^*(z) \leq \lambda^*(z)$  en un entorno de  $b$ .
- Vamos a ver ahora que  $\Delta \log \lambda_b^*(z) \geq 4[\lambda_b^*(z)]^2$ , para ello vamos a aplicar el laplaciano a  $\log \lambda_b^*(z)$  y vamos a ir calculándolo poco a poco. Primero tenemos que

$$\log \lambda_b^*(z) = \log \lambda_b(z) + \eta \sum_{k=1}^n \log |L_{a_k}(z)|$$

por tanto aplicando el laplaciano

$$\Delta \log \lambda_b^*(z) = \Delta \log \lambda_b(z) + \eta \sum_{k=1}^n \Delta \log |L_{a_k}(z)|.$$

Recordemos ahora que  $\log |L_{a_k}(z)|$  es armónica en los puntos en los que no se anula  $L_{a_k}$ , por lo que para puntos cercanos a  $b$  alejados de los  $a_k$  tenemos que

$$\Delta \log |L_{a_k}(z)| = 0 \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

Tenemos entonces que

$$\Delta \log \lambda_b^*(z) = \Delta \log \lambda_b(z) \geq 4[\lambda_b(z)]^2.$$

Finalmente basta observar que como para todo  $k = 1, \dots, n$  se tiene que  $|L_{a_k}(z)| < 1$  en  $B(0, r)$ , entonces

$$\lambda_b^*(z) = \lambda_b(z) \prod_{k=1}^n |L_{a_k}(z)|^\eta \leq \lambda_b(z),$$

por lo que

$$\Delta \log \lambda_b^*(z) \geq 4[\lambda_b(z)]^2 \geq 4[\lambda_b^*(z)]^2$$

para  $z$  cercano a  $b$ .

De (3.19) concluimos que

$$\frac{\lambda_b^*(b)}{\mu(b)} \geq \frac{\lambda_b^*(z)}{\mu(z)}$$

en un entorno de  $b$ . Por lo tanto, si ponemos  $u(z) = \log \lambda_b^*(z)$  y  $v(z) = \log \mu(z)$ , vemos que  $u - v$  tiene un máximo relativo en  $b$ , así que el laplaciano de  $u - v$  en  $b$  es menor o igual que 0. Vamos entonces a calcular el laplaciano de  $u - v$ :

$$\begin{aligned} \Delta u(z) &= \Delta \log \lambda_b^*(z) \geq 4[\lambda_b^*(z)]^2 \Rightarrow \Delta u(b) \geq 4[\lambda_b^*(b)]^2 = 4[\lambda^*(b)]^2, \\ \Delta v(z) &= \Delta \log \mu(z) = \Delta(-\log(r^2 - |z|^2)) = \frac{4|z|^2}{(r^2 - |z|^2)^2} \leq \frac{4r^2}{(r^2 - |z|^2)^2} = 4[\mu(z)]^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\Delta(u - v)(b) \geq 4[\lambda^*(b)]^2 - 4[\mu(b)]^2 = 4\{[\lambda^*(b)]^2 - [\mu(b)]^2\}$$

y este valor es mayor que 0 por hipótesis, por lo que llegamos a contradicción. Finalmente concluimos que la desigualdad (3.16) se cumple con  $\lambda^*$  reemplazando a  $\lambda$ , con lo que queda demostrado el teorema. □

Una vez vista esta versión ligeramente generalizada de la extensión del Lema de Schwarz de Ahlfors, vamos a continuar viendo resultados que nos ayudarán a concluir con la demostración del Teorema de Ahlfors.

**Lema 3.10.** Sea  $\lambda(z)$  una función que cumple las condiciones del teorema 3.9, entonces  $u(z) = \log \lambda(z)$  es subarmónica en  $B(0, 1)$ .

#### **Demostración.**

Tenemos que  $\lambda(z)$  es positiva y continua en  $B(0, 1)$ , lo que implica que  $u(z)$  está bien definida y es continua en  $B(0, 1)$ . Tomamos ahora un punto  $z_0 \in B(0, 1) \setminus E$ , y por hipótesis tenemos una función  $\lambda_{z_0}(z)$  de clase  $\mathcal{C}^2$  que soporta a  $\lambda(z)$  en  $z_0$ , es decir,

- $\lambda_{z_0}(z_0) = \lambda(z_0)$ .
- $\lambda_{z_0}(z) \leq \lambda(z)$  en un entrono de  $z_0$ .

- $\Delta \log \lambda_{z_0}(z_0) \geq 4[\lambda_{z_0}(z_0)]^2$ .

Si definimos ahora  $u_{z_0}(z) = \log \lambda_{z_0}(z)$ , entonces observamos que

- $u_{z_0}(z_0) = u(z_0)$ .
- $u_{z_0}(z) \leq u(z)$  en un entrono de  $z_0$ .
- $\Delta u_{z_0}(z_0) \geq 4[\lambda_{z_0}(z_0)]^2 \geq 4[\lambda(z_0)]^2 \geq 0$ .

Por lo que concluimos que  $u_{z_0}$  es una función de clase  $\mathcal{C}^2$  que soporta a  $u(z)$  en  $z_0$ , y verifica que  $\Delta u_{z_0}(z_0) \geq 0$ , lo cual nos permite aplicar el criterio de subarmonicidad por funciones soporte, que dice lo siguiente:

*"Si una función continua  $u$  tiene en cada punto  $z \in \Omega$  una función  $u_z \in \mathcal{C}^2$  definida en un entorno de  $z$ , tal que  $u_z(z) = u(z)$ ,  $u_z(z) \leq u(z)$  en un entorno de  $z$  y  $\Delta u_z(z) \geq 0$ , entonces  $u$  es subarmónica en  $\Omega$ ."*

Por tanto concluimos que  $u(z)$  es subarmónica en cada punto de  $B(0, 1) \setminus E$ . Y debido a que  $E$  es un conjunto que no tiene puntos de acumulación en  $B(0, 1)$ , es decir  $E' \cap B(0, 1) = \emptyset$ , concluimos que  $u(z)$  es subarmónica en  $B(0, 1)$ .

□

Para aplicar ahora el teorema 3.9 a un problema específico, queremos diseñar, en términos de los datos del problema, una función  $\lambda(z)$  que satisfaga la condición de soporte y proporcione información útil mediante el teorema 3.9. Consideremos la función  $\lambda(z)$  construida por Ahlfors en relación con el teorema de Bloch.

Comenzamos con  $f$  analítica en  $B(0, 1)$ , satisfaciendo  $f'(0) = 1$ . Para cada  $z \in B(0, 1)$ , definimos  $\rho(z)$  de la siguiente manera:

- Si  $f'(z) = 0$ , ponemos  $\rho(z) = 0$ .
- Si  $f'(z) \neq 0$ , entonces  $\rho(z)$  es el supremo del conjunto de los  $r > 0$  para los cuales la restricción de  $f$  a la componente conexa de  $f^{-1}(B(f(z), r))$  que contiene a  $z$ , transforma esta componente de forma inyectiva sobre  $B(f(z), r)$ .

Denotamos por  $\Omega_z$  la componente conexa de  $f^{-1}(B(f(z), \rho(z)))$  que contiene a  $z$ . Por definición de  $\rho(z)$ , tiene que haber un punto en la frontera de  $\Omega_z$  donde falle la inyectividad de la función  $f$ , esto puede darse por dos causas:

- La primera causa es que lleguemos al borde del dominio de definición de  $f$ , es decir, que lleguemos a  $\partial B(0, 1) = C(0, 1)$ .
- En el caso de que no lleguemos al borde de definición de  $f$ , entonces el punto en cuestión, al que llamaremos  $\xi$ , tiene que ser un punto crítico, es decir, un cero de  $f'(z)$ , ya que si no lo fuera, como  $f$  sigue siendo holomorfa en un entorno de  $\xi$ , y  $f'(\xi) \neq 0$ , por el teorema de la inversa local  $f$  sería localmente inyectiva en un entorno de  $\xi$ , lo cual nos permitiría extender  $\Omega_z$ , lo que entra en contradicción con su definición.

Veamos ahora que la función  $\rho(z)$  es continua, para ello vamos a distinguir dos casos.

- Si  $f'(a) \neq 0$  entonces por el teorema de la inversa local, sabemos que  $f$  es inyectiva en un entorno de  $a$ , por lo que  $\rho(a) > 0$ , y podemos tomar un  $\Omega_a$ . Sea  $z \in \Omega_a$ , como  $f$  es inyectiva en  $\Omega_a$ , también lo es en algún entorno de  $z$ , y como  $f$  es continua, tenemos que

$$|f(z) - f(a)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } z \rightarrow a,$$

por lo que para  $z \in \Omega_a$  suficientemente cercano a  $a$

$$\rho(a) - |f(z) - f(a)| \leq \rho(z) \leq \rho(a) + |f(z) - f(a)|,$$

es decir,

$$|\rho(z) - \rho(a)| \leq |f(z) - f(a)|,$$

y como  $f$  es continua, el segundo miembro tiende a 0 cuando  $z \rightarrow a$ , así que

$$\rho(z) \rightarrow \rho(a),$$

lo que implica que  $\rho(z)$  es continua en los puntos donde  $f'(z) \neq 0$ .

- Si  $f'(a) = 0$ , usando el teorema de representación local para funciones meromorfas (ver apéndice para más detalles), vemos que para  $z$  suficientemente cercano a  $a$ ,

$$\rho(z) = |f(z) - f(a)|. \quad (3.20)$$

En conclusión, la función  $\rho(z)$  es continua en todo el disco unidad. Además, se cumple que  $\rho(z) \leq b(f)$  para todo  $z \in B(0, 1)$ . A partir de ahora, trabajaremos únicamente con funciones  $f$  tales que  $b(f) < +\infty$ .

Ahora, sea  $A > \sqrt{3b(f)}$  y  $n(z, f)$  la multiplicidad de  $f$  en  $a$ , es decir, el orden de  $a$  como cero de la función  $z \mapsto f(z) - f(a)$ . Definimos  $\lambda$  por:

$$\lambda(z) := \begin{cases} \frac{A|f'(z)|}{2\sqrt{\rho(z)}[A^2 - \rho(z)]} & \text{cuando } f'(z) \neq 0, \\ \frac{1}{A} \sqrt{\frac{|f''(z)|}{2}} & \text{cuando } n(z; f) \geq 2. \end{cases} \quad (3.21)$$

La condición (3.20) implica que  $\lambda$  es continua, veamos esto: en los puntos donde  $f'(z) \neq 0$ , la expresión de  $\lambda(z)$  depende de  $f'(z)$  y  $\rho(z)$ , y ambas funciones son continuas. El problema viene en los puntos donde  $f'(z) = 0$ . Supongamos entonces que  $f'(a) = 0$  y que la multiplicidad de  $f$  en  $a$  es 2, en este caso

$$f(z) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(z - a)^2 + \text{términos de orden superior}$$

por lo que cerca de  $a$

- $f'(z) \approx f''(a)(z - a)$ .
- $f(z) - f(a) \approx \frac{f''(a)}{2}(z - a)^2$ , y entonces por (3.20)

$$\rho(z) = |f(z) - f(a)| \approx \frac{|f''(a)|}{2}|z - a|^2.$$

Ahora si sustituimos el desarrollo asintótico de la expresión de  $\lambda(z)$  cuando  $z \rightarrow a$  tenemos

$$\lambda(z) \approx \frac{A|f''(a)||z - a|}{2\sqrt{\frac{|f''(a)|}{2}}|z - a|A^2} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{|f''(a)|}{2}},$$

que como podemos observar es el valor de  $\lambda(z)$  para los puntos donde  $f'(z) = 0$ , por tanto  $\lambda(z)$  es continua.

**Soporte para  $\lambda$ .** Supongamos que  $f'(a) \neq 0$ . Sea  $b$  un punto de  $C(f(a), \rho(a))$  que no sea la imagen mediante  $f$  de un punto frontera de  $\Omega_a$  en  $B(0, 1)$ , donde  $f$  tiene multiplicidad 1. Definamos  $\rho_a(z)$  simplemente como  $|f(z) - b|$  para  $z \in \Omega_a$ , obsérvese que

$$\rho_a(z) \geq \rho(z), \quad z \in \Omega_a.$$

A continuación definimos  $\lambda_a(z)$  como

$$\lambda_a(z) := \frac{A|f'(z)|}{2\sqrt{\rho_a(z)}[A^2 - \rho_a(z)]}. \quad (3.22)$$

Observamos que  $\rho_a(a) = |f(a) - b| = \rho(a)$ , y que por la desigualdad triangular

$$\rho_a(z) = |f(z) - b| \leq |f(z) - f(a)| + |f(a) - b| \leq b(f) + b(f) = 2b(f),$$

es decir,

$$\rho_a(z) \leq 2b(f).$$

Dado que la función  $t \mapsto t^{1/2}(A^2 - t)$  es creciente en  $\{0 \leq t \leq \frac{A^2}{3}\}$ , se deduce que  $\lambda_a(z) \leq \lambda(z)$  para  $z$  cercanos a  $a$ . Aplicando el lema 3.7 de esta sección, obtenemos que  $u_a(z) = \log \lambda_a(z)$  verifica  $\Delta u_a(a) = 4[\lambda_a(a)]^2$ . Dado que también se cumple que  $\lambda_a(a) = \lambda(a)$  y que  $\lambda_a(z) \leq \lambda(z)$  en un entorno de  $a$ , concluimos que  $\lambda_a$  soporta a  $\lambda$  en  $a$ .

En consecuencia, se verifica que la función  $\lambda$  cumple las hipótesis del teorema 3.9, es decir, que en cada punto  $z \in B(0, 1)$  con  $\lambda(z) \neq 0$ , existe una función  $\lambda_z$  que la soporta. Por tanto, podemos aplicar dicho teorema a  $\lambda$ .

Del hecho de que  $\lambda(0) \leq 1$ , y dado que  $f'(0) = 1$  y  $\rho(0) \leq b(f)$ , tenemos que

$$A \leq 2\sqrt{\rho(0)}[A^2 - \rho(0)] \leq 2\sqrt{b(f)}[A^2 - b(f)].$$

Así, dejando que  $A \rightarrow \sqrt{3b(f)}$ , obtenemos

$$\sqrt{3b(f)} \leq 4[b(f)]^{3/2}$$

y por lo tanto,

$$b(f) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Finalmente, como esto se cumple para toda función  $f$  con  $f'(0) = 1$ , se concluye que

$$\beta \geq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Lema 3.11.** Se puede establecer la conclusión de que  $\beta \geq \sqrt{3}/4$  con la extensión de Ahlfors del Lema de Schwarz sin tener que preocuparse de los puntos excepcionales. Es suficiente con estudiar los puntos donde la multiplicidad es 2.

### **Demostración.**

Para establecer que  $\beta \geq \sqrt{3}/4$ , basta con aplicar el teorema 3.9 a la función  $\lambda(z)$  en (3.21), sin necesidad de preocuparse por los puntos donde no se puede construir explícitamente una función de soporte.

Recordemos que la función  $\lambda(z)$  está definida de la siguiente forma:

$$\lambda(z) := \begin{cases} \frac{A|f'(z)|}{2\sqrt{\rho(z)[A^2 - \rho(z)]}} & \text{cuando } f'(z) \neq 0, \\ \frac{1}{A}\sqrt{\frac{|f''(z)|}{2}} & \text{cuando } f'(z) = 0 \text{ y } n(z; f) \geq 2, \end{cases}$$

por lo que el problema viene en los puntos donde  $f'(z) = 0$  y la multiplicidad de  $f$  en  $z$  es mayor o igual que 3, ya que para estos puntos no se ha definido explícitamente una función de soporte  $\lambda_z$ . Sin embargo, por el principio de los ceros aislados tenemos que estos puntos de multiplicidad mayor o igual que 3 forman un conjunto sin puntos de acumulación en  $B(0, 1)$ .

Es por esto que el conjunto de puntos donde  $\lambda(z)$  no está soportada cumple la hipótesis del teorema 3.9, que permite excepciones en un conjunto sin puntos de acumulación.

Por otra parte, en todos los demás puntos de  $B(0, 1)$  donde  $\lambda(z) \neq 0$ , se ha construido una función  $\lambda_a$  que verifica:

- $\lambda_a(a) = \lambda(a)$ ,
- $\lambda_a(z) \leq \lambda(z)$  en un entorno de  $z$ ,
- $\Delta \log \lambda_a(z) \geq 4[\lambda_a(z)]^2$  en un entorno de  $z$ ,

es decir, una función  $\lambda_a(z)$  que soporta a  $\lambda(z)$  en  $a$ .

En consecuencia, se cumplen todas las condiciones necesarias para aplicar el teorema 3.9, lo que nos permite obtener la desigualdad

$$\lambda(z) \leq \frac{1}{1 - |z|^2},$$

y con ella, podemos concluir que

$$\lambda(0) \leq \frac{1}{1 - |0|^2} = 1,$$

con lo que unido al hecho de que  $f'(0) = 1$  y  $\rho(0) \leq b(f)$ , podemos razonar de la misma forma que en (3.4), y concluir que

$$\beta \geq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

□



# Capítulo 4

## Aplicaciones en los desarrollos asintóticos

Con este capítulo se pretende mostrar la aplicación de los Teoremas de Phragmén-Lindelöf en el estudio de resultados relacionados con los desarrollos asintóticos. La dinámica que se seguirá será como en los anteriores; primero se demostrarán una serie de resultados útiles para poder finalizar con el resultado principal de este capítulo. Como mayor fuente de información para la realización de este capítulo se ha usado el artículo de A. Fruchard y Ch. Zhang [5].

Comenzamos este capítulo con una serie de definiciones y nociones básicas, y algunas herramientas que vamos a usar.

Una *superficie de Riemann* es una variedad compleja unidimensional, y es natural considerarlas en diversas situaciones, entre las que destaca la posibilidad de extender el dominio de funciones complejas multivaluadas (como el logaritmo o la raíz cuadrada) para que se vuelvan funciones monovaluadas sobre esa nueva superficie. Localmente se comporta como un abierto del plano complejo, pero globalmente puede tener una estructura mucho más complicada. Para nuestros intereses no necesitamos toda la maquinaria clásica, sino únicamente manejar la denominada superficie de Riemann del logaritmo. Como es sabido, la función logaritmo complejo se define como

$$\log z = \ln |z| + i \arg(z)$$

y esta función es multivaluada ya que el argumento  $\arg(z)$  está definido como

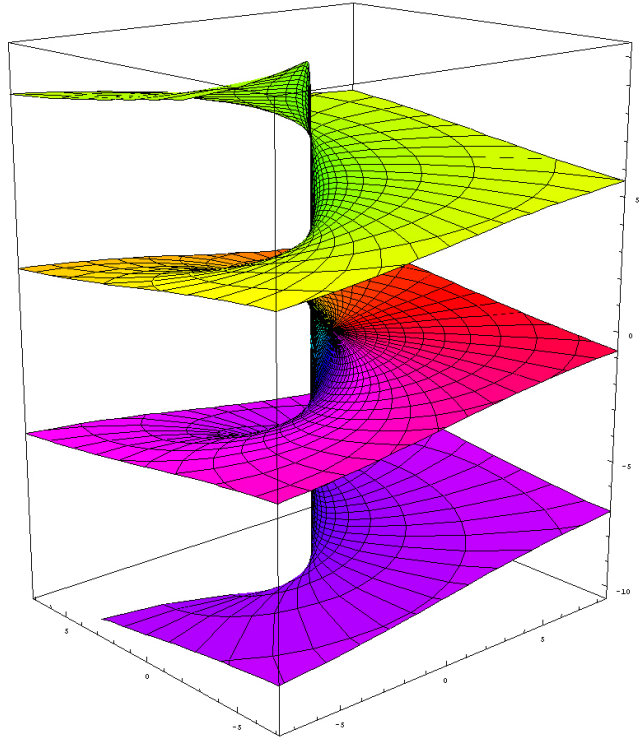
$$\arg(z) = \theta + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para la construcción de la superficie de Riemann del logaritmo, vamos a imaginar copias de  $\mathbb{C}$ , sin el punto 0 (el origen) y a las que se les realiza un corte por el eje real negativo, una vez para cada entero  $n \in \mathbb{Z}$ . A cada una de estas copias vamos a llamarla *hoja* de la superficie. Estas hojas se pegan de la siguiente manera:

- La rama principal del logaritmo corresponde al intervalo  $\theta \in (-\pi, \pi)$ .
- Cuando cruzas el eje real negativo, se pasa de una hoja a la siguiente.

Esto crea una especie de *hélice infinita* o *espiral logarítmica infinita*: al dar una vuelta completa alrededor del origen en sentido positivo, subes una hoja en la hélice.

La superficie de Riemann del logaritmo es, por tanto, una cubierta helicoidal infinita del plano complejo sin el origen.


 Figura 4.1: Superficie de Riemann de  $\log(z)$ 

Los puntos de dicha superficie son pares  $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ , que representan al número complejo  $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La función logaritmo definida como antes es una función ahora univaluada, pues cada punto de la superficie, que vamos a denotar como  $\mathbb{C}^*$ , lleva asociado un único “argumento”.

A continuación vamos a ver qué es un sector.

**Definición 4.1.** Dado  $\rho, \alpha, \beta$  como números reales que cumplen que

$$\rho > 0 \quad \text{y} \quad 0 < \alpha < \beta,$$

definimos el *sector abierto*  $S(\alpha, \beta; \rho)$  como:

$$S(\alpha, \beta; \rho) = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < |z| < \rho, \arg(z) \in (\alpha, \beta)\},$$

y el *sector cerrado*  $\overline{S}(\alpha, \beta; \rho)$  como:

$$\overline{S}(\alpha, \beta; \rho) = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < |z| \leq \rho, \arg(z) \in [\alpha, \beta]\}.$$

En el caso de que  $\rho = 1$ , simplemente usaremos la notación de  $S(\alpha, \beta)$ . Y llamaremos *dirección de*  $S(\alpha, \beta; \rho)$  a un elemento  $\theta$  del intervalo  $(\alpha, \beta)$ .

## 4.1. Desarrollos asintóticos

Dada la serie de potencias formal con coeficientes complejos

$$\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$$

y un número natural  $N \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\hat{f}_N$  la suma parcial de orden  $(N-1)$  de  $\hat{f}$ , es decir:

$$\hat{f}_N = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n.$$

**Definición 4.2.** Sea ahora  $S := S(\alpha, \beta; \rho)$  un sector,  $\theta \in (\alpha, \beta)$  una dirección de  $S$  y  $f$  una función analítica en  $S$ . Diremos que  $f$  posee un *desarrollo asintótico en la dirección  $\theta$*  si, para todo  $N \in \mathbb{N}$  y todo  $z \in S$  con  $\arg(z) = \theta$ , se cumple que

$$\left| f(z) - \hat{f}_N(z) \right| \leq C_N |z|^N$$

donde  $C_N$  es una constante mayor que 0 dependiente de  $N$ .

**Definición 4.3.** Si  $f$  posee  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico no solo en una dirección fija, sino uniformemente en todo el sector  $S(\alpha, \beta; \rho)$ , se dice que  $f$  posee  $\hat{f}$  como *desarrollo asintótico en el sector  $S(\alpha, \beta; \rho)$* .

**Definición 4.4.** Si además las constantes  $C_N$  pueden elegirse de la forma

$$C_N = CA^N N!$$

con constantes  $C$  y  $A$  mayores que 0 e independientes de  $N$ , entonces diremos que  $f$  admite un *desarrollo asintótico Gevrey de orden 1*.

**Definición 4.5.** Si estamos en el caso de un desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 en la dirección  $\theta$ , entonces dado un número  $R > 0$ , si para todo  $\delta > 0$  la constante  $A$  anterior puede elegirse de la forma

$$A = \frac{1}{R} + \delta$$

diremos que la función  $f$  posee un *desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 y de tipo  $R$*  en la dirección  $\theta$ .

Estas definiciones se han adaptado al caso complejo desde el caso real. En la teoría asintótica compleja, usualmente se consideran desarrollos asintóticos en sectores abiertos. El objetivo de esta sección es establecer un vínculo entre los desarrollos asintóticos en una dirección o en todo un sector utilizando el Teorema de Phragmén-Lindelöf para un sector (teorema 2.3).

#### 4.1.1. Desarrollos asintóticos nulos

El siguiente lema será útil para extender la existencia de desarrollo asintótico nulo en una sola dirección a todo un sector.

**Lema 4.6.** Sea  $f$  analítica en el sector abierto  $S(\alpha, \beta)$  y continua en el sector cerrado  $\overline{S}(\alpha, \beta)$  (ambos de radio 1). Supongamos que para todo  $z \in S(\alpha, \beta)$ , se cumple que

$$|f(z)| \leq 1, \tag{4.1}$$

y que existen  $C \geq 1$  y  $\lambda \geq 0$  tales que para todo  $z \in \overline{S}(\alpha, \beta)$  con  $\arg(z) = \alpha$ , se tiene que

$$|f(z)| \leq C|z|^\lambda. \tag{4.2}$$

Entonces para todo  $z \in \overline{S}(\alpha, \beta)$ , denotando  $\theta = \arg(z)$ , se cumple que

$$|f(z)| \leq C^{\frac{\beta-\theta}{\beta-\alpha}} |z|^{\frac{(\beta-\theta)\lambda}{\beta-\alpha}}.$$

**Demostración.**

Consideramos la función  $g$  dada por

$$g(z) = \exp \left( ia \frac{(\ln(z))^2}{2} + (b - ic) \ln(z) \right) f(z)$$

donde

$$a := -\frac{\lambda}{\beta - \alpha}, \quad b := -\frac{\lambda\beta}{\beta - \alpha}, \quad c := -\frac{\ln(C)}{\beta - \alpha}.$$

Tenemos que  $g(z)$  está bien definida y es continua en el sector cerrado  $\overline{S}(\alpha, \beta)$ , y es analítica sobre  $S(\alpha, \beta)$ , ya que es composición de funciones continuas en  $\overline{S}(\alpha, \beta)$  y analíticas en  $S(\alpha, \beta)$ .

Si ahora tomamos módulos en  $g(z)$ ,

$$|g(z)| = \left| e^{ia \frac{(\ln(z))^2}{2}} e^{(b+ic) \ln(z)} \right| |f(z)|,$$

desarrollamos cada parte por separado

$$\begin{aligned} \left| e^{ia \frac{(\ln(z))^2}{2}} \right| &= \left| e^{\frac{ia}{2} (\ln |z| + i \arg(z))^2} \right| = \left| e^{-a(\ln |z| \arg(z))} e^{ia \left( \frac{\ln^2(z)}{2} - \frac{\arg^2(z)}{2} \right)} \right| = |z|^{-a \arg(z)}, \\ \left| e^{(b+ic) \ln(z)} \right| &= \left| e^{(b+ic)(\ln |z| + i \arg(z))} \right| = |z|^b e^{-c \arg(z)}, \end{aligned}$$

y finalmente lo juntamos, tenemos que

$$|g(z)| = |z|^{-a \arg(z) + b} e^{-c \arg(z)} |f(z)|.$$

Teniendo ahora en cuenta las definiciones de  $a$ ,  $b$  y  $c$  y llamando  $\theta = \arg(z)$ ,

$$|g(z)| = |z|^{\frac{(\theta-\beta)\lambda}{\beta-\alpha}} C^{\frac{\theta}{\beta-\alpha}} |f(z)|. \quad (4.3)$$

Con esta igualdad vemos que  $g$  tiene un crecimiento sub-exponencial cuando  $z$  tiende a cero en  $S(\alpha, \beta)$ . Esta condición es equivalente a la condición (2.9) considerando que en vez de tender  $r \rightarrow \infty$ , en este caso  $\frac{1}{r} \rightarrow \infty$ .

Vamos a ver ahora la acotación de  $|g(z)|$  en  $\partial S(\alpha, \beta)$ :

- Si  $\arg(z) = \alpha$  sabemos que se cumple (4.2), entonces

$$|g(z)| \leq |z|^{-\lambda} C^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} C |z|^{\lambda} = C^{\frac{1+\alpha}{\beta-\alpha}} = C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}.$$

- Si  $\arg(z) = \beta$ , entonces, como  $f$  es continua en  $\overline{S}(\alpha, \beta)$  y se cumple (4.1),

$$|g(z)| \leq C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} |f(z)| \leq C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}.$$

- Finalmente, si  $|z| = 1$ , como  $f$  es continua en  $\overline{S}(\alpha, \beta)$ , se cumple (4.1), y como  $\theta \mapsto C^{\frac{\theta}{\beta-\alpha}}$  es una función creciente, tenemos que

$$|g(z)| \leq C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}.$$

Por tanto podemos afirmar que en  $\partial S(\alpha, \beta)$  se cumple que  $|g(z)| \leq C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}$ .

Estamos entonces en condiciones de aplicar el teorema de Phragmén-Lindelöf para un ángulo (teorema 2.3) y deducir que para todo  $z \in S(\alpha, \beta)$  se cumple que

$$|g(z)| \leq C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}},$$

y si ahora aplicamos la definición de  $g(z)$ ,

$$|g(z)| = |z|^{\frac{(\theta-\beta)\lambda}{\beta-\alpha}} C^{\frac{\theta}{\beta-\alpha}} |f(z)| \leq C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} \Rightarrow |f(z)| \leq C^{\frac{\beta-\theta}{\beta-\alpha}} |z|^{\frac{(\beta-\theta)\lambda}{\beta-\alpha}},$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

Ahora, en lo que respecta a los desarrollos asintóticos en el sentido en el que los hemos descrito en este capítulo, obtenemos inmediatamente del lema anterior, el siguiente resultado.

**Proposición 4.7.** Sea  $f$  una función analítica y acotada en un sector abierto  $S(\alpha, \beta; \rho)$  con  $\alpha < \beta$  y  $\rho > 0$ . Si  $f$  admite un desarrollo asintótico nulo en una dirección  $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$ , entonces también admite un desarrollo asintótico nulo en todo el sector  $S(\alpha, \beta; \rho)$ .

Tradicionalmente se ha denominado *función plana* a aquella que admite un desarrollo asintótico nulo. Y se denomina *función exponencialmente plana* (de orden 1) de tipo  $R$  en la dirección  $\theta_0$ , o simplemente *función exponencialmente plana* en la dirección  $\theta_0$ , si cuando  $z$  tiende a cero en la dirección  $\theta_0$ , para todo  $\delta > 0$ , se cumple que

$$|f(z)| = O\left(e^{-\frac{(R-\delta)}{z}}\right),$$

o lo que es lo mismo, si existe una  $C > 0$  de forma que cuando  $z$  tienda a cero en la dirección  $\theta$ , se tenga que

$$|f(z)| \leq Ce^{-\frac{R-\delta}{|z|}}.$$

**Nota.** El valor  $R$  dependerá de la dirección  $\theta$ , por eso normalmente se le denotará  $R(\theta)$ , e indica la velocidad de decaimiento exponencial, es decir, cuanto mayor es  $R(\theta)$ , más rápido decrece  $|f(z)|$  cuando  $z \rightarrow 0$ .

El siguiente resultado que vamos a ver se considera a menudo como una variante del Teorema de Phragmén-Lindelöf.

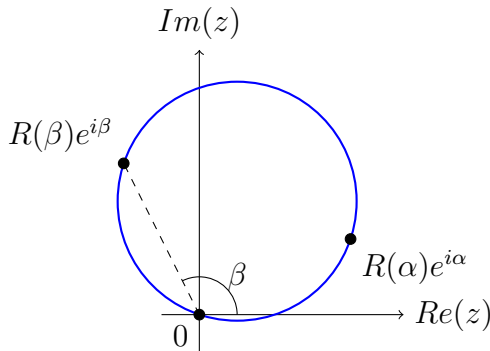
**Lema 4.8.** Sea  $f$  continua y acotada en el sector cerrado  $\overline{S}(\alpha, \beta)$ . Supongamos que  $\beta - \alpha < \pi$  y que  $f$  es exponencialmente plana de tipo  $R(\alpha) > 0$  en la dirección  $\alpha$  (respectivamente de tipo  $R(\beta) \geq 0$  en la dirección  $\beta$ ). Entonces, para toda dirección  $\theta \in (\alpha, \beta)$ ,  $f$  es exponencialmente plana de tipo  $R(\theta)$  dado por

$$R(\theta) = \frac{R(\beta) \sin(\theta - \alpha) - R(\alpha) \sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

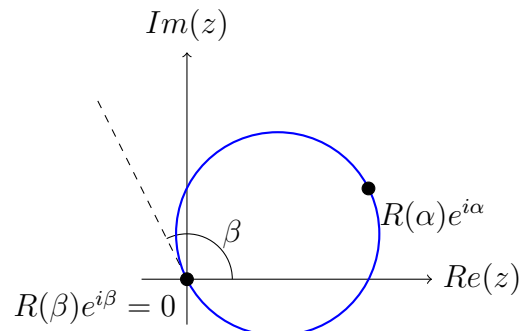
#### Demostración.

Para comenzar la demostración vamos a definir  $C$  como la circunferencia del plano complejo que:

- Si  $R(\beta) > 0$ , pasa por los puntos  $0$ ,  $R(\alpha)e^{i\alpha}$ , y  $R(\beta)e^{i\beta}$ .
- Si  $R(\beta) = 0$ , es tangente a la dirección  $\beta$  en el origen y pasa por  $R(\alpha)e^{i\alpha}$ .



(a)  $C$  cuando  $R(\beta) > 0$ .



(b)  $C$  cuando  $R(\beta) = 0$ .

Figura 4.2: Definición de  $C$  en función de  $R(\beta)$ .

Sea  $a \in \mathbb{C}$  de forma que el segmento que tiene por extremos  $a$  y el origen, sea un diámetro de dicho círculo  $C$ . Observemos que este punto  $a$  depende únicamente de  $R(\alpha)$ ,  $R(\beta)$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ .

Vamos a definir ahora una función auxiliar

$$f_a(z) := f(z)e^{a/z},$$

la cual está definida y es analítica en el sector abierto  $S(\alpha, \beta)$ , y es continua en  $\overline{S}(\alpha, \beta)$ , debido a que es composición de funciones que están definidas y son analíticas en  $S(\alpha, \beta)$  y son continuas en  $\overline{S}(\alpha, \beta)$ .

Por hipótesis sabemos que:

- Si  $z$  tiende a cero en la dirección  $\alpha$ , se tiene que

$$|f(z)| \leq Ce^{\frac{-R(\alpha)}{|z|}}.$$

- Si  $z$  tiende a cero en la dirección  $\beta$ , se tiene que

$$|f(z)| \leq Ce^{\frac{-R(\beta)}{|z|}}.$$

Queremos por tanto estimar el valor de  $|f_a(z)|$  en estas direcciones. Sea  $z = re^{i\theta}$ , entonces

$$|f_a(z)| = |f(z)|e^{\frac{ae^{-i\theta}}{r}} = |f(z)| \cdot e^{\frac{|a|}{r}\cos(\arg(a)-\theta)},$$

y si sustituimos ahora  $\theta$  por  $\alpha$ , por construcción geométrica podemos garantizar que  $|a|\cos(\arg(a)-\alpha)$  es mayor o igual que  $R(\alpha) + \varepsilon$  para un  $\varepsilon > 0$ , por lo que tenemos que

$$|f_a(z)| = |f(z)| \cdot e^{\frac{|a|}{r}\cos(\arg(a)-\theta)} \leq Ce^{-\frac{R(\alpha)}{r}} e^{\frac{R(\alpha)+\varepsilon}{r}} = Ce^{\frac{\varepsilon}{r}}.$$

El mismo argumento se aplicaría en la dirección de  $\beta$ , por lo que concluimos que  $f_a$  está acotada en el borde del sector  $S(\alpha, \beta)$ .

Como  $\beta - \alpha < \pi$ , el sector tiene apertura estrictamente menor que  $\pi$ , esto unido a que  $f_a$  es analítica en el interior del sector, continua y acotada en el borde, y su crecimiento es sub-exponencial, nos permite aplicar el teorema de Phragmén-Lindelöf para un sector y deducir que  $f_a$  está acotada en todo el sector.

Para concluir con esta demostración vamos a calcular más exactamente la cota, para ello recordemos que

$$|f_a(z)| = |f(z)| \cdot e^{\frac{|a|}{r}\cos(\arg(a)-\theta)},$$

entonces

$$|f(z)| = |f_a(z)| \cdot e^{-\frac{|a|}{r}\cos(\arg(a)-\theta)}.$$

Pero por construcción geométrica, tenemos que el valor de  $|a|\cos(\arg(a) - \theta)$  es

$$\frac{R(\beta)\sin(\theta - \alpha) - R(\alpha)\sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

con lo que concluimos la demostración. □

A continuación, se va a enunciar una versión mejorada del Lema de Watson, que está presente en el artículo de A. Fruchard y Ch. Zhang [5] y cuya demostración excede los propósitos técnicos de este trabajo. Esta versión es la que sigue.

**Lema 4.9** (Lema de Watson). Sea  $f$  una función analítica y acotada en un sector suficientemente grande (de apertura mayor a  $\pi$ ), y exponencialmente plana sobre las direcciones de ambos bordes. Entonces  $f$  es idénticamente nula.

Este resultado es una herramienta crucial en el análisis asintótico complejo ya que permite concluir que una función es idénticamente cero usando solo información en el borde del dominio.

A continuación vamos a enunciar y demostrar otro resultado obtenido gracias al lema 4.8.

**Lema 4.10.** Sea  $f$  continua y acotada en el sector cerrado  $\overline{S}(\alpha, \beta)$ . Supongamos que  $\beta - \alpha \geq \pi$  y que  $f$  es exponencialmente plana de tipo  $R > 0$  en la dirección  $\alpha$ . Entonces  $f$  es idénticamente nula.

### Demostración.

Para simplificar, vamos a considerar el caso más sencillo en el que la apertura del sector es exactamente  $\pi$ , y centramos el sector alrededor del semieje real positivo mediante una rotación. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\alpha = \frac{-\pi}{2} \quad \beta = \frac{\pi}{2},$$

es decir, que estamos trabajando en el sector  $S(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Por hipótesis,  $f$  es continua y acotada en el sector cerrado  $\overline{S}(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , y además es exponencialmente plana de tipo  $R > 0$  en la dirección  $\alpha = \frac{-\pi}{2}$ .

Nuestro objetivo es aplicar el Lema de Watson (lema 4.9), que requiere que la función sea exponencialmente plana en ambas direcciones del borde del sector. Pero en nuestro caso, solo conocemos el comportamiento de  $f$  en una de las dos direcciones.

Para poder avanzar, nos restringimos al subsector  $S(\frac{-\pi}{2}, 0)$ , contenido dentro del sector original. Nos encontramos que no tenemos información sobre el comportamiento de  $f$  en la dirección 0, pero como  $f$  es acotada en el sector cerrado por hipótesis, podemos tomar por convenio que  $R(0) = 0$ , esto no significa que  $f$  sea exponencialmente plana de tipo 0 en esa dirección, simplemente establecemos este valor para poder aplicar el lema 4.8.

De la aplicación del lema 4.8 deducimos que  $f$  es exponencialmente plana en todas las direcciones entre  $-\pi/2$  y 0, en particular, deducimos que en la dirección  $-\pi/4$ ,  $f$  es plana de tipo

$$R\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{0 \cdot \sin(-\pi/4 + \pi/2) - R \cdot \sin(-\pi/4)}{\sin(\pi/2)} = -R \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Con esta información definimos ahora la función auxiliar

$$g(z) := f(z)e^{-\frac{(1+i)R}{2z}}.$$

Esta elección está motivada por la necesidad de construir una función que sea plana en ambas direcciones del borde, lo que permitirá aplicar el Lema de Watson. El factor exponencial está diseñado para cumplir exactamente esta función:

- El exponente  $\frac{(1+i)R}{2z}$  tiene parte real positiva en todo el sector  $S(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , lo cual garantiza que  $e^{-\frac{(1+i)R}{2z}}$  decrece fuertemente a lo largo de todas las direcciones del sector, en particular en  $\pi/2$ , donde no controlamos el comportamiento de  $f$ .
- Al mismo tiempo, este factor no destruye el decaimiento que ya tiene  $f$  en  $-\pi/2$  ni en  $-\pi/4$ , gracias a que también decrece en esas direcciones y a que el propio  $f$  ya decrece suficientemente allí.

En resumen, la función  $g(z)$  es analítica en el sector  $S(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , continua y acotada en el sector cerrado  $\overline{S}(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , y plana en las dos direcciones de los bordes. En estas condiciones podemos aplicar el Lema de Watson a  $g(z)$  y concluir que  $g$  es idénticamente nula en el sector. Como el factor exponencial  $e^{-\frac{(1+i)R}{2z}}$  no se anula en ningún punto, se deduce que

$$f(z) \equiv 0.$$

□

Combinando los lemas 4.8 y 4.10 deducimos la siguiente proposición

**Proposición 4.11.** Sea  $f$  una función analítica y acotada sobre un sector abierto  $S(\alpha, \beta; \rho)$  con  $\alpha < \beta$  y  $\rho > 0$ . Se supone que  $f$  admite un desarrollo asintótico nulo de Gevrey de orden 1 y de tipo  $R > 0$  en una dirección  $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$ . Entonces:

- Si  $\beta - \alpha > \pi$ ,  $f$  es idénticamente nula.
- Si  $\beta - \alpha \leq \pi$ , en cada dirección  $\theta \in (\alpha, \theta_0]$  (respectivamente  $\theta \in [\theta_0, \beta)$ ), la función  $f$  admite un desarrollo asintótico nulo de Gevrey de orden 1 y de tipo  $R(\theta)$ , dado por

$$R(\theta) = R \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta_0 - \alpha)}, \quad \text{respectivamente } R \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta_0 - \beta)}.$$

## 4.2. Transformada de Borel-Laplace

Sea  $R > 0$ , consideremos una serie de potencias formal

$$\hat{f}(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+1}$$

y supongamos que es Gevrey de orden 1 y de tipo  $R$ , es decir, que para todo  $\delta > 0$  existe una constante  $C_\delta > 0$  tal que

$$|a_n| < C_\delta \left( \frac{1}{R + \delta} \right)^n n! \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sea

$$R_\delta = \frac{R}{1 + \delta R}.$$

La serie entera

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{f}(t) := \sum_{n \geq 0} \left( \frac{a_n}{n!} \right) t^n,$$

a la que llamamos *transformada de Borel formal* de  $\hat{f}$ , converge en todo disco  $B(0, R_\delta)$  de centro 0 y radio  $R_\delta < R$ , por lo que converge en el disco de Borel  $B(0, R)$ . A la suma de esta serie la denotaremos por  $\varphi$ .

**Definición 4.12.** Sea  $z \in B(0, R)$  arbitrariamente fijado. Para todo  $x \in \mathbb{C}^*$ , definimos la *transformada de Laplace* truncada en  $z$  de  $\varphi$  como

$$\mathcal{L}_z \varphi(x) := \int_0^z \varphi(t) e^{-t/x} dt.$$

**Lema 4.13** (Teorema de Borel-Ritt-Gevrey). Sean  $R > 0$ ,  $z \in B(0, R)$  y  $\hat{f}(x)$  serie de potencias Gevrey de orden 1 y tipo  $R$ ,

$$\hat{f}(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}.$$

La función  $f = \mathcal{L}_z \varphi$  definida anteriormente admite a  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 sobre el sector  $S$  de apertura  $\pi$  y centrado en la dirección de  $z$ ,

$$S := S\left(\arg(z) - \frac{\pi}{2}, \arg(z) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Además, en toda dirección  $\theta$  de  $S$ , el tipo  $R(\theta)$  de ese desarrollo es de la forma

$$R(\theta) = |z| \cos(\theta - \arg(z)).$$

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que  $\arg(z) = 0$ , es decir, que  $z = r > 0$  (aplicando una rotación a  $x$  si es necesario). Para todo  $N \in \mathbb{N}$  fijo, definimos

$$\varphi_N(t) := \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} t^n,$$

como la  $N$ -ésima suma parcial de  $\varphi$ . Vamos a ver la relación de esta suma parcial con la suma parcial  $N$ -ésima de  $\hat{f}(z)$ .

$$\int_0^\infty \varphi_N(t) e^{-t/x} dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-t/x} dt = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-t/x} dt$$

Hacemos ahora el cambio de variable  $u = \frac{t}{x}$

$$\int_0^\infty t^n e^{-t/x} dt = \int_0^\infty u^n x^n e^{-u} x du = x^{n+1} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = x^{n+1} \Gamma(n+1).$$

Es bien sabido que  $\Gamma(n+1) = n!$ , por lo que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-t/x} dt = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^{n+1} = \hat{f}_N(x),$$

entonces

$$\hat{f}_N(x) = \int_0^\infty \varphi_N(t) e^{-t/x} dt.$$

Vamos ahora a dividir la función  $f(x)$  en tres partes,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^r \varphi(t) e^{-t/x} dt = \int_0^r (\varphi(t) - \varphi_N(t)) e^{-t/x} dt + \int_0^r \varphi_N(t) e^{-t/x} dt \\ &= \int_0^r (\varphi(t) - \varphi_N(t)) e^{-t/x} dt + \hat{f}_N(x) - \int_r^\infty \varphi_N(t) e^{-t/x} dt \end{aligned}$$

y llamaremos

$$\delta_N(x) = \int_0^r (\varphi(t) - \varphi_N(t)) e^{-t/x} dt \quad \text{y} \quad \sigma_N(x) = \int_r^\infty \varphi(t) e^{-t/x} dt.$$

Como  $\hat{f}(x)$  es Gevrey de orden 1 y tipo  $R$ , entonces

$$|\varphi(t) - \varphi_N(t)| \leq C_1 \left| \frac{a_N}{N!} \right| t^N \leq C \left( \frac{t}{r} \right)^N, \quad \text{para } t \in [0, r]$$

siendo  $C_1$  y  $C$  independientes de  $N$ . Debido a esto y a que  $r \in (0, R)$  obtenemos que para todo  $x \in S$

$$|\delta_N(x)| = \int_0^r |\varphi(t) - \varphi_N(t)| e^{-t/x} dt \leq C \int_0^r \frac{t^N}{r^N} |e^{-t/x}| dt,$$

teniendo ahora en cuenta que si  $\theta = \arg(x)$  entonces  $\operatorname{Re} \left( \frac{t}{x} \right) = \frac{t}{|x|} \cos \theta$ ,

$$C \int_0^r \frac{t^N}{r^N} |e^{-t/x}| dt = C \int_0^r \frac{t^N}{r^N} e^{\frac{t}{|x|} \cos \theta} dt$$

y haciendo ahora el cambio de variable  $u = \frac{t \cos \theta}{|x|}$ ,  $t = \frac{u|x|}{\cos \theta}$ ,  $dt = \frac{|x|}{\cos \theta} du$ , tenemos que

$$\begin{aligned} C \int_0^r \frac{t^N}{r^N} e^{\frac{t}{|x|} \cos \theta} dt &= \frac{C|x|^{N+1}}{r^N (\cos \theta)^{N+1}} \int_0^{\frac{r \cos \theta}{|x|}} u^N e^{-u} du \\ &\leq \frac{C|x|^{N+1}}{r^N (\cos \theta)^{N+1}} \int_0^\infty u^N e^{-u} du = \frac{C|x|^{N+1}}{r^N (\cos \theta)^{N+1}} \Gamma(N+1) \\ &= \frac{C|x|^{N+1}}{r^N (\cos \theta)^{N+1}} N! = C \frac{|x|}{\cos \theta} N! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N. \end{aligned}$$

Por otra parte, para  $t \geq r$ , tenemos que

$$|\varphi_N(t)| = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{a_n}{n!} t^n \right| = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|a_n|}{n!} r^n \left( \frac{t}{r} \right)^n \leq \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|a_n|}{n!} r^n \right) \left( \frac{t}{r} \right)^{N-1} < D \left( \frac{t}{r} \right)^{N-1},$$

con la constante  $D$  independiente de  $N$  pero pudiendo depender de  $R$ . Un cálculo idéntico al anterior para la estimación de  $|\delta_N(x)|$  demuestra que para todo  $z \in S$

$$|\sigma_N(x)| < r D (N-1)! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N.$$

Por lo tanto, para todo  $x \in S$ , siendo  $\theta = \arg(x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - \hat{f}_N(x)| &= |\delta_N(x) - \sigma_N(x)| \leq |\delta_N(x)| + |\sigma_N(x)| \\ &< C \frac{|x|}{\cos \theta} N! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N + \frac{rD}{N} N! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N \\ &= \left( C + \frac{rD}{N} \right) N! \left( \frac{|x|}{r \cos \theta} \right)^N = K N! \left( \frac{|z|}{r \cos \theta} \right)^N, \end{aligned}$$

donde  $K > 0$  es independiente de  $x$  y de  $N$ , aunque puede depender de  $R$ . En otras palabras,  $f$  admite a  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 y tipo  $r \cos(\theta)$  en cada dirección  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  de  $S$ , que es lo que se quería probar.

□

### 4.3. Vínculo entre la teoría asintótica real y compleja

Finalmente, con todos los resultados anteriores, en esta sección llegaremos a la demostración del teorema objetivo de este capítulo.

**Teorema 4.14.** Sea  $f$  una función analítica y acotada en un sector abierto  $S := S(\alpha, \beta; \rho)$  con  $0 < \alpha < \beta$ , y sea

$$\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$$

una serie de potencias formal.

1. Si existe una dirección de  $S$  en la cual la función  $f$  admite  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico, entonces  $\hat{f}$  es un desarrollo asintótico de  $f$  en el sector  $S$  en su totalidad.
2. Se tiene el mismo enunciado en el caso de un desarrollo asintótico de Gevrey de orden 1.

Más precisamente, si  $f$  admite a  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico de Gevrey de orden 1 y de tipo  $R(\theta_0)$  en una dirección  $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$ , entonces en toda dirección  $\theta$  de  $S$ ,  $f$  admite  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico de Gevrey de orden 1 y de tipo  $R(\theta)$ , donde  $R(\theta)$  se define de la siguiente manera. Siendo

$$\alpha' = \min\left(\theta_0, \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \beta' = \max\left(\theta_0, \beta - \frac{\pi}{2}\right),$$

se tiene:

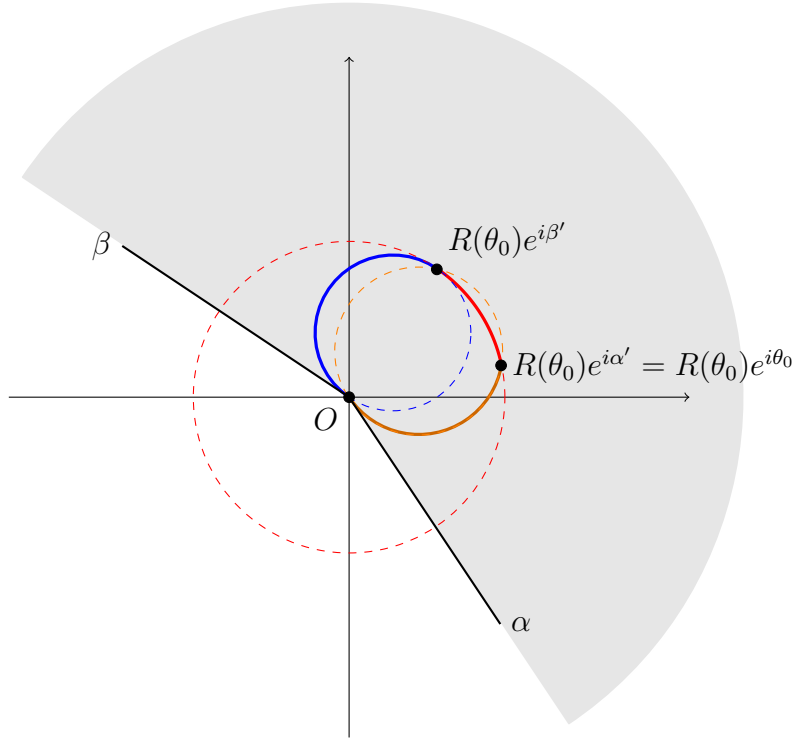
$$R(\theta) = \begin{cases} R(\theta_0) \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)}, & \text{si } \theta \in (\alpha, \alpha'], \\ R(\theta_0), & \text{si } \theta \in [\alpha', \beta'], \\ R(\theta_0) \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta' - \beta)}, & \text{si } \theta \in [\beta', \beta). \end{cases}$$

**Nota.** Se puede reemplazar la hipótesis de acotación por la de *acotación asintótica* en el siguiente sentido. Una función analítica en un sector  $S = S(\alpha, \beta; \rho)$  se dice asintóticamente acotada en  $S$  si es acotada en todo sub-sector propio de  $S$ ,  $S' = S(\alpha', \beta'; \rho')$ , con

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta \quad \text{y} \quad 0 < \rho' < \rho.$$

El teorema muestra que el hecho de poseer un desarrollo asintótico (respectivamente Gevrey de orden 1) en una dirección y ser asintóticamente acotada en el sector implica poseer un desarrollo asintótico (resp. Gevrey de orden 1) en todo el sector.

**Nota.** Gráficamente, la aplicación  $(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\theta \mapsto R(\theta)e^{i\theta}$  tiene como curva representativa la reunión de tres arcos de circunferencia: uno centrado en 0 con radio  $R(\theta_0)$ , el segundo pasando por los puntos 0 y  $R(\theta_0)e^{i\alpha'}$  y tangente en la dirección  $\alpha$ , y el tercero definido de la misma manera reemplazando  $\alpha$  por  $\beta$  y  $\alpha'$  por  $\beta'$ .


 Figura 4.3: Representación gráfica de la curva de  $R(\theta)$ 

### Demostración.

Tomamos para empezar un  $w \in (0, \frac{\pi}{2})$  fijo, por el Teorema de Borel-Ritt-Gevrey (lema 4.13) existe una función  $f_0$  analítica en  $S(\alpha - w, \beta - w; \rho)$  que admite a  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico en la dirección  $\theta_0$ .

La función diferencia  $g := f - f_0$ , que es analítica y acotada en  $S = S(\alpha, \beta; \rho)$  por ser resta de funciones analíticas y acotadas en  $S$ , admite entonces un desarrollo asintótico nulo en la dirección  $\theta_0$ .

Podemos en estas condiciones aplicar la proposición 4.7, a la función  $g$  y deducir que  $g$  admite un desarrollo asintótico nulo en todo el sector  $S$ , lo que implica que  $f$  admite a  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico en todo el sector  $S$ .

Supongamos ahora que la función  $f$  posee a  $\hat{f}$  por desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 y de tipo  $R(\theta_0)$  en la dirección  $\theta_0$ , en este caso la serie formal  $\hat{f}$  es Gevrey de orden 1 y de tipo  $R(\theta_0)$ . Al igual que antes, denotaremos como  $\varphi$  la suma de la transformada de Borel de  $\hat{f}$  en  $B(0, R(\theta))$ . Se distinguen aquí dos casos diferentes, un caso en el que la transformada de Borel,  $\hat{B}\hat{f}$ , se puede extender en un sector suficientemente amplio, y otro donde no, y se requiere una justificación indirecta:

- **Caso de los sectores pequeños.** En este caso se cumple

$$\theta_0 - \frac{\pi}{2} < \alpha < \theta_0 < \beta < \theta_0 + \frac{\pi}{2}$$

y por tanto sea  $r \in (0, R(\theta_0))$  arbitrariamente fijado. Según el lema 4.13, si  $z = re^{i\theta_0}$ , la función  $\mathcal{L}_z\varphi$  posee la función  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico de Gevrey de orden 1 y de tipo  $r \cos(\theta - \theta_0)$  en las direcciones  $\theta$  de  $S$ , ya que  $\bar{S}$  está incluido en

$$S\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}; +\infty\right)$$

La función diferencia  $g = f - f_0$  posee por hipótesis el desarrollo asintótico Gevrey nulo de orden 1 y de tipo  $r$  en la dirección  $\theta_0$ , por lo que también lo es en cada dirección

$\theta \in (\alpha, \theta_0]$  (respectivamente con  $\theta \in [\theta_0, \beta)$ ) de  $S$ , y de acuerdo con la segunda parte de la proposición 4.11:

- Si  $\theta \in (\alpha, \theta_0]$ , entonces

$$R(\theta) = r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta_0 - \alpha)}.$$

- Si  $\theta \in [\theta_0, \beta)$ , entonces

$$R(\theta) = r \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta_0 - \beta)}.$$

Debido a que

$$R(\theta) \leq r \cos(\theta - \theta_0)$$

se obtiene que  $f$  posee a  $\hat{f}$  como desarrollo asintótico de Gevrey de orden 1 y de tipo  $R(\theta)$  en cada dirección de  $S$ . Dado que el número  $r$  puede elegirse arbitrariamente cercano a  $R(\theta_0)$ , la segunda afirmación del teorema queda demostrada en este caso.

- **Caso general.** Sea  $\varepsilon \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , se consideran las direcciones  $(\theta_j)_{-l \leq j \leq m}$  ( $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) dadas por

$$\theta_j = \theta_0 + j\varepsilon$$

y tales que

$$\theta_{-l} - \frac{\pi}{2} < \alpha < \theta_{-l} \quad \text{y} \quad \theta_m < \beta < \theta_m + \frac{\pi}{2}.$$

Procediendo de la misma manera que antes, se obtiene sucesivamente que  $f$  posee  $\hat{f}$  por desarrollo asintótico Gevrey de orden 1 en cada una de las direcciones  $(\theta_j)_{-l \leq j \leq m}$  y, por lo tanto, en todo el sector  $S$ .

Solo quedaría demostrar que, para toda dirección  $\theta \in [\alpha + \frac{\pi}{2}, \theta_0] \cup [\theta_0, \beta - \frac{\pi}{2}]$ , el tipo  $R(\theta)$  del desarrollo es superior o igual a  $R(\theta_0)$ .

Supongamos que  $\theta \in [\theta_0, \beta - \frac{\pi}{2}]$ , ya que en el caso contrario es similar. A cada  $N \in \mathbb{N}$ , se le asocian las  $N$  direcciones

$$\theta_{N,k} := \theta_0 + \frac{(\theta - \theta_0)k}{N} \quad \text{con } k = 1, \dots, N.$$

Si tomamos  $N > \frac{2(\theta - \theta_0)}{\pi}$  tenemos que

$$\theta_{N,k+1} = \theta_0 + \frac{(\theta - \theta_0)(k+1)}{N} = \theta_0 + \frac{(\theta - \theta_0)k}{N} + \frac{(\theta - \theta_0)}{N} < \theta_{N,k} + \frac{\pi}{2},$$

por tanto  $\theta_{N,k+1} \in (\theta_{N,k}, \theta_{N,k} + \frac{\pi}{2})$ , para todo  $k = 1, \dots, N-1$ .

Por un razonamiento idéntico al que se hizo en el caso de los sectores pequeños, se obtiene sucesivamente que el tipo  $R(\theta_{N,k})$  del desarrollo  $\hat{f}$  para la función  $f$  en cada dirección  $\theta_{N,k}$  satisface

$$R(\theta_{N,k+1}) \geq R(\theta_{N,k}) \cos(\theta_{N,k+1} - \theta_{N,k})$$

y como  $\theta_{N,k+1} - \theta_{N,k} = \frac{\theta - \theta_0}{N}$ , esto nos da que

$$R(\theta_{N,k+1}) \geq R(\theta_{N,k}) \cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{N}\right),$$

y aplicando esta misma desigualdad  $N$  veces concluimos que

$$R(\theta) = R(\theta_{N,N}) \geq R(\theta_0) \left( \cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{N}\right) \right)^N.$$

Y haciendo tender  $N$  hacia infinito, se obtiene que

$$R(\theta) \geq R(\theta_0)$$

lo que termina la prueba del teorema.

□

# Apéndice A

## Algunos resultados clásicos

Este apéndice incluye ciertos resultados que han sido útiles en un momento u otro en nuestros razonamientos, cuya demostración es conocida (por haberse presentado en la asignatura de Variable Compleja del Grado en Matemáticas), y cuyo enunciado nos ha parecido conveniente recordar para facilitar la lectura del trabajo.

El primer resultado es una consecuencia directa del teorema del módulo máximo, y dice lo siguiente.

**Lema.** Sea  $U$  un abierto conexo de  $\mathbb{C}$  y  $f = u + iv$  una función holomorfa en  $U$ . Entonces:

- Si la parte real  $u$ , o la parte imaginaria  $v$ , de  $f$  presentan un extremo local (máximo o mínimo) en un punto de  $U$ , entonces  $f$  es constante en  $U$ .
- Supongamos que además que  $U$  es acotado y  $f$  continua en  $\overline{U}$ . Entonces,  $u$  y  $v$  alcanzan sus extremos (máximo y mínimo) absolutos en la frontera de  $U$ .

El segundo de estos resultados es el Lema de Schwarz, resultado que al igual que el primero, también es consecuencia del teorema del módulo máximo.

**Lema** (Lema de Schwarz). Sea  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f(0) = 0$  y  $|f(z)| < 1$  para todo  $z \in B(0, 1)$ . Entonces:

1. Para todo  $z \in B(0, 1)$  se tiene que  $|f(z)| \leq |z|$ , y  $|f'(0)| \leq 1$
2. Si para algún  $z \in B(0, 1) \setminus \{0\}$  se tiene que  $|f(z)| = |z|$ , o si  $|f'(0)| = 1$ , entonces existe  $c \in \mathbb{C}$  con  $|c| = 1$  y tal que  $f(z) = cz$  para todo  $z \in B(0, 1)$ .

El siguiente resultado es el teorema de representación local para funciones meromorfas, que se enuncia de la siguiente manera.

**Teorema** (Teorema de representación local de funciones meromorfas). Si  $f$  es una función meromorfa en  $B(a, R)$  y no constante, entonces existe una función  $g$  definida en un dominio  $\Omega$ , con  $a \in \Omega$  y  $\Omega \subset B(a, R)$ , que satisface las condiciones siguientes:

1.  $g$  es analítica en  $\Omega$  y es inyectiva.
2.  $g$  transforma  $\Omega$  en un disco centrado en 0, con  $g(a) = 0$ .
- 3.

$$f(z) = \begin{cases} f(a) + [g(z)]^{n(a,f)}, & z \in \Omega, \quad \text{cuando } f(a) \neq \infty, \\ [g(z)]^{-m(a,f)}, & z \in \Omega \setminus \{a\}, \quad \text{cuando } f(a) = \infty, \end{cases}$$

donde  $n(a, f)$  (respectivamente,  $m(a, f)$ ) representa el orden de  $a$  como cero de  $f(z) - f(a)$  (resp. el orden de  $a$  como polo de  $f$ ).

A continuación se muestra un resultado bien conocido, pero que cabe recordar para el desarrollo de este trabajo, el Teorema de la función inversa.

**Teorema.** Sean  $U$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f$  una función holomorfa en  $U$ . Entonces, si  $z_0 \in U$  y  $f'(z_0) \neq 0$ , existen un entorno abierto  $V$  de  $z_0$  y un entorno abierto  $W$  de  $f(z_0)$ , tales que:

- $f'(z) \neq 0$  para cada  $z \in V$ .
- $f$  aplica biyectivamente  $V$  en  $W$ .
- La función inversa  $f^{-1} : W \rightarrow V$  es holomorfa en  $W$  y su derivada viene dada por

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{para cada } z \in V,$$

o lo que es lo mismo,

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \text{para cada } w \in W.$$

# Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors. “An extension of Schwarz’s lemma”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 43.3 (1938), págs. 359-364. DOI: 10.2307/1990065.
- [2] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. 3rd. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [3] R. B. Ash y W. P. Novinger. *Complex Variables*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2007. ISBN: 9780486462509.
- [4] J.B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461263135.
- [5] A. Fruchard y Ch. Zhang. “Remarques sur les développements asymptotiques”. En: *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 6e série* 8.1 (1999), págs. 91-115.
- [6] M. Heins. *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*. Holt, Rinehart y Winston, New York, 1962.
- [7] A. I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume II*. Englewood Cliffs, NJ, 1965.
- [8] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. 3rd. New York: McGraw-Hill, 1987.