



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

HOMOLOGÍA CÚBICA

Autor: Axell Fernández Gómez
Tutora: Carolina Ana Núñez Jiménez
2025

Resumen:

Las teorías de homología se introducen para asociar a diferentes tipos de objetos matemáticos sucesiones de grupos y homomorfismos que contienen información sobre dichos objetos. Para espacios topológicos, dos de las teorías más conocidas son la homología singular y la simplicial. En este trabajo se introduce y estudia la homología cúbica, que es similar a la simplicial pero utiliza n -cubos singulares, en lugar de n -símplices. Se hará la construcción de dicha homología y se estudiarán sus propiedades, comparándolas con las teorías mencionadas.

Palabras clave: Teoría de homología, homología cúbica, topología algebraica

Abstract:

Homology theories are introduced to associate different types of mathematical objects with group sequences and homomorphisms that contain information about these objects. For topological spaces, two of the most well-known theories are singular homology and simplicial homology. In this work, cubic homology is introduced and studied, which is similar to simplicial homology but uses singular n -cubes, instead of n -simplices. The construction of this homology will be made and its properties will be studied, comparing them with the aforementioned theories.

Keywords: Homology theory, cubic homology, algebraic topology

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos iniciales	5
1.1. Grupos libres	5
1.2. Sucesiones exactas	6
1.3. Cadenas de grupos	8
1.4. Equivalencias homotópicas	12
2. Homología cúbica	15
2.1. Las caras de un n -cubo	15
2.2. Construcción de los grupos de homología	17
2.3. Homomorfismos inducidos	25
2.4. Homotopía y grupos de homología	29
3. Homología relativa	33
3.1. La sucesión exacta asociada a un par	34
3.2. Aplicaciones entre pares de espacios	36
3.3. La propiedad de escisión	39
3.4. Subdivisión de cubos singulares	43
3.5. Relación con otras homologías	55
4. Cálculos en la esfera y consecuencias	59
4.1. Grado de una aplicación	65
Bibliografía	71

Introducción

La topología algebraica nace a finales del siglo XIX y principios del XX como una disciplina que aplica métodos algebraicos al estudio de problemas topológicos. Esta aproximación ha demostrado ser muy interesante, permitiendo clasificar y distinguir espacios topológicos mediante invariantes algebraicos asociados a ellos. Entre estos invariantes, los grupos de homología destacan por su versatilidad para estudiar propiedades esenciales de los espacios topológicos.

El concepto de homología tiene su origen en los trabajos de Henri Poincaré, quien introdujo las primeras nociones de lo que hoy conocemos como homología simplicial. Durante las décadas siguientes, matemáticos como Emmy Noether, Heinz Hopf, Leopold Vietoris y Pavel Alexandrov, entre otros, contribuyeron decisivamente a formalizar y generalizar estas ideas, hasta establecer la teoría de homología como la conocemos actualmente.

En el contexto del grado, el primer acercamiento a la homología se realiza a través de la homología simplicial. Esta aproximación, construida sobre complejos simpliciales finitos, resulta útil para el estudio de espacios que admiten triangulaciones, como poliedros o variedades compactas. Sin embargo, presenta limitaciones importantes al tratar con espacios topológicos generales que no admiten triangulaciones o cuya triangulación resultaría excesivamente compleja de construir o manipular.

Para superar estas restricciones, surgieron teorías más generales como la homología singular. Esta aproximación utiliza símlices singulares (aplicaciones continuas del símplex estándar en el espacio) para construir los grupos de homología. La homología singular ofrece la ventaja fundamental de ser aplicable a cualquier espacio topológico, además de proporcionar un marco teórico adecuado para demostrar propiedades fundamentales como la invarianza homotópica.

En este trabajo, sin embargo, nos centramos en la homología cúbica, una variante menos conocida pero igualmente interesante. La homología cúbica utiliza

cubos en lugar de símplices como bloques fundamentales de construcción. Esta elección presenta varias ventajas significativas: en primer lugar, la estructura producto de los cubos facilita notablemente el proceso de subdivisión, que resulta más natural y geométricamente intuitivo que en el caso simplicial; en segundo lugar, la formulación de ciertas demostraciones y construcciones adquiere mayor claridad geométrica cuando se trabaja con cubos. No obstante, la homología cúbica también presenta ciertas particularidades que deben abordarse cuidadosamente, como la necesidad de considerar explícitamente los cubos degenerados.

Para desarrollar esta teoría, seguiremos principalmente el enfoque propuesto por William S. Massey en su texto “Singular Homology Theory” [6], adaptándolo a nuestro contexto y perspectiva. El trabajo se estructura de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, introducimos los conceptos algebraicos fundamentales necesarios para el desarrollo posterior. Revisamos las nociones de grupos libres, sucesiones exactas, complejos de cadenas y homotopías en el contexto algebraico, estableciendo así la base formal para nuestras construcciones.

El Capítulo 2 está dedicado a la construcción detallada de los grupos de homología cúbica. Partiendo de la definición de cubos singulares y sus caras, desarrollamos paso a paso los grupos de cadenas cúbicas, el operador frontera y, finalmente, los grupos de homología. Estudiamos también las propiedades fundamentales de estos grupos y cómo se comportan bajo aplicaciones continuas entre espacios topológicos.

En el Capítulo 3, abordamos la homología relativa y sus propiedades. La homología relativa nos permite estudiar cómo un espacio difiere de un subespacio dado, proporcionando una herramienta esencial para el análisis topológico. Estudiamos la sucesión exacta de un par, el teorema de escisión y técnicas como la subdivisión de cubos, estableciendo la relación entre la homología relativa y la homología absoluta. Comentamos la relación entre esta teoría y las mencionadas anteriormente.

Finalmente, en el Capítulo 4, aplicamos la teoría desarrollada para calcular explícitamente los grupos de homología de diversos espacios topológicos significativos, centrándonos particularmente en las esferas. Introducimos además el concepto de grado de una aplicación entre esferas, demostrando algunas de sus propiedades fundamentales y presentando aplicaciones clásicas como el teorema del punto fijo de Brouwer y resultados sobre campos vectoriales en esferas.

A lo largo del trabajo, ponemos especial énfasis en la perspectiva geométrica, intentando que los conceptos algebraicos abstractos mantengan su conexión con

la intuición espacial. Aunque los resultados presentados son clásicos en la teoría de homología, la aproximación cúbica ofrece una visión alternativa y, en muchos aspectos, más accesible que facilita la comprensión de estas poderosas herramientas matemáticas.

Capítulo 1

Conceptos iniciales

1.1. Grupos libres

A lo largo del texto, vamos a construir y trabajar con grupos abelianos libres y sus cocientes. Esta sección establece la base algebraica necesaria.

Dado un conjunto X , consideramos el grupo libre abeliano generado por X definido como el conjunto de sumas formales con coeficientes en $\mathbb{Z}$,

$$Gp(X) = \left\{ \sum_{x \in X} n_x x \mid n_x \in \mathbb{Z}, n_x = 0 \text{ casi siempre} \right\} = \bigoplus_x \mathbb{Z}_x,$$

con $\mathbb{Z}_x = \mathbb{Z}$.

El grupo se denomina libre porque no existen relaciones algebraicas entre sus generadores. Al ser grupos abelianos, todos sus subgrupos son normales y, por lo tanto, podemos realizar el cociente sin restricciones.

Notación. Un elemento $\sum_x n_x x$ solo tiene una cantidad finita r de términos no nulos, por lo que lo escribiremos como $n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r$ con $n_i = n_{x_i}$.

Observación 1.1. Por convenio, si $X = \emptyset$, el grupo generado por el conjunto vacío es el grupo trivial, $Gp(\emptyset) = \{0\}$.

De esta forma, X actúa como base del grupo y cada elemento se escribe de forma única como combinación lineal de los elementos de X . La operación se define naturalmente como

$$\sum_x n_x x + \sum_x m_x x = \sum_x (n_x + m_x) x,$$

y las propiedades de grupo se heredan directamente de las propiedades de $\mathbb{Z}$. Un subconjunto A de X genera un subgrupo, $Gp(A) \subset Gp(X)$.

Propiedades 1.2 (Propiedad esencial de los grupos libres). *Sea H un grupo abeliano y sean $h_x \in H$ elementos cualesquiera, para cada $x \in X$. Entonces existe un único homomorfismo de grupos $F: Gp(X) \rightarrow H$ tal que $F(x) = h_x$, para todo $x \in X$.*

De hecho, $F(\sum_x n_x x) = \sum_x n_x h_x$, por lo tanto, dado un homomorfismo cualquiera $f: Gp(X) \rightarrow H$, basta conocer como actúa para cada $x \in X$.

Dados grupos G, H , un morfismo $f: G \rightarrow H$ y subgrupos $A \subset G, B \subset H$, si $f(A) \subset B$, entonces f induce un homomorfismo $f_*: \frac{G}{A} \rightarrow \frac{H}{B}$, dado por $f_*(g + A) = f(g) + B$.

1.2. Sucesiones exactas

Dada una sucesión de grupos y homomorfismos de grupos

$$\dots \rightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \rightarrow \dots$$

decimos que es una *sucesión exacta* si $\ker f_n = \text{Im } f_{n+1}$, para todo n . Una sucesión exacta corta es una sucesión exacta del tipo

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

que, por tanto, cumple que f es inyectiva, g es sobreyectiva e $\text{Im } f = \ker g$. Por el primer teorema de isomorfía, en este caso se tiene $\frac{B}{f(A)} \cong C$, con $f(A) \cong A$, por la inyectividad.

Un resultado interesante en relación con las sucesiones exactas, y que usaremos más adelante, es el conocido como *lema de los cinco*.

Lema 1.3 (Lema de los cinco). *Dado el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 & \xrightarrow{i_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{j_1} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 & \xrightarrow{j_4} & B_5 \end{array}$$

si cada fila es una sucesión exacta, cada cuadrado es conmutativo, f_2 y f_4 son isomorfismos, f_1 es un epimorfismo y f_5 es un monomorfismo, entonces f_3 es un isomorfismo.

Este lema es consecuencia de los dos siguientes.

Lema 1.4 (Lema de los cuatro, primera versión). *Dado el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ B_1 & \xrightarrow{j_1} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 \end{array}$$

si cada fila es una sucesión exacta, cada cuadrado es conmutativo, f_2 y f_4 son monomorfismos y f_1 es un epimorfismo, entonces f_3 es un monomorfismo.

Demostración. Queremos ver que f_3 es inyectivo. Sea $a_3 \in A_3$ tal que $f_3(a_3) = 0$. Como el tercer cuadrado es conmutativo, $j_3(f_3(a_3)) = f_4(i_3(a_3)) = 0$. Luego $i_3(a_3) \in \ker f_4 = \{0\}$, ya que f_4 es un monomorfismo. Por lo tanto, $i_3(a_3) = 0$. Entonces $a_3 \in \ker i_3 = \text{Im } i_2$, porque forman una sucesión exacta. Luego, existe un elemento $a_2 \in A_2$ tal que $i_2(a_2) = a_3$, por lo que $0 = f_3(a_3) = f_3(i_2(a_2)) = j_2(f_2(a_2))$. Entonces $f_2(a_2) \in \ker j_2 = \text{Im } j_1$. Se tiene un elemento $b_1 \in B_1$ tal que $j_1(b_1) = f_2(a_2)$, y a su vez, por ser f_1 epimorfismo, existe $a_1 \in A_1$, tal que $b_1 = f_1(a_1)$. Entonces, $f_2(a_2) = j_1(f_1(a_1)) = f_2(i_1(a_1))$. Como f_2 es inyectivo, $a_2 = i_1(a_1) \in \text{Im } i_1 = \ker i_2$. Finalmente, $a_3 = i_2(a_2) = 0$, como queríamos probar. ■

Lema 1.5 (Lema de los cuatro, segunda versión). *Dado el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 & \xrightarrow{i_4} & A_5 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 & \xrightarrow{j_4} & B_5 \end{array}$$

si cada fila es una sucesión exacta, cada cuadrado es conmutativo, f_2 y f_4 son epimorfismos y f_5 es un monomorfismo, entonces f_3 es un epimorfismo.

Demostración. De forma similar al lema anterior, queremos comprobar que f_3 es sobreyectivo. Sea $b_3 \in B_3$. Veamos que existe $x \in A_3$ tal que $f_3(x) = b_3$. Tenemos que $j_3(b_3) \in \text{Im } j_3 = \ker j_4$, luego $j_4(j_3(b_3)) = 0$. Además, como f_4 es un epimorfismo, existe $a_4 \in A_4$ tal que $f_4(a_4) = j_3(b_3)$. Entonces $0 = j_4(j_3(b_3)) = j_4(f_4(a_4)) = f_5(i_4(a_4))$, que por ser f_5 un monomorfismo, implica $i_4(a_4) = 0$. Por lo tanto, $a_4 \in \ker i_4 = \text{Im } i_3$. Es decir, existe $a_3 \in A_3$ tal que $i_3(a_3) = a_4$. Tenemos que $j_3(b_3) = f_4(a_4) = f_4(i_3(a_3)) = j_3(f_3(a_3))$, entonces $b_3 - f_3(a_3) \in \ker j_3 = \text{Im } j_2$. Sea

$b_2 \in B_2$ un elemento tal que $j_2(b_2) = b_3 - f_3(a_3)$. Como f_2 es un epimorfismo, existe $a_2 \in A_2$ con $f_2(a_2) = b_2$. Por lo tanto, $b_3 - f_3(a_3) = j_2(b_2) = j_2(f_2(a_2)) = f_3(i_2(a_2))$. Finalmente, $b_3 = f_3(a_3 + i_2(a_2))$, con $x = a_3 + i_2(a_2) \in A_3$ el elemento buscado. ■

1.3. Cadenas de grupos

Vamos a introducir el concepto general de homotopía de cadenas en el contexto algebraico.

Definición 1.6. Un *complejo de cadenas* (A, ∂) , (A, ∂^A) , o simplemente A cuando no haya ambigüedad, es una sucesión de grupos abelianos $\{A_n\}$ junto con una colección de homomorfismos $\partial_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ que satisfacen $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Esta última condición sobre los homomorfismos ∂ implica que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$, lo que permite introducir la siguiente definición.

Definición 1.7. Dado un complejo de cadenas (A, ∂) , llamamos *n-ésimo grupo de homología de A* al cociente

$$H_n(A) = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}.$$

Definición 1.8. Sean (A, ∂^A) y (B, ∂^B) dos complejos de cadenas, un *homomorfismo f de A en B* es una colección de homomorfismos $f_n: A_n \rightarrow B_n$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^A} & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} & A_n & \xrightarrow{\partial_n^A} & A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^A} \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^B} & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} & B_n & \xrightarrow{\partial_n^B} & B_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^B} \cdots \end{array}$$

En particular, $f \circ \partial = \partial \circ f$, luego se inducen los homomorfismos en los grupos de homología

$$(f_n)_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B).$$

Definición 1.9. Dados f y g , homomorfismos entre los complejos de cadenas (A, ∂^A) y (B, ∂^B) , una *homotopía de cadenas entre f y g* es una colección de homomorfismos $\varphi_n: A_n \rightarrow B_{n+1}$ que satisface

$$g_n - f_n = \partial_{n+1}^B \circ \varphi_n + \varphi_{n-1} \circ \partial_n^A. \quad (1.1)$$

Proposición 1.10. Sean A y B complejos de cadenas, y sean $f, g: A \rightarrow B$ homomorfismos de cadenas. Si existe una homotopía de cadenas entre f y g , entonces $(f_n)_* = (g_n)_*$, para cada n .

Demostración. Fijamos n y consideramos $f_*, g_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$. Sea $a \in H_n(A)$, debemos probar que $f_*(a) = g_*(a)$ en $H_n(B)$. Sea $a' \in \ker \partial^A$ un elemento tal que $a = a' + \text{Im } \partial^A$. Puesto que $f_*(a) = f(a') + \text{Im } \partial^B$, basta demostrar que $f(a') - g(a') \in \text{Im } \partial^B$.

Por hipótesis, existen homomorfismos $\varphi_n: A_n \rightarrow B_{n+1}$ que verifican 1.1 por lo que

$$\begin{aligned} g_n(a') - f_n(a') &= \partial^B(\varphi_n(a')) + \varphi_{n-1}(\partial^A(a')) \\ &= \partial^B(\varphi_n(a')) + \varphi_{n-1}(0) = \partial^B(\varphi_n(a')), \end{aligned}$$

luego $f_n(a') - g_n(a') \in \text{Im } \partial_{n+1}^B$.

■

Consideramos tres complejos de cadenas (A, ∂^A) , (B, ∂^B) y (C, ∂^C) tales que existen colecciones de homomorfismos f y g de forma que, para cada n

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial^A & & \downarrow \partial^B & & \downarrow \partial^C \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.2)$$

es un diagrama conmutativo, y donde cada fila es una sucesión exacta. Es decir, los f son monomorfismos, los g son epimorfismos y $\ker g_n = \text{Im } f_n$, para todo n . Además, los homomorfismos f y g inducen los correspondientes homomorfismos en los grupos de homología.

Vamos a definir una aplicación $d: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$. Dado $c_n \in \ker \partial_n^C \subset C_n$, existe $b_n \in B_n$ tal que $c_n = g_n(b_n)$, ya que g_n es sobreyectiva. Por lo tanto,

$$0 = \partial_n^C(c_n) = \partial_n^C(g_n(b_n)) = g_{n-1}(\partial_n^B(b_n)),$$

es decir, $\partial_n^B(b_n) \in \ker g_{n-1} = \text{Im } f_{n-1}$. Como f_{n-1} es inyectiva, existe un único $a_{n-1} \in A_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n^B(b_n)$. Se define, entonces,

$$d(c_n + \text{Im } \partial_{n+1}^C) = a_{n-1} + \text{Im } \partial_n^A.$$

Proposición 1.11. *La aplicación d está bien definida y es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Para ver que está bien definida, solo hay que comprobar que no depende de la elección de b_n . Sean $b_n, b'_n \in B_n$ tales que $c_n = g_n(b_n) = g_n(b'_n)$. Por una parte, sabemos que existen entonces $a_{n-1}, a'_{n-1} \in A_{n-1}$, únicos, con $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n^B(b_n)$, $f_{n-1}(a'_{n-1}) = \partial_n^B(b'_n)$. Por otra parte, $g_n(b_n - b'_n) = 0$, luego $b_n - b'_n \in \ker g_n = \text{Im } f_n$, siendo este último un monomorfismo. Entonces existe un único elemento $a_n \in A_n$ tal que $f_n(a_n) = b_n - b'_n$. Aplicando ∂_n^B ,

$$\begin{aligned}\partial_n^B(f_n(a_n)) &= f_{n-1}(\partial_n^A(a_n)), \\ \partial_n^B(b_n - b'_n) &= \partial_n^B(b_n) - \partial_n^B(b'_n) = f_{n-1}(a_{n-1}) - f_{n-1}(a'_{n-1}),\end{aligned}$$

y por ser f_{n-1} inyectiva, $a_{n-1} - a'_{n-1} = \partial_n^A(a_n) \in \text{Im } \partial_n^A$. Es decir, d está bien definida.

Para ver que es un homomorfismo, sean $c_n, c'_n \in \ker \partial_n^C$, hay que comprobar que $d((c_n + c'_n) + \text{Im } \partial_{n+1}^C) = d(c_n + \text{Im } \partial_{n+1}^C) + d(c'_n + \text{Im } \partial_{n+1}^C)$.

Para $c_n \in \ker \partial_n^C$, sea $b_n \in B_n$ tal que $c_n = g_n(b_n)$ y sea $a_{n-1} \in A_{n-1}$ el único elemento tal que $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n^B(b_n)$. De manera similar $c'_n \in \ker \partial_n^C$, tomamos $b'_n \in B_n$ con $c'_n = g_n(b'_n)$ y el único $a'_{n-1} \in A_{n-1}$ que cumple $f_{n-1}(a'_{n-1}) = \partial_n^B(b'_n)$. Se tiene entonces

$$d(c_n + \text{Im } \partial_{n+1}^C) + d(c'_n + \text{Im } \partial_{n+1}^C) = (a_{n-1} + a'_{n-1}) + \text{Im } \partial_n^A.$$

Por otro lado, $c_n + c'_n = g_n(b_n + b'_n)$, y $f_{n-1}(a_{n-1} + a'_{n-1}) = \partial_n^B(b_n + b'_n)$, luego $a_{n-1} + a'_{n-1} \in A_{n-1}$ es el elemento que cumple

$$d((c_n + c'_n) + \text{Im } \partial_{n+1}^C) = (a_{n-1} + a'_{n-1}) + \text{Im } \partial_n^A,$$

como queríamos probar. ■

Proposición 1.12. *La siguiente sucesión es una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{d} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

que llamaremos sucesión exacta larga de homología.

Demostración. Para cada n , se tienen que comprobar las igualdades $\ker g_* = \operatorname{Im} f_*$, $\ker d = \operatorname{Im} g_*$ y $\ker f_* = \operatorname{Im} d$.

Como A , B y C forman sucesiones exactas a partir de f y g , se tiene $g \circ f = 0$, en consecuencia, $g_* \circ f_* = 0$, y por lo tanto, $\operatorname{Im} f_* \subset \ker g_*$.

Sea $b_n + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^B \in \ker(g_n)_*$. Es decir, $g_n(b_n) \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}^C$, por lo que existe $c_{n+1} \in C_{n+1}$ tal que $g_n(b_n) = \partial_{n+1}^C(c_{n+1})$. Como g_{n+1} es sobreyectiva, existe un elemento $b_{n+1} \in B_{n+1}$ tal que $g_{n+1}(b_{n+1}) = c_{n+1}$ y, por lo tanto,

$$g_n(b_n) = \partial_{n+1}^C(c_{n+1}) = \partial_{n+1}^C(g_{n+1}(b_{n+1})) = g_n(\partial_{n+1}^B(b_{n+1})),$$

por lo que $b_n - \partial_{n+1}^B(b_{n+1}) \in \ker g_n = \operatorname{Im} f_n$. Sea $a_n \in A_n$ tal que $f_n(a_n) = b_n - \partial_{n+1}^B(b_{n+1})$. Es decir, $f_n(a_n) - b_n \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}^B$. Además,

$$f_{n-1}(\partial_n^A(a_n)) = \partial_n^B(f_n(a_n)) = \partial_n^B(b_n - \partial_{n+1}^B(b_{n+1})) = \partial_n^B(b_n) = 0,$$

pues $b_n \in \ker \partial_n^B$, luego, como f_{n-1} es monomorfismo, $\partial_n^A(a_n) = 0$. Entonces $a_n + \operatorname{Im} \partial_n^A \in H_n(A)$ con $f_*(a_n + \operatorname{Im} \partial_n^A) = f(a_n) + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^B = b_n + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^B$. Queda probado que $\ker g_* \subset \operatorname{Im} f_*$.

Veamos que $\ker d = \operatorname{Im}(g_n)_*$. Por un lado, sea $b_n \in \ker \partial_n^B$, hay que comprobar que $d((g_n)_*(b_n + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^B)) = 0$,

$$d((g_n)_*(b_n + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^B)) = d(g_n(b_n) + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^C).$$

Por definición de d , existe $a_{n-1} \in A_{n-1}$ tal que

$$d(g_n(b_n) + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^C) = a_{n-1} + \operatorname{Im} \partial_n^A,$$

donde $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n^B(b_n) = 0$, luego $a_{n-1} = 0$, por la inyectividad de f_{n-1} .

Por otro lado, sea $c_n \in \ker \partial_n^C$ tal que $d(c_n + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^C) = 0$, es decir, existe $b_n \in B_n$ con $g_n(b_n) = c_n$ y existe $a_{n-1} \in \operatorname{Im} \partial_n^A$ con $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n^B(b_n)$. Luego existe $a_n \in A_n$ tal que $a_{n-1} = \partial_n^A(a_n)$, y por tanto,

$$\partial_n^B(b_n) = f_{n-1}(a_{n-1}) = f_{n-1}(\partial_n^A(a_n)) = \partial_n^B(f_n(a_n)),$$

por lo que $b_n - f_n(a_n) \in \ker \partial_n^B$. Entonces,

$$(g_n)_*(b_n - f_n(a_n) + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^B) = g_n(b_n - f_n(a_n)) + \partial_{n+1}^C = c_n + \operatorname{Im} \partial_{n+1}^C,$$

ya que $g_n(b_n) = c_n$ y $g \circ f = 0$. Luego $\ker d \subset \operatorname{Im} g_*$.

Finalmente, comprobamos que $\ker f_* = \operatorname{Im} d$. Sea $c_n \in \ker \partial_n^C$, veamos que

$$(f_{n-1})_*(d(c_n + \operatorname{Im} \partial_{n-1}^C)) = 0.$$

Sea $b_n \in B_n$ tal que $g_n(b_n) = c_n$ y $a_{n-1} \in A_{n-1}$ el único que $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n^B(b_n)$. Luego,

$$(f_{n-1})_*(d(c_n + \operatorname{Im} \partial_{n-1}^C)) = (f_{n-1})_*(a_{n-1} + \operatorname{Im} \partial_n^A) = f_{n-1}(a_{n-1}) + \operatorname{Im} \partial_n^B = 0.$$

Para la contención contraria, tomamos $a_{n-1} \in \ker \partial_{n-1}^A$ tal que $(f_{n-1})_*(a_{n-1} + \operatorname{Im} \partial_n^A) = 0$. Esto es que $f_{n-1}(a_{n-1}) \in \operatorname{Im} \partial_n^B$, luego existe $b_n \in B_n$ tal que $f_{n-1}(a_{n-1}) = \partial_n^B(b_n)$. Además,

$$\partial_n^C(g_n(b_n)) = g_{n-1}(\partial_n^B(b_n)) = g_{n-1}(f_{n-1}(a_{n-1})) = 0,$$

por lo que $g_n(b_n) \in \ker \partial_n^C$. Entonces, se tiene que

$$d(g_n(b_n) + \operatorname{Im} \partial_{n-1}^C) = a_{n-1} + \operatorname{Im} \partial_n^A,$$

confirmando $\ker f_* \subset \operatorname{Im} d$. ■

1.4. Equivalencias homotópicas

Introducimos el concepto de homotopía en espacios topológicos, que más adelante veremos cómo se relaciona con la homotopía de cadenas en nuestro estudio.

Definición 1.13. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Decimos que son homótopas, y lo denotamos por $f \simeq g$, si existe una aplicación continua $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$, a la que llamamos *homotopía*, que cumple $F(0, x) = f(x)$ y $F(1, x) = g(x)$ para cada $x \in X$.

Esta definición establece una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y . A las clases de equivalencia resultantes las denominamos clases de homotopía.

Definición 1.14. Decimos que X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, o que son homotópicamente equivalentes, y lo escribimos como $X \simeq Y$, si existen aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g \simeq \operatorname{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \operatorname{Id}_X$, donde Id_X y Id_Y denotan las identidades en X e Y respectivamente. En este caso, a f (y a g) se le llama *equivalencia homotópica*.

La condición de espacios homeomorfos es más restrictiva que la de espacios homotópicamente equivalentes, pues requiere igualdad en lugar de homotopía. Los espacios homotópicamente equivalentes a un punto reciben el nombre de *espacios contráctiles*; los espacios convexos de $\mathbb{R}^n$ constituyen un importante ejemplo de estos espacios.

Definición 1.15. Decimos que un subespacio $A \subset X$ es un retracto por deformación de X si existe una aplicación continua $r: X \rightarrow A$, a la que llamamos *retracción*, que restringida a A es la identidad en A y tal que, si $i: A \rightarrow X$ es la inclusión, entonces $r \circ i \simeq \text{Id}_X$. En particular, $X \simeq A$.

Capítulo 2

Homología cúbica

Vamos a trabajar con el intervalo unidad $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la topología euclídea usual, para $n > 0$. Llamamos n -cubo unidad a $I^n \subset \mathbb{R}^n$, y consideramos I^0 como un espacio unipuntual. Denominamos n -cubo a cualquier espacio topológico homeomorfo a I^n .

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico. Un n -cubo singular en X es una aplicación continua $T: I^n \rightarrow X$, para $n \geq 0$. Decimos que es un n -cubo singular degenerado si $n \geq 1$ y existe $1 \leq i \leq n$ tal que $T(x_1, \dots, x_n)$ es constante respecto a la variable x_i .

Es importante destacar que un 0-cubo singular corresponde a un punto de X , y por definición, nunca es degenerado. Un 1-cubo singular representa un camino en X , al ser una aplicación continua de I en X . En este caso, el cubo es degenerado si, y solo si, es constante.

2.1. Las caras de un n -cubo

Sea $T: I^n \rightarrow X$ un n -cubo singular en X , con $n > 0$. Para cada $i = 1, \dots, n$, se definen los $(n-1)$ -cubos $A_i T, B_i T: I^{n-1} \rightarrow X$ mediante

$$\begin{aligned} A_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) &= T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \\ B_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) &= T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

A la cara $A_i T$ se le denomina i -cara *frontal* y a la cara $B_i T$ se le denomina

i -cara trasera de T . Podemos interpretar las caras como la composición

$$I^{n-1} \xrightarrow{I_{i,j}^n} I^n \xrightarrow{T} X$$

donde $I_{i,j}^n(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, j, x_i, \dots, x_{n-1})$, con $j = 0, 1$, $i = 1, \dots, n$. Es decir, $A_i T = T \circ I_{i,0}^n$ y $B_i T = T \circ I_{i,1}^n$. Así, una cara puede entenderse como una restricción específica del n -cubo.

Para $1 \leq i < j \leq n$, se verifican las siguientes propiedades fundamentales:

$$\begin{aligned} A_i A_j T &= A_{j-1} A_i T, \\ B_i B_j T &= B_{j-1} B_i T, \\ A_i B_j T &= B_{j-1} A_i T, \\ B_i A_j T &= A_{j-1} B_i T. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Demostración. Demostraremos la primera igualdad, siendo las demás análogas con los cambios correspondientes de 0 y 1. Para probar que dos aplicaciones son iguales, debemos verificar que actúan de manera idéntica sobre todos los puntos. Sean $1 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} A_i A_j T &= A_i(A_j T) = (A_j T) \circ I_{i,0}^{n-1} = (T \circ I_{j,0}^n) \circ I_{i,0}^{n-1} = T \circ (I_{j,0}^n \circ I_{i,0}^{n-1}), \\ A_{j-1} A_i T &= A_{j-1}(A_i T) = (A_i T) \circ I_{j-1,0}^{n-1} = (T \circ I_{i,0}^n) \circ I_{j-1,0}^{n-1} = \\ &= T \circ (I_{i,0}^n \circ I_{j-1,0}^{n-1}). \end{aligned}$$

Debemos verificar que las aplicaciones $(I_{j,0}^n \circ I_{i,0}^{n-1})$ y $(I_{i,0}^n \circ I_{j-1,0}^{n-1})$: $I^{n-2} \longrightarrow I^n$ actúan de manera idéntica sobre $(x_1, \dots, x_{n-2})$:

$$\begin{aligned} I_{j,0}^n \circ I_{i,0}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}) &= I_{j,0}^n(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-2}) = \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}), \end{aligned}$$

donde la introducción del 0 en la posición i -ésima, con $i < j$, implica que el elemento x_{j-1} ocupará la posición j -ésima. Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_{i,0}^n \circ I_{j-1,0}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}) &= I_{i,0}^n(x_1, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}) = \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica la igualdad. ■

Finalmente, observemos que cuando T es un n -cubo degenerado, sus caras presentan dos posibles situaciones:

- Si $T(x_1, \dots, x_n)$ es constante respecto a la variable x_i , entonces $A_i T = B_i T$.
- Si $T(x_1, \dots, x_n)$ no es constante respecto a la variable x_i , entonces será constante respecto a otra variable x_j con $j \neq i$. En consecuencia, tanto $A_i T$ como $B_i T$ serán degenerados, pues se mantienen constantes respecto a dicha variable.

2.2. Construcción de los grupos de homología

Sea X un espacio topológico. Denotamos por $Q_n(X)$ al grupo libre abeliano generado por todos los n -cubos singulares en X . Consideramos $D_n(X)$ como el subgrupo de $Q_n(X)$ generado por los n -cubos degenerados.

Definición 2.2. El grupo de n -cadenas cúbicas singulares se define como el cociente $C_n(X) = \frac{Q_n(X)}{D_n(X)}$, para $n \geq 0$.

Ejemplo 2.3.

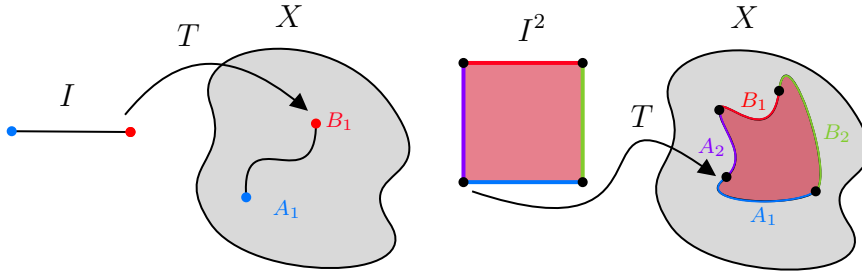
- Si $X = \emptyset$, entonces $Q_n(X) = D_n(X) = C_n(X) = \{0\}$ para cada $n \geq 0$, ya que no existen n -cubos con imagen en el conjunto vacío y, por tanto, el grupo generado es trivial.
- Si X es un espacio unipuntual, existe un único n -cubo para cada $n \geq 0$, que es no degenerado únicamente cuando $n = 0$. En consecuencia, $C_0(X) \cong \mathbb{Z}$ y $C_n(X) = \{0\}$ para $n \geq 1$.
- Para cualquier espacio X , se tiene que $D_0(X) = \{0\}$ puesto que un 0-cubo nunca es degenerado. Por tanto, $C_0(X) = Q_0(X)$. Para $n \geq 1$, el grupo $C_n(X)$ es libre en el conjunto de los n -cubos no degenerados, ya que la base de $D_n(X)$ formada por los n -cubos degenerados es un subconjunto de la base de $Q_n(X)$ formada por todos los n -cubos.

Definición 2.4. Para $n \geq 1$, se denomina *operador frontera* al único homomorfismo $\partial_n: Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$ que cumple que, para cada n -cubo singular T ,

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i T - B_i T).$$

La existencia de este homomorfismo está garantizada por la [Propiedad esencial de los grupos libres](#).

Ejemplo 2.5. Este operador puede interpretarse geoméricamente como el borde orientado de un n -cubo. Veamos los casos $n = 1$ y $n = 2$, donde identificaremos los 0-cubos con su punto imagen:



$$\begin{aligned}\partial_1(T) &= (-1)(A_1T - B_1T) = B_1T - A_1T = T(1) - T(0), \\ \partial_2(T)(x) &= (-1)(A_1T - B_1T) + (-1)^2(A_2T - B_2T)(x) \\ &= A_2T(x) + B_1T(x) - B_2T(x) - A_1T(x) \\ &= T(x, 0) + T(1, x) - T(x, 1) - T(0, x), \quad \forall x \in I.\end{aligned}$$

Propiedades 2.6.

1. El conjunto de homomorfismos $\{\partial_n: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X) \mid n > 0\}$ forma un complejo de cadenas, es decir, para $n > 1$, se tiene $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
2. Para $n > 0$, se tiene $\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$.

Demostración.

1. Haremos uso de las identidades 2.1 establecidas anteriormente. Sea T un

n -cubo de $Q_n(X)$:

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n(T) &= \partial_{n-1} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^j (A_j T - B_j T) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^j (\partial_{n-1}(A_j T) - \partial_{n-1}(B_j T)) \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (A_i A_j T - B_i A_j T) - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (A_i B_j T - B_i B_j T) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (A_i A_j T - B_i A_j T - A_i B_j T + B_i B_j T) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j} (A_i A_j T - B_i A_j T - A_i B_j T + B_i B_j T) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} (A_i A_j T - B_i A_j T - A_i B_j T + B_i B_j T) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j} (A_{j-1} A_i T - B_{j-1} A_i T - A_{j-1} B_i T + B_{j-1} B_i T) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} (A_i A_j T - B_i A_j T - A_i B_j T + B_i B_j T) \right)
\end{aligned}$$

Observemos que cada cara del tipo $A_k A_t T$ aparece dos veces en la suma final: una vez con signo $(-1)^{k+t}$ cuando $k = i$, $t = j$ y otra vez con signo $(-1)^{k+t+1}$ cuando $k = j-1$, $t = i$. Por lo tanto, estas apariciones se cancelan mutuamente. Lo mismo ocurre con las caras de la forma $A_k B_t T$, $B_k A_t T$ y $B_k B_t T$. En conclusión, todos los términos se cancelan por parejas y resulta $\partial_{n-1} \circ \partial_n(T) = 0$.

2. Sea T un n -cubo degenerado. Para cada $i = 1, \dots, n$, o bien T es constante en x_i , en cuyo caso, $A_i T - B_i T = 0$, o bien $A_i T$ y $B_i T$ son degenerados. En consecuencia, $\partial_n(T)$ es una suma de $(n-1)$ -cubos degenerados, es decir, $\partial_n(T) \in D_{n-1}(X)$.

■

Como consecuencia de la segunda propiedad, el operador frontera induce un homomorfismo $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$, para el cual mantendremos la misma no-

tación. Este nuevo homomorfismo preserva la propiedad $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, que escribiremos simplemente como $\partial\partial = 0$, y por lo tanto tenemos un nuevo complejo de cadenas, el conjunto $\{\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)\}$. Se tienen entonces los grupos de homología asociados al complejo.

Definición 2.7.

- Para $n > 0$, el grupo de los n -ciclos cúbicos singulares en X se define como el núcleo del operador frontera

$$Z_n(X) = \ker \partial_n = \{u \in C_n(X) \mid \partial_n(u) = 0\}.$$

- Para $n \geq 0$, el grupo de los n -bordes cúbicos singulares en X se define como

$$B_n(X) = \text{Im } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X)).$$

- Para $n > 0$, el n -ésimo grupo de homología cúbica singular de X se define como el cociente

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}.$$

Hay dos maneras de extender el complejo $\{\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)\}$. Podemos extender las definiciones anteriores para $n \leq 0$, lo cual es válido incluso cuando X es vacío, o podemos introducir el homomorfismo de aumento $\varepsilon: C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ y el grupo de homología reducido. Esta segunda aproximación permite una mejor comprensión de los grupos de homología:

Definición de $C_n(X)$ para n negativo

Para completar el complejo de cadenas, definimos $C_n(X) = \{0\}$ para cada $n < 0$ y establecemos $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ como el homomorfismo nulo para $n \leq 0$, que es la única opción posible.

Los grupos de n -bordes y n -ciclos cúbicos singulares son, en el caso $n \leq 0$, $Z_n(X) = \ker \partial_n = C_n(X)$ y $B_n(X) = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X)) = C_n(X)$. En consecuencia, $H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \{0\}$ para $n < 0$.

Para $n = 0$, obtenemos $Z_0(X) = \ker \partial_0 = C_0(X)$ y $B_0(X) = \partial_1(C_1(X))$, lo que resulta en $H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} = \frac{C_0(X)}{B_0(X)}$.

Definición del grupo de homología reducido

Esta definición se considera únicamente cuando $X \neq \emptyset$.

Comenzamos definiendo el *homomorfismo de aumento* $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

Como $C_0(X) = Q_0(X)$, consideramos la base de los 0-cubos y definimos $\varepsilon(T) = 1$ para todo 0-cubo T . Por lo tanto, dada una 0-cadena $u = \sum_i n_i T_i \in C_0(X)$, tenemos $\varepsilon(u) = \sum_i n_i$.

Propiedades 2.8. *Se cumple que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ y, en consecuencia, ε extiende el complejo $\{\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X) \mid n \leq 1\}$.*

Demostración. Es suficiente verificar la propiedad para un 1-cubo no degenerado arbitrario T :

$$\varepsilon(\partial_1(T)) = \varepsilon(T(1) - T(0)) = \varepsilon(T(1)) - \varepsilon(T(0)) = 1 - 1 = 0.$$

■

Se tienen entonces las definiciones asociadas a este nuevo complejo.

Definición 2.9. Denotamos el núcleo del homomorfismo de aumento por

$$\tilde{Z}_0(X) = \ker \varepsilon = \left\{ \sum_i n_i T_i \mid \sum_i n_i = 0 \right\}.$$

El 0-ésimo grupo de homología reducido de X se define como

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\tilde{Z}_0(X)}{B_0(X)}.$$

Para $n > 0$, definimos el n -ésimo grupo de homología reducido como $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$.

Observemos que $\tilde{Z}_0(X) \subset Z_0(X) = C_0(X)$, lo que implica que $\tilde{H}_0(X)$ es un subgrupo de $H_0(X)$, entonces podemos considerar el homomorfismo de inclusión $\xi: \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X)$. Como $\varepsilon(B_0(X)) = 0$, ε induce un homomorfismo $\varepsilon_*: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ definido por $\varepsilon_*(u + B_0(X)) = \varepsilon(u)$.

Proposición 2.10. *Sea X un espacio no vacío. La sucesión*

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\xi} H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

es exacta. En consecuencia, podemos identificar $\tilde{H}_0(X)$ con el núcleo de ε_ , y $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.*

Demostración. Debemos verificar tres condiciones:

ξ es inyectiva, lo cual está garantizado por ser la inclusión.

ε_* es sobreyectiva, lo cual es evidente ya que $X \neq \emptyset$ implica que ε es sobreyectiva y, por tanto, ε_* también lo es.

$\text{Im } \xi = \ker \varepsilon_*$, lo cual se cumple ya que

$$\text{Im } \xi = \tilde{H}_0(X) = \frac{\tilde{Z}_0(X)}{B_0(X)} = \frac{\ker \varepsilon}{B_0(X)} = \ker \varepsilon_*$$

Como consecuencia, podemos expresar $H_0(X)$ como suma directa de $\tilde{H}_0(X)$ y un subgrupo cíclico infinito, siendo posible elegir este último de múltiples maneras, en particular, $\mathbb{Z}$.

■

Propiedades 2.11.

1. Si X es unipuntual, $H_0(X) = \mathbb{Z}$ y $H_n(X) = \tilde{H}_0(X) = \{0\}$ para $n \neq 0$.

Demostración. Se tiene $C_0(X) = \mathbb{Z}$ y $C_n(X) = \{0\}$, para $n \neq 0$. Por tanto, $B_0(X) = \{0\}$ y $\tilde{H}_0(X) = \ker \varepsilon_* = \frac{\ker \varepsilon}{B_0(X)} = \ker \varepsilon = \{0\}$. En consecuencia, ε_* es un isomorfismo.

■

2. Si X es conexo por caminos, entonces $B_0(X) = \ker \varepsilon$, $\tilde{H}_0(X) = \{0\}$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Demostración. Sabemos que $B_0(X) \subset \ker \varepsilon$; verifiquemos la contención contraria.

Sea $u = \sum_i n_i T_i \in C_0(X)$ con $\varepsilon(u) = 0$, es decir, $\sum_i n_i = 0$. Esta suma tiene una cantidad finita k de términos no nulos. Reescribimos $u = \sum_{i=1}^k n_i T_i$ con $\sum_{i=1}^k n_i = 0$, con $T_i \neq T_j$ si $i \neq j$. Buscaremos $v \in C_1(X)$ tal que $\partial(v) = u$.

Como X es conexo por caminos y considerando cada T_i como un punto de X , construimos caminos Q_i que conectan:

- T_i con T_{i+1} para $i = 1, \dots, k-1$.
- T_k con T_1 para completar el ciclo.

Estos caminos son 1-cubos que cumplen $\partial(Q_i) = T_{i+1} - T_i$ y $\partial(Q_k) = T_1 - T_k$.

Consideremos el sistema lineal

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir la primera fila por la suma de todas las filas en la matriz ampliada

$$\left(A \left| \begin{array}{c} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{array} \right. \right)$$

obtenemos una fila de ceros ya que $\sum_{i=1}^k n_i = 0$. Además, es claro que existe una submatriz $(k-1) \times (k-1)$ triangular superior con determinante 1, unidad, lo que garantiza que el sistema es compatible indeterminado con soluciones en $\mathbb{Z}$.

Por tanto, existen enteros m_i , soluciones del sistema, que satisfacen:

$$\begin{cases} m_k - m_1 = n_1 \\ m_{i-1} - m_i = n_i, \text{ para } i = 2, \dots, k \end{cases}$$

Definiendo $v = \sum_{i=1}^k m_i Q_i$, obtenemos

$$\begin{aligned} \partial(v) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i (T_{i+1} - T_i) + m_k (T_1 - T_k) \\ &= (m_k - m_1) T_1 + \sum_{i=2}^k (m_{i-1} - m_i) T_i \\ &= \sum_{i=1}^k n_i T_i = u \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\ker \varepsilon \subset B_0(X)$. Al igual que en el caso anterior, esto implica que $\tilde{H}_0(X) = \{0\}$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

■

3. Sea $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, donde cada X_γ es una componente conexa por caminos. Entonces, el n -ésimo grupo de homología de X es la suma directa de los n -ésimos grupos de homología de sus componentes conexas por caminos.

Demostración. Como I^n es conexo por caminos y un n -cubo es una aplicación continua, su imagen está completamente contenida en alguna componente conexa, y por tanto se tienen las siguientes descomposiciones en sumas directas:

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} Q_n(X_\gamma) \\ D_n(X) &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} D_n(X_\gamma) \\ C_n(X) &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_n(X_\gamma) \end{aligned}$$

Las caras de n -cubos en X_γ son $(n-1)$ -cubos en X_γ , por lo que el operador frontera $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ se restringe a operadores frontera $\partial_n: C_n(X_\gamma) \rightarrow C_{n-1}(X_\gamma)$.

En consecuencia, también podemos descomponer:

$$\begin{aligned} Z_n(X) &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} Z_n(X_\gamma) \\ B_n(X) &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_n(X_\gamma) \\ H_n(X) &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_n(X_\gamma) \end{aligned}$$

En particular, $H_0(X)$ es una suma directa de tantos grupos cíclicos infinitos como componentes conexas por caminos tenga X .

■

Esta propiedades ilustran la estrecha relación entre los grupos de homología y ciertas propiedades topológicas fundamentales. En particular, observamos el vínculo entre el 0-ésimo grupo de homología y la conexión por caminos.

2.3. Homomorfismos inducidos

Los morfismos naturales entre espacios topológicos son las aplicaciones continuas. En esta sección estudiaremos cómo actúan estas aplicaciones sobre los grupos de homología y qué propiedades fundamentales podemos aprovechar.

Sean X e Y espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Para cada $n \geq 0$, consideremos los grupos de n -cubos singulares $Q_n(X)$ y $Q_n(Y)$. Definimos la aplicación $f_\#: Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y)$ mediante

$$f_\#(T) = f \circ T$$

para cada n -cubo singular $T \in Q_n(X)$. Es evidente que $f_\#$ es un homomorfismo de grupos.

Propiedades 2.12.

1. Se cumple que $f_\#(D_n(X)) \subset D_n(Y)$, lo que induce un nuevo homomorfismo $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$.

Demostración. Si $T \in D_n(X)$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $T(x_1, \dots, x_n)$ es constante respecto a x_j . Es decir, para cada $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in I^{n-1}$, existe $x \in X$ tal que $T(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = x$ para todo $x_j \in I$. Por tanto, para cada $x_j \in I$:

$$f_\#(T)(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(T(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)) = f(x) \in Y$$

lo que implica que $f_\#(T) \in D_n(Y)$. En consecuencia, existe un homomorfismo bien definido $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ dado por $f_\#(u + D_n(X)) = f_\#(u) + D_n(Y)$. ■

Notación. En adelante, y para simplificar la notación, usaremos $f_\#$ y ∂_n independientemente del grupo de salida, deduciendo del contexto a qué homomorfismo nos referimos.

2. Para cada $n = 1, 2, \dots$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Q_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & Q_{n-1}(X) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow f_\# \\ Q_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n} & Q_{n-1}(Y), \end{array}$$

lo que equivale a escribir $f_{\#} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_{\#}$. En consecuencia, el siguiente diagrama también es conmutativo, para cada n ,

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(Y). \end{array}$$

Es decir, se tiene un homomorfismo de cadenas entre $\{C_n(X) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{C_n(Y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, para cada n , existe un homomorfismo inducido

$$f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y).$$

Demostración. Para $n \leq 0$, es obvio. Sea $n > 0$, verificaremos que $f_{\#} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_{\#}$ para un n -cubo arbitrario, lo cual se extenderá por linealidad a C_n . Sea $T \in Q_n(X)$,

$$\begin{aligned} f_{\#} \circ \partial_n(T) &= f_{\#}(\partial_n(T)) = f_{\#}\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i T - B_i T)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (f_{\#}(A_i T) - f_{\#}(B_i T)), \\ \partial_n \circ f_{\#}(T) &= \partial_n(f_{\#}(T)) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i(f_{\#}(T)) - B_i(f_{\#}(T))). \end{aligned}$$

Es suficiente probar que $f_{\#}(A_i T) = A_i(f_{\#}(T))$ y $f_{\#}(B_i T) = B_i(f_{\#}(T))$. Para la cara frontal

$$f_{\#}(A_i T) = f \circ A_i T = f \circ (T \circ I_{i,0}^n) = (f \circ T) \circ I_{i,0}^n = A_i(f \circ T) = A_i(f_{\#}(T)),$$

y análogamente para las caras traseras.

Para verificar que $f_{\#}(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$, sea $u \in C_n(X)$ con $\partial_n(u) = 0$. Entonces

$$\partial_n(f_{\#}(u)) = f_{\#}(\partial_n(u)) = f_{\#}(0) = 0.$$

De manera similar, para probar $f_{\#}(B_n(X)) \subset B_n(Y)$, sea $u \in B_n(X)$. Entonces existe $v \in C_{n+1}(X)$ tal que $\partial_{n+1}(v) = u$. Tomando $f_{\#}(v)$,

$$\partial_{n+1}(f_{\#}(v)) = f_{\#}(\partial_{n+1}(v)) = f_{\#}(u).$$

Por tanto, se induce un homomorfismo $f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$, definido como $f_*(u + B_n(X)) = f_\#(u) + B_n(Y)$.

■

3. El siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_0(X) & & \\ \downarrow f_\# & \searrow \varepsilon & \\ & & \mathbb{Z} \\ & \nearrow \varepsilon & \\ C_0(Y) & & \end{array}$$

Además, $f_\#(\tilde{Z}_0(X)) \subset \tilde{Z}_0(Y)$ y por tanto, $f_\#$ induce un homomorfismo $f_*: \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(Y)$. Como consecuencia, el siguiente diagrama también es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_0(X) & \xrightarrow{\xi} & H_0(X) & & \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \searrow \varepsilon_* & \\ & & & & \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_0(Y) & \xrightarrow{\xi} & H_0(Y) & \nearrow \varepsilon_* & \end{array}$$

Demostración. Comprobemos que $\varepsilon \circ f_\# = \varepsilon$ en $C_0(X)$. Como $C_0(X) = Q_0(X)$, basta verificarlo para un 0-cubo T arbitrario en X ,

$$\varepsilon \circ f_\#(T) = \varepsilon(f_\#(T)) = 1 = \varepsilon(T)$$

pues $f_\#(T)$ es un 0-cubo en Y .

Por tanto, si $u \in \tilde{Z}_0(X) = \ker \varepsilon$

$$\varepsilon(f_\#(u)) = \varepsilon(u) = 0$$

lo que implica $f_\#(u) \in \ker \varepsilon = \tilde{Z}_0(Y)$.

Como ya hemos probado que $B_0(X) \subset B_0(Y)$, y $\tilde{H}_0(X) = \frac{\tilde{Z}_0(X)}{B_0(X)}$, tenemos un homomorfismo inducido $f_*: \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(Y)$, definido análogamente a $f_*: H_0(X) \longrightarrow H_0(Y)$.

La conmutatividad $\xi \circ f_* = f_* \circ \xi$ es inmediata pues ξ es la inclusión correspondiente. Para verificar $\varepsilon_* \circ f_* = \varepsilon_*$, sea $u + B_0(X) \in H_0(X)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_* \circ f_*(u + B_0(X)) &= \varepsilon_*(f_*(u + B_0(X))) = \varepsilon_*(f_\#(u) + B_0(Y)) = \\ &= \varepsilon(f_\#(u)) = \varepsilon(u) = \varepsilon_*(u + B_0(X)).\end{aligned}$$

■

4. Si $f: X \rightarrow X$ es la aplicación identidad, entonces los homomorfismos $f_\#$ y f_* son la identidad.

Demostración. Es obvio que $f_\#$ es el homomorfismo identidad, luego f_* también.

■

5. Sean X, Y, Z espacios topológicos y sean $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ aplicaciones continuas. Entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ tanto para los grupos H_n como para $\tilde{H}_0$.

Demostración. Es suficiente probar que $(g \circ f)_\#$ y $g_\# \circ f_\#$ actúan igual sobre un n -cubo arbitrario de X . Sea $T \in Q_n(X)$,

$$(g \circ f)_\#(T) = (g \circ f) \circ T = g \circ (f \circ T) = g_\#(f \circ T) = g_\#(f_\#(T)) = g_\# \circ f_\#(T).$$

■

Nota. La inyectividad o sobreyectividad de la aplicación f no garantiza el carácter correspondiente de f_* .

Ejemplo 2.13.

- Veremos más adelante que los grupos de homología de un espacio convexo son isomorfos a los de un espacio unipuntual, ya que tienen el mismo tipo de homotopía. De hecho, si X es un espacio convexo y $c_x: X \rightarrow \{x\}$ es la equivalencia homotópica, a pesar de no ser inyectiva, $(c_x)_*$ es un isomorfismo.
- De manera similar, los retracts por deformación comparten los grupos de homología con el espacio del que retractan. Si $i: A \rightarrow X$ es la inclusión de un retracto por deformación, aunque esta no sea necesariamente sobreyectiva, i_* será un isomorfismo.

2.4. Homotopía y grupos de homología

En esta sección estableceremos la relación entre espacios homotópicamente equivalentes y sus grupos de homología, estudiando cómo las aplicaciones homótopas y sus homomorfismos inducidos preservan la estructura homológica.

En el contexto de los grupos de homología de espacios topológicos, trabajamos con los complejos de cadenas formados por los grupos de cadenas de un espacio topológico junto con el operador frontera. Cuando tenemos dos espacios topológicos y una aplicación continua entre ellos, obtenemos una colección de homomorfismos entre sus grupos de homología. Veamos la relación entre la homotopía de cadenas y la homotopía de aplicaciones continuas.

Teorema 2.14. *Si $f, g: X \longrightarrow Y$ son aplicaciones homótopas entre los espacios X e Y , entonces existe una homotopía de cadenas entre los homomorfismos inducidos $f_\#$ y $g_\#$.*

Demostración. Construiremos unos homomorfismos $\varphi_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ que verifiquen 1.1. Para $n < 0$, estos serán necesariamente el homomorfismo nulo.

Para $n = 0$, identificamos un 0-cubo $T \in Q_0(X)$ con su punto imagen $T(0) \in X$. Definimos entonces $\phi_0: Q_0(X) \longrightarrow Q_1(Y)$ por:

$$\phi_0(T)(x) = F(x, T(0))$$

para cada 0-cubo T . Este homomorfismo satisface

$$\begin{aligned} A_1\phi_0(T) &= f_\#(T), \\ B_1\phi_0(T) &= g_\#(T), \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} A_1\phi_0(T)(x) &= \phi_0(T)(0) = F(0, T(0)) = f(T(0)) = f_\#(T), \\ B_1\phi_0(T)(x) &= \phi_0(T)(1) = F(1, T(0)) = g(T(0)) = g_\#(T). \end{aligned}$$

Como no existen 0-cubos degenerados, ϕ_0 induce directamente el homomorfismo $\varphi_0: C_0(X) \longrightarrow C_1(Y)$, que cumple

$$f_\# - g_\# = \partial_1 \circ \varphi_0 + \varphi_{-1} \circ \partial_0 = \partial_1 \circ \varphi_0$$

pues φ_{-1} es el homomorfismo nulo. Para ver que se cumple en $C_0(X)$, lo comprobamos para un 0-cubo T

$$\partial_1 \circ \phi_0(T) = -(A_1\phi_0(T) - B_1\phi_0(T)) = g_\#(T) - f_\#(T)$$

Para $n \geq 1$, construimos homomorfismos auxiliares $\phi_n: Q_n(X) \rightarrow Q_{n+1}(Y)$. Como $f \simeq g$, existe una homotopía $F: I \times X \rightarrow Y$. Para cada n -cubo $T \in Q_n(X)$, definimos

$$\phi_n(T)(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(x_1, T(x_2, \dots, x_{n+1})).$$

Es inmediato verificar que si T es degenerado, entonces $\phi_n(T)$ también lo es, lo que permite definir los homomorfismos φ_n como los obtenidos por el paso al cociente de los ϕ_n . Además, se cumplen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} A_1\phi_n(T) &= f_{\#}(T), \\ B_1\phi_n(T) &= g_{\#}(T), \\ A_i\phi_n(T) &= \phi_{n-1}A_{i-1}(T) \quad \text{para } 2 \leq i \leq n+1, \\ B_i\phi_n(T) &= \phi_{n-1}B_{i-1}(T) \quad \text{para } 2 \leq i \leq n+1. \end{aligned}$$

Probemos la primera y la tercera identidad, siendo las otras análogas:

$$\begin{aligned} A_1\phi_n(T)(x_1, \dots, x_n) &= \phi_n(T)(0, x_1, \dots, x_n) = F(0, T(x_1, \dots, x_n)) \\ &= f(T(x_1, \dots, x_n)) = f \circ T(x_1, \dots, x_n) = f_{\#}(T)(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

y para la tercera:

$$\begin{aligned} A_i\phi_n(T)(x_1, \dots, x_n) &= \phi_n(T)(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n) \\ &= F(x_1, T(x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n)), \\ \phi_{n-1}A_{i-1}(T)(x_1, \dots, x_n) &= F(x_1, A_{i-1}(T)(x_2, \dots, x_n)) \\ &= F(x_1, T(x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

La última igualdad se da porque la cara frontal $(i-1)$ -ésima coloca el 0 después de la posición $i-2$.

Finalmente, verifiquemos que los homomorfismos ϕ satisfacen la ecuación 1.1. Basta probarlo para un n -cubo arbitrario T :

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} \circ \phi_n(T) &= \partial_{n+1}(\phi_n(T)) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (A_i\phi_n(T) - B_i\phi_n(T)) \\ &= (-1)(A_1\phi_n(T) - B_1\phi_n(T)) + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i (\phi_{n-1}A_{i-1}(T) - \phi_{n-1}B_{i-1}(T)) \\ &= B_1\phi_n(T) - A_1\phi_n(T) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (\phi_{n-1}(A_i(T) - B_i(T))) \\ &= g_{\#}(T) - f_{\#}(T) - \phi_{n-1}(\partial_n(T)). \end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier $u \in Q_n(X)$ se cumple

$$g_{\#}(u) - f_{\#}(u) = \partial_{n+1} \circ \phi_n(u) + \phi_{n-1} \circ \partial_n(u)$$

y, considerando que $\phi_n(D_n(X)) \subset D_{n+1}(Y)$, la misma relación se mantiene para los homomorfismos φ . ■

Como consecuencia fundamental de este resultado, los grupos de homología mantienen su estructura para espacios homotópicamente equivalentes.

Teorema 2.15. *Sea $f: X \longrightarrow Y$ una equivalencia homotópica. Entonces los homomorfismos*

$$f_*: \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(Y) \quad y \quad f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

son isomorfismos, para todo n .

Demostración. Siendo f una equivalencia homotópica, existe una aplicación continua $g: Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \text{Id}_X$. Por tanto,

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{H_n(Y)},$$

y análogamente $g_* \circ f_* = \text{Id}_{H_n(X)}$, lo que demuestra que f_* es un isomorfismo con inverso g_* . ■

Ejemplo 2.16.

1. Recordemos que si $X = \{x\}$ es un espacio unipuntual, sus grupos de homología son $H_0(X) = \mathbb{Z}$, $\tilde{H}_0(X) = 0$, y $H_n(X) = 0$ para $n \neq 0$. En consecuencia, cualquier subespacio convexo de un espacio euclídeo, al ser homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual, tendrá los mismos grupos de homología y, en general, cualquier espacio contráctil.
2. Si A es un retracts por deformación de X , entonces A y X tienen el mismo tipo de homotopía. Por tanto, sus grupos de homología son isomorfos, siendo suficiente conocer los de uno de ellos para determinar los del otro.

Capítulo 3

Homología relativa

Los grupos de homología de un espacio topológico X nos proporcionan información sobre sus propiedades topológicas. Sin embargo, en muchas situaciones es necesario estudiar no solo un espacio, sino un par de espacios (X, A) donde $A \subset X$. Los grupos de homología relativa $H_n(X, A)$ nos permiten analizar cómo X se diferencia de A desde un punto de vista homológico.

Sea (X, A) un par topológico, es decir, sea X un espacio topológico y A un subespacio. Sea $i: A \rightarrow X$ la inclusión. El homomorfismo inducido $i_\#: C_n(A) \rightarrow C_n(X)$ es un monomorfismo, lo que nos permite identificar en lo sucesivo $C_n(A)$ con un subgrupo de $C_n(X)$. De hecho, $i_\#$ funcionará como la inclusión en los grupos de cadenas.

Definición 3.1. El grupo de n -cadenas relativas del par (X, A) se define, para $n \in \mathbb{Z}$, como el cociente

$$C_n(X, A) = \frac{C_n(X)}{C_n(A)}.$$

Una n -cadena relativa es, por tanto, la clase de equivalencia de una cadena en X módulo $C_n(A)$.

El operador frontera $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ cumple $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$, por lo que induce un homomorfismo bien definido en el cociente

$$\partial_n: C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$$

dado por $\partial_n(u + C_n(A)) = \partial_n(u) + C_{n-1}(A)$, donde $u \in C_n(X)$. Este homomorfismo cumple $\partial\partial = 0$, es decir, tenemos un nuevo complejo de cadenas y, en consecuencia, introducimos los correspondientes grupos de homología.

Definición 3.2. Para $n > 0$, se tienen los siguientes grupos para las n -cadenas relativas:

El grupo de n -ciclos relativos por

$$Z_n(X, A) = \ker \partial_n = \{u \in C_n(X, A) \mid \partial_n(u) = 0\}$$

El grupo de n -bordes relativos como

$$B_n(X, A) = \text{Im } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X, A))$$

El n -ésimo grupo de homología relativa se define como:

$$H_n(X, A) = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)}$$

Para $n = 0$, se tiene $Z_0(X, A) = C_0(X, A)$ y $H_0(X, A) = \frac{C_0(X, A)}{B_0(X, A)}$.

Para $n < 0$, se tiene $C_n(X, A) = Z_n(X, A) = B_n(X, A) = H_n(X, A) = \{0\}$.

La definición de $H_n(X, A)$ es similar a la de $H_n(X)$ pero “anulando” lo que ocurre en el subespacio A . Se observa que la clase de un elemento $u \in C_n(X, A)$ es un ciclo módulo A si, y solo si, $\partial(u) \in C_{n-1}(X)$ es una cadena en A .

3.1. La sucesión exacta asociada a un par

Una de las herramientas más importantes para trabajar con homología relativa es la sucesión exacta asociada a un par (X, A) . Esta sucesión relaciona los grupos de homología de A , de X y del par (X, A) , permitiéndonos comprender cómo estos grupos interactúan entre sí.

En nuestro objeto de estudio, tenemos los complejos de cadenas formados por los grupos $C_n(A)$, $C_n(X)$ y $C_n(X, A)$, con sus correspondientes operadores frontera. Vamos a retomar la notación del primer capítulo, en particular, el diagrama 1.2, donde el papel de f lo toma la inclusión $i_\#$ y el de g el homomorfismo de paso al cociente $j_\#$.

Lema 3.3. Para cada n , la siguiente sucesión es una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_\#} C_n(X) \xrightarrow{j_\#} C_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Por construcción, $i_{\#}$ es un monomorfismo y $j_{\#}$ es un epimorfismo. Además, es inmediato de las definiciones que $\ker j_{\#} = \text{Im } i_{\#}$, pues $\ker j_{\#} = C_n(A) = i_{\#}(C_n(A))$. ■

Estas relaciones entre los grupos de cadenas pueden representarse en un diagrama conmutativo infinito:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C_{n+1}(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_{n+1}(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_n(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_n(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

donde cada flecha vertical representa al correspondiente operador frontera, cada cuadrado es conmutativo y cada fila es una sucesión exacta. Los homomorfismos $i_{\#}$ y $j_{\#}$ inducen los correspondientes homomorfismos en los grupos de homología.

Por lo tanto, se tiene el homomorfismo

$$\partial_*: H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A),$$

construido en general en 1.11. Recordamos cómo funciona en este caso:

Dado $u \in Z_n(X, A)$, existe $u' \in C_n(X)$ con $j_{\#}(u') = u$. Por tanto, $\partial(u') \in \ker j_* = C_{n-1}(A)$ y de hecho, como $\partial\partial = 0$, se tiene $\partial(u') \in Z_{n-1}(A)$. Se define

$$\partial_*(u + B_n(X, A)) = \partial(u') + B_{n-1}(A) \in H_{n-1}(A).$$

La proposición 1.12 se escribe en este caso como:

Teorema 3.4. *Sea (X, A) un par. La siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

A esta sucesión se le denomina sucesión de homología del par (X, A) .

En el caso de que el subespacio A sea no vacío, podemos reemplazar los grupos de homología por los grupos de homología reducida, esto es útil a la hora de calcular los grupos de homología. Los grupos de homología reducida también forman un complejo de cadenas, por lo que los resultados se mantienen, pero solo difieren de los grupos de homología en $n = 0$, entonces es interesante notar lo siguiente.

Proposición 3.5. *Sea (X, A) un par de espacios topológicos, con A no vacío. El operador frontera $\partial_*: H_1(X, A) \longrightarrow H_0(A)$ tiene su imagen contenida en $\tilde{H}_0(A)$, y la siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Ejemplo 3.6. Consideremos los casos extremos de pares para un espacio topológico X :

- Para el par $(X, \emptyset)$, se tiene $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$. Esto se deduce directamente de que $C_n(X, \emptyset) = C_n(X)/\{0\} \cong C_n(X)$. Este caso muestra que los grupos de homología relativa pueden verse como una generalización de los grupos de homología absoluta.
- Tomando el par (X, X) , se tiene $H_n(X, X) = \{0\}$, ya que se construye a partir de $C_n(X, X) = C_n(X)/C_n(X) = \{0\}$.

Estos resultados son coherentes con la interpretación de que los grupos de homología de un par (X, A) miden la diferencia entre el espacio X y su subespacio A : en el primer caso, X difiere totalmente del vacío, mientras que en el segundo caso, X no difiere de sí mismo.

3.2. Aplicaciones entre pares de espacios

Para estudiar la estructura de los grupos de homología relativos a pares de espacios topológicos, vamos a poder aprovechar propiedades y elementos de los grupos de homología absolutos. Definimos primero las aplicaciones continuas entre pares $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ como una aplicación continua $f: X \longrightarrow Y$ que cumple $f(A) \subset B$.

Como sabemos, esta aplicación induce un homomorfismo en los grupos de cadenas, $f_\#: C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$. Con la condición adicional sobre los subespacios, se tiene que $f_\#(C_n(A)) \subset C_n(B)$. Por lo tanto, se induce otro homomorfismo, al

que denotaremos igual, en los grupos de cadenas de los pares. De manera análoga a los grupos de los espacios absolutos, para estos grupos se cumple que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X, A) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ C_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(Y, B) \end{array}$$

es conmutativo, y por lo tanto, se induce un homomorfismo en los grupos de homología $f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$, para cada n .

Propiedades 3.7.

1. Si $f: (X, A) \rightarrow (X, A)$ es la identidad, los homomorfismos inducidos $f_{\#}$ y f_* son la identidad correspondiente.
2. Dadas dos aplicaciones entre pares $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C)$, se tiene $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ y $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

La demostración de estas propiedades es similar a la demostración de las propiedades análogas en los grupos absolutos, por lo que se omite.

Observación 3.8. El homomorfismo $j_*: H_n(X) \rightarrow H_n(X, A)$ de la sucesión exacta del par, presentado anteriormente como el inducido por el paso al cociente $j_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$, puede entenderse también como el homomorfismo inducido por la aplicación entre pares $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$, donde $j: X \rightarrow X$ es la identidad.

Al igual que definimos la homotopía en espacios topológicos, podemos extender esta definición a los pares de espacios topológicos.

Definición 3.9. Dadas aplicaciones entre pares $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, diremos que son *homótopas* si existe una homotopía $F: (I \times X, I \times A) \rightarrow (Y, B)$ entre f y g , es decir, $F: I \times X \rightarrow Y$ es una homotopía entre f y g como aplicaciones en los espacios absolutos X e Y , y además $F(I \times A) \subset B$.

Teorema 3.10. Sean $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ aplicaciones homótopas entre pares. Entonces los homomorfismos inducidos $f_*, g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ coinciden.

Demostración. Si construimos una homotopía de cadenas entre los homomorfismos $f_{\#}, g_{\#}: C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$, podemos asegurar que los homomorfismos f_* y g_* coinciden, como asegura el teorema 1.10.

Para ver que existe una homotopía de cadenas, aprovechamos los homomorfismos φ construidos en el teorema 2.14. De hecho, basta ver que $\varphi_n(C_n(A)) \subset C_{n+1}(B)$. Recordemos que φ se definía como el paso a los grupos de cadenas del homomorfismo $\phi_n(T)(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(x_1, T(x_2, \dots, x_{n+1})) \in Q_{n+1}(Y)$, donde $T \in Q_n(X)$. Es suficiente ver que, si $T \in Q_n(A)$, entonces $\phi_n(T) \in Q_{n+1}(B)$. Esto es inmediato, pues F es una homotopía entre f y g como aplicaciones entre pares, por lo que $F(I \times A) \subset B$. Por lo tanto, si $T \in Q_n(A)$, para cualquier $(x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^n$, se tiene $T(x_2, \dots, x_{n+1}) \in A$, y en consecuencia, para cualquier $x_1 \in I$, tenemos $F(x_1, T(x_2, \dots, x_{n+1})) \in B$. ■

De manera análoga a los espacios topológicos, podemos hablar de pares de espacios con el mismo tipo de homotopía.

Definición 3.11.

1. Dados pares (X, A) , (Y, B) , una equivalencia homotópica es una aplicación $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ para la que existe otra aplicación $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ de forma que $f \circ g$ sea homótopa a la identidad en el par (Y, B) y $g \circ f$ sea homótopa a la identidad en el par (X, A) .
2. Se dice que dos pares de espacios topológicos tienen el mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia homotópica entre ellos.

Observamos que, dados pares (X, A) , (Y, B) con el mismo tipo de homotopía, X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, y que alguna de las equivalencias homotópicas que llevan un espacio en el otro respeta $f(A) \subset B$ y $g(B) \subset A$.

Teorema 3.12. *Si (X, A) y (Y, B) son pares con el mismo tipo de homotopía, los grupos de homología de ambos pares son isomorfos.*

Demostración. Si (X, A) tiene el mismo tipo de homotopía que (Y, B) , entonces existirá una equivalencia homotópica f , y los homomorfismos inducidos f_* serán isomorfismos. La demostración es análoga a la del teorema 2.15. ■

Estudiemos ahora cómo interactúan las aplicaciones entre pares con la sucesión exacta de los mismos. Sea $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ una aplicación entre pares, se tiene

entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
 \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

donde cada cuadrado es conmutativo como consecuencia de la segunda propiedad en 3.7 y la conmutatividad de $f_\#$ y ∂ . Que este diagrama, que incluye la sucesión exacta asociada a los grupos de homología de un par, sea conmutativo para cualquier aplicación entre pares, es una señal de que estamos definiendo los grupos $H_n(X, A)$ de una manera natural.

3.3. La propiedad de escisión

Una de las propiedades más importantes de los grupos de homología relativa es la llamada propiedad de escisión. En una situación ideal, los grupos de homología de un par (X, A) se podrían construir a partir del complemento $X - A$. Si bien esto no es cierto en general, podemos asegurar que estos grupos de homología se mantienen al eliminar ciertos subespacios de A . Bajo ciertas hipótesis, es posible escindir un conjunto sin que esto afecte a los grupos de homología del par.

Teorema 3.13 (Teorema de escisión). *Sea (X, A) un par y W un subconjunto de A tal que $\overline{W} \subset \text{Int}(A)$. Entonces, la aplicación de inclusión*

$$(X - W, A - W) \longmapsto (X, A)$$

induce un isomorfismo en los grupos de homología relativos

$$H_n(X - W, A - W) \cong H_n(X, A).$$

Para demostrar este teorema, necesitamos introducir el concepto de recubrimiento abierto generalizado. La idea es que al construir los grupos de n -cubos singulares, podemos restringirnos a cubos suficientemente “pequeños” sin que esto altere la estructura de los grupos. Si bien en espacios métricos el concepto de tamaño se define naturalmente a partir del diámetro, para espacios más generales necesitamos una noción más abstracta.

Definición 3.14. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subconjuntos de X tales que sus interiores forman un recubrimiento abierto

de X . Diremos que $\mathcal{U}$ es un *recubrimiento abierto generalizado* de X . Un n -cubo singular $T: I^n \rightarrow X$ se dice que es de *orden más pequeño que $\mathcal{U}$* si existe un $\lambda \in \Lambda$ tal que $T(I^n) \subset U_\lambda$.

Ejemplo 3.15. Si X es un espacio métrico y $\varepsilon > 0$, podemos considerar como recubrimiento abierto generalizado la familia de todas las bolas cerradas de radio ε .

Para un recubrimiento abierto generalizado $\mathcal{U}$, definimos $Q_n(X, \mathcal{U})$ como el subgrupo de $Q_n(X)$ generado por los n -cubos de orden más pequeño que $\mathcal{U}$. Como las caras de un cubo de orden más pequeño que $\mathcal{U}$ también lo son, el operador frontera se restringe a estos grupos.

Sea $D_n(X, \mathcal{U}) = Q_n(X, \mathcal{U}) \cap D_n(X)$. Definimos entonces los grupos de cadenas $C_n(X, \mathcal{U}) = Q_n(X, \mathcal{U}) / D_n(X, \mathcal{U})$, en los que el operador frontera induce un homomorfismo.

Si A es un subespacio de X , se cumple $Q_n(A, \mathcal{U}) = Q_n(A) \cap Q_n(X, \mathcal{U})$ y $D_n(A, \mathcal{U}) = D_n(A) \cap Q_n(X, \mathcal{U})$. Por lo tanto, podemos definir $C_n(A, \mathcal{U}) = Q_n(A, \mathcal{U}) / D_n(A, \mathcal{U})$.

Para un par (X, A) , definimos el grupo de cadenas de orden más pequeño que $\mathcal{U}$ como $C_n(X, A, \mathcal{U}) = C_n(X, \mathcal{U}) / C_n(A, \mathcal{U})$, donde el operador frontera ∂_n se induce de manera natural. A partir de este operador, definimos los grupos de ciclos y bordes:

$$Z_n(X, A, \mathcal{U}) = \ker \partial_n, \quad B_n(X, A, \mathcal{U}) = \text{Im } \partial_{n+1},$$

que nos permiten definir los grupos de homología

$$H_n(X, A, \mathcal{U}) = Z_n(X, A, \mathcal{U}) / B_n(X, A, \mathcal{U}).$$

Para $n = 0$, como los 0-cubos se identifican con puntos de X , tenemos que $Q_0(X, \mathcal{U}) = Q_0(X)$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} C_0(X, A, \mathcal{U}) &= Z_0(X, A, \mathcal{U}) = C_0(X, A), \\ H_0(X, A, \mathcal{U}) &= C_0(X, A) / B_0(X, A, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

La inclusión de $Q_n(X, \mathcal{U})$ en $Q_n(X)$ induce un homomorfismo

$$\sigma: C_n(X, A, \mathcal{U}) \rightarrow C_n(X, A)$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(X, A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, A, \mathcal{U}) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ C_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, A) \end{array}$$

y, en consecuencia, induce un homomorfismo

$$\sigma_*: H_n(X, A, \mathcal{U}) \longrightarrow H_n(X, A).$$

El siguiente teorema nos asegura que este homomorfismo es un isomorfismo:

Teorema 3.16. *Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto generalizado de X . Entonces, el homomorfismo σ_* es un isomorfismo para todo $n \geq 0$.*

Utilizando este resultado, que demostraremos más adelante, podemos demostrar el [Teorema de escisión](#).

Demostración del Teorema 3.13. Sea (X, A) un par y W un subconjunto de A que cumple las hipótesis del teorema. Como $\overline{W} \subset \text{Int}(A)$, se tiene

$$X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(X - W),$$

luego $\mathcal{U} = \{A, X - W\}$ es un recubrimiento abierto generalizado de X . Por lo tanto, un cubo de orden más pequeño que $\mathcal{U}$ o bien es un cubo en A o bien es un cubo en $X - W$, luego

$$C_n(X, \mathcal{U}) = C_n(A) + C_n(X - W),$$

donde $+$ denota el menor subgrupo que contiene a $C_n(A) \cup C_n(X - W)$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X - W, A - W) & \xrightarrow{i} & C_n(X, A) \\ & \searrow j & \uparrow \sigma \\ & & C_n(X, A, \mathcal{U}) \end{array}$$

donde i y j denotan los homomorfismos inducidos por las inclusiones correspondientes. El homomorfismo i viene de que $C_n(X - W) \subset C_n(X)$ y $C_n(A - W) \subset C_n(A)$. Para el homomorfismo j , se tiene que $C_n(X - W) \subset C_n(X, \mathcal{U})$

y $C_n(A - W) \subset C_n(A, \mathcal{U})$, de hecho, $C_n(A - W) = C_n(X - W) \cap C_n(A)$ y $C_n(A, \mathcal{U}) = C_n(A)$.

Este diagrama induce otro diagrama conmutativo en homología:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X - W, A - W) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X, A) \\ & \searrow j_* & \uparrow \sigma_* \\ & & H_n(X, A, \mathcal{U}) \end{array}$$

Para probar el teorema, queremos ver que i_* es un isomorfismo. Por el teorema 3.16, sabemos que σ_* es un isomorfismo. Basta ver que el homomorfismo j es un isomorfismo, pues entonces j_* también lo será. Por un lado,

$$\begin{aligned} C_n(X - W, A - W) &= C_n(X - W)/C_n(A - W) \\ &= C_n(X - W)/(C_n(X - W) \cap C_n(A)), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $C_n(A - W) = C_n(X - W) \cap C_n(A)$, pues $A - W$ es precisamente la intersección de $X - W$ y A .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} C_n(X, A, \mathcal{U}) &= C_n(X, \mathcal{U})/C_n(A, \mathcal{U}) \\ &= (C_n(X - W) + C_n(A))/C_n(A), \end{aligned}$$

ya que $C_n(X, \mathcal{U}) = C_n(X - W) + C_n(A)$ según nuestra construcción del recubrimiento $\mathcal{U} = \{A, X - W\}$.

Por el primer teorema de isomorfía, tenemos:

$$\begin{aligned} (C_n(X - W) + C_n(A))/C_n(A) &\cong C_n(X - W)/(C_n(X - W) \cap C_n(A)) \\ &= C_n(X - W)/C_n(A - W). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el homomorfismo j es un isomorfismo entre $C_n(X - W, A - W)$ y $C_n(X, A, \mathcal{U})$, lo que induce un isomorfismo j_* en homología. Junto con el isomorfismo σ_* , esto completa la demostración. ■

Este resultado nos permite calcular los grupos de homología relativa de un par (X, A) a través de pares más sencillos que mantengan la misma estructura homológica relativa.

3.4. Subdivisión de cubos singulares

Vamos a introducir el operador de subdivisión de n -cubos singulares, un concepto geoméricamente intuitivo que nos permitirá demostrar el Teorema 3.16. Primero probaremos el teorema para los grupos de homología absoluta y, una vez visto esto, extenderemos el resultado a los grupos de homología relativa utilizando el Lema de los cinco.

La idea básica consiste en subdividir I^n en 2^n cubos de lado $\frac{1}{2}$ mediante los hiperplanos $x_i = \frac{1}{2}$, para $i = 1, \dots, n$. Vamos a partir $I = I_0 \cup I_1$ con $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$ y $I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$. Para subdividir un n -cubo singular, consideramos el conjunto de los vértices de I^n , denotado por $\mathcal{E}_n = \{0, 1\}^n$. Para $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_n$, sea $I_e^n = I_{e_1} \times \dots \times I_{e_n}$, uno de los n -cubos de lado $\frac{1}{2}$ en los que se subdivide I^n . Además, existe una aplicación $\rho_e: I^n \rightarrow I_e^n$, que será el homeomorfismo inducido por los homeomorfismos lineales obvios $I \cong I_0$ e $I \cong I_1$, $\rho_e(x) = \frac{1}{2}(x + e)$.

Para un n -cubo singular $T: I^n \rightarrow X$ y un vértice $e \in \mathcal{E}_n$, definimos un nuevo n -cubo singular $F_e(T): I^n \rightarrow X$ mediante

$$F_e T(x) = T(\frac{1}{2}(x + e)),$$

es decir, $F_e T = T \circ \rho_e$, luego $\text{Im } F_e T \subset \text{Im } T$ y, por lo tanto, se puede entender como la restricción de T a I_e^n .

Definición 3.17. Dado un espacio topológico X y $n \geq 1$, se define el *operador de subdivisión* en el grupo de n -cubos singulares, $\text{Sd}_n: Q_n(X) \rightarrow Q_n(X)$, como el homomorfismo de grupos tal que

$$\text{Sd}_n(T) = \sum_{e \in \mathcal{E}_n} F_e(T)$$

para todo n -cubo singular T . Para $n = 0$, definimos $\text{Sd}_0(T) = T$.

Propiedades 3.18.

1. Si T es degenerado, entonces $F_e(T)$ también lo es. Por lo tanto, Sd_n induce un homomorfismo $\text{sd}_n: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$.

Demostración. Si T es constante en alguna coordenada de x , también será constante en esa misma coordenada de $\frac{1}{2}(x + e)$. Se tiene $\text{Sd}_n(D_n(X)) \subset D_n(X)$, por lo que el operador de subdivisión induce un homomorfismo en los grupos de cadenas. ■

2. Las caras frontales y traseras cumplen las siguientes propiedades:

- a) Si $e, e' \in \mathcal{E}_n$ son tales que coinciden en todas las coordenadas excepto $e_j = 1$ y $e'_j = 0$, entonces $A_j F_e T = B_j F_{e'} T$.

Demostración. Dado $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_n$ con $e_j = 1$, denotamos por e' al elemento $e' = (e_1, \dots, e_{j-1}, 0, e_{j+1}, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_n$. Entonces

$$\begin{aligned} A_j F_e T(x_1, \dots, x_{n-1}) &= F_e T(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1}) = \\ &= T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \dots, \frac{x_{j-1}+e_{j-1}}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{x_j+e_{j+1}}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+e_n}{2}\right), \\ B_j F_{e'} T(x_1, \dots, x_{n-1}) &= F_{e'} T(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_{n-1}) = \\ &= T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \dots, \frac{x_{j-1}+e_{j-1}}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{x_j+e_{j+1}}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+e_n}{2}\right). \end{aligned}$$

■

- b) Si $e \in \mathcal{E}_n$ es tal que $e_j = 0$, y construimos $\tilde{e} \in \mathcal{E}_{n-1}$ como $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n)$, entonces $A_j F_e T = F_{\tilde{e}} A_j T$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} A_j F_e T(x_1, \dots, x_{n-1}) &= F_e T(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1}) = \\ &= T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \dots, \frac{x_{j-1}+e_{j-1}}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{x_j+e_{j+1}}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+e_n}{2}\right), \\ F_{\tilde{e}} A_j T(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \\ &= A_j T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \dots, \frac{x_{j-1}+e_{j-1}}{2}, \frac{x_j+e_{j+1}}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+e_n}{2}\right) = \\ &= T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \dots, \frac{x_{j-1}+e_{j-1}}{2}, 0, \frac{x_j+e_{j+1}}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+e_n}{2}\right). \end{aligned}$$

■

- c) De manera análoga, si $e \in \mathcal{E}_n$ es tal que $e_j = 1$ y definimos $\tilde{e}$ como antes, entonces $B_j F_e T = F_{\tilde{e}} B_j T$.

3. El operador de subdivisión conmuta con el operador frontera en los grupos de cadenas, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \\ \text{sd}_n \downarrow & & \downarrow \text{sd}_{n-1} \\ C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \end{array}$$

Demostración. Vamos a comprobar que el diagrama análogo para los grupos $Q_n(X)$ es conmutativo, de donde se deduce el resultado. Sea $T \in Q_n(X)$,

$$\begin{aligned} \text{Sd}_{n-1} \circ \partial(T) &= \text{Sd}_{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i T - B_i T) \right) = \\ &= \sum_{\tilde{e} \in \mathcal{E}_{n-1}} F_{\tilde{e}} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i T - B_i T) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{\tilde{e} \in \mathcal{E}_{n-1}} (F_{\tilde{e}} A_i T - F_{\tilde{e}} B_i T) \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \partial \circ \text{Sd}_n(T) &= \partial \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_n} F_e T \right) = \sum_{e \in \mathcal{E}_n} \partial(F_e T) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_n} (A_i F_e T - B_i F_e T) \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Luego basta probar que $\sum_{e \in \mathcal{E}_n} (A_i F_e T - B_i F_e T) = \sum_{\tilde{e} \in \mathcal{E}_{n-1}} (F_{\tilde{e}} A_i T - F_{\tilde{e}} B_i T)$ para cada i .

Por la propiedad 2a del apartado anterior, y con la notación introducida, sabemos que $A_i F_e T = B_i F_{e'} T$, luego

$$(A_i F_e T - B_i F_e T) + (A_i F_{e'} T - B_i F_{e'} T) = (A_i F_{e'} T - B_i F_e T).$$

De las propiedades 2b y 2c se deduce

$$(-1)^i (A_i F_{e'} T - B_i F_e T) = (-1)^i (F_{\tilde{e}} A_i T - F_{\tilde{e}} B_i T),$$

Por lo tanto, las dos expresiones coinciden, pues las sumas recorren $\mathcal{E}_n$ y $\mathcal{E}_{n-1}$ sin duplicidad, lo que prueba que el operador de subdivisión conmuta con el operador frontera, tanto en los grupos de cubos como en los grupos de cadenas. ■

4. El operador de subdivisión preserva el homomorfismo de aumento.

Demostración. El homomorfismo de aumento, $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, está definido en $C_0(X) = Q_0(X)$ y $\text{Sd}_0 = \text{sd}_0$ es la identidad, por lo que claramente $\varepsilon \circ \text{sd}_0 = \varepsilon$. ■

5. Para cualquier recubrimiento generalizado $\mathcal{U}$ de X y cualquier cadena $u \in C_n(X)$, existe un entero $q \geq 0$ tal que $\text{sd}_n^q(u) \in C_n(X, \mathcal{U})$.

Demostración. Dado un recubrimiento $\mathcal{U}$, basta probarlo para un n -cubo singular cualquiera, pues en ese caso, si $u \in Q_n(X)$, u es una combinación lineal de una cantidad finita de n -cubos singulares, $T_1, \dots, T_r$. Bastará entonces tomar el mayor entero q , de entre los $q_1, \dots, q_r$, tal que $\text{Sd}_n^q(u) \in Q_n(X, \mathcal{U})$, y como el operador de subdivisión respeta $D_n(X)$, se tendrá $\text{sd}_n^q(u + D_n(X)) \in C_n(X, \mathcal{U})$.

Sea $T \in Q_n(X)$ un n -cubo singular. Buscamos un entero positivo $q(T)$ tal que $\text{Sd}_n^{q(T)}(T) \in Q_n(X, \mathcal{U})$, es decir, queremos ver que si aplicamos el operador de subdivisión una cantidad suficiente de veces, obtenemos una suma de n -cubos donde cada uno de ellos es de orden menor que $\mathcal{U}$. Para ello, nos vamos a mover en el espacio métrico I^n , del cual tenemos un recubrimiento abierto a partir de $\mathcal{U}$ y de T :

$$I^n = T^{-1}(X) = T^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Int } U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T^{-1}(\text{Int } U_\lambda),$$

donde $T^{-1}(\text{Int } U_\lambda)$ es abierto por ser T continua. Por lo tanto, existe un número de Lebesgue para este recubrimiento, ε_T . Es decir, si U es un subconjunto de I^n de diámetro menor que ε_T , existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $U \subset T^{-1}(\text{Int } U_\lambda)$.

Dado un entero positivo q , al calcular $\text{Sd}_n^q(T)$ obtenemos una suma de términos de la forma $F_{e_q} \cdots F_{e_1} T$ donde e_i es un vértice del n -cubo resultante de dividir I^n i veces. Vamos a suponer que e_i es el origen $0 = (0, \dots, 0) \in I^n$, para cada i , pues para cualquier otra elección bastará con hacer una traslación y no cambiará el diámetro del conjunto. De esta forma,

$$F_0 \cdots F_0 T: I^n \longrightarrow X$$

no es más que, con la notación introducida anteriormente,

$$F_0 \cdots F_0 T = T \circ \rho_0^q,$$

luego $\text{Im } F_0 \cdots F_0 T = T([0, \frac{1}{2^q}]^n)$. Puesto que $[0, \frac{1}{2^q}]^n$ es un n -cubo de lado $\frac{1}{2^q}$ y diámetro $\sqrt{n} \frac{1}{2^q}$, vamos a elegir $q(T)$ tal que

$$\sqrt{n} \frac{1}{2^{q(T)}} < \varepsilon_T.$$

Por lo tanto, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$[0, \frac{1}{2^q}]^n \subset T^{-1}(\text{Int } U_\lambda)$$

y en consecuencia,

$$T([0, \frac{1}{2^q}]^n) \subset T(T^{-1}(\text{Int } U_\lambda)) \subset \text{Int } U_\lambda.$$

Luego

$$F_0 \cdots F_n T(I^n) = T([0, \frac{1}{2^q}]^n) \subset U_\lambda,$$

es decir, cada sumando de $\text{Sd}_n^q(T)$ es de orden menor que $\mathcal{U}$, lo que queríamos probar. ■

Queremos definir ahora una homotopía de cadenas entre el operador de subdivisión y el homomorfismo identidad en los grupos de cadenas.

Para ello, definimos primero las aplicaciones $\eta_0, \eta_1: I^2 \longrightarrow I$ por

$$\begin{aligned} \eta_0(x_1, x_2) &= \frac{x_1}{2-x_2} \\ \eta_1(x_1, x_2) &= \begin{cases} \frac{x_1+1}{2-x_2}, & x_1 + x_2 \leq 1 \\ 1, & x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de η_0 es que lleva cada punto (x_1, x_2) al punto de corte del segmento que une (x_1, x_2) y $(0, 2)$ con la recta $y = 1$, y η_1 lleva cada punto (x_1, x_2) al punto de corte del segmento que une $(x_1 + 1, x_2)$ y $(0, 2)$ con la misma recta. Podemos destacar que la imagen de $I \times \{0\}$ por η_1 es $[\frac{1}{2}, 1]$ y que la imagen de $I \times \{0\}$ por η_0 es $[0, \frac{1}{2}]$.

Para $n > 0$, dado un n -cubo singular T y $e \in \mathcal{E}_n$, definimos un $(n+1)$ -cubo por

$$G_e T(x_1, \dots, x_{n+1}) = T(\eta_{e_1}(x_1, x_{n+1}), \dots, \eta_{e_n}(x_n, x_{n+1})).$$

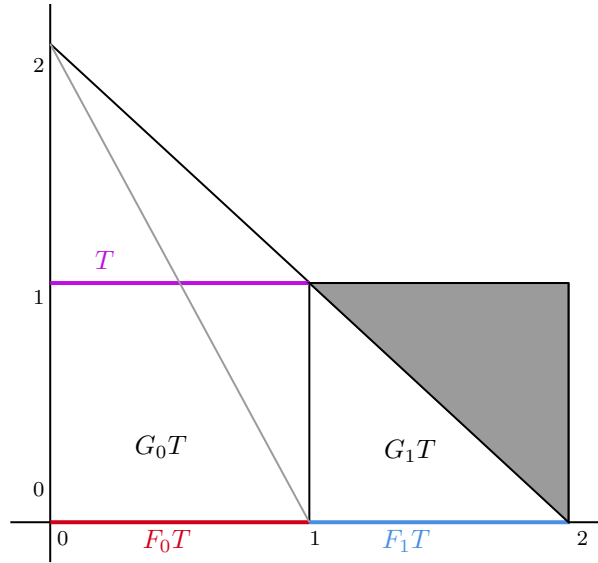
Ejemplo 3.19. Si $n = 1$, se tiene $\mathcal{E}_1 = \{0, 1\}$, luego

$$\begin{aligned} G_0 T(x_1, x_2) &= T(\eta_0(x_1, x_2)) = T(\frac{x_1}{2-x_2}), \\ G_1 T(x_1, x_2) &= T(\eta_1(x_1, x_2)) = T(\frac{x_1+1}{2-x_2}), \end{aligned}$$

y con algunos valores particulares,

$$\begin{aligned} G_0 T(x_1, 1) &= T(x_1), \\ G_0 T(x_1, 0) &= T(\frac{x_1}{2}) = F_0 T(x_1), \\ G_1 T(x_1, 0) &= T(\frac{x_1+1}{2}) = F_1 T(x_1). \end{aligned}$$

La siguiente figura representa gráficamente estas definiciones.



Definimos el homomorfismo $\phi_n: Q_n(X) \rightarrow Q_{n+1}(X)$ como el que extiende la definición

$$\phi_n(T) = (-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} G_e(T)$$

si T es un n -cubo singular para $n \geq 1$, y $\phi_0: Q_0(X) \rightarrow Q_1(X)$ como el homomorfismo nulo. Veamos algunas propiedades de estos homomorfismos.

Propiedades 3.20.

1. Si T es un cubo degenerado, también lo es $G_e(T)$, luego se induce un homomorfismo $\varphi_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$.

Demostración. Es inmediato de la definición de G_eT . ■

2. Veamos unas propiedades que cumplen las caras del cubo:

- a) Para un n -cubo T , se tiene $A_{n+1}G_eT = F_eT$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} A_{n+1}G_eT(x_1, \dots, x_n) &= G_eT(x_1, \dots, x_n, 0) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, 0), \dots, \eta_{e_n}(x_n, 0)) \\ &= T\left(\frac{x_1+e_1}{2}, \dots, \frac{x_n+e_n}{2}\right) = F_eT. \end{aligned}$$
■

- b) Si $e = (0, \dots, 0)$, entonces $B_{n+1}G_eT = T$. Para cualquier otro $e \in \mathcal{E}_n$, $B_{n+1}G_eT$ es un n -cubo degenerado.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} B_{n+1}G_eT(x_1, \dots, x_n) &= G_eT(x_1, \dots, x_n, 1) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, 1), \dots, \eta_{e_n}(x_n, 1)). \end{aligned}$$

Si $e_j = 1$, entonces $x_j + 1 \geq 1$, luego $\eta_1(x_j, 1) = 1$, para todo $x_j \in I$, luego en ese caso, $B_{n+1}G_eT$ será degenerado. Si $e = (0, \dots, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} B_{n+1}G_0T(x_1, \dots, x_n) &= T(\eta_0(x_1, 1), \dots, \eta_0(x_n, 1)) \\ &= T(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

■

- c) Si $e \in \mathcal{E}_n$ con $e_j = 1$ y $e' \in \mathcal{E}_n$ con $e'_j = 0$ y $e_i = e'_i$ si $i \neq j$, entonces $A_jG_eT = B_jG_{e'}T$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} A_jG_eT(x_1, \dots, x_n) &= G_eT(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_1(0, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \frac{1}{2-x_n}, \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)), \\ B_jG_{e'}T(x_1, \dots, x_n) &= G_{e'}T(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_n) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_0(1, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \frac{1}{2-x_n}, \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)). \end{aligned}$$

■

- d) Para $n \geq 2$, si $e \in \mathcal{E}_n$, tomamos $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_{n-1}$. Si $e_j = 0$, se tiene $A_jG_eT = G_{\tilde{e}}A_jT$. Si $e_j = 1$, se tiene $B_jG_eT = G_{\tilde{e}}B_jT$.

Demostración. Lo vemos para el primer caso:

$$\begin{aligned} A_jG_eT(x_1, \dots, x_n) &= G_eT(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_0(0, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, 0, \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)), \\ G_{\tilde{e}}A_jT(x_1, \dots, x_n) &= A_jT(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), \\ &\quad \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \\ &= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), 0, \\ &\quad \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)). \end{aligned}$$

■

e) Para $n = 1$, se tiene que A_1G_0T y B_1G_1T son degenerados.

Demostración. En efecto, para cada $x \in I$

$$\begin{aligned} A_1G_0T(x) &= G_0T(0, x) = T(\eta_0(0, x)) = T(0), \\ B_1G_1T(x) &= G_1T(1, x) = T(\eta_1(1, x)) = T(1), \end{aligned}$$

pues $1 + x \geq 1$.

■

3. Para un n -cubo singular T , se tiene

$$\partial_{n+1} \circ \phi_n(T) = \text{Sd}_n(T) - T - \phi_{n-1} \circ \partial_n(T) + D$$

con $D \in D_n(X)$, por lo que al pasar a los grupos de cadenas, se cumple

$$\text{sd}_n(u) - u = \partial_{n+1} \circ \varphi_n(u) + \varphi_{n-1} \circ \partial_n(u). \quad (3.3)$$

Es decir, los homomorfismos φ definen una homotopía de cadenas entre el operador de subdivisión y el homomorfismo identidad.

Demostración. El caso $n = 0$ es trivial, pues entendemos ϕ_{-1} como el homomorfismo nulo. Nos centramos en estudiar $n > 0$. Vamos a introducir unas propiedades que relacionan las caras con G_e .

En el caso $n = 1$, queremos ver que

$$\partial_2 \circ \phi_1(T) - \text{Sd}_1(T) + T \in D_1(X)$$

ya que $\phi_0 = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} \partial_2 \circ \phi_1(T) &= \partial_2(G_0T + G_1T) \\ &= A_1G_0T - B_1G_0T + A_1G_1T - B_1G_1T \\ &\quad - A_2G_0T + B_2G_0T - A_2G_1T + B_2G_1T, \end{aligned}$$

y haciendo uso de las propiedades anteriores, sabemos que $A_1G_1T = B_1G_0T$, $A_2G_0T = F_0T$, $A_2G_1T = F_1T$, $B_2G_0T = T$ y queda una suma de cubos degenerados, ya que A_1G_0T , B_1G_1T y B_2G_1T son degenerados. Por lo tanto,

$$\partial_2 \circ \phi_1(T) = \text{Sd}_1(T) - T - \phi_0 \circ \partial_1(T) + D_1$$

donde $D_1 = B_1G_1T - A_1G_0T + B_2G_1T \in D_n(X)$, como queríamos probar.

Suponemos $n \geq 2$. Se tiene

$$\begin{aligned}
 \partial_{n+1} \circ \phi_n(T) &= \partial_{n+1}((-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} G_e T) \\
 &= (-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} \partial_{n+1}(G_e T) \\
 &= (-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (A_i G_e T - B_i G_e T).
 \end{aligned}$$

Si en el segundo sumatorio tomamos los términos cuando $i = n+1$, y haciendo uso de las propiedades [2a](#) y [2b](#) del apartado anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
 &(-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} (-1)^{n+1} (A_{n+1} G_e T - B_{n+1} G_e T) \\
 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_n} F_e T - T - \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e \neq 0} B_{n+1} G_e T \\
 &= \text{Sd}_n - T + D_2,
 \end{aligned}$$

donde el segundo sumatorio D_2 es suma de cubos degenerados. El resto de sumandos son

$$S = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_n} (A_i G_e T - B_i G_e T) \right). \quad (3.4)$$

El procedimiento ahora es el mismo que seguíamos para ver que el operador frontera conmuta con el operador de subdivisión, pues las propiedades que cumplen G_e y F_e son similares. La idea es emparejar sumandos de (3.4) hasta llegar a

$$\begin{aligned}
 \phi_{n-1} \circ \partial_n(T) &= \phi_{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i T - B_i T) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (\phi_{n-1}(A_i T) - \phi_{n-1}(B_i T)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{\tilde{e} \in \mathcal{E}_{n-1}} (G_{\tilde{e}} A_i T - G_{\tilde{e}} B_i T) = S.
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces una homotopía de cadena entre el operador de subdivisión en los grupos de cadenas y el homomorfismo identidad.

■

4. Si $u \in C_n(X, \mathcal{U})$, entonces $\varphi_n(u) \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$.

Demostración. Basta ver que si T es de orden menor que $\mathcal{U}$, entonces $G_e T$ también lo es, pues en consecuencia, $\phi_n(T) \in Q_{n+1}(X, \mathcal{U})$, y al pasar al cociente, φ_n también lo cumple. Pero $G_e T(I^{n+1}) \subset T(I^n)$, luego si $T \in Q_n(X, \mathcal{U})$, entonces $G_e T \in Q_{n+1}(X, \mathcal{U})$.

■

Construimos unos nuevos homomorfismos, $\psi_{q,n}: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$, con $q > 0$ entero, por

$$\psi_{q,n}(u) = \sum_{i=0}^{q-1} \varphi_n(\text{sd}_n^i(u)).$$

Además, si $u \in C_n(X, \mathcal{U})$, ya es conocido que $\varphi_n(u) \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$ y para todo $i \geq 0$, $\text{sd}_n^i(u) \in C_n(X, \mathcal{U})$, en consecuencia, $\psi_{q,n}(u) \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$.

Proposición 3.21. Para cada $q > 0$ y para cada n , se cumple

$$\text{sd}_n^q(u) - u = \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u) + \psi_{q,n-1} \circ \partial_n(u). \quad (3.5)$$

Demostración. La fórmula (3.5) se demuestra por inducción sobre q . Para $q = 1$, se tiene $\psi_{1,n} = \varphi_n$, por lo que es exactamente la propiedad 3. Supongamos que se cumple para $q - 1$, entonces

$$\text{sd}_n^{q-1}(u) = \partial_{n+1} \circ \psi_{q-1,n}(u) + \psi_{q-1,n-1} \circ \partial_n(u) + u.$$

Calculamos $\text{sd}_n^q(u)$:

$$\begin{aligned}
\text{sd}_n^q(u) &= \text{sd}_n^{q-1}(\text{sd}_n(u)) \\
&= \partial_{n+1} \circ \psi_{q-1,n}(\text{sd}_n(u)) + \psi_{q-1,n-1} \circ \partial_n(\text{sd}_n(u)) + \text{sd}_n(u) \\
&= \partial_{n+1} \left(\sum_{i=0}^{q-2} \varphi_n(\text{sd}_n^i(\text{sd}_n(u))) \right) + \sum_{i=0}^{q-2} \varphi_{n-1}(\text{sd}_{n-1}^i(\partial_n(\text{sd}_n(u)))) + \text{sd}_n(u) \\
&= \partial_{n+1} \left(\sum_{i=0}^{q-2} \varphi_n(\text{sd}_n^{i+1}(u)) \right) + \sum_{i=0}^{q-2} \varphi_{n-1}(\text{sd}_{n-1}^i(\text{sd}_{n-1}(\partial_n(u)))) + \text{sd}_n(u) \\
&= \partial_{n+1} \left(\sum_{i=1}^{q-1} \varphi_n(\text{sd}_n^i(u)) \right) + \sum_{i=1}^{q-1} \varphi_{n-1}(\text{sd}_{n-1}^i(\partial_n(u))) + \text{sd}_n(u) \\
&= \partial_{n+1} \left(\sum_{i=0}^{q-1} \varphi_n(\text{sd}_n^i(u)) - \varphi_n(u) \right) + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{q-1} \varphi_{n-1}(\text{sd}_{n-1}^i(\partial_n(u))) - \varphi_{n-1}(\partial_n(u)) + \text{sd}_n(u) \\
&= \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u) + \psi_{q,n-1} \circ \partial_n(u) + \text{sd}_n(u) - \partial_{n+1} \circ \varphi_n(u) - \varphi_{n-1} \circ \partial_n(u) \\
&= \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u) + \psi_{q,n-1} \circ \partial_n(u) + u,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\partial_n \circ \text{sd}_{n-1} = \text{sd}_n \circ \partial_n$.

■

Ya estamos en condiciones de probar que el homomorfismo inducido

$$\sigma_*: H_n(X, A, \mathcal{U}) \longrightarrow H_n(X, A)$$

es un isomorfismo.

Demostración del Teorema 3.16. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento generalizado. Veamos primero que $\sigma'_*: H_n(X, \mathcal{U}) \longrightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo. Recordemos que es el homomorfismo inducido por la inclusión $\sigma': Q_n(X, \mathcal{U}) \longrightarrow Q_n(X)$.

Veamos primero que es un epimorfismo. Sea $u + B_n(X) \in H_n(X)$, es decir, $u \in C_n(X)$ y $\partial_n(u) = 0$. Sabemos que existe un entero $q \geq 0$ tal que $\text{sd}_n^q(u) \in C_n(X, \mathcal{U})$. Por la fórmula (3.5), se tiene que

$$\text{sd}_n^q(u) - u = \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u) + \psi_{q,n-1} \circ \partial_n(u) = \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u) \in B_n(X),$$

y además

$$\partial_n(\text{sd}_n^q(u)) = \text{sd}_{n-1}^q(\partial_n(u)) = \text{sd}_{n-1}^q(0) = 0,$$

luego $\text{sd}_n^q(u) \in Z_n(X, \mathcal{U})$. Entonces,

$$\sigma'_*(\text{sd}_n^q(u) + B_n(X, \mathcal{U})) = \text{sd}_n^q(u) + B_n(X) = u + B_n(X).$$

Comprobamos la inyectividad. Sea $u + B_n(X, \mathcal{U}) \in H_n(X, \mathcal{U})$ tal que $\sigma'_*(u + B_n(X, \mathcal{U})) = u + B_n(X) = 0$, es decir, $u \in B_n(X)$. Sea $v \in C_{n+1}(X)$ tal que $u = \partial_{n+1}(v)$. Existe $q \geq 0$ tal que $\text{sd}_{n+1}^q(v) \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$. De nuevo, por la fórmula (3.5), se tiene

$$\begin{aligned} \text{sd}_{n+1}^q(v) - v &= \partial_{n+2} \circ \psi_{q,n+1}(v) + \psi_{q,n} \circ \partial_{n+1}(v) \\ &= \partial_{n+2} \circ \psi_{q,n+1}(v) + \psi_{q,n}(u), \\ \partial_{n+1}(\text{sd}_{n+1}^q(v) - v) &= \partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} \circ \psi_{q,n+1}(v) + \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u), \\ \partial_{n+1}(\text{sd}_{n+1}^q(v)) - u &= \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\partial_{n+1}(\text{sd}_{n+1}^q(v) - v) = \partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} \circ \psi_{q,n+1}(v) + \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u),$$

es decir,

$$\partial_{n+1}(\text{sd}_{n+1}^q(v)) - u = \partial_{n+1} \circ \psi_{q,n}(u).$$

Se tiene, entonces,

$$u = \partial_{n+1}(\text{sd}_{n+1}^q(v) - \psi_{q,n}(u)) \in B_n(X).$$

Además, $\text{sd}_{n+1}^q(v) - \psi_{q,n}(u) \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$, ya que $u \in C_n(X, \mathcal{U})$ implica $\psi_{q,n}(u) \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$. Por lo tanto, $u \in B_n(X, \mathcal{U})$, y en consecuencia, $u + B_n(X, \mathcal{U}) = 0$.

Queda probado que $\sigma'_*: H_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(X)$ y $\sigma''_*: H_n(A, \mathcal{U}) \rightarrow H_n(A)$ son isomorfismos para todo n .

Ya es sabido que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{i_\#} & C_n(X, \mathcal{U}) & \xrightarrow{j_\#} & C_n(X, A, \mathcal{U}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sigma'' & & \downarrow \sigma' & & \downarrow \sigma \\ 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_n(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_n(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde las dos filas son sucesiones exactas. A partir de este diagrama, obtenemos el siguiente

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_n(A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X, \mathcal{U}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A, \mathcal{U}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X, \mathcal{U}) \\
 \downarrow \sigma''_* & & \downarrow \sigma'_* & & \downarrow \sigma_* & & \downarrow \sigma''_* & & \downarrow \sigma'_* \\
 H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X)
 \end{array}$$

que cumple las hipótesis del [Lema de los cinco](#), por lo que podemos asegurar que σ_* es un isomorfismo. ■

3.5. Relación con otras homologías

Una vez construida la teoría de homología cúbica, vamos a ver que relación hay con otras teorías de homología, a partir de los axiomas de Eilenberg-Steenrod. Para ello vamos a introducir los *CW-complejos*. Para esta sección, vamos a basarnos en el texto [3] de Hatcher. Las demostraciones de los resultados se exceden del alcance del trabajo, pero es interesante mencionar esta relación.

Hemos estado trabajando con funtores H_n entre la categoría de los pares de espacios topológicos (X, A) y la categoría de los grupos abelianos $H_n(X, A)$. A cada par, se le asigna un grupo para cada n , obteniendo la cadena de grupos de homología cúbica cuando los consideramos todos. Se cumple la functorialidad de la asignación, pues la aplicación identidad induce el homomorfismo identidad y la composición de aplicaciones continuas se convierte en la composición de los homomorfismos inducidos.

Los *axiomas de Eilenberg-Steenrod* son los siguientes:

1. *Homotopía*: Aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo en los grupos de homología.
2. *Escisión*: Dado un par (X, A) y un conjunto U tal que $\overline{U} \subset \text{Int } A$, entonces la inclusión $(X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo.
3. *Dimensión*: Si X es un espacio unipuntual, $H_n(P) = 0$, para $n \neq 0$.
4. *Aditividad*: Si $X = \cup X_\alpha$ es una unión disjunta de espacios topológicos, entonces $H_n(X) \cong \oplus H_n(X_\alpha)$.

5. *Exactitud*: Cada par (X, A) induce una sucesión exacta larga en los grupos de homología

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

En la siguiente definición, el conjunto E^n denota al disco unidad, el conjunto $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

Definición 3.22. Una estructura de *CW-complejo* es un espacio topológico X construido a partir de una sucesión ascendente de subespacios cerrados

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que cumplen las siguientes condiciones:

1. X^0 es un espacio discreto constituido por un conjunto de puntos aislados, los *vértices* o *0-células*.
2. Para cada $n > 0$, llamamos *n-esqueleto* a X^n , y este se obtiene a partir de X^{n-1} adjuntando una colección de *n-células* e_α^n mediante aplicaciones características (o de adjunción) $\Phi_\alpha: E^n \longrightarrow X^n$ tales que:
 - a) Para cada α , la restricción $\Phi_\alpha|_{\text{Int}(E^n)}$ es un homeomorfismo sobre su imagen $\Phi_\alpha(\text{Int}(E^n)) = e_\alpha^n$.
 - b) Para cada α , la restricción $\Phi_\alpha|_{\partial E^n}$ tiene como imagen un subconjunto de X^{n-1} , donde $\partial E^n \cong S^{n-1}$ es la frontera de E^n .
 - c) $X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha e_\alpha^n$.
3. $X = \bigcup_{i \geq 0} X^i$.
4. X tiene topología débil respecto a la familia $\{X^n \mid n \geq 0\}$. Es decir, un subconjunto $U \subset X$ es abierto en X si y solo si $U \cap X^n$ es abierto en X^n para todo $n \geq 0$.

Un *CW-complejo* es finito o infinito dependiendo de si el número total de células es finito o infinito. Si $X = X^n$ para algún entero n , el *CW-complejo* tiene dimensión finita, y la dimensión es el menor n que cumple $X = X^n$.

Un *subcomplejo* de un *CW-complejo* X es un subespacio cerrado $A \subset X$ formado por la unión de células de X , por lo que es también un *CW-complejo*.

Ejemplo 3.23.

1. Un grafo es un CW -complejo de dimensión 1, formado por las 0-células que son los vértices del grafo, y las 1-células que son las aristas.
2. Un toro es un CW -complejo de dimensión 2. Podemos ver el toro como un cociente del cuadrado en el que identificamos los cuatro vértices como el mismo punto, que será la única 0-célula, también identificamos cada par de lados paralelos como el mismo lado, que dará lugar a una circunferencia, por lo que tendremos dos 1-células, y por último el 2-esqueleto, que es el propio toro. Esta construcción puede generalizarse a las superficies orientables, pues se pueden entender como el cociente de un polígono de $4g$ lados, donde se identifican los lados dos a dos, en la forma $a_1b_1a_1b_1a_2b_2a_2b_2\dots$.

Vamos a enunciar a continuación una versión más débil del teorema 4.59 que encontramos en el texto [3].

Teorema 3.24. *Dada una teoría de homología h en los CW -complejos que cumpla el axioma de dimensión, es decir, $h_n(x) = 0$ si $n \neq 0$, entonces se tiene que $h_n(X, A) = H_n(X, A)$ todo n y para todo par (X, A) formado por un CW -complejo y un subcomplejo.*

Corolario 3.25. *En los CW -complejos, los grupos de homología cúbica, homología simplicial y homología singular coinciden.*

A lo largo de este trabajo, hemos comprobado que la teoría de homología cúbica que hemos construido cumple los axiomas de Eilenberg-Steenrod: en el teorema 3.10 probamos el axioma de homotopía, con el Teorema de escisión comprobamos el segundo axioma, en las propiedades 2.11 vemos los axiomas de dimensión y aditividad y, finalmente, en la proposición 3.4 se tiene el axioma de exactitud.

Capítulo 4

Cálculos en la esfera y consecuencias

En este capítulo vamos a calcular los grupos de homología de unos espacios conocidos como son las esferas y vamos a utilizar estos grupos para demostrar algunos resultados topológicos. Para ello vamos a introducir los siguientes espacios.

Dado $n \geq 0$, sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ la n -esfera unidad. Llamamos *hemisferio superior* de S^n al conjunto

$$E_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\},$$

y *hemisferio inferior* de S^n al conjunto

$$E_-^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}.$$

Si $n > 0$, a la intersección de los dos hemisferios la llamamos *ecuador*, y se puede identificar con la esfera de una dimensión inferior,

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}.$$

Al conjunto $E^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ le llamamos n -disco unidad, que podemos identificar con

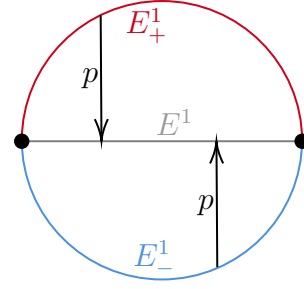
$$E^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1 \text{ y } x_{n+1} = 0\}$$

A través de las proyecciones sobre las primeras n coordenadas, se observa que los espacios E_+^n , E_-^n y E^n son homeomorfos, y como éste último es convexo, son contráctiles.

Ejemplo 4.1.

1. Para $n = 0$, se tiene que $S^0 = \{-1, 1\}$, luego $E_+^0 = \{1\}$, $E_-^0 = \{-1\}$ y no tiene ecuador.
2. Para $n = 1$, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,

la circunferencia usual. Los dos hemisferios son el arco superior e inferior, respectivamente. El ecuador es el conjunto $\{(-1, 0), (1, 0)\}$, que es inmediato identificarlo con S^0 . En este caso, $E^1 = [-1, 1] \times \{0\}$. Con la proyección $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p(x, y) = (x, 0)$, y la aplicación inversa $p^{-1}: E^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p^{-1}(x, 0) = (x, \sqrt{1-x^2})$, es fácil ver que los hemisferios son homeomorfos al disco.



Teorema 4.2. Para todo entero $n \geq 0$, se tiene

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \neq n \end{cases}$$

y, en consecuencia,

$$H_0(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Demostración. La segunda parte es consecuencia, habiendo probado la primera parte, de que $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ como veíamos en la proposición 2.10. Además, recordamos que si $i \neq 0$, $H_i(X) = \tilde{H}_i(X)$. Para los grupos de homología reducida de la esfera, vamos a comprobarlo por inducción sobre n .

Para $n = 0$, S^0 es un espacio con dos componentes conexas, cada una de ellas unipuntuales, por lo que los grupos de homología reducida serán el grupo trivial para cada $i \neq 0$. Recordamos que $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ es el homomorfismo de aumento, luego para $i = 0$, $\tilde{H}_0(S^0) = \ker \varepsilon$, que al tener S^0 dos componentes conexas, será no nulo. De hecho, si identificamos cada 0-cubo con su punto imagen, se tienen $T = 1$ y $T' = -1$ como generadores de $Q_0(X) = C_0(X)$, y por lo tanto

$$\ker \varepsilon = \{kT - kT' \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Además, como S^0 tiene dos componentes conexas, se confirma el hecho de que $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Supongamos ahora que se cumple $\tilde{H}_i(S^n) = \mathbb{Z}$ si $i = n$ y $\tilde{H}_i(S^n) = 0$ si no. Veamos que ocurre con $\tilde{H}_i(S^{n+1})$. Vamos a considerar S^n como subespacio de E_-^{n+1} , y por lo tanto, tenemos los pares (E_-^{n+1}, S^n) y (S^{n+1}, E_+^{n+1}) . Consideramos la aplicación de inclusión $k: (E_-^{n+1}, S^n) \rightarrow (S^{n+1}, E_+^{n+1})$, que induce el siguiente diagrama entre las dos sucesiones largas de homología de cada uno de los pares

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{H}_{i+1}(E_-^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{i+1}(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_i(S^n) \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow k_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{i+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_i(E_+^{n+1}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Ya sabemos que los hemisferios son contráctiles, luego sus grupos de homología reducida son todos nulos, por lo que tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_{i+1}(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_i(S^n) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{j_*} H_{i+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que tanto ∂_* como j_* son isomorfismos. Si conseguimos ver que k_* también es isomorfismo, tendríamos la prueba completada, pues entonces $\tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) = \tilde{H}_i(S^n)$, que, por hipótesis de inducción, es $\mathbb{Z}$ si $i + 1 = n + 1$, o lo que es lo mismo, si $i = n$, y el grupo nulo en otro caso.

Para ver que k_* es un isomorfismo vamos a hacer uso del [Teorema de escisión](#). Del par (S^{n+1}, E_+^{n+1}) , parece intuitivo escindir el conjunto $W = E_+^{n+1} - S^n$, obteniendo así el par (E_-^{n+1}, S^n) , pero W no cumple las condiciones del teorema de escisión, pues

$$\overline{W} = E_+^{n+1} \not\subseteq \text{Int } E_+^{n+1} = W$$

Por lo que vamos a considerar el conjunto $W = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \geq \frac{1}{2}\}$, de esta forma, sí se cumplen las hipótesis del teorema de escisión, pues $\overline{W} = W$, y se tiene que

$$H_{i+1}(S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W) = H_{i+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1})$$

Además, como veremos en la observación siguiente, el par (E_-^{n+1}, S^n) es un retractor por deformación del par $(S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W)$, por lo que comparten grupos de homología. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{k} & (S^{n+1}, E_+^{n+1}) \\ & \searrow h & \uparrow i \\ & & (S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W) \end{array}$$

donde h e i son inclusiones y ambos inducen isomorfismos en los grupos de homología. En consecuencia, k_* es isomorfismo, como queríamos comprobar. ■

Observación 4.3. Para ver que el par (E_-^{n+1}, S^n) es un retracto por deformación del par $(S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W)$, vamos a considerar la aplicación $r: (S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W) \longrightarrow (E_-^{n+1}, S^n)$ dada por

$$r(x_1, \dots, x_{n+2}) = \begin{cases} (\frac{x_1}{k}, \dots, \frac{x_{n+1}}{k}, 0) & \text{si } 0 \leq x_{n+2} \leq \frac{1}{2} \\ (x_1, \dots, x_{n+2}) & \text{si } x_{n+2} \leq 0 \end{cases}$$

donde $k = \sqrt{1 - x_{n+2}^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$. Es evidente que es una retracción, pues es continua, $r|_{E_-^{n+1}} = Id$ y $r(E_+^{n+1} - W) \subset S^n$. Solo queda ver que $i \circ r \simeq Id$. Vamos a construir una homotopía $F: (I \times (S^{n+1} - W), I \times (E_+^{n+1} - W)) \longrightarrow (S^{n+1} - W, E_+^{n+1} - W)$,

$$F(t, (x_1, \dots, x_{n+2})) = \begin{cases} (\tilde{k}x_1, \dots, \tilde{k}x_{n+1}, tx_{n+2}) & \text{si } x_{n+2} \geq 0 \\ (x_1, \dots, x_{n+2}) & \text{si } x_{n+2} \leq 0 \end{cases}$$

donde $\tilde{k} = \sqrt{\frac{1-t^2x_{n+2}^2}{1-x_{n+2}^2}}$.

En la demostración del teorema anterior, hemos utilizado un procedimiento similar al que se usa en el teorema de Seifert-Van Kampen para calcular el grupo fundamental de un espacio topológico.

Una vez conocidos los grupos de homología de la esfera, vamos a ver algunas consecuencias.

Proposición 4.4. *La esfera no es contráctil.*

Demostración. Sabemos que si dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía, sus grupos de homología coinciden, por lo que si vemos que los grupos de homología no son iguales, podemos concluir que los espacios no son homotópicamente equivalentes. Un espacio contráctil cumple que todos sus grupos de homología son nulos excepto el 0-ésimo, que es $\mathbb{Z}$. Pero ya hemos visto que si $n > 0$, $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Para $n = 0$, la esfera tiene dos componentes conexas, por lo que tampoco es contráctil (además, $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). ■

Proposición 4.5. S^n no es un retracto de E^{n+1}

Demostración. Un retracto tiene el mismo tipo de homotopía que el espacio del que retracts. Acabamos de ver que S^n no es contráctil, sin embargo, como E^{n+1} es convexo, sí que lo es. ■

Proposición 4.6. Los grupos de homología del par (E^n, S^{n-1}) son

$$H_i(E^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = n \end{cases}$$

Demostración. Consideramos la sucesión exacta larga de homología reducida del par

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{i+1}(E^n) \xrightarrow{j_*} H_{i+1}(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_i(S^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

donde conocemos los grupos de homología reducida del disco, pues son todos nulos, y los grupos de homología reducida de la esfera que son todos nulos excepto si $i = n - 1$. Por lo que en ese caso, tenemos

$$0 \longrightarrow H_n(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

luego ∂_* es isomorfismo y se tiene $H_n(E^n, S^{n-1}) = \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$. Para cualquier otro $i \neq n - 1$, se tiene

$$0 \longrightarrow H_i(E^n, S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

por lo tanto, $H_i(E^n, S^{n-1}) = 0$. ■

Proposición 4.7 (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Toda aplicación continua del disco en si mismo tiene, al menos, un punto fijo.*

Demostración. Dada una aplicación $f: E^n \longrightarrow E^n$, supongamos que no tiene ningún punto fijo, es decir, para cada $x \in E^n$, se tiene $f(x) \neq x$. Por tanto, podemos construir la única semirrecta que nace en $f(x)$ y pasa por x . Sea $v(x)$ el punto de intersección de la semirrecta con la esfera S^{n-1} . Por lo tanto, tenemos la aplicación $v: E^n \longrightarrow S^{n-1}$, que es claro que deja fija la esfera. Se puede comprobar que v es una aplicación continua al construir su expresión explícita, partiendo de

que $v(x) = f(x) + k(x - f(x))$, donde $k \geq 0$ es único de forma que $\|v(x)\|^2 = 1$. Por lo tanto tenemos una retracción del disco en la esfera, pero esto va en contra de la proposición 4.5. Se tiene entonces que f deja algún punto fijo. ■

Ejemplo 4.8.

1. S^n es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Tenemos la retracción $r: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ y la inclusión $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. La homotopía entre la identidad $i \circ r$ viene dada por

$$F(t, x) = (1 - t)x + tr(x).$$

Por lo tanto comparten grupos de homología.

2. El complemento del un punto en la circunferencia S^1 es homeomorfo a $\mathbb{R}$. A través de un homeomorfismo, podemos considerar el complemento del polo norte, $N = (0, \dots, 0, 1)$. Entonces, construimos la proyección estereográfica $p: S^1 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $p(x)$ es la intersección de la recta que une x y N con el hiperplano $x_{n+1} = 0$. Es fácil de ver que es continua al construir su expresión explícita. De la misma manera, podemos construir la aplicación inversa, que lleva a cada punto x de $\mathbb{R}$ a la intersección de la esfera S^1 con la recta que une $(x, 0)$ y N . Entonces, $S^1 - \{N\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, condición más fuerte que la de equivalencia homotópica, por lo que comparten grupos de homología.
3. $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos, si $n \neq m$. Lo vamos a ver de dos maneras, gracias a los dos ejemplos anteriores.

Si $\mathbb{R}^m - \{0\}$ y $\mathbb{R}^n - \{0\}$ no son homeomorfos, tampoco lo serán $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$. Ya hemos visto que $\mathbb{R}^m - \{0\} \simeq S^{m-1}$ y $\mathbb{R}^n - \{0\} \simeq S^{n-1}$, pero S^{m-1} y S^{n-1} no tienen los mismos grupos de homología por lo que no pueden ser homotópicamente equivalentes, y por lo tanto, tampoco homeomorfos.

Por otro lado, podemos considerar la compactificación de Alexandroff por 1 punto, que denotaremos por $\overline{\mathbb{R}^m}$. Se tiene que $\mathbb{R}^m \cong S^m - \{N\}$ y entonces $\overline{\mathbb{R}^m} \cong S^m$, y de la misma forma, $\overline{\mathbb{R}^n} \cong S^n$. Pero por el mismo argumento que en el caso anterior, S^m y S^n no tienen los mismos grupos de homología, y por lo tanto, no pueden ser homeomorfos.

4.1. Grado de una aplicación

Para terminar, vamos a analizar qué ocurre con las aplicaciones de la esfera en sí misma y el homomorfismo que induce en la cadena de sus grupos de homología. Este estudio nos lleva a definir el concepto de grado de una aplicación, un invariante topológico fundamental. El grado resulta particularmente interesante, ya que establece conexiones directas con resultados de análisis que ya hemos explorado, como el teorema del punto fijo de Brouwer, y proporciona herramientas para otras ramas como la geometría diferencial, pues permite estudiar la existencia de campos vectoriales en variedades entre otras aplicaciones. A través de este concepto, veremos cómo los grupos de homología no solo clasifican espacios topológicos, sino que también nos permiten analizar aplicaciones entre ellos.

Sea $f: S^n \rightarrow S^n$ una aplicación continua, tenemos el homomorfismo

$$f_*: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$$

sólo tiene interés este homomorfismo, pues para el i -ésimo grupo de homología reducida será el homomorfismo nulo $i \neq n$.

Como $\tilde{H}_n(S^n)$ es un grupo cíclico infinito, existe un único entero d tal que $f_*(u) = du$ para cada $u \in \tilde{H}_n(S^n)$.

Definición 4.9. Llamamos *grado* de f al entero d tal que $f_*(u) = du$, para todo $u \in \tilde{H}_n(S^n)$.

Dada una aplicación continua $f: S^n \rightarrow S^n$, vamos a definir una aplicación continua $\Sigma f: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ por

$$\Sigma f(x_1, \dots, x_{n+2}) = \begin{cases} (0, \dots, 0, x_{n+2}) & \text{si } \|x_{n+2}\| = 1 \\ (kf(\frac{x_1}{k}, \dots, \frac{x_{n+1}}{k}), x_{n+2}) & \text{si } \|x_{n+2}\| < 1 \end{cases}$$

donde $k = \sqrt{1 - x_{n+2}^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$. Esta aplicación lleva el polo norte al polo norte, el polo sur al polo sur y restringida al ecuador es justamente f . También lleva el hemisferio superior en el hemisferio superior, y lo mismo con el hemisferio inferior. A esta aplicación la llamamos *suspensión* de f .

Propiedades 4.10.

1. El grado es un invariante homotópico, es decir, si dos aplicaciones son homótopas, tienen el mismo grado.

Demostración. Si $f, g: S^n \rightarrow S^n$ son aplicaciones homótopas, como vimos en el teorema 3.10, los homomorfismos inducidos coinciden en los grupos de homología, $f_* = g_*$, por lo que es evidente que tendrán el mismo grado. ■

2. *El grado de la composición es el producto de los grados.*

Demostración. Sean $f, g: S^n \rightarrow S^n$ aplicaciones, con d el grado de f y d' el grado de g . Entonces,

$$(f \circ g)_*(u) = f_*(g_*(u)) = f_*(d'u) = dd'u,$$

para cada $u \in \tilde{H}_n(S^n)$. Luego, dd' es el grado de $f \circ g$. ■

3. *El grado de la suspensión es el grado de f .*

Demostración. En la demostración de la proposición 4.2, veíamos la cadena de isomorfismos

$$\tilde{H}_n(S^n) \xleftarrow{\partial_*} H_{n+1}(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{k_*} H_{n+1}(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \xleftarrow{j_*} \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$$

y por lo tanto, existe un isomorfismo $\phi: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$. Este isomorfismo llevará un generador en un generador, luego $\phi(1) \in \{-1, 1\}$ y el grado será 1 o -1 . Se puede comprobar a partir de las definiciones y de la construcción de ϕ que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(S^n) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{\Sigma f_*} & \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) \end{array}$$

es conmutativo, por lo que el grado de f coincide con el de su suspensión. ■

4. *El grado de la identidad es 1.*

Demostración. El homomorfismo inducido por la identidad también la identidad, por lo que es inmediato. ■

5. *El grado de una aplicación constante es 0.*

Demostración. El homomorfismo f_* , inducido por una aplicación constante, es el homomorfismo nulo. ■

6. *Cualquier aplicación $f: S^0 \rightarrow S^0$ tiene grado 1, -1 o 0.*

Demostración. Se tiene $S^0 = \{-1, 1\}$. Identificamos los 0-cubos con el punto de llegada, por lo que tenemos $T = 1$, $T' = -1$. Entonces se tiene $\tilde{H}_0(S^0) = \ker \varepsilon = \{kT - kT' \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Para una aplicación $f: S^0 \rightarrow S^0$, hay tres posibilidades:

- $f(1) = f(-1)$, es constante, entonces el grado de f es 0.
- f es la identidad, por lo tanto, el grado de f es 1.
- $f(1) = -1$ y $f(-1) = 1$, entonces $f = -Id$ y el homomorfismo inducido $f_*: \tilde{H}_0(S^0) \rightarrow \tilde{H}_0(S^0)$ cumple también $f_* = -Id$, por lo que el grado de f es -1.

7. *La aplicación simetría ortogonal respecto de un hiperplano que pasa por el origen tiene grado -1.*

Demostración. Vamos a comprobarlo por inducción sobre n . Para $n = 0$, solo hay una posible simetría ortogonal respecto de un hiperplano que pasa por el origen en $\mathbb{R}$, $f(x) = -x$, y estamos en el tercer caso de la propiedad anterior, por lo que el grado es -1.

Supongamos que si $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es una simetría ortogonal respecto de un hiperplano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^n$, entonces f tiene grado -1. Sea $f: S^n \rightarrow S^n$ una simetría ortogonal respecto de un hiperplano que pasa por el origen. Mediante un homeomorfismo podemos suponer que dicho hiperplano es $x_1 = 0$, es decir, $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Entonces f es la suspensión de la aplicación g dada por $g: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $g(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Luego el grado de $f = \sigma g$ es igual al grado de g , que por hipótesis de inducción es -1. ■

8. *La aplicación antipodal, $f: S^n \rightarrow S^n$, $f(x) = -x$, tiene grado $(-1)^{n+1}$.*

Demostración. Podemos ver la aplicación antipodal como una composición de simetrías $r_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$. Es decir, $f = r_{n+1} \circ \dots \circ$

r_1 , por lo que el grado de f es el producto $(-1)^{n+1}$, como consecuencia de las propiedades 2 y 7. ■

9. *Cualquier aplicación sin puntos fijos es homótopa a la aplicación antipodal, luego tendrá el mismo grado.*

Demostración. Sea $f: S^n \rightarrow S^n$ es una aplicación sin puntos fijos, es decir, $f(x) \neq x$ para cada $x \in S^n$, y por lo tanto, el segmento que une $f(x)$ con $-x$ no pasa por el origen. Tenemos entonces la homotopía entre f y la aplicación antipodal dada por

$$F(t, x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}.$$

■

Observación 4.11. Es interesante mencionar que el grado de una aplicación de la esfera en si misma es un invariante homotópico completo, es decir, dos aplicaciones son homótopas si, y solo si, tienen el mismo grado.

Definición 4.12. Un *campo de vectores tangentes* en S^n es una aplicación que asigna a cada $x \in S^n$ un vector $v(x)$ tangente a S^n en el punto x , es decir, $v(x)$ es un vector ortogonal a x en $\mathbb{R}^{n+1}$. Es un campo continuo si la aplicación es continua y es de vectores no nulos si $v(x) \neq 0$, para cada x .

Teorema 4.13. *Existe un campo continuo de vectores tangentes no nulos en S^n si, y solo si, n es impar.*

Demostración. Si n es impar, tenemos el campo dado por

$$v(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{n+1}, x_n),$$

luego, si n es impar, la existencia está garantizada.

Para ver el recíproco, sea v un campo continuo de vectores tangentes no nulos, entonces la identidad en S^n es homótopa a la aplicación

$$f(x) = \frac{x + v(x)}{\|x + v(x)\|}$$

a través de la homotopía

$$F(t, x) = \frac{x + tv(x)}{\|x + tv(x)\|}.$$

La aplicación f no deja puntos fijos, pues en ese caso

$$v(x) = (\|x + tv(x)\| - 1)x,$$

en contra de que $v(x)$ es tangente a S^n . Por lo tanto, el grado de f es $(-1)^{n+1}$ y, por ser homótopa a la identidad, esto tiene que ser 1, luego n tiene que ser impar. ■

Observación 4.14. En consecuencia, si n es par, un campo continuo de vectores tangentes tendrá algún vector nulo. Esto es conocido como el teorema de la bola peluda.

Se puede generalizar el concepto del grado a otros espacios topológicos homeomorfos a la esfera, o simplemente con el mismo tipo de homotopía. Dados X, Y homotópicamente equivalentes a S^n , entonces $H_n(X)$ y $H_n(Y)$ son grupos cíclicos infinitos. Hay dos maneras de elegir a los generadores, diremos que los espacios X e Y están *orientados* cuando hemos elegido unos generadores $x \in H_n(X)$, $y \in H_n(Y)$. Dada una aplicación $f: X \rightarrow Y$, el *grado* de f es el único entero d tal que $f_*(x) = dy$. Cambiar la orientación de los espacios cambiará el signo del grado. Este también es un invariante homotópico y cumple propiedades similares a las anteriores.

Ejemplo 4.15. Se tiene que S^1 es un retracto por deformación de $R^2 - \{0\}$. Una aplicación continua $f: S^1 \rightarrow R^2 - \{0\}$ será una curva cerrada que no pasa por el origen. El grado de f se puede entender como el número de vueltas que da la curva alrededor del origen, y el sentido de las mismas en el momento que dotamos de orientación a los espacios. Similar al concepto de índice de una curva cerrada.

Bibliografía

- [1] Sergei I. Gelfand y Yuri I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. eng. 2nd ed. 2003. Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. ISBN: 3-662-12492-0.
- [2] Marvin Jay Greenberg y John R. Harper. *Algebraic topology : a first course*. eng. [Ed.] revised. Mathematics lecture note in series ; 58. Redwood City, California: Addison-Wesley, 1981. ISBN: 0805335579.
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. eng. 1st ed., 21 imp. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. ISBN: 978-0-521-79540-1.
- [4] Tomasz. Kaczynski, Konstantin. Mischaikow y Marian. Mrozek. *Computational Homology*. eng. 1st ed. 2004. Applied Mathematical Sciences, 157. New York, NY: Springer New York, 2004.
- [5] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York, 1991.
- [6] William S. Massey. *Singular Homology Theory*. eng. 1st ed. 1980. Graduate Texts in Mathematics, 70. New York, NY: Springer New York, 1980. ISBN: 1-4684-9231-4.
- [7] James R. Munkres. *Topología*. spa. 2^a ed. Madrid [etc: Prentice-Hall, 2002. ISBN: 8420531804.
- [8] William Raymond Scott. *Group theory*. eng. Dover Books on Mathematics. New York: Dover, 1987. ISBN: 0-486-65377-3.