



---

**Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

# El Teorema de Pick

Autora: Henar María Gallego Hernández

Tutor: José Ignacio Farrán Matín

2024/25



# Resumen

En este trabajo se estudia el Teorema de Pick, un resultado fundamental de la geometría discreta que permite calcular el área de un polígono reticulado a partir del número de puntos interiores y de frontera que contiene. El objetivo principal es presentar el teorema de manera rigurosa, explorar algunas de sus demostraciones y analizar distintas aplicaciones y generalizaciones.

**Palabras clave:** retículos, teorema de Pick, grafos, teorema de Euler.

## Abstract

This work studies Pick's Theorem, a fundamental result in discrete geometry that allows one to compute the area of a lattice polygon from the number of interior and boundary points it contains. The main goal is to present the theorem in a rigorous way, explore some of its proofs, and analyze different applications and generalizations.

**Keywords:** lattices, Pick's theorem, graphs, Euler's theorem.

# Índice general

Resumen

Abstract

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                            | <b>1</b>  |
| 1.1. Historia del teorema de Pick . . . . .                       | 2         |
| 1.2. El Teorema de Pick . . . . .                                 | 3         |
| <b>2. Preliminares matemáticos</b>                                | <b>4</b>  |
| 2.1. El retículo $\mathbb{Z}^2$ . . . . .                         | 4         |
| 2.2. Polígonos simples sobre el retículo . . . . .                | 5         |
| 2.3. Puntos interiores y de frontera . . . . .                    | 6         |
| 2.4. Área de polígonos y motivación del problema . . . . .        | 7         |
| 2.5. Conteo discreto y geometría combinatoria . . . . .           | 8         |
| <b>3. Grafos planos y el teorema de Euler</b>                     | <b>11</b> |
| 3.1. Definiciones básicas de grafos . . . . .                     | 11        |
| 3.2. Resultados topológicos previos . . . . .                     | 16        |
| 3.3. Grafos planos y duales . . . . .                             | 18        |
| 3.4. Regiones, vértices y aristas en dibujos planos . . . . .     | 20        |
| 3.5. Enunciado y demostración del teorema de Euler . . . . .      | 25        |
| 3.6. Aplicación a subdivisiones poligonales . . . . .             | 31        |
| 3.7. La fórmula poliédrica de Euler . . . . .                     | 31        |
| 3.7.1. Ejemplos clásicos . . . . .                                | 32        |
| 3.7.2. Generalización topológica . . . . .                        | 32        |
| 3.7.3. Conexión con las triangulaciones . . . . .                 | 32        |
| <b>4. Triangulaciones de polígonos</b>                            | <b>33</b> |
| 4.1. Polígonos y la curva de Jordan poligonal . . . . .           | 33        |
| 4.2. Qué es una triangulación . . . . .                           | 34        |
| 4.3. Diagonales y triangulaciones . . . . .                       | 35        |
| 4.4. Triangulaciones de conjuntos de puntos . . . . .             | 36        |
| 4.5. La triangulación de Delaunay . . . . .                       | 37        |
| 4.6. Existencia de triangulaciones en polígonos simples . . . . . | 38        |
| 4.7. El teorema de la galería de arte . . . . .                   | 39        |
| 4.8. Propiedades combinatorias de las triangulaciones . . . . .   | 42        |
| 4.8.1. Número de triangulaciones y números de Catalan . . . . .   | 43        |
| 4.9. Relación con grafos y con Euler . . . . .                    | 43        |

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5. El teorema de Pick</b>                                              | <b>45</b> |
| 5.1. Enunciado formal del teorema . . . . .                               | 45        |
| 5.2. Ejemplos ilustrativos . . . . .                                      | 46        |
| 5.3. Demostración del teorema usando Euler . . . . .                      | 47        |
| 5.4. Comentarios sobre otras posibles demostraciones . . . . .            | 49        |
| <b>6. Aplicaciones del teorema de Pick</b>                                | <b>56</b> |
| 6.1. Resolución de problemas clásicos . . . . .                           | 56        |
| 6.1.1. Sucesiones de Farey . . . . .                                      | 56        |
| 6.1.2. Interpretación geométrica de Farey . . . . .                       | 57        |
| 6.1.3. Ejemplos avanzados: sucesiones de Farey y el árbol de Stern–Brocot | 58        |
| 6.1.4. Problemas geométricos: el cuadrado $n \times n$ . . . . .          | 59        |
| 6.2. Uso en educación y divulgación . . . . .                             | 62        |
| 6.3. Interpretación en álgebra y geometría discreta . . . . .             | 63        |
| 6.3.1. Dilataciones y conexión con los polinomios de Ehrhart . . . . .    | 68        |
| 6.4. Limitaciones en dimensión superior . . . . .                         | 69        |
| <b>7. Generalizaciones</b>                                                | <b>70</b> |
| 7.1. Polígonos con agujeros . . . . .                                     | 70        |
| 7.2. Casos no simples o degenerados . . . . .                             | 72        |
| 7.3. El caso tridimensional: limitaciones . . . . .                       | 73        |
| 7.4. Conexiones con el teorema de Minkowski . . . . .                     | 74        |
| 7.5. Polinomios de Ehrhart . . . . .                                      | 75        |
| 7.6. Conclusiones . . . . .                                               | 76        |
| <b>Referencias</b>                                                        | <b>77</b> |

# Capítulo 1

## Introducción

El desarrollo del trabajo se basa de manera especial en la demostración que emplea la fórmula de Euler para grafos planos, ya que ofrece un marco combinatorio claro y conecta la geometría de los polígonos con resultados más generales de la teoría de grafos.

El trabajo comienza con una introducción histórica que sitúa el teorema en su contexto y presenta las motivaciones que llevaron a su formulación. A continuación, se incluyen los conceptos matemáticos preliminares necesarios, como la definición de retículo, polígonos simples, puntos interiores y de frontera, así como las ideas básicas de geometría discreta.

Seguidamente se dedica un capítulo a los grafos planos y al Teorema de Euler, presentando sus fundamentos y mostrando cómo puede aplicarse a subdivisiones poligonales. Esta parte constituye la base sobre la que se construye la demostración principal del Teorema de Pick en el capítulo central, donde se expone su enunciado formal y se desarrolla la prueba utilizando la relación de Euler.

A continuación, se introduce el estudio de las triangulaciones de polígonos, tanto desde un punto de vista geométrico como combinatorio, destacando su papel esencial en la argumentación de la demostración.

El trabajo prosigue con un capítulo dedicado específicamente al Teorema de Pick, donde se presentan ejemplos ilustrativos y se discuten otras posibles vías de prueba, aunque sin desarrollarlas en detalle.

En la parte aplicada se analizan conexiones con la teoría de números y la combinatoria, incluyendo problemas clásicos como las sucesiones de Farey, el árbol de Stern–Brocot y cuestiones geométricas sobre recubrimientos en retículos. También se comenta el uso del teorema en la enseñanza y la divulgación, y su relación con la geometría de números a través de los polinomios de Ehrhart.

Finalmente, se abordan generalizaciones y limitaciones: se estudia el caso de polígonos con agujeros, situaciones no simples o degeneradas, la imposibilidad de extender la fórmula a dimensión tres y las conexiones con el Teorema de Minkowski.

## 1.1. Historia del teorema de Pick

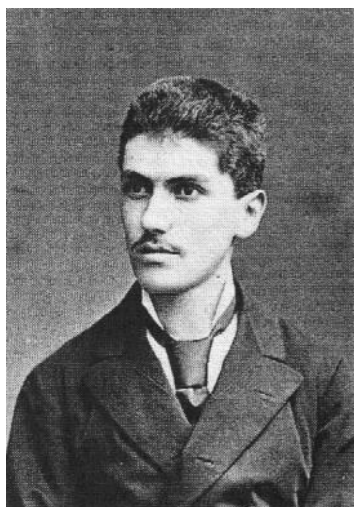


Figura 1.1.1: Georg Alexander Pick

El Teorema de Pick fue demostrado por Georg Alexander Pick (1859–1942). Pick nació en Viena, Austria, en el seno de una familia judía. Estudió Matemáticas y Física en la Universidad de Viena y, tras doctorarse en 1880 bajo la dirección de Ernst Mach, desarrolló gran parte de su carrera académica en la Universidad Alemana de Praga, donde en 1892 alcanzó la cátedra de Matemáticas.

Su producción matemática fue extremadamente amplia: publicó alrededor de 67 artículos sobre temas como álgebra lineal, cálculo integral, teoría de invariantes, teoría del potencial, análisis funcional, funciones de variable compleja, ecuaciones diferenciales y geometría. Entre sus aportaciones más destacadas se encuentran la *matriz de Pick*, la *interpolación de Pick–Nevanlinna* y el *lema de Schwarz–Pick*, resultados que todavía hoy ocupan un lugar importante en la teoría de funciones holomorfas.

Sin embargo, la popularidad de su nombre se debe principalmente al teorema que lleva su apellido, presentado en 1899 en su artículo *Geometrisches zur Zahlenlehre*, publicado en Praga. Curiosamente, este resultado pasó bastante desapercibido durante décadas. No fue hasta 1969, cuando Hugo Steinhaus lo incluyó en su conocido libro *Mathematical Snapshots*, que comenzó a recibir atención y admiración por su simplicidad y elegancia.

Además de su faceta investigadora, Pick también se interesó por la dimensión didáctica de la matemática. Se ha sugerido que la motivación detrás de su teorema fue mostrar la riqueza que puede obtenerse al relacionar distintos campos matemáticos (en este caso, geometría, aritmética y combinatoria) en un enfoque interdisciplinario, con un alto valor pedagógico.

En la vida académica de su tiempo, Pick también tuvo un papel relevante: en 1911 participó en el comité que recomendó a Albert Einstein para una cátedra de Física en Praga, lo que refleja su influencia en el ambiente científico de la época.

Lamentablemente, su vida estuvo marcada por el contexto histórico del siglo XX.

Tras la anexión nazi, Pick fue expulsado de la Academia de Ciencias y Artes de Checoslovaquia debido a su origen judío. En 1942, a los 82 años, fue deportado al campo de concentración de *Theresienstadt*, donde murió el 26 de julio de ese mismo año, apenas dos semanas después de su llegada.

El Teorema de Pick, concebido a finales del siglo XIX, no solo constituye un resultado elegante dentro de la geometría discreta, sino que también representa un ejemplo del legado matemático duradero que trasciende incluso las tragedias personales de su autor.

## 1.2. El Teorema de Pick

A lo largo de este trabajo nos centraremos en el *Teorema de Pick*, un resultado sorprendentemente sencillo y elegante que conecta el área de un polígono con los puntos del retículo que contiene.

**Teorema (Pick, 1899)** *Sea  $P$  un polígono cuyos vértices pertenecen al retículo  $\mathbb{Z}^2$ . Entonces el área de  $P$  viene dada por la fórmula*

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

*donde  $I$  es el número de puntos del retículo en el interior de  $P$  y  $B$  el número de puntos del retículo en la frontera de  $P$ .*

De manera intuitiva, el Teorema de Pick afirma que el área de un polígono reticular se puede calcular únicamente contando puntos enteros en su interior y en sus bordes. Esta simplicidad convierte al resultado en una herramienta central en la geometría discreta y en la motivación principal de este trabajo.

# Capítulo 2

## Preliminares matemáticos

### 2.1. El retículo $\mathbb{Z}^2$

**Definición 2.1.1.** Un *retículo*  $\Lambda$  en un espacio vectorial real  $V$  es un subgrupo aditivo discreto de  $V$ . El rango de  $\Lambda$  es la dimensión de su espacio lineal generado, es decir,

$$\text{rango}(\Lambda) := \dim(\text{lin } \Lambda).$$

**Ejemplo 2.1.2.** Un *retículo entera estándar* en  $\mathbb{R}^2$  es el conjunto

$$\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\},$$

generado por los vectores unitarios

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1).$$

Gráficamente, este retículo corresponde a la malla de todos los puntos con coordenadas enteras en el plano.

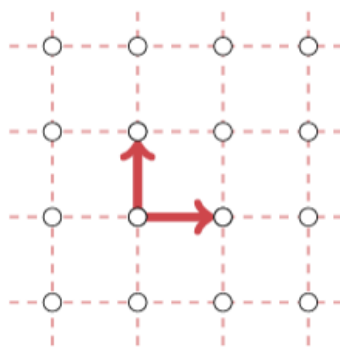


Figura 2.1.1: El retículo entera estándar  $\mathbb{Z}^2$  generada por  $e_1$  y  $e_2$ .

**Definición 2.1.3.** Una *base de un retículo* es un subconjunto linealmente independiente  $\mathcal{B} \subset V$  que genera el retículo, es decir,

$$\Lambda = \Lambda(\mathcal{B}).$$

**Ejemplo 2.1.4.** Sea

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Entonces  $\mathcal{B}$  es una base del retículo considerada en el Ejemplo 2.1.1.

**Definición 2.1.5.** Un *vector primitivo* de un retículo  $\Lambda$  es un vector no nulo  $v \in \Lambda$  que no es un múltiplo positivo de otro vector del retículo. Equivalente a:

$$\text{conv}(0, v) \cap \Lambda = \{0, v\}.$$

**Definición 2.1.6.** Sea  $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto linealmente independiente. El *zonotopo semiabierto* generado por estos vectores es

$$\Pi(\mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i < 1 \text{ para } 1 \leq i \leq k \right\},$$

y se denomina *paralelepípedo fundamental*.

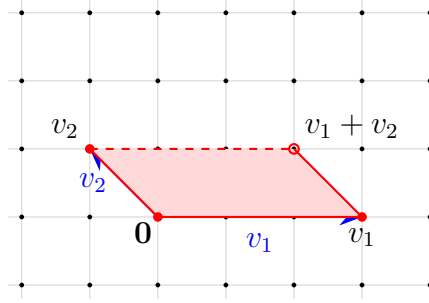


Figura 2.1.2: Paralelepípedo fundamental semiabierto  $\Pi(\mathcal{B})$  generado por  $v_1 = (3, 0)$  y  $v_2 = (-1, 1)$ .

## 2.2. Polígonos simples sobre el retículo

Un polígono simple es un polígono plano cuyos lados no se cortan entre sí, salvo en los vértices consecutivos. Es decir, es una curva cerrada formada por segmentos de recta que no se autointersecta.

**Definición 2.2.1.** Un *polígono reticular simple* es un polígono simple cuyos vértices pertenecen al retículo  $\mathbb{Z}^2$ .

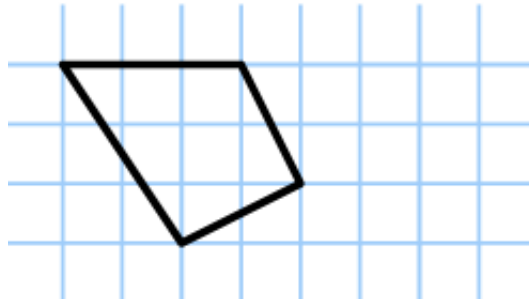


Figura 2.2.1: Ejemplo de polígono reticular simple.

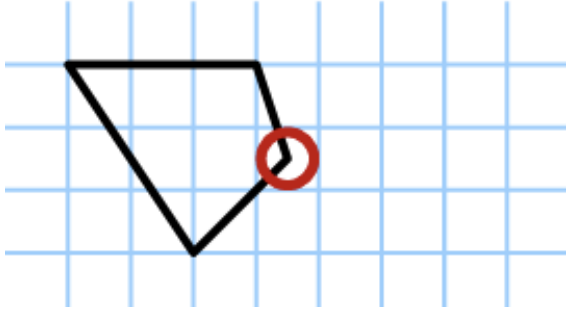


Figura 2.2.2: Ejemplo de polígono no reticular.

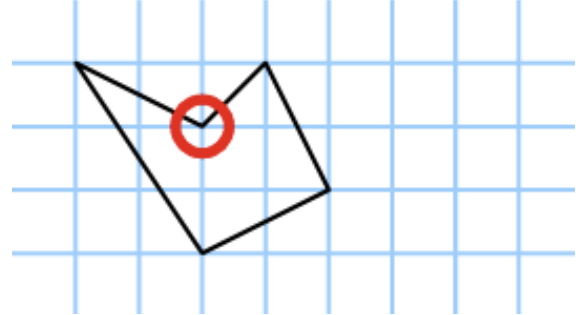


Figura 2.2.3: Ejemplo de polígono simple pero no convexo.

Para un polígono reticular simple  $P$ , se pueden definir los siguientes invariantes:

- $B$ : número de puntos del retículo en la frontera de  $P$ ,
- $I$ : número de puntos del retículo en el interior de  $P$ ,
- $A$ : área de  $P$ , medida en unidades de cuadrados del retículo.

**Ejemplo 2.2.2.** En el caso del polígono de la Figura 2.2.1, se tiene:

$$(B, I, A) = (6, 5, 7).$$

## 2.3. Puntos interiores y de frontera

En el estudio de los polígonos reticulares resulta fundamental distinguir entre los *puntos de frontera* y los *puntos interiores*.

**Definición 2.3.1.** Dado un polígono reticular simple  $P \subset \mathbb{R}^2$ , llamamos

- *puntos de frontera* a los puntos del retículo  $\mathbb{Z}^2$  que se encuentran sobre los lados de  $P$ ,
- *puntos interiores* a los puntos del retículo  $\mathbb{Z}^2$  que están estrictamente dentro de  $P$ .

Denotaremos por  $B$  el número de puntos de frontera y por  $I$  el número de puntos interiores.

**Definición 2.3.2.** La *longitud reticular* de un segmento del retículo  $e = \text{conv}(v, w) \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $v, w \in \mathbb{Z}^2$ , se define como

$$\text{longitud}(e) := |e \cap \mathbb{Z}^2| - 1.$$

Es decir, el número de subsegmentos determinados por los puntos del retículo contenidos en  $e$ .

**Ejemplo 2.3.3.** El segmento entre  $(0, 0)$  y  $(4, 2)$  contiene exactamente los puntos  $(0, 0), (2, 1), (4, 2)$ . Por tanto,

$$\text{longitud}(e) = 3 - 1 = 2.$$

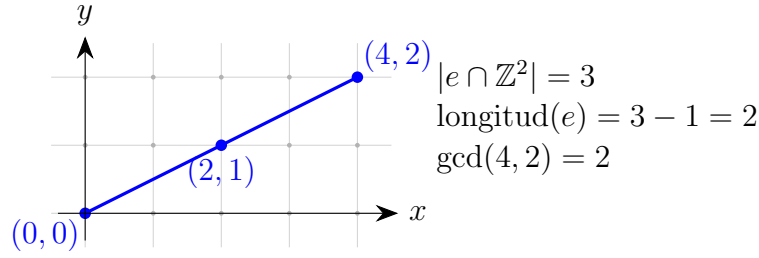


Figura 2.3.1: Segmento de extremos  $(0, 0)$  y  $(4, 2)$ .

En la Figura 2.3.1 se observa que los puntos del retículo sobre el segmento son  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 2)$ , por lo que  $\text{longitud}(e) = 2$  y  $\text{gcd}(4, 2) = 2$ .

**Observación 2.3.4.** La longitud reticular coincide con el máximo común divisor de las diferencias de coordenadas de los extremos:

$$\text{longitud}(\text{conv}(v, w)) = \text{gcd}(|x_v - x_w|, |y_v - y_w|).$$

**Ejemplo 2.3.5.** Para el segmento entre  $(0, 0)$  y  $(4, 2)$ , se tiene  $\text{gcd}(4, 2) = 2$ , lo que coincide con el cálculo anterior.

La noción de longitud reticular resulta muy útil porque permite contar de forma precisa los puntos de frontera en cada lado de un polígono reticular. En combinación con los puntos interiores, estos valores  $B$  e  $I$  aparecerán en la fórmula del Teorema de Pick (Capítulo 5).

## 2.4. Área de polígonos y motivación del problema

El *área* de un polígono en el plano se puede calcular mediante las fórmulas clásicas de la geometría euclídea. Sin embargo, cuando trabajamos con polígonos reticulares, es más natural medir el área en *unidades de cuadrados del retículo*, es decir, tomando como unidad básica el área de un cuadrado de lado 1.

**Ejemplo 2.4.1.** Un cuadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  tiene área

$$A = 1.$$

Si consideramos el cuadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$ , su área es

$$A = 2^2 = 4,$$

medida en unidades de cuadrados del retículo.

**Ejemplo 2.4.2.** Un triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 3)$  tiene área

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3,$$

también medida en unidades de cuadrados del retículo.

En el contexto de los polígonos reticulares simples, hemos introducido tres invariantes fundamentales:

- $B$ : número de puntos del retículo en la frontera,
- $I$ : número de puntos del retículo en el interior,
- $A$ : área en unidades de cuadrados del retículo.

Una pregunta natural que surge es: *¿existe una relación sencilla entre el área de un polígono reticular y el número de puntos interiores y de frontera que contiene?*

Responder a esta cuestión es precisamente el objetivo del Teorema de Pick, que veremos en detalle en el Capítulo 5.

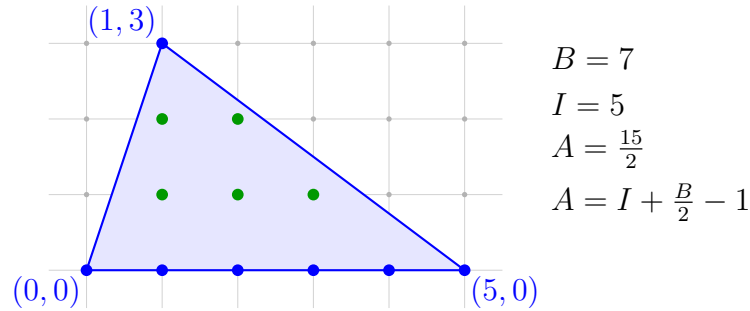


Figura 2.4.1: Triángulo reticular con 7 puntos exteriores y 5 interiores.

**Ejemplo 2.4.3.** El triángulo de la Figura 2.4.1 verifica la fórmula de Pick

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

En efecto, como  $B = 7$  e  $I = 5$ , resulta

$$I + \frac{B}{2} - 1 = 5 + \frac{7}{2} - 1 = 5 + 3,5 - 1 = 7,5.$$

Por otro lado, el área geométrica del triángulo es

$$A = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Por tanto, ambos valores coinciden y se cumple la fórmula de Pick.

**Nota 2.4.4.** A partir de ahora usaremos  $I(P)$ ,  $B(P)$ ,  $A(P)$  para enfatizar la dependencia en el polígono  $P$ ; cuando no haya confusión, escribiremos simplemente  $I$ ,  $B$ ,  $A$ .

## 2.5. Conteo discreto y geometría combinatoria

En esta sección introducimos nociones que permiten clasificar y comparar polígonos reticulares más allá de su forma geométrica euclídea.

**Definición 2.5.1.** Dos polígonos reticulares  $P$  y  $P'$  se dicen *equivalentes unimodulares* si existe una transformación afín de la forma

$$x \mapsto Tx + b,$$

donde  $T$  es un automorfismo del retículo  $\mathbb{Z}^2$  (es decir, una matriz entera con determinante  $\pm 1$ ) y  $b \in \mathbb{Z}^2$ , que lleva los vértices de  $P$  en los de  $P'$ .

**Corolario 2.5.2.** *Los polígonos reticulares equivalentes unimodulares tienen el mismo número de puntos del retículo y la misma área.*

**Demostración.** Si dos polígonos  $P$  y  $Q$  son equivalentes unimodulares, existe una transformación afín con matriz en  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$  y traslación entera que lleva  $P$  en  $Q$ . Dicha transformación preserva el retículo  $\mathbb{Z}^2$  y el área (porque su determinante es  $\pm 1$ ). Por tanto, el número de puntos reticulares y el área coinciden en ambos polígonos.  $\square$

**Definición 2.5.3.** Llamamos *triángulo estándar* o *triángulo unimodular* al polígono

$$\Delta_2 := \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\},$$

es decir, el convexo generado por el origen y los vectores de la base canónica de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Proposición 2.5.4.** *Todo triángulo del retículo con exactamente tres puntos del retículo (sus vértices) es isomorfo al triángulo estándar  $\Delta_2$ .*

**Demostración.** Sea  $T$  un triángulo reticular que contiene exactamente tres puntos del retículo: sus vértices. Estos triángulos se denominan *unimodulares* y tienen área  $1/2$ .

Podemos trasladar  $T$  de modo que uno de sus vértices coincida con el origen, y tomar los otros dos como vectores de una base del retículo. Dado que  $T$  no contiene más puntos del retículo, esa base necesariamente es unimodular (su determinante es  $\pm 1$ ).

Por tanto, existe una transformación afín unimodular que envía dicha base a la base canónica  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  de  $\mathbb{Z}^2$ . Bajo esta transformación, el triángulo  $T$  se lleva exactamente al triángulo estándar

$$\Delta_2 = \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}.$$

Así, todo triángulo del retículo con solo sus tres vértices como puntos del retículo es isomorfo a  $\Delta_2$ .  $\square$

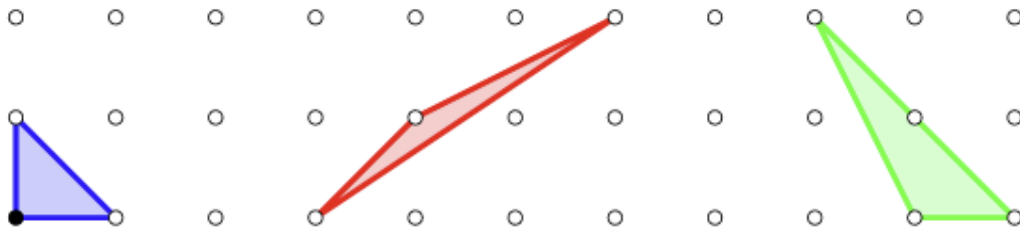


Figura 2.5.1: Ejemplos de triángulos reticulares.

En la Figura 2.5.1 se observa que aunque presentan diferentes longitudes y ángulos, el triángulo azul y el rojo son equivalentes en el sentido del retículo, mientras que el verde no lo es.

Este resultado muestra que, aunque dos polígonos puedan parecer diferentes desde el punto de vista euclídeo (distancias o ángulos), pueden ser equivalentes en el sentido del retículo si existe una transformación afín unimodular que los relaciona. Estas transformaciones preservan el número de puntos del retículo y el área, aunque no necesariamente los ángulos ni las longitudes.

**Proposición 2.5.5.** *Los polígonos reticulares equivalentes contienen el mismo número de puntos del retículo, tienen la misma área y el mismo perímetro reticular.*

**Demostración.** Dos polígonos reticulares son equivalentes si existe una transformación afín unimodular que envía uno en el otro. Tales transformaciones están dadas por una matriz entera con determinante  $\pm 1$  y una traslación por un vector de  $\mathbb{Z}^2$ .

- Estas transformaciones preservan el conjunto de puntos del retículo, por lo que el número de puntos interiores y de frontera se mantiene invariante.
- También preservan el área, ya que el determinante  $\pm 1$  garantiza que las áreas se conserven exactamente.
- Finalmente, como envían segmentos del retículo en otros segmentos del retículo, también preservan la longitud reticular de cada lado, y por tanto el perímetro reticular.

En conclusión, polígonos reticulares equivalentes contienen el mismo número de puntos del retículo, la misma área y el mismo perímetro reticular.  $\square$

# Capítulo 3

## Grafos planos y el teorema de Euler

Durante este capítulo se expondrán diversas propiedades y conceptos relacionados con los grafos planos y el Teorema de Euler.

En primer lugar, se presentarán las definiciones básicas y algunos resultados topológicos previos que permiten comprender la estructura de este tipo de grafos.

A continuación, se estudiará la relación entre los grafos planos y sus *duales*, introduciendo el concepto de correspondencia entre vértices, aristas y regiones. También se analizará la manera en que los grafos planos pueden representarse en el plano sin cruces, y cómo estas representaciones están ligadas a propiedades combinatorias fundamentales.

El capítulo culminará con la fórmula de Euler para grafos planos, uno de los resultados clásicos de la matemática discreta, cuya demostración y aplicaciones se examinarán con detalle. Este teorema no solo constituye un puente entre grafos y topología, sino que también tendrá un papel esencial en capítulos posteriores, especialmente en el estudio de las *triangulaciones de polígonos* y en la *demostración del teorema de Pick*.

En este capítulo trabajaremos únicamente con grafos simples, es decir, no dirigidos, sin bucles ni aristas múltiples.

### 3.1. Definiciones básicas de grafos

**Definición 3.1.1.** Un *grafo simple* es un par  $G = (V, E)$ , donde:

- $V$  es un conjunto finito cuyos elementos se llaman *vértices*.
- $E \subseteq [V]^2$  es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos, llamados *aristas*.

Aquí,  $[V]^2$  denota el conjunto de todos los subconjuntos de  $V$  con exactamente dos elementos.

**Observación 3.1.2.** La forma habitual de visualizar un grafo es dibujando un punto por cada vértice y uniendo dos de esos puntos con una línea si los vértices correspondientes forman una arista. La forma en que se dibujan exactamente estos puntos y líneas se considera irrelevante: lo único que importa es la información sobre qué pares de vértices forman una arista y cuáles no.

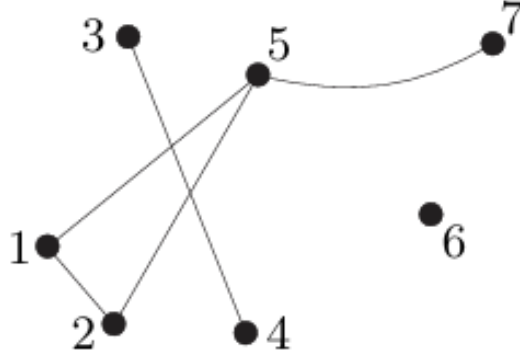


Figura 3.1.1: El grafo sobre  $V = \{1, \dots, 7\}$  con conjunto de aristas  
 $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$

**Notación 3.1.3.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Denotaremos por  $V(G)$  al conjunto de vértices de  $G$ , y por  $E(G)$  al conjunto de sus aristas.

**Observación 3.1.4.** A lo largo de este capítulo denotaremos los vértices por la letra  $v$ , y las aristas por la letra  $e$ .

**Definición 3.1.5.** El número de vértices de un grafo  $G$  es su *orden*, y se denota por  $|G|$ ; su número de aristas se denota por  $a = \|G\|$ . Los grafos se clasifican como *finitos* o *infinitos* según su orden.

**Observación 3.1.6.** En adelante consideraremos únicamente grafos finitos.

**Definición 3.1.7.** Para el *grafo vacío*  $(\emptyset, \emptyset)$  simplemente escribimos  $\emptyset$ . Un grafo de orden 0 o 1 se denomina *trivial*.

**Definición 3.1.8.** Un vértice  $v$  es *incidente* con una arista  $e$  si  $v \in e$ ; en tal caso, se dice que  $e$  es una arista en  $v$ . Los dos vértices incidentes con una arista se denominan *extremos* de la arista, y se dice que la arista une sus extremos.

**Notación 3.1.9.** Sean  $X, Y \subseteq V$ . Una arista  $\{x, y\}$  normalmente se escribe  $xy$  (o  $yx$ ). Si  $x \in X$  e  $y \in Y$ , entonces  $xy$  es una arista  $X$ – $Y$ .

El conjunto de todas las aristas  $X$ – $Y$  en un conjunto  $E$  se denota por  $E(X, Y)$ ; en lugar de  $E(\{x\}, Y)$  y  $E(X, \{y\})$  simplemente escribimos  $E(x, Y)$  y  $E(X, y)$ . El conjunto de todas las aristas en  $E$  que inciden en un vértice  $v$  se denota por  $E(v)$ .

**Definición 3.1.10.** Dos vértices  $x, y$  de un grafo  $G$  son *adyacentes*, o *vecinos*, si  $xy$  es una arista de  $G$ . Dos aristas  $e \neq f$  son *adyacentes* si tienen un extremo en común.

**Definición 3.1.11.** Un grafo  $G$  es *completo* si todos sus vértices son adyacentes por pares. Se denota por  $K_n$  al grafo completo con  $n$  vértices.

**Notación 3.1.12.** Un grafo completo con  $n$  vértices se denota por  $K_n$ ; un  $K_3$  se llama *triángulo* y  $K_4$  corresponde al tetraedro.

**Definición 3.1.13.** Vértices o aristas no adyacentes por pares se llaman *independientes*. Más formalmente, un conjunto de vértices o de aristas es *independiente* (o *estable*) si ningún par de sus elementos es adyacente.

**Definición 3.1.14.** Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos. Decimos que  $G$  y  $G'$  son *isomorfos*, y escribimos  $G \simeq G'$ , si existe una biyección  $\varphi : V \rightarrow V'$  tal que  $xy \in E \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E'$  para todo  $x, y \in V$ . Tal aplicación  $\varphi$  se llama un *isomorfismo*; si  $G = G'$ , se llama un *automorfismo*.

**Observación 3.1.15.** No distinguimos normalmente entre grafos isomorfos. Así, solemos escribir  $G = G'$  en lugar de  $G \simeq G'$ , y hablamos del grafo completo con  $n$  vértices, y así sucesivamente.

**Definición 3.1.16.** Una aplicación que toma grafos como argumentos se llama un *invariante de grafo* si asigna valores iguales a grafos isomorfos.

**Ejemplo 3.1.17.** El número de vértices y el número de aristas de un grafo son dos invariantes sencillos. Otro invariante importante es el *número de clique*, es decir, el máximo número de vértices que forman un subgrafo completo (o *clique*) en  $G$ . La definición de subgrafo se dará más adelante en la definición 3.1.19.

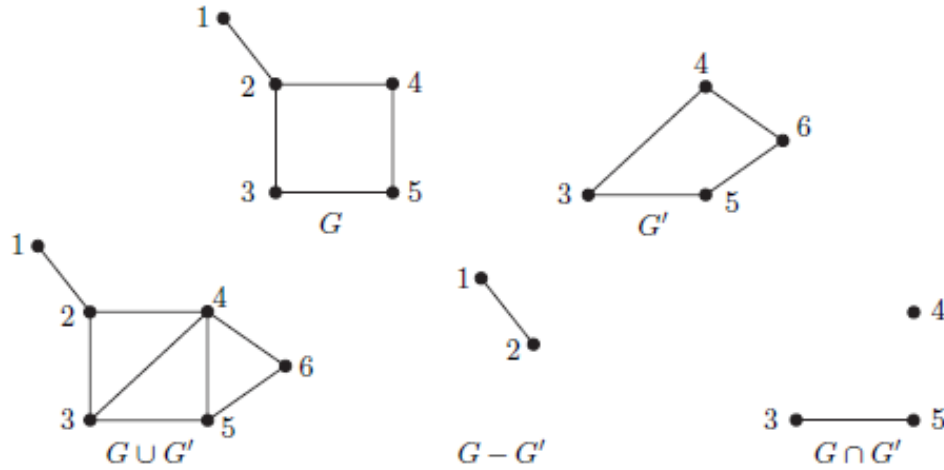


Figura 3.1.2: Unión, diferencia e intersección; los vértices 2, 3, 4 generan un triángulo en  $G \cup G'$  pero no en  $G$ .

**Definición 3.1.18.** La *unión* de dos grafos  $G$  y  $G'$  se define como

$$G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$$

y su *intersección* como

$$G \cap G' := (V \cap V', E \cap E').$$

Si  $G \cap G' = \emptyset$ , se dice que  $G$  y  $G'$  son *disjuntos*.

**Definición 3.1.19.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Un grafo  $G' = (V', E')$  es un *subgrafo* de  $G$  si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ , con la condición de que cada arista de  $E'$  tiene sus extremos en  $V'$ . En este caso,  $G$  se llama *supergrafo* de  $G'$ , y se escribe  $G' \subseteq G$ . De manera menos formal, se dice que  $G$  *contiene* a  $G'$ .

**Definición 3.1.20.** Si  $G' \subseteq G$  y  $G$  contiene todas las aristas  $xy \in E$  con  $x, y \in V'$ , entonces  $G'$  es un *subgrafo inducido* de  $G$ ; decimos que  $V'$  *induce* o *genera* a  $G'$  en  $G$ , y escribimos  $G' = G[V']$ . Si  $U \subseteq V$  es cualquier conjunto de vértices,  $G[U]$  denota el grafo sobre  $U$  cuyas aristas son precisamente las aristas de  $G$  con ambos extremos en  $U$ . Si  $H$  es un subgrafo de  $G$ , no necesariamente inducido, abreviamos  $G[V(H)]$  como  $G[H]$ .

**Definición 3.1.21.** Un subgrafo  $G' \subseteq G$  es un *subgrafo generador* de  $G$  si  $V'$  abarca todos los vértices de  $G$ , es decir, si  $V' = V$ .

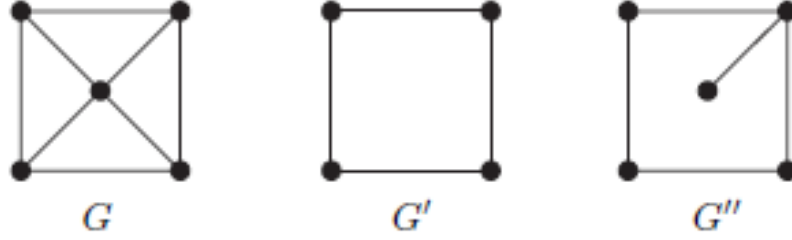


Figura 3.1.3: Un grafo  $G$  con subgrafos  $G'$  y  $G''$ ;  $G'$  es un subgrafo inducido de  $G$ , pero  $G''$  no lo es.

Si  $U$  es cualquier conjunto de vértices (usualmente de  $G$ ), escribimos  $G - U$  para  $G[V \setminus U]$ . En otras palabras,  $G - U$  se obtiene de  $G$  eliminando todos los vértices en  $U \cap V$  y sus aristas incidentes. Si  $U = \{v\}$  es un único vértice, escribimos  $G - v$  en lugar de  $G - \{v\}$ . En vez de  $G - V(G')$  escribimos simplemente  $G - G'$ .

**Definición 3.1.22.** Para un subconjunto  $F$  de  $[V]^2$  escribimos  $G - F := (V, E \setminus F)$  y  $G + F := (V, E \cup F)$ ; como antes,  $G - \{e\}$  y  $G + \{e\}$  se abrevian como  $G - e$  y  $G + e$ .

**Definición 3.1.23.** Llamamos a  $G$  *maximal respecto a aristas* con una propiedad de grafo dada si  $G$  posee la propiedad pero ningún grafo  $G + xy$  la posee, para  $x, y$  no adyacentes en  $G$ .

**Definición 3.1.24.** De manera más general, decimos que un grafo es *mínimo* o *máximo* con respecto a alguna propiedad cuando no se ha especificado un orden en particular, y nos referimos a la relación de subgrafo. En este contexto, “mínimo” o “máximo” respecto a vértices o aristas significa inclusión de conjuntos.

**Definición 3.1.25.** Si  $G$  y  $G'$  son disjuntos, denotamos por  $G * G'$  al grafo obtenido a partir de  $G \cup G'$  añadiendo aristas entre todos los vértices de  $G$  y todos los vértices de  $G'$ . Por ejemplo,  $K^2 * K^3 = K^5$ .

**Definición 3.1.26.** El *grafo complementario*  $\overline{G}$  de  $G$  es el grafo sobre  $V$  con conjunto de aristas  $[V]^2 \setminus E$ .

**Definición 3.1.27.** El grafo lineal  $L(G)$  de  $G$  es el grafo en  $E$  en el que  $x, y \in E$  son adyacentes como vértices si y sólo si son adyacentes como aristas en  $G$ .



Figura 3.1.4: Un grafo isomorfo a su complementario.

**Definición 3.1.28.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo no vacío. El conjunto de *vecinos* de un vértice  $v$  en  $G$  se denota por  $N_G(v)$ , o de forma abreviada  $N(v)$ .

**Definición 3.1.29.** El *grado* (o *valencia*) de un vértice  $v$ , denotado por  $d_G(v)$  o  $d(v)$ , es el número  $|E(v)|$  de aristas incidentes en  $v$ . Por definición, este número coincide con el número de vecinos de  $v$ .

**Definición 3.1.30.** Un *vértice aislado* es aquel cuyo grado es 0.

**Observación 3.1.31.** El *grado mínimo* de un grafo  $G$  se denota por  $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$ , y el *grado máximo* se denota por  $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$ .

**Definición 3.1.32.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Un *recorrido* de longitud  $k \geq 0$  es una sucesión  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  de vértices de  $G$  tal que  $v_{i-1}v_i \in E$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . La *longitud* del recorrido es  $k$  (el número de aristas usadas).

Un *camino* es un recorrido sin repetición de vértices (es decir,  $v_i \neq v_j$  si  $i \neq j$ ).

Un *ciclo* es un recorrido cerrado de longitud  $k \geq 3$ , con  $v_0 = v_k$ , y sin repetición de vértices salvo el primero/último ( $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$  todos distintos).

**Definición 3.1.33.** Un grafo no vacío  $G$  se dice *conexo* si para cualesquiera dos vértices  $u, v \in V(G)$  existe un camino en  $G$  que une  $u$  con  $v$ . Si  $U \subseteq V(G)$  y el subgrafo inducido  $G[U]$  es conexo, también decimos que  $U$  es conexo (en  $G$ ).

**Definición 3.1.34.** Sea  $k \geq 1$ . Un grafo  $G$  se dice  *$k$ -conexo* si sigue siendo conexo después de eliminar cualesquiera  $k - 1$  vértices (y sus aristas incidentes). En particular:

- 1-conexo equivale a conexo.
- 2-conexo significa que no existe un único vértice cuya eliminación desconecte el grafo.
- 3-conexo significa que es necesario eliminar al menos tres vértices para desconectarlo.

**Definición 3.1.35.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Un subgrafo conexo maximal de  $G$  se denomina *componente* de  $G$ . Nótese que una componente, al ser conexa, nunca está vacía; por lo tanto, el grafo vacío no tiene componentes.



Figura 3.1.5: Un grafo con tres componentes y un subgrafo conexo generador minimal en cada componente.

## 3.2. Resultados topológicos previos

En esta sección revisamos algunas definiciones y hechos topológicos básicos que se utilizarán más adelante. Todos estos resultados son bien conocidos y, por tanto, no se incluyen sus demostraciones. Como el contenido no involucra teoría de grafos propiamente dicha, nuestro objetivo es únicamente recoger los conceptos topológicos que necesitamos para el desarrollo posterior, evitando demostraciones innecesarias.

Todas las pruebas que aparezcan seguirán estrictamente las definiciones y hechos expuestos aquí, guiadas cuando sea posible por intuiciones geométricas, pero manteniendo la presentación formal al mínimo necesario.

**Definición 3.2.1.** Un *segmento de línea recta* en el plano euclídeo es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que tiene la forma

$$\{p + \lambda(q - p) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

para dos puntos distintos  $p, q \in \mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.2.2.** Un *polígono* en el plano es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por la unión de un número finito de segmentos de recta consecutivos que determinan una curva cerrada.

Se dice que un polígono es *simple* si su frontera no se corta a sí misma, es decir, si los segmentos solo pueden intersectar en vértices consecutivos (compartiendo exactamente un extremo).

En este trabajo, salvo que se indique lo contrario, todos los polígonos considerados serán *polígonos simples*.

**Definición 3.2.3.** Un *arco poligonal* es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que es la unión de un número finito de segmentos de recta y que es homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Las imágenes de 0 y 1 bajo este homeomorfismo se denominan *extremos* del arco, y el arco *une* o *conecta* dichos extremos.

El *interior* de un arco poligonal es el arco sin sus extremos, y su *frontera* está formada precisamente por los extremos.

En lo que sigue, el término *arco* se referirá siempre a un arco poligonal.

**Definición 3.2.4.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Un *arco*  $P$  entre dos vértices  $x, y \in V$  es un camino de  $G$  con extremos  $x$  e  $y$ .

Denotaremos:

- por  $P$  al conjunto de vértices de dicho camino;
- por  $\{x, y\}$  a los *extremos* del arco;
- por  $\overset{\circ}{P} = P \setminus \{x, y\}$  a su *interior* (los puntos intermedios del camino);
- por  $\partial P = \{x, y\}$  a su *frontera*.

**Definición 3.2.5.** Sea  $O \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto. Definimos una relación de equivalencia en  $O$  diciendo que dos puntos  $p, q \in O$  pertenecen a la misma clase si existe un arco contenido en  $O$  que une  $p$  y  $q$ .

Las clases de equivalencia bajo esta relación se llaman *componentes conexas por arcos* de  $O$ . En la literatura también suelen denominarse *regiones*.

**Definición 3.2.6.** Un conjunto cerrado  $X \subset \mathbb{R}^2$  *separa* un conjunto abierto  $O$  si  $O \setminus X$  tiene más de una componente conexa por arcos.

**Definición 3.2.7.** La *frontera* de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^2$  es el conjunto de todos los puntos  $y \in \mathbb{R}^2$  tales que todo entorno abierto de  $y$  contiene puntos de  $X$  y puntos de  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ .

La frontera de una región de  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ , donde  $X$  es una unión finita de puntos y arcos, tiene dos propiedades importantes:

1. **Accesibilidad:** si  $x \in X$  es un punto de frontera, entonces puede unirse a algún punto  $y$  de la región mediante un arco simple cuyo interior esté contenido en la región.
2. **Separación de un intervalo:** si el intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  es continuo, con  $\varphi(0, 0) \in O$  y  $\varphi(1, 0) \notin O$ , entonces la frontera de  $O$  contiene al *primer punto* de  $P$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus O$ , definido como

$$p(y) = \inf\{x \mid \varphi(x, y) \notin O\}.$$

**Teorema 3.2.8. (Teorema de la curva de Jordan para polígonos.)** Sea  $P \subset \mathbb{R}^2$  un polígono simple cuya frontera es la unión de arcos poligonales. Entonces, el conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  tiene exactamente dos regiones, de las cuales exactamente una es acotada. Además, cada una de las dos regiones tiene a todo el polígono  $P$  como frontera, y los interiores de los arcos que forman dicha frontera son disjuntos.

**Demostración. (Referencia)** La demostración de este resultado es un caso particular del *teorema de la curva de Jordan*, que puede encontrarse en libros clásicos de topología, como (Munkres, 2000). En el caso poligonal, la prueba es más sencilla pero sigue la misma idea general.  $\square$

**Lema 3.2.9.** Sean  $P_1, P_2, P_3$  tres arcos poligonales en  $\mathbb{R}^2$  con los mismos extremos  $x, y$ , cuyos interiores son disjuntos. Entonces se cumple:

- (I) El conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$  se descompone en exactamente tres regiones abiertas, cuyas fronteras son  $P_1 \cup P_2$ ,  $P_2 \cup P_3$  y  $P_1 \cup P_3$ .
- (II) Sea  $P$  un arco entre un punto de  $\overset{\circ}{P}_1$  y un punto de  $\overset{\circ}{P}_3$ , cuyo interior está contenido en la región de  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$  que contiene a  $P_2$ . Entonces necesariamente

$$\overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{P}_2 \neq \emptyset,$$

es decir,  $P$  debe intersectar a  $P_2$  en su interior.

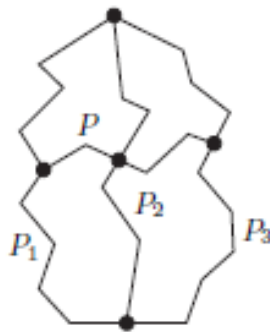


Figura 3.2.1: Los arcos en el Lema 3.2.9(ii).

Nuestro siguiente lema complementa el teorema de la curva de Jordan indicando que un arco no separa el plano. Para facilitar su aplicación más adelante, lo enunciamos de forma un poco más general.

§

**Lema 3.2.10.** Sean  $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^2$  conjuntos disjuntos, cada uno formado por un número finito de puntos y arcos, y sea  $P$  un arco entre un punto en  $X_1$  y un punto en  $X_2$  cuyo interior  $\overset{\circ}{P}$  esté contenido en una región  $O$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ . Entonces  $O \cup \overset{\circ}{P}$  es una región de  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ .

**Demostración. (Referencia)** La demostración completa puede consultarse en (Diestel, 2000), donde se desarrolla en el contexto de la teoría de grafos planos.  $\square$

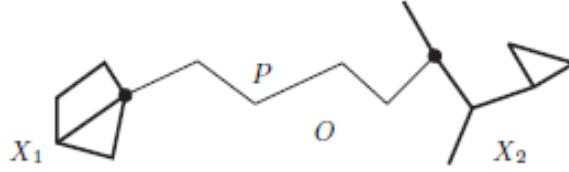


Figura 3.2.2:  $P$  no separa la región  $O$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ .

Como es habitual, denotamos por  $S^n$  a la esfera  $n$ -dimensional, el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  a distancia 1 del origen. La esfera bidimensional, menos su *polo norte*  $(0, 0, 1)$ , es homeomorfa al plano mediante, por ejemplo, la proyección estereográfica. Fijamos un homeomorfismo

$$\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Si  $P \subset \mathbb{R}^2$  es un polígono y  $O$  es la región acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus P$ , definimos

$$C := \pi^{-1}(P) \subset S^2.$$

Entonces  $C$  es una curva cerrada simple en la esfera (es decir, una imagen de  $S^1$ ).

En este contexto, utilizaremos el siguiente resultado fundamental:

**Teorema 3.2.11. (Jordan–Schoenflies)** Sea  $C \subset S^2$  una curva cerrada simple. Entonces  $C$  divide a la esfera  $S^2$  en exactamente dos regiones abiertas, cada una de ellas homeomorfa a un disco abierto, y  $C$  es la frontera común de ambas.

**Demostración. (Referencia)** La prueba completa es bastante técnica. Puede encontrarse en (Aigner y Ziegler, 2018) (capítulo sobre topología elemental) y en el clásico libro de topología de Munkres (Munkres, 2000), donde se demuestra de forma detallada como corolario del teorema de Jordan.  $\square$

### 3.3. Grafos planos y duales

En lo que sigue, utilizaremos el término *grafo* para referirnos al objeto abstracto  $G = (V, E)$ . Cuando hablemos de su realización geométrica en el plano, emplearemos el término *representación plana* o *dibujo del grafo*.

Cuando dibujamos un grafo en una hoja de papel, normalmente intentamos hacerlo de la forma más clara posible. Una manera obvia de evitar confusión es tratar de dibujarlo sin intersecciones indebidas de aristas. Por ejemplo, podemos preguntarnos si es posible representar el grafo en el plano de manera que no haya dos aristas que se crucen en un punto que no sea un extremo común.

**Definición 3.3.1.** Un *grafo plano* es un grafo abstracto  $G = (V, E)$  que admite una *representación plana*, es decir, un dibujo en el plano donde:

- (I) los vértices  $V$  se representan como puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$ ;
- (II) cada arista  $e \in E$  se representa como un arco simple que une a sus extremos;
- (III) el interior de cada arista no contiene vértices, ni se cruza con el interior de otra arista.

A ese dibujo se le llama *representación plana* del grafo.

**Definición 3.3.2.** Sea  $G$  un grafo plano. El *grafo dual*  $G^*$  se construye de la siguiente manera:

1. Se coloca un vértice en el interior de cada cara de una representación plana de  $G$ , incluida la cara exterior.
2. Se conectan dos vértices de  $G^*$  mediante una arista si las caras correspondientes en  $G$  comparten una arista.

En esta correspondencia:

- Cada vértice de  $G^*$  corresponde a una cara de  $G$ .
- Cada arista de  $G^*$  cruza exactamente una arista de  $G$ .
- Cada cara de  $G^*$  corresponde a un vértice de  $G$ .

Además, para una representación plana de  $G$ , el dual del dual es el grafo original:

$$(G^*)^* = G.$$

**Observación 3.3.3.** El *teorema de Whitney* (1933) afirma que un grafo  $G$  es plano si y sólo si existe una representación plana de  $G$  que admite un grafo dual. Es decir, la existencia de un grafo dual caracteriza precisamente a los grafos planos.

**Observación 3.3.4.** El grafo dual  $G^*$  puede contener *aristas múltiples* (varias aristas entre los mismos dos vértices) o incluso *bucles* (aristas que unen un vértice consigo mismo). Por ello, los grafos duales no siempre son simples. En la literatura, a este tipo de grafos que permiten aristas múltiples y bucles se les denomina *pseudógrafos*.

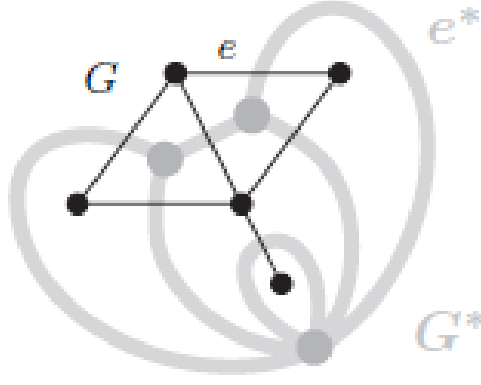


Figura 3.3.1: Un grafo plano  $G$  y su grafo dual  $G^*$ .

En la Figura 3.3.1 se puede observar que el dual puede contener aristas múltiples o bucles.

### 3.4. Regiones, vértices y aristas en dibujos planos

**Notación 3.4.1.** Un grafo plano  $(V, E)$  define de forma natural un grafo abstracto  $G$  sobre  $V$ . Siempre que no haya confusión, usaremos el nombre  $G$  para este grafo abstracto, así como para el grafo plano  $(V, E)$ , o para el conjunto de puntos  $V \cup \bigcup E$ . Se usarán convenciones notacionales similares para diferenciar aristas planas de aristas abstractas, subgrafos, etc.

**Definición 3.4.2.** Sea  $G$  un grafo plano dibujado en el plano. Llamamos *caras* de  $G$  a las regiones conexas en  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ . De entre ellas, la única no acotada se denomina *cara exterior*, y el resto son las *caras interiores*.

**Definición 3.4.3.** Para cada grafo plano  $G$ , el conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  es abierto; sus regiones son las *caras* de  $G$ . Dado que  $G$  es acotado (es decir, se encuentra dentro de un disco suficientemente grande  $D \subset \mathbb{R}^2$ ), exactamente una de sus caras es no acotada: la cara que contiene  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ . Esta cara es la *cara exterior* de  $G$ ; las otras caras son sus *caras interiores*. Denotamos el conjunto de caras de  $G$  por  $F(G)$ .

**Lema 3.4.4.** Sea  $G$  un grafo plano y  $e$  una arista de  $G$ .

- (I) Si  $X$  es la frontera de una cara de  $G$ , entonces  $e \subset X$  o  $X \cap \mathring{e} = \emptyset$ .
- (II) Si  $e$  está en un ciclo  $C \subseteq G$ , entonces  $e$  está en la frontera de exactamente dos caras de  $G$ , y éstas están contenidas en distintas caras de  $C$ .
- (III) Si  $e$  no está en ningún ciclo, entonces  $e$  está en la frontera de exactamente una cara de  $G$ .

**Demostración.** Demostraremos las tres afirmaciones conjuntamente. Comencemos considerando un punto  $x_0 \in \mathring{e}$ . Mostraremos que  $x_0$  está en la frontera de exactamente dos caras o de exactamente una, según  $e$  esté o no en un ciclo de  $G$ . Luego veremos que todo otro punto en  $\mathring{e}$  está en la frontera de exactamente las mismas caras que  $x_0$ . Entonces, los extremos de  $e$  también estarán en la frontera de esas mismas caras

simplemente porque todo entorno de un extremo de  $e$  es también un entorno de un punto interior de  $e$ .

El grafo  $G$  es la unión de un número finito de segmentos de línea recta; podemos asumir que cualesquiera dos de estos se intersectan en como mucho un punto. Alrededor de cada punto  $x \in \mathring{e}$  podemos encontrar un disco abierto  $D_x$ , con centro en  $x$ , que solo intersecta a los (uno o dos) segmentos de línea recta que contienen a  $x$ .

Sea  $S \subset e$  un segmento de línea recta y tomemos un punto interior  $x_0 \in S$ . Entonces  $D_{x_0} \cap G = D_{x_0} \cap S$ , por lo que  $D_{x_0} \setminus G$  es la unión de dos medias circunferencias abiertas. Como estas dos medias circunferencias no se intersectan, cada una está contenida en una cara de  $G$ . Denotemos estas caras por  $f_1$  y  $f_2$ ; son las únicas caras de  $G$  que contienen a  $x_0$  en su frontera, y pueden coincidir (Figura 3.3.1).

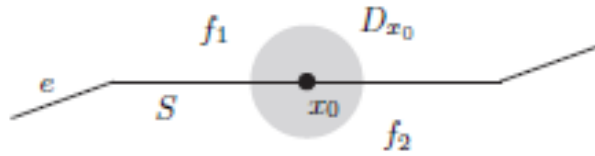


Figura 3.4.1: Caras  $f_1, f_2$  de  $G$  en la demostración del Lema 4.37.

Si  $e$  está en un ciclo  $C \subseteq G$ , entonces  $D_{x_0}$  corta ambas caras de  $C$  (Teorema 3.2.8). Las caras  $f_1, f_2$  de  $G$  están, por tanto, contenidas en caras distintas de  $C$  (ya que  $C \subseteq G$ , toda cara de  $G$  es un subconjunto de una cara de  $C$ ) y, en particular,  $f_1 \neq f_2$ . Si  $e$  no está en ningún ciclo, entonces existe un puente que une dos conjuntos disjuntos de puntos  $X_1, X_2$  con  $X_1 \cup X_2 = G \setminus e$ . Claramente,  $f_1 \cup \mathring{e} \cup f_2$  es el subconjunto de una cara de  $G$ . Por el Lema 3.2.10,  $f = \mathring{e}$  es una cara de  $G$ . Pero si  $e$  contiene a  $f_1$  y  $f_2$  y, por definición de  $f$ , entonces  $f = f_1 = f_2$ , y por tanto  $e$  está en la frontera de exactamente una cara de  $G$ .

Consideremos ahora otro punto  $x_1 \in \mathring{e}$ . Sea  $P$  el arco desde  $x_0$  hasta  $x_1$  contenido en  $e$ . Como  $P$  es compacto, sólo un número finito de discos  $D_x$  con  $x \in P$  lo cubren. Enumeremos estos discos como  $D_{x_0}, \dots, D_{x_n}$ , en el orden natural de sus centros a lo largo de  $P$ ; añadiendo  $D_{x_0}$  o  $D_{x_n}$  según sea necesario, podemos suponer que  $D_0 = D_{x_0}$  y  $D_{x_n} = D_{x_1}$ .

Por inducción en  $n$ , se demuestra fácilmente que todo punto  $y \in D_{x_n} \setminus e$  puede unirse mediante un arco dentro de  $(D_{x_0} \cup \dots \cup D_{x_n}) \setminus e$  a un punto  $z \in D_{x_0} \setminus e$  (véase Figura 3.4.2); entonces  $y$  y  $z$  están en la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ . Por lo tanto, todo punto de  $D_{x_n}$  que esté en  $f_1$  está también en  $f_2$ , de modo que  $x_1$  no puede estar en la frontera de ninguna otra cara de  $G$ .

Como las medias circunferencias de  $D_{x_0} \setminus e$  pueden vincularse con las de  $D_{x_1} \setminus e$  de esta forma (intercambiando el papel de  $D_{x_0}$  y  $D_{x_1}$ ), concluimos que  $x_1$  está en la frontera de ambas  $f_1$  y  $f_2$ .

□

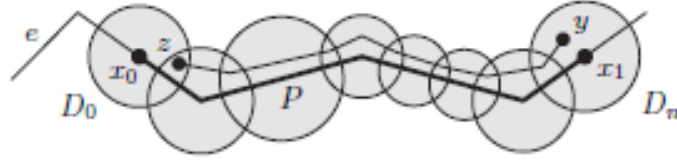


Figura 3.4.2: Un arco desde  $y$  hasta  $D_0$ , cercano a  $P$ .

**Corolario 3.4.5.** *La frontera de una cara es siempre el conjunto de puntos de un subgrafo.*

**Demostración.** Por definición, una cara de un grafo plano es un componente conexo de  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ , donde  $G$  es el dibujo del grafo. La frontera de tal componente está formada únicamente por aristas y vértices de  $G$ , y por tanto constituye un subgrafo de  $G$ .  $\square$

El subgrafo de  $G$  cuyo conjunto de puntos es la frontera de una cara  $f$  se dice que está limitado por  $f$  y se denomina su *borde*; lo denotamos por  $G[f]$ . Una cara se dice que es *incidente* con los vértices y aristas de su borde. Nótese que si  $H \subseteq G$ , entonces toda cara de  $G$  está contenida en una cara  $f'$  de  $H$ . Si  $G[f] \subseteq H$ , entonces  $f = f'$ ; en particular,  $f$  es siempre también una cara de su propio borde  $G[f]$ . Estos hechos básicos se utilizarán con frecuencia más adelante.

**Proposición 3.4.6.** *Un bosque (y, en particular, un bosque plano) tiene exactamente una cara.*

**Demostración.** Por inducción en el número de aristas y usando el Teorema 3.2.11  $\square$

**Nota 3.4.7.** Recordemos que un *bosque* es un grafo acíclico, es decir, una unión disjunta de árboles. Todo bosque es plano, por lo que el adjetivo “plano” en la proposición es en realidad redundante. Se mantiene únicamente por coherencia con la notación de esta sección, donde se trabaja siempre con grafos planos y sus caras.

**Definición 3.4.8.** Sea  $H$  un subgrafo de un grafo  $G$ . Un  $H$ -camino es un camino  $P \subseteq G$  tal que  $P$  intersecta a  $H$  únicamente en sus dos extremos, y estos extremos son vértices de  $H$ .

En otras palabras, es un camino que “une” dos vértices de  $H$  atravesando solo nuevos vértices fuera de  $H$ .

**Proposición 3.4.9.** *Un grafo es 2-conexo si y sólo si puede construirse a partir de un ciclo añadiendo sucesivamente  $H$ -caminos a grafos  $H$  ya construidos (véase la Fig. 3.4.3).*

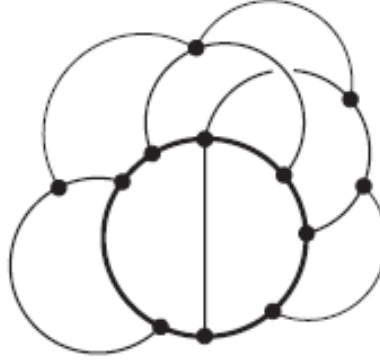


Figura 3.4.3: Construcción de un grafo 2-conexo a partir de un ciclo añadiendo  $H$ -caminos.

**Demostración.** Es claro que todo grafo construido como se describe es 2-conexo. Recíprocamente, sea  $G$  un grafo 2-conexo. Entonces  $G$  contiene un ciclo y, por lo tanto, un subgrafo maximal  $H$  construible como antes.

Como cualquier arista  $xy \in E(G) \setminus E(H)$ , con  $x, y \in H$ , definiría un  $H$ -camino, se sigue que  $H$  es un subgrafo inducido de  $G$ .

Si  $H \neq G$ , por la 2-conexión de  $G$  existe una arista  $vw$  con  $v \in G - H$  y  $w \in H$ . Como  $G$  es 2-conexo,  $G - w$  contiene un  $v$ - $H$  camino  $P$ . Entonces  $wvP$  es un  $H$  camino en  $G$ , y  $H \cup wvP$  es un subgrafo construible de  $G$  mayor que  $H$ . Esto contradice la maximalidad de  $H$ .  $\square$

**Proposición 3.4.10.** *En un grafo plano 2-conexo, cada cara está delimitada por un ciclo.*

**Demostración.** Sea  $f$  una cara en un grafo plano 2-conexo  $G$ . Demostraremos por inducción sobre  $|G|$  que  $G[f]$  es un ciclo. Si  $G$  es en sí mismo un ciclo, el resultado es inmediato por el Teorema 3.2.8; supongamos, por tanto, que  $G$  no es un ciclo.

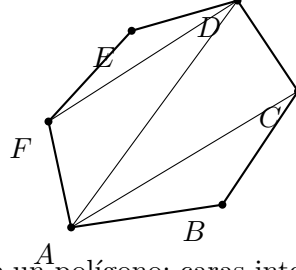
Por la Proposición 3.4.6, existen un grafo plano 2-conexo  $H \subseteq G$  y un camino  $H$ -camino  $P$  tal que  $G = H \cup P$ . El interior de  $P$  está contenido en una cara  $f'$  de  $H$ , que por la hipótesis de inducción está delimitada por un ciclo  $C$ .

Si  $f$  es también una cara de  $H$ , la conclusión sigue por la hipótesis de inducción. En caso contrario, la frontera de  $f$  corta a  $H$  en  $P \cup H$ , así que  $f \subseteq f'$ . Por lo tanto,  $f$  es una cara de  $C \cup P$ , y está delimitada por un ciclo (Lema 3.2.9(i)).  $\square$

**Definición 3.4.11.** Un grafo plano  $G$  es *maximalmente plano* si es plano y no existe un grafo plano  $G'$  tal que  $G$  sea subgrafo propio de  $G'$ . Equivalente: no se puede añadir ninguna arista a  $G$  sin que deje de ser plano.

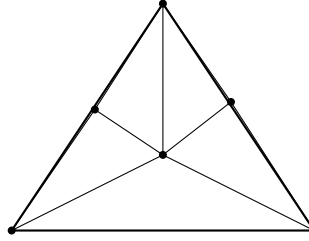
**Definición 3.4.12.** Sea  $G$  un grafo plano simple y conexo. Diremos que  $G$  es una *triangulación plana* si todas sus caras (en el sentido de la Def. 3.4.2), *incluida la cara exterior*, están delimitadas por ciclos de longitud 3.

**Comentario .** En el Capítulo de triangulaciones de polígonos usaremos la noción habitual de triangulación de un polígono: sólo las caras interiores al polígono son triángulos; la cara exterior no tiene por qué serlo. Esta distinción evita ambigüedades entre grafos planos maximalmente planos y triangulaciones de polígonos.



Triangulación de un polígono: caras interiores triangulares

Figura 3.4.4: Triangulación de un polígono simple mediante diagonales no cruzadas.



Triangulación plana (la cara exterior también es triángulo)

Figura 3.4.5: Ejemplo de triangulación plana: todas las caras, incluida la exterior, son triángulos.

**Proposición 3.4.13.** Un grafo plano de orden al menos 3 es maximalmente plano si y sólo si es una triangulación plana.

**Demostración.** Sea  $G$  un grafo plano de orden al menos 3. Es claro que si cada cara de  $G$  está delimitada por un triángulo, entonces  $G$  es maximalmente plano. En efecto, cualquier arista adicional tendría su interior dentro de una cara de  $G$  y sus extremos en la frontera de dicha cara. Como estos extremos ya son adyacentes en  $G$ , al añadir la arista incumpliría la condición (iii) de la definición de grafo plano.

Recíprocamente, supongamos que  $G$  es maximalmente plano y sea  $f \in F(G)$  una cara; escribimos  $H := G[f]$ . Dado que  $G$  es maximal como grafo plano,  $G[H]$  es completo: dos vértices cualesquiera de  $H$  que no estén ya adyacentes en  $G$  podrían unirse mediante un arco a través de  $f$ , extendiendo  $G$  a un grafo plano mayor, contradiciendo la maximalidad. Así,  $G[H] = K^n$  para algún  $n$ .

Veamos que  $n \leq 3$ . Supongamos  $n \geq 4$ , y sea  $C = v_1v_2v_3v_4v_1$  un ciclo en  $G[H]$  ( $= K^n$ ). Como  $C \subseteq G$ , nuestra cara  $f$  está contenida en una cara  $f_C$  de  $C$ ; sea  $f'_C$  la otra cara de  $C$ . Dado que los vértices  $v_1$  y  $v_3$  están en la frontera de  $f$ , pueden unirse mediante un arco cuyo interior esté en  $f'_C$  y que evite  $G$ .

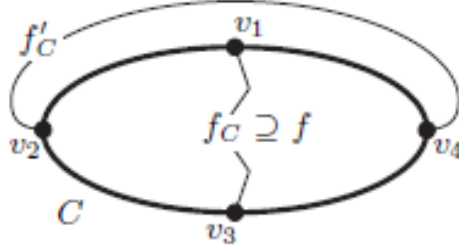


Figura 3.4.6: Construcción de grafos 2-conexos.

Por el Lema 3.2.9(ii), la arista plana  $v_2v_4$  de  $G[H]$  atraviesa  $f'_C$  en lugar de  $f_C$ . Análogamente, como  $v_2, v_4 \in G[f]$ , la arista  $v_1v_3$  atraviesa  $f'_C$ . Pero las aristas  $v_1v_3$  y  $v_2v_4$  son disjuntas, lo que contradice el Lema 3.2.9(ii).  $\square$

**Nota:** Este resultado conecta con el teorema de Pick, ya que en muchas aplicaciones se considera una subdivisión de una región poligonal en triángulos. Al representar dicha subdivisión como un grafo plano, se obtiene un grafo maximalmente plano, es decir, una triangulación plana.

### 3.5. Enunciado y demostración del teorema de Euler

El Teorema de Euler es uno de los resultados más fundamentales en la teoría de grafos planos. Fue descubierto por Leonhard Euler en 1752 en el contexto de los poliedros convexos, y constituye un puente entre la geometría y la combinatoria.

En el caso de grafos planos, el teorema establece una relación sencilla pero profunda entre el número de vértices, aristas y caras de cualquier grafo conexo dibujado en el plano.

**Teorema 3.5.1. (Fórmula de Euler)** *Sea  $G$  un grafo plano conexo con  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $c$  caras. Entonces se cumple*

$$v - a + c = 2.$$

**Demostración.** Sea  $T \subseteq E$  el conjunto de aristas de un árbol generador de  $G$ , es decir, un subgrafo minimal que conecta todos los vértices de  $G$ . Por minimalidad,  $T$  no contiene ciclos.

Construimos el grafo dual  $G^*$ : situamos un vértice en el interior de cada cara de  $G$  y unimos dos vértices de  $G^*$  por tantas aristas como aristas limítrofes compartan las caras correspondientes. (Así,  $G^*$  puede tener aristas múltiples aun cuando  $G$  sea simple).

Sea  $T^* \subseteq E^*$  la colección de aristas del dual que corresponde a  $E \setminus T$ . Como  $T$  no tiene ciclos,  $T^*$  conecta todas las caras; y  $T^*$  tampoco contiene ciclos (pues un ciclo en  $T^*$  separaría a  $G$  y forzaría un ciclo en  $T$ ). Por tanto,  $T^*$  es un árbol generador en  $G^*$ .

En un árbol, el número de vértices es uno más que el de aristas. Eligiendo una raíz y orientando las aristas alejándose de ella, se obtiene una biyección entre aristas y vértices no raíz. Aplicado a  $T$  y  $T^*$ :

$$v = a_T + 1, \quad c = a_{T^*} + 1.$$

Como  $a = a_T + a_{T^*}$ , al sumar se tiene  $v + c = (a_T + 1) + (a_{T^*} + 1) = a + 2$ , es decir,  $v - a + c = 2$ .  $\square$

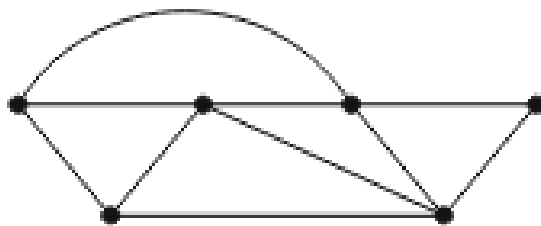


Figura 3.5.1: Un grafo plano  $G$ :  $v = 6$ ,  $a = 10$ ,  $c = 6$ .

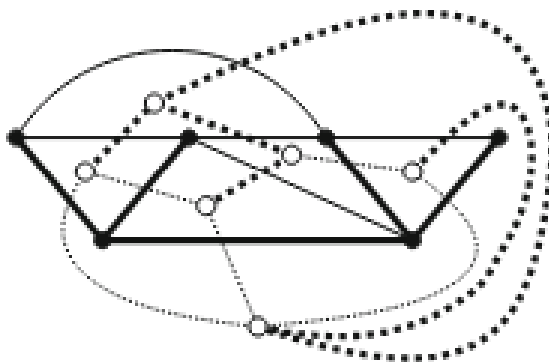


Figura 3.5.2: Árboles generadores duales en  $G$  y en  $G^*$ .

## Relación con la fórmula poliédrica de Euler

Sea  $P$  un poliedro convexo y sea  $G(P)$  su esqueleto (grafo de vértices y aristas de  $P$ ). Por proyección esférica (o mirando el poliedro desde una de sus caras y dibujando lo que se ve) obtenemos una incrustación plana sin cruces de  $G(P)$ . Las caras del dibujo plano de  $G(P)$  corresponden biunívocamente a las caras del poliedro. Aplicando el Teorema 3.5.1 a  $G(P)$ , si  $V, E, F$  denotan el número de vértices, aristas y caras de  $P$ , resulta

$$V - E + F = 2,$$

la clásica *fórmula de Euler para poliedros convexos* (superficies de género 0). Más generalmente, para una superficie orientable de género  $g$  se obtiene  $V - E + F = 2 - 2g$ .

Muchas consecuencias conocidas se derivan de la fórmula de Euler: la clasificación de poliedros regulares, la no planaridad de  $K_5$  y  $K_{3,3}$ , o el teorema de los cinco colores.

Muchas consecuencias conocidas se derivan de la fórmula de Euler: la clasificación de poliedros regulares, la no planaridad de  $K_5$  y  $K_{3,3}$ , o el teorema de los cinco colores.

**Nota histórica.** Existe un resultado famoso, el *teorema de los cuatro colores*, que afirma que todo grafo plano puede colorearse con a lo sumo cuatro colores, de manera que vértices adyacentes reciban colores distintos.

En términos equivalentes, cualquier mapa en el plano puede colorearse con cuatro colores de modo que regiones con frontera común no compartan el mismo color.

Este teorema fue conjeturado en el siglo XIX y resultó ser extremadamente difícil: su primera demostración completa apareció en 1976, debido a Appel y Haken, con la ayuda intensiva de un ordenador. La demostración requirió verificar miles de configuraciones posibles, lo cual generó en su momento cierta controversia por el papel central del cálculo computacional en una prueba matemática. Hoy en día, el teorema de los cuatro colores está plenamente aceptado como uno de los hitos en la teoría de grafos y en la historia de las matemáticas.



Figura 3.5.3: Los sólidos Platónicos.

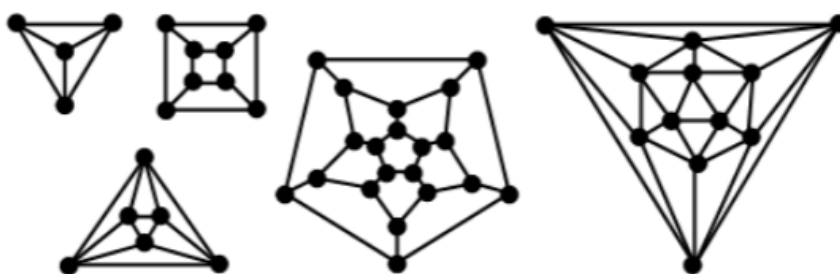


Figura 3.5.4: Los grafos de los sólidos Platónicos.

Contando el número de caras, aristas y vértices de estos poliedros se obtiene la siguiente tabla:

|          | Tetraedro | Cubo | Octaedro | Dodecaedro | Icosaedro |
|----------|-----------|------|----------|------------|-----------|
| Caras    | 4         | 6    | 8        | 12         | 20        |
| Aristas  | 6         | 12   | 12       | 30         | 30        |
| Vértices | 4         | 8    | 6        | 20         | 12        |

Tabla 3.1: Características de los cinco sólidos Platónicos.

**Definición 3.5.2.** El *grado* de un vértice es el número de aristas que inciden en él (los bucles cuentan el doble).

Sea  $v_i$  el número de vértices de grado  $i$  en  $G$ . Contando por grados:

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (3.1)$$

y, como cada arista aporta dos incidencias,

$$2a = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + \dots \quad (3.2)$$

El *grado medio* es  $\bar{d} = \frac{2a}{v}$ .

**Observación 3.5.3. Apretón de manos con bucles.** Con la convención de que los bucles cuentan doble en el grado, la identidad  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2a$  se mantiene. En particular, un vértice con un único bucle tiene grado 2 y no contribuye a  $v_1$ ; por eso la expansión por clases de grado es

$$2a = 1v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots,$$

sin un factor adicional en  $v_1$ .

Sea  $v_i$  el número de vértices de grado  $i$  en  $G$ . Contando los vértices según sus grados, obtenemos:

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

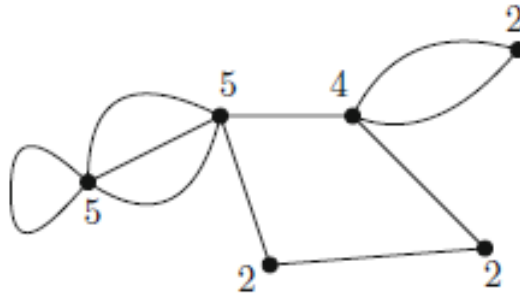


Figura 3.5.5: Grados de los vértices:  $v_2 = 3$ ,  $v_3 = 0$ ,  $v_4 = 1$ ,  $v_5 = 2$ .

**Definición 3.5.4.** Una  $k$ -cara es una cara limitada por  $k$  aristas (una arista que bordea la misma región por ambos lados se cuenta dos veces).

Sea  $c_k$  el número de  $k$ -caras. Entonces

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots \quad (3.3)$$

y, contando incidencias arista-cara,

$$2a = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + \dots \quad (3.4)$$

El número medio de lados de las caras es  $\bar{f} = \frac{2a}{c}$ .

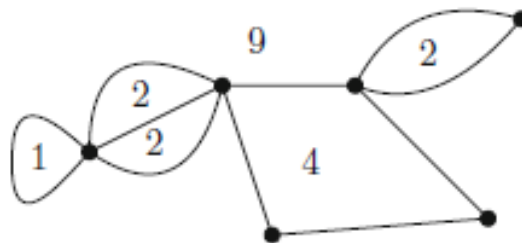


Figura 3.5.6: Conteo de  $k$ -caras.

Con esto y la fórmula de Euler se deduce que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planos. En el caso de  $K_5$ , tenemos:

$$v = 5, \quad a = \binom{5}{2} = 10, \quad c = a - v + 2 = 7, \quad \bar{f} = \frac{2a}{c} = \frac{20}{7} < 3,$$

lo cual forzaría una cara con a lo sumo dos lados (imposible en un grafo simple). De forma similar, para  $K_{3,3}$ :

$$v = 6, \quad a = 9, \quad c = 5, \quad \bar{f} = \frac{18}{5} < 4,$$

pero en un grafo bipartito simple toda cara tiene longitud al menos 4.

**Observación:** La no planaridad de  $K_5$  también se deduce directamente de la Proposición 3.5.7, pues  $a = 10$  y  $v = 5$  violan la condición  $a \leq 3v - 6 = 9$ .

En el caso de  $K_{3,3}$ , aunque satisface dicha cota ( $a = 9 \leq 12$ ), existe una versión refinada para grafos bipartitos planos: todo grafo bipartito plano con  $v \geq 3$  cumple

$$a \leq 2v - 4.$$

Aplicando esta condición, para  $K_{3,3}$  obtenemos  $a = 9$ , mientras que  $2v - 4 = 8$ ; esto contradice la desigualdad y confirma que  $K_{3,3}$  no es plano.

**Proposición 3.5.5.** *Sea  $G$  un grafo bipartito plano simple con  $v \geq 3$  vértices,  $a$  aristas y  $c$  caras. Entonces*

$$a \leq 2v - 4.$$

**Demostración.** Podemos suponer  $G$  conexo (si no lo es, aplicamos el argumento a cada componente y sumamos). En un grafo bipartito no existen ciclos impares, luego *toda* cara tiene longitud al menos 4. Sumando longitudes de caras y contando cada arista por ambos lados, se obtiene

$$2a = \sum_{f \in F(G)} \text{long}(f) \geq 4c \quad \Rightarrow \quad c \leq \frac{a}{2}.$$

Aplicando la fórmula de Euler  $v - a + c = 2$  y sustituyendo la cota de  $c$ ,

$$2 = v - a + c \leq v - a + \frac{a}{2} = v - \frac{a}{2},$$

de donde  $\frac{a}{2} \leq v - 2$ , es decir,  $a \leq 2v - 4$ . □

**Corolario 3.5.6.** *El grafo  $K_{3,3}$  no es plano.*

**Demostración.** Como  $K_{3,3}$  es bipartito y simple con  $v = 6$  y  $a = 9$ , la Proposición 3.5.5 impone  $a \leq 2v - 4 = 8$ , contradicción. Por tanto,  $K_{3,3}$  no es plano. □

Las identidades (3.3)–(3.4) para  $c_k$  son duales de (3.1)–(3.2) para  $v_i$  mediante el paso al grafo dual  $G \mapsto G^*$ .

**Proposición 3.5.7.** Sea  $G$  un grafo plano simple con  $v > 2$  vértices. Entonces:

1.  $a \leq 3v - 6$ .
2.  $G$  tiene un vértice de grado a lo sumo 5.
3. Si las aristas de  $G$  son bicolores, existe un vértice con a lo sumo dos cambios de color en el orden cíclico de sus aristas incidentes.
4. Si  $G$  no contiene ciclos de longitud 3, entonces  $a \leq 2v - 4$ .

**Demostración.** Podemos suponer  $G$  conexo.

1. Como  $G$  es simple, toda cara tiene al menos 3 lados; de (3.3) y (3.4):

$$2a \geq 3c \quad \Rightarrow \quad 3v - 6 = 3(a - c) \geq a.$$

2. Del punto (1),  $\bar{d} = \frac{2a}{v} \leq 6 - \frac{12}{v} < 6$ ; luego algún vértice tiene grado  $\leq 5$ .
3. Sea  $e$  el número total de esquinas con cambio de color. Si cada vértice tuviera al menos cuatro cambios, entonces  $e \geq 4v$ . Cada cara de  $2k$  o  $2k + 1$  lados tiene a lo sumo  $2k$  cambios, y

$$e \leq 2c_3 + 4c_4 + 4c_5 + 6c_6 + \cdots \leq 4a - 4c,$$

usando (3.3)–(3.4). Así  $4v \leq 4a - 4c$ , i.e.,  $a \geq v + c$ , que contradice  $v - a + c = 2$ .

4. Si  $G$  no tiene ciclos de longitud 3, cada cara tiene al menos 4 lados. Entonces

$$2a \geq 4c \quad \Rightarrow \quad c \leq \frac{a}{2}.$$

De la fórmula de Euler  $v - a + c = 2$  resulta

$$2 = v - a + c \leq v - a + \frac{a}{2} = v - \frac{a}{2},$$

es decir,  $a \leq 2v - 4$ .

□



Figura 3.5.7: Esquinas con cambios de color (señaladas con flechas).

### 3.6. Aplicación a subdivisiones poligonales

Una de las aplicaciones más inmediatas y útiles del Teorema de Euler se encuentra en el estudio de subdivisiones poligonales. Subdividir un polígono consiste en descomponerlo en piezas más simples (generalmente en triángulos), de manera que dichas piezas cubran completamente el polígono sin solaparse.

Al considerar una subdivisión poligonal como un grafo plano, donde los vértices corresponden a los puntos de la subdivisión, las aristas a los segmentos que las delimitan y las caras a los polígonos resultantes, se obtiene que estos elementos satisfacen la relación de Euler:

$$v - a + c = 2,$$

en el caso de un polígono simple conectado en el plano. De este modo, la fórmula de Euler no solo describe propiedades generales de los grafos planos, sino que también se cumple en este contexto geométrico.

**Ejemplo 3.6.1.** Consideremos un cuadrado y añadamos una diagonal que lo subdivide en dos triángulos. El grafo asociado tiene:

- $v = 4$  vértices (los del cuadrado),
- $a = 5$  aristas (los cuatro lados más la diagonal),
- $c = 3$  caras (los dos triángulos interiores y la cara exterior).

Aplicando la fórmula de Euler:

$$v - a + c = 4 - 5 + 3 = 2,$$

que coincide con el valor esperado para grafos planos conexos.

Este ejemplo muestra cómo el Teorema de Euler se mantiene válido en subdivisiones simples y constituye el punto de partida para estudiar triangulaciones de polígonos, que desarrollaremos en el siguiente capítulo.

### 3.7. La fórmula poliédrica de Euler

La relación de Euler no solo es válida para grafos planos y para triangulaciones de polígonos, sino que tiene su origen histórico en el estudio de los poliedros. Leonhard Euler, en 1750, descubrió que para cualquier poliedro convexo se cumple la sorprendente identidad

$$V - E + F = 2,$$

donde  $V$  es el número de vértices,  $E$  el número de aristas y  $F$  el número de caras.

Este resultado constituye uno de los primeros ejemplos de lo que hoy se denomina un *invariante topológico*, es decir, una propiedad que se mantiene inalterada a pesar de las transformaciones geométricas que pueda sufrir el objeto.

### 3.7.1. Ejemplos clásicos

Verifiquemos la fórmula en algunos poliedros sencillos:

- **Tetraedro:** tiene  $V = 4$ ,  $E = 6$ ,  $F = 4$ . Se cumple

$$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2.$$

- **Cubo:** tiene  $V = 8$ ,  $E = 12$ ,  $F = 6$ . Se cumple

$$8 - 12 + 6 = 2.$$

- **Octaedro:** tiene  $V = 6$ ,  $E = 12$ ,  $F = 8$ , y de nuevo

$$6 - 12 + 8 = 2.$$

En todos los casos, la fórmula de Euler se verifica, ilustrando la universalidad del resultado.

### 3.7.2. Generalización topológica

El resultado de Euler no se limita a poliedros convexos. Si permitimos poliedros con “agujeros” o con superficies más complejas, la relación se adapta de la siguiente manera:

$$V - E + F = 2 - 2g,$$

donde  $g$  es el *género* de la superficie (el número de “agujeros”). Por ejemplo, para un toro ( $g = 1$ ), la identidad se convierte en

$$V - E + F = 0.$$

### 3.7.3. Conexión con las triangulaciones

La importancia de esta fórmula en nuestro contexto radica en que se aplica directamente a los grafos planos que surgen al triangular un polígono. Cada triangulación puede verse como un grafo representado en el plano, y la fórmula de Euler asegura que el número de triángulos y diagonales de cualquier triangulación de un polígono depende únicamente del número de vértices del polígono, y no de la triangulación elegida.

De esta manera, la fórmula de Euler constituye el vínculo entre la combinatoria de los polígonos, la teoría de grafos planos y resultados como el Teorema de Pick, que se apoya en descomposiciones triangulares para establecer una relación exacta entre área, puntos interiores y puntos de la frontera.

# Capítulo 4

## Triangulaciones de polígonos

En esta sección estudiaremos las triangulaciones de polígonos, una herramienta fundamental en geometría discreta y en teoría de grafos. Una triangulación consiste, de manera intuitiva, en dividir un polígono en triángulos mediante diagonales que no se cruzan.

Este proceso, aunque sencillo en apariencia, tiene múltiples aplicaciones: desde la demostración de propiedades combinatorias y geométricas hasta problemas clásicos como el teorema de la galería de arte.

El estudio de las triangulaciones no solo nos permitirá comprender mejor la estructura interna de los polígonos, sino que también establecerá conexiones directas con el Teorema de Euler y con los grafos planos. Además, será una herramienta clave en la demostración del Teorema de Pick, ya que este se apoya en la posibilidad de triangular polígonos en la red entera.

En esta sección, denotaremos por  $n$  el número de vértices de un polígono simple, para evitar confusión con la notación  $v$  empleada en el Teorema de Euler, donde  $v$  representaba el número de vértices de un grafo.

**Observación 4.0.1.** En geometría computacional, las triangulaciones de polígonos desempeñan un papel similar al de las factorizaciones en teoría de números: constituyen una descomposición básica y estructurada de un objeto geométrico en partes elementales. Frente a otras particiones más flexibles, como las disecciones, las triangulaciones son altamente restringidas, lo que las convierte en una herramienta central para el estudio de polígonos en geometría discreta.

Los bloques fundamentales de esta teoría son el *punto* y el *segmento*, que permiten construir estructuras más complejas como los polígonos (en dos dimensiones) y los poliedros (en tres dimensiones). En este contexto, un polígono puede entenderse como la región cerrada del plano delimitada por una curva poligonal simple, cuyos lados se denominan *aristas* y cuyos extremos son los *vértices*.

### 4.1. Polígonos y la curva de Jordan poligonal

Antes de estudiar las triangulaciones, conviene precisar qué entendemos por polígono. No toda figura formada por segmentos consecutivos es realmente un polígono: por ejemplo, aquellas que se autointersectan o que presentan huecos en su interior.

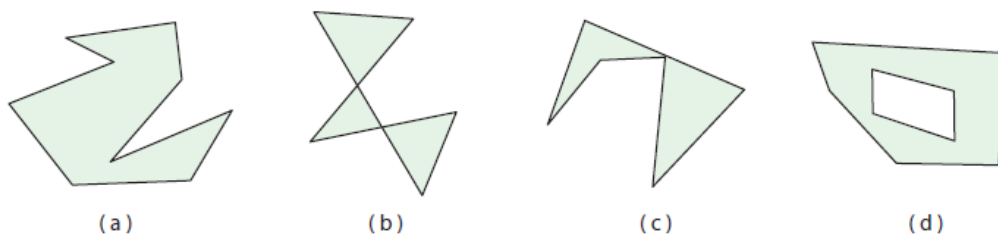


Figura 4.1.1: (a) Un polígono. (b)–(d) Objetos que no son polígonos.

El conjunto de vértices y aristas de un polígono  $P$  constituye su *frontera*, que denotaremos por  $\partial P$ . Un resultado fundamental en este contexto es la *curva de Jordan poligonal*, que puede verse como una versión discreta del Teorema clásico de Jordan.

**Teorema 4.1.1. (Curva de Jordan poligonal)** *La frontera  $\partial P$  de un polígono  $P$  particiona el plano en dos regiones: el interior acotado y el exterior no acotado.*

**Demostración. (Esquema de la demostración)** Sea  $P$  un polígono en el plano y considérese un rayo en una dirección fija que no sea paralela a ninguna de sus aristas. Dado un punto  $x$  que no pertenece a  $\partial P$ , se tienen dos posibilidades:

1. El rayo desde  $x$  corta a  $\partial P$  un número par de veces: en ese caso,  $x$  está en el exterior.
2. El rayo desde  $x$  corta a  $\partial P$  un número impar de veces: entonces  $x$  pertenece al interior.

Este criterio de paridad muestra que el plano se descompone en exactamente dos regiones, una acotada y otra no acotada. Para una demostración completa puede consultarse (Munkres, 2000).  $\square$

Esto asegura que el plano queda particionado en dos regiones disjuntas, delimitadas por la frontera  $\partial P$ .

## 4.2. Qué es una triangulación

**Definición 4.2.1.** Sea  $P$  un polígono simple. Una *triangulación* de  $P$  es un conjunto  $\mathcal{T}$  de triángulos contenidos en  $P$  tal que:

1. La unión de todos los triángulos de  $\mathcal{T}$  coincide con  $P$ .
2. Dos triángulos cualesquiera de  $\mathcal{T}$  o bien son disjuntos, o bien comparten exactamente un vértice, o bien comparten exactamente una arista.
3. Cada arista de un triángulo de  $\mathcal{T}$  es un lado de  $P$  o una diagonal interior de  $P$ .

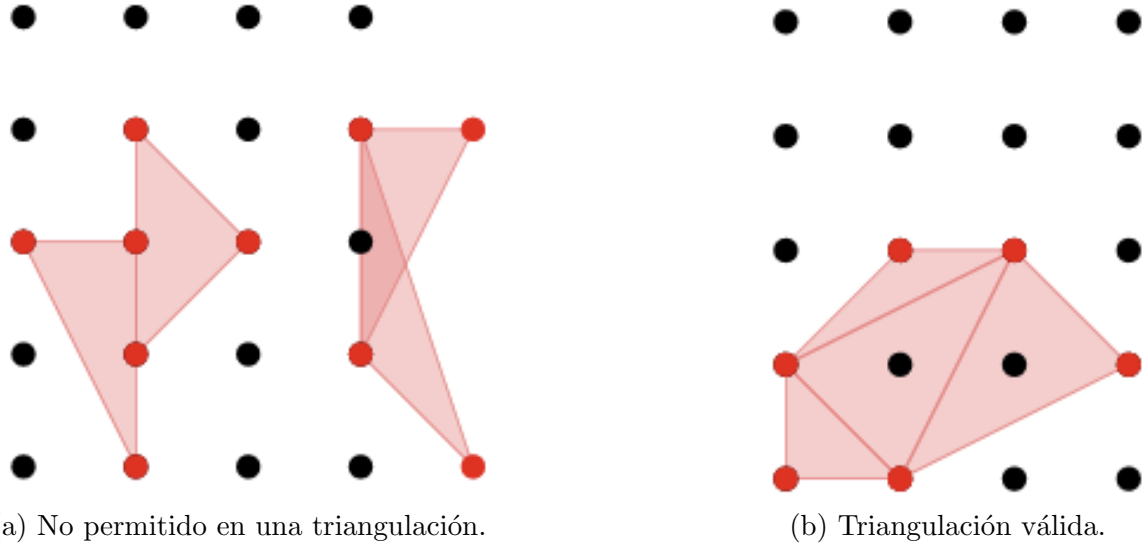


Figura 4.2.1: Ejemplos de configuraciones en triangulaciones de polígonos.

### 4.3. Diagonales y triangulaciones

Dado un polígono simple  $P$ , llamamos *diagonal* a cualquier segmento que une dos vértices no consecutivos de  $P$  y cuyo interior está contenido en  $P$ . Una triangulación de  $P$  consiste en elegir un conjunto de diagonales que no se crucen entre sí, de modo que subdividan el polígono en triángulos.

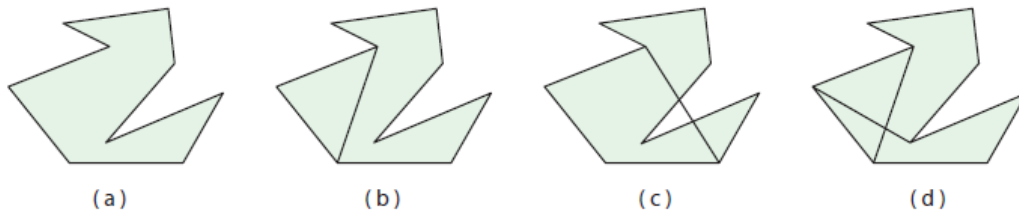


Figura 4.3.1: (a) Un polígono. (b) Un polígono con una diagonal. (c) Un segmento que no es una diagonal. (d) Dos diagonales que se cruzan.

La Figura 4.3.1 muestra ejemplos de segmentos que sí son diagonales y de otros que no lo son. En particular, para que un segmento sea diagonal debe cumplir dos condiciones: (i) unir vértices no consecutivos y (ii) quedar contenido en el interior del polígono. Además, en una triangulación las diagonales elegidas no pueden cruzarse.

Un hecho fundamental es que un mismo polígono puede admitir varias triangulaciones distintas. En la Figura 4.3.2 se muestra un ejemplo: un mismo polígono simple admite tres triangulaciones diferentes, obtenidas al elegir distintas combinaciones de diagonales.

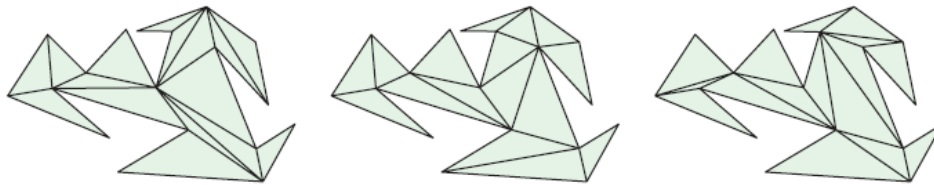


Figura 4.3.2: Un polígono y tres posibles triangulaciones del mismo.

La no unicidad de la triangulación plantea la pregunta de si siempre es posible encontrar al menos una triangulación para cualquier polígono simple. Este hecho se confirma en el Teorema de existencia de triangulaciones (Sección 4.6), que garantiza que todo polígono simple admite una triangulación formada por  $n - 2$  triángulos.

## 4.4. Triangulaciones de conjuntos de puntos

Hasta ahora hemos trabajado con la triangulación de polígonos simples. Sin embargo, la noción de triangulación puede extenderse de manera natural a un conjunto finito de puntos en el plano.

**Definición 4.4.1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto finito de puntos. Una *triangulación de  $S$*  es un complejo simplicial  $\mathcal{T}$  tal que:

- Los vértices de  $\mathcal{T}$  son exactamente los puntos de  $S$ .
- La unión de todos los símlices en  $\mathcal{T}$  es el casco convexo de  $S$ , es decir,

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma = \text{conv}(S).$$

**Observación 4.4.2.** El término *maximal* en la definición anterior indica que no es posible añadir ninguna otra arista a la triangulación sin que se crucen con las ya existentes. De este modo, toda triangulación es una partición completa del casco convexo de  $S$  en triángulos.

La definición anterior garantiza que toda triangulación descompone de manera completa el casco convexo de  $S$  en triángulos elementales, sin dejar huecos ni superposiciones.

**Ejemplo 4.4.3. Construcción lexicográfica.** Sea  $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto de  $n$  puntos. Ordenamos los puntos de manera *lexicográfica* (por coordenada  $x$ , y en caso de empate, por coordenada  $y$ ).

La construcción incremental comienza con  $\mathcal{T}_1 = \{v_1\}$ . Cada paso añade un nuevo punto  $v_i$ , y se actualiza la triangulación con los nuevos triángulos formados con  $v_i$  y los símlices visibles desde él. De este modo, se obtiene finalmente una triangulación  $\mathcal{T}_n$  de  $S$ .



Figura 4.4.1: Construcción incremental de una triangulación lexicográfica.

## 4.5. La triangulación de Delaunay

Entre todas las posibles triangulaciones de un conjunto de puntos, existe una de especial interés: la *triangulación de Delaunay*, introducida por Boris Delaunay en 1934 (Delaunay, 1934).

**Definición 4.5.1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto finito de puntos. Un triángulo con vértices en  $S$  es un *triángulo de Delaunay* si su circunferencia circunscrita es *vacía*, es decir, si ningún otro punto de  $S$  pertenece a su interior.

Una *triangulación de Delaunay* de  $S$ , denotada  $\text{Del}(S)$ , es una triangulación de  $S$  en la que todos sus triángulos son de Delaunay.

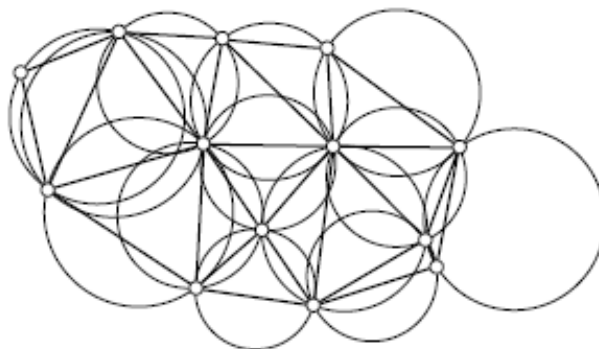


Figura 4.5.1: En una triangulación de Delaunay, la circunferencia circunscrita de cada triángulo no contiene ningún otro punto del conjunto.

**Observación 4.5.2.** La triangulación de Delaunay, aunque no se emplea en la demostración del Teorema de Pick, es un ejemplo destacado en geometría discreta. Se caracteriza por optimizar propiedades geométricas, como maximizar el ángulo mínimo de los triángulos, y muestra la riqueza del concepto de triangulación.

**Observación 4.5.3.** En geometría computacional se utilizan habitualmente las *triangulaciones de Delaunay restringidas* (*Constrained Delaunay Triangulations, CDT*), que aseguran que los lados del polígono original aparezcan en la triangulación. Aunque no todas las aristas cumplen la propiedad estricta de Delaunay, el CDT conserva varias de sus características de optimalidad. Esta idea es análoga al hecho, demostrado en la Sección 4.6, de que todo polígono simple puede ser triangulado usando únicamente sus vértices.

En lo que sigue volveremos a centrarnos en polígonos simples del retículo, ya que son los objetos fundamentales para el Teorema de Pick.

## 4.6. Existencia de triangulaciones en polígonos simples

**Lema 4.6.1.** *Todo polígono simple  $P$  se puede triangular (descomponer en triángulos) mediante diagonales que no se cortan y que son interiores al polígono.*

**Demostración.** La demostración se hace por inducción sobre  $n$ , el número de lados del polígono. Si  $n = 3$ , el resultado es inmediato. Supongamos cierto el lema para todo polígono con menos de  $n$  lados, con  $n > 3$ .

Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  lados. Trazamos una recta  $r$  que no corte a  $P$ , de modo que todo el polígono quede en uno de los semiplanos que define. Desplazamos  $r$  hasta que intersecte a  $P$ . Si la intersección es más de un vértice, giramos ligeramente  $r$  para garantizar que intersecte exactamente en un vértice  $A$ .

Sean  $B$  y  $C$  los vértices adyacentes a  $A$ . El ángulo  $\angle BAC < \pi$ , y consideramos el triángulo  $\triangle BCA$ .

1. Si ningún otro vértice de  $P$  está en el interior de  $\triangle BCA$  ni sobre la diagonal  $BC$ , entonces  $BC$  es una diagonal válida que divide  $P$  en dos polígonos con menos de  $n$  vértices.
2. Si hay un vértice sobre la diagonal  $BC$ , sea  $D$  el más cercano a  $B$ . Entonces la diagonal  $BD$  divide  $P$  en dos polígonos con menos de  $n$  vértices.
3. Si existen vértices en el interior de  $\triangle BCA$ , se elige uno de ellos  $D$  y se traza la diagonal  $AD$ , que divide  $P$  en dos polígonos con menos de  $n$  vértices.

En cualquiera de los tres casos, hemos reducido el problema a polígonos más pequeños, y por hipótesis de inducción, todos son triangulables. Esto concluye la prueba.  $\square$

**Proposición 4.6.2. (Existe una diagonal interior)** *Todo polígono simple  $P$  con  $n \geq 4$  vértices admite al menos una diagonal cuyo interior está contenido en  $P$ .*

**Demostración.** Todo polígono simple tiene al menos tres vértices convexos. Sea  $A$  uno de ellos y  $B, C$  sus vecinos en el contorno. Si el segmento  $BC$  está contenido en  $P$ , entonces  $BC$  es una diagonal interior. En caso contrario, el triángulo  $ABC$  contiene algún vértice  $Z$  de  $P$  en su interior; el segmento  $AZ$  está completamente contenido en  $P$  y es una diagonal interior.  $\square$

**Teorema 4.6.3. (Existencia de triangulaciones)** *Todo polígono simple  $P$  con  $n \geq 3$  vértices admite una triangulación; es decir, puede dividirse en  $n - 2$  triángulos con interiores disjuntos cuya unión es  $P$ .*

**Demostración.** Por inducción en  $n$ . Si  $n = 3$ ,  $P$  ya es un triángulo.

Supongamos  $n \geq 4$  y que todo polígono simple con menos de  $n$  vértices es triangulable. Por la proposición anterior,  $P$  posee una diagonal interior que lo separa en dos polígonos simples  $P_1$  y  $P_2$  con menos vértices.

Por hipótesis de inducción,  $P_1$  y  $P_2$  se triangulan; la unión de ambas triangulaciones (junto con la diagonal común) provee una triangulación de  $P$ . El número de triángulos es  $(|V(P_1)| - 2) + (|V(P_2)| - 2) = n - 2$ .  $\square$

**Observación 4.6.4.** Además de la demostración inductiva presentada, en la literatura de geometría computacional existen otros enfoques para probar la existencia de triangulaciones en polígonos simples.

Uno de los más conocidos es el *método de barrido*, que consiste en localizar un vértice extremo del polígono y, mediante el desplazamiento de una recta, garantizar la existencia de una diagonal interior. Este procedimiento proporciona un argumento constructivo que permite encontrar explícitamente la diagonal.

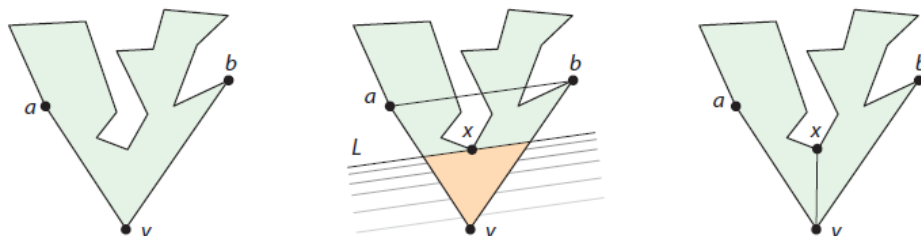


Figura 4.6.1: Método de barrido para localizar una diagonal en un polígono.

El barrido muestran que todo polígono simple puede descomponerse en triángulos mediante diagonales interiores.

**Proposición 4.6.5. (Triangulación usando todos los puntos reticulares)** Sea  $Q$  un polígono simple cuyos lados pasan por puntos del retículo  $\mathbb{Z}^2$ . Sea  $S$  el conjunto finito formado por todos los puntos reticulares de la frontera de  $Q$  y todos los puntos reticulares estrictamente interiores a  $Q$ . Entonces existe una triangulación de  $Q$  cuyo conjunto de vértices es exactamente  $S$ .

**Demostración.** Primero, subdividimos cada lado de  $Q$  en los puntos reticulares que contenga; tras esta partición, todos los puntos reticulares de la frontera pasan a ser vértices del contorno. Procedemos por inducción en  $k = |S \cap \mathring{Q}|$ , el número de puntos reticulares interiores.

Si  $k = 0$ , el resultado es el teorema anterior (triangulación del polígono sin puntos interiores). Supongamos  $k \geq 1$  y tomemos  $p \in S \cap \mathring{Q}$ . Considérese el *polígono de visibilidad* de  $p$  respecto a  $Q$ : como  $Q$  es simple, existe al menos un vértice  $v$  del contorno visible desde  $p$  (el segmento  $pv$  está contenido en  $Q$ ).

El segmento  $pv$  no corta al contorno salvo en  $v$ , así que dividir  $Q$  mediante  $pv$  produce uno o dos polígonos simples  $Q_1, Q_2$  cuyos conjuntos de puntos reticulares interiores suman  $k - 1$ .

Por hipótesis de inducción, cada  $Q_i$  admite una triangulación cuyos vértices son exactamente sus puntos reticulares (incluyendo  $p$ ). La unión de estas triangulaciones es una triangulación de  $Q$  con vértices  $S$ .  $\square$

**Observación 4.6.6.** La idea de elegir una diagonal interior y proceder por inducción es la misma que subyace en las demostraciones clásicas del *problema de la galería de arte*; allí se usa para obtener una 3-coloración de cualquier triangulación y cotas del número de vigilantes.

## 4.7. El teorema de la galería de arte

Un resultado clásico que utiliza triangulaciones es el *teorema de la galería de arte*, planteado por Victor Klee en 1973. El problema surge de la siguiente pregunta: si

el plano de una galería de arte se representa mediante un polígono simple  $P$  con  $n$  vértices, ¿cuál es el número mínimo de vigilantes necesarios para cubrir toda la galería, suponiendo que cada vigilante tiene un campo de visión de  $360^\circ$ ?

Este problema, que en principio parece práctico, se resuelve con una idea elegante basada en las triangulaciones. La demostración parte de dos hechos:

1. Todo polígono simple admite una triangulación (véase Sección 4.6).
2. El grafo de una triangulación de un polígono (un grafo *outerplanar maximal*) es 3-colorable: sus vértices pueden colorearse con tres colores de modo que vértices adyacentes reciban colores distintos.

Aplicando una 3-coloración a los vértices de la triangulación, se obtiene que los  $n$  vértices del polígono quedan repartidos en tres clases de colores. Por el principio del palomar, una de esas clases tiene como máximo  $\lfloor n/3 \rfloor$  vértices. Colocando vigilantes únicamente en esos vértices, cada triángulo de la triangulación tiene garantizado un vigilante en uno de sus vértices, lo que asegura que todo el polígono queda cubierto.

**Definición 4.7.1.** Sea  $P$  un polígono simple con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  en orden cíclico. Tres vértices consecutivos  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  forman una *oreja* de  $P$  si:

1. El segmento  $v_{i-1}v_{i+1}$  es una diagonal de  $P$ , es decir, está contenido en el interior de  $P$ .
2. El triángulo  $\triangle(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$  no contiene en su interior a ningún otro vértice de  $P$ .

En este caso, al vértice  $v_i$  se le denomina *punta de la oreja*.

**Lema 4.7.2.** *Todo polígono simple con más de tres vértices posee al menos una diagonal interior.*

**Demostración.** Sea  $v$  el vértice más bajo de  $P$  (si hay varios, tomemos el más a la derecha). Sean  $a$  y  $b$  los vértices adyacentes a  $v$ .

Si el segmento  $\overline{ab}$  está completamente contenido en  $P$ , entonces es una diagonal interior y hemos terminado.

En caso contrario, el triángulo  $\triangle avb$  contiene al menos un vértice adicional de  $P$  en su interior. Consideremos la recta paralela a  $\overline{ab}$  que pasa por  $v$ , y desplazémosla hacia arriba. Sea  $x$  el primer vértice de  $P$  que encontramos durante este barrido dentro de  $\triangle avb$ .

El segmento  $\overline{vx}$  no cruza ningún otro lado de  $P$ , salvo en sus extremos, por lo que constituye una diagonal interior de  $P$ .  $\square$

**Teorema 4.7.3. (Teorema de las orejas)** *Sea  $P$  un polígono simple con  $n \geq 4$  vértices. Entonces  $P$  tiene al menos dos orejas.*

**Demostración.** Procedemos por inducción sobre el número de vértices  $n$  de  $P$ .

Si  $n = 4$ , el polígono es un cuadrilátero simple. En este caso, siempre existen dos vértices consecutivos que forman orejas, ya que las diagonales de un cuadrilátero lo dividen en dos triángulos, y cada uno de ellos corresponde a una oreja.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo polígono simple con menos de  $n$  vértices, y consideremos un polígono simple  $P$  con  $n > 4$ . Por el Lema 4.7.2,  $P$  admite al menos una diagonal interior  $d$  que divide a  $P$  en dos polígonos simples  $P_1$  y  $P_2$ , ambos con menos de  $n$  vértices.

Aplicando la hipótesis de inducción, cada  $P_i$  posee al menos dos orejas. Al menos una de las orejas de  $P_1$  o  $P_2$  no está en la diagonal  $d$ , y por lo tanto también constituye una oreja de  $P$ . De manera análoga, obtenemos una segunda oreja para  $P$ .

En consecuencia, todo polígono simple con  $n$  vértices tiene al menos dos orejas.  $\square$

**Teorema 4.7.4. (Teorema de la galería de arte)** *Todo polígono simple con  $n$  vértices puede ser vigilado por  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardias.*

**Demostración.** Ya vimos en la figura correspondiente que  $\lfloor n/3 \rfloor$  vigilantes pueden ser necesarios. Ahora debemos mostrar que este número también es suficiente.

Considérese una triangulación de un polígono  $P$ . Usaremos inducción para probar que a cada vértice de  $P$  se le puede asignar uno de tres colores (es decir, que la triangulación es 3-coloreable), de modo que cualesquiera dos vértices unidos por un lado de  $P$  o por una diagonal de la triangulación reciben colores distintos. Esto es ciertamente verdadero para un triángulo. Para  $n > 3$ , por el Teorema de las orejas,  $P$  tiene una oreja  $abc$ , siendo  $b$  la punta de la oreja. Eliminar la oreja produce un polígono  $P'$  con  $n - 1$  vértices, donde  $b$  ha sido suprimido. Por la hipótesis de inducción, los vértices de  $P'$  pueden colorearse con tres colores. Al reponer la oreja, colorear  $b$  con el color no usado por  $a$  o  $c$  proporciona un coloreado para  $P$ .

Puesto que hay  $n$  vértices, por el principio del palomar, el color usado con menor frecuencia aparece en, como mucho,  $\lfloor n/3 \rfloor$  vértices. Coloquemos vigilantes en esos vértices. Como cada triángulo tiene un vértice de este color, y ese vigilante cubre el triángulo, el “museo” queda completamente vigilado.  $\square$

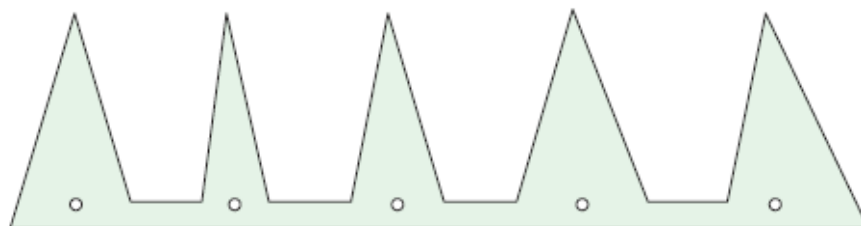


Figura 4.7.1: Ejemplo de polígono en forma de peine con  $n = 15$  vértices.

**Ejemplo 4.7.5.** En la Figura 4.7.1, cada diente del peine requiere su propio guardia, de modo que son necesarios al menos  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardias. Este ejemplo muestra que la cota del teorema de la galería de arte es, en general, óptima.

**Observación 4.7.6.** El teorema de la galería de arte ilustra cómo las triangulaciones permiten resolver problemas combinatorios y de optimización en geometría discreta. Aunque no tiene relación directa con el Teorema de Pick, ambos resultados comparten la misma idea fundamental: dividir un polígono en triángulos para extraer propiedades globales a partir de su estructura local.

Cabe señalar que existe una demostración especialmente elegante del teorema de la galería de arte, debida a Steve Fisk (1978) (Fisk, 1978), que utiliza la 3-coloración de una triangulación y un razonamiento inductivo.

## 4.8. Propiedades combinatorias de las triangulaciones

Un hecho fundamental es que, aunque un polígono admita distintas triangulaciones posibles, el número total de triángulos y de diagonales es siempre el mismo.

**Teorema 4.8.1.** *Sea  $P$  un polígono simple con  $n$  vértices. Entonces, cualquier triangulación de  $P$  contiene exactamente  $n - 2$  triángulos y  $n - 3$  diagonales.*

**Demostración.** Procedemos por inducción sobre  $n$ , el número de vértices del polígono  $P$ .

Si  $n = 3$ ,  $P$  es un triángulo y la afirmación es inmediata: tiene  $1 = n - 2$  triángulos y  $0 = n - 3$  diagonales.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo polígono con menos de  $n$  vértices, y consideremos un polígono  $P$  con  $n > 3$ . Por el Lema 4.7.2,  $P$  admite al menos una diagonal interior  $d$  que lo divide en dos polígonos  $P_1$  y  $P_2$  con  $n_1$  y  $n_2$  vértices respectivamente, donde  $n_1 + n_2 = n + 2$  (la diagonal se cuenta en ambos).

Por hipótesis de inducción,  $P_1$  se triangula en  $n_1 - 2$  triángulos y tiene  $n_1 - 3$  diagonales, y lo mismo para  $P_2$ . Sumando ambas triangulaciones y restando la diagonal  $d$  que se ha contado dos veces, el número total de triángulos y diagonales de  $P$  es:

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = n - 2,$$

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = (n_1 + n_2) - 5 = n - 3.$$

Por tanto, toda triangulación de  $P$  contiene exactamente  $n - 2$  triángulos y  $n - 3$  diagonales.  $\square$

**Ejemplo 4.8.2.** El número de triangulaciones distintas que admite un polígono depende de su forma. En la Figura 4.8.1 se muestran algunos ejemplos:

- El hexágono convexo (b) admite varias triangulaciones distintas.
- El polígono estrellado (c) y el polígono no convexo (d) también pueden triangularse de formas diferentes.
- En contraste, ciertos polígonos (como algunos del tipo (a)) poseen una única triangulación posible.

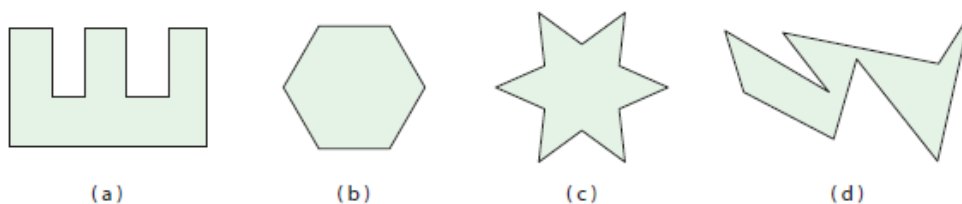


Figura 4.8.1: Los polígonos del ejemplo.

### 4.8.1. Número de triangulaciones y números de Catalan

La fórmula de Euler garantiza que toda triangulación de un polígono convexo con  $n$  vértices contiene exactamente  $n - 2$  triángulos y  $n - 3$  diagonales. Una cuestión diferente, de carácter combinatorio, es determinar cuántas triangulaciones distintas existen para un mismo polígono.

En el caso de los polígonos convexos, el número total de triangulaciones posibles está dado por los números de Catalan:

$$C_{n-2} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}.$$

Por ejemplo, un hexágono convexo ( $n = 6$ ) tiene  $C_4 = 14$  triangulaciones distintas, y un octógono convexo ( $n = 8$ ) tiene  $C_6 = 132$  triangulaciones distintas.

La conexión con la fórmula de Euler es inmediata: aunque la elección de las diagonales puede variar, toda triangulación resultante debe satisfacer las condiciones estructurales impuestas por Euler y producir el mismo número de triángulos y diagonales.

**Ejemplo 4.8.3.** (a) Polígono con una única triangulación.

(b)–(c) Polígonos no convexos con dos triangulaciones.

(d) Polígono no convexo con triangulación única a pesar de tener varios vértices reflejos.

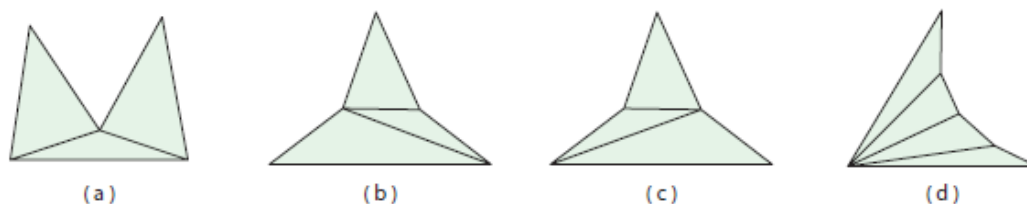


Figura 4.8.2: Ejemplos de polígonos con diferentes números de triangulaciones.

## 4.9. Relación con grafos y con Euler

Las triangulaciones de polígonos están profundamente relacionadas con la teoría de grafos. Una triangulación puede verse como un grafo plano maximal (outerplanar maximal), donde los vértices corresponden a los del polígono y las aristas a los lados y diagonales empleadas.

La *fórmula de Euler* para grafos planos conexos establece que, si  $v$ ,  $e$  y  $c$  denotan respectivamente el número de vértices, aristas y caras de un grafo plano conexo, entonces

$$v - e + c = 2.$$

Aplicada a una triangulación de un polígono simple con  $n$  vértices, la fórmula de Euler permite deducir las propiedades combinatorias fundamentales vistas en las secciones anteriores, como que toda triangulación contiene exactamente  $n - 2$  triángulos y  $n - 3$  diagonales.

Esta conexión entre geometría discreta y teoría de grafos será clave en el Capítulo 5, donde veremos cómo el Teorema de Pick se deriva como una consecuencia natural de la fórmula de Euler.

**Demostración.** Por el Teorema de Euler para grafos planos conexos se cumple

$$v - e + c = 2,$$

donde  $v = n$  es el número de vértices,  $e$  el número de aristas, y  $c$  el número de caras (incluida la exterior).

En una triangulación, todas las caras interiores son triángulos. Sea  $t$  el número de triángulos y recordemos que la cara exterior tiene  $h$  aristas. Por tanto,

$$c = t + 1.$$

Cada arista está en la frontera de una o dos caras:

- las  $h$  aristas de la envolvente convexa cuentan una vez,
- las demás  $e - h$  aristas se cuentan dos veces.

Así, al contar arista-cara:

$$3t + h = 2e.$$

De la fórmula de Euler tenemos:

$$n - e + (t + 1) = 2 \Rightarrow n - e + t = 1.$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} n - e + t = 1, \\ 3t + h = 2e, \end{cases}$$

se obtiene

$$t = 2n - 2 - h, \quad e = 3n - 3 - h,$$

como queríamos demostrar. □

## Conclusión

Las triangulaciones constituyen una herramienta esencial para comprender la estructura interna de los polígonos y para conectar la geometría con la combinatoria. A lo largo de este capítulo hemos visto cómo las triangulaciones permiten demostrar resultados clásicos como el teorema de la galería de arte, caracterizar propiedades combinatorias invariantes y establecer un puente con la teoría de grafos planos a través de la fórmula de Euler.

En el siguiente capítulo aplicaremos estas ideas directamente al estudio del *Teorema de Pick*, que ofrece una sorprendente fórmula para calcular el área de polígonos reticulares a partir del simple recuento de puntos del retículo contenidos en su interior y en su frontera.

# Capítulo 5

## El teorema de Pick

El teorema de Pick, formulado en 1899, constituye una consecuencia “clásica” de la fórmula de Euler para grafos planos y proporciona una sorprendente conexión entre la geometría discreta y la combinatoria. En particular, ofrece una manera directa y elegante de calcular el área de ciertos polígonos a partir de un simple recuento de puntos de el retículo entero.

**Observación 5.0.1. Fórmula del área de Gauss.** Sea  $P$  un polígono con vértices  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  dispuestos en orden alrededor de la frontera. Entonces el área de  $P$  puede calcularse mediante la expresión:

$$A(P) = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i) \right|,$$

donde por convenio se toma  $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ .

Esta fórmula, conocida como *fórmula del área de Gauss* o *shoelace formula*, proporciona una manera general de calcular áreas de polígonos con vértices en coordenadas enteras o reales. En contraste, el Teorema de Pick ofrecerá más adelante una expresión sorprendentemente sencilla para polígonos reticulares.

A lo largo de este capítulo, trabajaremos siempre con polígonos definidos en el plano euclídeo cuyas coordenadas de los vértices sean enteras. Llamaremos *polígono elemental* a aquel polígono  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  cuyos vértices pertenecen a la red  $\mathbb{Z}^2$ , pero que no contiene otros puntos del retículo en su interior. Estos objetos, a primera vista sencillos, constituyen los bloques fundamentales a partir de los cuales se construirá y demostrará la validez general del teorema.

### 5.1. Enunciado formal del teorema

**Teorema 5.1.1.** Sea  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  un polígono (no necesariamente convexo) cuyos vértices pertenecen al retículo  $\mathbb{Z}^2$ . Entonces, el área de  $Q$  viene dada por la expresión:

$$A(Q) = i + \frac{B}{2} - 1,$$

donde  $I$  es el número de puntos con coordenadas enteras en el interior de  $Q$ , y  $B$  es el número de puntos con coordenadas enteras en su frontera.

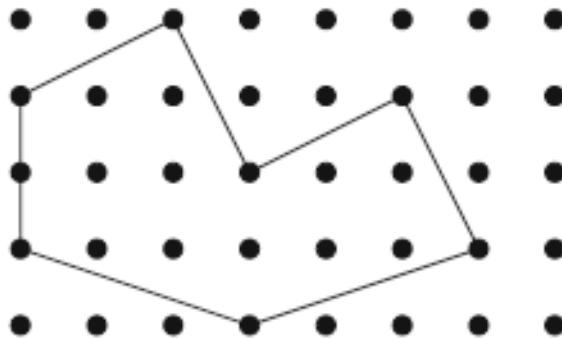


Figura 5.1.1: Dado que  $I = 11$ ,  $B = 8$ , por tanto  $A = 14$ .

## 5.2. Ejemplos ilustrativos

El teorema de Pick proporciona un método sencillo para calcular el área de polígonos simples cuyos vértices se encuentran en puntos del retículo, es decir, en coordenadas enteras del plano  $x-y$ . El término “simple” en “polígono simple” únicamente significa que el polígono no tiene agujeros y que sus lados no se cruzan entre sí. En la Figura 5.2.1 se muestran distintos ejemplos de polígonos simples sobre el retículo. Obsérvese que un polígono simple puede tener un número arbitrariamente grande de lados.

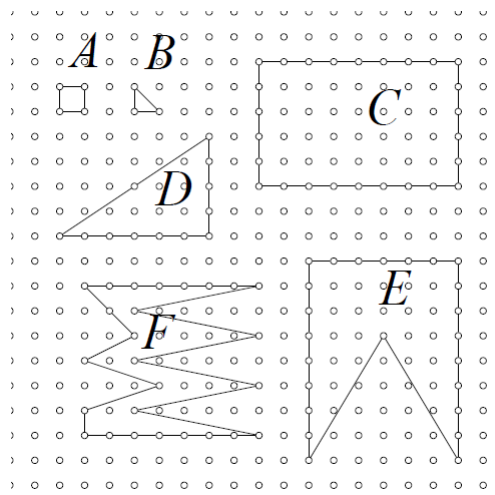


Figura 5.2.1: Ejemplos de aplicación del teorema de Pick.

Para polígonos con un área muy grande, podría parecer que el área se aproxima bastante al número de puntos interiores. Una mejora en esta estimación se obtiene añadiendo la mitad de los puntos situados en el borde, ya que “están a medias dentro y a medias fuera” del polígono. Veamos algunos ejemplos de la Figura 5.2.1.

Sea  $I$  el número de puntos interiores y  $B$  el número de puntos de la frontera. Denotaremos por  $A(P)$  el área del polígono  $P$ . Con esta notación:

A:  $I = 0$ ,  $B = 4$ ,  $A(A) = 1$ . Entonces  $I + \frac{B}{2} = 2$ .

B:  $I = 0$ ,  $B = 3$ ,  $A(B) = \frac{1}{2}$ . Entonces  $I + \frac{B}{2} = \frac{3}{2}$ .

C:  $I = 28$ ,  $B = 26$ ,  $A(C) = 40$ . Entonces  $I + \frac{B}{2} = 41$ .

D:  $I = 7$ ,  $B = 12$ ,  $A(D) = 12$ . Entonces  $I + \frac{B}{2} = 13$ .

E: Descomponiendo el polígono en un rectángulo de  $6 \times 3$  y dos triángulos idénticos de base 3 y altura 5, se obtiene  $I = 22$ ,  $B = 24$ ,  $A(E) = 33$ , y  $I + \frac{B}{2} = 34$ .

F: Tras cierta descomposición en áreas más sencillas, se obtiene  $I = 9$ ,  $B = 26$ ,  $A(F) = 21$ , y  $I + \frac{B}{2} = 22$ .

Resulta llamativo que en todos los casos anteriores la estimación  $I + \frac{B}{2}$  siempre se desvía exactamente en una unidad con respecto al área real. Esto sugiere que, para cualquier polígono del retículo, se cumple la siguiente fórmula de manera exacta:

$$A(P) = I_P + \frac{B_P}{2} - 1,$$

donde  $I_P$  es el número de puntos interiores de  $P$  y  $B_P$  es el número de puntos sobre la frontera de  $P$ . Este resultado es precisamente el teorema de Pick.

### 5.3. Demostración del teorema usando Euler

**Lema 5.3.1.** *Todo triángulo elemental  $\Delta = \text{conv}(p_0, p_1, p_2) \subseteq \mathbb{R}^2$  tiene área  $A(\Delta) = \frac{1}{2}$ .*

**Demostración.** Tanto el paralelogramo  $P$  con vértices  $p_0, p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_0$  como la red  $\mathbb{Z}^2$  son simétricos con respecto a la función

$$\sigma(x) = p_1 + p_2 - x,$$

que es la reflexión con respecto al centro del segmento que une  $p_1$  y  $p_2$ . Por tanto, el paralelogramo

$$P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$$

también es elemental, y su integral se traslada por el plano. Como  $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0\}$  es una base de la red  $\mathbb{Z}^2$ , su determinante es  $\pm 1$ , por lo que el paralelogramo  $P$  tiene área 1. Por simetría, el triángulo  $\Delta$  ocupa la mitad del paralelogramo, así que su área es

$$A(\Delta) = \frac{1}{2}.$$

□

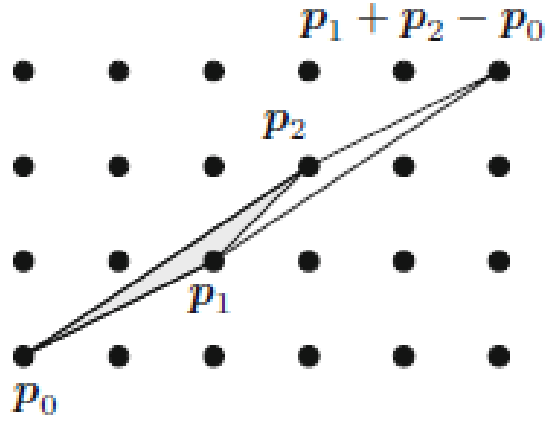


Figura 5.3.1: Triángulo elemental  $\Delta = \text{conv}(p_0, p_1, p_2)$  en el retículo  $\mathbb{Z}^2$  y el paralelogramo generado por simetría respecto al punto medio del segmento  $\overline{p_1 p_2}$ .

Recordemos el concepto de *bases reticulares*. Una base de  $\mathbb{Z}^2$  es un par de vectores linealmente independientes  $e_1, e_2$  tales que

$$\mathbb{Z}^2 = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea  $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  y  $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ , entonces el área del paralelogramo generado por  $e_1$  y  $e_2$  está dada por  $A(e_1, e_2) = |\det(e_1, e_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$ . Si  $f_1 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$  y  $f_2 = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$  es otra base, entonces existe una matriz de números enteros  $Q$  tal que  $\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} Q$ . Como  $QQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y los determinantes son enteros, se deduce que  $|\det Q| = 1$ , y por tanto  $|\det(f_1, f_2)| = |\det(e_1, e_2)|$ . Por lo tanto, todos los paralelogramos base tienen el mismo área con valor 1, ya que  $A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$ .

**Demostración. (Teorema de Pick)** Cada uno de estos polígonos se puede triangular utilizando todos los puntos reticulares  $I$  en el interior, y todos los puntos reticulares  $B$  en la frontera de  $Q$ .

(Esto no es del todo evidente, en particular si no se requiere que  $Q$  sea convexo, pero el resultado demostrado en el apartado 4.2 y en relación con el apartado 4.7 garantiza la existencia de una triangulación de cualquier polígono simple con exactamente estos vértices reticulares).

Obsérvese que en lo que sigue el número total de vértices de la triangulación es

$$v = I + B.$$

Ahora interpretamos la triangulación como un grafo plano, que subdivide el plano en una cara no acotada más  $c - 1$  triángulos de área  $\frac{1}{2}$ , por lo que

$$A(Q) = \frac{1}{2}(c - 1).$$

Cada triángulo tiene tres lados, donde cada una de las aristas interiores  $a_{\text{int}}$  delimita dos triángulos, mientras que las aristas de la frontera  $a_{\text{front}}$  aparecen en un único triángulo cada una. Entonces  $3(c-1) = 2a_{\text{int}} + a_{\text{front}}$  y por tanto  $c = 2(a - c) - a_{\text{front}} + 3$

Además, hay el mismo número de aristas de frontera que de vértices en la frontera, es decir,  $a_{\text{front}} = B$ . Usando estos dos hechos junto con la fórmula de Euler:

$$3(c-1) = 2a_{\text{int}} + a_{\text{front}} = 2(a - a_{\text{front}}) + a_{\text{front}} = 2a - a_{\text{front}}.$$

Equivalente a

$$2a = 3c - 3 + a_{\text{front}}. \quad (1)$$

*Fórmula de Euler.* Aplicando  $v - a + c = 2$ , se tiene  $a = v + c - 2$ , y por tanto

$$2a = 2(v + c - 2).$$

Sustituyendo en (1):

$$2(v + c - 2) = 3c - 3 + a_{\text{front}} \implies 2v + 2c - 4 = 3c - 3 + a_{\text{front}}.$$

Reordenando:

$$2v - 4 = c - 3 + a_{\text{front}} \implies c = 2v - 1 - a_{\text{front}}.$$

Como  $v = I + B$  y  $a_{\text{front}} = B$ , concluimos

$$c = 2(I + B) - 1 - B = 2I + B - 1.$$

*Área total.* Hay  $c - 1$  triángulos de área  $\frac{1}{2}$ , luego

$$A(Q) = \frac{1}{2}(c - 1) = \frac{1}{2}(2I + B - 2) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

que es la fórmula de Pick. □

## 5.4. Comentarios sobre otras posibles demostraciones

Además de la demostración presentada en la Sección 5.3, basada en la fórmula de Euler para grafos planos, existen otras demostraciones del teorema de Pick. Una de las más conocidas es de carácter constructivo: se comienza verificando el resultado en casos elementales y se va extendiendo poco a poco hasta abarcar todos los polígonos del retículo. A continuación resumimos sus etapas principales.

**Caso de los rectángulos.** Para un rectángulo de dimensiones  $m \times n$ , el área es claramente  $mn$ . El número de puntos interiores es  $(m-1)(n-1)$  y el número de puntos de la frontera es  $2m + 2n$ . Aplicando la fórmula de Pick se obtiene:

$$I + \frac{B}{2} - 1 = (m-1)(n-1) + \frac{2m+2n}{2} - 1 = mn,$$

que coincide con el área geométrica.

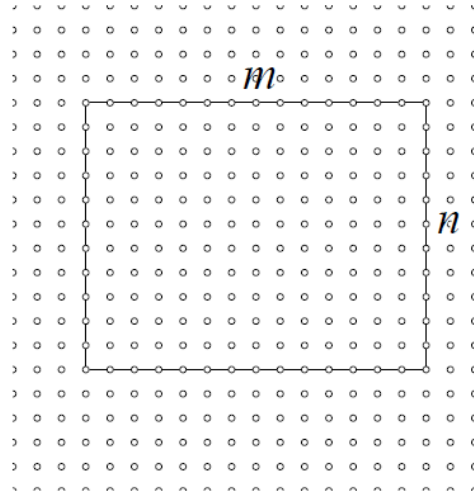


Figura 5.4.1: Teorema de Pick para rectángulos.

**Caso de los triángulos rectángulos alineados.** Consideremos ahora un triángulo rectángulo  $T$  con catetos de longitudes  $m$  y  $n$ , cuyos lados coinciden con las líneas del retículo. Su área es

$$A(T) = \frac{mn}{2}.$$

El número de puntos de la frontera puede expresarse como

$$B = m + n + 1 + k,$$

donde  $k$  es el número de puntos del retículo situados en la diagonal hipotenusa (excluyendo los vértices).

En cuanto a los puntos interiores, antes de trazar la diagonal en el rectángulo  $m \times n$  había  $(m-1)(n-1)$  puntos interiores. De ellos, los  $k$  que están sobre la diagonal dejan de contarse como interiores, y el resto se divide simétricamente en dos regiones iguales, por lo que el número total de puntos interiores en el triángulo es

$$I = \frac{(m-1)(n-1) - k}{2}.$$

Aplicando la fórmula de Pick se obtiene:

$$I + \frac{B}{2} - 1 = \frac{(m-1)(n-1) - k}{2} + \frac{m+n+1+k}{2} - 1 = \frac{mn}{2},$$

que coincide con el área del triángulo.

Estos dos casos (rectángulos y triángulos rectángulos alineados) sirven de base para extender la demostración a polígonos más generales, por descomposición en figuras de este tipo. Se trata de una demostración alternativa, más constructiva y elemental, en contraste con el enfoque mediante la fórmula de Euler desarrollado en la Sección 5.3.

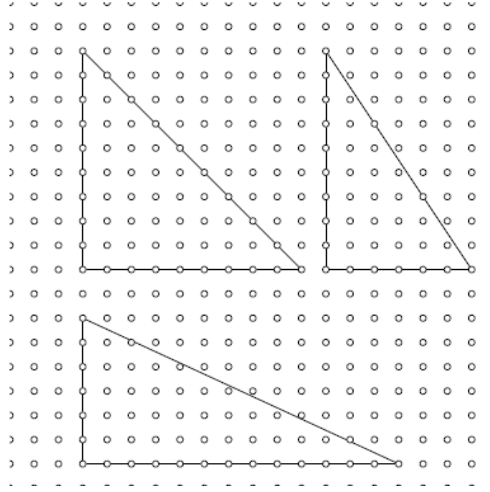


Figura 5.4.2: Teorema de Pick para triángulos rectángulos

**Caso de los triángulos generales.** Partiendo de que el teorema se cumple para rectángulos y triángulos rectángulos alineados, se puede extender a triángulos arbitrarios. La idea es situar el triángulo  $T$  dentro de un rectángulo  $R$  de modo que la diferencia se complete con tres triángulos rectángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  (véase la Figura 5.4.3). Así se obtiene la relación:

$$A(R) = A(T) + A(A) + A(B) + A(C).$$

Dado que el teorema de Pick es válido para  $R$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , basta comprobar que las cuentas de puntos interiores y de frontera encajan correctamente. Un análisis detallado muestra que:

$$A(T) = I_T + \frac{B_T}{2} - 1,$$

es decir, el teorema también se cumple para triángulos arbitrarios.

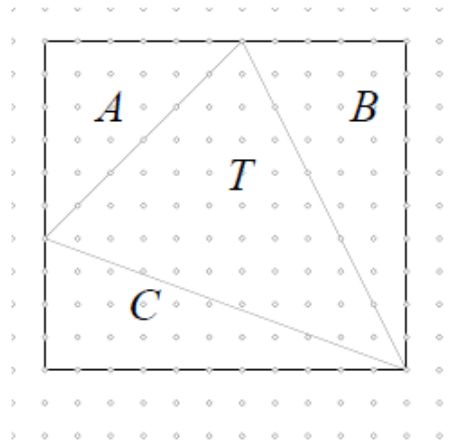


Figura 5.4.3: Extensión a triángulos arbitrarios.

En la siguiente tabla se muestran los valores de  $I$ ,  $B$  y  $A$  para el ejemplo representado en la figura, confirmando que la fórmula se verifica en todos los casos:

|     | $I$ | $B$ | $A = I + \frac{B}{2} - 1$ |
|-----|-----|-----|---------------------------|
| $A$ | 10  | 18  | 18                        |
| $B$ | 16  | 20  | 25                        |
| $C$ | 15  | 16  | 22                        |
| $T$ | 40  | 12  | 45                        |
| $R$ | 90  | 42  | 110                       |

Este procedimiento muestra cómo, a partir de los casos elementales de rectángulos y triángulos rectángulos, se puede extender la validez del teorema a triángulos generales, y por descomposición, a cualquier polígono simple.

**Unión de dos polígonos del retículo.** Supongamos ahora que un polígono  $P$  se puede dividir en dos subpolígonos  $P_1$  y  $P_2$  que comparten una diagonal. Sea  $I_1, B_1$  el número de puntos interiores y de frontera de  $P_1$ , y  $I_2, B_2$  los de  $P_2$ . Si la diagonal común contiene  $m$  puntos del retículo, se tiene que:

$$I = I_1 + I_2 + m - 2, \quad B = B_1 + B_2 - 2(m - 2) - 2.$$

Un sencillo cálculo muestra que:

$$I + \frac{B}{2} - 1 = (I_1 + \frac{B_1}{2} - 1) + (I_2 + \frac{B_2}{2} - 1),$$

de modo que la validez de la fórmula para  $P_1$  y  $P_2$  implica también su validez para  $P$ .

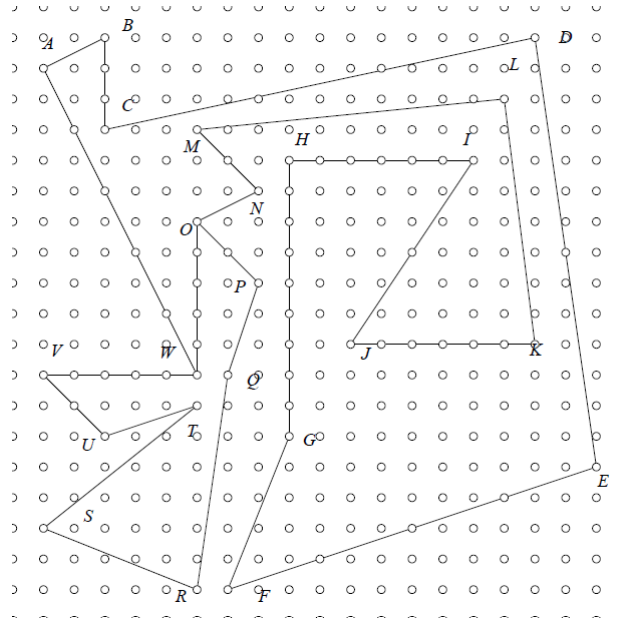


Figura 5.4.4: Unión de dos polígonos del retículo que comparten una diagonal.

**Existencia de una diagonal interior.** Para aplicar el razonamiento anterior necesitamos asegurar que todo polígono simple admite al menos una diagonal interior. La construcción es la siguiente: se elige un vértice  $B$  del polígono y se considera el ángulo  $\angle ABC$  con interior menor que  $180^\circ$ . Si el segmento  $AC$  queda dentro del polígono, entonces es la diagonal interior buscada. En caso contrario, se repite el proceso en un subpolígono formado dentro de  $\triangle ABC$ . Como el número de vértices es finito, el proceso termina encontrando siempre una diagonal interior.

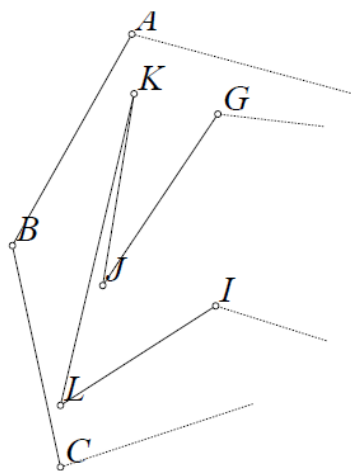


Figura 5.4.5: Existencia de una diagonal interior en un polígono simple.

**Conclusión inductiva.** Dado que:

- el teorema de Pick se cumple en rectángulos y triángulos,
- la unión de dos polígonos que cumplen la fórmula produce de nuevo un polígono que la cumple,
- y todo polígono simple admite una diagonal interior que permite dividirlo en dos más pequeños,

se concluye por inducción sobre el número de lados que el teorema de Pick es válido para cualquier polígono simple con vértices en el retículo.

En definitiva, esta segunda demostración alternativa, aunque más extensa, resulta muy instructiva: se construye el resultado a partir de casos elementales y se extiende paso a paso a todos los polígonos simples, contrastando con la prueba más sintética basada en la fórmula de Euler que se presentó en la Sección 5.3.

## Demostración de Pick mediante el teorema de Minkowski

**Teorema 5.4.1. (Teorema de Pick.)** *Sea  $P$  un polígono reticular (convexo) en el plano. Si  $I$  denota el número de puntos del retículo estrictamente interiores a  $P$  y  $B$  el número de puntos de la retícula en la frontera de  $P$  (incluidos los vértices), entonces*

$$\text{Area}(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

La prueba se basa en el siguiente resultado clásico.

**Teorema 5.4.2. (Minkowski, cuerpo convexo.)** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^2$  un cuerpo convexo, compacto y centrado (esto es,  $K = -K$ ). Si  $\text{Area}(K) > 4$ , entonces  $K$  contiene un punto de  $\mathbb{Z}^2$  distinto del origen.*

Llamaremos *triángulo unimodular* a un triángulo reticular cuyos únicos puntos del retículo en su cierre son sus tres vértices (no hay puntos reticulares en los lados ni en el interior).

**Lema 5.4.3.** *Todo triángulo unimodular  $T$  tiene área  $\frac{1}{2}$ .*

**Demostración.** Traslademos  $T$  de modo que su baricentro quede en el origen y consideremos el *cuerpo diferencia*  $D := T - T = \{x - y : x, y \in T\}$ . Entonces  $D$  es convexo, compacto y centrado. Para un triángulo se tiene la identidad geométrica

$$\text{Area}(D) = 6 \text{Area}(T).$$

(Si  $T$  es el convexo de  $\{0, u, v\}$ , entonces  $D$  es el hexágono convexo con vértices  $\{\pm u, \pm v, \pm(u - v)\}$ , cuyo área es 6 veces el área del paralelogramo generado por  $u$  y  $v$ , esto es,  $6 \text{Area}(T)$ .)

Como  $T$  es unimodular, no existen dos puntos distintos  $x, y \in T$  tales que  $x - y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  (pues ello produciría un punto entero en un lado o en el interior de  $T$ ). Equivalente a decir que

$$(D \cap \mathbb{Z}^2) = \{(0, 0)\}.$$

Por el teorema de Minkowski debe ocurrir entonces  $\text{Area}(D) \leq 4$ , y por la identidad anterior,  $6 \text{Area}(T) \leq 4$ , esto es,

$$\text{Area}(T) \leq \frac{2}{3}.$$

Por otra parte, como los vértices de  $T$  tienen coordenadas enteras, la fórmula del determinante (o de “shoelaces”) muestra que  $\text{Area}(T) = \frac{k}{2}$  para algún  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Si  $k \geq 2$  entonces  $\text{Area}(T) \geq 1$ , lo que contradice la cota  $\text{Area}(T) \leq \frac{2}{3}$ . Luego necesariamente  $k = 1$  y  $\text{Area}(T) = \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Lema 5.4.4.** *Sea  $P = P_1 \cup P_2$  unión de dos polígonos reticulares cuyo interior es disjunto y cuya intersección es un segmento reticular (o una unión finita de segmentos) con  $D$  puntos enteros. Si la fórmula de Pick vale para  $P_1$  y  $P_2$ , entonces vale para  $P$ .*

**Demostración.** Denotemos por  $I(\cdot)$  y  $B(\cdot)$  los conteos interiores y de frontera. Como los interiores son disjuntos,

$$I(P) = I(P_1) + I(P_2).$$

En la frontera, los  $D$  puntos de la intersección se cuentan dos veces al sumar  $B(P_1) + B(P_2)$ , y deben contarse sólo una vez para  $P$ ; además, los dos extremos del segmento común pasan de frontera a interior de la unión. Por tanto,

$$B(P) = B(P_1) + B(P_2) - 2D + 2.$$

Usando ahora la aditividad del área y las igualdades de Pick en  $P_1$  y  $P_2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Area}(P) &= \text{Area}(P_1) + \text{Area}(P_2) \\ &= \left( I(P_1) + \frac{B(P_1)}{2} - 1 \right) + \left( I(P_2) + \frac{B(P_2)}{2} - 1 \right) \\ &= I(P) + \frac{B(P_1) + B(P_2)}{2} - 2 \\ &= I(P) + \frac{B(P) + 2D - 2}{2} - 2 \\ &= I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1. \end{aligned}$$

$\square$

**Demostración. (Demostración del teorema de Pick. )** Triangulemos  $P$  en triángulos reticulares cuyos vértices son enteros. Refinando si es preciso, podemos suponer que todos los triángulos de la triangulación son unimodulares (si un triángulo no lo es, contiene un punto entero adicional y puede subdividirse manteniendo vértices enteros).

Por el Lema 5.4.3, cada uno de esos triángulos tiene área  $\frac{1}{2}$ , y satisface la fórmula de Pick (pues para un triángulo unimodular,  $I = 0$  y  $B = 3$ ). Finalmente, aplicando el Lema 5.4.4 de forma iterada al ir pegando triángulos a lo largo de segmentos reticulares comunes, obtenemos que la fórmula de Pick vale para  $P$ .  $\square$

**Nota.** Una demostración detallada puede encontrarse en (Haase, 2009; Beck y Robins, 2007), mientras que el teorema de Minkowski clásico se desarrolla en (Cassels, 1959; Gruber y Lekkerkerker, 1987).

# Capítulo 6

## Aplicaciones del teorema de Pick

### 6.1. Resolución de problemas clásicos

#### 6.1.1. Sucesiones de Farey

**Ejemplo 6.1.1. Relación con las sucesiones de Farey.** Para un entero  $n \geq 1$ , la *sucesión de Farey de orden  $n$* , denotada  $F_n$ , se define como el conjunto de todas las fracciones irreducibles  $\frac{p}{q}$  con  $0 \leq p \leq q \leq n$ , ordenadas de menor a mayor. Por ejemplo:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \quad F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \quad F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Una propiedad fundamental de estas sucesiones es que, si  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son elementos consecutivos de  $F_n$ , entonces

$$bc - ad = 1.$$

Además, la fracción media racional (o mediant)

$$\frac{a+c}{b+d}$$

aparece en  $F_{n'}$  para algún  $n' > \max\{b, d\}$ , de modo que las sucesiones de Farey pueden construirse de manera iterativa.

Esta condición de coprimidad puede interpretarse geoméricamente. Consideremos el triángulo reticulado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(b, a)$  y  $(d, c)$ . Su área euclídea es

$$A = \frac{1}{2}|bc - ad| = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de Pick se obtiene

$$A = I + \frac{B}{2} - 1,$$

y dado que  $I = 0$  y  $B = 3$ , se deduce de nuevo que  $|bc - ad| = 1$ .

De esta forma, Pick ofrece una demostración geométrica sencilla de la relación entre fracciones consecutivas en las sucesiones de Farey, mostrando cómo la geometría discreta se enlaza de manera natural con la teoría de números.

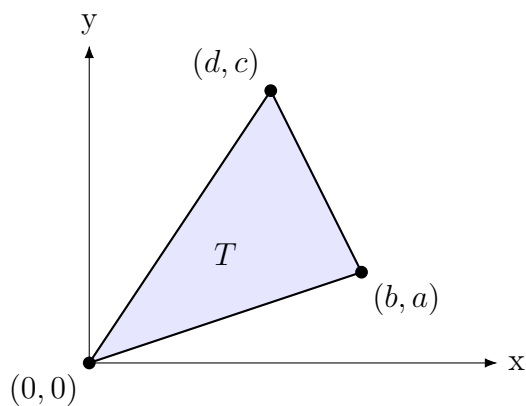


Figura 6.1.1: Triángulo reticulado asociado a dos fracciones consecutivas  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  en una sucesión de Farey.

### 6.1.2. Interpretación geométrica de Farey

Las fracciones de la sucesión de Farey pueden representarse como puntos del retículo. En efecto, cada fracción  $\frac{a}{b}$  con  $\gcd(a, b) = 1$  corresponde al punto  $(b, a)$ , que es visible desde el origen: el segmento  $[(0, 0), (b, a)]$  no contiene otros puntos del retículo.

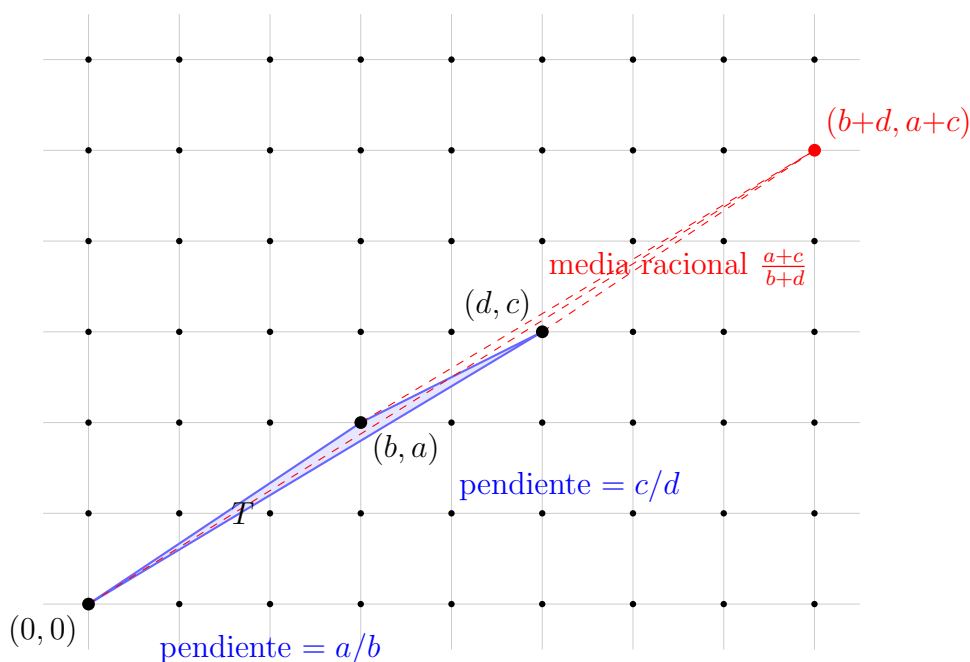


Figura 6.1.2: Triángulo asociado a dos fracciones consecutivas  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$ , y aparición de su media racional  $\frac{a+c}{b+d}$ .

Con esta interpretación, el hecho de que dos fracciones consecutivas  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  satisfagan  $bc - ad = 1$  se deduce al aplicar el Teorema de Pick al triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(b, a)$  y  $(d, c)$ , que tiene área  $1/2$  y ningún punto interior. De nuevo vemos cómo Pick conecta geometría discreta y teoría de números.

### 6.1.3. Ejemplos avanzados: sucesiones de Farey y el árbol de Stern–Brocot

**Problema 6.1.2.** El número de términos de la sucesión de Farey de orden  $n$  viene dado por

$$|F_n| = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k),$$

donde  $\varphi$  es la función aritmética de Euler.

Este resultado enlaza directamente teoría de números y geometría discreta: los elementos de  $F_n$  pueden representarse como puntos visibles desde el origen en el triángulo reticulado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(n, 0)$  y  $(n, n)$ . El conteo de dichos puntos puede justificarse mediante el Teorema de Pick, lo que proporciona una interpretación geométrica a una identidad clásica.

**Ejemplo 6.1.3. Extensión mediante la media racional.** Partiendo de dos términos consecutivos de una sucesión de Farey,  $\frac{a_1}{b_1}$  y  $\frac{a_2}{b_2}$ , se introduce la fracción

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2},$$

conocida como su media racional o *mediant*. Repitiendo este proceso de forma iterada se generan secuencias de fracciones cada vez más densas, en las que pueden aparecer formalmente expresiones como  $\frac{1}{0}$ . Este procedimiento conecta con las fracciones continuas y conduce de manera natural a representaciones arbóreas.

**Ejemplo 6.1.4. Árbol de Stern–Brocot.** El *árbol de Stern–Brocot* se construye a partir de las fracciones  $\frac{0}{1}$  y  $\frac{1}{0}$ , insertando sucesivamente la media racional entre dos fracciones consecutivas:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \mapsto \frac{a+c}{b+d}.$$

En cada nivel aparecen nuevas fracciones, y en el límite se obtienen todas las fracciones positivas en su forma reducida.

Las sucesiones de Farey se encuentran incluidas dentro de este árbol, lo que establece un vínculo natural entre combinatoria de fracciones, teoría de números y la interpretación geométrica que aporta el Teorema de Pick.

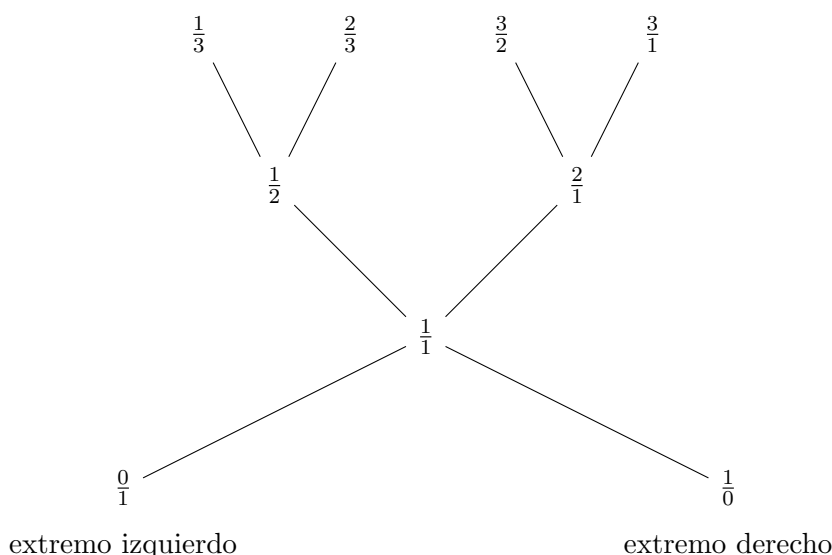


Figura 6.1.3: Árbol de Stern–Brocot.

En la Figura 6.1.3 se observan los primeros niveles del árbol de Stern–Brocot. Cada fracción nueva se obtiene como media racional de dos fracciones consecutivas:  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  producen  $\frac{a+c}{b+d}$ .

#### 6.1.4. Problemas geométricos: el cuadrado $n \times n$

**Problema 6.1.5.** Se dispone de un retículo entero y de un cuadrado  $n \times n$ . Se coloca el cuadrado sobre el retículo de forma arbitraria. Demostrar que nunca se pueden cubrir más de  $(n + 1)^2$  puntos del retículo.

**Demostración.** Si los vértices del cuadrado coinciden exactamente con puntos del retículo, se cubren  $(n - 1)^2$  puntos interiores y  $4n$  puntos en el borde, es decir, un total de

$$(n - 1)^2 + 4n = (n + 1)^2.$$

En cualquier otra posición, cada lado del cuadrado corta a lo sumo  $n$  segmentos unidad del retículo, por lo que el número de puntos de frontera satisface  $B(P) \leq 4n$ , con igualdad únicamente cuando los lados son paralelos a los ejes y los vértices son puntos reticulares. Aplicando Pick a  $P$  de área  $n^2$ ,

$$n^2 = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1 \Rightarrow I(P) + B(P) = n^2 + \frac{B(P)}{2} + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

con igualdad sólo en la posición alineada.  $\square$

**Problema 6.1.6.** Prueba que no existe ningún triángulo equilátero que sea reticulado.

**Demostración.** Supongamos que existe un triángulo equilátero cuyos vértices pertenecen al retículo. Entonces, por el Teorema de Pick, su área sería un número racional, pues

$$A = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1,$$

donde  $I(P)$  y  $B(P)$  son números enteros.

Por otro lado, sea  $a$  la longitud del lado del triángulo. El área se puede calcular mediante la fórmula geométrica usual:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Dado que  $a^2$  corresponde al área de un cuadrado reticulado, es necesariamente un número racional. En consecuencia,  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  debería ser racional, lo que implicaría que  $\sqrt{3}$  es un número racional. Esto contradice el hecho conocido de que  $\sqrt{3}$  es irracional.

Por lo tanto, no existe ningún triángulo equilátero con vértices en el retículo.  $\square$

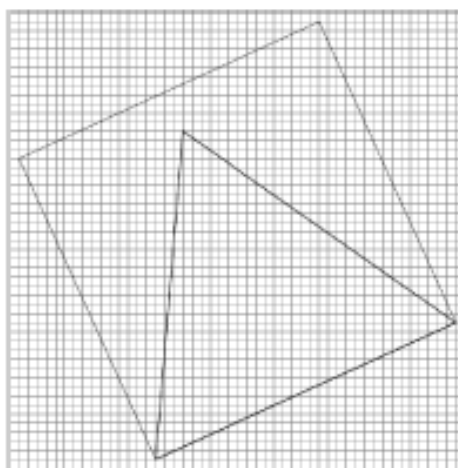


Figura 6.1.4: Intento de representar un triángulo equilátero en el retículo: la irracionalidad de  $\sqrt{3}$  impide su existencia exacta.

**Problema 6.1.7.** Se considera un retículo  $n \times n$  tal y como se indica en la figura. Sea  $A = (0, n)$  y  $B = (n, 0)$ . Observa que la línea  $AB$  contiene  $n - 1$  puntos del retículo, estos son:  $(0, n), (1, n - 1), \dots, (n, 0)$ . Dados dos puntos contiguos  $(i - 1, n - i + 1)$  y  $(i, n - i)$  se considera el triángulo

$$T_i = \text{conv}\{(0, 0), (i - 1, n - i + 1), (i, n - i)\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Todos los triángulos  $T_i$  tienen la misma área?
2. ¿Cuál es el área de cada uno de los triángulos  $T_i$ ?
3. ¿Hay triángulos  $T_i$  que no tienen puntos interiores?
4. Si  $n$  es primo, prueba que todos los triángulos  $T_i$ , salvo dos de ellos, tienen el mismo número de puntos interiores.

**Demostración. (Esquema de solución)** 1. Todos los triángulos  $T_i$  tienen la misma base y la misma altura, por lo que tienen igual área.

2. Como el área del triángulo  $ABO$  es  $n^2/2$ , cada triángulo  $T_i$  tiene área

$$\frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}.$$

3. El triángulo  $T_1$  y el triángulo  $T_n$  no tienen puntos interiores.
4. Si  $n$  es primo, los segmentos  $(0, 0)(i, n - i)$  no contienen otros puntos del retículo, pues  $i$  y  $n - i$  son primos relativos. Esto implica que todos los triángulos  $T_i$  para  $i = 2, \dots, n - 1$  tienen el mismo número de puntos interiores, dado que comparten área y condiciones de frontera.

Aplicando el Teorema de Pick a cada triángulo  $T_i$ , con área  $n/2$ , se obtiene:

$$\frac{n}{2} = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1.$$

Como  $B(P) = 3$ , resulta

$$\frac{n}{2} = I(P) + \frac{3}{2} - 1 = I(P) + \frac{1}{2},$$

de donde

$$I(P) = \frac{n-1}{2}.$$

□

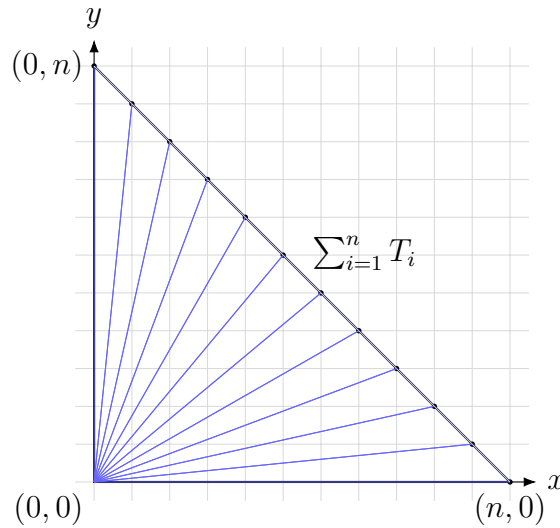


Figura 6.1.5: División del triángulo en  $n$  subtriángulos  $T_i$ .

En la Figura 6.1.5 se observa la división del triángulo  $\text{conv}\{(0, 0), (0, n), (n, 0)\}$  en  $n$  subtriángulos  $T_i$ . Para  $n$  primo, los  $T_i$  interiores tienen  $B = 3$  e  $I = \frac{n-1}{2}$ ; los extremos  $T_1, T_n$  tienen  $I = 0$ .

**Observación 6.1.8.** De manera análoga al caso del triángulo equilátero, también puede demostrarse que no existe un pentágono regular reticulado. La demostración conduce al número áureo  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , cuya irracionalidad impide que dicho polígono sea representable en el retículo.

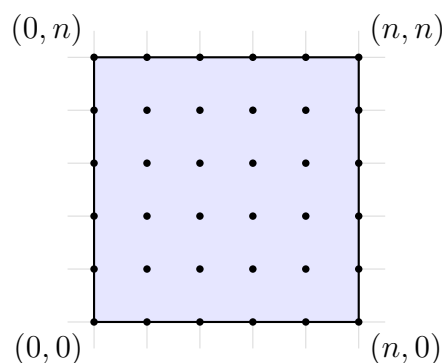


Figura 6.1.6: Caso extremo: cuadrado  $n \times n$  alineado con el retículo. Se alcanzan exactamente  $(n + 1)^2$  puntos reticulares.

## 6.2. Uso en educación y divulgación

**Ejemplo 6.2.1. Estimación de áreas mediante Pick.** El Teorema de Pick se aplica únicamente a polígonos reticulares. Sin embargo, también puede usarse como herramienta aproximada en educación y divulgación matemática.

Dada una figura plana cualquiera, no necesariamente reticular, podemos aproximarla mediante un polígono cuyos vértices pertenezcan al retículo más cercano. El área de este polígono se calcula con Pick y proporciona una estimación del área de la figura original.

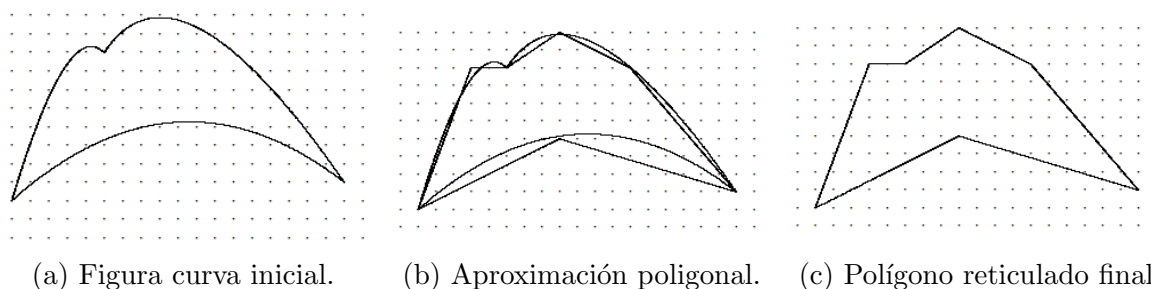


Figura 6.2.1: Proceso de aproximación de una figura curva mediante un polígono reticulado para aplicar el Teorema de Pick.

Este procedimiento ofrece un recurso didáctico interesante: los estudiantes pueden experimentar dibujando figuras libres, aproximarlas con polígonos reticulares y usar Pick como método de cálculo de áreas. De este modo, se refuerza la conexión entre la geometría discreta y la geometría euclídea clásica.

**Ejemplo 6.2.2. Aplicaciones prácticas y divulgativas** El Teorema de Pick puede emplearse también en contextos más prácticos o de divulgación matemática.

Un primer problema consiste en determinar el área de una figura complicada, cuando sólo conocemos su contorno. Por ejemplo, en la Figura 6.2.2 se plantea calcular el área del camino que conduce de la entrada a la salida, lo cual requiere distinguir qué regiones están en el interior o exterior.

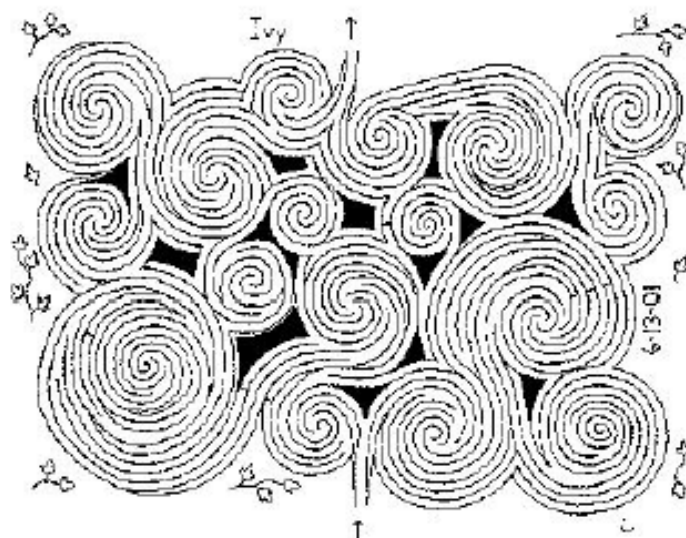


Figura 6.2.2: Ejemplo de figura complicada donde interesa determinar el área cubierta.

Otro problema de interés surge en la medición de concentraciones. Si una colección de partículas (glóbulos rojos en sangre, granos de oro en un fluido, o incluso personas en una fotografía aérea) se proyecta sobre el plano, puede aproximarse la región cubierta mediante un retículo de densidad adecuada. Aplicando el Teorema de Pick al polígono aproximado, se estima el área y, con ello, la concentración media de partículas en la muestra.

Estos ejemplos muestran cómo el Teorema de Pick puede servir no sólo en geometría discreta, sino también como herramienta pedagógica y de divulgación, poniendo en contacto las matemáticas con fenómenos reales.

### 6.3. Interpretación en álgebra y geometría discreta

En la literatura sobre polígonos reticulares, el teorema de Pick constituye un resultado fundamental al relacionar el área de un polígono con el número de puntos interiores y de frontera. Sin embargo, no es un resultado aislado: existen teoremas posteriores que proporcionan cotas precisas para clasificar los polígonos reticulares en función de estos parámetros. Uno de los más destacados es el siguiente resultado debido a Scott (1976):

**Teorema 6.3.1. (Scott, 1976)** *Sea  $P \subset \mathbb{R}^2$  un polígono reticular con  $i \geq 1$  puntos interiores del retículo y área euclídea  $a$ . Entonces se cumple que:*

1.  $P \cong 3\Delta_2$ , y por tanto  $a = 9/2$  e  $i = 1$ , o
2.  $a \leq 2(i + 1)$ .

Este resultado muestra que, una vez fijado el número de puntos interiores, el área de un polígono reticular está fuertemente acotada. En particular, salvo el caso excepcional del triángulo  $3\Delta_2$ , todo polígono con  $i \geq 1$  puntos interiores cumple la desigualdad  $a \leq 2(i + 1)$ . Se trata de una extensión natural del Teorema de Pick y un ejemplo del tipo de clasificaciones que estudia la geometría de números.

**Demostración.** Sea  $b$  el número de puntos del retículo en la frontera. Usando la Fórmula de Pick (Teorema 1.8) podemos reformular la condición como

$$b \leq a + 4,$$

salvo en el caso en que  $P = 3\Delta_2$ , en cuyo caso  $b = 9$  y  $a = 9/2$ .

Los isomorfismos del retículo preservan  $a, b$  e  $i$ , por lo que podemos situar  $P$  ajustadamente dentro de un rectángulo

$$R := [0, p'] \times [0, p],$$

donde  $p$  es el menor posible entre todos los polígonos equivalentes en el retículo a  $P$ . Entonces se cumple que  $p \geq 2$  puesto que  $i \geq 1$ . Intercambiando coordenadas también obtenemos

$$2 \leq p \leq p'. \quad (1.2)$$

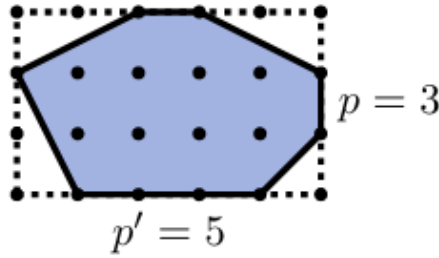


Figura 6.3.1: El polígono  $P$  contenido en una caja  $R = [0, p'] \times [0, p]$ .

El polígono  $P$  intersecta los bordes inferior y superior del rectángulo en segmentos de longitudes  $q$  y  $q'$ , véase la Figura 6.3.1. Como mucho  $2(p-1)$  puntos de frontera de  $P$  no están sobre los dos bordes horizontales de  $R$ , por lo que

$$b \leq q + 1 + p - 1 + q' + 1 + p - 1 = q + q' + 2p. \quad (1.3)$$

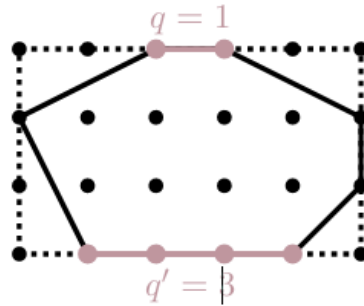


Figura 6.3.2: El polígono  $P$  intersectando los bordes inferior y superior de la caja  $R$ , con segmentos de longitudes  $q$  y  $q'$ .

Subdividiendo el casco convexo del borde superior y del borde inferior en dos triángulos, como en la Figura ??, obtenemos

$$a \geq \frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}q'p = \frac{p}{2}(q + q'). \quad (1.4)$$

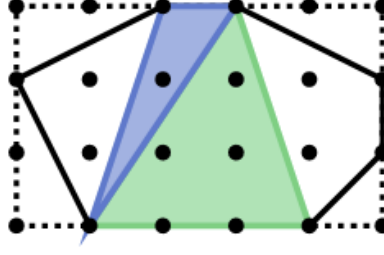


Figura 6.3.3: Subdivisión del casco convexo de los bordes superior e inferior de  $P$  en dos triángulos, lo que permite acotar el área.

Además, usando la Fórmula de Pick (Teorema 1.8) y dado que  $i \geq 1$ , también sabemos que

$$a \geq \frac{b}{2}. \quad (1.5)$$

Dividimos la demostración en cuatro casos:

1.  $p = 2$  o bien  $q + q' \geq 4$ ,
2.  $p = q + q' = 3$ ,
3.  $p = 3$  y  $q + q' \leq 2$ ,
4.  $p \geq 4$  y  $q + q' \leq 3$ .

**Caso (1).** Podemos combinar (1.3) y (1.4) para obtener

$$2b - 2a \leq 2(q + q' + 2p) - p(q + q') = (q + q' - 4)(2 - p) + 8, \quad (1.6)$$

lo cual es como máximo 8 ya que el primer sumando es como mucho 0. Esto implica que  $b \leq a + 4$ , como se quería.

**Caso (2).** Podemos usar la misma desigualdad para obtener  $2b - 2a \leq 9$ , es decir,  $b \leq a + 9/2$ . Si  $P$  tiene al menos un vértice que no está en los bordes superior o inferior de  $R$ , entonces (1.4) y por tanto también (1.6) se convierten en desigualdades estrictas, de modo que en este caso  $b < a + 9/2$ . Como  $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ , esto implica  $b \leq a + 4$ .

Por otro lado, si todos los vértices de  $P$  se encuentran en los bordes superior e inferior de  $R$ , entonces

$$a = p(q + q')/2 = 9/2, \quad b \leq a + 9/2 = 9.$$

Si  $b < 9$ , entonces  $b \leq a + 4$ . En caso contrario, si todos los vértices están en los bordes superior e inferior de  $R$ , entonces  $b = 9$ ,  $a = 9/2$  y, por tanto,  $i = 1$ . Una consideración geométrica sencilla muestra que entonces  $q = 3$  o bien  $q' = 3$ , y  $P$  debe ser el triángulo  $3\Delta_2$  (véase el Ejercicio 1.14).

**Caso (3).** La desigualdad (1.3) implica que  $b \leq 8$  y, combinándola con (1.5), se obtiene

$$b - a \leq b - b/2 \leq 4.$$

Por tanto,  $b \leq a + 4$ .

**Caso (4).** Supongamos ahora que estamos en el cuarto caso, es decir,  $p \geq 4$  y  $q + q' \leq 3$ . Elegimos los puntos

$$L = (l, 0), \quad U = (u, p), \quad X = (0, x), \quad Y = (p', y)$$

en  $P$ , tales que  $\delta := |u - l|$  sea mínimo (véase la Figura 6.3.4). Podemos suponer que  $u \leq l$  (en caso contrario, reflejamos el polígono).

Sea  $L' = (u, 0)$  y  $U' = (l, p)$ . El triángulo  $S_L$  generado por  $A, L'$  y  $U$  acota por arriba el área del triángulo generado por  $X, L, U$  (considerando la altura sobre la arista  $XU$ ). De forma análoga, el triángulo  $S_U$  generado por  $Y, U'$  y  $L$  acota por abajo el área del triángulo generado por  $Y, U, L$ .

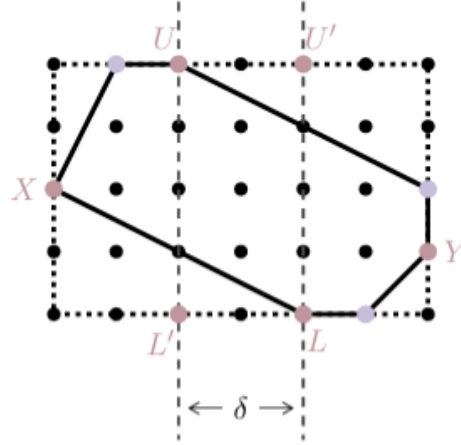


Figura 6.3.4: Estimación del área de  $P$  por debajo: el triángulo  $XUL$ .

De este modo, se obtiene

$$a \geq \frac{1}{2}p(p' - \delta). \quad (1.7)$$

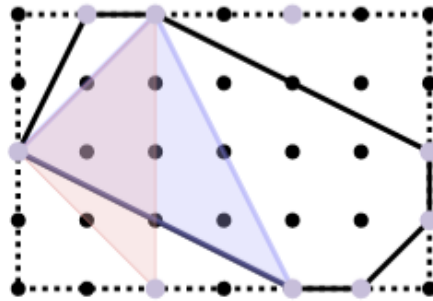


Figura 6.3.5: Estimación del área de  $P$  en el caso (4): el triángulo  $XUL$  acota el área inferiormente.

La transformación de corte (shearing) está dada por

$$v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Existe un isomorfismo del retículo que, aplicado a  $P$ , deja invariantes  $p, q$  y  $q'$ . Por lo tanto, podemos transformar  $P$  de modo que

$$\delta \leq \frac{1}{2}(p - q - q'). \quad (1.7)$$

Como  $p$  fue elegido de forma mínima, después de esta transformación aún se cumple  $p \leq p'$ . Esto implica

$$a \geq \frac{1}{4}p(p + q + q'),$$

y por lo tanto

$$4(b - a) \leq 8p + 4q + 4q' - p(p + q + q') = p(8 - p) - (p - 4)(q + q').$$

Dado que  $p \geq 4$ , el lado derecho está acotado superiormente por 16. Esto demuestra que

$$b \leq a + 4.$$

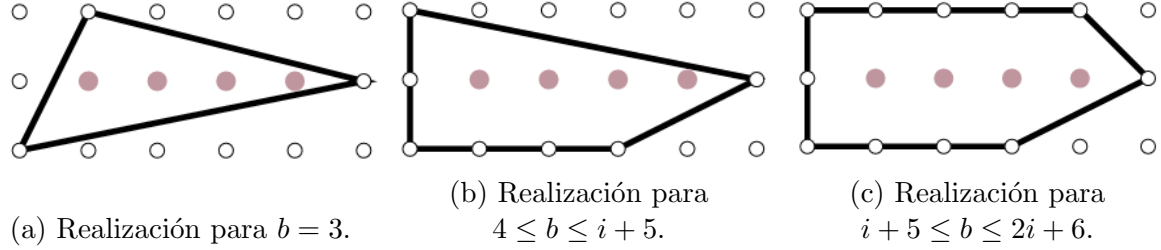


Figura 6.3.6: Realizaciones de pares  $(i, b)$  mediante distintos polígonos reticulares.

□

Hasta aquí hemos demostrado que, para polígonos reticulares, el área y el número de puntos interiores y de frontera están fuertemente acotados por el Teorema de Scott. Sin embargo, si consideramos polígonos que no son estrictamente reticulares, esta propiedad deja de cumplirse: no existe una cota superior general para sus áreas. La Figura 6.3.7 muestra un ejemplo representativo.

**Comentario .** Para polígonos que no son estrictamente reticulares, no existe una cota superior análoga para sus áreas. La Figura 6.3.7 muestra un ejemplo de triángulo con un único punto del retículo en su interior, pero cuya área puede hacerse arbitrariamente grande.

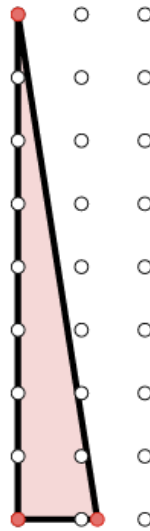


Figura 6.3.7: Un triángulo racional con un único punto interior del retículo y área arbitrariamente grande.

### 6.3.1. Dilataciones y conexión con los polinomios de Ehrhart

Si conocemos el número de puntos interiores y de frontera de un polígono reticular  $P$ , entonces conocemos su área gracias al Teorema de Pick. ¿Podemos decir también algo sobre las dilataciones de  $P$ , es decir, sobre el número de puntos interiores o de frontera de  $k \cdot P$  para algún  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ?

Los puntos interiores no pueden simplemente escalarse: incluso para polígonos reticulares sin puntos interiores, cualquier múltiplo suficientemente grande contendrá un punto reticular en su interior. Sin embargo, el área sí escala con  $k^2$ , y el número de puntos de frontera escala con  $k$ .

Podemos insertar esto en el Teorema de Pick para obtener el número  $i(k)$  de puntos interiores de  $k \cdot P$ :

$$i(k) = ak^2 - \frac{b}{2}k + 1.$$

Se trata de un polinomio de grado 2 en  $k$  con coeficientes  $a$ ,  $-b/2$  y 1. Podemos reformular esto para el número total de puntos reticulares en  $k \cdot P$ , denotado por  $l(k) = i(k) + b(k)$ , y obtenemos:

$$l(k) = i(k) + b(k) = k^2a - \frac{b}{2}k + 1 + kb = ak^2 + \frac{b}{2}k + 1,$$

que es de nuevo un polinomio de grado 2 en  $k$ . Además, observamos que se cumple la relación

$$i(k) = l(-k).$$

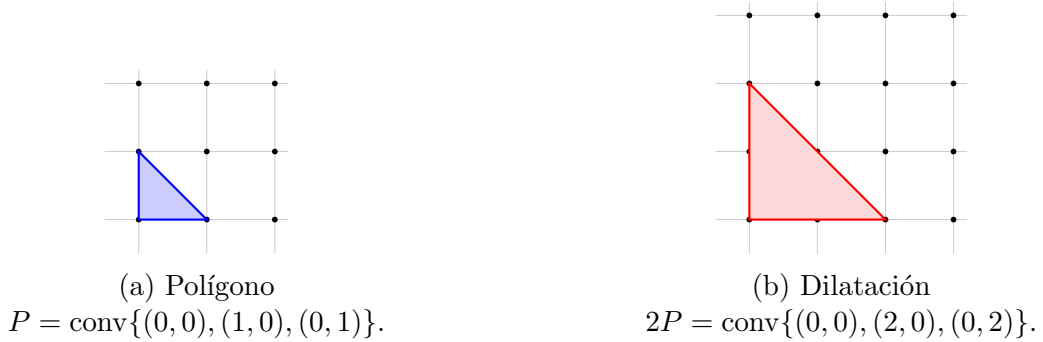


Figura 6.3.8: Ejemplo de dilatación (escalado entero) de un polígono reticular.

Veremos que esta observación es en realidad un caso particular de dos teoremas mucho más generales y fundamentales, los Teoremas de Ehrhart y de Ehrhart–Macdonald, que estudiaremos en detalle en el Capítulo 7. La idea esencial es que, en cualquier dimensión, el número de puntos reticulares en la  $k$ -ésima dilatación de un politopo viene dado por un polinomio en  $k$ , y que el número de puntos interiores se obtiene (hasta signo) evaluando este mismo polinomio en  $-k$ .

En conclusión, las dilataciones de polígonos reticulares permiten extender la fórmula de Pick a una visión más general: el número de puntos reticulares en múltiplos de un polígono se expresa como un polinomio en  $k$ . Esto conecta de manera directa el Teorema de Pick con la teoría de Ehrhart, que estudia de forma sistemática estos polinomios en dimensiones arbitrarias.

## 6.4. Limitaciones en dimensión superior

El Teorema de Pick se formula únicamente en dos dimensiones. Aunque resulta natural preguntarse si existe un análogo tridimensional basado en tetraedralizaciones de poliedros, la situación es mucho más compleja.

No todos los poliedros pueden ser subdivididos en tetraedros usando solamente sus vértices. Un ejemplo clásico es el *poliedro de Schönhardt*, mostrado en la Figura 6.4.1, que constituye el caso más pequeño de un poliedro no tetraedralizable. Este hecho pone de relieve que la simplicidad del caso bidimensional no se extiende a dimensiones superiores.

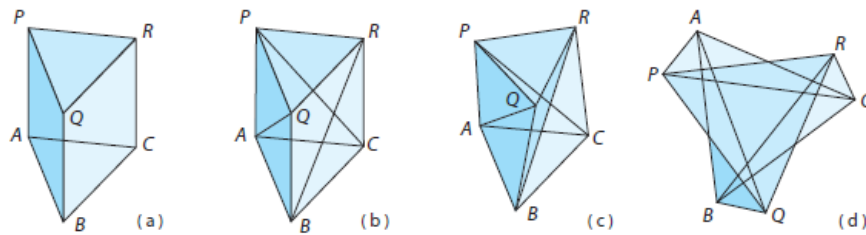


Figura 6.4.1: Construcción del poliedro de Schönhardt a partir de un prisma triangular.

# Capítulo 7

## Generalizaciones

### 7.1. Polígonos con agujeros

El Teorema de Pick se formuló originalmente para polígonos simples, es decir, sin autointersecciones ni agujeros en su interior. Sin embargo, es posible generalizarlo al caso de *polígonos reticulados con agujeros*.

**Definición 7.1.1.** Llamamos *región poligonal con agujeros* a un polígono reticulado simple  $P$  junto con  $t$  polígonos reticulados simples  $A_1, \dots, A_t$ , disjuntos en su interior, denominados *agujeros*. Es decir, tanto  $P$  como cada  $A_i$  tienen todos sus vértices en el retículo  $\mathbb{Z}^2$ .

**Problema 7.1.2.** Determinar el área de una región poligonal reticulada  $P$  con  $t$  agujeros  $A_1, \dots, A_t$ .

Para motivar la fórmula, sea  $P_0$  el polígono exterior, con  $I_0$  puntos interiores y  $B_0$  en el borde. Por el Teorema de Pick,

$$A(P_0) = I_0 + \frac{B_0}{2} - 1.$$

De manera análoga, para cada agujero  $A_j$ ,

$$A(A_j) = I_j + \frac{B_j}{2} - 1.$$

El área de la región con agujeros se obtiene restando:

$$A(P) = A(P_0) - \sum_{j=1}^t A(A_j).$$

Esto conduce a la siguiente formulación general.

**Teorema 7.1.3. (Fórmula de Pick con agujeros)** *Sea  $P$  una región poligonal reticulada con  $t$  agujeros  $A_1, \dots, A_t$ . Si  $I$  y  $B$  denotan, respectivamente, el número de puntos interiores y de frontera de  $P$  (excluyendo los agujeros), entonces*

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1 + t.$$

**Demostración.** Sea  $P_0$  el polígono exterior y, para cada  $i = 1, \dots, t$ , sea  $A_i$  el  $i$ -ésimo agujero. Por Pick en cada componente,

$$A(P_0) = I_0 + \frac{B_0}{2} - 1, \quad A(A_i) = I_i + \frac{B_i}{2} - 1.$$

El área total es  $A(P) = A(P_0) - \sum_{i=1}^t A(A_i)$ , así que

$$\begin{aligned} A(P) &= \left( I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 \right) - \sum_{i=1}^t \left( I_i + \frac{B_i}{2} - 1 \right) \\ &= I_0 - \sum_{i=1}^t I_i + \frac{B_0}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t B_i - 1 + t. \end{aligned}$$

Ahora relacionamos los conteos globales con los de las piezas. Todo punto del borde de un agujero cuenta como punto interior de la región con agujeros; por tanto

$$I = I_0 - \sum_{i=1}^t (I_i + B_i), \quad B = B_0 + \sum_{i=1}^t B_i.$$

Sustituyendo en la expresión de  $A(P)$ ,

$$\begin{aligned} A(P) &= \left( I + \sum_{i=1}^t (I_i + B_i) \right) - \sum_{i=1}^t I_i + \frac{1}{2} \left( B - \sum_{i=1}^t B_i \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t B_i - 1 + t \\ &= I + \frac{B}{2} - 1 + t. \end{aligned}$$

□

**Nota 7.1.4.** El término  $+t$  es análogo al  $2 - 2g$  en la fórmula de Euler: cuenta el “número de agujeros” de la región.

**Ejemplo 7.1.5.** Consideremos una región poligonal  $P_0$  con  $I_0 = 136$  puntos interiores y  $B_0 = 13$  puntos en el borde.

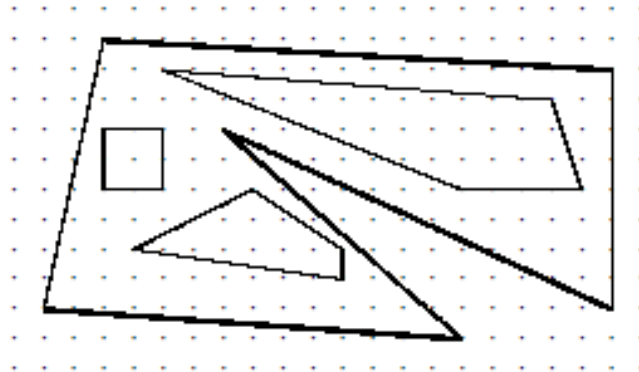


Figura 7.1.1: Región poligonal  $P_0$  con tres agujeros en su interior.

Su área es:

$$A(P_0) = 136 + \frac{13}{2} - 1 = 141,5.$$

Los agujeros  $A_1, A_2, A_3$  se muestran en la Figura 7.1.2:

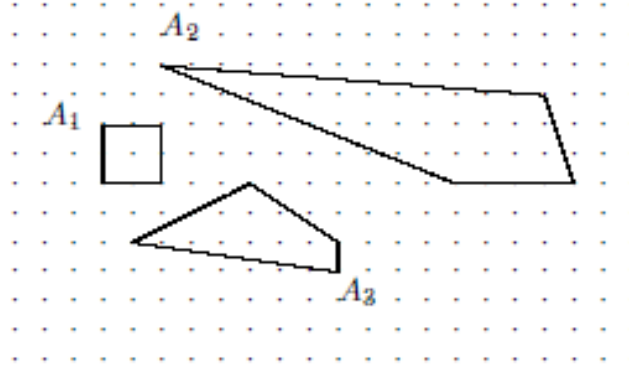


Figura 7.1.2: Agujeros  $A_1, A_2, A_3$  de la región poligonal.

Calculamos sus áreas:

$$A(A_1) = 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4, \quad A(A_2) = 24 + \frac{8}{2} - 1 = 27, \quad A(A_3) = 9 + \frac{5}{2} - 1 = 10,5.$$

Finalmente, el área de la región poligonal con agujeros es

$$A(P) = A(P_0) - (A(A_1) + A(A_2) + A(A_3)) = 141,5 - (4 + 27 + 10,5) = 100.$$

**Nota 7.1.6.** Obsérvese la analogía con la fórmula de Euler para poliedros:

$$V - E + F = 2 - 2g,$$

donde  $g$  es el género. En este contexto,  $t$  coincide con el número de agujeros, lo que muestra la relación entre el Teorema de Pick y la topología de superficies.

En resumen, la versión de la fórmula de Pick para polígonos con agujeros muestra cómo la topología influye en el cómputo de áreas discretas: cada agujero introduce una corrección en la expresión, de manera análoga al papel del género en la fórmula de Euler para poliedros. Este fenómeno anticipa el marco más amplio de los polinomios de Ehrhart, donde se estudia el número de puntos del retículo en dilataciones de polígonos y politopos en dimensiones superiores. En la siguiente sección veremos cómo estas ideas permiten extender el Teorema de Pick a un contexto general.

## 7.2. Casos no simples o degenerados

El Teorema de Pick está formulado para polígonos simples, es decir, aquellos cuya frontera es un ciclo poligonal cerrado sin autointersecciones y en los que cada punto de la frontera pertenece exactamente a un único segmento.

Si consideramos polígonos no simples —ya sea por degeneración (vértices repetidos o lados colineales) o por autointersecciones—, la fórmula de Pick en su forma básica

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

deja de ser válida de manera directa.

**Ejemplo 7.2.1. Polígono no simple: el “ocho”.** Un caso elemental es el *polígono en forma de ocho*, formado por dos cuadrados adyacentes que comparten un vértice:

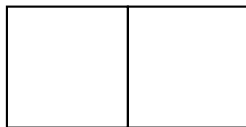


Figura 7.2.1: Polígono degenerado en forma de ocho.

Aquí la frontera se autointersecta en el vértice central. Si aplicamos Pick de forma directa sobre el contorno completo, el área común queda contada dos veces, de modo que el resultado es erróneo.

Una forma de manejar este tipo de casos es descomponer la figura en dos cuadrados simples disjuntos, calcular cada área con la fórmula de Pick, y restar la del cuadrado común si existiera.

- En polígonos con lados colineales o vértices redundantes, el área calculada con la fórmula de Pick no se altera, siempre que la frontera siga describiendo una curva simple.
- En polígonos autointersectados (también llamados “bow-tie” o complejos), la fórmula de Pick deja de ser válida, pues el concepto de “interior” ya no está bien definido. En estos casos es necesario recurrir a nociones más generales de área, como el índice de rotación de la curva poligonal o integrales de línea.
- Una alternativa es aplicar Pick por separado a las regiones simples obtenidas al descomponer el polígono no simple, sumando las áreas con signo positivo o negativo según la orientación de cada componente.

En conclusión, el Teorema de Pick funciona de manera robusta siempre que la región considerada sea un polígono simple. En casos degenerados, es preciso reinterpretar la noción de interior o recurrir a la teoría de *polígonos orientados*, donde la fórmula de Pick sigue siendo válida si se entiende el área con signo.

### 7.3. El caso tridimensional: limitaciones

Una cuestión natural es preguntarse si el Teorema de Pick admite una extensión directa a poliedros en el espacio tridimensional.

En 3D, un poliedro reticulado tendría vértices con coordenadas enteras, y sería razonable intentar relacionar su volumen con el número de puntos interiores y en la frontera del retículo. Sin embargo, no existe una fórmula análoga sencilla: el volumen no puede expresarse únicamente en función de estos números (Beck y Robins, 2007).

Un contraejemplo clásico es el *tetraedro de Reeve*, con vértices

$$(0, 0, 0), \quad (1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (1, 1, r),$$

donde  $r \in \mathbb{Z}^+$ . Este tetraedro no tiene puntos interiores en el retículo y sólo los vértices en la frontera, pero su volumen es  $\frac{r}{6}$ , que puede crecer arbitrariamente. Esto muestra que no es posible obtener una fórmula universal del estilo de Pick en tres dimensiones.

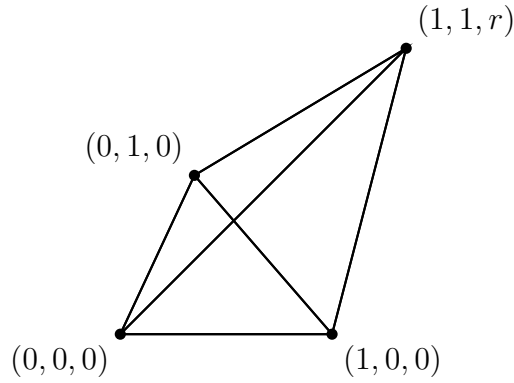


Figura 7.3.1: Representación en perspectiva del tetraedro de Reeve.

Existen, no obstante, generalizaciones parciales. Una de ellas se basa en el *teorema de Minkowski sobre cuerpos convexos* (Cassels, 1959; Gruber y Lekkerkerker, 1987), que garantiza la existencia de puntos del retículo en regiones suficientemente grandes y simétricas. Otra vía son los *polinomios de Ehrhart* (Ehrhart, 1962; Beck y Robins, 2007; Haase, 2009), que cuentan el número de puntos reticulares contenidos en múltiplos de un politopo convexo. En el caso bidimensional, el polinomio de Ehrhart tiene la forma

$$L_P(n) = A(P)n^2 + \frac{B(P)}{2}n + 1,$$

y al evaluar en  $n = 1$  se recupera precisamente la fórmula de Pick:

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

En conclusión, el Teorema de Pick es un resultado especial y elegante, válido únicamente en dimensión dos. En dimensiones superiores, la descripción del número de puntos del retículo requiere herramientas más sofisticadas, como los polinomios de Ehrhart y los métodos de geometría de números.

## 7.4. Conexiones con el teorema de Minkowski

Una de las herramientas más potentes de la geometría de números es el *teorema del cuerpo convexo de Minkowski*. Enunciado en su forma clásica, afirma (Devadoss y O'Rourke, 2011):

**Teorema 7.4.1. (Teorema del cuerpo convexo de Minkowski)** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo, simétrico respecto al origen (es decir, si  $x \in C$  entonces  $-x \in C$ ), acotado y con volumen mayor que  $2^n$ . Entonces  $C$  contiene al menos un punto reticular no nulo.*

**Referencia.** Una demostración puede consultarse en los textos clásicos de geometría de números, por ejemplo en (Cassels, 1959; Gruber y Lekkerkerker, 1987).

Este resultado garantiza la existencia de puntos del retículo en regiones suficientemente grandes y simétricas, y constituye una herramienta fundamental en teoría de números y geometría discreta.

## Aplicación al teorema de Pick

Tal y como se muestra en la Sección 5.4, el teorema de Minkowski proporciona una demostración alternativa del teorema de Pick. La idea central consiste en descomponer un polígono reticulado en *triángulos unimodulares*, y demostrar mediante Minkowski que cada uno tiene área  $1/2$  (Haase, 2009; Haase, Nill, y Paffenholz, 2021). Triangulando cualquier polígono reticulado en un número finito de dichos triángulos, la fórmula de Pick se deduce de forma inmediata.

## Generalizaciones

Aunque el teorema de Pick no se extiende de forma directa a tres o más dimensiones, el teorema de Minkowski sigue siendo válido en todo  $\mathbb{R}^n$  y ofrece un marco conceptual para estudiar la distribución de puntos del retículo en cuerpos convexos. Además, los *polinomios de Ehrhart* (Haase, 2009; Haase y cols., 2021), que cuentan el número de puntos reticulares contenidos en múltiplos de un politopo convexo, generalizan la fórmula de Pick a dimensiones superiores, conectando así la geometría de números con la combinatoria y la teoría de poliedros.

## 7.5. Polinomios de Ehrhart

El Teorema de Pick constituye un caso particular de un marco mucho más amplio, debido a Eugène Ehrhart en los años sesenta (Ehrhart, 1962; Beck y Robins, 2007; Haase, 2009; Haase y cols., 2021). La idea es estudiar, en cualquier dimensión, el número de puntos del retículo que contiene un politopo al ser dilatado.

**Definición 7.5.1.** Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un politopo convexo con vértices en el retículo  $\mathbb{Z}^d$ . El *polinomio de Ehrhart* de  $P$  se define como

$$L_P(k) = \#(kP \cap \mathbb{Z}^d),$$

donde  $kP = \{kx : x \in P\}$  es la dilatación  $k$ -ésima de  $P$ , y  $\#(\cdot)$  denota el número de puntos del retículo.

**Teorema 7.5.2. (Ehrhart)** Para todo politopo reticulado  $P$  de dimensión  $d$ , la función  $L_P(k)$  es un polinomio en  $k$  de grado  $d$ .

**Demostración. (Idea de la demostración)** La demostración completa se puede consultar en (Ehrhart, 1962; Beck y Robins, 2007; Haase, 2009).

La idea central consiste en estudiar la función generadora  $\sum_{k=0}^{\infty} L_P(k)z^k$ , la cual resulta ser una fracción racional cuya expansión implica que  $L_P(k)$  es polinómica en  $k$ .  $\square$

**Ejemplo 7.5.3.** Sea  $P$  el cuadrado unidad  $[0, 1]^2$ . Entonces  $kP = [0, k]^2$ , que contiene exactamente  $(k+1)^2$  puntos del retículo. Por tanto,

$$L_P(k) = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

En este caso, el coeficiente principal 1 coincide con el área del cuadrado, y el término lineal  $2k$  refleja la contribución de los puntos de borde. Evaluando en  $k = 1$  recuperamos la fórmula de Pick:

$$L_P(1) = I + \frac{B}{2} + 1.$$

**Observación 7.5.4.** En dimensión dos, los polinomios de Ehrhart tienen la forma

$$L_P(k) = A(P)k^2 + \frac{B(P)}{2}k + 1,$$

donde  $A(P)$  es el área y  $B(P)$  el número de puntos de borde de  $P$ . Al evaluar en  $k = 1$ , se obtiene exactamente la fórmula de Pick. Esto muestra que el teorema de Pick no es un resultado aislado, sino el caso bidimensional de la teoría general de Ehrhart.

**Ejemplo 7.5.5.** Polinomio de Ehrhart para el cuadrado: en la dilatación  $kP = [0, k]^2$  los puntos de borde (rojo) y los interiores (azul) ilustran la fórmula  $L_P(k) = A(P)k^2 + \frac{B(P)}{2}k + 1$ .

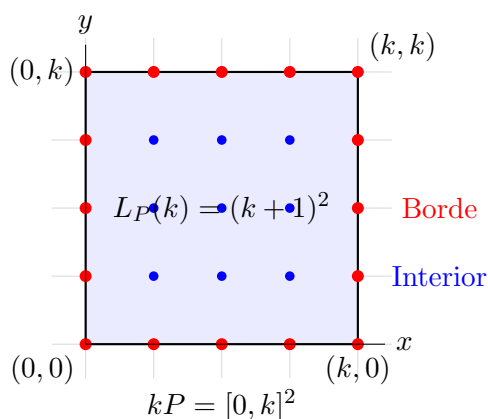


Figura 7.5.1: Polinomio de Ehrhart para el cuadrado.

## 7.6. Conclusiones

El Teorema de Pick proporciona una fórmula sencilla y elegante para calcular el área de polígonos reticulares a partir del número de puntos interiores y de frontera. De este modo, resuelve un problema clásico de la geometría discreta mediante un enfoque elemental basado en el conteo de puntos.

La fórmula se extiende a polígonos con agujeros y a ciertos casos degenerados, pero no admite una generalización directa a dimensiones superiores. En ese contexto aparecen los polinomios de Ehrhart, que recogen la relación entre volumen y puntos reticulares. Además, el teorema tiene aplicaciones en teoría de números, en combinatoria y en la enseñanza de las matemáticas, lo que explica su relevancia todavía en la actualidad.

# Referencias

- Aigner, M., y Ziegler, G. M. (2018). *Proofs from the book* (6th ed.). Springer. Descargado de <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57265-8> doi: 10.1007/978-3-662-57265-8
- Beck, M., y Robins, S. (2007). *Computing the continuous discretely: Integer-point enumeration in polyhedra*. Springer. doi: 10.1007/978-0-387-46105-6
- Cassels, J. W. S. (1959). *An introduction to the geometry of numbers*. Springer.
- Cheng, S.-W., Dey, T. K., y Shewchuk, J. R. (2013). *Delaunay mesh generation*. Chapman Hall/CRC. Descargado de <https://doi.org/10.1201/b12987> doi: 10.1201/b12987
- Davis, T. (2003). *Pick's theorem*. Descargado de <http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf> (Documento de divulgación, 27 de octubre de 2003)
- Delaunay, B. (1934). Sur la sphère vide. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, 7, 793–800.
- Devadoss, S. L., y O'Rourke, J. (2011). *Discrete and computational geometry*. Princeton University Press.
- Diestel, R. (2000). *Graph theory* (2nd, electronic ed. ed., Vol. 173). Springer-Verlag. Descargado de <https://diestel-graph-theory.com/>
- Ehrhart, E. (1962). Sur les polyèdres rationnels homothétiques à  $n$  dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 254, 616–618.
- Fisk, S. (1978). A short proof of chvátal's watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(3), 374. doi: 10.1016/0095-8956(78)90089-6
- Gruber, P. M., y Lekkerkerker, C. G. (1987). *Geometry of numbers*. North-Holland.
- Haase, C. (2009). Pick's theorem and its relatives. *Mathematics Magazine*, 82(3), 198–207. doi: 10.4169/193009709X460002

Haase, C., Nill, B., y Paffenholz, A. (2021). *Lecture notes on lattice polytopes*. (Draft, June 28, 2021. TU Berlin)

Haase, C., y Schicho, J. (2004). *Lattice polygons and the number  $2i + 7$*  (Inf. Téc. n.º RICAM-Report 2004-04). RICAM, Austrian Academy of Sciences. Descargado de <https://www.ricam.oeaw.ac.at/files/reports/04/rep04-04.pdf>

Jara, P., y Ruiz, C. (2008). *El teorema de pick*. (ESTALMAT-Andalucía, Universidad de Granada, 25 de octubre de 2008)

Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2nd ed.). Prentice Hall.