



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Soluciones continuas y discontinuas de ecuaciones hiperbólicas

**Autor/a: José María Villas Bernal
Tutor/es/as: Begoña Cano Urdiales
Año 2025**

Resumen:

El objetivo del trabajo será estudiar y analizar la propagación de señales correspondientes a soluciones de ecuaciones hiperbólicas no lineales. Se considerará tanto el caso de soluciones continuas con posibles discontinuidades en las derivadas como el caso de soluciones débiles o discontinuas. Se describirán ejemplos y aplicaciones.

Palabras clave:

Curva característica, Diagrama característico, Ecuación de renovación, Flujo de tráfico, Frente de onda, Ley de conservación, Onda de choque, Onda de rarefacción, Problema de Riemann, Sistema característico, Tasa de crecimiento intrínseco, Tiempo de rotura, Trayectoria de choque.

Abstract:

The aim of this work is to study and analyze the propagation of signals arising from solutions to nonlinear hyperbolic equations. The analysis will cover both continuous solutions that may exhibit derivative discontinuities, as well as weak or discontinuous solutions. Relevant examples and applications will also be discussed.

Keywords:

Characteristic curve, Characteristic diagram, Renewal equation, Traffic flow, Wavefront, Conservation law, Shock wave, Rarefaction wave, Riemann problem, Characteristic system, Intrinsic growth rate, Blow-up time, Shock trajectory.

Agradecimientos

A mi tutora Begoña, por su paciencia, dedicación y compromiso.

A mis padres, por inculcarme los valores del esfuerzo, la constancia y la resiliencia.

A Mencía, por ser mi compañera de estudio dentro del grado y de vida fuera de él.

A mis amigos de la carrera, por demostrar día a día lo que significa la frase "hoy por ti, mañana por mí".

A mi grupo de amigos de Palencia, por sacarme siempre una sonrisa y motivarme siempre a seguir.

A todas las personas que, de una forma u otra, han contribuido estos últimos cuatro años a ser la persona que hoy soy, gracias de corazón.

Índice general

1. Introducción	9
2. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y curvas características	11
2.1. Ecuaciones lineales	13
2.1.1. Ecuación de advección	13
2.1.2. Coeficientes variables	16
2.1.3. Caso no homogéneo	20
2.2. Ecuaciones no lineales	22
2.2.1. Ecuaciones cuasilineales	26
2.2.2. Solución general	30
2.2.3. Propagación de singularidades	34
2.2.4. Ecuación general de primer orden	39
2.2.5. Integral Completa	45
2.2.6. Un resultado de unicidad. El teorema de Haar	47
3. Soluciones débiles de ecuaciones hiperbólicas	49
3.1. Soluciones discontinuas	50
3.2. Condiciones de salto	52
3.3. Ondas de rarefacción	54
3.4. Propagación de ondas de choque	56
3.5. Formación de ondas de choque	59
4. Dinámicas Poblacionales y Aplicaciones de EDPs en Sistemas de Tráfico	65
4.1. Modelización de Dinámicas Poblacionales: Estructura por Edades	66

4.1.1. Estructura por edades estable en el tiempo	68
4.1.2. Resolución mediante el método de las características .	71
4.2. Sistemas de Tráfico	74
4.2.1. El fenómeno del semáforo	78
4.2.2. Evolución del tráfico con el semáforo en verde	79

Capítulo 1

Introducción

La elección de este tema nace del interés que me ha generado a lo largo de la titulación la aplicación de las matemáticas al mundo real. Por este motivo, me decanté por centrar mi trabajo en el estudio de soluciones continuas y discontinuas de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas no lineales de primer orden, profundizando en aspectos teóricos como las curvas características, las ondas de rarefacción o las ondas de choque. Estos aspectos resultan fundamentales a la hora de comprender y predecir sistemas dinámicos complejos que podemos encontrar en la naturaleza y en diversas aplicaciones tecnológicas. Entre las aplicaciones más destacadas podemos encontrar la evolución de tratamientos contra el cáncer, la predicción de fenómenos atmosféricos, la propagación de ondas acústicas y sísmicas, la simulación de dinámicas de poblaciones estructuradas por edad o tamaño, el análisis de reactores químicos de flujo o la modelización del tráfico de vehículos.

El objetivo de esta memoria será presentar y comprender las soluciones continuas y discontinuas de las EDPs de primer orden hiperbólicas, haciendo especial énfasis en las segundas, distinguiendo aquellos casos en los que la discontinuidad se propaga a partir de las condiciones iniciales de aquellos otros en los que la discontinuidad se forma espontáneamente en la propia evolución de la solución; estas últimas, en sentido clásico, dejarían de existir debido a la formación de frentes abruptos, pero el concepto de solución débil nos permitirá dotarlas de un sentido matemático. La combinación de ejemplos y desarrollo teórico es un elemento fundamental a lo largo de este trabajo, favoreciendo una comprensión profunda, apoyada además por nu-

merosas representaciones gráficas de los ejemplos expuestos. La culminación de la teoría expuesta se produce con la presentación de dos aplicaciones de las soluciones de este tipo de ecuaciones, en este caso, con una aplicación de las soluciones continuas: la estructura por edades de una población, y con otra de las soluciones débiles: el flujo de un sistema de tráfico.

Para la elaboración de este texto han sido indispensables los conocimientos de las asignaturas de *Ecuaciones Diferenciales*, *Ampliación de Ecuaciones Diferenciales* y *Ánálisis Matemático*. Cabe destacar, además, que en mi caso particular no he cursado la asignatura optativa *Ecuaciones en Derivadas Parciales* por lo que la vasta mayoría de conceptos, definiciones y resultados han resultado nuevos para mí.

Para finalizar esta introducción, en cuanto a las referencias bibliográficas utilizadas, destaco [2], [3], [4] y [6] para los capítulos 2 y 3 mientras que, para el capítulo 4, me han sido de gran utilidad [5], [6], [7] y [8].

Capítulo 2

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y curvas características

Este capítulo se estructura en seis secciones distintas. En la primera y segunda sección abordaremos el estudio de ciertos aspectos tanto de ecuaciones lineales como de aquellas no lineales. Introduciremos y explotaremos el método de las curvas características para la obtención de soluciones, suponiendo en todo momento que una solución de clase \mathcal{C}^1 existe y finalizaremos la segunda sección con un teorema que asegura que, bajo ciertas condiciones de regularidad, el método de las curvas características nos proporciona un sistema de ecuaciones paramétricas que define una solución de una ecuación en derivadas parciales (EDP) de primer orden no lineal.

En la tercera sección examinaremos la ecuación casilineal con el objetivo de encontrar un procedimiento que nos provea de una solución. En la segunda parte de esta sección trataremos la solución general expresada en términos de una función arbitraria, presentando el concepto de integral primera para concluir caracterizando la solución general.

En la cuarta sección trataremos la propagación de singularidades: aquel caso en el cual las condiciones iniciales y de frontera vienen dadas por funciones continuas pero con discontinuidades en sus derivadas. Definiremos las expansiones del frente de onda y enunciaremos y probaremos un teorema que

garantiza que la propagación de singularidades se efectúa a través de curvas características.

En la quinta sección pasaremos a tratar la ecuación general de primer orden no lineal donde las direcciones características dejan de ser obvias, pero las descubriremos a partir de un breve análisis.

Por último, en la sexta sección, tras haber centrado nuestro esfuerzo en la construcción de soluciones, pasaremos a tratar la unicidad de las mismas, concluyendo con un teorema que prueba la unicidad de la solución de EDPs no lineales bajo ciertas condiciones.

2.1. Ecuaciones lineales

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden con dos variables independientes para una función $u(x, y)$ es una relación de la forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

y se dice que es *lineal* si tanto la función incógnita u como sus derivadas parciales aparecen como una combinación lineal con coeficientes que solo dependen de las variables independientes x e y .

La función u deberá estar definida en el dominio Ω de \mathbb{R}^2 y ser suficientemente derivable. Además, todos sus valores y los valores de sus derivadas que aparecen en la ecuación deberán estar también en el dominio de F .

2.1.1. Ecuación de advección

Comenzamos con uno de los ejemplos más sencillos: el problema de valor inicial para la *ecuación de advección*:

$$u_t + cu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1.2)$$

En toda la sección asumiremos que $u_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

Si $u = u(x, t)$ es una función de dos variables y $x = x(t)$ define una curva C de clase C^1 en el plano xt , la derivada de u a lo largo de la curva C será, utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\frac{dx}{dt}.$$

Observamos que el lado izquierdo de la ecuación (2.1.1) es la derivada total de u a lo largo de las curvas definidas por la ecuación $\frac{dx}{dt} = c$. Podemos entonces garantizar que

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ a lo largo de las curvas definidas por } \frac{dx}{dt} = c,$$

o, equivalentemente,

$$u = \text{constante en } x - ct = \xi,$$

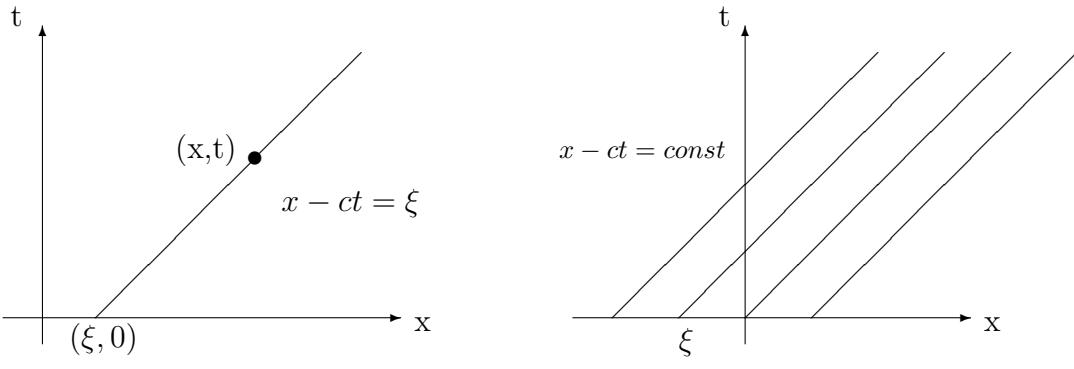
donde ξ es una constante.

En conclusión, a lo largo de la familia de curvas $x - ct = \xi$ la EDP (2.1.1) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria (EDO), y, debido a que u es constante en esta curva,

$$u(x, t) = u(\xi, 0) = u_0(\xi) = u_0(x - ct).$$

Si dibujamos una de esas curvas en el plano xt que pasa por un punto arbitrario (x, t) podremos ver que interseca con el eje x en $(\xi, 0)$. La constante ξ actúa como un parámetro y caracteriza las curvas. Cuando t se presente en términos de x tendremos que la velocidad será c y la pendiente $\frac{1}{c}$ (ver la figura 2.1.1a).

A estas curvas se las conoce como *curvas características*, o simplemente *características*, mientras que la gráfica que muestra el conjunto de curvas características en el plano xt adquiere el nombre de *diagrama característico* (ver la figura 2.1.1b).



(a) Curva característica con velocidad c que pasa por el punto arbitrario (x, t)

(b) Diagrama característico para la EDP (2.1.1) que muestra la familia de curvas características $x - ct = \xi$.

Figura 2.1.1: Curvas características y diagrama característico de la ecuación de advección.

Hasta ahora solo hemos tratado problemas de valor inicial, pero aquellos

con condiciones frontera pueden ser abordados de una forma similar. Por ejemplo, las condiciones frontera a lo largo del eje t ($x = 0$) son de la forma

$$u(0, t) = g(t),$$

que pueden ser parametrizadas por

$$t = \tau, \quad u = g(\tau) \text{ en } x = 0,$$

lo que nos da una condición que usaremos para resolver el sistema característico .

Veamos un ejemplo de este tipo.

Ejemplo 2.1. *Problema de condiciones frontera*

Consideramos el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x > 0, \\ u(0, t) &= t \cdot e^{-t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

El sistema característico será

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = 1, \end{cases}$$

a partir del cual afirmamos que

$$u = c_1 \text{ a lo largo de } x = t + c_2.$$

Puesto que las condiciones en los ejes son diferentes, separamos el problema en dos regiones: $x > t$ y $x < t$.

- *Si $x > t$, es claro que $u = 0$ puesto que u es constante en las características y toma el valor nulo a lo largo del eje x .*
- *Si $x < t$, sobre el eje t podemos parametrizar de la siguiente manera*

$$t = \tau, \quad u = \tau \cdot e^{-\tau}, \quad x = 0.$$

A partir de aquí obtenemos el valor de c_1 y c_2 , que vienen dados por

$$c_1 = \tau e^{-\tau}, \quad c_2 = -\tau.$$

La solución en forma paramétrica viene dada por

$$u = \tau e^{-\tau}, \quad x = t - \tau.$$

Y, finalmente, eliminando el parámetro τ ,

$$u(x, t) = (t - x)e^{x-t}, \quad x < t.$$

Nótese que no existe problema de continuidad ya que si $x = t$ entonces $u(x, x) = u(0, 0) = 0$ (si $g(0) \neq u_0(0)$ la solución no sería continua en $x = t$). Sin embargo, si examinamos u_x para $x = t$, puesto que

$$u_x(x, t) = -e^{x-t} + (t - x)e^{x-t} \text{ para } x < t,$$

entonces

$$u_x(x, x^+) = -1 \neq u_x(x, x^-) = 0,$$

con lo que concluimos que $u(x, t) \notin \mathcal{C}^1$.

2.1.2. Coeficientes variables

Podemos extender los conceptos anteriores a problemas más complejos introduciendo coeficientes variables. Nos encontramos ahora ante el siguiente problema de valor inicial

$$u_t + c(x, t)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1.4)$$

donde $c = c(x, t)$ es una función continua dada.

Razonando análogamente llegamos a que

$$u = \text{constante en } \frac{dx}{dt} = c(x, t).$$

De nuevo, la EDP (2.1.3) se reduce a una EDO a lo largo de una familia muy concreta de curvas definidas por $\frac{dx}{dt} = c(x, t)$. La función $c = c(x, t)$ nos proporciona la velocidad de estas curvas características que depende ahora de dos variables: espacio (x) y tiempo (t).

Ilustremos esta idea con un ejemplo concreto.

Ejemplo 2.2. Sea el siguiente problema de valor inicial

$$u_t - xt u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1.6)$$

Las características vienen definidas por

$$\frac{dx}{dt} = -xt$$

que, integrando, dan lugar a

$$x = \xi e^{-t^2/2}, \quad (2.1.7)$$

donde ξ es una constante (ver la figura 2.1.2).

De acuerdo a lo visto anteriormente, sabemos que

$$u = \text{constante en } x = \xi e^{-t^2/2},$$

y, de esta forma, podemos concluir que

$$u(x, t) = u(\xi, 0) = u_0(\xi) = u_0(x e^{t^2/2})$$

es una solución de (2.1.5)-(2.1.6) válida para todo $t > 0$ (ver la figura 2.1.3). \square

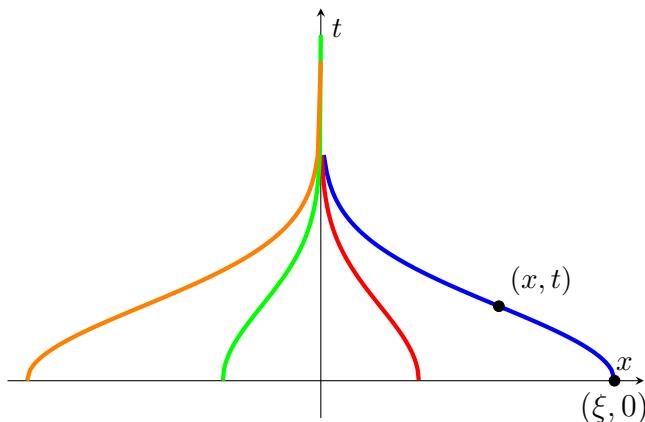


Figura 2.1.2: Diagrama característico de (2.1.5) que muestra la familia de curvas dada por (2.1.7).

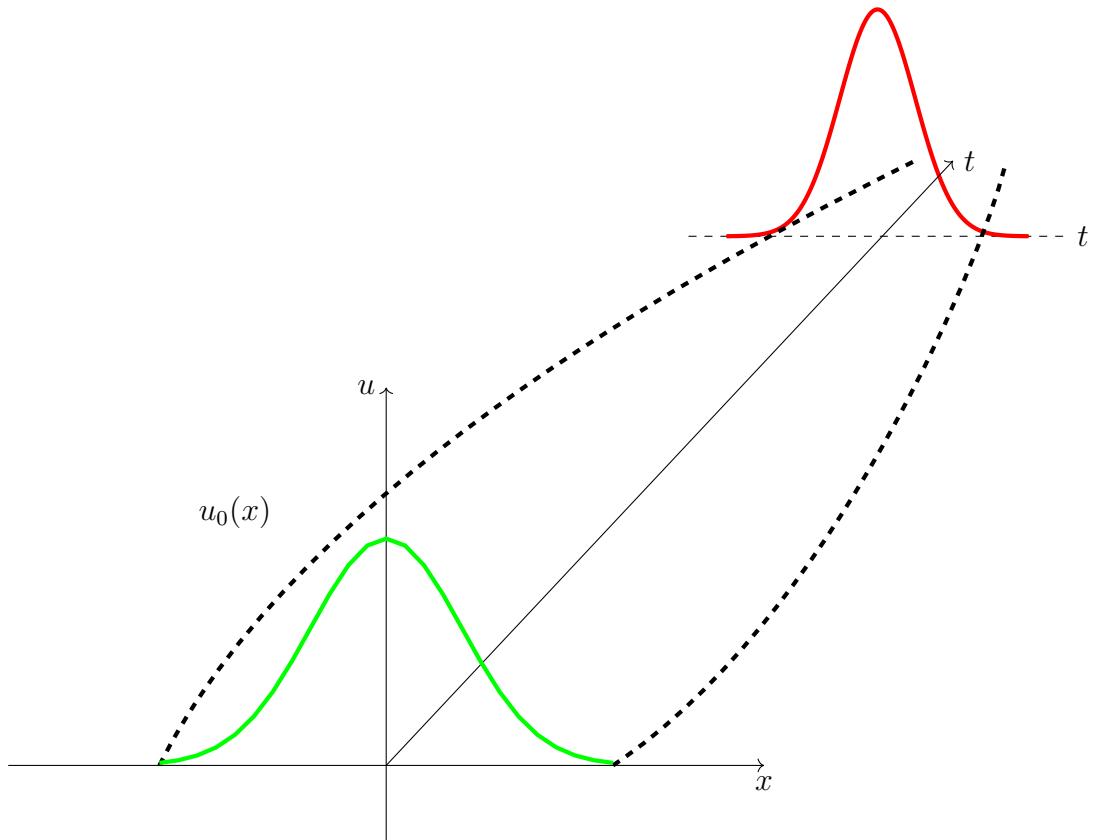


Figura 2.1.3: Diagrama que muestra cómo la señal inicial es propagada en el espacio-tiempo por la EDP (2.1.5) a lo largo de las características dadas por (2.1.7).

Veamos ahora un ejemplo de coeficientes variables con condiciones en la frontera.

Ejemplo 2.3. *Sea el problema*

$$u_t - x^2 u_x = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (2.1.8)$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad x > 0, \quad (2.1.9)$$

$$u(0, t) = 1, \quad t > 0. \quad (2.1.10)$$

El sistema característico viene dado por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = -x^2, \end{cases}$$

y, resolviendo, obtenemos que

$$u = c_1 \quad \text{a lo largo de } \frac{1}{x} = t + c_2, \quad (2.1.11)$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Notamos en este punto que a lo largo de las curvas características, $t \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$ y, por lo tanto, estas no intersecan con el eje $x = 0$ por lo que la solución vendrá determinada tan solo a partir de la condición inicial. Además, cuando $x \rightarrow \infty$ se tiene que $t \rightarrow -c_2$, lo que implica que, para que la característica corte con el eje x y podamos encontrar una solución a partir de la condición inicial, $c_2 > 0$. Ahora bien, si operamos en (2.1.11) y despejamos c_2

$$c_2 = \frac{t - t^2 x}{x t} = \frac{(1 - x t)}{x}, \quad (2.1.12)$$

y puesto que $x > 0$ podemos concluir que $0 < x t < 1$ para que una solución al problema (2.1.8)-(2.1.9)-(2.1.10) exista. Asumiendo esto, si parametrizamos sobre el eje x podemos escribir

$$x = \alpha, \quad u = e^{-\alpha}, \quad t = 0,$$

y, de esta forma, obtenemos el valor que toman las constantes c_1 y c_2

$$c_1 = e^{-\alpha}, \quad c_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

La solución en forma paramétrica viene dada por

$$u = e^{-\alpha}, \quad t = \frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha},$$

y, finalmente, eliminando el parámetro

$$u(x, t) = e^{-\frac{x}{1-xt}}, \quad 0 < xt < 1.$$

Por último, es sencillo comprobar que la solución es continua en \mathbb{R}^2 puesto que $g(0) = u_0(0) = 1$.

2.1.3. Caso no homogéneo

El método de las características también puede ser extendido a problemas no homogéneos. Nos encontramos así ante el siguiente problema de valor inicial

$$u_t + c(x, t)u_x = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1.13)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1.14)$$

donde c y f son funciones continuas dadas. Ahora, el sistema característico de (2.1.13) adquiere la siguiente expresión

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(x, t), \\ \frac{dx}{dt} = c(x, t), \end{cases} \quad (2.1.15)$$

que puede ser resuelto, en teoría, teniendo en cuenta las condiciones iniciales

$$x(0) = \xi, \quad u(x(0), 0) = u_0(\xi). \quad (2.1.16)$$

Los resultados de existencia y unicidad vistos para ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular, el teorema de Picard, nos garantiza que existe una solución, al menos local, de (2.1.15) sujeto a las condiciones iniciales (2.1.16) en un entorno a la derecha de $t = 0$ si f y c son de clase \mathcal{C}^1 en un entorno de $(\xi, 0)$. Sin embargo, una solución global para todo $t > 0$ puede no existir.

En la práctica, encontrar una solución exacta de (2.1.15) puede ser imposible y tendremos entonces que utilizar métodos de integración numéricos. Veamos que si c es constante, entonces (2.1.15) es resoluble de forma directa.

Ejemplo 2.4. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= f(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

El sistema característico viene dado por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t), \\ \frac{dx}{dt} = c. \end{cases} \quad (2.1.17)$$

A partir de la segunda igualdad, mediante separación de variables, podemos obtener

$$x = tc + x_0, \quad (2.1.18)$$

mientras que con la primera igualdad llegamos a que

$$u(x, t) = \int_0^t f(s) ds + u(x_0, 0).$$

A partir de las condiciones iniciales dadas sabemos que $u(x_0, 0) = u_0(x_0)$ y así podemos concluir que

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s) ds,$$

donde hemos despejado x_0 a partir de (2.1.18).

2.2. Ecuaciones no lineales

Cuando introducimos términos no lineales en u o en sus derivadas, la situación hasta ahora estudiada cambia, lo que nos lleva a analizar en esta sección la información que nos aportan las curvas características en este tipo de ecuaciones.

Para empezar, vamos a observar qué ocurre en uno de los casos más sencillos, esto es, el problema de valor inicial de la siguiente EDP de primer orden no lineal:

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

donde $c(u)$ es una función de u continua y derivable. Durante toda la sección asumiremos que la señal inicial u_0 es también continua y derivable.

Podemos reconocer (2.2.1) como la ley básica de conservación

$$u_t + \phi(u)_x = 0, \quad c(u) = \phi'(u)$$

donde $\phi = \phi(u)$ es el flujo.

Para estudiar la ecuación (2.2.1), también conocida como *ecuación de onda cinemática*, supongamos, en primer lugar, que existe una solución $u = u(x, t)$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$. De igual forma que en la sección anterior, y motivado por cómo abordamos el estudio de las EDPs lineales, definamos las curvas características de (2.2.1) como las soluciones de

$$\frac{dx}{dt} = c(u), \quad (2.2.3)$$

donde $u = u(x, t)$.

Resulta evidente que en este caso las características no se pueden determinar a priori puesto que el lado derecho de la ecuación depende de la solución que aún no conocemos. Aún así, si existe la solución del problema (2.2.1)-(2.2.2), podemos afirmar que en las curvas definidas por (2.2.3) la EDP (2.2.1) se convierte en

$$u_t + c(u)u_x = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = 0,$$

o que, dicho de otro modo, $u = \text{constante}$ a lo largo de estas curvas.

Es sencillo ver que, geométricamente, las características definidas por (2.2.3) son rectas puesto que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dc(u)}{dt} = c'(u) \frac{du}{dt} = 0.$$

Integrando en (2.2.3) y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, la ecuación de esta curva, que podemos observar en la figura 2.2.1, será

$$x - \xi = c(u_0(\xi))t, \quad (2.2.4)$$

donde hemos tenido en cuenta que u es constante en estas curvas y por tanto

$$u(x, t) = u(\xi, 0) = u_0(\xi).$$

Así pues, podemos concluir que, de existir una solución al problema de valor inicial (2.2.1) para $t > 0$, esta necesariamente tiene que ser

$$u(x, t) = u_0(\xi), \quad (2.2.5)$$

donde $\xi = \xi(x, t)$ viene definido implícitamente por (2.2.4).

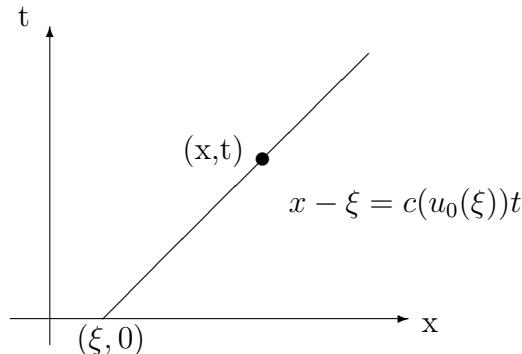


Figura 2.2.1: Característica definida por $x - \xi = c(u_0(\xi))t$ con velocidad $c(u_0(\xi))$

Recordemos que hemos obtenido la expresión de la solución del problema (2.2.1)-(2.2.2) asumiendo que era de clase \mathcal{C}^1 y que existía para todo $t > 0$.

Podemos dejar de realizar esta suposición si probamos ahora que, de hecho, una solución con la forma $u(x, t) = u_0(\xi)$ existe bajo ciertas hipótesis. Para ello, notemos en primer lugar que la ecuación (2.2.4) define implícitamente ξ en función de x y t siempre que

$$D = 1 + c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)t \neq 0, \quad (2.2.6)$$

(para verlo basta con aplicar el teorema de la función implícita). Además, las derivadas parciales de la solución vienen dadas por

$$u_t = u'_0(\xi)\xi_t, \quad u_x = u'_0(\xi)\xi_x,$$

donde las derivadas parciales ξ_t y ξ_x pueden ser calculadas derivando en (2.2.4), de tal forma que

$$-\xi_t = c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)\xi_t t + c(u_0(\xi)), \quad 1 - \xi_x = c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)\xi_x t,$$

y por tanto, teniendo en cuenta de nuevo (2.2.6) para simplificar las expresiones,

$$u_t = -\frac{c(u_0(\xi))u'_0(\xi)}{D}, \quad u_x = \frac{u'_0(\xi)}{D}. \quad (2.2.7)$$

Conocidas estas derivadas parciales notamos que, en efecto, $u_t + c(u)u_x = 0$ como queríamos probar.

Recapitulando, hemos probado que, bajo la hipótesis de que $D \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, existe una solución $u = u(x, t)$ del problema (2.2.1)-(2.2.2) para todo $t > 0$ y que además esta tiene necesariamente la forma (2.2.5). Es conveniente apuntar que el hecho de que las derivadas u'_0 y c' tengan ambas el mismo signo es una condición suficiente para garantizar la hipótesis pues, de este modo, D será siempre positivo. Recogemos este resultado en forma de teorema.

Teorema 2.1. *Si las funciones c y u_0 son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, y, o bien ambas son crecientes, o bien ambas decrecientes en \mathbb{R} (no necesariamente estrictamente), entonces el problema de valor inicial (2.2.1)-(2.2.2) tiene una única solución que está definida implícitamente por las ecuaciones paramétricas*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(\xi), \\ x - \xi &= c(u_0(\xi))t. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5. Consideramos el siguiente problema

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2.8)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{si } x < 0; \quad u(x, 0) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0. \quad (2.2.9)$$

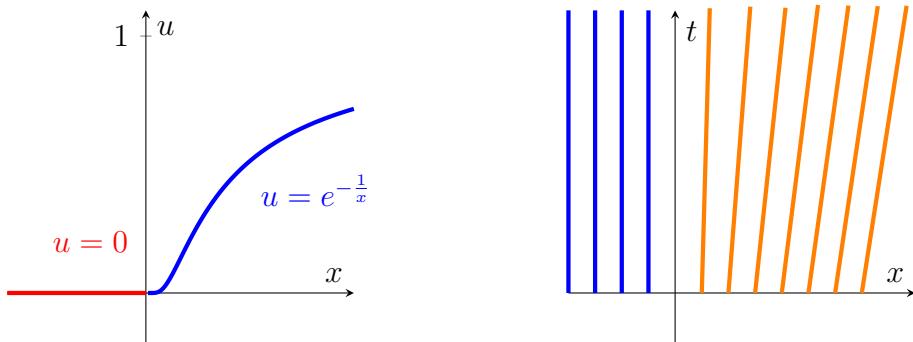
En este caso, tanto $c(u) = u$ como $u_0 = u(x, 0)$ son funciones continuas y derivables con continuidad creciente en \mathbb{R} (ver la figura 2.2.2a), por lo que estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.1. Además, las curvas características vienen dadas por $x - \xi = c(u_0(\xi))t$ y, por la definición de u_0 debemos distinguir entre:

- Si $\xi \leq 0$, $x = \xi$ es la característica, que en el plano xt es una recta vertical.
- Si $\xi > 0$, $x = \xi + e^{-\frac{1}{\xi}}t$ es la característica, que nuevamente es una recta en el plano xt que pasa de ser vertical cuando $\xi \rightarrow 0$ a tener pendiente 1 cuando $\xi \rightarrow \infty$ (ver la figura 2.2.2b).

Con todo esto, la solución del problema (2.2.8)-(2.2.9) viene dada por

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 & \text{para } x \leq 0, \\ u(x, t) = e^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

donde $x - \xi = te^{-\frac{1}{\xi}}$ (véase la figura 2.2.3).



(a) Gráfica de la forma de onda inicial u_0 (2.2.9).

(b) Diagrama característico de (2.2.8)-(2.2.9).

Figura 2.2.2: Gráficos de condiciones iniciales y curvas características del ejemplo 2.5.

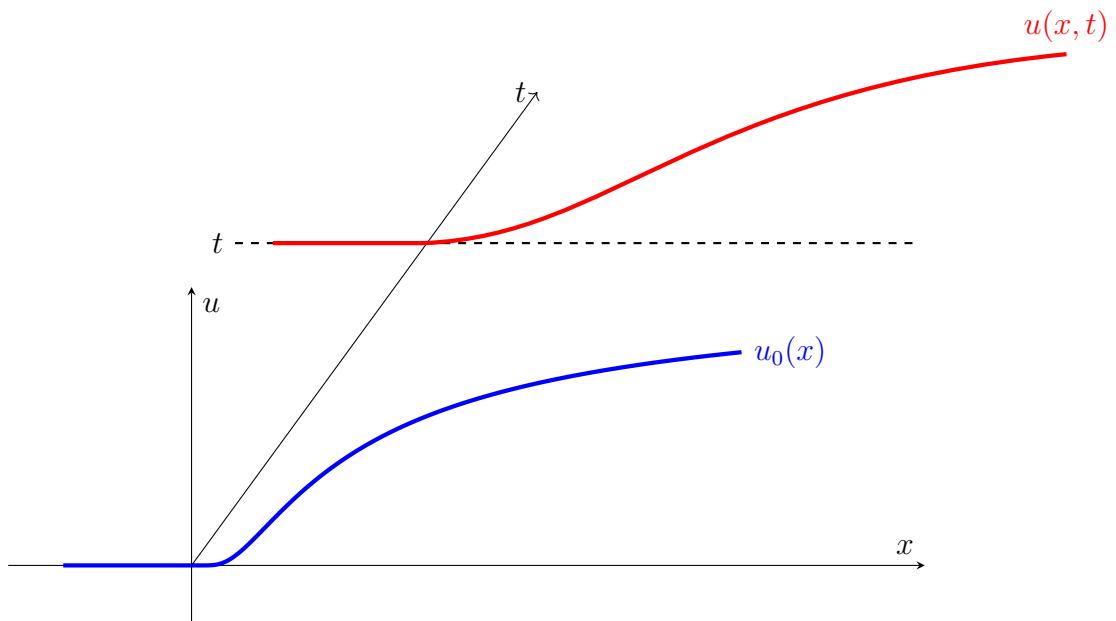


Figura 2.2.3: Propagación de la señal inicial $u_0(x)$ a lo largo de las características.

2.2.1. Ecuaciones cuasilineales

En esta sección pasamos a estudiar unas ecuaciones no lineales particulares que tienen la forma

$$u_t + c(x, t, u)u_x = f(x, t, u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.2.10)$$

A estas ecuaciones cuyos coeficientes pueden depender de u pero que son lineales en cuanto a sus derivadas de primer orden, se las conoce como *ecuaciones cuasilineales* de primer orden (incluyen el ejemplo introductorio visto anteriormente).

Siguiendo con la disposición de las subsecciones anteriores, comenzamos abordando el problema de valor inicial. Consideramos asociado a (2.2.10) una condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2.11)$$

donde u_0 nuevamente es una función continua y derivable en \mathbb{R} .

Nuestro objetivo en esta sección no solo será estudiar (2.2.10)-(2.2.11) bajo la hipótesis de que una solución continua y derivable existe, sino que, además, iremos un poco más allá para mostrar un método que resuelva (2.2.10)-(2.2.11).

Para comenzar, supongamos que existe una solución de (2.2.10)-(2.2.11) $u = u(x, t)$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Como en las secciones anteriores, (2.2.10) se reduce a la EDO

$$\frac{du}{dt} = f(x, t, u), \text{ a lo largo de } \frac{dx}{dt} = c(x, t, u).$$

Por tanto, para obtener una expresión de la solución, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(x, t, u) \\ \frac{dx}{dt} = c(x, t, u), \end{cases} \quad (2.2.12)$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$x(0) = \xi, \quad u(x(0), 0) = u_0(\xi).$$

Tratemos un primer ejemplo que ilustre esta idea.

Ejemplo 2.6. Consideramos el siguiente problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = -u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2.13)$$

$$u(x, 0) = -\frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2.14)$$

El sistema característico viene dado por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u, \\ \frac{dx}{dt} = u, \end{cases} \quad (2.2.15)$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$u(x(0), 0) = -\frac{\xi}{2}, \quad x(0) = \xi. \quad (2.2.16)$$

Su solución es, en forma paramétrica,

$$u = -\frac{\xi}{2}e^{-t}, \quad x = \frac{\xi}{2}(1 + e^{-t}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Nótese que podemos despejar el parámetro de la segunda igualdad

$$\xi = \frac{2x}{1 + e^{-t}},$$

para así obtener la expresión

$$u(x, t) = -\frac{xe^{-t}}{1 + e^{-t}},$$

que es una solución continua y derivable para todo $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Pasamos ahora a estudiar otro ejemplo, pero esta vez con condiciones de valor inicial y frontera.

Ejemplo 2.7. Consideramos el problema dado por

$$u_t + uu_x = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (2.2.17)$$

$$u(x, 0) = 1, \quad x > 0, \quad (2.2.18)$$

$$u(0, t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad t > 0. \quad (2.2.19)$$

Con estas condiciones tenemos que

$$u = \text{constante en } \frac{dx}{dt} = u,$$

lo que implica que las curvas características son rectas, pero su expresión variará en función de la región en la que nos encontremos (ver la figura 2.2.4).

- Si $x \geq t$, puesto que $u = 1$ a lo largo del eje x , en todas las características que corten a dicho eje tendremos que $\frac{dx}{dt} = 1$ y las características tendrán la forma

$$x = t + \xi$$

- Si $x < t$, las rectas características que cortan al eje t lo hacen en un punto que denotamos por $(0, \tau)$ y, entonces, basándonos en la definición de pendiente, podemos obtener la ecuación de la curva como sigue

$$\frac{dx}{dt} = u \Rightarrow u(0, \tau) = \frac{x - 0}{t - \tau} \Rightarrow x = u(0, \tau)(t - \tau),$$

llegando así a que las curvas características vienen dadas por

$$x = \frac{1}{1 + \tau^2}(t - \tau). \quad (2.2.20)$$

Pasamos, una vez obtenidas las expresiones de las curvas características, a analizar la solución en las distintas regiones:

- Si $x \geq t$, puesto que $u = 1$ a lo largo del eje x , entonces u tomará este valor constante en toda la región.
- Si $x < t$ sabemos que

$$u(x, t) = u(0, \tau) = \frac{1}{1 + \tau^2}, \quad (2.2.21)$$

donde $\tau = \tau(x, t)$ viene dado implícitamente por (2.2.20). En este caso, podemos despejar y obtener

$$\tau = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x(t - x)}}{2x}, \quad (2.2.22)$$

tras haber desecharado la solución que no garantiza el carácter positivo de τ al resolver la ecuación de segundo grado.

Concluimos así que una solución de (2.2.17)-(2.2.19) es

$$\begin{cases} u(x, t) = 1 & \text{para } x \geq t, \\ u(x, t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4x(t - x)}}{2x}\right)^2} & \text{para } x < t, \end{cases}$$

Nótese que cuando $x = t$ ocurre que $\tau = 0$, con lo que la solución obtenida es continua. Además, si definimos $f(x, t) = \tau = (-1 + \sqrt{1 + 4x(t - x)})/2x$

entonces la expresión de la solución cuando $x < t$ se puede expresar como $u(x, t) = 1/(1 + f^2)$. En este punto es sencillo ver que las derivadas parciales respecto de x cuando $t \rightarrow x$ tanto por la derecha como por la izquierda coinciden

$$u_x(x, x^-) = 0 = \frac{-2f(x, x^+)f_x(x, x^+)}{(1 + f^2(x, x^+))^2} = u_x(x, x^+),$$

donde para la segunda igualdad aplicamos que $f \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow t$. Por otro lado, si calculamos las derivadas parciales respecto de t notamos que

$$u_t(t^-, t) = 0 = \frac{2f(t^-, t)f_t(t^-, t)}{(1 + f^2(t^-, t))^2} = u_t(t^-, t),$$

de donde concluimos que u es de clase \mathcal{C}^1 .

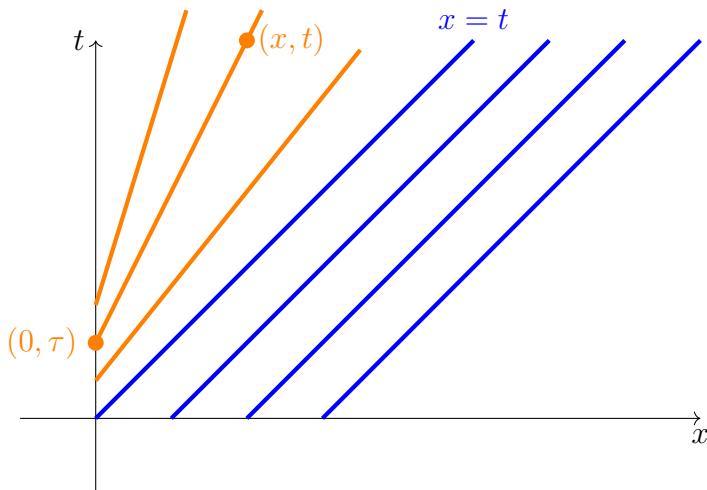


Figura 2.2.4: Diagrama característico de (2.2.17)-(2.2.19).

En general, es improbable que podamos resolver el sistema característico como en los ejemplos precedentes, obteniendo una solución con una expresión "cerrada". Por este motivo, abordamos ahora el estudio desde una perspectiva más general.

2.2.2. Solución general

En algunos contextos es conveniente expresar la solución de (2.2.10) en términos de una función arbitraria. Para este propósito, algunas considera-

ciones y definiciones previas son necesarias antes de comenzar.

Decimos que una función $\psi(x, t, u)$ es *integral primera* del sistema característico (2.2.12) si $\psi(X(t), t, U(t)) = k$ donde $(x = X(t), u = U(t))$ es una solución de (2.2.12) para todo $t > 0$.

Si derivamos respecto de t en esta última igualdad y usamos la regla de la cadena, obtenemos

$$\psi_x c + \psi_t + \psi_u f = 0, \quad t > 0, \quad (2.2.23)$$

donde cada uno de los términos que aparecen es evaluado en $(X(t), t, U(t))$.

Además, si $\psi(x, t, u)$ es una integral primera del sistema característico, entonces la ecuación $\psi(x, t, u) = k$ define implícitamente una superficie $u = u(x, t)$ en cierto dominio D del plano xt siempre que $\psi_u \neq 0$ en dicho dominio.

Usando de nuevo la regla de la cadena, al derivar respecto de x y t se obtiene

$$\psi_t + \psi_u u_t = 0, \quad \psi_x + \psi_u u_x = 0,$$

y, despejando, podemos obtener las derivadas parciales de la solución

$$u_t = -\frac{\psi_t}{\psi_u}, \quad u_x = -\frac{\psi_x}{\psi_u}, \quad (x, t) \in D,$$

donde cada término de la parte derecha es evaluado en $(x, t, u(x, t))$. Notemos que la curva $(X(t), t, U(t))$ se encuentra, en efecto, en la superficie definida anteriormente puesto que $\psi(X(t), t, U(t)) = k$.

Probemos ahora que esta superficie $u = u(x, t)$ es solución de la EDP (2.2.10). Para ello, sea (ξ, τ) un punto arbitrario de D , entonces

$$u_t(\xi, \tau) + c u_x(\xi, \tau) = -\frac{\psi_t}{\psi_u} - c \frac{\psi_x}{\psi_u}, \quad (2.2.24)$$

donde c y todos los términos de la derecha son evaluados en (ξ, τ, ω) siendo $\omega = u(\xi, \tau)$. Podemos considerar la curva solución del sistema característico que en $t = \tau$ cumple $U(\tau) = \omega$, $X(\tau) = \xi$. Estamos entonces en condiciones de aplicar la igualdad (2.2.23) que habíamos visto para integrales primeras del sistema característico, obteniendo

$$-\frac{\psi_t}{\psi_u} - c \frac{\psi_x}{\psi_u} = f,$$

y concluyendo así que $u = u(x, t)$ satisface la ecuación (2.2.10) para todo $(x, t) \in D$.

Hemos razonado a partir de una integral primera del sistema característico que es un sistema en \mathbb{R}^2 y, por ende, está determinado por dos parámetros. Es por tanto de esperar que existan dos integrales primeras independientes del mismo que denotaremos por $\psi(x, t, u)$ y $\chi(x, t, u)$. Esto precisamente motiva que podamos afirmar que la solución general de (2.2.10) venga dada por

$$G(\psi(x, t, u), \chi(x, t, u)) = 0, \quad (2.2.25)$$

para una función G arbitraria.

Veamos ahora el siguiente teorema, generalización de lo que acabamos de probar para $G(\psi, \chi) = \psi$.

Teorema 2.2. *Sea una función G tal que $G_\psi \psi_u + G_\chi \chi_u \neq 0$, entonces la ecuación (2.2.25) definirá, por el teorema de la función implícita, una función $u = u(x, t)$ que es solución de (2.2.10).*

Demostración. Partiendo de

$$G(\psi(x, t, u(x, t)), \chi(x, t, u(x, t))) = 0,$$

nuestro objetivo será determinar u_x y u_t y garantizar que satisfacen la ecuación (2.2.10).

Derivando respecto de x y teniendo en cuenta la regla de la cadena,

$$G_\psi(\psi_x + \psi_u u_x) + G_\chi(\chi_x + \chi_u u_x) = 0.$$

De manera análoga, derivando respecto de t

$$G_\psi(\psi_t + \psi_u u_t) + G_\chi(\chi_t + \chi_u u_t) = 0.$$

Sacando factor común y despejando en ambas expresiones podemos escribir

$$u_x(G_\psi \psi_u + G_\chi \chi_u) = -(G_\psi \psi_x + G_\chi \chi_x), \quad u_t(G_\psi \psi_u + G_\chi \chi_u) = -(G_\psi \psi_t + G_\chi \chi_t).$$

Entonces

$$u_x = -\frac{G_\psi \psi_x + G_\chi \chi_x}{G_\psi \psi_u + G_\chi \chi_u}, \quad u_t = -\frac{G_\psi \psi_t + G_\chi \chi_t}{G_\psi \psi_u + G_\chi \chi_u},$$

donde hemos usado la hipótesis de que $G_\psi\psi_u + G_\chi\chi_u \neq 0$. En este punto

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= -\frac{G_\psi\psi_t + G_\chi\chi_t + c(G_\psi\psi_x + G_\chi\chi_x)}{G_\psi\psi_u + G_\chi\chi_u} = -\frac{G_\psi(\psi_t + c\psi_x) + G_\chi(\chi_t + c\chi_x)}{G_\psi\psi_u + G_\chi\chi_u} \\ &= \frac{G_\psi(\psi_u f) + G_\chi(\chi_u f)}{G_\psi\psi_u + G_\chi\chi_u} = f, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos aplicado (2.2.23) para ψ y χ por ser integrales primeras. \square

Desarrollemos lo estudiado en esta subsección en un ejemplo.

Ejemplo 2.8. Consideramos la ecuación

$$u_t + 2tu_x = \frac{x}{2u+1}. \quad (2.2.26)$$

El sistema característico es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2t \\ \frac{du}{dt} = \frac{x}{2u+1}. \end{cases}$$

A partir de la primera ecuación obtenemos la integral primera

$$\psi = x - t^2 = c_1,$$

y la segunda ecuación se convierte entonces en

$$\frac{du}{dt} = \frac{t^2 + c_1}{2u+1}.$$

Tras resolver esta EDO mediante separación de variables, podemos afirmar que otra integral primera tendrá la forma

$$\chi = u^2 + u - \frac{t^3}{3} - c_1t = u^2 + u + \frac{2}{3}t^3 - xt = c_2.$$

En este punto podemos concluir, de acuerdo con el teorema 2.2, que una solución general será

$$G(x - t^2, u^2 + u + \frac{2}{3}t^3 - xt) = 0,$$

donde G es una función arbitraria.

Nótese que esta expresión define, a su vez, una solución implícita

$$u^2 + u + \frac{2}{3}t^3 - xt = g(x - t^2), \quad (2.2.27)$$

donde g es una función arbitraria, la cual, considerando la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, debe cumplir que

$$u_0^2(x) + u_0(x) = g(x).$$

Con todo esto, la ecuación de segundo grado (2.2.27) en u se puede resolver para obtener una solución de (2.2.26) explícita.

2.2.3. Propagación de singularidades

Hasta este momento hemos asumido que tanto las condiciones iniciales como las condiciones frontera venían dadas por funciones de clase \mathcal{C}^1 . En esta sección trataremos el caso en el que estas condiciones vienen dadas por funciones continuas pero con discontinuidades en sus derivadas; en particular, la cuestión que trataremos será cómo se propagan estas discontinuidades a lo largo del plano xt donde $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Comenzamos abordando un ejemplo sencillo que nos permitirá intuir lo que va a ocurrir en el caso general.

Ejemplo 2.9. Consideramos la siguiente ecuación de advección

$$u_t + cu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2.28)$$

sujeta a una condición inicial dada por una función u_0 definida a trozos como sigue

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

De acuerdo con lo expuesto en la sección 2.1, la solución general de (2.2.28) es $u(x, t) = f(x - ct)$ y u es constante en las curvas características $x - ct = k$ las cuales transportan la señal inicial a la región $t > 0$.

En consecuencia, las discontinuidades de u' en $x = 0$ y $x = 1$ son propagadas a lo largo de las características, como podemos observar en la figura 2.2.5.

Esta idea intuitiva que hemos desarrollado a partir de un primer ejemplo la formalizamos ahora en el teorema 2.3, válido para la ecuación de onda cinemática no lineal simple, que tiene la forma

$$u_t + c(u)u_x = 0. \quad (2.2.29)$$

Estas curvas a lo largo de las cuales las soluciones sufren discontinuidades en sus derivadas son también conocidas como *frentes de onda*.

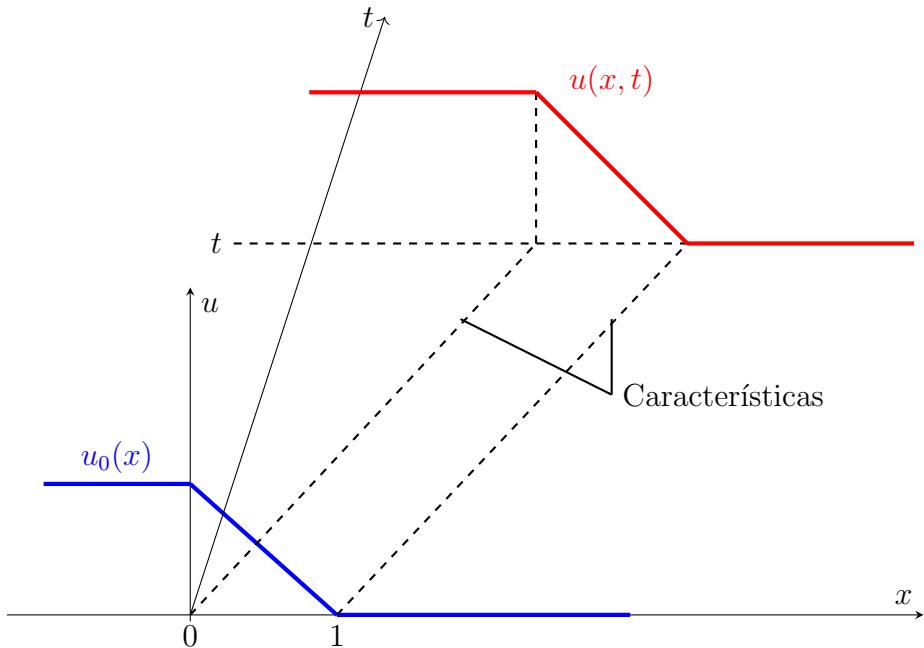


Figura 2.2.5: Discontinuidades en las derivadas propagadas a lo largo de las características.

Teorema 2.3. *Sea D una región del plano xt y sea $\xi(x, t) = x - X(t) = 0$ una curva continua y con derivada también continua sobre esta región que divide D en dos partes disjuntas D^+ y D^- . Sea u una solución de (2.2.29) de clase C^1 en D^+ y D^- , continua en D y cuyas derivadas sufren un salto simple a lo largo de $\xi(x, t) = 0$. Entonces $\xi(x, t) = 0$ es una curva característica.*

Demostración. Para analizar el comportamiento de u a lo largo del frente de onda, introducimos un nuevo sistema de coordenadas que viene dado por

$$\xi = \xi(x, t), \quad \eta = \eta(x, t),$$

donde $\eta(x, t) = k_1$ es una familia de curvas ortogonales a $\xi(x, t) = k_2$ siendo k_1 y k_2 constantes. En este punto, podemos calcular una nueva expresión de las derivadas parciales de la solución aplicando la regla de la cadena

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t, \quad u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x.$$

Con estas nuevas variables la EDP (2.2.29) se convierte en

$$(\xi_t + c(u)\xi_x)u_\xi + (\eta_t + c(u)\eta_x)u_\eta = 0, \quad (2.2.30)$$

válida cuando $\xi > 0$ y $\xi < 0$.

Por otro lado, por hipótesis

$$u(0+, \eta) = u(0-, \eta), \quad (2.2.31)$$

y, por tanto, derivando parcialmente respecto a η

$$u_\eta(0+, \eta) = u_\eta(0-, \eta), \quad (2.2.32)$$

es decir, las derivadas parciales de u respecto de η son continuas a lo largo del frente de onda $\xi(x, t) = 0$.

Pasamos ahora a introducir la notación con la que mediremos el salto que sufre u a lo largo de $\xi = 0$ en su derivada. Sea Q una variable que asume un valor Q_+ a la derecha del frente de onda y un valor Q_- a la izquierda del mismo. Entonces, el salto sufrido por Q a lo largo del frente de onda se define como

$$[Q] = Q_- - Q_+.$$

Continuando con nuestros cálculos, si tomamos el límite en (2.2.30) cuando $\xi \rightarrow 0+$ y cuando $\xi \rightarrow 0-$ y restamos al segundo término el primero, obtenemos

$$(\xi_t + c(u)\xi_x)[u_\xi] = 0, \quad (2.2.33)$$

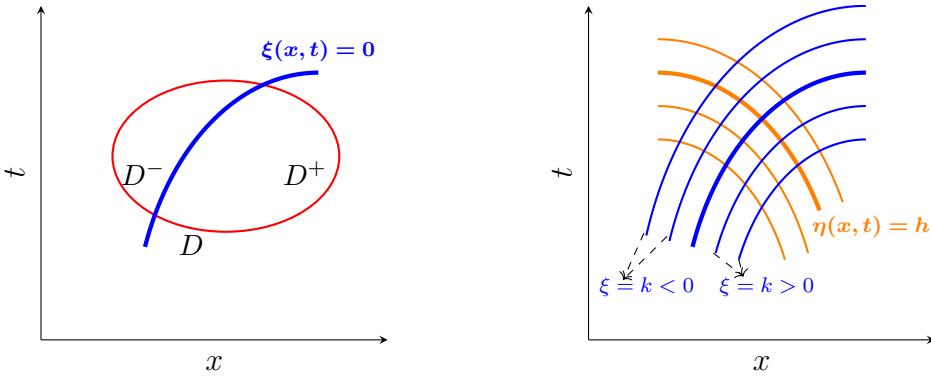
donde hemos hecho uso de (2.2.32). Si asumimos que $[u_\xi] \neq 0$ entonces

$$\xi_t + c(u)\xi_x = 0. \quad (2.2.34)$$

En particular, si el frente de onda viene dado por $\xi(x, t) = x - X(t) = 0$, entonces esta última igualdad se transforma en

$$\frac{dX}{dt} = c(u), \quad (2.2.35)$$

o lo que es lo mismo, $\xi(x, t) = 0$ es una curva característica, como queríamos probar. \square



- (a) Región D particionada en D^+ y D^- por la curva $\xi(x, t) = 0$. (b) Familias de curvas $\xi(x, t) = k$ y $\eta(x, t) = h$, ortogonales entre sí.

Figura 2.2.6: Gráficos que ilustran el teorema 2.3 y su demostración.

Sabemos ya que las discontinuidades en las derivadas son propagadas a lo largo de las curvas características. Pasamos ahora a estudiar la magnitud del salto $[u_x]$ según la señal inicial se propaga vía (2.2.29).

En particular, vamos a estudiar la situación particular en la que el frente de onda pasa por el origen y el estado de la solución a la derecha de este frente es un estado constante dado por $u = u_0$. Por este motivo, las características que se encuentren más allá del frente de onda tendrán una velocidad constante $c_0 = c(u_0)$.

Habiendo notado que las características dadas por $\xi = \text{constante}$ serán paralelas al frente de onda, nuestro propósito ahora es examinar el comportamiento de la onda u cuando se acerca al frente de onda por la izquierda (valores de ξ pequeños y negativos) cuando el tiempo t crece. Consideraremos entonces u en términos de las variables ξ y t , sabiendo que $\xi = x - c_0 t$

$$u = \begin{cases} u_0, & \xi > 0 \\ u_0 + u_1(t)\xi + \frac{1}{2}u_2(t)\xi^2 + \dots, & \xi < 0 \end{cases}$$

donde, para la segunda expresión, hemos realizado el desarrollo de Taylor en ξ en torno a $\xi = 0$ teniendo en cuenta que $u_1(t) = u_\xi(0, t)$, $u_2(t) = u_{\xi\xi}(0, t)$...

Si derivamos parcialmente, podemos calcular

$$u_t = u_1(t)(-c_0) + \xi u'_1(t) + u_2(t)\xi(-c_0) + O(\xi^2), \quad (2.2.36)$$

$$u_x = u_1(t) + u_2(t)\xi + O(\xi^2). \quad (2.2.37)$$

Y, de nuevo, realizando el desarrollo de Taylor, esta vez en un entorno de u_0 ,

$$c(u) = c_0 + c'(u_0)(u - u_0) + O((u - u_0)^2) \quad (2.2.38)$$

$$= c_0 + c'(u_0)u_1(t)\xi + O(\xi^2). \quad (2.2.39)$$

Nuestro objetivo es sustituir las variables independientes t y x por t y ξ , donde recordemos que ξ es una coordenada curvilínea que mide la distancia al frente de onda. Sustituimos (2.2.36)-(2.2.38) en la EDP (2.2.29) y obtenemos

$$-c_0u_1 + \xi(u'_1 - c_0u_2) + O(\xi^2) + ((c_0 + c'(u_0)u_1\xi + O(\xi^2))(u_1 + u_2\xi + O(\xi^2)) = 0.$$

Esta ecuación debe ser válida para todos los valores de ξ . Por tanto, los coeficientes de las potencias de ξ de grado menor que 2 deben anularse. Es inmediato que el coeficiente de grado 0 se anula y, por otro lado, la anulación del coeficiente de ξ conduce a:

$$u'_1 + c'(u_0)u_1^2 = 0, \quad (2.2.40)$$

que es una ecuación diferencial para la corrección de primer orden $u_1(t)$.

Puesto que u_x viene dado por (2.2.37) y estamos haciendo tender $\xi \rightarrow 0$, la función $u_1(t)$ approximará el salto $[u_x]$ de primer orden tras despreciar el término que acompaña a ξ (recordemos que $[u_x] = u_x(\xi^-, t)$ puesto que $u_x(\xi^+, t) = 0$). Resolviendo la ecuación diferencial de variables separables (2.2.40), siempre que $u_1(t) \neq 0$, resulta

$$u_1(t) = \frac{1}{k + c'(u_0)t}, \quad (2.2.41)$$

donde k es una constante de integración que puede ser determinada a partir de los datos iniciales, es decir, del salto inicial en $[u_x]$ cuando $t = 0$.

Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que $c'(u_0) > 0$. Podemos encontrarnos ante las siguientes situaciones:

- Si $k < 0$ (el frente de onda tiene un salto negativo en el origen) entonces, de acuerdo con (2.2.41), el salto se acentuará con el paso del tiempo y la onda se "romperá" en un tiempo finito $t_b = -k/c'(u_0)$ en el cual el salto será infinitamente grande (véase la figura 2.2.7).
- Si $k > 0$ (el frente de onda tiene un salto positivo en el origen) el salto tenderá a 0 cuando t tienda hacia infinito.

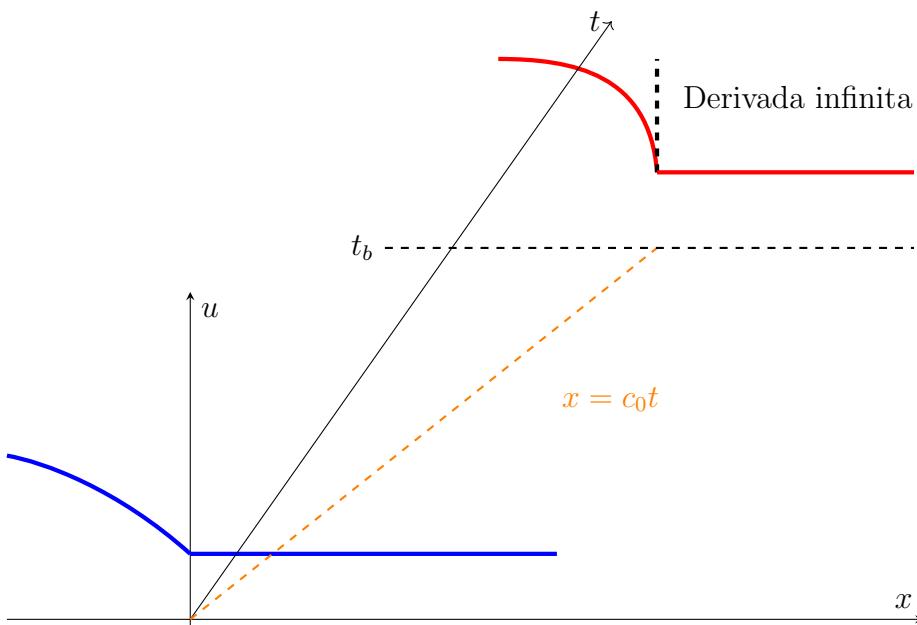


Figura 2.2.7: Evolución de un salto de la derivada de la señal inicial que se encuentra en el origen y que se propaga, acentuándose, a lo largo de la característica hasta hacerse infinito en t_b .

2.2.4. Ecuación general de primer orden

Abordaremos en esta sección la EDP no lineal general de primer orden que tiene la forma

$$H(x, t, u, p, q) = 0, \quad p = u_x, \quad q = u_t, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.2.42)$$

sujeto a la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2.43)$$

Observamos que, en este caso, a partir de la ecuación (2.2.42) no es obvio encontrar direcciones que definan curvas características a lo largo de las cuales la EDP (2.2.42) se reduzca a una EDO. Procedemos entonces a realizar un estudio para descubrir esas direcciones.

Sea $C = (x(s), t(s))$ una curva cualquiera en el plano espacio-tiempo donde s es un parámetro. La derivada total de u a lo largo de C será

$$\frac{du}{ds} = u_x x'(s) + u_t t'(s) = px' + qt'.$$

En este punto nos preguntamos si existe una dirección concreta (x', t') para la cual podamos extraer conclusiones acerca del comportamiento de la EDP (2.2.42). Si calculamos las derivadas totales de p y q a lo largo de C obtenemos

$$\frac{u_x(x(s), t(s))}{ds} = p' = u_{xx}x' + u_{xt}t', \quad (2.2.44)$$

$$\frac{u_t(x(s), t(s))}{ds} = q' = u_{tx}x' + u_{tt}t'. \quad (2.2.45)$$

Ahora, si consideramos la derivada parcial de (2.2.42) respecto de x y respecto de t obtenemos las expresiones

$$H_x + H_u p + H_p u_{xx} + H_q u_{tx} = 0 \quad (2.2.46)$$

$$H_t + H_u q + H_p u_{xt} + H_q u_{tt} = 0. \quad (2.2.47)$$

Comparando (2.2.44) y (2.2.45) con los dos últimos términos de (2.2.46)-(2.2.47) parece interesante escoger la dirección (x', t') como

$$x' = H_p, \quad t' = H_q. \quad (2.2.48)$$

Con esta elección de (x', t') podemos combinar (2.2.44)-(2.2.45) y (2.2.46)-(2.2.47) para obtener

$$p' = -H_x - H_u p, \quad q' = -H_t - H_u q, \quad (2.2.49)$$

y la derivada total de u a lo largo de C será entonces

$$u' = pH_p + qH_q. \quad (2.2.50)$$

En resumen, si las *curvas características* vienen definidas por el sistema de EDOs (2.2.48) entonces las relaciones (2.2.49)-(2.2.50) se satisfacen a lo

largo de estas curvas. Estas relaciones conforman, a su vez, un nuevo sistema de EDOs que determina cómo varían u , p y q a lo largo de las características. El conjunto de ecuaciones (2.2.48)-(2.2.50) es conocido como *sistema característico* de la EDP no lineal (2.2.42).

La obtención de un algoritmo para resolver el problema de valor inicial (2.2.42)-(2.2.43) pasa por conseguir determinar las condiciones iniciales para el sistema característico que acabamos de mencionar.

Asumiendo que una solución continua y derivable existe, notamos que, a partir de la condición inicial (2.2.43), fijado $x(0)$, queda determinado también $u(0)$ y $p(0)$. Más concretamente

$$\begin{cases} x(0) = \xi \\ u(0) = u_0(\xi) \\ p(0) = u'_0(\xi). \end{cases} \quad (2.2.51)$$

Notamos en este punto que sigue siendo necesaria una condición sobre q cuando $t = 0$ para poder resolver nuestro sistema característico. Esta condición la podemos obtener a partir de la EDP (2.2.42) sencillamente evaluando en $t = 0$ y despejando q en

$$H(\xi, 0, u_0(\xi), u'_0(\xi), q) = 0, \quad (2.2.52)$$

siempre suponiendo que $H_q \neq 0$ para que, gracias al teorema de la función implícita, lleguemos a que

$$q = q(\xi) \quad \text{en } t = 0. \quad (2.2.53)$$

Con todas estas observaciones realizadas, finalmente, podemos resolver el *sistema característico* (2.2.48)-(2.2.50) sujeto a las condiciones iniciales (2.2.51) y (2.2.53) para obtener t, x, u, p y q a lo largo de la curva característica. En algunos casos incluso podremos eliminar los parámetros y obtener una forma explícita $u = u(x, t)$ de la solución.

Ilustremos el procedimiento con un ejemplo

Ejemplo 2.10. *Sea el problema de valor inicial*

$$u_t + u_x^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2.54)$$

$$u(x, 0) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2.55)$$

Con la notación de esta sección, este se convierte en

$$H(x, t, u, p, q) = q + p^2 = 0, \quad (2.2.56)$$

y las condiciones iniciales pueden ser parametrizadas de la siguiente forma

$$x(0) = \xi, \quad u(0) = \xi, \quad p(0) = 1, \quad (2.2.57)$$

mientras que la condición inicial sobre q se puede extraer a partir de la EDP (2.2.56)

$$q = q(\xi) = -1 \text{ en } t = 0. \quad (2.2.58)$$

El sistema característico de (2.2.56), de acuerdo a lo expuesto, será

$$\begin{cases} x' = 2p, \\ t' = 1, \\ u' = 2p^2 + q, \\ p' = 0, \\ q' = 0. \end{cases} \quad (2.2.59)$$

Observamos que las EDOs que aparecen en (2.2.59) son autónomas y, por ende, resolver el sistema es realmente sencillo (para otros problemas puede ser más complejo o incluso imposible).

Para p y q obtenemos

$$p = c_1 \text{ y } q = c_2, \quad (2.2.60)$$

donde c_1 y c_2 son constantes. En este punto podemos resolver tanto x como u para obtener

$$x = 2c_1 t + c_3, \quad u = (2c_1^2 + c_2)t + c_4,$$

donde c_3 y c_4 son constantes.

Aplicando las condiciones iniciales (2.2.57)-(2.2.58) conseguimos los valores de c_1, c_2, c_3, c_4

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = \xi, \quad c_4 = \xi,$$

lo que nos permite establecer x y u

$$x = 2t + \xi, \quad u = t + \xi. \quad (2.2.61)$$

Las características para este problema tendrán la forma $C = (2s + \xi, s)$ y, en este caso, podemos despejar el parámetro ξ en (2.2.61) obteniendo así una expresión explícita de la solución dada por

$$u(x, t) = x - t.$$

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, una condición para resolver el problema de valores iniciales ha sido que la propia EDP (2.2.42) determine en $t = 0$ un único valor de q en función de x, t, u y p . Veamos un ejemplo en el que esta condición no se cumple y, por ende, no podemos encontrar una solución.

Ejemplo 2.11. Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$2tu_t + 2xu_x - u_x^2 - 2u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.2.62)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2.63)$$

Aquí $H(x, t, u, p, q) = 2tq + 2xp - p^2 - 2u$, y en $t = 0$ tenemos que, si $x = \xi$, entonces $u = u_0(\xi)$ y $p = u'_0(\xi)$.

En cambio, al tratar de obtener el valor de q cuando $t = 0$ de la expresión

$$H(\xi, 0, u_0(\xi), u'_0(\xi), q) = 2\xi u'_0(\xi) - (u'_0(\xi))^2 - 2u_0(\xi) = 0, \quad (2.2.64)$$

observamos que q ha desaparecido de la ecuación y no es posible obtener un valor para $q(0)$ con lo que no tenemos información sobre la variación de la solución con el tiempo a partir del instante inicial.

Esta conclusión también se podría haber obtenido notando que la dirección de la curva característica viene dada por

$$(x', t') = (H_p, H_q) = (2x - 2p, 2t)$$

que, en $t = 0$, es igual a $(2\xi - 2u'_0(\xi), 0)$, es decir, un vector paralelo al eje x , que no propaga la información sobre la condición inicial en el plano xt para tiempos mayores que $t = 0$.

Podemos extender estos conceptos a problemas de condición frontera donde esta viene dada por

$$u(x, t) = f(x, t) \text{ en } \Gamma, \quad (2.2.65)$$

siendo f una función dada y Γ una curva cualquiera en el plano xt (ver la figura 2.2.8b). Tras parametrizar esta curva, esta condición se transforma en

$$u = f(x(\xi), t(\xi)) = F(\xi) \text{ en } \Gamma. \quad (2.2.66)$$

y, al igual que en el problema de valor inicial, es necesario conocer los valores de p y q a lo largo de la curva Γ para poder resolver el sistema característico.

La EDP (2.2.42) se cumple a lo largo de la curva Γ y, por tanto, una primera condición que debe cumplirse se puede extraer a partir de

$$H(x(\xi), t(\xi), F(\xi), p(\xi), q(\xi)) = 0. \quad (2.2.67)$$

Por otro lado, tomando la derivada de u respecto de ξ a lo largo de Γ , es decir, en (2.2.66) llegamos a que

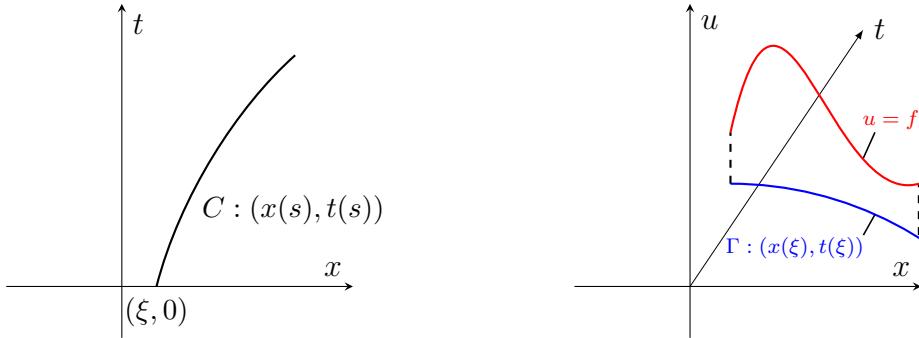
$$\frac{dF}{d\xi} = p(\xi) \frac{dx}{d\xi} + q(\xi) \frac{dt}{d\xi}, \quad (2.2.68)$$

que junto a (2.2.67) conforma el sistema de condiciones iniciales de donde podremos despejar $p(\xi)$ y $q(\xi)$ en términos de $x(\xi), t(\xi), F(\xi)$ por el teorema de la función implícita siempre y cuando el jacobiano no se anule para ningún valor de ξ , es decir, siempre y cuando

$$H_p \frac{dt}{d\xi} - H_q \frac{dx}{d\xi} \neq 0. \quad (2.2.69)$$

En otras palabras, la condición (2.2.69) asegura que la curva frontera con la dirección tangencial $(\frac{dx}{d\xi}, \frac{dt}{d\xi})$ no tenga la misma dirección que la curva característica (H_p, H_q) y que, por tanto, la señal inicial se pueda propagar en el plano xt .

El problema de valor inicial (2.2.42)-(2.2.43) o el problema más general (2.2.42) con los datos (2.2.65) es conocido como *Problema de Cauchy*. En [4] se trata de manera más general la existencia, regularidad y unicidad de las soluciones del problema de Cauchy, profundizando en aspectos que solo abordamos de manera superficial en este trabajo.



(a) Curva característica C en el plano xt que interseca con el eje x en $(\xi, 0)$.

(b) Gráfica del problema de Cauchy con u conocido sobre una curva Γ .

Figura 2.2.8: Gráficos que ilustran las características y la condición frontera del problema de Cauchy.

2.2.5. Integral Completa

Otra clase muy importante de soluciones de la ecuación general no lineal (2.2.42) son aquellas que dependen de dos parámetros independientes a y b .

Una *integral completa* de (2.2.42) es una familia biparamétrica de superficies

$$f(x, y, u, a, b) = 0,$$

que define una solución implícita u . En este caso, utilizamos la variable y en vez de t como hasta ahora, ya que muchas de las aplicaciones de este método se encuentran en la teoría de superficies y en óptica. El método de la integral completa puede ser utilizado para resolver un problema de Cauchy. Veamos algún ejemplo.

Ejemplo 2.12. *La ecuación eikonal en óptica tiene la forma*

$$u_x^2 + u_y^2 = n^2, \quad (2.2.70)$$

donde n es una constante. Con la notación de (2.2.42) esta ecuación es equivalente a

$$H(x, t, u, p, q) = p^2 + q^2 - n^2 = 0 \quad (2.2.71)$$

y el sistema característico (2.2.48)-(2.2.50) asociado será, por tanto,

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = 2p, \\ \frac{dy}{ds} = 2q, \\ \frac{du}{ds} = 2p^2 + 2q^2, \\ \frac{dp}{ds} = 0, \\ \frac{dq}{ds} = 0. \end{cases}$$

De aquí afirmamos que tanto p como q serán constantes y, usando (2.2.71),

$$p = a, \quad q = \sqrt{n^2 - a^2} = \text{constante}.$$

Ahora, derivando totalmente $u = u(x, y)$, obtenemos

$$du = pdx + qdy = adx + \sqrt{n^2 - a^2}dy.$$

y, de este modo, podemos concluir que

$$u(x, y) = ax + \sqrt{n^2 - a^2}y + b,$$

donde b es otra constante arbitraria.

Hemos determinado así una integral completa de la ecuación eikonal. Claramente, este método puede ser adaptado a cualquier EDP de primer orden que dependa únicamente de p y q .

Veamos un último ejemplo para cerrar esta sección.

Ejemplo 2.13. Consideramos el problema de Cauchy

$$u_x^2 u_y = 1, \tag{2.2.72}$$

$$u(x, 0) = 3x + 1. \tag{2.2.73}$$

Procediendo del mismo modo, una integral completa será

$$u = ax + \frac{1}{a^2}y + b,$$

donde a y b son constantes que podemos obtener haciendo uso de la condición inicial (2.2.73). Más concretamente

$$u(x, 0) = ax + b = 3x + 1,$$

lo que nos lleva a afirmar que $a = 3$ y $b = 1$. En conclusión, una solución del problema (2.2.72)-(2.2.73) vendrá dada por

$$u(x, y) = 3x + \frac{1}{9}y + 1.$$

2.2.6. Un resultado de unicidad. El teorema de Haar

Hasta este momento hemos trabajado especialmente en la construcción de las soluciones y apenas hemos tratado la unicidad de las mismas.

En esta subsección vamos a enunciar y demostrar un resultado básico de unicidad que fue probado por A. Haar en 1928. La demostración que desarrollaremos es la que se muestra en [3] para una clase específica de ecuaciones no lineales.

Teorema 2.4 (Teorema de Haar). *Consideremos una EDP de la forma*

$$u_t = G(x, t, u, p), \quad u_x = p, \quad (2.2.74)$$

donde G es una función continua y que satisface la condición de Lipschitz respecto a u y p en \mathbb{R}^4 y donde a es la constante de Lipschitz respecto a u y k es la constante de Lipschitz respecto a p .

Sean u y v dos soluciones continuas y derivables de (2.2.74) tales que

$$u(x, 0) = v(x, 0), \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (2.2.75)$$

Entonces, $u(x, t) = v(x, t)$ en el triángulo

$$T = \{(x, t) : t \geq 0, t \leq k(x - x_1), t \leq k(x_2 - x), x_1 \leq x \leq x_2\}.$$

Demostración. Definamos $w = u - v$. Nuestro propósito será probar que $w = 0$ en T . Usando la propiedad de Lipschitz respecto de u y respecto de p obtenemos

$$\begin{aligned} |w_t| &= |u_t - v_t| = |G(x, t, u, u_x) - G(x, t, v, v_x)| \\ &\leq a|u - v| + k|u_x - v_x| = a|w| + k|w_x|. \end{aligned}$$

En los puntos en los que $w > 0$, la última desigualdad puede ser escrita como

$$|w_t| < bw + k|w_x|, \quad (2.2.76)$$

donde $b > a$.

Si definimos ahora la función W como $W = we^{-bt}$, bastará con probar que $W = 0$ en T para garantizar que $w = 0$ en T . Procedemos por reducción al absurdo asumiendo, sin pérdida de generalidad, que W es positivo en algún punto de T . Sea P un punto de T en el cual W alcanza un máximo (T es cerrado y acotado y W continua en T por lo que este punto existe). Evidentemente, $W > 0$ en P y, este punto, debido a (2.2.75), no puede estar en la base del triángulo puesto que allí $W = 0$. En consecuencia, este punto solo puede encontrarse en el interior de T o en los laterales del mismo. En ambos casos, partiendo de P , las direcciones $(k, -1)$ y $(-k, -1)$ apuntan ambas hacia el interior de T como muestra la figura 2.2.9. Por consiguiente, las derivadas direccionales de W en estas direcciones serán no positivas (W alcanza un máximo en P):

$$\begin{aligned} (-k, -1)(W_x, W_t) &= -kW_x - W_t \leq 0, \\ (k, -1)(W_x, W_t) &= kW_x - W_t \leq 0. \end{aligned}$$

Poniendo en común ambas desigualdades podemos concluir

$$W_t \geq k|W_x| \quad \text{en } P,$$

o, en términos de w , tras calcular las derivadas parciales correspondientes

$$w_t \geq bw + k|w_x|,$$

lo que contradice (2.2.76) y, por tanto, $W = 0$ como queríamos probar. □

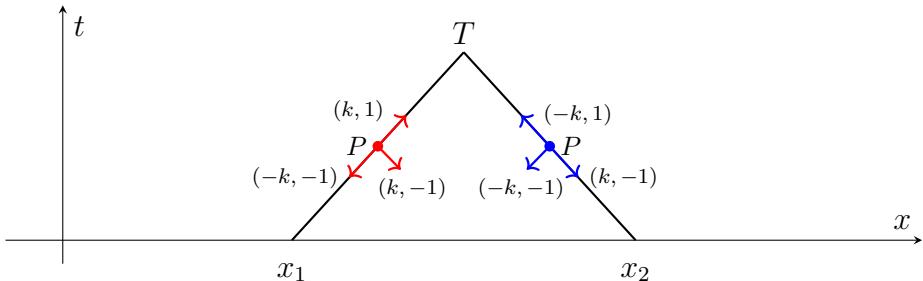


Figura 2.2.9: Triángulo T .

Capítulo 3

Soluciones débiles de ecuaciones hiperbólicas

El capítulo desarrollado a continuación se estructura en cinco secciones distintas que completan el estudio de las soluciones débiles de ecuaciones hiperbólicas. En la primera sección, presentaremos las ecuaciones no lineales con condiciones iniciales discontinuas e introduciremos conceptos fundamentales en el estudio, como las ondas de choque y la condición de salto, indispensables para el desarrollo de la segunda sección donde encontraremos una solución concreta para uno de estos problemas.

La tercera sección trata aquellos casos en los que la discontinuidad inicial genera regiones sin curvas características, lo que motiva la introducción de ondas de rarefacción para hallar una solución a estos problemas. En la cuarta sección se combinan los conceptos desarrollados en las secciones anteriores para analizar la propagación de las ondas de choque. Para concluir el capítulo, en la quinta sección, abordaremos la formación de ondas de choque en problemas de valor inicial con datos iniciales continuos.

3.1. Soluciones discontinuas

Como ya hemos visto en el capítulo 2, las curvas características juegan un papel fundamental para comprender cómo se propagan las soluciones de una EDP de primer orden. Hasta ahora, habíamos tratado con soluciones continuas y derivables, al menos a trozos, pero, ¿cómo se propagan a lo largo del espacio-tiempo las soluciones discontinuas?

Pasamos ahora a estudiar un problema no lineal con una condición inicial que presenta una discontinuidad; estos problemas son conocidos como *problemas de Riemann*.

Ejemplo 3.1. *Sea el problema de valor inicial*

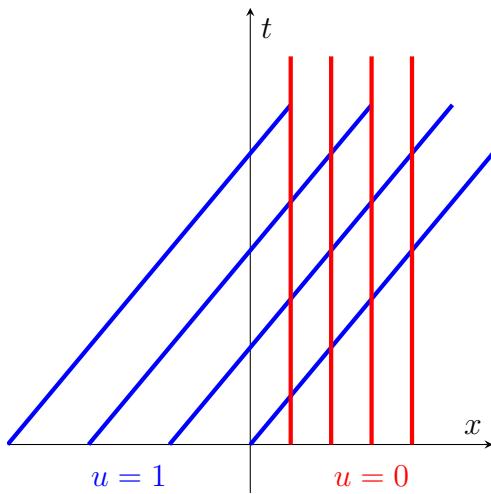
$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3.1.1)$$

$$u(x, 0) = 1 \text{ si } x < 0; \quad u(x, 0) = 0 \text{ si } x > 0. \quad (3.1.2)$$

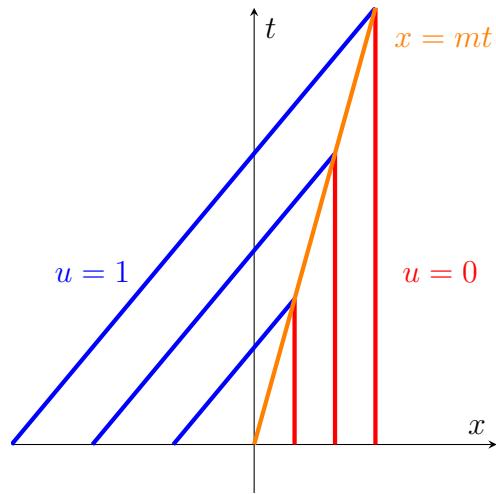
En este punto, ya es sabido que u es constante a lo largo de las curvas características dadas por $dx/dt = u$ y, como podemos observar en la figura 3.1.1a, existe una contradicción para $t > 0$ puesto que ambas características se cortan entre sí. Para solventar esto, insertamos una recta con velocidad m ($x = mt$), con $0 \leq m \leq 1$, a lo largo de la cual se propaga la discontinuidad inicial. Si para $x > mt$ tomamos $u = 0$ y para $x < mt$ $u = 1$, esto nos proporcionará una solución de (3.1.1) en ambos lados de la discontinuidad sin presentar contradicciones.

Sólo nos faltaría en este momento la elección de m y es que, puesto que para todo $m > 0$ puede parecer que se obtiene una solución sin contradicciones y satisfaciendo la condición inicial dada, es normal preguntarse si la solución que acabamos de exponer es única o no.

Para dar una respuesta a esta última pregunta debemos tratar dos conceptos que serán fundamentales a lo largo de este tema; *trayectorias de choque* y *condiciones de salto*. En cuanto al primero, se denomina así a las curvas a lo largo de las cuales se propagan las discontinuidades de la solución y que, en general, no son curvas características. En relación al segundo, está estrechamente relacionado con la ley de conservación en forma integral, que trataremos a continuación y que se cumple aún incluso cuando las funciones no gozan de continuidad. En particular, estas condiciones de salto nos proporcionarán una trayectoria de choque adecuada para la solución y que



(a) Características para el problema (3.1.1)-(3.1.2).



(b) Diagrama característico tras la inserción de $x = mt$.

Figura 3.1.1: Curvas características y diagrama característico del problema (3.1.1)-(3.1.2) antes y después de la inserción de la curva $x = mt$ que transporta la discontinuidad inicial.

transportará la discontinuidad de la misma a lo largo del plano xt . De aquí podemos deducir la relación de dependencia entre ambos conceptos y justo es esta misma relación la que responde a nuestra pregunta: en el ejemplo anterior tan solo existe un único valor de m válido.

3.2. Condiciones de salto

Partiremos de la ley de conservación (que determina la ecuación diferencial que finalmente se satisface) para estudiar cómo se propaga la solución a lo largo de una discontinuidad. Esta ley viene dada por la igualdad

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t), \quad (3.2.1)$$

donde u representa la densidad y ϕ el flujo. Bajo ciertas condiciones de continuidad y derivabilidad (u y ϕ funciones continuas y derivables), (3.2.1) implica

$$u_t + \phi_x = 0, \quad (3.2.2)$$

expresión que representa la forma diferencial de la ley de conservación. Puesto que ϕ en la práctica suele ser una función que depende de u ($\phi = \phi(u)$) (3.2.2) puede ser escrita como

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad c(u) = \phi'(u). \quad (3.2.3)$$

Sea ahora $x = s(t)$ una curva de clase C^1 en el plano xt a lo largo de la cual u sufre una discontinuidad simple, esto es, u es continua y derivable para $x > s(t)$ y $x < s(t)$ y tanto u como sus derivadas tienen límite finito cuando $x \rightarrow s(t)^-$ y $x \rightarrow s(t)^+$. Entonces, siendo $a < s(t)$ y $b > s(t)$ cualesquiera, la ecuación (3.2.1) puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_a^{s(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t). \quad (3.2.4)$$

Aplicando la *regla de la cadena*, el *teorema fundamental del cálculo integral* y el *teorema de derivación bajo el signo integral* a la parte de izquierda de la igualdad (3.2.4) obtenemos

$$\int_a^{s(t)} u_t(x, t) dx + \int_{s(t)}^b u_t(x, t) dx + u(s^-, t)s'(t) - u(s^+, t)s'(t) = \phi(a, t) - \phi(b, t),$$

donde $u(s^-, t)$ y $u(s^+, t)$ son los límites de $u(x, t)$ cuando $x \rightarrow s(t)^-$ y $x \rightarrow s(t)^+$ respectivamente. Si en esta última expresión hacemos tender $a \rightarrow s(t)^-$ y $b \rightarrow s(t)^+$ los dos primeros términos se anularán puesto que

el integrando es continuo y está acotado y el intervalo de integración tenderá hacia cero. En consecuencia, obtenemos

$$-s'[u] + [\phi(u)] = 0, \quad (3.2.5)$$

manteniendo la notación ya utilizada en el texto. La ecuación (3.2.5) es conocida como *condición de salto* mientras que a la discontinuidad en u se le denomina *onda de choque* y la propia curva $x = s(t)$ toma el nombre de *trayectoria de choque*. Estamos ahora en condiciones de continuar con el ejemplo expuesto al comienzo.

Ejemplo 3.2. (*Continuación del ejemplo 3.1*)

En la forma diferencial de la ley de conservación, (3.1.1) se transforma en

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0,$$

donde el flujo es $\phi = \frac{u^2}{2}$. De acuerdo con (3.2.5) la condición de salto vendrá dada por

$$-s'[u] + \left[\frac{u^2}{2} \right] = 0 \quad (3.2.6)$$

o, despejando s' ,

$$s' = \frac{1}{2} \frac{(u_+ - u_-)(u_+ + u_-)}{(u_+ - u_-)} = \frac{u_+ + u_-}{2}. \quad (3.2.7)$$

Es decir, la velocidad de la trayectoria de choque viene dada por la media de los valores que toma u antes y después de la onda de choque. Si tenemos en cuenta la condición inicial del problema (3.1.1)-(3.1.2) podemos sustituir en (3.2.7) y concluir que

$$s' = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (3.2.8)$$

En este punto podemos concluir que la solución que cumple la condición de salto para el problema de valor inicial expuesto en el ejemplo 3.1 viene dada por

$$u(x, t) = 1 \text{ si } x < \frac{t}{2}; \quad u(x, t) = 0 \text{ si } x > \frac{t}{2}.$$

3.3. Ondas de rarefacción

Existe otra peculiaridad o inconveniente que puede surgir al estudiar ecuaciones no lineales con condiciones iniciales discontinuas y que podemos ilustrar con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3. *Sea el problema de Riemann*

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3.3.1)$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ si } x < 0; \quad u(x, 0) = 1 \text{ si } x > 0. \quad (3.3.2)$$

Si observamos el diagrama característico en la figura 3.3.2a podemos notar que para todo x tal que $0 < x < t$ no existen curvas características. Para solventar esto de manera continua, insertamos características, en este caso líneas rectas, que partan desde el origen hacia la región mencionada de tal forma que u sea constante a lo largo de las mismas, tomando valores de forma continua de 0 a 1 (ver la figura 3.3.2b).

Estas rectas tendrán la forma $x = ct$ y si para todo c tal que $0 < c < 1$ tomamos $u = c$ la solución al problema de valor inicial (3.3.1)-(3.3.2) vendrá dada por

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 & \text{si } x < 0, \\ u(x, t) = \frac{x}{t} & \text{si } 0 < \frac{x}{t} < 1, \\ u(x, t) = 1 & \text{si } x > t. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Notemos además que, a medida que pasa el tiempo, la solución se despliega de la forma indicada en la figura 3.3.1. A este tipo de soluciones se las conoce como Ondas de rarefacción o Abanicos.

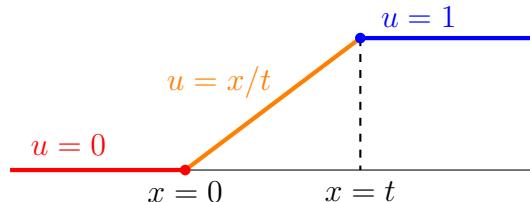
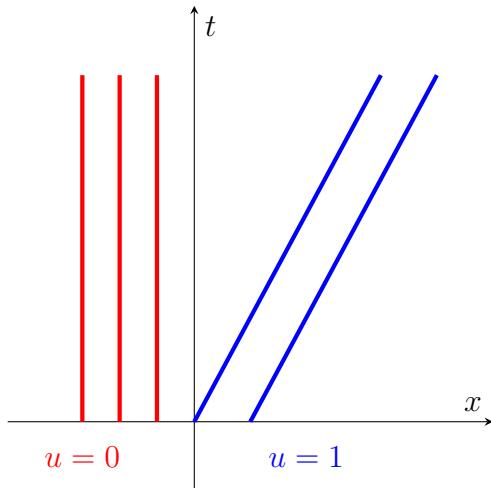
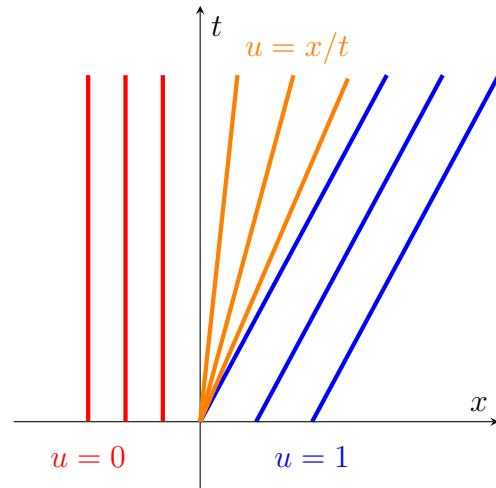


Figura 3.3.1: Gráfico de la solución u de (3.3.1)-(3.3.2) respecto de x para un tiempo t .



(a) Diagrama característico original donde podemos observar una región vacía para $0 < x < t$.



(b) Diagrama característico tras la inserción de características en forma de abanico de la región vacía.

Figura 3.3.2: Diagrama característico original del problema (3.3.1)-(3.3.2) y tras la inserción de características en forma de abanico en la región vacía.

3.4. Propagación de ondas de choque

Comencemos esta sección con un ejemplo más avanzado donde se combinan las condiciones de salto y las ondas de rarefacción.

Ejemplo 3.4. (*Propagación de ondas de choque*)

Consideramos el problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.4.1)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

De acuerdo a lo visto anteriormente, sabemos que las características serán rectas con velocidad igual a u , es decir,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 & \text{si } x < 0, \\ \frac{dx}{dt} = -1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{dx}{dt} = 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Podemos ver estas curvas gráficamente en la figura 3.4.1a. El flujo vendrá dado por $\phi(u) = u^2/2$, y, por tanto, la condición de salto será

$$s' = \frac{[\phi(u)]}{[u]} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2(u_1 - u_2)} = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (3.4.3)$$

donde u_1 y u_2 son los valores que toma u antes y después de la onda de choque, respectivamente. En este punto debemos distinguir tres casos para determinar la onda de choque, que claramente se iniciará en $t = 0$ donde la condición inicial es discontinua.

- Si $0 < t \leq 1$ entonces la onda de choque tendrá velocidad $s' = (-1 + 1)/2 = 0$ y será por tanto una recta vertical (ver la figura 3.4.1b).
- Para $1 < t \leq 4$ necesitamos primero conocer el valor que toma u más allá de $t = 1$. Tras la aparición de la onda de choque, para todo x tal que $-t + 1 < x < 1$ no se encuentran curvas características, y por

tanto, es necesario construir una solución en forma de abanico de tal manera que u varíe de forma continua desde $u = -1$ en $x = 0$ cuando $t = 1$ a $u = 0$ en $x = 1$, es decir,

$$u = \frac{x-1}{t} \text{ donde } -t+1 < x < 1,$$

A su vez, con la inserción de este abanico, estamos definiendo una característica que tendrá como ecuación $x = kt + 1$ y a lo largo de la cual u tomará el valor $u = (x-1)/t = k = \text{constante}$. Con estas precisiones hechas y basándonos en (3.4.3), la onda de choque más allá de $t = 1$ tendrá velocidad

$$s' = \frac{(x-1)/t + 1}{2}. \quad (3.4.4)$$

Para encontrar ahora la trayectoria de choque debemos tener en cuenta que $s' = dx/dt$ y, por tanto, (3.4.4) es una EDO que puede ser expresada de la siguiente forma

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2t} = \frac{1-1/t}{2},$$

que puede ser resuelta usando un factor integrante teniendo en cuenta que $x = 0$ cuando $t = 1$ para obtener

$$x = s(t) = t + 1 - 2\sqrt{t}, \quad 1 \leq t \leq 4, \quad (3.4.5)$$

donde para $t \geq 4$ se tiene que $x \geq 1$ y la condición de salto (3.4.4) no será válida.

- Para $t > 4$ la condición de salto, de acuerdo con (3.4.3), será

$$s' = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad (3.4.6)$$

es decir, la onda de choque será una recta con velocidad $1/2$. En base a las condiciones de continuidad que debe cumplir, podemos afirmar que tendrá la forma

$$x - 1 = \frac{t-4}{2}, \quad t > 4.$$

En este punto acabamos de determinar una solución del problema (3.4.1)-(3.4.2), que podemos ver gráficamente en la figura 3.4.2b.

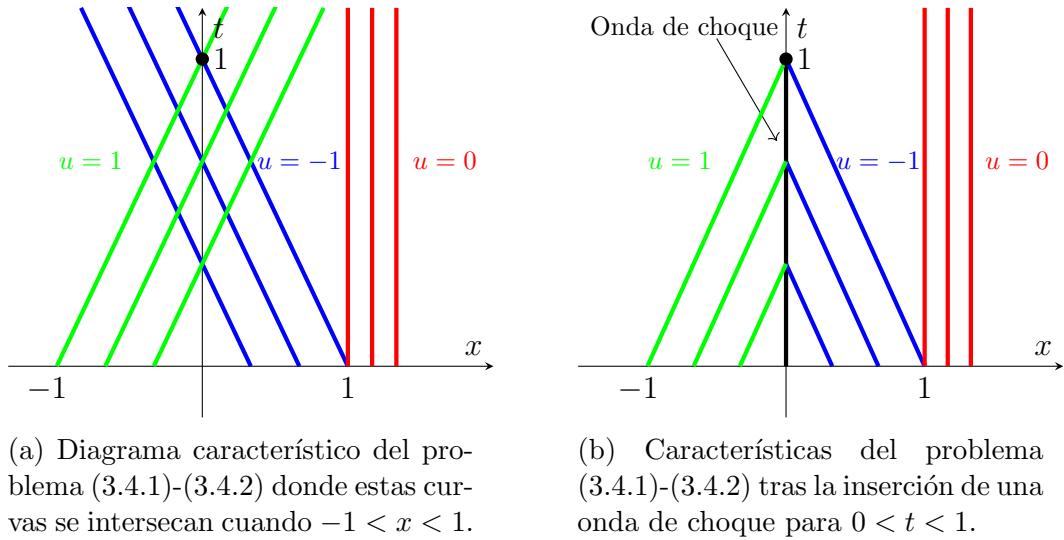


Figura 3.4.1: Diagrama característico original del problema (3.4.1)-(3.4.2) y diagrama con la onda de choque definida para $0 \leq t \leq 1$.

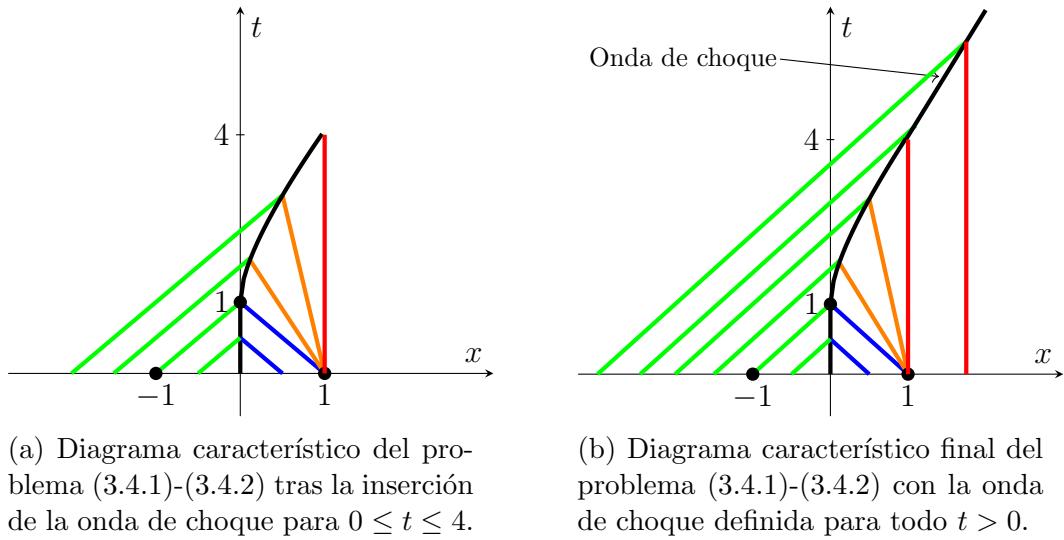


Figura 3.4.2: Diagrama característico del problema (3.4.1)-(3.4.2) tras haber definido la onda de choque para $0 \leq t \leq 4$ y diagrama final con la solución completa donde la onda de choque está definida para todo $t > 0$.

3.5. Formación de ondas de choque

En esta sección vamos a estudiar la formación de ondas de choque. Para entender este fenómeno, un primer ejemplo sencillo es la propagación de una señal en un medio como el aire: esta propagación en un punto concreto es proporcional a la densidad del mismo, es decir, a mayor densidad, mayor velocidad de propagación hasta alcanzar un momento en el que se forman puntos no derivables y, por tanto, la suavidad de la señal se pierde (véase la figura 3.5.1).

De acuerdo con este ejemplo, parece claro que las discontinuidades no tienen por qué proceder de las condiciones iniciales; estas pueden formarse a partir de una solución continua y derivable y el momento en el que esta se produce se denomina *tiempo de rotura* y usualmente viene determinado por una singularidad en la derivada.

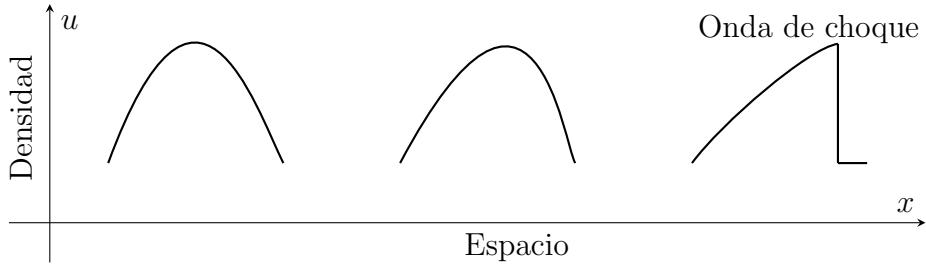


Figura 3.5.1: Evolución de la propagación de una señal en el aire donde u denota la densidad, podemos ver cómo en los puntos en los que la densidad es mayor la señal es propagada a mayor velocidad hasta que se forma la onda de choque.

Para verlo de forma más precisa, consideraremos el problema de valor inicial

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.5.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.5.2)$$

donde c y u_0 son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y donde suponemos que $c(u) > 0$ y $c'(u) > 0$. De acuerdo con el teorema 2.1, si u_0 es una función creciente en \mathbb{R} entonces existe una solución continua y única de (3.5.1)-(3.5.2) para todo $t > 0$ y viene dada implícitamente por

$$u(x, t) = u_0(\xi), \quad \text{donde } x - \xi = c(u_0(\xi))t. \quad (3.5.3)$$

Por lo tanto, para que aparezcan frentes de onda en la solución de (3.5.1)-(3.5.2), una condición necesaria será que $u'_0(x) < 0$ para todo x en algún intervalo abierto de \mathbb{R} . Pasamos ahora a demostrar que existen de hecho frentes de onda cuando $u_0(x) > 0$ y $u'_0(x) < 0$ en \mathbb{R}^+ . Bajo estas circunstancias, si tomamos ξ_1 y ξ_2 dos puntos en el eje x positivo tales que $\xi_1 < \xi_2$, podemos garantizar que existen dos rectas características con velocidades $c(u_0(\xi_1))$ y $c(u_0(\xi_2))$ respectivamente que parten desde ξ_1 y desde ξ_2 (ver la figura 3.5.2a). Puesto que u_0 es positiva y decreciente y c es creciente, se tiene que

$$c(u_0(\xi_1)) > c(u_0(\xi_2)),$$

lo que implica que la característica que parte de ξ_1 lo hace con una velocidad mayor que la correspondiente a ξ_2 y, por tanto, se cortarán en algún punto dando lugar a una contradicción y concluyendo así que una solución continua no puede existir para todo $t > 0$.

Pasemos ahora a determinar el momento en el que esta contradicción tiene lugar. Sea $g(t) = u_x(x(t), t)$ la derivada parcial respecto de x de la solución a lo largo de la característica $x = x(t)$. Si derivamos respecto de t obtenemos que

$$\frac{dg}{dt} = u_{xt}(x(t), t) + c(u)u_{xx}, \quad (3.5.4)$$

donde hemos tenido en cuenta la expresión de la característica para nuestro problema. En este punto, si derivamos parcialmente respecto de x en (3.5.1) obtenemos

$$u_{tx} + c(u)u_{xx} + c'(u)u_x^2 = 0,$$

y tras comparar con (3.5.4) podemos concluir que

$$\frac{dg}{dt} = -c'(u)g^2, \quad (3.5.5)$$

a lo largo de la característica. Resolviendo (3.5.5) llegamos a que

$$g = \frac{g(0)}{1 + g(0)c'(u_0(\xi))t},$$

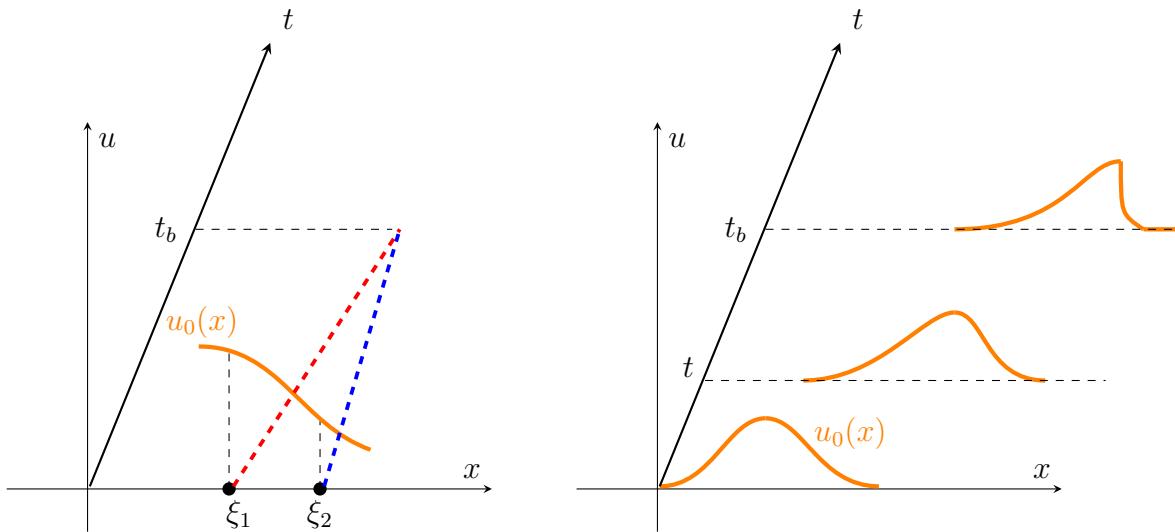
y, con la notación inicial, teniendo en cuenta que $u(x, 0) = u_0(x)$, podemos afirmar que

$$u_x = \frac{u'_0(\xi)}{1 + u'_0(\xi)c'(u_0(\xi))t}. \quad (3.5.6)$$

Puesto que hemos asumido que u_0 es decreciente para $\xi > 0$ y $c' > 0$, entonces el denominador (3.5.6) se anulará a lo largo de todas las características en un tiempo finito, formando así una onda de choque. Este tiempo de choque es

$$t(\xi) = -\frac{1}{u'_0(\xi)c'(u_0(\xi))}. \quad (3.5.7)$$

Para determinar el primer momento en el que esto ocurre, lo que hemos definido como *tiempo de rotura*, bastará con estudiar en cada caso dónde esta función $t(\xi)$ alcanza un mínimo. Veámoslo con el siguiente ejemplo.



(a) Gráfico donde están representadas las características que parten de ξ_1 con velocidad $c(u_0(\xi_1))$ y de ξ_2 con velocidad $c(u_0(\xi_2))$ y que se cruzan en un instante $t = t_b$.

(b) Evolución de la solución del problema de valor inicial (3.5.1)-(3.5.2) a lo largo del tiempo hasta que se forma la onda de choque en el instante t_b .

Figura 3.5.2: Gráficos que ilustran la formación de una onda de choque para un problema de valor inicial con una condición inicial continua.

Ejemplo 3.5. Sea el problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.5.8)$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.5.9)$$

Las características parten del eje x con velocidad $c(u) = u$ y, como ya sabemos, el sistema característico viene dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \\ \frac{du}{dt} = 0, \end{cases}$$

que podemos resolver para obtener la expresión de las curvas características

$$x = \xi + e^{-\xi^2} t, \quad (3.5.10)$$

donde $x_0 = \xi$ para cada $\xi > 0$ (ver la figura 3.5.3). Es claro que las curvas características se cruzan entre sí y, para determinar el tiempo de rotura, procedemos siguiendo lo expuesto anteriormente, calculando $dt/d\xi$ para determinar el mínimo de $t(\xi)$. De acuerdo con (3.5.7) en este caso $t(\xi)$ tendrá la forma

$$t(\xi) = \frac{e^{\xi^2}}{2\xi}, \quad (3.5.11)$$

donde hemos tenido en cuenta que estamos trabajando a lo largo de una curva característica (parametrizada por ξ) y, por tanto, u será constante. Derivando obtenemos

$$\frac{dt}{d\xi} = e^{\xi^2} \left(1 - \frac{1}{2\xi^2}\right), \quad (3.5.12)$$

donde notamos que $t'(\xi) < 0$ para $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$ y que $t'(\xi) < 0$ para $\xi > 1/\sqrt{2}$. Podemos concluir así que el mínimo de esta función se alcanzará en $\xi = 1/\sqrt{2}$ y, por consiguiente, el tiempo de rotura será $t = \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 1,166$.

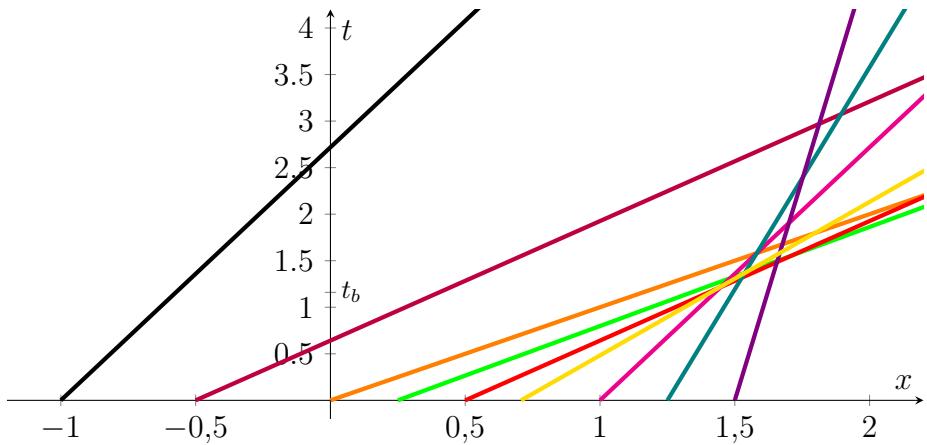


Figura 3.5.3: Diagrama característico del problema (3.5.8)-(3.5.9) donde en amarillo podemos ver la característica a lo largo de la cual se forma la onda de choque por primera vez en el instante $t \approx 1,166$.

Capítulo 4

Dinámicas Poblacionales y Aplicaciones de EDPs en Sistemas de Tráfico

El capítulo presentado a continuación se divide en dos grandes secciones. En la primera, abordaremos la aplicación de las EDPs lineales hiperbólicas de primer orden al estudio de poblaciones. En particular, presentaremos el modelo general de estructura por edades, cuya solución permite predecir el desarrollo y la distribución por edades de la población. A partir de aquí, bajo condiciones específicas en las condiciones frontera, podremos obtener una solución a este problema e incluso, en un caso más restrictivo, esta podrá ser obtenida de forma analítica mediante el ya conocido método de las características.

En la segunda sección, estudiaremos las aplicaciones de las EDPs no lineales hiperbólicas en los sistemas de tráfico. De manera similar a la primera sección, presentaremos el modelo y estudiaremos el sistema característico, enfocándonos en la formación de ondas de choque bajo ciertas condiciones iniciales. Para concluir el capítulo, consideraremos una densidad constante de vehículos y estudiaremos la formación y propagación de ondas de choque por la aparición de un semáforo, tanto durante la fase en la que este se encuentra en rojo como cuando pasa al color verde.

4.1. Modelización de Dinámicas Poblacionales: Estructura por Edades

Uno de los problemas principales en demografía es determinar cómo evoluciona la estructura por edades de una población a lo largo del tiempo. Esta viene descrita por una función de distribución de edad $u = u(a, t)$ donde $u(a, t)da$ representa el número de mujeres en el instante de tiempo t entre las edades a y $a + da$. Es habitual estudiar la población femenina en los modelos demográficos, ya que el inicio y el fin de sus capacidades reproductivas están claramente definidos.

Por simplicidad, inicialmente trabajaremos con el rango de edad $0 \leq a \leq \infty$ a pesar de que la muerte se produce a una edad finita. En estas condiciones, el número total de mujeres en el instante t viene dado por

$$N(t) = \int_0^\infty u(a, t) da.$$

Nuestro objetivo a lo largo de esta sección es diseñar un modelo capaz de predecir la evolución del número de mujeres y su distribución entre las distintas edades.

Nos centramos, en primer lugar, en obtener la ecuación que dicta la ley de balance poblacional. Para ello, dado un intervalo $[a, a + da]$ arbitrariamente pequeño, es posible expresar cuánto varía la función de distribución de edad $u(a, t)$ por cada unidad de tiempo t de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial t}[u(a, t)da] = u(a, t) - u(a + da, t) - m(a)u(a, t)da, \quad (4.1.1)$$

que puede ser interpretado como las mujeres que en el instante t alcanzan la edad a , menos las que en este mismo instante alcanzan la edad $a + da$, menos aquellas que fallecen y que tenían una edad comprendida entre a y $a + da$. La función $m(a)$ es la tasa de mortalidad de la edad a en nuestra población y se cumple que $0 \leq m(a) \leq 1$.

Dividiendo en (4.1.1) entre da y tomando el límite cuando $da \rightarrow 0$ obtenemos

$$u_t = -u_a - m(a)u. \quad (4.1.2)$$

Estamos ante una ecuación de advección con velocidad 1 y un término sumidero que viene dado por la tasa de mortalidad. La expresión (4.1.2) es conocida como *ecuación de McKendrick-Von Foerster* [8].

Para $t = 0$ asumimos una distribución de edad dada por

$$u(a, 0) = f(a), \quad a \geq 0.$$

En cuanto a los nuevos individuos, asumimos que existe una función de a y t no negativa, $b(a, t)$, que representa la tasa de nacimiento, es decir, el número medio de nacimientos por cada individuo de edad a en el instante t . Podemos entonces definir, teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, el número total de nacimientos en el instante de tiempo t como

$$B(t) = \int_0^\infty b(a, t)u(a, t) da. \quad (4.1.3)$$

Observamos que $B(t)$ es precisamente $u(0, t)$ por lo que esta ecuación define una condición frontera en $a = 0$ (véase la figura 4.1.1).

En resumen, el modelo de estructura por edad de una población viene dado por

$$u_t = -u_a - m(a)u, \quad a > 0, \quad t > 0, \quad (4.1.4)$$

$$u(a, 0) = f(a), \quad a \geq 0 \quad (4.1.5)$$

$$u(0, t) = \int_0^\infty b(a, t)u(a, t) da, \quad t > 0. \quad (4.1.6)$$

Lo que hace este problema especialmente interesante, a la vez que complejo, es que la condición frontera en $a = 0$ no es conocida, ya que depende de la distribución de edad $u(a, t)$ que aún no hemos obtenido. Esto es lo que se conoce como *condición frontera no local*.

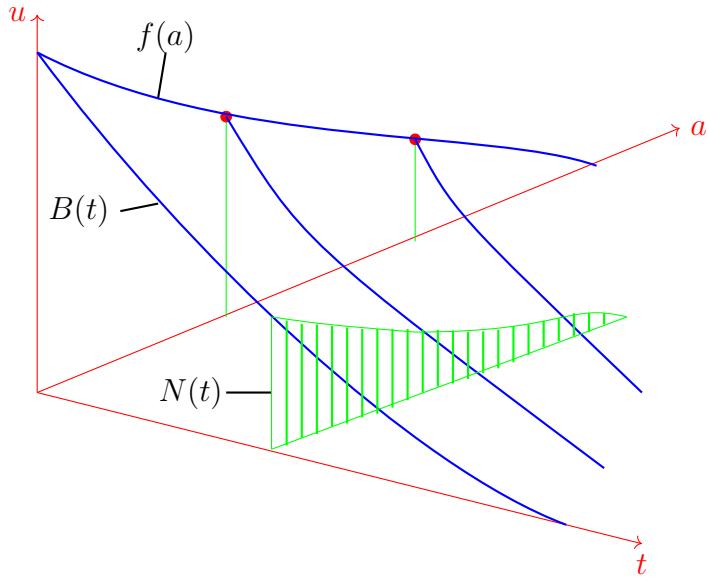


Figura 4.1.1: Gráfica que representa el modelo de la estructura de edad donde podemos observar la condición inicial y la condición frontera y donde el área rayada representa el número total de individuos en un instante de tiempo t .

4.1.1. Estructura por edades estable en el tiempo

En lugar de intentar resolver (4.1.4)-(4.1.6) directamente, podemos ignorar la condición inicial y preguntarnos qué ocurre cuando t se hace muy grande.

Centrando nuestra atención en la condición frontera, en particular en el caso en el cual la tasa de nacimientos es independiente del tiempo (y solo depende de la edad de la mujer), el número total de nacimientos, que antes hemos definido en (4.1.3), se puede interpretar como

$$B(t) = \int_0^t b(a)u(a, t) da + G(t), \quad (4.1.7)$$

donde nos encontramos con la suma de dos componentes:

1. Nacimientos a partir de las mujeres que tienen una edad $a < t$.
2. Nacimientos a partir de las mujeres que tienen edad $a \geq t$, cuya distribución viene dada por el número de mujeres que en $t = 0$ tenían edad $a - t$ en caso de que estos individuos no hayan fallecido.

A la ecuación (4.1.7) se la conoce como *ecuación de renovación*.

Para $t \geq a$ podemos expresar $u(a, t)$ a partir de los supervivientes de los nacimientos que se han producido en el momento $t - a$, es decir

$$u(a, t) = B(t - a)l(a), \quad (4.1.8)$$

donde $l(a)$ es la probabilidad que tiene un individuo de sobrevivir hasta la edad a ; de hecho, se sabe que en la práctica $l(a) \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow \infty$. Para dar una expresión matemática de $l(a)$ en términos del coeficiente de mortalidad $m(a)$ nos fijamos en las mujeres que en tiempo $t = a$ tienen edad a , es decir, aquellas que se encontraban en el instante de tiempo inicial y que no han fallecido. En este caso se cumple que

$$\frac{du(a, a)}{da} = u_t(a, a) + u_a(a, a) = -m(a)u(a, a), \quad (4.1.9)$$

donde para dicha igualdad hemos aplicado (4.1.2). De esta última igualdad, podemos despejar $u(a, a)$ integrando

$$u(a, a) = u(0, 0)e^{-\int_0^a m(s)ds},$$

y, en este momento, podemos asegurar que la probabilidad que tiene un individuo de sobrevivir hasta la edad a es

$$l(a) = e^{-\int_0^a m(s)ds}. \quad (4.1.10)$$

Volviendo a la ecuación (4.1.7), si suponemos que existen unas edades mínima y máxima de fertilidad (que denotaremos por α y β) y utilizamos (4.1.8), obtenemos que para un instante $t \geq \beta$

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t - a)l(a)b(a) da, \quad (4.1.11)$$

donde nos encontramos ante una ecuación integral homogénea. Para resolver (4.1.11) podemos probar con una solución de la forma $B(t) = Be^{rt}$, donde B y r son constantes, obteniendo así

$$Be^{rt} = \int_{\alpha}^{\beta} Be^{r(t-a)}l(a)b(a) da = \int_{\alpha}^{\beta} Be^{rt}e^{-ra}l(a)b(a) da,$$

y, dividiendo ambos lados entre Be^{rt} , llegamos a:

$$1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} l(a) b(a) da, \quad (4.1.12)$$

ecuación conocida como *ecuación característica de Euler y Lotka*.

Por su definición, es claro que $l(a)b(a) \geq 0$. Para la ecuación (4.1.12) siempre que $l(a)b(a)$ sea una función acotada de clase $L^1([\alpha, \beta])$ y no nula en algún subintervalo de $[\alpha, \beta]$, existirá un único valor real r que resuelve la ecuación (4.1.12). Esto es debido a que si definimos

$$g(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} l(a) b(a),$$

entonces g será una función continua y derivable cumpliendo que

$$g'(r) = - \int_{\alpha}^{\beta} ae^{-ra} l(a) b(a) da < 0, \quad g(-\infty) = \infty, \quad g(\infty) = 0,$$

y el resultado se sigue por el teorema de Bolzano. A este valor r se le denomina *tasa de crecimiento intrínseco* o también *parámetro Malthusiano*.

Habiendo realizado estas observaciones, notamos a su vez que

$$u(a, t) = B(t-a)l(a) = Be^{r(t-a)}l(a) = Be^{rt}e^{-ra}l(a) = B(t)e^{-ra}l(a), \quad (4.1.13)$$

y, tras esto, podemos expresar el número total de individuos como

$$N(t) = B(t) \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} l(a) da. \quad (4.1.14)$$

En este punto y a partir de (4.1.14) podemos afirmar que

1. La población crecerá indefinidamente si $r > 0$.
2. La población se extinguirá si $r < 0$.
3. La población se mantendrá constante a lo largo del tiempo si $r = 0$.

Por otro lado, la tasa bruta de natalidad b se define como el número de nacimientos dividido entre el número total de individuos, es decir, usando (4.1.14)

$$b = \frac{B(t)}{N(t)} = \frac{1}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} l(a) da}. \quad (4.1.15)$$

Análogamente, dividiendo (4.1.13) entre la población total podemos obtener un coeficiente $c(a, t)$ que nos proporciona la distribución relativa de la población entre las diferentes edades en un instante de tiempo t

$$c(a, t) = \frac{u(a, t)}{N(t)} = \frac{B(t)}{N(t)} e^{-ra} l(a).$$

Podemos ir un poco más allá haciendo uso de la expresión (4.1.15) para concluir que, en dicha población, la distribución por edades es independiente del tiempo; esto es debido a que

$$c(a, t) = b e^{-ra} l(a) = c(a).$$

De hecho, sustituyendo la expresión de b obtenida en (4.1.15) podemos expresar esta distribución como

$$c(a) = \frac{e^{-ra} l(a)}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} l(a) da}. \quad (4.1.16)$$

Comprobemos ahora, para finalizar esta subsección, que, en efecto, la solución $u(a, t)$ dada en (4.1.13) satisface la ecuación (4.1.4). Para este propósito, derivamos parcialmente en $u(a, t) = B e^{r(t-a)} l(a)$ respecto de a y t

$$\begin{aligned} u_t &= B r e^{r(t-a)} l(a), \\ u_a &= -B r e^{r(t-a)} l(a) - B e^{r(t-a)} m(a) e^{-\int_0^a m(s) ds}, \end{aligned}$$

de donde operando se sigue el resultado.

4.1.2. Resolución mediante el método de las características

En el caso particular en el cual $b(a, t) = b(a)$ y la tasa de mortalidad m es constante, es posible utilizar el método de las características para encontrar una solución de (4.1.4)-(4.1.6). En este caso, la EDP (4.1.4) tiene la forma

$$u_t = -u_a - mu, \quad a > 0, \quad t > 0, \quad (4.1.17)$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera,

$$u(a, 0) = f(a) \quad a > 0, \quad (4.1.18)$$

$$u(0, t) = \int_0^{\infty} b(a) u(a, t) da = B(t), \quad t > 0. \quad (4.1.19)$$

De acuerdo con lo visto en el capítulo 2, en particular en la subsección 2.1.1, sabemos que las curvas características para (4.1.17) tendrán la forma $\xi = a - t$. Motivado por ello, si realizamos el cambio de variable

$$\xi = a - t, \quad \tau = t,$$

la EDP (4.1.17), a lo largo de las características, se reduce a

$$U_\tau = -mU, \quad \text{donde } U = U(\xi, t). \quad (4.1.20)$$

Resolviendo, obtenemos que

$$U(\xi, \tau) = C(\xi)e^{-m\tau},$$

donde C es una función arbitraria. Deshaciendo el cambio, en términos de las variables originales

$$u(a, t) = C(a - t)e^{-mt}. \quad (4.1.21)$$

En este punto, para determinar la función C debemos distinguir dos casos: $a > t$ y $a < t$.

- Si $a > t$, de imponer (4.1.18) para $a > 0$ obtenemos

$$u(a, t) = f(a - t)e^{-mt}, \quad a > t. \quad (4.1.22)$$

- Si $a < t$, al considerar la condición frontera y sustituir en (4.1.21) obtenemos

$$u(0, t) = B(t) = C(-t)e^{-mt},$$

o, despejando

$$C(s) = B(-s)e^{-ms}, \quad s < 0$$

y, entonces

$$u(a, t) = B(t - a)e^{-ma}, \quad a < t. \quad (4.1.23)$$

En este punto, pese a que la solución de (4.1.17)-(4.1.18)-(4.1.19) viene dada por (4.1.22)-(4.1.23), B sigue siendo una función desconocida. Para determinarla, haremos uso de la condición frontera no local separando la expresión integral como sigue

$$B(t) = \int_0^\infty b(a)u(a, t) da = \int_0^t b(a)u(a, t) da + \int_t^\infty b(a)u(a, t) da,$$

o, equivalentemente, utilizando las ecuaciones (4.1.22)-(4.1.23)

$$B(t) = \int_0^t b(a)B(t-a)e^{-ma} da + \int_t^\infty b(a)f(a-t)e^{-mt} da. \quad (4.1.24)$$

Notemos que para t suficientemente grande el segundo término de la suma desaparece. La ecuación lineal integral (4.1.24) corresponde en realidad a la *ecuación de renovación* en (4.1.7). Una vez obtenida la expresión de B , usualmente a través de métodos numéricos, (4.1.22)-(4.1.23) nos proporcionará la estructura por edad para la población estudiada.

4.2. Sistemas de Tráfico

Supongamos que estamos ante una carretera unidimensional, infinita, sin salidas ni entradas y unidireccional por la que circulan vehículos. En este escenario, la posición se mide en kilómetros y el tiempo en segundos. Si conocemos la velocidad y la densidad iniciales del tráfico, ¿es posible modelar y predecir su evolución en el tiempo? La respuesta es afirmativa y, en particular, podemos conseguirlo haciendo uso del método de las características, basándonos en los conceptos teóricos expuestos en el capítulo 3.

Para comenzar, definamos dos funciones que nos acompañarán a lo largo de toda la sección y que supondremos en todo momento de clase \mathcal{C}^1 .

- Denotaremos por $u(x, t)$ a la densidad del tráfico, es decir, a la cantidad de vehículos por unidad de longitud en el punto x en el instante de tiempo t .
- Representaremos por $\phi(x, t)$ al flujo de tráfico en el punto x y el instante t , esto es, el número de vehículos que pasan por x en el momento t .

Si consideramos un segmento finito de la carretera, digamos $a \leq x \leq b$, el número total de coches que se encuentran en este segmento vendrá dado por

$$N(t) = \int_a^b u(x, t) dx, \quad (4.2.1)$$

y, por tanto, la variación de este total respecto al tiempo será

$$\frac{dN}{dt} = \int_a^b \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx. \quad (4.2.2)$$

Esta variación deberá ser claramente igual al número de coches que entran en este segmento por el extremo a en el tiempo t menos aquellos que, al avanzar, abandonan el segmento por el extremo b en este mismo instante, es decir

$$\frac{dN}{dt} = \phi(a, t) - \phi(b, t). \quad (4.2.3)$$

En este punto, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo integral en (4.2.3) para escribir

$$\frac{dN}{dt} = \phi(a, t) - \phi(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} dx, \quad (4.2.4)$$

o, lo que es lo mismo, haciendo uso de (4.2.1),

$$\int_a^b \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right] dx = 0, \quad (4.2.5)$$

y, dado que se han impuesto condiciones de regularidad sobre u y ϕ y teniendo en cuenta que el intervalo $[a, b]$ es cerrado y acotado en \mathbb{R} y arbitrariamente pequeño, podemos afirmar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (4.2.6)$$

Esta ecuación es conocida como *ley de conservación para un sistema de tráfico*.

Antes de avanzar en nuestro estudio, es importante hacer hincapié en ciertas consideraciones acerca de las propiedades del flujo de tráfico ϕ que serán fundamentales en el desarrollo de esta sección. En particular, asumiremos que la densidad y el flujo están relacionados a través de la velocidad de los vehículos, que denotamos por V , la cual dependerá únicamente de la densidad del tráfico, es decir, $V = V(u)$. La relación que existe entre flujo y densidad es

$$\phi(x, t) = u(x, t)V(u(x, t)). \quad (4.2.7)$$

Como consecuencia, el flujo ϕ resulta ser una función que depende solo de la densidad ($\phi = \phi(u)$). Esta indicación, junto con (4.2.6) nos permite obtener una nueva igualdad para el modelo expuesto

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.2.8)$$

Esta última ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c(u) = \phi'(u),$$

que identificamos como una EDP cuasilineal hiperbólica de primer orden.

Además de las consideraciones previas, en nuestro modelo ϕ cumple con las siguientes propiedades (ver la figura 4.2.1a):

- Existe un cierto valor de u , digamos u_j , a partir del cual el flujo de tráfico es nulo, es decir, $\phi(u) = 0$ si $u > u_j$. De manera análoga, si la densidad de tráfico es nula el flujo también será nulo, esto es $\phi(0) = 0$.

- ϕ es una función positiva y cóncava en $(0, u_j)$; es decir, $\phi(u) > 0$ y $\phi''(u) < 0$ para todo $u \in (0, u_j)$.
- ϕ alcanza el máximo en un valor de u que denotamos como u_{max} , es estrictamente creciente en el intervalo $[0, u_{max}]$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(u_{max}, u_j]$.

Con todo esto, podemos afirmar que la EDP que define nuestro modelo es

$$u_t + c(u)u_x = 0, \quad c(u) = \phi'(u), \quad c'(u) < 0. \quad (4.2.9)$$

En este punto, podemos detallar la dependencia que hemos afirmado que existe entre la velocidad V y la densidad del tráfico u . En primer lugar, veamos que, bajo las condiciones indicadas previamente para el flujo ϕ y suponiendo además que se cumple $u\phi'(u) < \phi(u)$, entonces V resulta ser una función decreciente. En efecto, partiendo de (4.2.7) podemos afirmar que

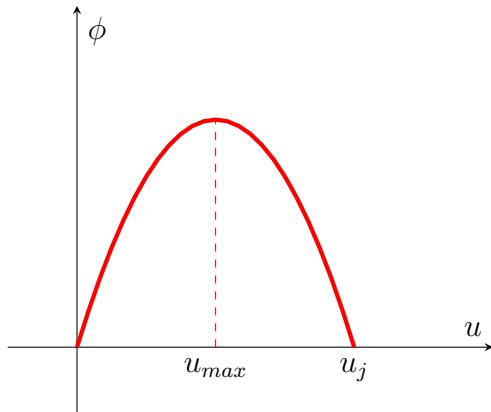
$$V'(u) = -\frac{\phi(u)}{u^2} + \frac{\phi'(u)}{u} < -\frac{\phi'(u)}{u} + \frac{\phi'(u)}{u} = 0. \quad (4.2.10)$$

Por otra parte, recordando que $c(u) = \phi'(u)$ y haciendo uso de nuevo de (4.2.7)

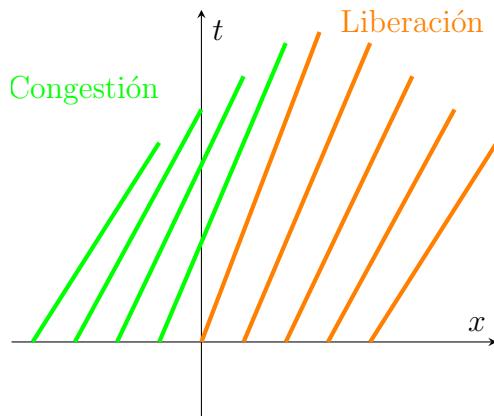
$$c(u) = \phi'(u) = uV'(u) + V(u), \quad (4.2.11)$$

lo que nos permite concluir, en base a la desigualdad recientemente demostrada por (4.2.10), que $c(u) < V(u)$. Esto es, la velocidad de los vehículos es superior a la velocidad de propagación de las curvas características; o, dicho de otro modo, superior a la velocidad a la que las señales se transmiten en el sistema. Esto nos permite predecir la velocidad de los vehículos a partir del diagrama característico del problema, mostrado en la figura 4.2.2, tal y como veremos a continuación.

Es bien sabido que $u = cte$ a lo largo de las características dadas por $dx/dt = c(u)$ y que, por ende, la pendiente de estas curvas (vistas como t en función de x) vendrá dada por $1/c(u)$. En nuestro caso, puesto que $c(u) = \phi'(u)$, la pendiente será positiva cuando la densidad u se encuentre por debajo de su valor máximo u_{max} , es decir, donde el flujo de tráfico es creciente. En cambio, a partir de u_{max} , donde el flujo comienza a decrecer, la pendiente será negativa.



(a) Gráfica del flujo de tráfico ϕ como función de la densidad de tráfico u en nuestro modelo.



(b) Diagrama característico para una densidad inicial acampanada con valores siempre menores que u_{max} .

Figura 4.2.1: Flujo de tráfico inicial en nuestro modelo y diagrama característico del problema (4.2.9).

Si la condición inicial para la densidad de tráfico tiene forma de campana y toma valores menores que u_{max} , las características tienden a cruzarse, como se puede ver en 4.2.1b, dando lugar a la formación de una *onda de choque* como ya se analizó en el capítulo 3. Esta discontinuidad aparece por primera vez en el tiempo de rotura, t_b . En cuanto a la densidad, esta va cambiando su forma con el tiempo hasta que en el instante t_b , la derivada espacial u_x tienda hacia ∞ en un punto. Por la ecuación con la que estamos tratando, esto implica que también $u_t = \infty$ en dicho punto. Como consecuencia, la densidad toma el valor crítico u_j donde el flujo es nulo, los vehículos se detienen y se forma lo que comúnmente denominamos como *atasco*. A la entrada en la zona de liberación, los vehículos reanudan su movimiento (véase la figura 4.2.2).

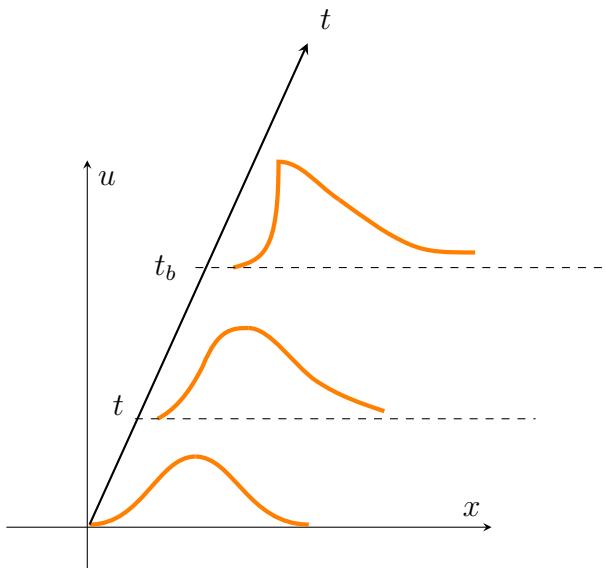


Figura 4.2.2: Evolución de la densidad de tráfico según las condiciones expuestas, la densidad crece con mayor rapidez en el espacio en la parte izquierda de la campana, hasta que, en el instante t_b , se produce un atasco.

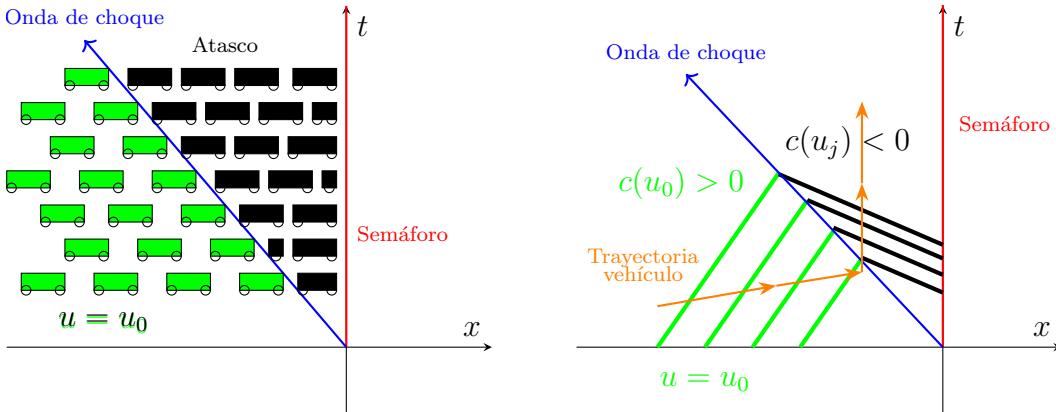
4.2.1. El fenómeno del semáforo

Para finalizar esta sección, desarrollamos un caso particular en el estudio de sistemas de tráfico. Hasta este momento, habíamos supuesto una carretera sin elementos externos que alterasen la circulación de los vehículos. ¿Qué ocurre cuando, por ejemplo, existe un semáforo en rojo en la calzada?

Supongamos una densidad constante de vehículos $u_0 < u_{max}$ que se encuentra ante un semáforo en rojo en el instante $t = 0$ y que, a partir de ese momento, no se encuentran más vehículos circulando por la vía. Debido a que $c(u) = \phi'(u) > 0$ para $u = u_0 < u_{max}$ y $c(u) = \phi'(u) < 0$ para $u \geq u_{max}$, entonces será inevitable la formación de una onda de choque cuando la densidad de los vehículos alcance su máximo, provocando la detención de los vehículos ante el semáforo (véase la figura 4.2.3).

En este punto, cabe destacar que la velocidad de la onda de choque vendrá dada por

$$s' = \frac{[\phi(u)]}{[u]} = \frac{0 - \phi(u_0)}{u_j - u_0} = -\frac{\phi(u_0)}{u_j - u_0} < 0. \quad (4.2.12)$$



(a) Diagrama espacio-temporal de la evolución de una densidad constante de vehículos (en verde) que se encuentra con un semáforo en rojo en $t = 0$ formando así un atasco.

(b) Diagrama característico de nuestro ejemplo; en naranja podemos ver la trayectoria que siguen los vehículos que se detienen al llegar a la onda de choque (en azul).

Figura 4.2.3: Diagrama espacio-temporal y característico del fenómeno del semáforo.

4.2.2. Evolución del tráfico con el semáforo en verde

En la subsección anterior determinamos la evolución de una densidad constante de vehículos que se encuentran ante un semáforo en rojo en una vía, pero, ¿cómo se comportan estos vehículos cuando el semáforo se abre en un instante $t = t_0$? Esta pregunta, con nuestros conocimientos adquiridos a lo largo del capítulo 3, es equivalente a preguntarnos cómo se propaga la onda de choque.

A partir de este instante $t = t_0$ los vehículos comenzarán a avanzar, sobre-pasando el origen $x = 0$ y trayendo consigo varias implicaciones importantes (ver la figura 4.2.4);

- La densidad pasará de tomar el valor u_j en el atasco a tomar el valor $u = 0$ a partir de $x = 0$.
- Formación de un *abanico* de características a partir de $t = t_0$ que cubre la región vacía de forma continua desde el valor $u = u_j$ al valor $u = 0$.
- La onda de choque vista en la subsección anterior cambiará de dirección

y acelerará hacia $x = 0$.

En particular, las ecuaciones características del abanico que parten de $(0, t_0)$ tendrán la forma

$$c(u) = \frac{x}{t - t_0} = \text{constante.} \quad (4.2.13)$$

Para concluir, podemos obtener la nueva ecuación de la onda de choque a partir de la condición de salto

$$s' = \frac{dx}{dt} = \frac{\phi(u) - \phi(u_0)}{u - u_0}. \quad (4.2.14)$$

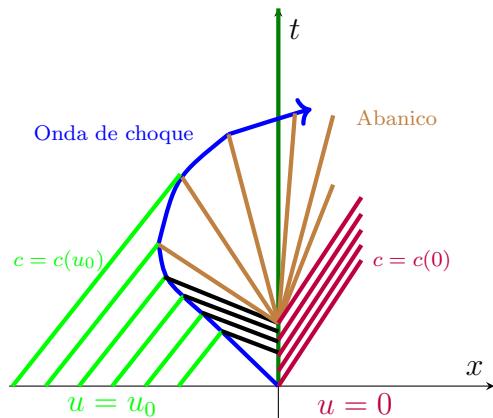


Figura 4.2.4: Diagrama característico tras el cambio del semáforo a color verde. Se observa la nueva forma de la onda de choque, el abanico de características comprendido entre $c(u_j)$ y $c(0)$ y las curvas características que se originan a partir del semáforo (en granate).

Bibliografía

- [1] J. R. Chasnov. *Mathematical Biology*. Hong Kong University of Science and Technology, 2009.
- [2] R. Haberman. *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Pearson, 5th edition, 2012.
- [3] R. Courant & D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume 2. Interscience Publishers, 1962.
- [4] F. John. *Partial Differential Equations*, volume 1 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 4th edition, 1982.
- [5] J. H. Jones. Population growth in continuous time. In *Stanford Spring Workshop in Formal Demography*, Stanford, California, May 2008. Department of Anthropology, Stanford University.
- [6] J. D. Logan. *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2008.
- [7] E. Trucco. *Mathematical Models for Cellular Systems. The Von Foerster equation*, volume 27. 1965.
- [8] H. von Foerster. Some remarks on changing populations. In F. Stohlman Jr., editor, *The Kinetics of Cellular Proliferation*, pages 382–407. Grune & Stratton, 1959.

Índice alfabético

- Atasco, 77
- Condición de salto, 50
- Curva característica, 14
- Densidad de tráfico, 74
- Diagrama característico, 14
- Ecuaciones cuasilineales, 26
- Ecuaciones hiperbólicas, 49
- Ecuación característica de Euler y Loka-
ta, 70
- Ecuación de advección, 13
- Ecuación de McKendrick-Von Foers-
ter, 66
- Ecuación de renovación, 69
- Estructura por edades, 66
- Flujo de tráfico, 74
- Frente de onda, 36
- Integral Completa, 45
- Ley de conservación, 22
- Método de las características, 74
- Onda de choque, 53
- Onda de rarefacción, 54
- Problema de Cauchy, 44
- Problema de Riemann, 50
- Sistema característico, 15
- Solución general, 30
- Tasa de crecimiento intrínseco, 70
- Teorema de Haar, 47
- Tiempo de rotura, 59
- Trayectoria de choque, 50
- Zona de liberación, 77