



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Aproximaciones asintóticas de integrales paramétricas

Autor: Ángel García Pérez
Tutor: Jorge Mozo Fernández
Año 2024

Resumen

Este trabajo consiste en explicar y aplicar métodos para la aproximación asintótica de integrales paramétricas. Con este fin hacemos en primer lugar un repaso de las relaciones de orden entre funciones que nos permitirá realizar una breve introducción a los desarrollos asintóticos. El trabajo se enfoca principalmente en el desarrollo y demostración de cuatro técnicas para la aproximación asintótica de integrales: la integración por partes, el método de Laplace, el método de la fase estacionaria y el método del descenso rápido. Finalmente, aplicamos los métodos demostrados a la obtención de desarrollos asintóticos de integrales paramétricas relevantes en las matemáticas y en la física, como la integral exponencial, la fórmula de Stirling, la norma de una función y las integrales de Bessel y Airy.

Palabras clave: desarrollo asintótico, integral paramétrica, método de integración por partes, método de Laplace, método de la fase estacionaria, el método del descenso rápido.

Abstract

On this work, we aim to explain and apply various methods to obtain asymptotic approximations of parametric integrals. As a preliminary, we recall the usual order-notation between functions in order to give a brief introduction to asymptotic expansions. The work focuses mainly on the development of four methods for the asymptotic approximation of integrals: integration by parts, Laplace's method, the stationary phase method and the steepest descent method. Finally, we apply the proved methods to obtain asymptotic expansions of parametric integrals relevant to mathematics and physics, such as the exponential integral, the Stirling formula, the norm of a function, and the Bessel and Airy integrals.

Keywords: asymptotic expansion, parametric integral, method of integration by parts, Laplace's method, stationary phase method, method of rapid descent.

Índice general

Introducción	1
1. Relaciones de orden	2
2. Desarrollos asintóticos	5
2.1. Desarrollos asintóticos en $\mathbb{C}$	13
3. Métodos de aproximación asintótica para integrales	17
3.1. Integración por partes	17
3.2. Método de Laplace	21
3.3. Método de la fase estacionaria	33
3.4. Método del descenso rápido	50
4. Aplicaciones	61
4.1. Integral exponencial	61
4.2. Fórmula de Stirling	63
4.3. Norma L_p de una función	64
4.4. Integral de Bessel	65
4.5. Integral de Airy	66

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es exponer, demostrar y aplicar métodos para aproximar integrales asintóticamente, una técnica esencial en el estudio y resolución de ecuaciones diferenciales en la actualidad, así como en distintas áreas de las matemáticas a lo largo de la historia. Estos métodos ofrecen herramientas poderosas para aproximar integrales de forma precisa, incluso en situaciones donde la resolución analítica es inexistente.

Iniciaremos con un breve repaso de las relaciones de orden en funciones, un concepto fundamental para comprender cómo las funciones se comparan entre sí a medida que se aproximan a ciertos valores o límites. Luego, nos adentraremos en los desarrollos asintóticos, tanto de funciones reales como complejas, donde analizaremos cómo las funciones pueden aproximarse mediante desarrollos finitos con términos dominantes que revelan su comportamiento en regiones específicas.

El núcleo del trabajo se centrará en el desarrollo y demostración de los métodos utilizados para aproximar integrales asintóticamente. Estudiaremos cuatro técnicas: la integración por partes, el método de Laplace, el método de la fase estacionaria y el método del descenso rápido. Para ello nos valdremos de resultados vistos en las asignaturas de Cálculo Infinitesimal, Análisis Matemático y Variable Compleja.

Finalmente, exploraremos algunas aplicaciones de estos métodos en la resolución de integrales paramétricas de gran importancia en las matemáticas y en la física, como lo son la integral exponencial, la fórmula de Stirling, la norma de una función o las integrales de Bessel o de Airy.

Capítulo 1

Relaciones de orden

Este capítulo tiene como función recordar definiciones y propiedades básicas de las relaciones de orden en funciones. Se aborda la notación de Landau y la de equivalencia de funciones, proporcionando ejemplos y algunos resultados fundamentales. Estos conceptos serán usados a lo largo de toda la memoria, basándose en ellos las definiciones clave de las que parte este trabajo así como los resultados más significativos que obtendremos.

Notación 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$. Entonces:

- (I) Llamamos bola abierta de radio r centrada en x a

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

- (II) Llamamos bola abierta punteada de radio r centrada en x a

$$B^*(x, r) := B(x, r) \setminus \{x\}.$$

Cuando estemos en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, se sobreentenderá que nos referimos a la distancia euclídea $d(x, y) = |x - y|$.

Definición 1.2 (Notación de Landau). Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de X y f, g dos funciones reales definidas en X .

- (I) Se dice que f es una O de g (O grande) cuando x tiende a x_0 y se escribe ' $f = O(g)$ ' cuando $x \rightarrow x_0$, si existen un número $r > 0$ y una

constante $M \geq 0$ tales que:

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \text{para cada } x \in B^*(x, r) \cap X.$$

- (II) Se dice que f es una o de g (o pequeña) cuando x tiende a x_0 y se escribe ' $f = o(g)$ ' cuando $x \rightarrow x_0$, si existen un número $r > 0$ y una función $\varepsilon(x)$ definida en $B^*(x, r) \cap X$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$, tales que:

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{para cada } x \in B^*(x, r) \cap X.$$

La definición para funciones complejas es análoga.

Observación 1.3. Si se tiene que existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ en $B^*(x_0, r) \cap X$ y que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces tomando $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f = o(g)$.

Ejemplo 1.4. Algunos ejemplos de esta notación son:

- (I) $\sin(x) = O(x)$, cuando $x \rightarrow 0$.
- (II) $1 - \cos(x) = o(x)$, cuando $x \rightarrow 0$.
- (III) $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, cuando $x \rightarrow \infty$.
- (IV) $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, cuando $x \rightarrow \infty$.

Observación 1.5. Se pueden definir exactamente igual estos conceptos cuando $x \rightarrow x_0^+$ (x tiende a x_0 por la derecha) o $x \rightarrow x_0^-$ (x tiende a x_0 por la izquierda) si se tienen las definiciones para los intervalos $(x_0, x_0 + r)$ y $(x_0 - r, x_0)$ respectivamente. También en el caso de que X sea no acotado, cuando $x \rightarrow \infty$ si se tienen las definiciones para cada $x > r$, o cuando $x \rightarrow -\infty$ si se tienen las definiciones para cada $x < -r$.

Propiedades 1.6. Sean f y g funciones reales. Entonces algunas propiedades, que pueden encontrarse en el libro de Erdélyi [5], de esta notación son:

- (I) $O(O(f)) = O(f)$
- (II) $O(o(f)) = o(O(f)) = o(o(f)) = o(f)$
- (III) $O(f)O(g) = O(fg)$

$$(IV) \quad O(f)o(g) = o(f)o(g) = o(fg)$$

$$(V) \quad O(f) + O(f) = O(f) + o(f) = O(f)$$

$$(VI) \quad o(f) + o(f) = o(f)$$

Demostración. La demostración es inmediata aplicando las definiciones, por lo que evitamos reproducirla aquí. $\square$

Definición 1.7 (Equivalencia de funciones). Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de X y f, g dos funciones reales definidas en X . Se dice que f es equivalente a g en el punto x_0 y se escribe ' $f \sim_{x_0} g$ ', si existen un número $r > 0$ y una función $h(x)$ definida en $B^*(x, r)$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$, tales que:

$$f(x) = h(x)g(x) \quad \text{para cada } x \in B^*(x, r).$$

Si X no está acotado superior o inferiormente podemos hablar de equivalencia en ∞ o $-\infty$, definidas de manera análoga, y escribir ' $f \sim_{\infty} g$ ' o ' $f \sim_{-\infty} g$ '. De nuevo, la definición para funciones complejas es análoga.

Observación 1.8. Si se tiene que existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ en $B^*(x_0, r)$ y que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces tomando $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f \sim_{x_0} g$.

Ejemplo 1.9. Aplicando la observación anterior se tiene, por ejemplo, que:

$$(I) \quad \tan(x) \sim_0 x.$$

$$(II) \quad \frac{1}{x^2} \sim_{\infty} e^{1/x^2} - 1.$$

Capítulo 2

Desarrollos asintóticos

En este capítulo se presenta una breve introducción a los desarrollos asintóticos, empezando con su definición y con algunos ejemplos básicos. Lo haremos primero en funciones reales, para ampliar estos conceptos posteriormente a funciones complejas. Demostraremos las propiedades características de este tipo de desarrollos, proporcionando ejemplos que las ilustren. Estas propiedades nos permitirán justificar los resultados que obtendremos en el siguiente capítulo.

Observación 2.1. En este capítulo, siempre que no se especifique lo contrario, si se habla de un punto de acumulación de un conjunto, cuando el conjunto no esté acotado entenderemos que este puede ser $+\infty$ o $-\infty$.

Notación 2.2. Llamaremos $\mathbb{N}_s$ al conjunto

$$\mathbb{N}_s = \begin{cases} \{1, 2, \dots, s\} & \text{si } s \in \mathbb{N} \\ \mathbb{N} & \text{si } s = \infty. \end{cases}$$

Si $s = \infty$, y $n \in \mathbb{N}$ consideraremos que $\mathbb{N}_{s-n} = \mathbb{N}_s$ y que si se tiene una propiedad para todo $n \leq s$, entonces se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por abuso de notación, una sucesión será una aplicación $\sigma : \mathbb{N}_s \rightarrow X$ donde $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, es decir, admitiremos “sucesiones finitas”. De esta manera, podremos considerar sucesiones finitas e infinitas con una notación más compacta.

Definición 2.3 (Sucesión asintótica). Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de X . Se dice que una sucesión (finita o infinita, tal y como hemos dicho) de funciones reales $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_s}$, definidas en X es asintótica cuando $x \rightarrow x_0$ si se tiene que

$$\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x)) \text{ cuando } x \rightarrow x_0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}_{s-1}.$$

Ejemplo 2.4. Son sucesiones asintóticas:

- 1) $\{(x - x_0)^n\}_{n \in \mathbb{N}_s}$, cuando $x \rightarrow x_0$.
- 2) $\{\frac{1}{x^n}\}_{n \in \mathbb{N}_s}$, cuando $x \rightarrow \infty$.
- 3) $\{\frac{e^x}{x^{a_n}}\}_{n \in \mathbb{N}_s}$, cuando $x \rightarrow \infty$, con $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_{s-1}$.

Definición 2.5 (Desarrollo asintótico). Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de X . Sean $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_s}$ una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow x_0$ de funciones reales definidas en X , f una función real definida en X , $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_s}$ una sucesión de constantes y $N \in \mathbb{N}_s$. Decimos que

$$\sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x)$$

es un desarrollo asintótico de f cuando $x \rightarrow x_0$, si para cada $m \leq N$ se cumple que

$$f(x) = \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x) + o(\phi_m(x))$$

Proposición 2.6. En las condiciones de la definición anterior, se tiene que para cada $m \leq N$, cuando $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x) + o(\phi_m(x)) \iff f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(x) \sim_{x_0} a_m \phi_m(x).$$

Demostración. Suponemos que $a_m \neq 0$ para cada $m \leq N$ y probamos las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ Suponemos que cuando $x \rightarrow x_0$, $f(x) - \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x) = o(\phi_m(x))$.
Entonces

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(x) &= a_m \phi_m(x) + f(x) - \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x) \\ &= a_m \phi_m(x) \left(1 + \frac{f(x) - \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x)}{a_m \phi_m(x)} \right). \end{aligned}$$

Y se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 1 + \frac{f(x) - \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x)}{a_m \phi_m(x)} = 1.$$

Entonces si tomamos

$$h(x) = 1 + \frac{f(x) - \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x)}{a_m \phi_m(x)},$$

tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1 \quad \text{y} \quad f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(x) = a_m \phi_m(x) h(x),$$

por lo que se puede concluir que $f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(x) \sim_{x_0} a_m \phi_m(x)$.

$\Leftarrow$ Suponemos que existe $r > 0$ tal que

$$f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(x) = a_m \phi_m(x) h(x)$$

en $B^*(x_0, r)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$. Entonces en $B^*(x_0, r)$:

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(x) &= a_m \phi_m(x) h(x) = a_m \phi_m(x) (1 + (h(x) - 1)) = \\ &= a_m \phi_m(x) + a_m \phi_m(x) (h(x) - 1). \end{aligned}$$

Y como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_m \phi_m(x)(h(x) - 1)}{a_m \phi_m(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) - 1 = 0,$$

se tiene que $a_m \phi_m(x)(h(x) - 1) = o(\phi_m(x))$, y por consiguiente

$$f(x) = \sum_{n=1}^m a_n \phi_n(x) + o(\phi_m(x)).$$

□

Observación 2.7. La proposición anterior indica que un desarrollo asintótico se puede definir alternativamente como:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim_{x_0} a_1 \phi_1(x), \\ f(x) - a_1 \phi_1(x) &\sim_{x_0} a_2 \phi_2(x), \quad \dots, \\ f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(x) &\sim_{x_0} a_m \phi_m(x). \end{aligned}$$

En particular, tenemos que una función será equivalente en un punto al primer término de su desarrollo asintótico en ese punto. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 2.8 (Término principal). Llamaremos término principal al primer término no nulo de un desarrollo asintótico.

Este será equivalente a la función. Por lo tanto, cuando sólo obtengamos un término podremos usar la notación de función equivalente. Además cuando busquemos el desarrollo asintótico de integrales paramétricas, en la mayoría de casos será suficiente con obtener el término principal para determinar el comportamiento general.

Observación 2.9. (I) En las condiciones de la definición de desarrollo asintótico, tenemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) + o(\phi_N(x)) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \phi_n(x) + a_N \phi_N(x) + o(\phi_N(x)) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} a_n \phi_n(x) + O(\phi_N(x)).
\end{aligned}$$

(II) Es común encontrar la notación

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) \text{ y } R_N(x) = f(x) - S_N(x),$$

de tal manera que cuando $x \rightarrow x_0$, $R_N(x) = o(\phi_N(x))$. Se dice que $R_N(x)$ es la función resto o función de error.

Proposición 2.10. Si existe un desarrollo asintótico de f cuando $x \rightarrow x_0$ para una sucesión asintótica $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_s}$, es único.

Demostración. En efecto, para que se cumpla la definición de desarrollo asintótico, para cada $n \leq N$ los coeficientes a_n han de cumplir:

$$a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \phi_k(x)}{\phi_n(x)}.$$

□

Un tipo particular de desarrollo asintótico, especialmente útil, y que se ha estudiado en las asignaturas de análisis, es el dado por los polinomios de Taylor. Recordamos aquí, por completitud, el resultado principal.

Teorema 2.11. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $x_0 \in I$, $N \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{C}^N(I)$. Entonces el polinomio de Taylor de f en x_0 de orden N

$$P(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

es un desarrollo asintótico de f cuando $x \rightarrow x_0$.

Demostración. Tomamos como sucesión asintótica $\{(x - x_0)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cuando $x \rightarrow x_0$. Vamos a probar que $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^N)$, es decir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^N} = 0.$$

Si $N = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Si $N \geq 2$, resulta más cómodo usar la regla de l'Hopital $N - 1$ veces, ya que el cociente es una indeterminación $0/0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^N} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'(x)}{N(x - x_0)^{N-1}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(N-1)}(x) - P^{(N-1)}(x)}{N!(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(x_0) - f^{(N)}(x_0)(x - x_0)}{N!(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{N!} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(N)}(x_0) \right] = \\ &= \frac{1}{N!} [f^{(N)}(x_0) - f^{(N)}(x_0)] = 0. \end{aligned}$$

Y por lo tanto se puede concluir que

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^N)$$

□

Observación 2.12. (I) Un desarrollo asintótico no es una serie. Una serie tiene infinitos términos y un desarrollo asintótico por definición no los tiene. De hecho, aunque la sucesión de funciones asintóticas sea infinita, puede que sólo exista un desarrollo asintótico finito en esa sucesión.

Por ejemplo, sea $f(x) = |x| + 1$. Tenemos que $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es una sucesión asintótica de funciones cuando $x \rightarrow 0$. Esta sucesión es infinita, sin embargo se tiene que

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1}{x^0} = 1,$$

y a_1 no existe, ya que

$$\frac{|x| + 1 - 1}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Entonces sólo puede ser que $f(x) \sim_0 1$.

- (II) Al ser un desarrollo asintótico finito por definición, no se puede hablar de convergencia. De hecho, en muchos casos si se continúa añadiendo términos se obtiene una serie divergente. Vemos un ejemplo de este comportamiento en la observación 4.2.
- (III) Si consideramos diferentes sucesiones asintóticas, una función puede tener desarrollos asintóticos distintos en el mismo punto. Por ejemplo, con la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y las sucesiones asintóticas cuando $x \rightarrow \infty$, $\{\frac{1}{x^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\frac{x-1}{x^{2n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$, se comprueba que:

$$\frac{1}{1+x} \sim_{\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}, \quad \frac{1}{1+x} \sim_{\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(x-1)}{x^{2n}}.$$

En efecto, para la primera expresión usando el desarrollo de Taylor se tiene que

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{x}\right)} \sim_{\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^N \left(\frac{-1}{x}\right)^n = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}$$

Y para la segunda, se comprueba por inducción. Para a_1 se tiene que

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Y suponiendo que es cierto para $n-1$, para n se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-1)}{x^{2k}}}{\frac{x-1}{x^{2n}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x} - (x-1) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n-2}} \right)}{\frac{x-1}{x^{2n}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n-2}(1+x)} \frac{x^{2n-2} - \sum_{k=2}^n x^{2(n-k)}(x^2 - 1)}{\frac{x-1}{x^{2n}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} [x^{2n-2} - (\sum_{k=2}^n x^{2(n-k+1)} - x^{2(n-k)})]}{(x^2 - 1)x^{2n-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} [x^{2n-2} - (x^{2n-2} - x^{2n-4} + x^{2n-4} - \dots - 1)]}{(x^2 - 1)x^{2n-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{x^{2n} - x^{2n-2}} = 1. \end{aligned}$$

- (IV) Dos funciones distintas pueden tener el mismo desarrollo asintótico en un mismo punto. Si tomamos la función e^{-x} y la sucesión de funciones $\{\frac{1}{x^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que es asintótica en ∞ , resulta que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Por lo tanto, el desarrollo asintótico de la función en el infinito es el idénticamente nulo. Entonces el desarrollo asintótico de cualquier función $f(x)$ en el infinito para $\{\frac{1}{x^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y el de $f(x) + e^{-x}$ será el mismo.

2.1. Desarrollos asintóticos en $\mathbb{C}$

Hasta ahora solamente hemos tratado con funciones reales. Sin embargo, las definiciones que hemos visto se pueden extender al plano complejo, pero debemos tener cuidado. Al igual que en $\mathbb{R}$ una función puede tener un límite distinto si nos aproximamos por la izquierda o por la derecha, en el plano complejo una función puede tener distinto límite dependiendo de la dirección en la que te aproximes.

Definición 2.13. Llamaremos $S_{\alpha,\beta}^{z_0}$ (Figura 2.1) al sector abierto del plano complejo

$$S_{\alpha,\beta}^{z_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \arg(z - z_0) < \beta\}.$$

Si se cumple que $z_0 = 0$, simplificaremos la notación con $S_{\alpha,\beta}^0 = S_{\alpha,\beta}$.

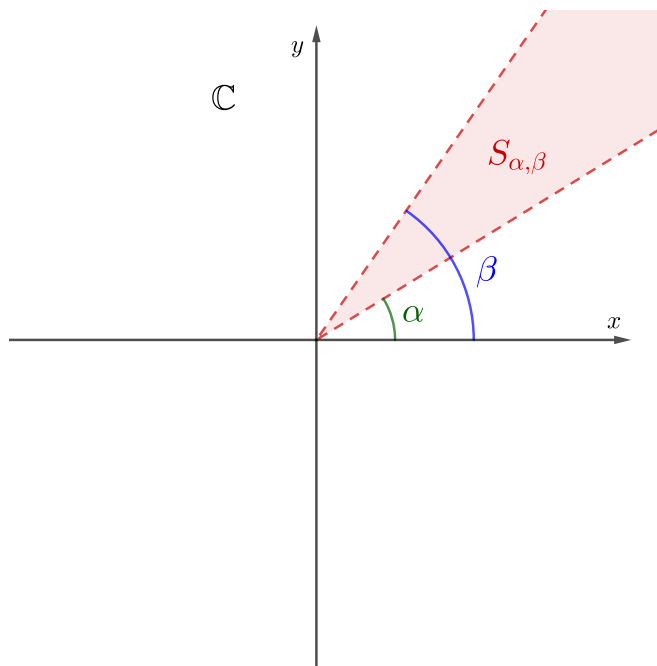


Figura 2.1: Esquema del sector $S_{\alpha,\beta}$.

Observación 2.14. Sabemos que si una función $f(z)$ es analítica en un punto z_0 de su dominio, existirá un radio $\rho > 0$ tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{si } |z - z_0| < \rho,$$

donde los a_n son constantes. También sabemos que si una función es analítica en ∞ (o equivalentemente $f\left(\frac{1}{z}\right)$ es analítica en $z = 0$) existirán un radio $\rho > 0$ y una serie de potencias inversas que cumpla que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \quad \text{si } |z| > \rho,$$

donde los b_n también son constantes. Estos desarrollos en serie, de Taylor y de Laurent respectivamente, proporcionan un desarrollo asintótico igual que en el caso real cuando queremos estudiar el comportamiento de una función en los casos $z \rightarrow z_0$ y $z \rightarrow \infty$.

Proposición 2.15. Sean f, g dos funciones complejas analíticas en los puntos z_0 y ω_0 respectivamente. Sean

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^n a_k (\omega - \omega_0)^k \quad \text{y} \quad Q(z) = \sum_{k=0}^n b_k (z - z_0)^k,$$

los polinomios de Taylor de orden n de f y g , en ω_0 y z_0 respectivamente. Además suponemos que $b_0 = \omega_0$. Entonces tenemos que el polinomio de Taylor de orden n en z_0 de $f \circ g$ es el que resulta de despreciar en el polinomio $P(Q(z))$ las potencias de $(z - z_0)$ de exponente estrictamente mayor que n .

Demostración. Esta demostración se vio en la asignatura Variable Compleja y puede encontrarse, por ejemplo, en el libro de Lang [7] (Teorema 3.4). $\square$

Ejemplo 2.16. Si queremos estudiar el comportamiento asintótico cuando $z \rightarrow 0$ de

$$I(z) = \sinh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{1/z} - e^{-1/z}}{2},$$

holomorfa en todo $\mathbb{C}$, tendremos que

$$|e^{1/z}| = e^{\operatorname{Re}(1/z)} = e^{\operatorname{Re}(\bar{z}/|z|^2)} = e^{\cos(\arg(z))/|z|} \quad , \text{ si } z \neq 0$$

$$\text{y } |e^{-1/z}| = e^{-\cos(\arg(z))/|z|} \quad , \text{ si } z \neq 0 .$$

Entonces:

- Si $z = |z|e^{i\theta} \in S_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$, se tiene que

$$|e^{-1/z}| \leq e^{-\cos(\theta)/|z|} ,$$

y como $\cos(\theta) > 0$ cuando $|\theta| < \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}}} e^{-1/z} = 0 .$$

Sin embargo, en $S_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}$ también sucede que

$$|e^{1/z}| \leq e^{\cos(\theta)/|z|} , \text{ y } \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}}} e^{1/z} = \infty .$$

Entonces en este sector $e^{1/z}$ domina a $e^{-1/z}$ y se tiene que

$$I(z) \sim \frac{e^{1/z}}{2} , \text{ cuando } z \rightarrow 0 \text{ y } z \in S_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} .$$

- Si $z \in S_{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$, se tiene la situación opuesta y $e^{-1/z}$ domina a $e^{1/z}$, por lo que

$$I(z) \sim \frac{-e^{-1/z}}{2} , \text{ cuando } z \rightarrow 0 \text{ y } z \in S_{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}} .$$

- Si $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$, entonces

$$\sinh\left(\frac{1}{iy}\right) = -\sinh\left(\frac{i}{y}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{y}\right)}{2i} ,$$

y como no existe $\lim_{y \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{y}\right)$, no es posible realizar un desarrollo asintótico en esta dirección.

El hecho de que una misma función analítica admita diferentes desarrollos asintóticos en sectores adyacentes se conoce como *Fenómeno de Stokes*. El objetivo de este trabajo no es el estudio en profundidad de este fenómeno. Un tratamiento más exhaustivo puede encontrarse en la sección 6.6 del libro de Ablowitz y Fokas [1].

Capítulo 3

Métodos de aproximación asintótica para integrales

Este es el capítulo central de la memoria. En él se exploran cuatro métodos para obtener el término principal de una integral paramétrica: el método de integración por partes, el método de Laplace, el método de la fase estacionaria y el método del descenso rápido. Para cada método se intenta explicar previamente la idea en la que se basa, para después pasar a demostrarlo. Los ejemplos de aplicación de cada uno se encuentran en el capítulo de aplicaciones.

3.1. Integración por partes

En esta sección se demuestra una manera de obtener desarrollos asintóticos cuando $x \rightarrow \infty$ para integrales de la forma

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{-xt}dt,$$

donde $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty) \cup \{\infty\}$ y la función f es varias veces derivable. Integrando por partes varias veces se obtiene un desarrollo asintótico

con sucesión $\{\frac{e^{-ax}}{x^{n+1}}\}_{n \in \mathbb{N}_s}$ cuando $x \rightarrow \infty$. Es decir, el comportamiento de $I(x)$ estará determinado únicamente por el punto a , ya que la función e^{-xt} es decreciente en $\mathbb{R}$ (se tiene que $x > 0$). Para ello habrá que ver que las integrales que surgen de la fórmula de la integración por partes están dominadas por el término del desarrollo previo.

Teorema 3.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > a$, $N \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{C}^{N+2}([a, b])$. Entonces, la integral

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{-xt} dt$$

está bien definida para todo $x > 0$, y cuando $x \rightarrow \infty$:

$$I(x) = \sum_{n=0}^N \frac{e^{-xa}}{x^{n+1}} f^{(n)}(a) + o\left(\frac{e^{-xa}}{x^{N+1}}\right).$$

Demostración. En primer lugar, tenemos que para todo $x > 0$

$$\left| \int_a^b f(t)e^{-xt} dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|e^{-xt} dt \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)|e^{-ax},$$

así que la integral está bien definida.

Entonces como $f(t)$ y e^{-xt} están bien definidas y son derivables en $[a, b]$, usando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$I(x) = -f(t) \frac{e^{-xt}}{x} \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b f'(t) \frac{e^{-xt}}{x} dt = f(a) \frac{e^{-xa}}{x} - f(b) \frac{e^{-xb}}{x} + \int_a^b f'(t) \frac{e^{-xt}}{x} dt.$$

Y repitiendo este proceso, se obtiene que para $m \leq N$

$$I(x) = \sum_{n=0}^m f^{(n)}(a) \frac{e^{-xa}}{x^{n+1}} - \sum_{n=0}^m f^{(n)}(b) \frac{e^{-xb}}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{m+1}} \int_a^b f^{(m+1)}(t) e^{-xt} dt. \quad (3.1)$$

(1)
(2)
(3)

La mayor contribución al valor de $I(x)$ de cada uno de los sumatorios (1) y (2) la hará el primer término, ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(a) \frac{e^{-xa}}{x^{n+2}}}{f^{(n)}(a) \frac{e^{-xa}}{x^{n+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(a)}{f^{(n)}(a)} \frac{1}{x} = 0 ,$$

y se razona de igual manera para el sumatorio (2). Además, la contribución total del sumatorio (2) será asintóticamente despreciable frente a la de cualquier término del sumatorio (1). En efecto, comparando para cada $n \leq m$ el término que más contribuye del sumatorio (2):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(b) \frac{e^{-xb}}{x}}{f^{(n)}(a) \frac{e^{-xa}}{x^{n+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(b)}{f^{(n)}(a)} x^n e^{x(a-b)} \stackrel{b > a}{\equiv} 0 ,$$

por lo que

$$\sum_{n=0}^m f^{(n)}(b) \frac{e^{-xb}}{x^{n+1}} = o\left(\frac{e^{-xa}}{x^{m+1}}\right) .$$

Ahora sea el término de error la integral (3) en (3.1)

$$R_m(x) = \frac{1}{x^{m+1}} \int_a^b f^{(m+1)}(t) e^{-xt} dt .$$

Además, como $f \in \mathcal{C}^{N+2}([a, b])$, $f^{(m+1)}(t)$ será continua en $[a, b]$ y tenemos que si $K = \max_{t \in [a, b]} |f^{(m+1)}(t)|$,

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &= \left| \frac{1}{x^{m+1}} \int_a^b f^{(m+1)}(t) e^{-xt} dt \right| \leq \frac{1}{x^{m+1}} \int_a^b |f^{(m+1)}(t)| e^{-xt} dt \\ &\leq \frac{K}{x^{m+1}} \int_a^b e^{-xt} dt = \frac{K}{x^{m+2}} (e^{-xa} - e^{-xb}) . \end{aligned}$$

Y de nuevo comparando para cada término de la serie, como $n \leq m \leq N$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{K}{x^{m+2}}(e^{-xa} - e^{-xb})}{f^{(n)}(a) \frac{e^{-xa}}{x^{n+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K}{f^{(n)}(a)} \frac{1}{x^{m-n+1}} (1 - e^{x(a-b)}) = 0$$

Entonces $R_m(x) = o\left(\frac{e^{-xa}}{x^{m+1}}\right)$ y se concluye la prueba.

□

Corolario 3.2. Si además tenemos que para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(t) = O(e^{\alpha t})$ para todo $n \in \mathbb{N}_{N+2}$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces el teorema anterior también se cumple para un intervalo de la forma $[a, \infty)$:

$$I(x) = \int_a^\infty f(t) e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^N \frac{e^{-xa}}{x^{n+1}} f^{(n)}(a) + o\left(\frac{e^{-xa}}{x^{m+1}}\right).$$

Demostración. La demostración es exactamente igual que la del teorema anterior. Solo hay que tener en cuenta que existen $M, r > 0$ tales que para todo $t > r$, $|f^{(n)}(t)| \leq M e^{\alpha t}$. Volviendo a la prueba del teorema, al acotar el término del error se tiene que

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &= \left| \frac{1}{x^{m+1}} \int_a^\infty f^{(m+1)}(t) e^{-xt} dt \right| \leq \frac{M}{x^{m+1}} \int_a^\infty e^{(\alpha-x)t} dt = \\ &= \frac{M}{x^{m+2}} e^{(\alpha-x)a}. \end{aligned}$$

Y se concluye de la misma manera.

□

Observación 3.3. En el libro de Ablowitz y Fokas [1] la única hipótesis adicional que se pide para el corolario 3.2 es que $f(t) = O(e^{\alpha t})$. Sin embargo, esto no es suficiente, ya que la acotación de una función no asegura la de sus derivadas, y por tanto no permite asegurar que el término del resto $R_m(t)$ esté acotado. La función $f(t) = \sin(t^2) e^{\alpha t}$ es un contraejemplo.

3.2. Método de Laplace

En este apartado consideraremos integrales paramétricas del tipo

$$I(x) = \int_a^b \psi_x(t) dt, \quad (3.2)$$

donde $\psi_x(t) = f(t)e^{x\phi(t)}$ y el rango de integración puede ser finito o infinito. El parámetro x será real positivo y ambas funciones f y ϕ estarán definidas en los números reales. Mientras que f puede tomar valores complejos, supondremos que ϕ sólo puede tomar valores reales. Este método se puede usar para obtener un valor aproximado de $I(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$ en caso de que esta converja, pero es más interesante saber cómo se comporta en el caso de que no converja. Si la integral no es convergente cuando $x \rightarrow \infty$, buscaremos saber cómo se comporta la función, es decir, cuál es su orden de divergencia en función de funciones más simples. La idea principal de este método es que la mayor contribución a la integral viene de los entornos de los máximos de $\phi(t)$, es decir, que lejos de estos máximos $\psi_x(t)$ se desvanece. En esta situación, nos podemos aprovechar de que $\psi_x(t)$ se puede expresar de manera más sencilla en un entorno de este máximo para facilitar su integración. Esta es la principal idea del método de Laplace.

Si la función tiene varios máximos, bastará con aplicar para cada máximo el teorema de Laplace. También veremos que para demostrar el teorema, se puede reducir al caso en el que tenemos la función definida en $(0, b)$, con b finito o infinito, y con un único máximo en 0.

Proposición 3.4. Sean $x > 0$, $b \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$ y $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$. Entonces la integral

$$\int_0^b f(t) dt \quad (3.3)$$

es convergente.

Demostración. En primer lugar, como $f(t) \geq 0$ para todo $t \in (0, \infty)$, si b es finito se tiene que

$$\int_0^b f(t)dt \leq \int_0^\infty f(t)dt,$$

por lo que suponemos que $b = \infty$.

Ahora, para todo $t \in (0, \infty)$, $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$, y como $x > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt &= \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \leq \\ &\leq \int_0^1 t^{x-1}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \\ &= \frac{t^x}{x} \Big|_{t=0}^{t=1} + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \\ &= \frac{1}{x} + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ahora, $f(1)$ está definida y usando el criterio de comparación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0.$$

Por la regla de Barrow se tiene que

$$\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt = -\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

por lo que (3.4) es convergente y (3.3) también.

□

Definición 3.5. Sea $x > 0$. La función *Gamma de Euler* se define como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Propiedades 3.6. Algunas propiedades de la función Γ que se pueden encontrar en [8] y que hemos visto en Análisis Matemático son:

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Lema 3.7. Sean $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha > -1$, $C, \beta > 0$, y $b \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$. Entonces para todo $x > 0$, la integral

$$\int_0^b t^\alpha e^{-x C t^\beta} dt$$

está bien definida y cuando $x \rightarrow \infty$ se tiene que

$$\int_0^b t^\alpha e^{-x C t^\beta} dt \sim_\infty \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Demostración. Simplemente realizamos el cambio de variable $u = x C t^\beta$, y obtenemos que

$$\int_0^b t^\alpha e^{-x C t^\beta} dt = \frac{1}{\beta} (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^{x C b^\beta} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u} du$$

Entonces como $\frac{\alpha+1}{\beta} > 0$, por la Proposición 3.4 la integral está bien definida y se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x C b^\beta} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u} du = \int_0^\infty u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right),$$

por lo que se tiene la equivalencia pedida. $\square$

Teorema 3.8. Sean $f : (0, b) \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas a trozos, con $b \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$, que cumplen:

(I) Las funciones tienen los desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow 0^+$:

$$f(t) \sim_{0^+} A t^\alpha, \quad \phi(t) = B - C t^\beta + o(t^\beta),$$

con $B \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha > -1$ y $C, \beta > 0$.

(II) La función ϕ es monótona decreciente en $(0, b)$.

(III) La integral $\int_0^b |f(t)|e^{\phi(t)} dt$ es convergente.

Entonces, se tiene que

$$I(x) = \int_0^b f(t)e^{x\phi(t)} dt$$

está bien definida para todo $x > 0$ y además cuando $x \rightarrow \infty$

$$I(x) \sim_{\infty} \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{Bx} (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Demostración. En primer lugar, si b es finito, basta tomar

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 < t < b \\ 0 & \text{si } b \leq t \end{cases}$$

que se puede hacer porque $f(t)$ tiene que tener la forma At^α solamente cuando $t \rightarrow 0^+$, y por lo tanto

$$I(x) = \int_0^b f(t)e^{x\phi(t)} dt = \int_0^b g(t)e^{x\phi(t)} dt + \int_b^\infty g(t)e^{x\phi(t)} dt = \int_0^\infty g(t)e^{x\phi(t)} dt.$$

Así que suponemos que $b = \infty$. También suponemos sin pérdida de generalidad que $A = 1$ y que $B = 0$, ya que serían constantes que arrastraríamos durante toda la demostración:

$$\int_0^\infty At^\alpha e^{x(B-Ct^\beta)} dt = Ae^{Bx} \int_0^\infty t^\alpha e^{-xCt^\beta} dt.$$

Y por comodidad, definimos la función $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) := \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} = \int_0^\infty t^\alpha e^{-xCt^\beta} dt.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Nuestra estrategia será separar la integral en dos, una en un intervalo de la forma $(0, \delta)$, ya que ahí es donde alcanza el máximo la función ϕ , y otra en el complementario (δ, ∞) . De esta manera, podremos ver que la integral en el intervalo $(0, \delta)$ domina a la del intervalo (δ, ∞) cuando $x \rightarrow \infty$. Es decir, buscamos demostrar que existen $\delta, x_0 > 0$ que cumplen que para todo $x \geq x_0$

(1)

$$\varphi(x) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \int_0^\delta f(t)e^{x\phi(t)} dt \leq \varphi(x) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

(2)

$$\left| \int_\delta^\infty f(t)e^{x\phi(t)} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

Y por lo tanto, como

$$\int_0^\delta f(t)e^{x\phi(t)} dt - \left| \int_\delta^\infty f(t)e^{x\phi(t)} dt \right| \leq I(x) \leq \int_0^\delta f(t)e^{x\phi(t)} dt + \left| \int_\delta^\infty f(t)e^{x\phi(t)} dt \right|,$$

cuando $x \geq x_0$ se tendrá que

$$(1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq I(x) \leq (1 + \varepsilon)\varphi(x).$$

De esta forma se puede concluir que cuando $x \rightarrow \infty$ se tendrá que

$$I(x) \sim_\infty \varphi(x).$$

Probamos ambas afirmaciones:

[1] Por (I), se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^\alpha} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(t)}{t^\beta} = -C.$$

Y como f y ϕ son continuas en $(0, \infty)$, para cada parámetro $\lambda \in (0, 1)$ debe existir un intervalo $(0, \delta(\lambda))$ donde se tenga que:

$$(1 - \lambda)t^\alpha \leq f(t) \leq (1 + \lambda)t^\alpha,$$

$$-C(1 + \lambda)t^\beta \leq \phi(t) \leq -C(1 - \lambda)t^\beta.$$

Ahora fijamos el parámetro λ . Lo elegimos de manera que:

$$(1 - \lambda)(1 + \lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad (1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nota: Podemos hacer esta elección debido a que, como $\alpha > -1$ y $\beta > 0$, tenemos que $\frac{\alpha+1}{\beta} > 0$, y las funciones

$$f(x) = \frac{1 - x}{(1 + x)^a}, \quad g(x) = \frac{1 + x}{(1 - x)^a},$$

con $a > 0$ son continuas en $(0, 1)$, $f(0) = g(0) = 1$.

Ahora sea $\delta = \delta(\lambda)$. Como por hipótesis en el intervalo $(0, \delta)$ la función $f(t)$ es positiva (hemos supuesto que $A = 1$) y $e^{x\phi(t)}$ también lo es, tenemos que integrando:

$$(1 - \lambda) \int_0^\delta t^\alpha e^{-xC(1+\lambda)t^\beta} dt \leq \int_0^\delta f(t) e^{x\phi(t)} dt \leq (1 + \lambda) \int_0^\delta t^\alpha e^{-xC(1-\lambda)t^\beta} dt,$$

y por el lema anterior, $\int_0^\delta f(t) e^{x\phi(t)} dt$ está bien definida y cuando $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) \int_0^\delta t^\alpha e^{-xC(1+\lambda)t^\beta} dt &= \frac{(1 - \lambda)}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{\beta}\right) (C(1 + \lambda)x)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \\ &= \varphi(x) (1 - \lambda)(1 + \lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \\ &\geq \varphi(x) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + \lambda) \int_0^\delta t^\alpha e^{-xC(1-\lambda)t^\beta} dt &= \frac{(1 + \lambda)}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{\beta}\right) (C(1 - \lambda)x)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \\
 &= \varphi(x)(1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \\
 &\leq \varphi(x) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Entonces llegamos a que debe existir un número x_1 que cumpla que para todo $x \geq x_1$

$$\varphi(x) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \int_0^\delta f(t) e^{x\phi(t)} dt \leq \varphi(x) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

que es lo que queríamos probar.

[2] Sabemos por (II) que $\phi(\delta) = -\mu < 0$ (ϕ es monótona decreciente en $(0, \infty)$ y en un entorno del 0 tiene que serlo de manera estricta ya que $\phi(t) \sim_{0+} -Ct^\beta$ por (I)). Entonces tenemos que $\phi(t) + \mu \leq 0$ para todo $t \geq \delta$. Por lo que para todo $x \geq 1$ también se tendrá que $x(\phi(t) + \mu) \leq \phi(t) + \mu$, o de otra manera

$$x\phi(t) \leq -(x - 1)\mu + \phi(t),$$

y como por (III), $K = \int_0^\infty |f(t)| e^{\phi(t)} dt$ es finita y positiva existe se puede escribir

$$\left| \int_\delta^\infty f(t) e^{x\phi(t)} dt \right| \leq \int_\delta^\infty |f(t)| e^{x\phi(t)} dt \leq e^{-(x-1)\mu} \int_\delta^\infty |f(t)| e^{\phi(t)} dt \leq K e^{-(x-1)\mu}.$$

Por lo que $\int_\delta^\infty f(t) e^{x\phi(t)} dt$ está bien definida y se concluye que $I(x)$ lo está. Además, como $\mu > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K e^{-(x-1)\mu}}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K e^{-(x-1)\mu}}{\frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} = 0.$$

Y por lo tanto debe existir un x_2 tal que para todo $x \geq x_2$

$$\left| \int_{\delta}^{\infty} f(t) e^{x\phi(t)} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora se toma $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$, concluyendo la prueba.

□

Corolario 3.9 (Teorema de Laplace). Sean $B \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha > -1$ y $C, \beta > 0$. Sean $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas a trozos, con $a < b$ finitos o infinitos, que cumplen que la integral $\int_a^b |f(t)| e^{\phi(t)} dt$ es convergente. Entonces:

- (I) Si la función ϕ tiene un máximo en un punto $c \in (a, b)$, es monótona creciente en (a, c) y es monótona decreciente en (c, b) , y las funciones tienen desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow c$ de la siguiente forma

$$f(t) \sim_c A(t - c)^\alpha, \quad \phi(t) = B - C(t - c)^\beta + o((t - c)^\beta),$$

entonces se tiene que

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt \sim_{\infty} 2 \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{\beta}\right) e^{Bx} (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$$

- (II) Si la función ϕ es monótona decreciente en (a, b) , y las funciones tienen desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow a^+$ de la siguiente forma

$$f(t) \sim_{a^+} A(t - a)^\alpha, \quad \phi(t) = B - C(t - a)^\beta + o((t - a)^\beta),$$

entonces se tiene que

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt \sim_{\infty} \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{\beta}\right) e^{Bx} (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$$

- (III) Si la función ϕ es monótona creciente en (a, b) y las funciones tienen desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow b^-$ de la siguiente forma

$$f(t) \sim_{b^-} A(t-b)^\alpha, \quad \phi(t) = B - C(t-b)^\beta + o((t-b)^\beta),$$

entonces se tiene que

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \sim_\infty \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{Bx} (Cx)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$$

Demostración. (1) Si tenemos que ϕ tiene un máximo en un punto interior, realizamos dos cambios de variable lineales y llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt &= \int_a^c f(t)e^{x\phi(t)} dt + \int_c^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \\ &= \int_0^{c-a} f_1(t)e^{x\phi_1(t)} dt + \int_0^{b-c} f_2(t)e^{x\phi_2(t)} dt, \end{aligned}$$

con $f_1(t) = f(c-t)$, $\phi_1(t) = \phi(c-t)$, $f_2(t) = f(c+t)$, $\phi_2(t) = \phi(c+t)$. Donde, por la definición de ϕ , las funciones ϕ_1 y ϕ_2 tienen su máximo en 0 y son monótonas decrecientes en $(0, c-a)$ y $(0, b-c)$ respectivamente. Con estas condiciones podemos aplicar el teorema anterior a ambas integrales. Siendo la resultante el doble que la del teorema original.

- (2) Basta ver que cuando $c \rightarrow a^+$ la primera integral se anula y sólo queda la segunda.
- (3) De igual manera, basta ver que cuando $c \rightarrow b^-$ la segunda integral se anula y sólo queda la primera.

□

Observación 3.10. Cuando busquemos aplicar el Corolario 3.9, normalmente tomaremos el polinomio de Taylor para los desarrollos asintóticos de las funciones cerca del máximo. En el caso más habitual tendremos que ambas

funciones están definidas y son suficientemente derivables en $[a, b]$. Entonces si ϕ tiene un máximo en un punto c , se toman $A = f(c)$, $\alpha = 0$, $B = \phi(c)$, $C = -\phi''(c)/2$, y $\beta = 2$. Y cuando $x \rightarrow c$ se tiene que:

$$f(t) \sim_c f(c) \quad \text{y} \quad \phi(t) = \phi(c) - \frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2 + o((t-c)^2)$$

Sin embargo, en el teorema se omite tomar estos desarrollos directamente, ya que de esta manera se puede tomar el primer término no nulo del desarrollo, es decir, si $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(r-1)}(c) = 0$ con $f^{(r)}(c) \neq 0$ y $\phi'(c) = \phi''(c) = \dots = \phi^{(s-1)}(c) = 0$ con $\phi^{(s)}(c) \neq 0$, cuando $x \rightarrow c$ se toman los desarrollos asintóticos:

$$f(t) \sim_c f^{(r)}(c)(t-c)^r \quad \text{y} \quad \phi(t) = \phi(c) - \frac{\phi^{(s)}(c)}{s!}(t-c)^s + o((t-c)^s)$$

Volviendo al caso general:

(I) Si c es un punto interior de $[a, b]$, entonces:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \sim_{\infty} 2 \frac{f(c)}{2} \Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right) e^{\phi(c)x} \left(-\frac{\phi''(c)}{2}x\right)^{-\frac{0+1}{2}} \\ &= f(c)e^{x\phi(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{-x\phi''(c)}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(II) Si $c = a$ o $c = b$, tendremos que

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \sim_{\infty} f(c)e^{x\phi(c)} \sqrt{\frac{\pi}{-2x\phi''(c)}} \quad (3.6)$$

Si las funciones no están definidas en esos puntos, habría que tomar límites laterales en el extremo correspondiente.

Observación 3.11. El máximo $c \in [a, b]$ que consideramos para la función ϕ debe ser estricto, ya que si no fuera de esta manera no se podría tomar un desarrollo asintótico de la forma $\phi(t) = B - C(t - c)^\beta + o((t - c)^\beta)$, con $C, \beta > 0$.

Por otra parte, el Corolario 3.9 nos asegura que el Teorema de Laplace se puede aplicar en cualquier intervalo donde ϕ sea monótona (creciente o decreciente). Como ϕ es continua a trozos, en el caso de que la función tenga un número finito de máximos relativos estrictos podemos subdividir (a, b) en intervalos en los que ϕ sea monótona y aplicar el Corolario 3.9 en cada uno.

Por ejemplo, si ϕ tiene exactamente n máximos locales $c_i \in (a, b)$, $i = 0, 1, \dots, n$, entonces al ser ϕ continua en cada compacto $[c_i, c_{i+1}]$, entre dos máximos, por el teorema de Weierstrass, existirá al menos un mínimo t_i . Este será único, ya que si hubiera dos, entre ellos habría un máximo local. Además como cerca de los extremos a y b se tiene por hipótesis que ϕ es monótona (hay un número finito de máximos), se puede subdividir (a, b) en intervalos monótonos (Figura 3.1).

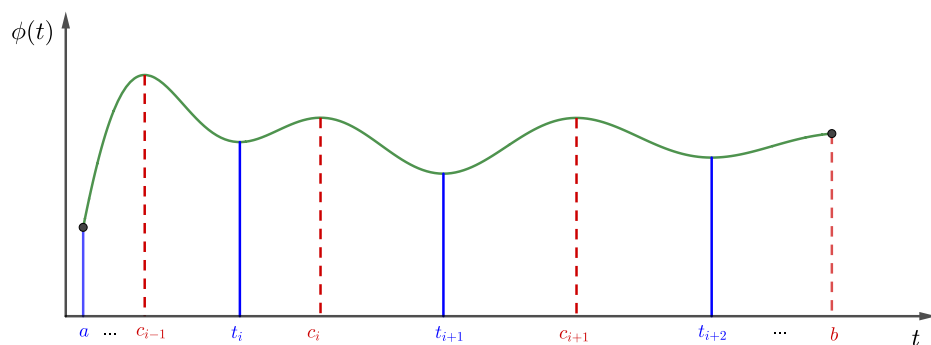


Figura 3.1: Partición de un intervalo (a, b) para aplicar el teorema a cada intervalo.

Ejemplo 3.12. Si tenemos que estudiar el comportamiento de una integral del tipo

$$\int_a^b f(t) e^{-x\phi(t)} dt ,$$

donde ϕ tiene un mínimo en un punto interior o es monótona creciente en uno de sus extremos, se puede reescribir como

$$\int_a^b f(t) e^{x(-\phi(t))} dt ,$$

entonces la función $-\phi$ tendrá un máximo o será monótona decreciente en alguno de sus intervalos y podemos aplicar el teorema de Laplace.

Por ejemplo, para la integral paramétrica

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-x \sinh^2(t)} dt ,$$

podemos tomar $f(t) = 1$ y $\phi(t) = -\sinh^2(t)$. Tenemos que $\phi(t)$ es monótona decreciente en todo $(0, \infty)$ y está definida en su máximo en $t = 0$. Entonces $c = 0$, $f(c) = 1$ y $\phi(c) = 0$. Además tenemos que $\phi''(t) = 2 \cosh(2t)$, $\phi''(c) = -2$. Por lo tanto podemos usar la fórmula que hemos obtenido para el desarrollo de Taylor (3.6) y obtenemos que:

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-x \sinh^2(t)} dt \sim_\infty \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

3.3. Método de la fase estacionaria

En este apartado consideraremos integrales paramétricas del tipo

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{ix\phi(t)} dt ,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, ϕ es una función real, y f es una función de parámetro real que puede tomar valores complejos. Por simplicidad supondremos que $\phi \in \mathcal{C}^\infty((a, b))$ y que f será siempre suficientemente derivable. El estudio de las integrales de este tipo es muy útil, ya que la exponencial compleja tiene naturaleza periódica y oscilatoria. Por la fórmula de Euler se puede expresar:

$$I(x) = \int_a^b f(t) \cos(x\phi(t)) dt + i \int_a^b f(t) \sin(x\phi(t)) dt$$

Este método se usa con funciones que oscilan 'muy rápidamente'. Es decir, podemos ver x como la frecuencia de oscilación y nuestro objetivo será estudiar el comportamiento de estas integrales cuando $x \rightarrow \infty$. Si representamos la parte real $f(t) \cos(x\phi(t))$ frente a t de una función tipo veremos como esta oscila rápidamente alrededor del 0 (Figura 3.2).

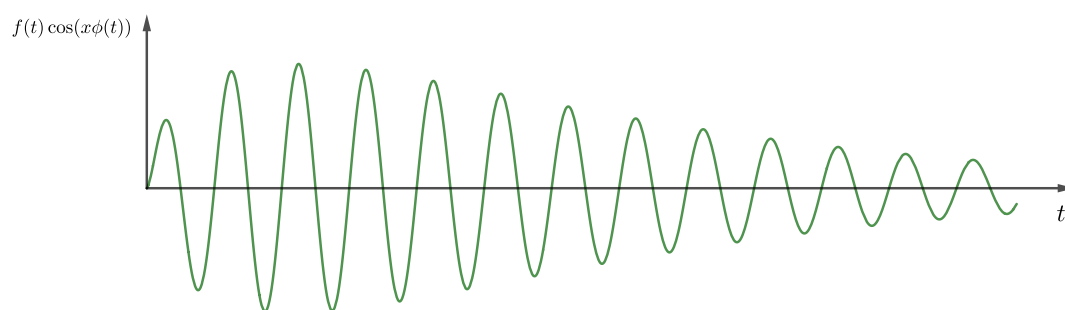


Figura 3.2: Aspecto de una función oscilatoria con amplitud variable sin puntos estacionarios

Cuando se integra este tipo de funciones cuando $x \rightarrow \infty$, el número creciente de oscilaciones hace que tiendan a cancelarse entre ellas, y por lo tanto se obtiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = 0$. Este es el *Lema de Riemann-Lebesgue*. Sin embargo, si $\phi'(t)$ se anula en algún punto del dominio las oscilaciones se hacen más lentas alrededor de ese punto (Figura 3.3).

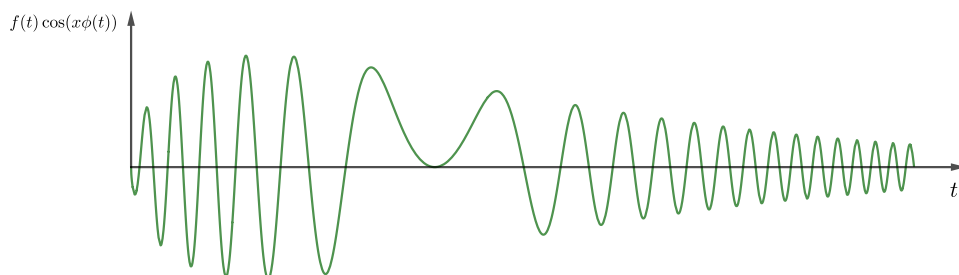


Figura 3.3: Aspecto de una función oscilatoria con amplitud variable con un punto estacionario

El integrando oscilará más lentamente cerca de este punto, haciendo que su contribución al valor total de la integral sea más significativa. Demostraremos que el comportamiento de la función en un entorno de este punto determina su comportamiento asintótico. Los puntos donde $\phi'(t)$ se anula reciben el nombre de *puntos estacionarios*, dándole su nombre a este método.

La estrategia para probar la validez de este método consiste en demostrar el *Lema de Riemann-Lebesgue* en primer lugar, donde se asume que ϕ' no tiende a 0 los extremos del intervalo de definición, para usarlo posteriormente. Luego veremos que si un extremo es un punto estacionario, es decir, ϕ' tiende a 0 en a o en b , la aportación de un entorno de este punto a $I(x)$ crece más rápido que la del intervalo complementario en (a, b) , aplicando en este el lema anterior. Y concluiremos viendo que se puede extender este caso a la situación en la que el punto estacionario es interior en (a, b) . De nuevo, si hay varios puntos estacionarios, se puede subdividir (a, b) en varios intervalos en los que aplicar el método.

Teorema 3.13. (*Lema de Riemann-Lebesgue*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\phi \in \mathcal{C}^2((a, b))$ y $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ derivable que cumplen:

- (I) ϕ tiene límite finito en los extremos a y b y ϕ' no se anula en ningún

punto de (a, b) .

(II) Sea $\gamma(t) = \frac{f(t)}{\phi'(t)}$, bien definida y derivable en (a, b) . Suponemos que:

- En los extremos γ tiene límite finito. En particular, ϕ' no tiende a 0 en los extremos y f no tiende a ∞ .
- O bien γ' tiene un límite finito, o bien conserva el signo en un entorno del extremo.

Entonces la integral

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{ix\phi(t)} dt$$

es convergente para todo $x > 0$ y se tiene que cuando $x \rightarrow \infty$, $I(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Demostración. Como γ y ϕ tienen límites finitos en los extremos, en un abuso de notación denotamos

$$\gamma(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} \gamma(a) \quad \text{y} \quad \gamma(b) := \lim_{x \rightarrow b^-} \gamma(b) ,$$

$$\phi(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} \phi(a) \quad \text{y} \quad \phi(b) := \lim_{x \rightarrow b^-} \phi(b) .$$

Entonces podemos extender la definición de γ y ϕ al intervalo cerrado $[a, b]$ conservando la continuidad. Escribimos la integral como producto de una función y una derivada para aplicar la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) e^{ix\phi(t)} dt &= \frac{1}{ix} \int_a^b \frac{f(t)}{\phi'(t)} \frac{d}{dt} (e^{ix\phi(t)}) dt = \\ &= \frac{1}{ix} \int_a^b \gamma(t) \frac{d}{dt} (e^{ix\phi(t)}) dt = \\ &= \frac{1}{ix} [\gamma(b) e^{ix\phi(b)} - \gamma(a) e^{ix\phi(a)}] \\ &\quad - \frac{1}{ix} \int_a^b \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt . \end{aligned} \tag{3.7}$$

En el primer término de (3.7), la expresión dentro de los corchetes está acotada:

$$|\gamma(b)e^{ix\phi(b)} - \gamma(a)e^{ix\phi(a)}| \leq |\gamma(b)e^{ix\phi(b)}| + |\gamma(a)e^{ix\phi(a)}| = |\gamma(b)| + |\gamma(a)| ,$$

cantidad finita por hipótesis. Por lo que si probamos que el segundo término de (3.7) está acotado, la integral será $O(1/x)$. Para ello vemos que

$$\left| \int_a^b \gamma'(t)e^{ix\phi(t)} dt \right| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| |e^{ix\phi(t)}| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Ahora hay varias posibilidades:

- Si existen y son finitos $\gamma'(a) := \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma'(t)$ y $\gamma'(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma'(t)$, entonces sea $M = \max_{t \in [a,b]} |\gamma'(t)|$. En ese caso,

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq M(b-a)$$

- Si los dos límites tienden a ∞ o $-\infty$ entonces conservan su signo en un entorno del extremo, entonces sea $\delta > 0$ tal que γ' conserva su signo en $(a, a + \delta)$ y $(b - \delta, b)$. Tenemos que por ser f y ϕ' suficientemente regulares $\gamma'(a + \delta)$ y $\gamma'(b - \delta)$ están bien definidos y son finitos. Entonces, se tiene que, por conservarse el signo

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &= \int_a^{a+\delta} |\gamma'(t)| dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\gamma'(t)| dt + \int_{b-\delta}^b |\gamma'(t)| dt = \\ &= \left| \int_a^{a+\delta} \gamma'(t) dt \right| + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\gamma'(t)| dt + \left| \int_{b-\delta}^b \gamma'(t) dt \right| \leq \\ &\leq M(b-a) + \left| \int_a^{a+\delta} \gamma'(t) dt \right| + \left| \int_{b-\delta}^b \gamma'(t) dt \right| \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$\left| \int_a^{a+\delta} \gamma'(t) dt \right| = |\gamma(a+\delta) - \gamma(a)| .$$

Esta cantidad es finita por hipótesis. Con la segunda integral en (3.8) se procede de igual manera y se concluye que $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ está acotada.

- Si uno de los límites es finito y el otro no, se pueden combinar las dos técnicas para obtener el mismo resultado.

□

Lema 3.14. Suponemos todas las condiciones del Teorema 3.13. Suponemos además que para todo $x > 0$

$$\gamma(b)e^{ix\phi(b)} \neq \gamma(a)e^{ix\phi(a)} .$$

Entonces se tiene que cuando $x \rightarrow \infty$

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{ix\phi(t)} dt \sim_{\infty} \frac{1}{ix} [\gamma(b)e^{ix\phi(b)} - \gamma(a)e^{ix\phi(a)}]$$

Demostración. Usamos la notación empleada en la demostración anterior. Tenemos que

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{ix} [\gamma(b)e^{ix\phi(b)} - \gamma(a)e^{ix\phi(a)}] - \frac{1}{ix} \int_a^b \gamma'(t)e^{ix\phi(t)} dt \\ &= \frac{1}{ix} \left([\gamma(b)e^{ix\phi(b)} - \gamma(a)e^{ix\phi(a)}] - \int_a^b \gamma'(t)e^{ix\phi(t)} dt \right) \end{aligned}$$

Entonces sabemos que $[\gamma(b)e^{ix\phi(b)} - \gamma(a)e^{ix\phi(a)}]$ es una cantidad que oscilará periódicamente y está acotada por la desigualdad triangular por $|\gamma(a)| + |\gamma(b)|$. Por lo que si probamos que cuando $x \rightarrow \infty$

$$\left| \int_a^b \gamma'(t)e^{ix\phi(t)} dt \right| = o(1) ,$$

es decir, que dada una constante $\varepsilon > 0$ siempre podremos encontrar un número x_0 de tal manera que para todo $x \geq x_0$

$$\left| \int_a^b \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt \right| \leq \varepsilon ,$$

habremos probado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\int_a^b \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt}{\gamma(b) e^{ix\phi(b)} - \gamma(a) e^{ix\phi(a)}} \right| = 0$$

Esto concluiría la prueba. Entonces, sea $\varepsilon > 0$. Como hemos probado en la demostración del *Lema de Riemann-Lebesgue* (Teorema 3.13) que la segunda integral en (3.7) es absolutamente convergente, podemos elegir un $\delta > 0$ tal que para cualquier $x > 0$

$$\int_a^{a+\delta} |\gamma'(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \int_{b-\delta}^b |\gamma'(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces ahora podemos aplicar el *Lema de Riemann-Lebesgue* a $\int_{a+\delta}^{b-\delta} \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt$, ya que $\gamma, \phi \in \mathcal{C}^\infty([a+\delta, b-\delta])$ y ϕ' no se anula en ningún punto. Como la expresión es una $O(1/x)$ cuando $x \rightarrow \infty$, existen $M, r > 0$ tales que para todo $x > r$ se cumple

$$\left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt \right| \leq \frac{M}{x} ,$$

en particular, tenemos que existirá un x_0 tal que para todo $x \geq x_0$ se tenga que

$$\left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} ,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt \right| &\leq \int_a^{a+\delta} |\gamma'(t)| dt + \left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt \right| + \int_{b-\delta}^b |\gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Observación 3.15. Si resulta que para todo $x > 0$

$$\gamma(b)e^{ix\phi(b)} = \gamma(a)e^{ix\phi(a)},$$

entonces se tiene que

$$I(x) = -\frac{1}{ix} \int_a^b \gamma'(t) e^{ix\phi(t)} dt.$$

Ahora que hemos probado que cuando $x \rightarrow \infty$ en (3.7) la primera integral domina a la segunda, estamos en condiciones de abordar el caso en el que ϕ' tiende a 0 en uno de los extremos. Para ello primero probamos unos lemas auxiliares que agilizarán el teorema final.

Lema 3.16. Sean $\lambda \in (0, 1)$ y $\mu \in \{-1, 1\}$. Entonces

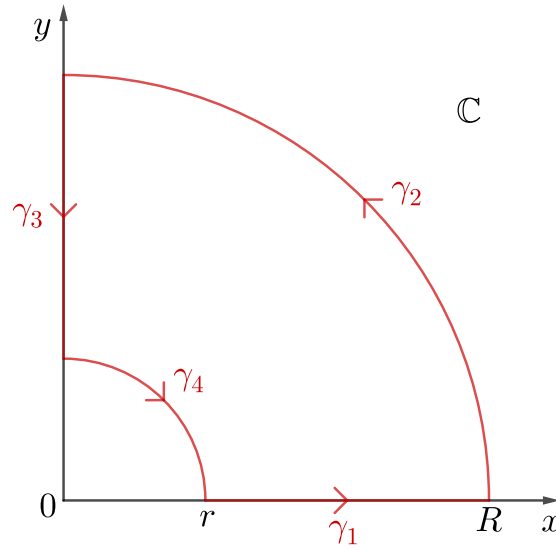
$$I = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{\mu it} dt = e^{i\frac{\mu\pi\lambda}{2}} \Gamma(\lambda)$$

Demostración. Sea $f(z) = z^{\lambda-1} e^{\mu iz}$, holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$, es decir, en todo el plano complejo menos en el semieje real negativo, dominio de definición de la rama principal del logaritmo $B = \{z \in \mathbb{C}, -\pi \leq \text{Im}(z) < \pi\}$. Por lo tanto f no tiene singularidades en ningún punto de su dominio y una integral en una curva cerrada dentro de este se anulará.

Sean $r, R \in \mathbb{R}$ con $0 < r < R$. Definimos la curva cerrada (Figura 3.4)

$$C \equiv \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

$$\begin{array}{lll}
\gamma_1(t) = t & \text{para} & t \in [r, R], \\
\gamma_2(t) = Re^{it} & \text{para} & t \in [0, \pi/2], \\
\gamma_3(t) = -it & \text{para} & t \in [-R, -r], \\
\gamma_4(t) = re^{i(\frac{\pi}{2}-t)} & \text{para} & t \in [0, \pi/2].
\end{array}$$

Figura 3.4: Esquema de la curva C .

De tal manera que

$$\begin{aligned}
I = \int_C f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 .
\end{aligned}$$

El objetivo será acotar I_2 e I_4 y ver que tienden hacia 0 cuando $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$. Entonces tendremos que $I_1 = I = -I_3$. Se tiene que

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| = \left| \int_0^{\pi/2} R^{\lambda-1} e^{it(\lambda-1)} e^{\mu i R e^{it}} R i e^{it} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} R^{\lambda} e^{-R \sin(t)} dt .$$

Y en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, se tiene que la concavidad del seno implica que $\sin(t) \leq \frac{2t}{\pi}$, entonces

$$\int_0^{\pi/2} R^\lambda e^{-R \sin(t)} dt \leq R^\lambda \int_0^{\pi/2} e^{-R \frac{2t}{\pi}} dt = R^{\lambda-1} (1 - e^{-R}) .$$

Por lo que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0$.

Para I_4 se tiene que:

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| \leq \int_0^{\pi/2} r^\lambda e^{-r \sin(t)} dt \leq \frac{\pi r^\lambda}{2} .$$

Y vemos que $\lim_{r \rightarrow 0} I_4 = 0$. Entonces $I_1 = -I_3$ si $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$.

Para I_1 , se tiene que

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_r^R t^{\lambda-1} e^{\mu i t} dt .$$

Y para I_3 , se tiene que $z \in \{it, t > 0\}$, entonces por definición

$$z^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1) \log(z)} = e^{(\lambda-1)(\log(t) + i\frac{\pi}{2})} = e^{(\lambda-1)i\frac{\pi}{2}} t^{\lambda-1} ,$$

y por consiguiente

$$I_3 = \int_{\gamma_3} f(z) dz = -e^{\frac{\lambda \mu \pi i}{2}} \int_r^R t^{\lambda-1} e^{-t} dt ;$$

Si $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{\mu i t} dt = e^{\frac{\mu \lambda \pi i}{2}} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt = e^{\mu i \frac{\pi \lambda}{2}} \Gamma(\lambda) .$$

□

Lema 3.17. Sean $\alpha, \beta, b, B, C \in \mathbb{R}$, tales que $b > 0$, $C \neq 0$ y $0 < \alpha + 1 < \beta$. Sea μ el signo de C . Entonces se tiene que

$$I(x) = \int_0^b t^\alpha e^{ix(B+Ct^\beta)} dt$$

está bien definida para todo $x > 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$

$$I(x) \sim_\infty e^{\frac{\mu i}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(|C|x)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}.$$

Demostración. Sea $\lambda = \frac{\alpha+1}{\beta}$. Entonces tenemos que $0 < \lambda < 1$. Nótese que $|C| = \mu C$. Si hacemos el cambio de variable $u = Cxt^\beta$, se obtiene

$$I(x) = \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^\lambda} \int_0^{Cb^\beta x} u^{\lambda-1} e^{iu} du,$$

y por el Lema 3.16 anterior $I(x)$ está bien definida y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^\lambda} \int_0^\infty u^{\lambda-1} e^{iu} du = e^{\mu i \frac{\pi\lambda}{2}} \Gamma(\lambda) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^\lambda},$$

por lo que se tiene la equivalencia pedida. $\square$

Teorema 3.18. Sean $b > 0$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty((0, b])$ y $f : (0, b] \rightarrow \mathbb{C}$ derivable, tales que:

(I) Cuando $t \rightarrow 0^+$, se cumple que:

$$f(t) \sim_{0^+} At^\alpha \quad \text{y} \quad \phi(t) = B + Ct^\beta + o(t^\beta),$$

donde $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\alpha, \beta, B, C \in \mathbb{R}$, tales que $C \neq 0$ y $0 < \alpha + 1 < \beta$. Sea μ el signo de C .

(II) $\phi'(t) \neq 0$ en todo punto del dominio $(0, b]$.

En estas condiciones se tiene que para todo $x > 0$

$$I(x) = \int_0^b f(t) e^{ix\phi(t)} dt$$

está bien definida y cuando $x \rightarrow \infty$ se tiene que

$$I(x) \sim_{\infty} A e^{\frac{\mu i \pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}.$$

Demostración. Por (I), usando las propiedades de las relaciones de orden, tenemos que existen $r > 0$ y funciones $\varepsilon_f(t), \varepsilon_\phi(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, r])$ tales que:

- $\varepsilon_f(t) = O(t)$ y $\varepsilon_\phi(t) = O(t)$ cuando $t \rightarrow 0^+$.
- En $[0, r]$ se tiene que

$$f(t) = At^\alpha(1 + \varepsilon_f(t)) \quad \text{y} \quad \phi(t) = B + Ct^\beta(1 + \varepsilon_\phi(t)) ,$$

Ahora sea

$$\varphi(t) = t(\mu C)^{\frac{1}{\beta}}(1 + \varepsilon_\phi(t))^{\frac{1}{\beta}} ,$$

de tal manera que en $[0, r]$ se tenga que

$$\phi(t) = B + \mu\varphi(t)^\beta.$$

Por cómo está construida, $\varphi(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, r])$ y $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = (\mu C)^{\frac{1}{\beta}} > 0$. Entonces existirá un número δ , con $0 < \delta \leq r$, tal que φ sea estrictamente creciente en el intervalo $[0, \delta]$, por lo que tiene sentido considerar en $[0, \varphi(\delta)]$ la función inversa $\psi(t) = \phi^{-1}(t)$. Además, podemos asegurar que $\psi(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, \varphi(\delta)])$, con $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) = (\mu C)^{-\frac{1}{\beta}} > 0$, por lo que en $[0, \varphi(\delta)]$ podemos escribir

$$\psi(t) = t(\mu C)^{-\frac{1}{\beta}}(1 + \varepsilon_\psi(t)),$$

con $\varepsilon_\psi(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, \varphi(\delta)])$ una $O(t)$ cuando $t \rightarrow 0^+$. Entonces

$$\phi(\psi(u)) = B + \mu\varphi(\psi(u))^\beta = B + \mu u^\beta, \text{ y}$$

$$f(\psi(u)) = A(\mu C)^{-\frac{\alpha}{\beta}} u^\alpha (1 + \varepsilon_\psi(u))^\alpha (1 + \varepsilon_f(\psi(u))).$$

Por las propiedades de las relaciones de orden, como cuando $u \rightarrow 0^+$, $\varepsilon_f(u) = O(u)$ y $\psi(u) = O(u)$, $\varepsilon_f(\psi(u)) = O(u)$. Además, desarrollando en serie cuando $u = 0$:

$$(1 + \varepsilon_\psi(u))^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon_\psi(u) + o(\varepsilon_\psi(u)^2) = 1 + O(u).$$

Además $(1 + O(u))(1 + O(u)) = 1 + O(u)$. Por lo tanto podemos escribir $f(\psi(u)) = A(\mu C)^{-\frac{\alpha}{\beta}} u^\alpha (1 + O(u)) = A(\mu C)^{-\frac{\alpha}{\beta}} u^\alpha + O(u^{\alpha+1})$ cuando $u \rightarrow 0^+$.

Entonces en $[0, \delta]$, si escribimos $u = \varphi(t)$, por el teorema de cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta f(t) e^{ix\phi(t)} dt &= \int_0^{\varphi(\delta)} f(\psi(u)) e^{ix\phi(\psi(u))} \psi'(u) du = \\ &= A(\mu C)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^{\varphi(\delta)} u^\alpha e^{ix(B+\mu u^\beta)} du + \int_0^{\varphi(\delta)} f_1(u) e^{ix(B+\mu u^\beta)} du, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $f_1(u) = f(\psi(u))\psi'(u) - A(\mu C)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} u^\alpha = O(u^{\alpha+1})$.

Para la primera integral de (3.9), tenemos que cuando $x \rightarrow \infty$, se puede aplicar el Lema 3.17 anterior

$$A(\mu C)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^{\varphi(\delta)} u^\alpha e^{ix(B+u^\beta)} du = A e^{\frac{\mu i \pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\right).$$

Ahora nos ocupamos de la segunda integral de (3.9). Como sabemos que $f_1(u) = O(u^{\alpha+1})$, se tiene que

$$\gamma_1(t) = \frac{f_1(u)}{\phi_1'(u)} = \frac{Mu^{\alpha+1}}{\mu\beta u^{\beta-1}} = O(u^{\alpha+2-\beta}) \quad \text{cuando } u \rightarrow 0^+.$$

Entonces hay dos posibilidades:

- Si $\alpha+2-\beta \geq 0$, por el *Lema de Riemman-Lebesgue* la segunda integral de (3.9) es $O\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Si $\alpha+2-\beta < 0$, podemos aplicar los mismos razonamientos a la integral

$$\int_0^{\varphi(\delta)} f_1(u) e^{ix\phi_1(u)} du = C_1 \int_0^{\varphi(\delta)} u^{\alpha+1} e^{ix(B+\mu u^\beta)} du + \int_0^{\varphi(\delta)} f_2(u) e^{ix(B+\mu u^\beta)} du,$$

con $f_1(u) = C_1 u^{\alpha+1}(1 + \varepsilon_{f_1}(u))$, donde $\varepsilon_{f_1}(u)$ es una función continua y derivable en $[0, \varphi(\delta)]$ y $f_2(u) = O(u^{\alpha+2})$. Por recurrencia puede continuarse el razonamiento hasta llegar a un entero n tal que $\alpha+n-\beta > 0$ y volver a aplicar el *Lema de Riemman-Lebesgue*.

Por otro lado, como ϕ' no se anula en ningún punto de $[\delta, b]$, aplicando el *Lema de Riemman-Lebesgue* se tiene que

$$\int_\delta^b f(t) e^{ix\phi(t)} dt = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Entonces como $\frac{\alpha+1}{\beta} < 1$, cuando $x \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_0^\delta f(t)e^{ix\phi(t)}dt + \int_\delta^b f(t)e^{ix\phi(t)}dt = \\
 &= A(\mu C)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^{\varphi(\delta)} u^\alpha e^{ix(B+u^\beta)}du + \int_0^{\varphi(\delta)} f_1(u)e^{ix\phi_1(u)}du + \\
 &+ \int_\delta^b f(t)e^{ix\phi(t)}dt = Ae^{\frac{\mu i\pi}{2}\frac{\alpha+1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\right).
 \end{aligned}$$

Y se tiene que $I(x)$ está bien definida y el resultado pedido

$$I(x) \sim_\infty Ae^{\frac{\mu i\pi}{2}\frac{\alpha+1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}.$$

□

Corolario 3.19. Sean $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\alpha, \beta, a, b, B, C, \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$, $C \neq 0$ y $0 < \alpha + 1 < \beta$. Sea μ el signo de C . Sean $\phi \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si ϕ' se anula en un único punto $c \in [a, b]$, entonces se tiene que:

(I) Si $c \in (a, b)$, y las funciones tienen desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow c$

$$f(t) \sim_c A(t-c)^\alpha \quad \text{y} \quad \phi(t) = B + C(t-c)^\beta + o((t-c)^\beta),$$

entonces se tiene que

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{ix\phi(t)}dt \sim_\infty 2Ae^{\frac{\mu i\pi}{2}\frac{\alpha+1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}.$$

(II) Si $c = a$ y las funciones tienen desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow a^+$

$$f(t) \sim_{a^+} A(t-a)^\alpha \quad \text{y} \quad \phi(t) = B + C(t-a)^\beta + o((t-a)^\beta) ,$$

entonces se tiene que

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{ix\phi(t)} dt \sim_\infty Ae^{\frac{\mu i \pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} .$$

(III) Si $c = b$ y las funciones tienen desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow b^-$

$$f(t) \sim_{b^-} A(t-b)^\alpha \quad \text{y} \quad \phi(t) = B + C(t-b)^\beta + o((t-b)^\beta) ,$$

entonces se tiene que

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{ix\phi(t)} dt \sim_\infty Ae^{\frac{\mu i \pi}{2} \frac{\alpha+1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{e^{iBx}}{\beta(\mu Cx)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} .$$

Demostración. (1) Si tenemos que ϕ' se anula en un único punto interior c , realizamos dos cambios de variable lineales y llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt &= \int_a^c f(t)e^{x\phi(t)} dt + \int_c^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \\ &= \int_0^{c-a} f_1(t)e^{x\phi_1(t)} dt + \int_0^{b-c} f_2(t)e^{x\phi_2(t)} dt , \end{aligned}$$

con $f_1(t) = f(c-t)$, $\phi_1(t) = \phi(c-t)$, $f_2(t) = f(c+t)$, $\phi_2(t) = \phi(c+t)$. Donde las funciones ϕ'_1 y ϕ'_2 no se anulan en ningún punto de $(0, c-a]$ y $(0, b-c]$ respectivamente. Con estas condiciones podemos aplicar el teorema anterior a ambas integrales. Siendo la resultante el doble que la del teorema original.

- (2) Basta ver que cuando $c \rightarrow a^+$ la primera integral se anula y sólo queda la segunda.
- (3) De igual manera, basta ver que cuando $c \rightarrow b^-$ la segunda integral se anula y sólo queda la primera.

□

Observación 3.20. Normalmente tomaremos el desarrollo de Taylor para los desarrollos asintóticos. Entonces si ϕ' se anula en un punto c , se toman $A = f(c)$, $\alpha = 0$, $B = \phi(c)$, $C = \phi''(c)/2$, $\mu = \text{sign}(C)$, y $\beta = 2$. Y se tiene que cuando $t \rightarrow c$ que:

$$f(t) \sim_c f(c) \quad \text{y} \quad \phi(t) = \phi(c) + \frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2 + o((t-c)^2) .$$

Sin embargo, en el teorema se omite tomar estos desarrollos directamente, ya que de esta manera se puede tomar el primer término no nulo del desarrollo, es decir, si $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(r-1)}(c) = 0$ con $f^{(r)}(c) \neq 0$ y $\phi'(c) = \phi''(c) = \dots = \phi^{(s-1)}(c) = 0$ con $\phi^{(s)}(c) \neq 0$, se toman los desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow c$:

$$f(t) \sim_c \frac{f^{(r)}(c)}{r!}(t-c)^r \quad \text{y} \quad \phi(t) = \phi(c) + \frac{\phi^{(s)}(c)}{s!}(t-c)^s + o((t-c)^s) .$$

Volviendo al caso general:

- (I) Si c es un punto interior de $[a, b]$, entonces:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_a^b f(t)e^{ix\phi(t)}dt \sim_{\infty} 2f(c)e^{\frac{\mu i\pi}{2}\frac{0+1}{2}}\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)\frac{e^{i\phi(c)x}}{2(\mu\frac{\phi''(c)}{2}x)^{\frac{0+1}{2}}} \\ &= f(c)e^{ix\phi(c)+\frac{\mu i\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi}{\mu\phi''(c)x}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(II) Si $c = a$ o $c = b$, tendremos que

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)} dt \sim_{\infty} f(c)e^{ix\phi(c) + \frac{\mu i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu\phi''(c)x}}$$

Observación 3.21. En el caso de que la función ϕ' se anule en más de un punto en $[a, b]$ también se puede aplicar el corolario anterior. Si ϕ' tiene n raíces $c_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, entonces podemos definir los intervalos:

$$I_1 = \left[a, \frac{c_1 + c_2}{2} \right], \quad I_2 = \left[\frac{c_1 + c_2}{2}, \frac{c_2 + c_3}{2} \right], \quad \dots, \quad I_n = \left[\frac{c_{n-1} + c_n}{2}, b \right],$$

que forman una partición de $[a, b]$ (solamente hay intersecciones entre los I_i en los extremos, pero estos forman un conjunto de medida nula, por lo que al integrar se obtendrá el mismo resultado) en la que en cada intervalo ϕ' se anula únicamente en un punto interior, y en estas condiciones se puede aplicar el primer apartado del corolario anterior. En el caso de que $c_1 = a$ en el primer intervalo habrá que aplicar el segundo apartado y en el caso de que $c_n = b$, en el último intervalo podremos aplicar el tercer apartado.

Ejemplo 3.22. Si consideramos

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix \cos(t)} dt,$$

podemos tomar $f(t) = 1$ y $\phi(t) = \cos(t)$. Ambas continuas e indefinidamente derivables en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Tenemos que $\phi'(t) = -\sin(t)$, que se anula únicamente en $c = 0$, y $\phi(0) = 1$, $\phi''(0) = -1$ y $\mu = -1$. Entonces tendremos que cuando $x \rightarrow \infty$

$$I(x) \sim_{\infty} e^{ix - \frac{i}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

3.4. Método del descenso rápido

En este método, trataremos con integrales del tipo:

$$I(x) = \int_C f(z) e^{x\phi(z)} dz, \quad (3.11)$$

donde C será una curva en $\mathbb{C}$ y f, ϕ serán funciones complejas holomorfas en un dominio. A la variable x la podremos considerar, sin pérdida de generalidad, real y positiva, ya que podemos escribir cualquier número complejo como $z = |z|e^{i\alpha}$, y considerar $e^{i\alpha}$ como parte de ϕ .

Este método supone una generalización para funciones complejas del Método de Laplace. Para explicar la idea con precisión, primero hay que presentar el concepto de punto de silla.

Definición 3.23 (Punto de silla). Sea ϕ una función compleja analítica en un punto z_0 . Diremos que z_0 es un punto de silla de orden m si se cumple que:

$$\phi'(z_0) = \dots = \phi^{(m)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi^{(m+1)}(z_0) \neq 0.$$

Observación 3.24. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Un punto de silla de ϕ puede definirse como un punto $x_0 \in U$ crítico, es decir, en el que la pendiente es 0 en cualquier dirección pero no es ni un máximo ni un mínimo local. Debido a esto, la función ϕ no puede ser constante.

El ejemplo más típico es la función $\phi(x, y) = x^2 - y^2$, representada en la Figura 3.5a. Esta función tiene un punto de silla en $(0, 0)$. Por él pasan dos curvas que alcanzan un mínimo relativo (roja) y un máximo relativo (azul). En la Figura 3.5b se indica con flechas la dirección en la que la función decrece con mayor pendiente.

Observación 3.25. Si U es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, ϕ es una función compleja holomorfa en U y escribimos $z = x + iy$, $\phi = u + iv$, entonces en cada $z_0 \in U$ u y v tienen que cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

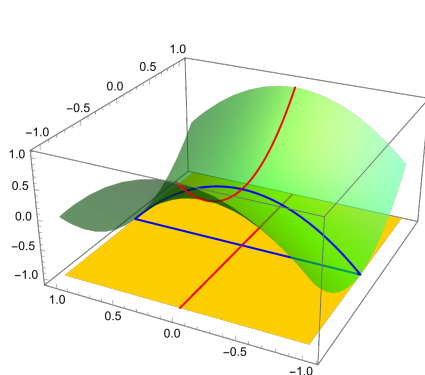
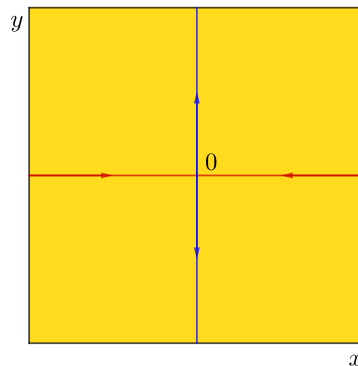

 (a) Gráfica de $\phi(x, y)$

 (b) Direcciones en las que ϕ decrece con mayor pendiente

Figura 3.5:

y esto implica que en U

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \Delta u = 0 \quad \text{y} \quad \Delta v = 0,$$

además

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Por lo tanto, las líneas de contorno donde $u(x, y)$ es constante y las líneas de contorno donde $v(x, y)$ es constante son ortogonales en todos los puntos de U donde no se anula ϕ' . Pero como ∇u indica en cada punto la dirección en la que hay mayor variación de u , esto significa que las líneas de contorno donde $v(x, y)$ es constante son las mismas que las líneas de flujo generadas por el gradiente de u . Esto justifica las siguientes definiciones.

Definición 3.26 (Curva y dirección de descenso rápido). Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $\phi = u + iv$ una función compleja holomorfa en U y $z_0 \in U$ un punto de silla. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y $b \in (t_0, \infty) \cup \{\infty\}$. Llamamos curva o camino de descenso rápido para ϕ a una curva $\gamma(t) : [t_0, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ que cumple que:

- $\gamma(t_0) = z_0$.
- $u(\gamma(t))$ es monótona decreciente en $[t_0, b)$.
- Para todo $t \in [t_0, b)$, se tiene que $v(\gamma(t)) = v(z_0)$.

Llamamos dirección de descenso rápido al argumento de $\gamma'(t_0)$.

Observación 3.27. Una vez definidos y repasados estos conceptos, podemos volver a tratar la idea del método del descenso rápido volviendo a considerar la integral (3.11). Esta idea consiste en encontrar un punto de silla z_0 de ϕ y aprovecharse de los caminos de descenso rápido. Como hemos visto si, γ es una curva de descenso rápido para $\phi = u + iv$ en z_0 , tendrá la propiedad de que a lo largo de γ , v será constante. Esto permitirá sacar el factor $e^{ixv(z_0)}$ fuera de la integral. La integral que quedará será de la forma (3.2), y como $u(z_0)$ es un máximo relativo de u , se podrá aplicar el método de Laplace.

La dificultad, por lo tanto, reside en encontrar un camino de descenso rápido γ y, sobre todo, en cómo tendremos que deformar el contorno original C para poder aprovecharnos de las propiedades de γ .

Lema 3.28. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, ϕ una función compleja holomorfa en U y $z_0 \in U$ un punto de silla de orden $m - 1$. Entonces z_0 tiene m direcciones de descenso rápido.

Demostración. Se tendrá que cuando $z \rightarrow z_0$

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + o((z - z_0)^m),$$

Entonces si se escribe

$$z - z_0 = ue^{i\theta} \quad \text{y} \quad \phi^{(m)}(z_0) = \rho e^{i\alpha},$$

con $\rho, u > 0$, se tiene que

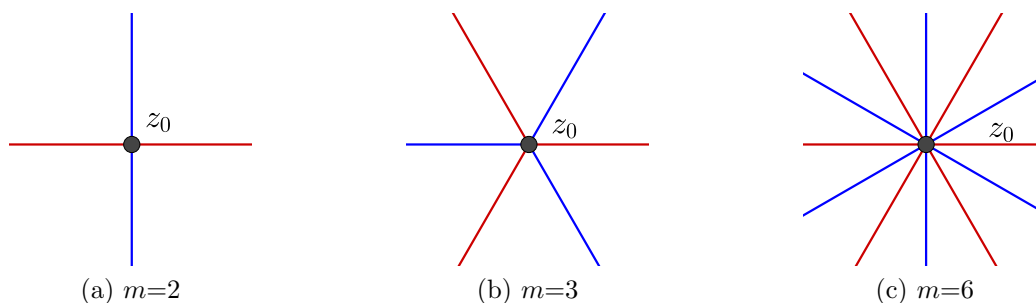


Figura 3.6: Direcciones de descenso (azul) y ascenso (rojo) rápido para $\alpha = 0$ y distintos valores de m

$$\begin{aligned}
 \phi(z) - \phi(z_0) &\sim_{z_0} \frac{\phi^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m = \\
 &= \frac{\rho u^m}{m!} e^{i(\alpha + m\theta)} = \\
 &= \frac{\rho u^m}{m!} (\cos(\alpha + m\theta) + i \sin(\alpha + m\theta)).
 \end{aligned}$$

Por lo que, para $k = 0, 1, \dots, m - 1$

$$\operatorname{Re}(\phi(z) - \phi(z_0)) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } (2k + 1)\frac{\pi}{2} \leq m\theta + \alpha \leq (2k + 3)\frac{\pi}{2} \\ \geq 0 & \text{si } (2k - 1)\frac{\pi}{2} \leq m\theta + \alpha \leq (2k + 1)\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Y se puede concluir que $\operatorname{Re}(\phi(z) - \phi(z_0))$, alcanzará su máximo y su mínimo cuando

$$m\theta + \alpha = \begin{cases} 2k\pi & \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi - \alpha}{m}, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1 \\ (2k + 1)\pi & \Rightarrow \theta = \frac{(2k + 1)\pi - \alpha}{m}, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1. \end{cases}$$

Estas serán las direcciones en las que $\operatorname{Re}(\phi(z))$ ascienda y descienda rápidamente.

□

Observación 3.29. Se tiene que para cada dirección de descenso rápido, existe un camino de descenso rápido. Es decir, si U es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, ϕ una función compleja holomorfa en U y $z_0 \in U$ un punto de silla de orden $m - 1$, para cada θ_k existe un camino de descenso rápido $\gamma_k : [t_0, b) \rightarrow U$, con $b \in (t_0, \infty) \cup \{\infty\}$ y $\gamma_k(t_0) = z_0$, que cumple que $\arg(\gamma_k(t_0)) = \theta_k$. La justificación de este hecho suele hacerse empleando desarrollos de Puiseux de curvas analíticas o el teorema de preparación de Weierstrass, que escapan al nivel de esta memoria.

Teorema 3.30.

- (I) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, con $0 \in U$. Sean $f, \phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas en U , y suponemos que ϕ tiene un punto de silla de orden $m - 1$, con $m \geq 2$ en 0 . De esta manera, se tiene que cuando $z \rightarrow 0$:

$$f(z) \sim_0 Az^n \quad \text{y} \quad \phi(z) = B + Cz^m + o(z^m),$$

donde $A = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ es el primer término no nulo del desarrollo de Taylor de f en 0 , $B = \phi(0)$ y $C = \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} = \rho e^{i\alpha}$, con $\rho > 0$.

- (II) Sea θ una dirección de descenso rápido y sea $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ un camino de descenso rápido para ϕ en 0 que cumple que $\gamma(0) = 0$, $|\gamma'(0)| = 1$ y que $\arg(\gamma(0)) = \theta$.

- (III) Suponemos que la integral

$$\int_0^\infty |f(\gamma(t))| e^{\operatorname{Re}(\phi(\gamma(t)))} |\gamma'(t)| dt$$

es convergente.

Entonces

$$I(x) = \int_\gamma f(z) e^{x\phi(z)} dz,$$

está bien definida para todo $x > 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$, se tiene que

$$I(x) \sim_{\infty} \frac{A}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) (\rho x)^{-\frac{n+1}{m}} e^{Bx+(n+1)i\theta}. \quad (3.12)$$

Demostración. En primer lugar, escribimos

$$\phi(z) = \operatorname{Re}(\phi(z)) + i\operatorname{Im}(\phi(z)) = u(z) + iv(z),$$

y como en el Teorema 3.8, para no arrastrar las constantes, suponemos que $A = 1$ y que $B = 0$. Entonces como $v(\gamma(t)) = v(0) = \operatorname{Im}(B) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) e^{x\phi(z)} dz &= \int_0^{\infty} f(\gamma(t)) e^{x\phi(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(\gamma(t)) \gamma'(t) e^{x(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(\gamma(t)) \gamma'(t) e^{xu(\gamma(t))} dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora, por (II) se tiene que $\gamma(t) \sim_{0^+} te^{i\theta}$ y además es continua en 0. Entonces usando la Proposición 2.15 para la composición de polinomios de Taylor, tenemos que cuando $x \rightarrow 0^+$

$$f(\gamma(t)) \gamma'(t) \sim_{0^+} t^n e^{in\theta} e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta} t^n, \quad \text{y}$$

$$u(\gamma(t)) = \operatorname{Re}(Ce^{im\theta} t^m) + o(t^m).$$

Además, por ser θ una dirección de descenso rápido, por el Lema 3.28 debe existir $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ que cumpla que:

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi - \alpha}{m} \Rightarrow m\theta + \alpha = (2k+1)\pi$$

Entonces

$$Ce^{im\theta} = \rho e^{i(\alpha+m\theta)} = \rho e^{i(2k+1)\pi} = -\rho, \quad y$$

$$u(\gamma(t)) = -\rho t^m + o(t^m) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+.$$

Entonces, recopilando tenemos que:

- Cuando $t \rightarrow 0^+$, tenemos los desarrollos asintóticos:

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) \sim_{0^+} e^{i(n+1)\theta} t^n, \quad y \quad u(\gamma(t)) \sim_{0^+} -\rho t^m,$$

con $\rho > 0$.

- $u(\gamma(t))$ es monótona decreciente en $[0, \infty)$ por la definición de camino de descenso rápido.
- La integral

$$\int_0^\infty |f(\gamma(t))| e^{u(\gamma(t))} |\gamma'(t)| dt$$

es convergente por hipótesis.

En esta situación, podemos aplicar el Teorema de Laplace (3.8) y se concluye que $I(x)$ está bien definida para todo $x > 0$ y que cuando $x \rightarrow \infty$

$$I(x) \sim_\infty \frac{A}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) (\rho x)^{-\frac{n+1}{m}} e^{Bx+(n+1)i\theta}.$$

□

Observación 3.31. En las condiciones del teorema anterior, suponemos que m es par. Entonces tendremos (Lema 3.28) que si θ es una dirección de descenso rápido, $-\theta$ también lo será. Sea $\sigma : [0, \infty) \rightarrow U$ el camino de descenso rápido de $-\theta$, con $\sigma(0) = 0$ y $|\sigma'(0)| = 1$, que cumple que

$$\arg(\gamma'(0)) = \theta = -\arg(\sigma'(0)).$$

Entonces si 'unimos' los dos caminos de descenso rápido definiendo $C : (-\infty, \infty) \rightarrow U$ dado por

$$C(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [0, \infty) \\ \sigma(-t) & \text{si } t \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

tendremos que C es continua y derivable, con $C(0) = 0$, $\arg(C'(0)) = \theta$ y $|C'(0)| = 1$. Además, si suponemos que

$$\int_0^\infty |f(\sigma(t))| e^{\operatorname{Re}(\phi(\sigma(t)))} |\sigma'(t)| dt$$

existe y es convergente, tendremos que

$$I(x) = \int_C f(z) e^{x\phi(z)} dz$$

está bien definida para todo $x > 0$. Y cuando $x \rightarrow \infty$

$$I(x) \sim_\infty 2 \frac{A}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) (\rho x)^{-\frac{n+1}{m}} e^{Bx + (n+1)i\theta},$$

ya que hay que sumar la contribución de γ y σ .

Cuando m sea par (el caso más habitual es $m = 2$), diremos que los caminos que son unión de dos caminos de descenso rápido que tienen direcciones opuestas también son caminos de descenso rápido.

Observación 3.32. (I) Si en el teorema anterior tenemos que el punto de silla está en un punto arbitrario $z_0 \in U$, de nuevo realizando el cambio de variable lineal $z \mapsto z - z_0$ se obtienen las mismas conclusiones.

(II) Además si el camino γ no pasa por z_0 cuando $t = 0$ y lo hace por un punto t_0 , o $|\gamma'(t_0)| \neq 1$ se puede hacer tomar otra parametrización del mismo camino $\sigma(t) := \gamma\left(\frac{t}{|\gamma'(t_0)|} + t_0\right)$, que seguirá siendo un camino de descenso rápido y cumplirá que $\sigma(0) = z_0$ y $|\sigma'(0)| = 1$.

- (III) Si el camino de descenso rápido γ es finito, por ejemplo está definido en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, se puede tomar

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{si } t \notin I. \end{cases}$$

- (IV) En el caso general, se tiene $n = 0$ y $m = 2$, es decir, cuando $z \rightarrow 0$ se tienen los desarrollos asintóticos

$$f(z) \sim f(z_0) \quad \text{y} \quad \phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + o((z - z_0)^2),$$

entonces si se escribe $\phi''(z_0) = |\phi''(z_0)|e^{i\alpha}$, como $\theta = \frac{\pi - \alpha}{2}$ se tiene que cuando $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I(x) &\sim_{\infty} 2 \frac{f(z_0)}{2} \Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right) \left(\frac{\phi''(z_0)}{2}x\right)^{-\frac{0+1}{2}} e^{\phi(z_0)x + (0+1)i\theta} \\ &= f(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(z_0)|}} e^{\phi(z_0)x} e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

- (V) Si ponemos $z = xe^{i\delta}$, con $x > 0$. Entonces podemos incluir $e^{i\omega}$ en $\phi(\omega)$ y tenemos que

$$\phi(\omega) = Be^{i\delta} + Ce^{i\delta}\omega^m + o(\omega^m) = Be^{i\delta} + \rho e^{i(\delta+\alpha)}\omega^m + o(\omega^m).$$

Y sustituyendo en (3.12) se tiene que cuando $x \rightarrow \infty$, o equivalentemente cuando $z \rightarrow \infty$ en la dirección δ .

$$I(x) \sim \frac{A}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) (\rho x)^{-\frac{n+1}{m}} e^{Bxe^{i\delta} + (n+1)i\theta},$$

donde $\theta = \frac{(2k+1)\pi - \alpha - \delta}{m}$, con $k = 0, 1, \dots, m-1$.

En el caso en el que $n = 0$ y $m = 2$, se tiene que:

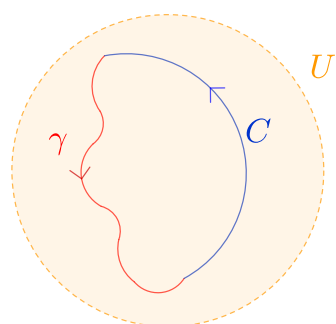
$$\begin{aligned} I(x) &\sim_{\infty} 2 \frac{f(z_0)}{2} \Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right) \left(\frac{\phi''(z_0)}{2} x\right)^{-\frac{0+1}{2}} e^{\phi(z_0)x e^{i\delta} + (0+1)i\theta} \\ &= f(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(z_0)|}} e^{\phi(z_0)x e^{i\delta}} e^{i\left(\frac{\pi-\alpha-\delta}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

- (VI) En el teorema nos basta únicamente con saber que existe un camino de descenso rápido que pasa por el punto y que cuando calculamos la integral a lo largo de este converge. Pero como observamos en las fórmulas, el resultado final es independiente de este camino elegido.
- (VII) El teorema solo sirve si el camino que usamos es uno de descenso rápido γ . Normalmente la curva de integración C no lo será, así que se nos abren dos posibilidades:
- O bien deformamos la curva de integración C en un camino de descenso rápido γ .
 - O bien somos capaces de encontrar un camino cerrado que pase por C y por γ (Figura 3.7a). Después se puede aplicar el Teorema de Cauchy, que asegura que la integración a lo largo de ambos, con la orientación correcta, será igual:

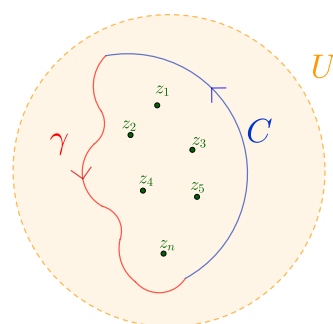
$$\int_C f(z) e^{x\phi(z)} dz = \int_{\gamma} f(z) e^{x\phi(z)} dz.$$

Si en esta deformación formamos una curva cerrada que contiene a una cantidad numerable de singularidades aisladas en U (Figura 3.7b) y se cumplen todas las hipótesis del teorema de los residuos, podemos aplicarlo y obtener que:

$$\int_C f(\omega) e^{x\phi(\omega)} d\omega = \int_{\gamma} f(\omega) e^{x\phi(\omega)} d\omega + 2\pi i \sum_{j=1}^n \eta(\gamma-C, z_j) \text{Res}(f e^{x\phi}, z_j).$$



(a) Sin singularidades



(b) Con singularidades aisladas encerradas en la curva $\gamma - C$

Figura 3.7: Esquema de un camino de descenso rápido que comparte extremos con una curva C , ambos contenidos en el dominio U .

Capítulo 4

Aplicaciones

El último capítulo se dedica a aplicar los métodos de obtención de desarrollos asintóticos para integrales paramétricas que hemos obtenido en el capítulo anterior. Se usan en ejemplos como la integral exponencial, la fórmula de Stirling, la norma L_p de una función, y las integrales de Bessel y Airy. Estos métodos también tienen una aplicación de ecuaciones diferenciales y, por lo tanto, a la física. Ejemplo de ello son la ecuación de Burgers en mecánica de fluidos o el método WKB en mecánica cuántica. Sin embargo, en esta memoria nos ceñiremos únicamente a ejemplos enfocados en las matemáticas.

4.1. Integral exponencial

Ejemplo 4.1. La integral exponencial se define como:

$$\text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du,$$

para $x > 0$. Podemos abordar esta integral, por ejemplo, mediante el método de integración por partes, aunque su forma no encaja con la del Teorema 3.1. Sin embargo, con el cambio de variable $t = \frac{u}{x}$, $du = x dt$, se tiene que

$$\text{Ei}(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t} dt.$$

Con esta forma sabemos que está bien definida y que podemos aplicar el Corolario 3.2 para ver cómo se comporta la función cuando $x \rightarrow \infty$. Vemos que $f(t) = \frac{1}{t} \in \mathcal{C}^\infty(0, \infty)$ y $f(t) = O(e^t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, se comprueba fácilmente por inducción que $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$. Entonces se tiene que para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\text{Ei}(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{n! e^{-x}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{e^{-x}}{x^{N+1}}\right).$$

Observación 4.2. Si queremos usar este desarrollo para aproximar un valor concreto de $\text{Ei}(x)$, es decir, fijar un x y calcular la suma, no resulta buena idea usar un N demasiado grande. Si fijamos x e intentamos tomar el desarrollo asintótico del ejemplo anterior como una serie, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \text{con } a_n := (-1)^n \frac{n! e^{-x}}{x^{n+1}}.$$

Y se tiene que

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{n}{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

por lo que la serie no sería convergente. Sin embargo, sí que podemos asegurar que para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\text{Ei}(x) = S_N(x) + R_N(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{n! e^{-x}}{x^{n+1}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n \frac{n! e^{-x}}{x^{n+1}}.$$

Lo que ocurre es que, para un x fijo, a partir de cierto valor de N el desarrollo asintótico comienza a dar una peor aproximación. Para cada x habrá un

número óptimo de términos N para los que el desarrollo asintótico da la mejor aproximación. Esta técnica se llama *suma hasta el menor término*, y consiste en sumar términos mientras sean más pequeños que el anterior. En nuestro caso, como comprobamos arriba $a_n/a_{n-1} = n/x$, y se tiene que $\frac{n}{x} < 1 \iff n < x$. En [6] Greenberg comprueba que para $x = 10$, el N óptimo también es 10. A partir de ahí los términos del desarrollo empiezan a crecer. Sin embargo, también comprueba que para $N = 4$, el error que comete es sólo del 0,003 %, por lo que en este caso con pocos términos se obtiene una aproximación muy buena.

4.2. Fórmula de Stirling

Ejemplo 4.3 (Fórmula de Stirling). Tenemos que la función Gamma se puede definir como

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt, \quad (4.1)$$

para todo $x > 0$. Si usamos que cuando t es positivo se tiene que $t^x = e^{x \log(t)}$, se puede reescribir (4.1) como

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} e^{x \log(t)} dt = \int_0^\infty e^{x \log(t) - t} dt = \int_0^\infty e^{x(\log(t) - \frac{t}{x})} dt.$$

Esta función es apropiada para aplicar el método de Laplace. Si ponemos $f(t) = 1$ y $\phi(t) = x(\log(t) - \frac{t}{x})$, tenemos que el máximo de la función ϕ dependerá de x . Así que hacemos el cambio de variables $t = xu$, $dt = xdu$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-xu} (xu)^x x du = x^{x+1} \int_0^\infty e^{-x(\log(u) - u)} du.$$

Entonces si ponemos $f(u) = 1$ y $\phi(u) = \log(u) - u$, tenemos que $f, \phi \in \mathcal{C}^\infty((a, b))$, $\phi'(u) = \frac{1}{u} - 1$, que solo se anula si $u = 1$, punto interior de $(0, \infty)$, y $\phi''(u) = -\frac{1}{u^2}$, así que $\phi''(1) = -1 < 0$ y es un máximo. Además, como $\phi(1) = -1$ si tomamos que cuando $u \rightarrow 1$

$$f(u) \sim_1 1 \quad \text{y} \quad \phi(u) = 1 - \frac{(u-1)^2}{2} + o((u-1)^2),$$

podemos usar la fórmula del método de Laplace en el caso $\alpha = 0$ y $\beta = 2$ (3.5) y se obtiene que cuando $x \rightarrow \infty$,

$$\int_0^\infty e^{-x(\log(u)-u)} du \sim_\infty e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}},$$

y finalmente se concluye que

$$\Gamma(x+1) \sim_\infty \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

4.3. Norma L_p de una función

Ejemplo 4.4 (Norma L_p). Sea $g(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple que:

- $|g| \in \mathcal{C}^4([a, b])$.
- $|g(t)|$ tiene un máximo en un punto $t = c$. Supondremos que existe un sólo máximo interior, pero si tuviera varios máximos locales o hubiera un máximo en los extremos se podría aplicar la Observación 3.11.

Entonces el método de Laplace permite calcular el primer término de un desarrollo asintótico de la norma L_p cuando esta converge a la norma del supremo, es decir, cuando $p \rightarrow \infty$. La norma en L_p de una función real definida en $[a, b]$ es

$$\|g\|_{p,[a,b]} = \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{1/p} = (I(p))^{1/p}.$$

Entonces podemos reescribir $I(p)$ como

$$I(p) = \int_a^b e^{p \log |g(t)|} dt.$$

Así que tomamos $f(t) = 1$, $\phi(t) = \log |g(t)|$, $\phi'(c) = 0$ y $\phi''(c) = \frac{g''(c)}{g(c)} < 0$ por hipótesis. Entonces usando el desarrollo de Taylor cuando $t \rightarrow c$

$$f(t) \sim_c 1 \quad \text{y} \quad \phi(t) = \log |g(c)| - \frac{g''(c)}{2g(c)}(t-c)^2 + o((t-c)^2),$$

podemos utilizar la fórmula para el caso $\alpha = 0$ y $\beta = 2$ (3.5):

$$I(p) \sim_{\infty} e^{p \log |g(c)|} \sqrt{\frac{2\pi g(c)}{-pg''(c)}} = |g(c)|^p p^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{2\pi g(c)}{g''(c)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Además, si ponemos $A = \left(-\frac{2\pi g(c)}{g''(c)} \right)^{\frac{1}{2}}$ y usamos que

$$p^{-\frac{1}{2p}} = e^{-\frac{1}{2p} \log p} \sim_{\infty} 1 - \frac{\log p}{2p} \quad \text{y} \quad A^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{\log A}{p}} \sim_{\infty} 1 + \frac{\log A}{p},$$

se tiene que

$$\|g\|_{p,[a,b]} \sim_{\infty} A^{\frac{1}{p}} p^{-\frac{1}{2p}} |g(c)| \sim_{\infty} |g(c)|,$$

lo cual concuerda con la definición de la norma del supremo

$$\|g\|_{\infty,[a,b]} = \{\sup |g(x)|, \quad x \in [a, b]\}$$

4.4. Integral de Bessel

Ejemplo 4.5 (Funciones de Bessel). La función de Bessel de primera clase $J_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ se puede definir como

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin(t)) dt,$$

donde n es un número entero. Pero esta expresión es equivalente a

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\pi e^{i(nt-x\sin(t))} dt \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\pi e^{int} e^{-ix\sin(t)} dt \right),$$

donde $\operatorname{Re}(z)$ es la función parte real. De esta forma, podemos aplicar el método de la fase estacionaria a la integral y tomar únicamente la parte real.

Tenemos que $f(t) = e^{int}$, $\phi(t) = -\sin(t)$, $\phi'(t) = -\cos(t)$ y $\phi''(t) = \sin(t)$, por lo que el único punto crítico de ϕ en $[0, \pi]$ es $c = \frac{\pi}{2}$, un punto interior, así que se puede usar el Corolario 3.19. Se tiene que $\phi''(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = -1$ y $f(\frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{n\pi}{2}}$. Por lo que usando la fórmula para desarrollo de Taylor cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 2$ (3.10), podemos escribir que cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-int} e^{ix\sin(t)} &\sim_\infty \frac{1}{\pi} e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{-ix+i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \left[\cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, podemos asegurar que

$$J_n(x) \sim_\infty \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

4.5. Integral de Airy

Ejemplo 4.6 (Integrales de Airy). Sea $C : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ un camino definido por $C(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ (Figura 4.1) que cumple que:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$ y existe un $M_1 > 0$ tal que para todo $t \geq M_1$

$$C(t) \in S_{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \leq \varphi(t) \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

- $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \infty$ y existe un $M_2 < 0$ tal que para todo $t \leq M_2$

$$C(t) \in S_{-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \leq \varphi(t) \leq -\frac{2\pi}{3}.$$

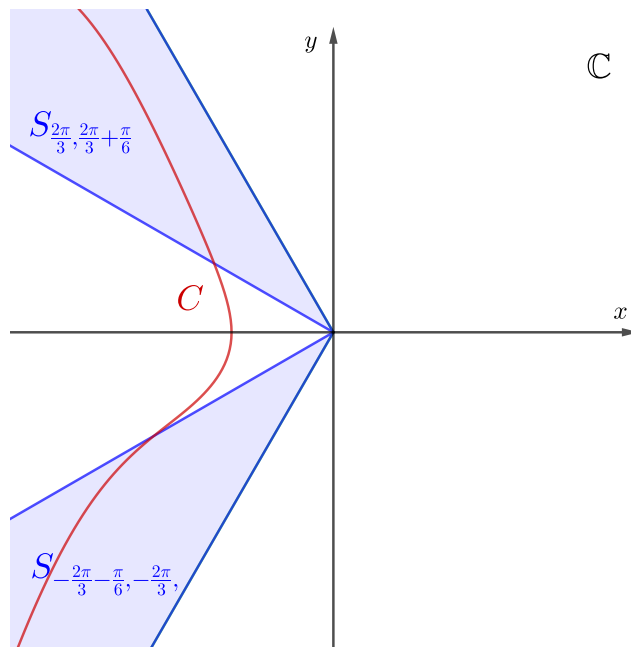


Figura 4.1: Esquema de la curva C

Teniendo en cuenta este camino C , la integral de Airy se define como

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp\left(xz - \frac{1}{3}z^3\right) dz.$$

Esta integral se puede resolver por el método del descenso rápido. Tendremos que $f(z) = \exp\left(xz - \frac{1}{3}z^3\right)$ es holomorfa en todo el plano complejo. Para calcular un desarrollo asintótico cuando $x \rightarrow \infty$, primero hay que comprobar que la integral converge absolutamente. Para ello nos valdremos del Teorema de Cauchy. Vamos a definir una curva λ formada por dos rectas. Luego crearemos un camino cerrado Σ al unir λ con C . Veremos que cuando Σ se hace arbitrariamente grande, la integral en las uniones se anula. De esta manera,

al tener el mismo carácter la integral de $f(z)$ a lo largo de C y de λ , será más fácil realizar el cálculo.

Sea $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ el camino dado por

$$\lambda(t) = \begin{cases} te^{i\frac{2\pi}{3}} & \text{si } t \geq 0 \\ -te^{i\frac{-2\pi}{3}} & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Sea $R > 0$. Construimos una curva que una λ y C con dos arcos de radio R (Figura 4.2). Esta curva será del tipo $\Sigma \equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$, con

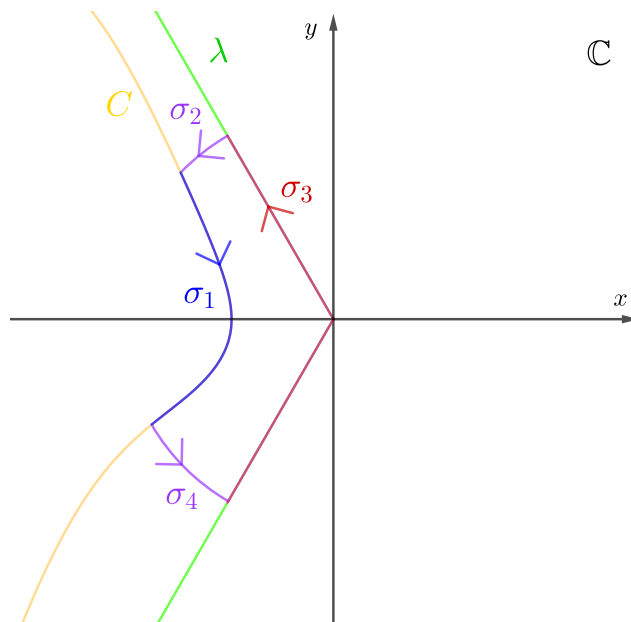
$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= C(t) & \text{para } t &\in [t_1(R), t_2(R)], \\ \sigma_2(t) &= Re^{i\theta} & \text{para } \theta &\in [\frac{2\pi}{3}, \theta_1(R)], \\ \sigma_3(t) &= \lambda(t) & \text{para } t &\in [-R, R], \\ \sigma_4(t) &= Re^{i\theta} & \text{para } \theta &\in [\theta_2(R), -\frac{2\pi}{3}]. \end{aligned}$$

Entonces, para σ_2 se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_2} \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz \right| &= \left| \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\theta_1} \exp\left(xRe^{i\theta} - \frac{R^3e^{3i\theta}}{3}\right) iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \\ &\leq R \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\theta_1} \left| \exp(xRe^{i\theta}) \right| \left| \exp\left(-\frac{R^3e^{3i\theta}}{3}\right) \right| d\theta \end{aligned}$$

Y por la construcción de C , Existe un $R_0 > 0$ tal que para todo $R \geq R_0$, $\theta_1 \leq \frac{5\pi}{6}$. En esta situación,

$$\begin{aligned} R \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\theta_1} \left| \exp(xRe^{i\theta}) \right| d\theta &\leq R \exp\left(xR \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \exp\left(-\frac{R^3}{3} \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) \\ \left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0\right) &\leq R \exp\left(xR \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

Figura 4.2: Esquema de la curva Σ

y por lo tanto, como $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\sigma_2} \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz \right| = 0.$$

Para σ_4 se obtiene el mismo resultado con el mismo razonamiento. Y como $f(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$\begin{aligned} \int_C \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1} \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_3} \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz = \int_{\lambda} \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz. \end{aligned}$$

Por lo que ambas integrales tendrán el mismo carácter. Ahora, para acotar la integral en λ , tenemos en cuenta que para toda constante compleja $\omega = ae^{i\alpha}$,

$$\begin{aligned} \left| \exp \left(\omega t - \frac{t^3}{3} \right) \right| &\leq \left| \exp \left(a \cos(\alpha) t - \frac{t^3}{3} \right) \right| \left| \exp(i a \sin(\alpha) t) \right| \leq \\ &\leq \left| \exp \left(a \cos(\alpha) t - \frac{t^3}{3} \right) \right|. \end{aligned}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $a \cos(\alpha) t - \frac{t^3}{3} \sim_{\infty} -\frac{t^3}{3}$. Además para todo $t > 0$, $-\frac{t^3}{3} \leq -\frac{t^3}{6}$, así que debe existir un $t_0 > 0$ que cumpla que

$$\begin{aligned} \left| \int_C \exp \left(xz - \frac{z^3}{3} \right) dz \right| &= 2 \left| \int_0^{\infty} \exp \left(xte^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{te^{i\pi}}{3} \right) dt \right| = \\ &= 2 \left[\int_0^{t_0} \exp \left(xte^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{te^{i\pi}}{3} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{\infty} \exp \left(xte^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{te^{i\pi}}{3} \right) dt \right] \leq \\ &\leq 2 \left[\int_0^{t_0} \exp \left(xte^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{te^{i\pi}}{3} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{\infty} \exp \left(-\frac{te^{i\pi}}{6} \right) dt \right], \end{aligned}$$

por lo que la integral será convergente.

Ahora, para el cálculo de $\text{Ai}(x)$ realizamos el cambio de variables $z = \omega\sqrt{x}$ y se tiene

$$\text{Ai}(x) = \int_C f(z) dz = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_{\frac{C}{\sqrt{x}}} \exp \left(x^{3/2} \left(\omega - \frac{\omega^3}{3} \right) \right) d\omega.$$

Aunque haya un $x^{\frac{3}{2}}$ en lugar de una x , esta integral es del tipo (3.11), con $f(\omega) = 1$, $\phi(\omega) = \omega - \frac{\omega^3}{3}$. Entonces $\phi'(\omega) = 1 - \omega^2 = 0$ si $\omega = \pm 1$, por lo

que estos serán los puntos de silla. Además, como $\phi''(\omega) = -2\omega$, se tendrá que los puntos de silla son de orden 1. Como las curvas están definidas en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$, elegimos $\omega_0 = -1$.

Ahora tenemos que buscar una curva que cumpla que $\operatorname{Im}(\phi(\gamma(t))) = \operatorname{Im}(\phi(\omega_0)) = 0$. Si escribimos $\omega = \alpha + i\beta$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha + i\beta) &= \alpha + i\beta - \frac{1}{3}(\alpha^3 + 3i\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - i\beta^3) = \\ &= \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \alpha\beta^2\right) + i\left(\beta + \frac{\beta^3}{3} - \alpha^2\beta\right),\end{aligned}$$

entonces

$$\operatorname{Im}(\phi(\omega)) = 0 \iff \beta(1 - \alpha^2 + \frac{1}{3}\beta^2) = 0.$$

Esta ecuación forma una hipérbola. Tendremos que $\beta = \pm\sqrt{3(\alpha^2 - 1)}$, y cuando $\alpha \rightarrow -\infty$,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pm\sqrt{3(\alpha^2 - 1)}}{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{3(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2}} = \pm\sqrt{3\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)} \rightarrow \pm\sqrt{3},$$

y $\arctan(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{2\pi}{3}$. Por lo que las dos rectas de λ serán las asíntotas de γ . Por este motivo, con el cálculo que hemos hecho previamente podemos asegurar que

$$\int_C \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz = \int_\lambda \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz = \int_\gamma \exp\left(xz - \frac{z^3}{3}\right) dz.$$

Entonces tenemos que, $f(\omega_0) = 1$, $\phi(\omega_0) = -\frac{2}{3}$, $\phi''(\omega_0) = 2e^{i\alpha}$, con $\alpha = 0$, por lo que cuando $x^{\frac{3}{2}} \rightarrow \infty$, usando la fórmula que calculamos para el desarrollo de Taylor con $n = 0$ y $m = 2$ (3.15):

$$\int_{\frac{C}{\sqrt{x}}} \exp \left(x^{3/2} \left(\omega - \frac{\omega^3}{3} \right) \right) d\omega \sim_{\infty} 1 \sqrt{\frac{2\pi}{2x^{3/2}}} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} i.$$

Por lo que cuando $x \rightarrow \infty$,

$$\text{Ai}(x) \sim_{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} \pi^{1/2}}{2\pi i x^{3/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} i = \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}}} \exp \left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right).$$

Si sustituimos x por $z = |z|e^{i\delta}$, con $z \in S_{\pi, 3\pi/2}$, tenemos que cuando $|z| \rightarrow \infty$ en la dirección δ :

$$\text{Ai}(z) \sim_{\infty} \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}} |z|^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\delta}{4}}} \exp \left(-\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3e^{i\delta}}{2}} \right).$$

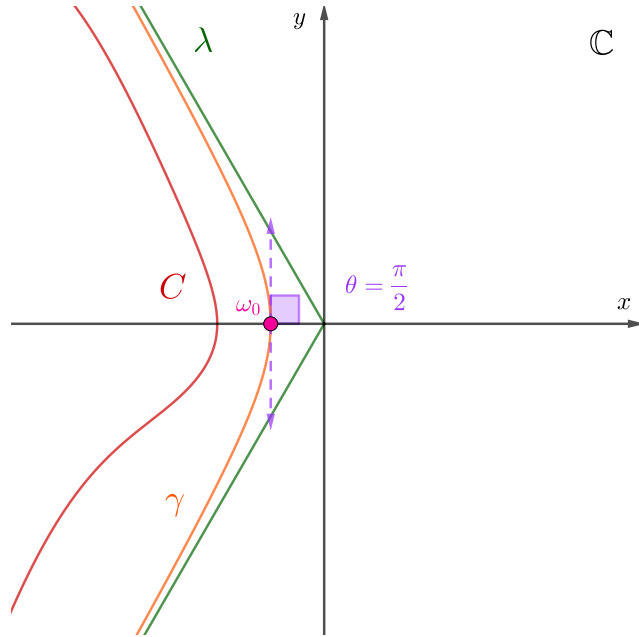


Figura 4.3: Esquema de la curva γ . Pasa por $\omega_0 = -1$ con direcciones de descenso rápido $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Conclusión

En conclusión, esta memoria tiene varias partes que cumplen diferentes funciones. El primer capítulo es un texto breve que sirve para recordar las relaciones de orden en funciones, que serán fundamentales durante el desarrollo del trabajo. El segundo capítulo se trata de una introducción al concepto de desarrollo asintótico, tanto de funciones reales como complejas, demostrando sus propiedades fundamentales y dando ejemplos significativos. El tercer capítulo, el central de este trabajo, es una recopilación de cuatro métodos para la aproximación asintótica de integrales. Estos son la integración por partes, el método de Laplace, el método de la fase estacionaria y el método del descenso rápido. Finalmente, el cuarto capítulo, consiste en la aplicación de estos métodos a la obtención de aproximaciones asintóticas de integrales relevantes en matemáticas y en física, como lo son la integral exponencial, la fórmula de Stirling, la norma de una función o las integrales de Bessel o de Airy.

Salvo en el caso del método del descenso rápido, donde no se ha elaborado la demostración de la existencia de caminos de descenso rápido, se han demostrado de manera completa los métodos que se abordan. También se proporciona una explicación de las ideas que subyacen en estas demostraciones. Para ello, hemos tenido que aplicar resultados vistos en durante el Grado en Matemáticas. Concretamente en las asignaturas de Cálculo Infinitesimal, Análisis Matemático y Variable Compleja.

En cuanto a posibles mejoras del trabajo o maneras de continuar con la memoria, el capítulo 4 se habría podido abordar de forma diferente. Para demostrar el teorema de Laplace (3.8) se puede demostrar antes un resultado conocido como lema de Watson, que permite obtener un desarrollo asintótico

con más términos y no sólo el término principal. Sin embargo, esta demostración era más engorrosa y restaba espacio para otros métodos. Además, hemos comprobado en varias ocasiones como para estudiar el comportamiento asintótico de una integral paramétrica, el término principal del desarrollo es más que suficiente. Otro punto en el que se podría extender el trabajo es en el capítulo de aplicaciones. Se podrían exponer algunos ejemplos de aplicaciones de estos métodos al ámbito a la física. Sin embargo, de nuevo, esto hubiera requerido una extensión considerable, ya que implicaría incluir una introducción al problema que se aborda. Debido a esto, hemos preferido centrarnos únicamente en ejemplos en matemáticas.

Bibliografía

- [1] Ablowitz M.J., Fokas A.S.: Complex Variables Introduction and Applications. Cambridge University Press, New York. 2003.
- [2] Apostol T. M.: Análisis Matemático, Ed. Reverté, 1976.
- [3] Ash R. B., Novinger W. P.: Complex Variables, Ed. Dover, 2007.
- [4] Dieudonné J.: Calcul Infinitésimal. Collection Méthodes. Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, Paris. 1997.
- [5] Erdélyi A.: Asymptotic Expansions. Dover Publications, Inc., New York. 1956.
- [6] Greenberg M.D.: Foundations of Applied Mathematics. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. 2013.
- [7] Lang S.: Complex Analysis, Springer, New York, 1999.
- [8] Lebedev N. N.: Special Functions and Their Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [9] Murray J.D.: Asymptotic Analysis. Springer, New York. 1984.
- [10] Sanz J. M.: Diez Lecciones de Cálculo Numérico, Universidad de Valladolid, 2010.