Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Sucesiones de números naturales definidas por recurrencias complejas

Autor: Miguel Valentín Rodríguez Real
Tutor: José Enrique Marcos Naveira

2024-2025

Resumen

En este trabajo de fin de grado analizaremos con detalle ciertas sucesiones de números naturales definidas mediante relaciones de recurrencia no lineal. Veremos algunas de las propiedades que estas sucesiones tienen: posición relativa de los números primos, primos consecutivos, biyectividad… También se presentan distintas gráficas realizadas mediante programas. Una parte fundamental del trabajo reside en aquellas sucesiones que constituyen una permutación de los números naturales no trivial. En ocasiones, diversos experimentos computacionales desembocarán en distintas conjeturas sobre propiedades de ciertas sucesiones.

Palabras clave

Permutación de los números naturales, Coprimalidad, Máximo común divisor, Número primo, Múltiplo, Sucesión, Inyectividad.

Abstract

In this Bachelor's Thesis we will analyze in detail certain sequences of natural numbers defined by non-linear recurrence relations. We will explore some of the properties these sequences exhibit: relative positions of prime numbers, consecutive primes, bijectivity, and more. Various graphs produced with computer programs are also presented. A fundamental part of the work focuses on those sequences that form a non-trivial permutation of the natural numbers. In some cases, different computational experiments will give rise to conjectures about the properties of particular sequences.

Keywords

Permutation of the natural numbers, Coprimality, Greatest common divisor, Prime number, Multiple, Sequence, Injectivity.

Índice general

Introducción

Las sucesiones son una de las principales herramientas matemáticas. Desempeñan un papel fundamental en distintas ramas como el análisis ó teoría de números. Incluso podrían llegar a desempeñar un papel importante en criptografía. No obstante, en este trabajo nos dedicaremos únicamente a las sucesiones de números enteros. A día de hoy hay cientos de miles de distintas sucesiones enteras y para catalogarlas, el matemático N.J.A. Sloane comenzó a almacenar información de las distintas sucesiones en una base de datos que se conoce como la *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) [15]. En ella podemos encontrar programas en distintos lenguajes para construir los primeros elementos de una sucesión, artículos de investigación, conjeturas, comentarios... Para organizar de una forma ordenada toda esta información, cada sucesión tiene asignada un código al que haremos referencia cada vez que hablemos de una sucesión, por si el lector desea indagar más. En los artículos [13] y [14] podemos encontrar una descripción más detallada sobre la OEIS, así como una selección de las sucesiones más interesantes y menciones a algunos problemas para los cuales aún no se ha encontrado solución.

La OEIS será la piedra angular de este trabajo en el cual se estudiarán concretamente sucesiones de números naturales definidas por relaciones de recurrencia basadas en propiedades de divisibilidad, desigualdades y condiciones de coprimalidad entre otras. El objetivo principal es obtener una conclusión certera sobre si las sucesiones que estamos tratando son o no una permutación de los números naturales. No obstante, surgen otras preguntas de forma natural a las que trataremos de dar una respuesta con el máximo rigor posible, aunque en ocasiones nos limitaremos a mencionar conjeturas de un interés relevante. A lo largo de este trabajo siempre se proporcionarán al menos un gráfico y una tabla con los primeros términos de cada sucesión para una mejor comprensión de la misma.

Comenzaremos el primer capítulo con la sucesión EKG A064413, propuesta por Lagarias, Rains y Sloane. Veremos su definición formal, así como algunas de las propiedades que esta sucesión posee y finalmente, proporcionaremos algunas sucesiones similares.

En segundo lugar, dedicaremos un capítulo entero a la permutación de Yellowstone A098550. En comparación a la sucesión EKG, esta añade cierta complejidad en su definición al involucrar en ella un término más. La gráfica de esta sucesión es muy llamativa, pues guarda cierta similitud con los famosos géiseres del parque de Yellowstone. Analizaremos su construcción paso a paso, el por qué es una permutación de $\mathbb{N}$ y haremos hincapié en ciertas observaciones empíricas.
En adición a los dos capítulos previos, trataremos un pequeño grupo de sucesiones de las cuales se conocen muy pocos resultados. Trataremos de probar si son o no una biyección de los números naturales, comentaremos si pueden llegar a serlo o si no... Para las que no se sabe nada a día de

hoy nos apoyaremos en su definición y en sus gráficas. Finalmente analizaremos la sucesión de Slater y Vélez, así como la sucesión de los números de Ulam.

La motivación principal de este TFG es estudiar sucesiones que aparentemente no diríamos que son una permutación de los números naturales. En algunas ocasiones veremos cómo sucesiones con gráficos muy caóticos pueden llegar a ser una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

En conclusión, en cada capítulo combinaremos teoría, como definiciones y resultados disponibles, cómputo de los primeros términos de cada sucesión y, en ocasiones, un breve análisis de sus gráficos. Es decir, expondremos detalles sobre algunas de las sucesiones e ilustraremos cómo ciertos experimentos computacionales desembocan en preguntas sin respuesta.

Capítulo 1

La sucesión EKG

La sucesión EKG (en inglés americano) o ECG (en inglés británico) fue definida por Jonathan Ayres en 2001. Aparece en la Enciclopedia Online de Sucesiones Enteras [15] asignada al número A064413. Posteriormente, fue estudiada por Lagarias, Rains y Sloane [9].

Definición 1.1. La sucesión EKG se define como sigue: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y el término a_n es el menor número natural que aún no ha salido en la sucesión de modo que $mcd(a_{n-1}, a_n) > 1$.

En este capítulo la denotaremos siempre por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Su definición combina aspectos aditivos y multiplicativos, y la propiedad del máximo común divisor provoca una complicada dependencia sobre los términos previos de la sucesión. Aún así, podemos ver que toma la forma de un electrocardiograma cuando, al dibujarla, unimos mediante rectas los términos sucesivos de la sucesión (de ahí su nombre).

Lagarias, Rains y Sloane realizaron diferentes experimentos numéricos sobre los primeros 10^7 términos e idearon diferentes conjeturas realmente interesantes. Aunque su comportamiento local puede ser impredecible, las figuras 1.1 y 1.2 muestran cierta regularidad global.

1.1. Propiedades básicas de la sucesión EKG

Comenzaremos estudiando la relación que guardan los números primos con esta sucesión. Recordemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se define de la manera siguiente: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y para cada $n \geq 3$, el término a_n es el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión y tal que a_n y a_{n-1} tienen algún factor común.

Procediendo de manera análoga, obtenemos los primeros 50 términos de la sucesión:

1	2	4	6	3	9	12	8	10	5
15	18	14	7	21	24	16	20	22	11
33	27	30	25	35	28	26	13	39	36
32	34	17	51	42	38	19	57	45	40
44	46	23	69	48	50	52	54	56	49 ...

A continuación veremos una serie de lemas y teoremas, todos ellos demostrados por Lagarias, Rains y Sloane[9]

Definición 1.2. Decimos que p es un primo controlador o dominante para a_n si p divide a a_{n-1} y p divide a a_n.

Nota. Nótese que un primo controlador p no tiene por qué ser único.

El siguiente lema muestra algunas de las posiciones de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en las que podemos encontrar números primos y múltiplos de ellos.

Lema 1.3. *Sea p >2 un número primo. Sea a_n el primer término divisible por p, entonces $a_{n+1} = p$ y $a_n = pq$, donde q es el menor divisor primo de a_{n-1}.*

Demostración. Sea $p > 2$ un número primo. Sea q el menor primo controlador para a_n. Por definición sabemos que $q|a_n$ y $q|a_{n-1}$. Por hipótesis $p|a_n$, luego $a_n = pq$, pues por la definición de la sucesión EKG, a_n debe tener factor común con a_{n-1} y ser lo menor posible. Ahora bien, q es un primo controlador para a_n, luego $q, 2q, ..., q(p-1)$ ya han aparecido en la sucesión, (nótese que todos comparten el factor q, y como $a_n = pq > kq$ para cada $k = 1, ..., p-1$, necesariamente ya han tenido que salir en la sucesión). Observemos que al ser a_n el primer término divisible por p siendo p primo, se tiene que p no ha aparecido en la sucesión. Luego $a_{n+1} = p$. □

Nota. Una alternativa, que a veces resulta útil, a la hora de definir la sucesión EKG es la siguiente: Para cada primo p, sea $B_n(p)$ el menor múltiplo de p que aún no ha aparecido en los n primeros términos de la sucesión. Entonces, a_{n+1} es el menor de los $B_n(p)$ para cada p que divide a a_n.

Una vez que hemos indagado en el comportamiento de los números primos en esta sucesión, nos preguntamos si hay un orden entre los números primos que aparecen en ella. La respuesta es afirmativa como se muestra a continuación.

Lema 1.4. *Los números primos aparecen en la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en orden creciente.*

Demostración. Si $a_{n+1} = p$, entonces $a_n = qp$ es el primer término de la sucesión divisible por p. Sea $p' < p$, entonces $qp' < qp = a_n$. Es decir, qp' apareció antes en la sucesión y sabemos que el próximo término en la sucesión es p', que no ha aparecido antes ya que el lema 1.3 asegura que el primero término divisible por p' es de la forma qp'. □

Lema 1.5. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión EKG. Si $\{m,2m,...,km\} \subset \{a_i : 1 \leq i \leq M\}$, entonces $\{1,2,...,k\} \subset \{a_i : 1 \leq i \leq M+1\}$.*

Demostración. Inducción sobre k. Para $k = 1$ tenemos que si $\{m\} \subset \{a_1, ..., a_M\}$, entonces que $\{1\}$ está contenido en $\{a_1, ..., a_{M+1}\}$ es evidente pues $a_1 = 1$.
Supongamos la propiedad cierta para $k-1$ y veámosla para k. Por hipótesis, $\{m, 2m, ..., km\} \subset \{a_1, ..., a_M\}$. Pongamos que $km = a_n$ para algún $n \leq M$. Sea q un primo controlador para a_n, entonces $q|a_n = km$.
Si q divide a m, entonces $m, 2m, ..., (k-1)m$ son candidatos a ser a_n, pero como $a_n = km$, necesariamente $m, 2m, ..., (k-1)m$ ya han salido en la sucesión, y por la hipótesis de inducción tenemos que $\{1, 2, ..., k-1\} \subset \{a_1, ..., a_n\}$. Es decir, los números $1, 2, ..., k-1$ están entre los términos de la sucesión a_1 y a_n. Ahora bien, k es un buen candidato para el término a_{n+1} ya que comparte el factor k con $a_n = km$ y además todos los números más pequeños que k ya han salido en la sucesión. Luego $\{1, 2, ..., k\} \subset \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$.
Si q divide a k entonces k sería un buen candidato para $a_n = km$, luego necesariamente tiene que haber aparecido antes en la sucesión. Además, por la hipótesis de inducción tenemos que

$\{1, 2, ..., k-1\} \subset \{a_1, ..., a_{M+1}\}$. Y como n era menor ó igual que M, se tiene que $\{1, ..., k\} \subset \{a_1, ..., a_{M+1}\}$.

□

Ya hemos visto que los números primos aparecen en orden creciente. Nos preguntamos ahora si de hecho, antes que un primo p aparecen todos los números naturales previos a p.

Lema 1.6. *Para cada primo p, los números 1,2,3,...,$p-1$ aparecen en la sucesión antes que p.*

Demostración. Como vimos en la demostración del lema 1.3, si tenemos $a_{n+1} = p$ para p primo, entonces tenemos $a_n = qp$ y además todos los números $q, 2q, ..., q(p-1)$ ya habrán aparecido. Por el lema 1.5, los números 1,2,...,$p-1$ aparecen antes que p. □

Nota. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la siguiente desigualdad para todo n natural,

$$\frac{1}{260}n < a_n < 14n.$$

Los siguientes resultados son vitales a la hora de estudiar en profundidad la estructura con la que aparecen los números primos en la sucesión.

Lema 1.7. *Sea x un número real fijo positivo. Entonces, para cada número primo q hay, a lo sumo, un índice n para el cual q es un primo controlador para a_n verificando las desigualdades $a_{n-1} < x \leq a_n$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo. Sea q un primo controlador para a_n de modo que $a_{n-1} < x \leq a_n$. Como $a_n \geq x$ y $q|a_n$, todos los múltiplos de q menores que x ya han aparecido en la sucesión por definición de la misma. Dicho de otra forma, a partir del índice n no hay ningún término divisible por q que sea menor que x. Luego si $k > n$ y $q|a_k$, necesariamente $a_k \geq x$. □

Definición 1.8. Sean x un número real y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera. Se dice que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cruza el número real x si existen dos índices m y n de modo que $a_m < x$ y $a_n > x$.

Nota. Una de las consecuencias de este lema la podemos encontrar en [7]. Si el número primo p_{k+1} aún no ha aparecido en la sucesión, entonces hay una limitación sobre cuántas veces podemos cruzar el número real x sin que haya aparecido el número primo p_{k+1} en la sucesión. Dicho límite es concretamente $k = \pi(p_{k+1})$.

Teorema 1.9. *Para cada par de números primos $p, q > 2$, el término pq aparece después de $2p$ en la sucesión.*

La demostración del teorema previo se puede consultar en [7].

Teorema 1.10. *Sea p un número primo mayor que 2. Si $a_n = p$ entonces $a_{n-1} = 2p$.*

Demostración. Del lema 1.3 sabemos que $a_{n-1} = qp$ para algún primo q y es el primer término divisible por p. Luego $q = 2$, pues si q es mayor que 2, por el teorema 1.9 tendríamos que $2p$ aparece antes que pq, que aparece antes que p por hipótesis, lo cual es absurdo ya que pq es el primer término divisible por p. □

Nota. Observemos que de los teoremas 1.9 y 1.10 podemos concluir que cada primo $p > 2$ aparece en la sucesión con la estructura $2p, p, 3p$. En particular, el primer múltiplo de p es $2p$.

1.2. Una permutación de los números naturales

La sucesión EKG tiene una definición por recursividad bastante simple. Esta combina aspectos aditivos y multiplicativos de los números enteros. No obstante, en esta sección veremos que es una permutación de los números naturales.

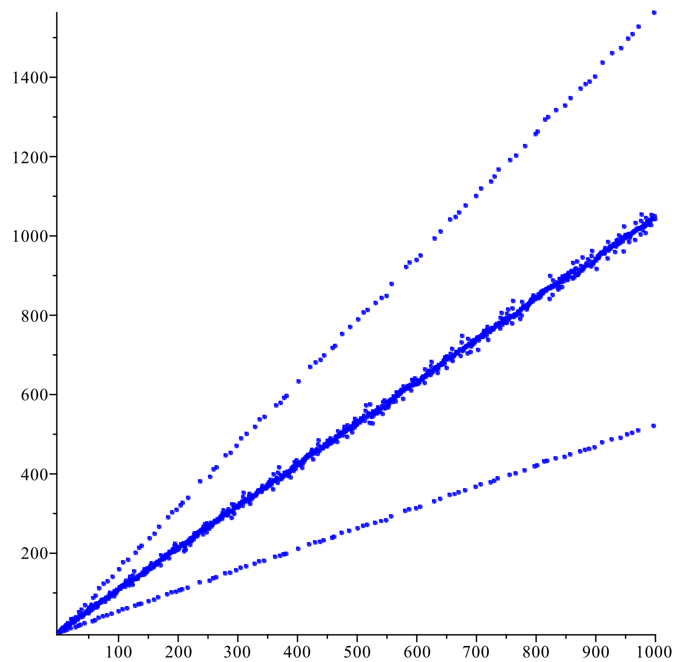


Figura 1.1: Los primeros 1000 términos, representados por puntos. Puntos sucesivos no unidos.

Veremos una serie de lemas previos que podemos hallar en [9] y que nos serán de gran utilidad para demostrar que la sucesión EKG es una permutación de los números naturales. De la definición de la sucesión se deduce directamente la inyectividad, pues ningún número natural puede aparecer más de una vez. Gráficamente la sobreyectividad se puede explicar por el crecimiento progresivo y lento que tiene la sucesión. Como observamos en la fig. 1.1, la sucesión aparentemente recoge poco a poco todos los números naturales. Todas estas razones nos invitan a pensar que realmente se trata de una biyección entre los números naturales.
El lema siguiente recoge en un mismo enunciado dos de los lemas previos, de una forma más clara y sintetizada.

Lema 1.11. *Sea p un número primo mayor que 2 que divide a algún término de la sucesión. Si a_n es el primer término divisible por p, entonces $a_n = qp$ donde q es el menor primo que divide a a_{n-1}. Además, q es menor que p, $a_{n+1} = p$ y, ó bien a_n ó bien a_{n+2} es igual a $2p$. Los nuevos primos que dividen los términos de la sucesión aparecen en orden creciente.*

Demostración. Sea a_n el primer término divisible por p. Entonces todo número de la forma pq, donde q es un divisor primo de a_{n-1}, es candidato a ser el término a_n. Ahora bien, q es el menor primo dividiendo a a_{n-1} y p divide al término a_n, por la definición de la propia sucesión concluimos que $a_n = pq$. Observemos que además p debe ser el menor primo que no divide a los términos $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ ya que si p' es otro primo tal que $p' < p$, entonces $p'q$ sería un mejor candidato para a_n. En consecuencia, los primos que dividen los términos de la sucesión han de aparecer en orden creciente. Por otro lado, a_{n+1} debe tener un factor en común con $a_n = pq$, además de ser el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión. Como q ya ha salido en la sucesión, p aún no y ambos son primos, necesariamente $a_{n+1} = p$. Finalmente, si a_{n-1} era un número par, entonces el menor primo dividiendo a_{n-1} es $q = 2$, en cuyo caso $a_n = 2p$. Si por el contrario a_{n-1} era impar, el menor número natural con algún factor en común con p y que aún no ha aparecido en la sucesión es $2p$, por lo tanto $a_{n+2} = 2p$. $\square$

Lema 1.12. *Si aparecen infinitos múltiplos de un número primo p en la sucesión, entonces todos los múltiplos de p aparecen.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Sea kp el primer múltiplo de p que no aparece en la sucesión. Elegimos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > kp$ para todo $n \geq n_0$. Como aparecen infinitos múltiplos de p en la sucesión, existe $n > n_0$ de modo que $a_n = lp$ para algún l. Pero entonces deberíamos tener $a_{n+1} = kp$, ya que el menor número natural no coprimo con lp y que aún no ha aparecido en la sucesión es precisamente kp. $\square$

Lema 1.13. *Si todos los múltiplos de un número primo p aparecen en la sucesión, entonces todo número entero positivo aparece en la sucesión.*

Demostración. De nuevo razonaremos por reducción al absurdo. Sea $k \geq 2$ el primer número entero que no aparece en la sucesión. Observemos que k no puede ser un múltiplo de p por hipótesis. Y como todos los múltiplos de p aparecen en la sucesión, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $a_{n_0} = klp$ para algún $l \in \mathbb{N}$ y tal que $\{1, 2, 3, ..., k-1\}$ está contenido en $\{a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}\}$. Y como todos los valores menores posibles ya han aparecido en la sucesión, se tiene que $a_{n+1} = k$, llegando a una contradicción. $\square$

Una vez demostrados los lemas previos, estamos en condiciones de estudiar la característica principal de esta sucesión.

Teorema 1.14. *La sucesión EKG es una permutación de los números naturales.*

Demostración. En primer lugar, observemos que ningún número puede estar repetido por la definición de la propia sucesión. Por tanto, si vemos que todo número aparece en la sucesión, habremos terminado. Supongamos que todos los términos de la sucesión fuesen divisibles por una cantidad finita de números primos.
Entonces, al menos uno de esos números primos tendría infinitos múltiplos en la sucesión, y de los lemas 1.12 y 1.13 concluiríamos que todo número entero positivo aparece en la sucesión, lo cuál es contradictorio, pues tendríamos que todo número natural es ó bien uno de esos primos ó bien un múltiplo suyo.
Podemos decir entonces que hay una cantidad infinita de números primos distintos que dividen a los términos de la sucesión. Ahora bien, en virtud del lema 1.11, aparecen infinitos números pares de la forma $2p$ en la sucesión, por el lema 1.12 todo número par aparece en la sucesión, y como

todo número par es múltiplo del primo 2, el lema 1.13 concluye que todo entero aparece en la sucesión.

□

Los siguientes resultados son meras conjeturas, aún se desconoce la veracidad de los enunciados. El autor es Thomas Ordowski, y fueron publicadas el 23 de enero de 2009. La primera conjetura nos hace reflexionar sobre la relación que puede haber entre los valores de los términos de la sucesión y el índice en el que aparecen. La segunda conjetura mostraría la frecuencia con la que el enunciado primero ocurre.

Conjetura 1.15. Si $a_n \neq p$ entonces casi siempre $a_n > n$.

Conjetura 1.16. El número de veces que $a_n > n$ crece de manera asintótica como n. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{a_n > n\}}{n} = 1.$$

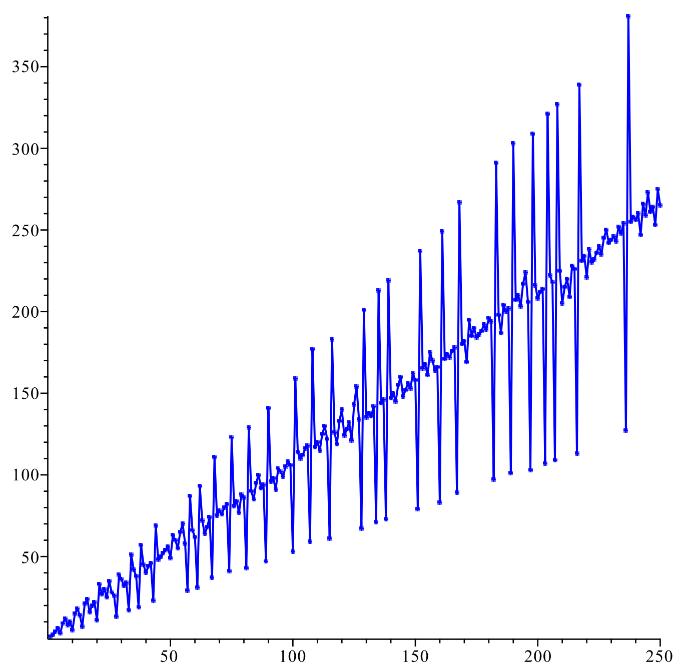


Figura 1.2: Los primeros 250 términos, representados por puntos. Puntos sucesivos unidos.

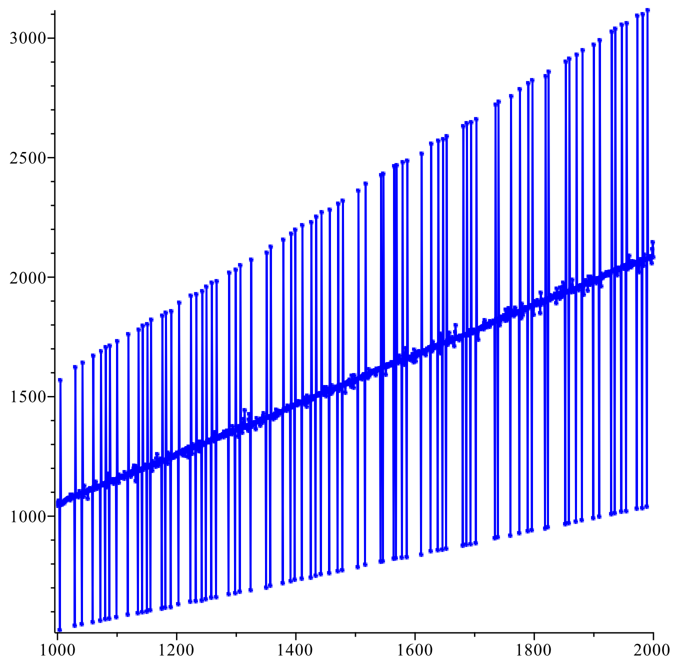


Figura 1.3: Los términos del 1000 al 2000, representados por puntos. Puntos sucesivos unidos.

1.3. Sucesiones similares

En esta sección comentaremos algunas sucesiones que se definen de manera similar a la sucesión EKG. Como se tratan de sucesiones relacionadas con la sucesión EKG, las denotaremos también por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La primera es la sucesión con código A064417. Su autor es Jonathan Ayres, y la publicó en 2001. Se define de la manera siguiente:

Definición 1.17. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, y para cada número natural $n > 3$, el término a_n es el menor número natural que aún no ha sido utilizado en la sucesión y tal que $mcd(a_n, a_{n-1}) \geq 3$.

Al igual que la sucesión EKG, esta es también una permutación de los números naturales. En las tablas siguientes se muestran los primeros 30 términos de la sucesión (izquierda) y los primeros 30 términos de su inversa (derecha).

1	2	3	6	9
12	4	8	16	20
5	10	15	18	21
7	14	28	24	27
30	25	35	40	32
36	33	11	22	44

$\longleftrightarrow$

1	2	3	7	11
4	16	8	5	12
28	6	33	17	13
9	43	14	50	10
15	29	60	19	22
34	20	18	68	21

En la misma línea, podemos definir la siguiente sucesión.

Definición 1.18. Definimos la sucesión siguiente: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$ y para cada número natural $n > 4$, el término a_n es el menor número natural que aún no ha sido utilizado en la sucesión y tal que $mcd(a_n, a_{n-1}) \geq 4$.

Esta sucesión tiene asociada el código A064418 y es nuevamente una permutación de los números naturales. Se debe también a Jonathan Ayres, que la publicó el mismo día que la sucesión anterior. Aunque el cambio en la definición sea apenas notorio con respecto a la sucesión previa ó a la sucesión EKG, merece la pena al menos preguntarse si tras ese cambio conservamos la sobreyectividad de la sucesión. La respuesta es afirmativa, es decir, la biyectividad se conserva aunque se modifique la definición como acabamos de ver. Parece que si cambiamos la condición sobre el máximo común divisor, pidiendo así que los términos consecutivos sean divisibles cada vez por números más grandes, conservamos la biyectividad. La única salvedad es que si en la definición pedimos que el $mcd(a_{n-1}, a_n) \geq m$ con m un número natural, entonces pidamos también que $a_n = n$ para todo $n \in \{1, ..., m\}$.

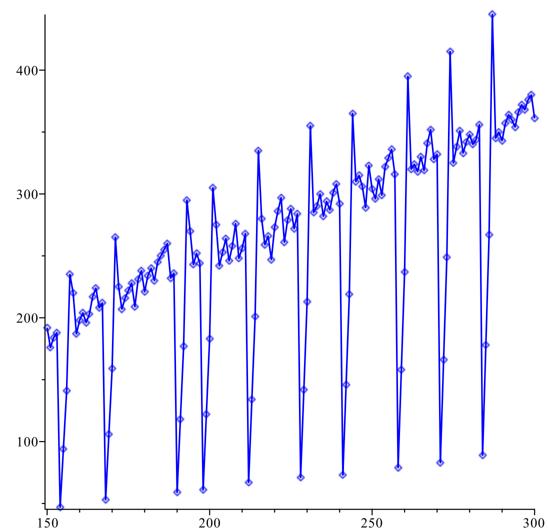


Figura 1.4: Los términos del 150 al 300 de la sucesión A064418, representados por puntos. Puntos sucesivos unidos.

Capítulo 2

La permutación de Yellowstone

La sucesión de Yellowstone se debe a Reinhard Zumkeller, que la definió en 2004. La podemos encontrar en la Enciclopedia Online de Sucesiones Enteras [15] con el código A098550. Durante este capítulo la denotaremos por $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 2.1. Se define como sigue: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, y para cada $n \geq 4$, el término y_n es el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión, que tiene un factor común con y_{n-2} y que es coprimo con y_{n-1}.

La definición de la sucesión es aparentemente sencilla. Sin embargo, es objeto de estudio a día de hoy. Ha dado lugar a diversos resultados de teoría de números, que aunque no sean el objetivo de este trabajo, el lector puede consultarlos en [1]. Como veremos más adelante, el gráfico de esta sucesión es ciertamente peculiar. Consiste en series de números pares e impares alternos, interrumpidos por pequeños picos hacia abajo seguidos por picos más largos hacia arriba, recordando a los géiseres en el Parque Nacional de Yellowstone.

Nótese que la sucesión de Yellowstone se define de manera similar a la sucesión EKG A064413, sin embargo, esta última sucesión es realmente más compleja.

2.1. Todo número natural aparece en la sucesión

Al igual que la sucesión EKG, la sucesión de Yellowstone es también una permutación de los números naturales. De la definición se deduce directamente la inyectividad de la sucesión. No obstante, la sobreyectividad no es trivial, por lo que será necesario estudiar en profundidad el comportamiento de los números primos para con los elementos de esta sucesión, como por ejemplo cuántos términos divisibles por un primo p podemos encontrar ó directamente si todo primo p aparece en la sucesión y, si es así, cómo se distribuyen los primos en esta.

Teorema 2.2. *La sucesión de Yellowstone es una permutación de los números naturales.*

Demostración. En primer lugar, observemos que por construcción no puede haber números repetidos, luego basta probar que todo número natural aparece en la sucesión. Desglosaremos la demostración en seis pasos:

(1) La sucesión es infinita. Supongamos que nos encontramos en el término y_{n-1}. El término y_n ha de ser coprimo con y_{n-1} y verificar que $mcd(y_n, y_{n-2}) > 1$. Basta tomar un número primo

p que no divida a los términos $y_1, ..., y_{n-1}$. Entonces, el número py_{n-2} es candidato a ser el nuevo término y_n. Esto es porque y_{n-1} era coprimo con y_{n-2} y si p no divide a y_{n-1} entonces es claro que py_{n-2} es coprimo con y_{n-1} y tiene algún factor en común con y_{n-2}. Además, la condición de que p no divida a los términos $y_1, ..., y_{n-1}$ asegura que py_{n-2} aún no ha aparecido en la sucesión.

(2) El conjunto de números primos que dividen los términos de la sucesión es infinito. Supongamos que no es así. Entonces existe un primo p de modo que cada término de la sucesión es producto de primos menores que p. Ahora bien, por el apartado previo podemos tomar m suficientemente grande de modo que $y_m > p^2$ y un primo q que divida los términos y_{m-2} y y_m. Dado que $q < p$, se tiene que $qp < p^2 < y_m$, por lo que qp era un mejor candidato para y_m.

(3) Para cada primo p existe un término divisible por p. De nuevo razonemos por reducción al absurdo. Sea p primo tal que ningún término de la sucesión es divisible por p. Entonces ningún primo $q > p$ podría dividir a ningún término de la sucesión, ya que si lo hiciese bastaría tomar $y_j = kq$ el primer múltiplo del primo q que aparece en la sucesión y darse cuenta de que $y_j = kp$ es un mejor candidato para el término j-ésimo. En consecuencia, cada divisor primo es menor que p en contra del apartado (2).

(4) Cada primo p divide infinitos términos de la sucesión. Una vez más, supongamos que no es así. Entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, el término y_n no es divisible por p. Si a partir del término y_{n_0} el primo p no divide a ningún elemento de la sucesión, entonces ninguna de sus potencias tampoco y por tanto podemos tomar un j suficientemente grande, de modo que p^j no divide a ningún término de la sucesión. Sea $q > p^j$ un primo que no divide a ninguno de los términos $y_1, ..., y_{n_0}$. Por el apartado (3) existe un término de la sucesión divisible por q. Sea $y_m = tq$ el primer elemento con esa propiedad. Tenemos entonces que $tp^j < tq$, por lo que tp^j es un mejor candidato para y_m, llegando así a una contradicción.

(5) Todo número primo p aparece en la sucesión. Si no fuese así, por el apartado (1) podemos tomar un $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $y_n > p$ para todo $n \geq n_0$. Por el apartado (4) existe un término y_k divisible por p con $k \geq n_0$. Finalmente tenemos que $y_{k+2} = p$ por la construcción de la sucesión.

(6) Todo número natural aparece en la sucesión. Supongamos que falta algún número natural. Denotemos por k al menor de todos ellos. Ahora elijamos un n_0 verificando que los números $1, 2, ..., k-1$ han aparecido a lo largo de los términos $\{y_1, ..., y_{n_0}\}$. Sea p un primo que divide a k, entonces por (4) p divide infinitos términos de la sucesión y en consecuencia podemos tomar un índice $n_1 > n_0$ tal que y_{n_1} y k tienen un factor en común. Necesariamente se tiene que para todo $n \geq n_1$, el término y_n y el número natural k no son coprimos, pues si no fuese así habría un índice $j \geq n_1$ de modo que y_j y k no serían coprimos pero y_{j+1} y k sí que lo serían, y entonces k sería el menor número que aún no ha salido en la sucesión verificando las condiciones sobre el máximo común divisor, es decir, $y_{j+2} = k$. Por lo tanto, estábamos en lo cierto al decir que para todo $n \geq n_1$, el término y_n y el número natural k no son coprimos. Pero esto es imposible, pues el apartado (5) nos dice que hay infinitos primos en la sucesión. □

El artículo donde hallamos esta demostración es relativamente reciente (2015). Sin embargo, aún hay conjeturas sobre la sucesión de Yellowstone.

Conjetura 2.3. Para cada número natural n se tiene que,

$$\frac{y_n}{n} \leq \frac{\pi}{2} \cdot log(n).$$

Esta cota muestra que podemos controlar el cociente de los términos de la sucesión entre su índice de manera logarítmica. Se sabe que al menos los primeros 250000 términos la cumplen.

Conjetura 2.4. Los números primos aparecen en su orden natural.

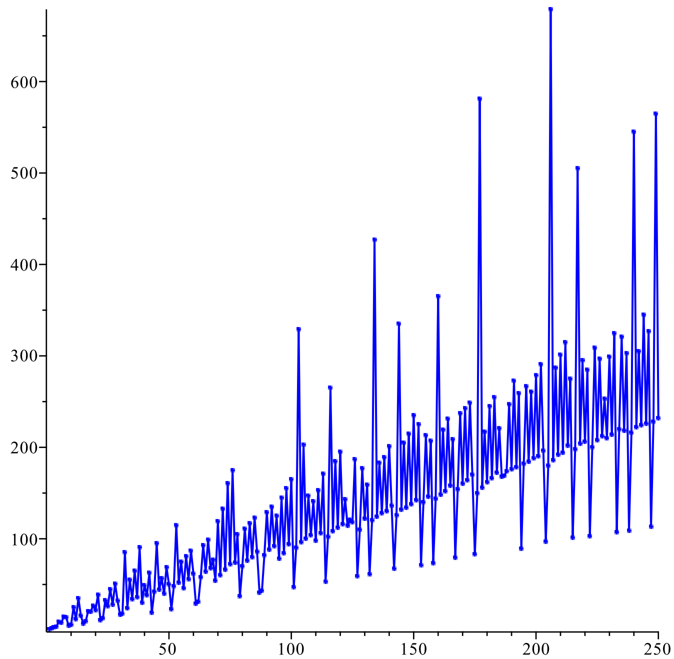


Figura 2.1: Los primeros 250 términos, representados por puntos. Puntos sucesivos unidos. Los números primos corresponden a los "picos" hacia abajo. Obsérvense los géiseres ó picos hacia arriba.

Nota. La demostración del teorema 2.2 se puede ajustar para demostrar que otras sucesiones son también una permutación de los números naturales. Si Ω es un conjunto de enteros positivos suficientemente grande, y definimos una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ especificando que ciertos elementos de Ω deben aparecer al principio de la sucesión (incluyendo el 1 si $1 \in \Omega$), y elegimos $c_n \in \Omega$ como el menor número que aún no ha aparecido en la sucesión de modo que $mcd(c_n, c_{n-2}) > 1$ y $mcd(c_{n-1}, c_n) = 1$, entonces la sucesión resultante es una permutación de Ω.

Nota. En la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pueden aparecer números primos consecutivos. Por ejemplo, $y_{61} = 29$, $y_{62} = 31$. Este suceso es ciertamente extraño y obviamente nunca pueden aparecer tres números primos consecutivos como se muestra a continuación.

Teorema 2.5. *No pueden aparecer tres números primos consecutivos en la sucesión.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Sean p, q y r números primos tales que $y_{n-1} = q$, $y_n = p$ y $y_{n+1} = r$. Por definición y_{n-1} y y_{n+1} comparten al menos un factor. Como ambos son primos llegamos a un absurdo, luego al menos un tercio de los términos de la sucesión son compuestos. $\square$

2.2. Alternancia entre números pares e impares

Como se menciona en [1], se han estudiado los primeros 100 millones de términos de la sucesión. Gracias a ello, se tiene una idea general de cómo crece la sucesión. No obstante, aún no se han obtenido pruebas para lo que veremos a continuación. Las siguientes afirmaciones son fruto de observaciones empíricas.

Conjetura 2.6. La sucesión alterna entre números pares y números impares compuestos. Si dicha alternancia es interrumpida, entonces aparecen cinco términos sucesivos de la forma

$$2p,\ 2i+1,\ p,\ 2j,\ \kappa p, \tag{2.1}$$

donde p es un primo impar, i y j son enteros, y $\kappa < p$ es el menor primo impar que no divide a j. Los términos de la forma κp son los "géiseres".

Ejemplo 2.7. Tenemos los términos: $y_{60} = 62$, $y_{61} = 29$, $y_{62} = 31$, $y_{63} = 58$ y $y_{64} = 93$. Efectivamente tenemos la estructura $2p$, $2i+1$, p, $2j$, κp para los valores: $2p = 62$, $i = 14$, $p = 31$, $j = 29$ y $\kappa = 3$.

Nota. La primera vez que se interrumpe la alternancia entre números pares e impares ocurre en el término $y_{22} = 11$, al cual lo precede el término $y_{21} = 39$, que también es impar. En este caso no se verifica la conjetura. Tenemos $2p$, $2i+1$, p, κp con los valores $2p = 22$, $i = 19$, $p = 11$ y $\kappa = 3$. No obstante, al término $y_{22} = 11$ lo sigue el término $y_{23} = 13$, que no es de la forma $2j$ para ningún j entero. Sin embargo, si tomamos el menor primo impar que no divide a 13, obtenemos $\kappa = 3$ y en consecuencia $y_{24} = 33 = \kappa p$, y de hecho el número 33 sí se corresponde con el término y_{24}. Más aún, el término correspondiente al $2j$ es el primo 13 y dos posiciones más adelante aparece su doble, 26, en vez de salir 26 en primer lugar y 13 dos posiciones más adelante como dice la conjetura 2.6. Parece que la estructura se invierte cuando hay dos primos consecutivos en la sucesión, en este caso 11 y 13.

Ejemplo 2.8. Los primeros términos de la sucesión son

1	2	3	4	9	8	15	14	5	6	25	12
35	16	7	10	21	20	27	22	39	11	13	33
26	45	28	51	32	17	18	85	24	55	34	65 ...

Obsérvese la alternancia entre números pares e impares. De los términos $y_8 = 14$ al $y_{12} = 12$ no encontramos la estructura 2.1. Esto puede ser porque la alternancia entre pares e impares no es interrumpida.

Como podemos observar en [1], en el término a_{213} la estructura de la conjetura vuelve a aparecer. Si suponemos que a partir de este término la conjetura 2.6 es cierta, tendríamos que del término a_{213} en adelante, los términos pares y aquellos términos compuestos e impares, que no son de la forma κp para ningún primo impar κ, se alternan, excepto cuando un término par es dos veces un primo.
Además, entre los términos a_{213} y a_n, aparece la estructura 2.1 alrededor de λ veces, donde λ es el número de términos entre el a_{213} y el a_n que son el doble de un primo. Se estima que λ es aproximadamente $\pi(y_n/2)$, donde $\pi(x)$ denota el número de primos menores o iguales que x.

2.3. Sucesiones similares

En la Enciclopedia Online de Sucesiones Enteras [15] llama especialmente la atención la sucesión A252865. Su autor es Franklin T. Adamas-Watters, que la publicó el 23 de diciembre de 2014.

Definición 2.9. La sucesión se define de la manera siguiente: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$, y para cada $n > 3$ natural, el término a_n es el menor número que aún no ha aparecido en la sucesión, que tiene al menos un factor en común con el término a_{n-2}, que es coprimo con el término a_{n-1} y que además es producto de números primos distintos.

Es decir, la sucesión A252865 se define de forma idéntica a la sucesión A098550, con la condición a mayores de que el número en cuestión ha de ser producto de primos distintos. Observemos que a raíz de la definición, es inmediato concluir que no es una biyección entre los números naturales.

Ejemplo 2.10. Los primeros términos de la sucesión son

1	2	3	10	21	5	6	35	22	7	11	14
33	26	15	13	30	91	34	39	17	42	85	38
51	19	66	95	46	55	23	65	69	70	57	58 ...

Observemos que los números primos van a aparecer en orden creciente. Más aún, en los índices 2, 10, 38, 50 y 56 aparecen dos primos consecutivos, concretamente los primos (2,3) , (7,11), (29,31), (41,43) y (47,53) respectivamente. Se conjetura que esos son los únicos índices en los que aparecen dos primos consecutivos.

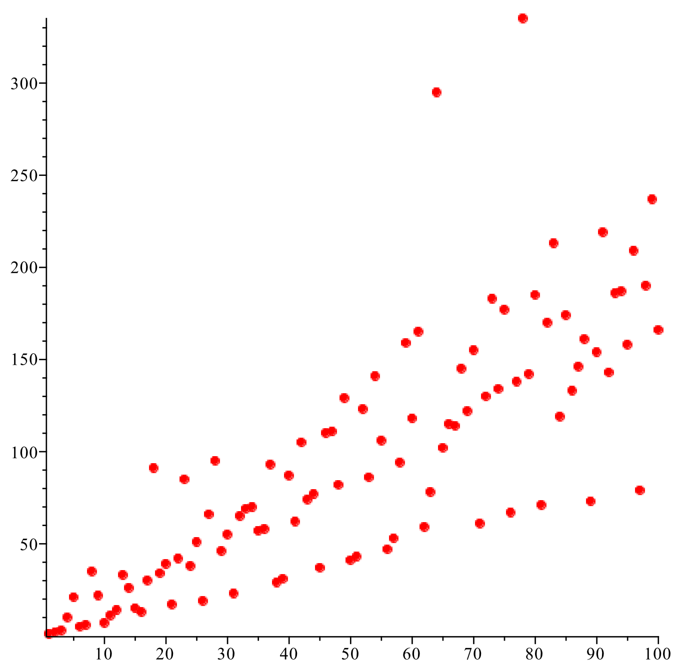


Figura 2.2: Los primeros 100 términos, representados por puntos. Puntos sucesivos no unidos.

En 2004, Reinhard Zumkeller definió la siguiente sucesión:

Definición 2.11. Para cada número natural $n \leq 3$, se tiene que $a_n = n$. Si $n > 3$, el término a_n es el menor número natural que es mayor que a_{n-1}, que tiene algún factor en común con a_{n-2} y que es coprimo con a_{n-1}.

La condición de que el nuevo término sea el menor número natural que a su vez es mayor que el término previo, hace que la sucesión tenga un crecimiento lineal, como se observa en el gráfico 2.3.

Podemos encontrar esta sucesión en [15] con el código A098548. Hay ciertos comentarios realmente interesantes pero que no demostraremos, como que el término a_n es par si y sólo si n es par o que para todo $n \geq 1$ se tiene que $a_{2n} = a_{2n-1} + 1$.

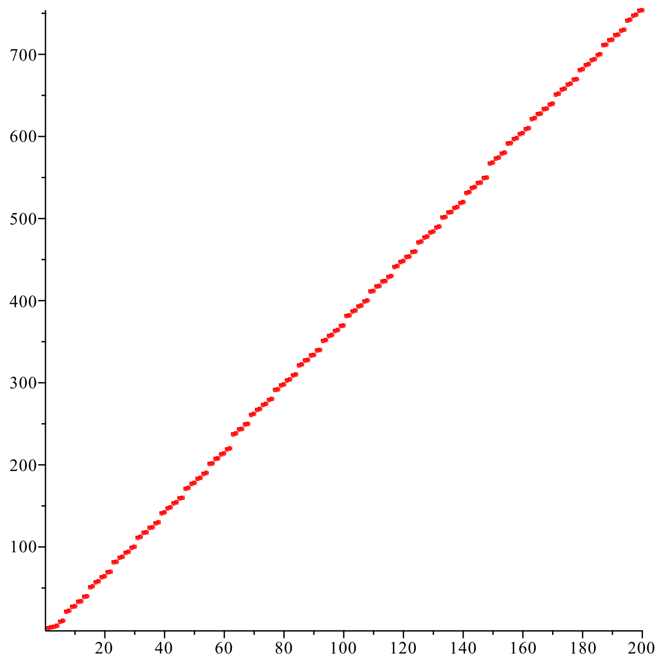


Figura 2.3: Los primeros 200 términos, representados por puntos.

Cuadro 2.1: Primeros 50 términos de la sucesión: $a(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 4$ y $1 \leq j \leq 10$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	3	4	9	10	21	22	27	28
1	33	34	39	40	51	52	57	58	63	64
2	69	70	81	82	87	88	93	94	99	100
3	111	112	117	118	123	124	129	130	141	142
4	147	148	153	154	159	160	171	172	177	178

Capítulo 3

Otras permutaciones de $\mathbb{N}$ basadas en el mcd

En este capítulo hablaremos sobre varias sucesiones de las cuáles apenas se sabe nada. Algunas son una permutación de los números naturales, de otras se conjetura que lo son e incluso algunas se cree que no lo son.

3.1. Dos permutaciones de $\mathbb{N}$ tales que $mcd(a_n, a_{n-1}) = 1$

La primera que comentaremos es la sucesión A093714. Su autor es Reinhard Zumkeller y fue publicada en 2004.

Definición 3.1. Empezamos con $a_1 = 1$, y para cada número natural $n \geq 2$, definimos el término a_n como el menor número coprimo con a_{n-1}, distinto a $a_{n-1} + 1$ y que aún no ha aparecido en la sucesión.

Nota. Nótese que la condición de que el término a_n sea distinto del término $a_{n-1}+1$ es fundamental, ya que si la omitimos obtendríamos como sucesión los números naturales.

Observemos los primeros términos de la sucesión en la siguiente tabla:

Cuadro 3.1: Primeros 60 términos de la sucesión: $a(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	3	2	5	4	7	6	11	8	13
1	9	14	17	10	19	12	23	15	22	21
2	16	25	18	29	20	27	26	31	24	35
3	32	37	28	33	38	41	30	43	34	39
4	44	47	36	49	40	51	46	45	52	55
5	42	53	48	59	50	57	56	61	54	65

En primer lugar, presentamos un lema fundamental que conecta de algún modo los números primos con la sucesión.

Lema 3.2. *Para todo primo p existe un índice n tal que p divide a a_n.*

Demostración. En primer lugar observemos que la sucesión es infinita, ya que si estamos en el término a_m, basta tomar un número primo q que sea distinto del término $a_m + 1$.
Razonemos ahora por reducción al absurdo. Supongamos que existe un primo p que no divide a ningún término de la sucesión. Como la sucesión es infinita, existe un n_0 natural de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $a_n > p^2$. Pero entonces p es el próximo término ya que es coprimo con el anterior. Llegamos entonces a una contradicción. □

Con este primer resultado queda claro que los números primos tienen una relación con los términos de la sucesión. Profundizaremos más en esta propiedad, mostrando que no sólo hay un término de la sucesión divisible para cada primo, sino que de hecho hay infinitos.

Lema 3.3. *Cada número primo p divide infinitos términos a_n de la sucesión.*

Demostración. Supongamos que no es así. En particular a partir de un momento las potencias de p no pueden aparecer más en la sucesión. Tomemos un número i natural tal que p^i es una potencia de p mayor que las que ya han aparecido en la sucesión. Como tenemos infinitos términos en la sucesión y hay una cantidad finita de ellos divisibles por p, existe un índice k tal que $a_k > p^i$ y a_k no tiene a p como factor. Entonces p^i es un candidato a ser el próximo término, llegando a una contradicción. □

Una vez que hemos visto que cada primo p divide infinitos términos a_n, resulta natural ver si todo primo aparece en la sucesión. El siguiente lema confirma que efectivamente cualquier primo aparece en algún momento en la sucesión.

Lema 3.4. *Todo número primo p aparece en la sucesión.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea p un primo que no aparece en la sucesión. Por el lema previo, hay infinitos términos divisibles por p, pongamos que $a_j = lp$. Por definición a_j es coprimo con a_{j-1}, luego p también, y como p es menor que $a_j = lp$, el primo p es un mejor candidato para el término a_j. □

Con los lemas anteriores hemos conseguido una base sólida sobre el comportamiento de los primos en esta sucesión. Aprovecharemos lo que sabemos para demostrar el siguiente resultado, que es la característica principal de esta sucesión.

Teorema 3.5. *La sucesión es una biyección de los números naturales.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Sea k el primer número natural que no aparece en la sucesión. Por el lema previo todo número primo aparece en la sucesión, luego podemos tomar un primo $a_n = p$ que no divida a k y sea suficientemente grande para que de ese modo se tenga que $a_{n+1} = k$. □

A continuación mencionaremos algunas conjeturas sobre esta sucesión, que surgen del análisis y pruebas empíricas de la misma. Estas propuestas nos invitan a reflexionar más profundamente sobre el comportamiento de los números primos y la posición relativa de los términos.

Conjetura 3.6. Sea p un número primo mayor que 2. Entonces $p - 1$ aparece después de p.

La conjetura previa sugiere una relación entre un primo p y el número anterior $p - 1$ realmente sorprendente a vista de la definición de la sucesión.

Conjetura 3.7. Si p es primo, el primer término divisible por p que aparece en la sucesión es él mismo.

Esta segunda conjetura remarca la idea de que el primer múltiplo de un primo p que aparece en la sucesión, es el propio primo p.

Conjetura 3.8. Supongamos que p es un primo mayor ó igual que 5. Si $a_n = p$ entonces $n < p$.

Este último enunciado muestra una cota para la posición que toma un primo p en la sucesión con su valor. Podría resultar interesante para estudiar la distribución de los números primos en esta sucesión.
El siguiente gráfico muestra los primeros 400 términos de la sucesión definida de manera recursiva. La definición de la sucesión se refleja en cierto modo en él. Se puede intuir que se va incluyendo cada número natural, sin repeticiones. El crecimiento de la sucesión parece seguir un orden, lo cuál refuerza la idea de que la sucesión es una biyección entre los números naturales.

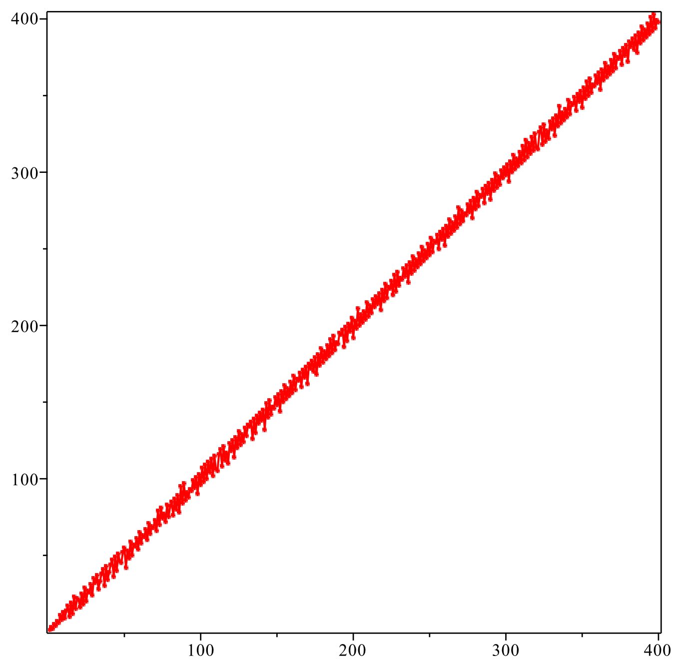


Figura 3.1: Los primeros 400 términos de la sucesión A093714

∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼

En contraste con la sucesión presentada previamente, Scott R. Shannon introdujo una variante sutil, pero que genera ciertas diferencias en la evolución de la sucesión manteniendo la esencia de la definición original. Podemos encontrarla en [15] con el código A352588. Mantendremos la misma definición por recursividad de la sucesión anterior, con la diferencia de que el segundo término es $c_2 = 2$.

Definición 3.9. Definimos la sucesión de la siguiente manera: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y para cada n mayor que 2, el término c_n es el menor número natural coprimo con c_{n-1} que aún no ha aparecido en la sucesión y que es distinto de $c_{n-1} + 1$.

La tabla siguiente muestra los primeros 60 términos de la sucesión mediante la aplicación directa de la definición a partir del tercer término.

Cuadro 3.2: Primeros 60 términos de la sucesión: $c(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	5	3	7	4	9	8	11	6
1	13	10	17	12	19	14	23	15	22	21
2	16	25	18	29	20	27	26	31	24	35
3	32	37	28	33	38	41	30	43	34	39
4	44	47	36	49	40	51	46	45	52	55
5	42	53	48	59	50	57	56	61	54	65

Un cambio en la definición que a priori no sabemos cómo puede afectar a la sucesión resulta en que para cada $n \geq 17$, los términos de ambas sucesiones coinciden, según Scott R. Shannon. Evidentemente esta sucesión también es una permutación de los números naturales y la demostración es idéntica a la del teorema 3.5.

3.2. Dos sucesiones que dependen de $mcd(a_n, a_{n-2})$

Presentamos a continuación otra sucesión realmente interesante, introducida por Leroy Quet. La podemos encontrar con el código A121216, aunque ciertamente se sabe muy poco de ella.

Definición 3.10. Definamos la siguiente sucesión: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ y para cada n mayor que 2, el término b_n es el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión y que es coprimo con b_{n-2}.

La principal peculiaridad que esta sucesión posee es la condición de coprimalidad entre el término siguiente y el término que se encuentra dos posiciones atrás. Al elegir siempre el menor número que aún no ha aparecido en la sucesión ya nos aseguramos la inyectividad de la sucesión. Como veremos más adelante, la condición de coprimalidad junto a la de que el número siguiente debe ser el menor que lo cumple, asegura un crecimiento gradual de la sucesión. En otras palabras, podríamos tener también el carácter sobreyectivo. Para demostrar que es una permutación seguiremos un esquema similar al de la sucesión A093714.
Primero probaremos que todo primo influye en cierta manera en la sucesión.

Lema 3.11. *Para todo primo p existe un índice n tal que p divide a b_n.*

Demostración. Supongamos que no es así. Tenemos entonces que existe un primo p que no divide a ningún término de la sucesión. Podemos tomar n suficientemente grande de modo que $b_{n-1} > p^2$ y $b_n > p^2$. Entonces p es candidato a ser b_{n+1} pues es coprimo con b_{n-1} y no ha aparecido antes. Absurdo. □

Una vez que hemos visto que todos los números primos influyen directamente en los términos de la sucesión, cabe preguntarse en qué magnitud lo hacen.

Lema 3.12. *Cada número primo p divide infinitos términos b_n de la sucesión.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Sea p un primo que divide a un número finito de términos de la sucesión. Tomemos un entero i de modo que p^i es una potencia de p mayor que todas las que ya han aparecido en la sucesión. Elegimos m suficientemente grande de modo que $b_m > p^i$. Además, como p divide a un número finito de términos de la sucesión, podemos tomar m cumpliendo además que $mcd(b_m, p^i) = 1$. Es decir, p^i es un candidato para el término b_{m+2}. Luego hay infinitas potencias de p en la sucesión. □

Lema 3.13. *Todo número primo p aparece en la sucesión.*

Demostración. Si no fuese así, basta tomar p el primer primo que no aparece en la sucesión. Entonces por el lema previo hay infinitos términos divisibles por p. Elegimos $b_k = lp$. El término b_k es entonces el menor número coprimo con b_{k-2} que aún no ha salido en la sucesión, lo cual es absurdo ya que entonces p también es coprimo con b_{k-2} y al ser menor que $b_k = lp$ lo convierte en un candidato mejor para el término k-ésimo. □

Ahora que ya hemos estudiado el comportamiento de los números primos en la sucesión, estamos en condiciones de demostrar que estamos ante una biyección.

Teorema 3.14. *La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una permutación de los números naturales.*

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Sea m el primero número natural que falta en la sucesión. Como todo número primo aparece en la sucesión, existe n tal que $b_n = q$ donde q es un primo tal que $mcd(q, m) = 1$. Entonces $b_{n+2} = m$, llegando así a una contradicción. □

Cuadro 3.3: Primeros 60 términos de la sucesión: $b(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	3	5	4	6	7	11	8	9
1	13	10	12	17	19	14	15	23	16	18
2	21	25	20	22	27	29	26	24	31	35
3	28	32	33	37	34	30	39	41	38	36
4	43	47	40	42	49	53	44	45	51	46
5	50	55	57	48	52	59	61	54	56	65

En el siguiente gráfico se muestran los primeros 250 términos. Observamos un crecimiento quasi-lineal en la sucesión y que además, la sucesión no tiende a dejar huecos entre términos, incorporando así todos los números naturales progresivamente.

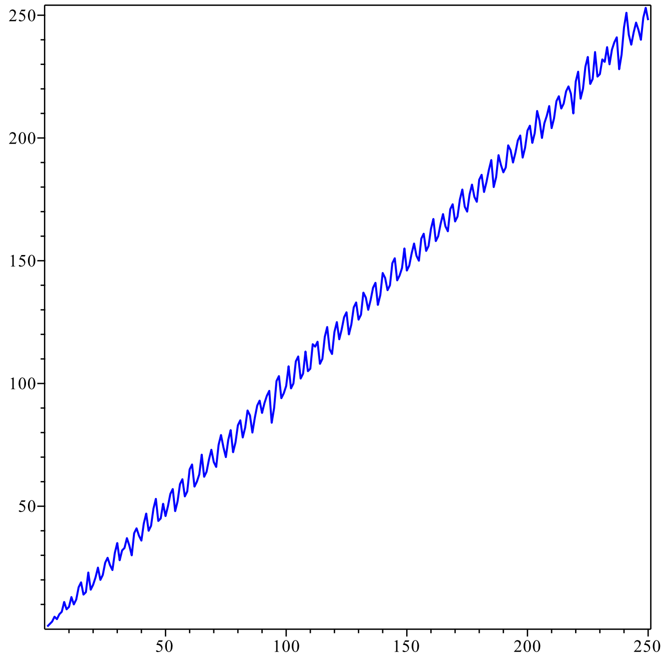


Figura 3.2: Los primeros 250 términos de la sucesión A121216. Observemos el crecimiento lineal de la sucesión.

∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼

Como hemos visto en el teorema previo, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una biyección. Nos preguntamos ahora a dónde podemos llegar ó qué ocurre si invertimos la condición de coprimalidad presente en la sucesión anterior. El planteamiento de esta cuestión da lugar a la sucesión A121217, que definimos a continuación.

Definición 3.15. Construimos la sucesión por recurrencia como sigue: $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $h_3 = 3$ y para cada $n > 3$, el término h_n es el menor número natural que no ha aparecido antes en la sucesión y tal que $mcd(h_n, h_{n-2}) > 1$.

A pesar de que la definición es similar a la de la sucesión A121216 la cual sí podemos afirmar que es una permutación, esta nueva sucesión se cree que podría serlo. Seguramente dada la similitud entre las definiciones de esta sucesión y la sucesión EKG, la prueba del teorema 1.14 se pueda adaptar para esta sucesión. El gráfico 3.3 nos podría dar una idea de por qué puede ser sobreyectiva. Evidentemente la inyectividad está garantizada por la definición de la propia sucesión. Observemos que en este caso los primos no son buenos candidatos. En la sucesión anterior podíamos observar cómo los primos aparecían de manera más o menos frecuente debido a la condición de coprimalidad que habíamos impuesto. Sin embargo, al invertir esta condición, la frecuencia con la que los primos aparecen disminuye. Es más, para que un término h_n sea primo, es necesario que el término h_{n-2} sea múltiplo de ese primo.

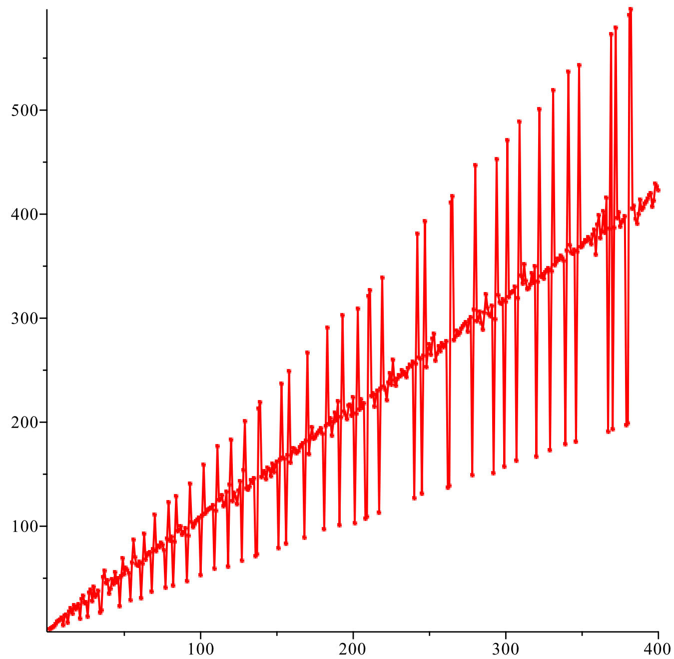


Figura 3.3: Los primeros 400 términos de la sucesión A121217

Llama especialmente la atención que la figura anterior es muy similar a la de la sucesión EKG, vista en el capítulo 1, la cual recordemos que sí es una biyección. En el gráfico apreciamos también que al seleccionar el menor número natural que cumple una serie de condiciones, el crecimiento de la sucesión es muy lento, recogiendo aparentemente a todos los números naturales.

3.3. Las sucesiones A084937 y A251622

Hay infinitas posibilidades para definir sucesiones. Algunas más interesantes que otras. Reinhard Zumkeller publicó en 2013 una sucesión que a pesar de su simple definición, tiene cierto protagonismo en este capítulo. Podemos encontrarla en la OEIS por el código A084937.

Definición 3.16. Sea la sucesión definida de la siguiente forma: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ y para cada $n > 2$, el término t_n es el menor número coprimo con los dos anteriores. Es decir, $mcd(t_n, t_{n-1}) = mcd(t_n, t_{n-2}) = 1$.

Una alternativa a la hora de definir esta sucesión es la siguiente: De entre todas las sucesiones posibles que cumplen que el siguiente término es coprimo con los dos anteriores, esta es la más temprana lexicográficamente. Es decir, dadas dos sucesiones que cumplen la condición de coprimalidad de la definición previa, tenemos que comparar ambas sucesiones término a término. La que primero presente un término menor, será la considerada "más temprana lexicográficamente".

Al observar los datos de la sucesión en diversos experimentos empíricos, se aprecia que para aquellos valores del índice n con resto igual a 2 al dividirlo entre 3, los valores que toman los términos t_n son aproximados a $2n/3$. Es decir, si $n \equiv 2 \pmod 3$ entonces $t_n \approx 2n/3$. Para los demás casos

$t_n \approx 4n/3$. Para vislumbrar estas afirmaciones empíricas, el lector puede apoyarse en el gráfico y tabla siguientes.

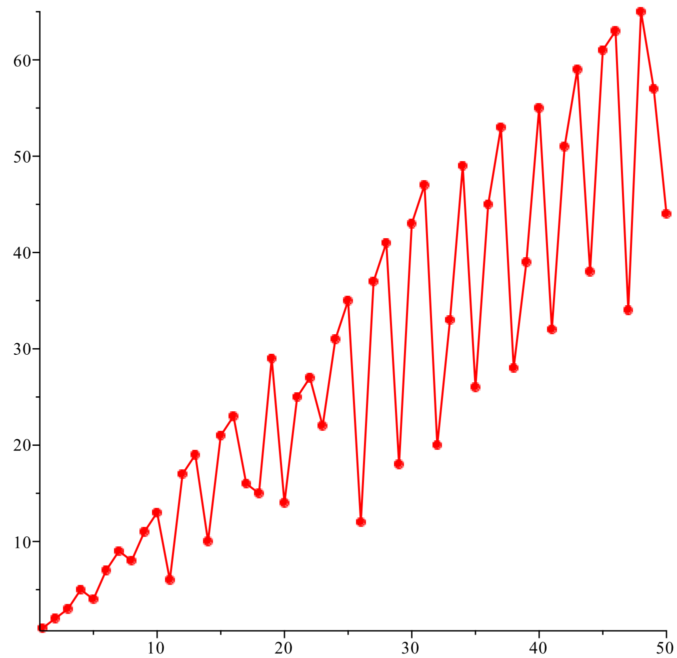


Figura 3.4: Gráfico de los primeros términos de la sucesión A084937

Cuadro 3.4: Primeros 60 términos de la sucesión: $t(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 10$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	3	5	4	7	9	8	11	13
1	6	17	19	10	21	23	16	15	29	14
2	25	27	22	31	35	12	37	41	18	43
3	47	20	33	49	26	45	53	28	39	55
4	32	51	59	38	61	63	34	65	57	44
5	67	69	40	71	73	24	77	79	30	83

Nótese la frecuencia con la que aparecen los números primos en esta sucesión. Al imponer que el próximo término sea coprimo con los dos anteriores, los mejores candidatos siempre serán números primos. En consecuencia, la sucesión es infinita pues hay infinitos números primos a ser candidatos al próximo término. También se deduce directamente de la definición que no pueden aparecer dos términos pares consecutivos. Más aún, el patrón“impar-par-impar-par...”tampoco es posible, luego necesariamente siempre aparecen dos términos impares consecutivos como mínimo. De hecho, parece que la sucesión sigue el patrón “impar-impar-par”. Esto es porque los números pares en general no son buenos candidatos a ser el próximo término, pues estamos bajo condiciones de coprimalidad, lo que implica que dado un término par, el siguiente ha de ser impar. En cambio, dado un número impar, el siguiente sí podría ser impar y verificar la condición de la definición. Sucede que al ir utilizando los números impares con mayor frecuencia, los números pares más pequeños se quedan rezagados, convirtiéndose en los menores enteros positivos que aún no han aparecido. Es por eso que después de dos términos impares consecutivos, el siguiente será par con alta probabilidad. Este suceso se observa claramente en el gráfico. La sucesión únicamente crece mediante términos impares, que se corresponden con los picos altos del gráfico. Mientras que los picos bajos se corresponden con términos pares. Dicho de otra forma, si construimos las sucesiones de términos pares e impares de la sucesión original, observamos que la de los términos impares crece más rápido que la de los pares.

$\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim$

En oposición a la sucesión previa, podemos pensar en construir los siguientes términos eligiendo el menor número natural que aún no ha aparecido pero que comparte un factor con alguno de los dos términos previos. Definimos la sucesión A251622 a continuación.

Definición 3.17. En primer lugar fijamos $v_1 = 1$ y $v_2 = 2$. Para cada $n > 2$, el término v_n es el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión y tal que $mcd(v_n, v_{n-1} \cdot v_{n-2}) > 1$.

Nota. La condición impuesta sobre el término v_n para $n > 2$ se traduce en que v_n ha de compartir algún factor con v_{n-1} o v_{n-2}.

Dada la similitud con la definición de la sucesión EKG 1, seguramente sea posible adaptar la demostración de que es una permutación de los números naturales para esta nueva sucesión. Nótese que los números primos no son buenos candidatos en general. Al contrario de lo que ocurría en la sucesión anterior, buscamos enteros positivos que no sean coprimos con alguno de los dos términos previos. Es por esto que cuando aparece el múltiplo de un primo impar, el próximo término es el propio primo con bastante probabilidad. De hecho, los picos hacia abajo del gráfico corresponden precisamente con los primos, pues a medida que crece la sucesión, la cantidad de números primos utilizados no aumenta hasta que aparece un múltiplo suyo. A continuación mostramos una tabla con los primeros términos así como el gráfico.

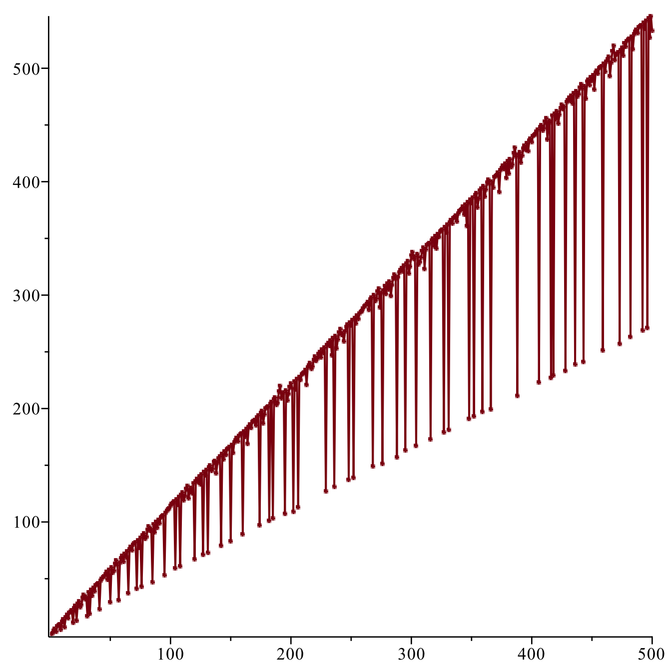


Figura 3.5: Primeros 500 términos de la sucesión A251622

Cuadro 3.5: Primeros 60 términos de la sucesión: $v(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 10$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	6	3	8	9	10	5	12
1	14	7	16	18	15	20	21	22	11	24
2	26	13	28	30	25	27	33	36	32	34
3	17	38	19	40	35	42	39	44	45	46
4	23	48	50	51	52	54	56	49	58	29
5	60	55	57	63	66	62	31	64	68	70

3.4. Un par de permutaciones de $\mathbb{N}$

Estudiaremos a continuación dos sucesiones cuya definición viene dada por condiciones impuestas sobre el máximo común divisor de tres términos consecutivos. La primera de ellas es la sucesión A280985, introducida en 2017 por Rémy Sigrist.

Definición 3.18. La sucesión se define de la siguiente manera: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ y para cada $n > 2$, el término d_n es el menor entero positivo que aún no ha aparecido en la sucesión de modo que d_n comparte algún factor con el término previo, el término siguiente o ambos términos simultáneamente.

Una alternativa de construir esta sucesión es la siguiente:
Comenzamos con $d_1 = 1$ y $d_2 = 2$. Para $n > 2$, el término d_n es el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión y tal que si d_{n-1} ya comparte un factor con d_{n-2}, entonces d_n es simplemente el menor natural que no ha aparecido en la sucesión. Si en cambio d_{n-1} no comparte un factor con d_{n-2}, entonces d_n ha de ser el menor natural que aún no ha aparecido en la sucesión y que comparte un factor con d_{n-1}.

Nota. Observemos que se verifica la relación $mcd(d_n, d_{n-1}) \cdot mcd(d_n, d_{n+1}) > 1$.

Recordemos que en la sucesión EKG A064413, pedíamos que el próximo término tuviese al menos un factor común con el anterior. Este caso es similar, estamos imponiendo que los términos de la sucesión compartan al menos un factor con el término previo ó con el próximo. De hecho, veremos que esta sucesión es una permutación de los números naturales.
En primer lugar, mostramos como de costumbre, una tabla con los primeros términos de la sucesión.

Cuadro 3.6: Primeros 80 términos de la sucesión: $d(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 7$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	3	6	5	10	7	14	8
1	9	12	11	22	13	26	15	18	16	17
2	34	19	38	20	21	24	23	46	25	30
3	27	28	32	29	58	31	62	33	36	35
4	40	37	74	39	42	41	82	43	86	44
5	45	48	47	94	49	56	50	51	54	52
6	53	106	55	60	57	59	118	61	122	63
7	66	64	65	70	67	134	68	69	72	71

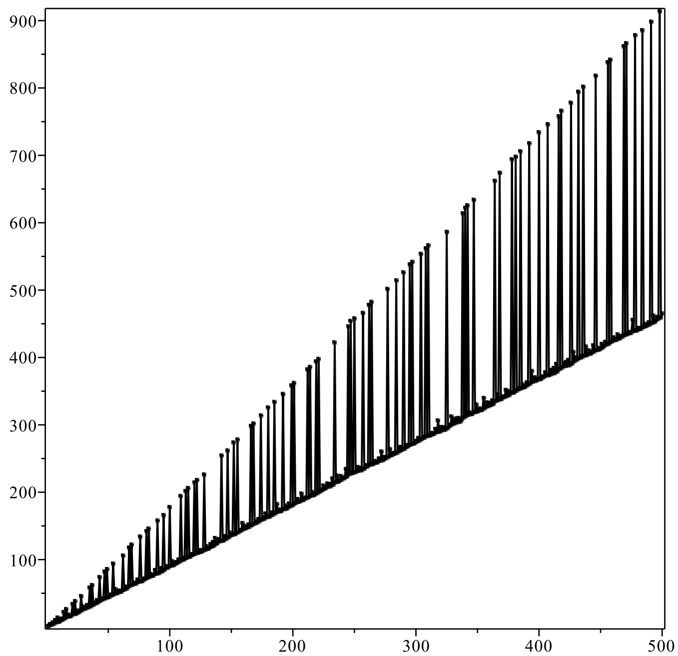


Figura 3.6: Gráfico de la sucesión A280985

Analizando los primeros términos de la sucesión nos dimos cuenta de lo siguiente:

Conjetura 3.19. No puede aparecer un múltiplo de un primo antes que el propio primo.

Esto es porque a la hora de elegir el siguiente término puede ocurrir lo siguiente:

- Los dos términos anteriores ya comparten un factor, en cuyo caso el primo es mejor candidato que su múltiplo por ser menor.
- Los dos términos anteriores no comparten un factor, entonces el siguiente término sí comparte factor con el previo por definición. Si el término anterior era divisible por p, entonces p era un mejor candidato (invertimos el orden de p con su múltiplo).

Desgraciadamente no hemos conseguido llegar a una conclusión clara cuando el término anterior no es divisible por p, por lo que de momento la afirmación previa se mantiene como conjetura.

Aún así, observemos que en caso de ser cierta, tendríamos lo siguiente:

Cuando aparece un primo en la sucesión, necesariamente los dos términos previos comparten un factor. De no ser así, por la definición de la sucesión, tendríamos que si $d_n = p$ para p primo, entonces $mcd(d_n, d_{n-1}) > 1$. Es decir, $d_{n-1} = kp$, donde $k \in \mathbb{Z}_+$. En ese caso, ha aparecido en la sucesión un múltiplo de un primo antes que el propio primo p, y eso no puede ser por la conjetura 3.19.

Observemos que la inyectividad de la sucesión está garantizada por la propia definición. Veremos que también es sobreyectiva después de un lema previo.

Lema 3.20. *La sucesión es infinita.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión es finita. Entonces existe un n natural tal que $mcd(d_n, d_{n-1}) = 1$ y tendríamos que para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, el máximo común divisor de d_n y m es igual 1. Basta tomar entonces un k entero suficientemente grande de modo que kd_n no haya aparecido en la sucesión. Entonces $mcd(d_n, kd_n) > 1$, por lo que kd_n es candidato a ser el término d_{n+1}. □

Teorema 3.21. *La sucesión A280985 es una permutación de los números naturales.*

Demostración. Únicamente debemos probar que la sucesión es sobreyectiva. Razonemos por reducción al absurdo. Sea m el menor número natural que no aparece en la sucesión. Como la sucesión es infinita por el lema 3.20, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $d_n > m$ para todo $n \geq n_0$. Tomemos el menor índice n para el cuál ocurre que $d_n > m$. Entonces pueden ocurrir dos cosas. La primera es que d_n tenga algún factor en común con d_{n-1}. En ese caso, no hay ninguna restricción impuesta sobre el término d_{n+1} a excepción de que debe ser el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión, que es m. Luego $d_{n+1} = m$, de donde llegamos a un absurdo. La segunda situación que puede darse es que d_n no comparta ningún factor con d_{n-1}, en cuyo caso d_{n+1} debe compartir algún factor con d_n. Por lo tanto estamos en el caso previo, pues si d_n y d_{n+1} tienen al menos un factor en común, no es necesario que el término d_{n+2} lo tenga con d_{n+1}, por lo que de nuevo la única condición sobre el término d_{n+2} es que sea el menor número natural que aún no ha aparecido en la sucesión. Es decir, $d_{n+2} = m$, en contra de la premisa inicial. □

∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼

La siguiente sucesión que vamos a estudiar está ciertamente relacionada con la anterior. El autor es el mismo que el de la sucesión previa, salvo que esta fue publicada años antes, en 2007. La podemos encontrar en la OEIS con el código A127202.

Definición 3.22. Comenzamos con los términos $f_1 = 1$ y $f_2 = 2$. Para cada $n > 2$, el término f_n es el menor entero positivo que aún no ha aparecido en la sucesión de modo que $mcd(f_n, f_{n-1})$ es distinto de $mcd(f_{n-1}, f_{n-2})$.

Sorprendentemente, esta sucesión coincide exactamente término a término con la sucesión A280985 hasta la posición $n = 719$. El término $d_{720} = 666$ mientras que $f_{720} = 667$. Una de las características a destacar de esta sucesión son los ciclos que posee. Dado que los primeros términos de las sucesiones A127202 y A280985 coinciden, el cuadro 3.6 nos servirá para poner de manifiesto a continuación algunos de estos ciclos.

Los más evidentes son

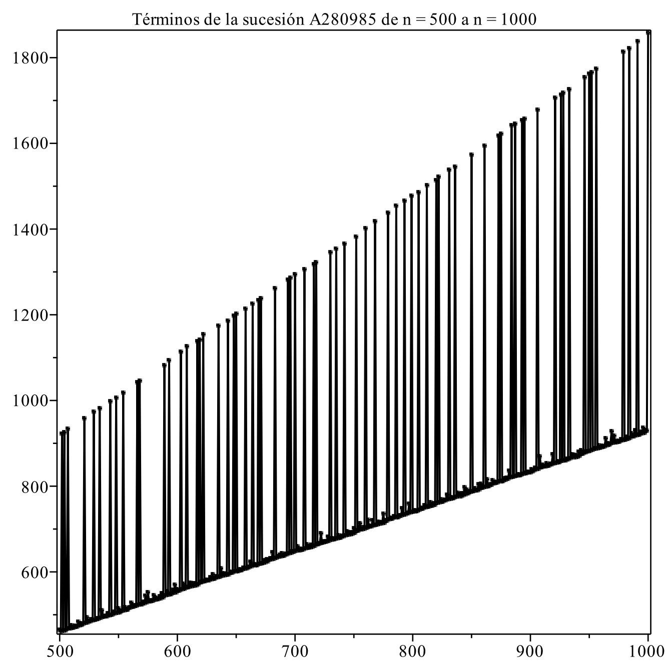
$$[1], [2], [3, 4], [5, 6], [7, 10, 8].$$

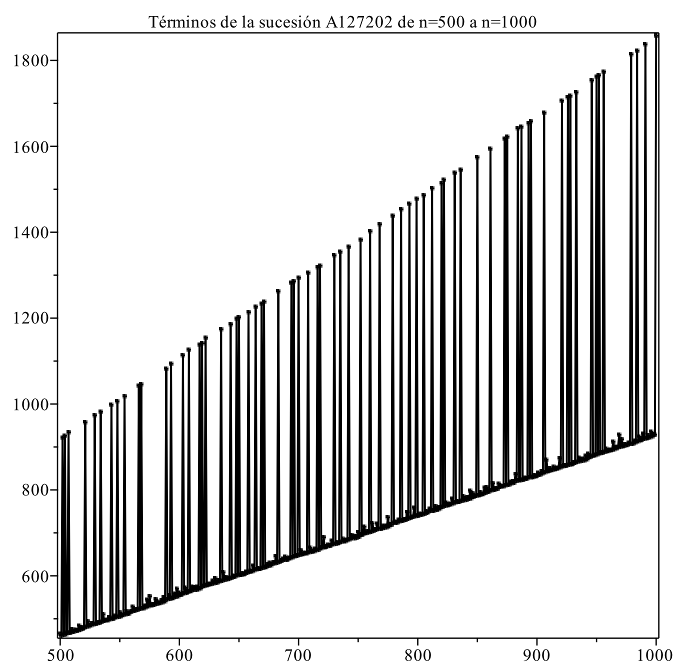
Hay otro ciclos de mayor longitud como por ejemplo

$$[9, 14, 22, 19, 16, 26, 24, 20, 17, 15, 13, 11].$$

Y el primer ciclo aparentemente infinito es

$$[23, 38, 33, 32, 28, 46, 41, 40, 35, 58, 51, 45, 42, 37, 62, 106, ...]$$





Sin embargo, la propiedad que más llama la atención de esta sucesión es su biyectividad entre los números naturales. Aunque en este trabajo no vamos a ver la prueba al completo, sí mencionaremos los pasos preliminares.

Lema 3.23. *La sucesión es infinita.*

Demostración. Supongamos que $mcd(f_{n-1}, f_n) = 1$. Entonces basta tomar un primo p que aún no haya aparecido en la sucesión. El entero $p \cdot f_n$ es candidato a ser el siguiente término. Y si $mcd(f_{n-1}, f_n) > 1$, entonces el propio primo p sirve para extender la sucesión. □

Lema 3.24. *Si un primo p no divide a ningún término de la sucesión, entonces ningún primo $q > p$ puede dividir a ningún término de la sucesión.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Sea f_n el primer término múltiplo de un primo q con $q > p$. Por ser q primo, necesariamente $f_n = kq$, para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Pero entonces $f_n = kp$ es un mejor candidato, pues p no dividía a ningún término previo. □

Nota. Dado que la sucesión es infinita y no tiene términos repetidos, es correcto decir que para todo m natural, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $f_n > m$.

Lema 3.25. *Para todo número primo p, existe un término divisible por p.*

Demostración. Supongamos que existe un primo p que no divide a ningún término de la sucesión. Entonces, en virtud del lema previo, tenemos que ningún primo $q > p$ puede dividir a ningún término de la sucesión. En consecuencia, todos los términos de la sucesión son producto de primos $p_1 < p_2 < ... < p_l$, donde p_l es el primo previo a p.
Ahora bien, como la sucesión es infinita, existe un n_0 natural tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $f_n > (p!)^3$. Tenemos los términos sucesivos $f_n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}$ y $f_{n+1} = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot ... \cdot p_k^{l_k}$. Tenemos además que $mcd(f_n, f_{n+1}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{min\{e_i,l_i\}}$. Sea ahora $l_j = max(l_1, ..., l_k)$. Como $f_n > (p!)^3$ para todo $n \geq n_0$, se tiene que $l_j \geq 2$. Fijado el j, tenemos lo siguiente:
Si $e_j = 0$ ó $e_j \geq 2$, entonces $p_j \cdot p < (p!)^3$ es un candidato menor a ser f_{n+2}.
Y si $e_j = 0$, entonces $p_j^2 p < (p!)^3$ es un candidato menor para el término f_{n+2}, llegando a una contradicción en cualquier caso. □

Lema 3.26. *Todo número primo p tiene una cantidad infinita de múltiplos en la sucesión.*

Demostración. Supongamos que hay una cantidad finita de múltiplos de un primo p. Sea $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que p^s es mayor que todos los múltiplos de p que ya han aparecido en la sucesión. Ahora, tomemos un n a partir del cual todos los términos f_n de la sucesión son mayores que p^s y ninguno de ellos es múltiplo de p.
Denotemos por $g_1, g_2, g_3, ...$ a cada máximo común divisor de $(f_n, f_{n+1}), (f_{n+1}, f_{n+2}), (f_{n+2}, f_{n+3}), ...$ respectivamente. Si $g_1 = 1$, entonces $g_2 \neq 1$, por lo que p^s es el menor candidato a ser el término f_{n+3}. Y si $g_1 > 1$, entonces p^s es el menor candidato a ser f_{n+2}. Absurdo. □

Lema 3.27. *Todo primo aparece en la sucesión.*

Demostración. Supongamos que el primo p no aparece en la sucesión. Existe un n_0 natural tal que si $n \geq n_0$, entonces $f_n > p^2$. Por el lema previo, podemos tomar un múltiplo de p de modo que existe un $f_m = kp$ con $m \geq n_0$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Entonces p es el menor candidato a ser f_{m+1} a no ser que $f_{m-1} = lp$, con $l \in \mathbb{Z}_+$. Ya que en ese caso tendríamos que $mcd(f_{m-1}, f_m) = p$, pero entonces p era un mejor candidato a ser f_m. Absurdo. □

Teorema 3.28. *La sucesión A127202 es una permutación de los números naturales.*

La prueba del teorema se puede encontrar con detalle en [15].

3.5. Comportamientos gráficos llamativos de sucesiones

Para cerrar el capítulo veremos dos sucesiones de las cuales tenemos escasa información. La razón principal de incluirlas en este capítulo es que su gráfico es ciertamente impactante así como atractivo. En primer lugar, la sucesión A075075, introducida por Amarnath Murthy en 2002.

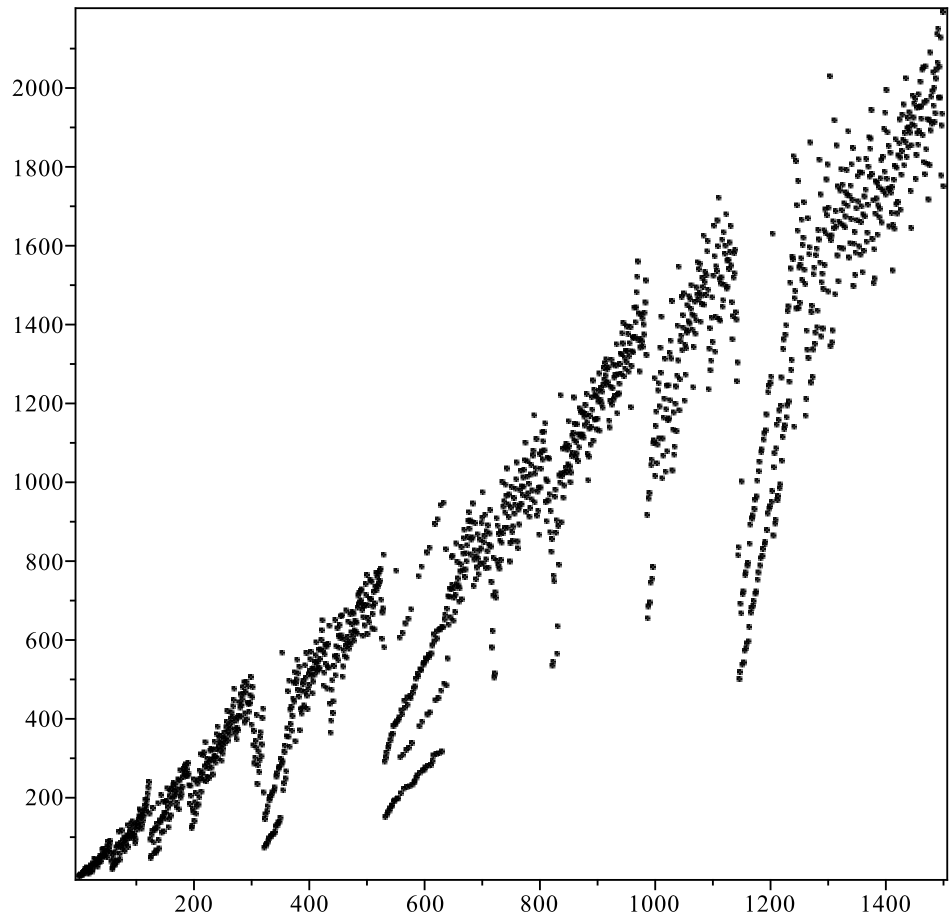
Definición 3.29. La sucesión se define de la forma siguiente: $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, y para cada $n > 2$, el término w_n es el menor número natural que aún no ha aparecido y de modo que w_{n-1} divide al producto del penúltimo término con el siguiente. Es decir, $\frac{w_{n-2} \cdot w_n}{w_{n-1}} \in \mathbb{Z}_+$.

Ejemplo 3.30. Comenzamos con los términos $w_1 = 1$ y $w_2 = 2$. Tratamos de encontrar un entero positivo no repetido de modo que $\frac{w_1 \cdot w_3}{w_2} \in \mathbb{Z}_+$. El primer candidato es 3, pero no cumple que la fracción anterior sea un entero. En cambio, $w_3 = 4$ sí lo verifica ya que $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \in \mathbb{Z}_+$. Análogamente, los números 3 y 5 quedan descartados para ser el próximo término, obteniendo que $w_4 = 6$, pues $\frac{w_2 \cdot w_4}{w_3} = \frac{2 \cdot 6}{4} = 3 \in \mathbb{Z}_+$. De este modo obtenemos la tabla 3.7.

Cuadro 3.7: Primeros 90 términos de la sucesión: $w(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 8$ y $1 \leq j \leq 10$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	6	3	5	10	8	12	9
1	15	20	16	24	18	21	7	11	22	14
2	28	26	13	17	34	30	45	27	33	44
3	32	40	25	35	42	36	48	52	39	51
4	68	56	70	50	55	66	54	63	49	77
5	88	64	72	81	90	60	38	19	23	46
6	58	29	31	62	74	37	41	82	76	114
7	57	43	86	78	117	69	92	80	100	65
8	91	84	96	104	130	75	105	98	112	120

De la definición se deduce directamente que si w_n divide a w_{n-1} entonces no hay ninguna condición sobre el próximo término, por lo que w_{n+1} es el menor entero positivo que aún no ha aparecido en la sucesión. Actualmente se cree que la sucesión es una permutación de los números naturales.



Observemos que la sucesión tiene cierta tendencia a comportarse de la siguiente manera: cuando aparece un primo en ella, el siguiente término es el primo adyacente al anterior. Es decir, si $w_n = p_k$ donde p_k denota el primo k-ésimo, entonces $w_{n+1} = p_{k+1}$. Este suceso no se da siempre, por ejemplo los primos 43 y 47 son contiguos pero $43 = w_{72}$ mientras que $47 = w_{125}$. Aunque sí ocurre con cierta frecuencia. Observemos que cuando esto ocurre, también aparece un múltiplo del primo p_k como término previo. Dicho de otra forma, si $w_n = p_k$ y ocurre que $w_{n-1} = p_k \cdot l$, entonces evidentemente p_k divide a w_{n-1} y en consecuencia la única condición sobre el término siguiente es que sea el menor entero positivo que aún no ha aparecido en la sucesión, lo que en general da lugar al primo p_{k+1}. Quizá sea necesario añadir alguna condición más. Parece que w_n y w_{n+1} son primos consecutivos si y sólo si w_n divide a w_{n-1} y $w_n < w_{n+1}$. También surge de forma natural pensar que si w_n divide a w_{n-1}, entonces w_{n+1} es primo.

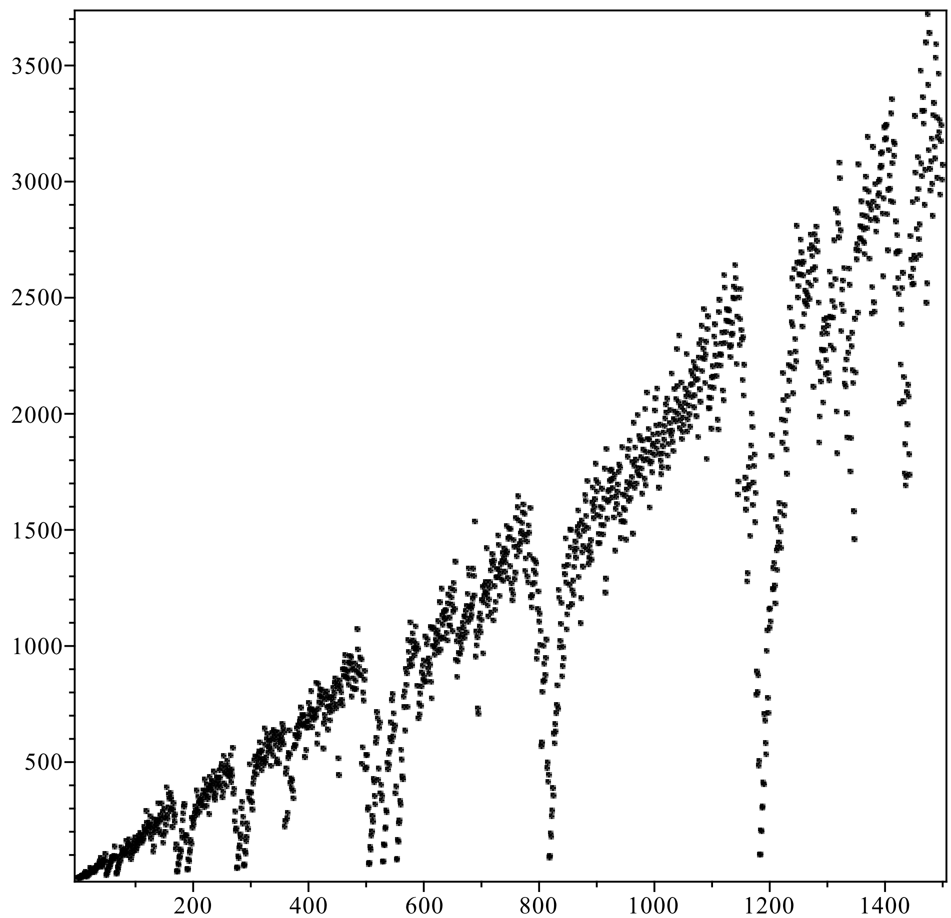
∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼ ∼

Finalmente veremos brevemente el gráfico de la sucesión A259840, publicada en 2015 por Thomas Ordowski.

Definición 3.31. Definimos la sucesión de la siguiente manera: $g_1 = 1$, $g_2 = 2$. Para cada $n > 2$, g_n es el menor entero positivo que no ha aparecido previamente en la sucesión de modo que $mcd(g_{n-2}, g_{n-1}) \cdot mcd(g_{n-1}, g_n) = g_{n-1}$.

Ejemplo 3.32. Partimos de los términos $g_1 = 1$ y $g_2 = 2$. Buscamos un entero positivo tal que

$mcd(1,2) \cdot mcd(2,g_3) = 2$. El entero 3 no es válido, pues $mcd(2,3) = 1$. En cambio, el 4 sí verifica la igualdad, por lo que $g_3 = 4$.



Cuadro 3.8: Primeros 90 términos de la sucesión: $g(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 8$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	6	3	5	10	8	12	9
1	15	20	16	28	7	11	22	14	21	18
2	24	44	33	27	36	32	40	25	30	42
3	35	45	54	48	56	49	63	72	64	88
4	55	50	60	66	77	70	80	104	13	17
5	34	26	39	51	68	52	65	75	90	78
6	91	84	96	136	85	95	19	23	46	38
7	57	69	92	76	133	98	112	120	105	119
8	102	108	126	161	115	100	140	147	168	128

Observemos la posición en la que aparecen los primos. Además de ser creciente el orden en el que aparecen, también ocurre que cuando nos topamos con un primo, el término siguiente es el primo consecutivo al anterior. Pero además, parece haber una estructura $p_i, p_{i+1}, 2p_{i+1}, 2p_i$, donde

p_i denota el primo i-ésimo, para $i > 3$. Esto se debe a que cuando el primo p_i aparece en la sucesión en la posición n, tenemos que $mcd(g_{n-1}, g_n) = mcd(g_{n-1}, p_i) = p_i$. Y como el término siguiente debe cumplir que $mcd(g_{n-1}, g_n) \cdot mcd(g_n, g_{n+1}) = g_n \implies p_i \cdot mcd(p_i, g_{n+1}) = p_i \implies mcd(p_i, g_{n+1}) = 1$. Por lo que el primo p_{i+1} tendería a aparecer en la posición $n+1$ de la sucesión, siempre y cuando no haya aparecido antes. Y evidentemente, ahora que tenemos dos primos consecutivos, para cumplir la definición necesitamos que el siguiente término sea un múltiplo del primo p_{i+1}. El múltiplo que tiende a aparecer con mayor probabilidad en esa posición es $2p_{i+1}$ por ser el menor. Finalmente necesitamos que el próximo término tenga máximo común divisor igual a 2 con el último término, y eso lo conseguimos multiplicando por dos al primo p_i. Obviamente esto son solamente comentarios empíricos que uno observa al ver los primeros términos de la sucesión.

Capítulo 4

La sucesión de Slater y Vélez

A lo largo de este capítulo estudiaremos la sucesión de Slater y Vélez A081145, y la denotaremos por $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En el año 1977 fueron los propios autores quienes probaron en [12] que esta sucesión es una permutación de $\mathbb{N}$.

Definición 4.1. La sucesión se define de la siguiente manera: Sea $s_1 = 1$. Después, para cada $n > 1$ natural, el término s_n es el menor entero positivo que no ha aparecido previamente en la sucesión y tal que el valor $|s_n - s_{n-1}|$ es distinto de $|s_k - s_{k-1}|$ para $2 \leq k < n$.

Es decir, estamos construyendo la sucesión de tal forma que la distancia entre el término siguiente y el anterior sea distinta de todas las demás distancias entre dos términos consecutivos anteriores. Denotemos por $d_k = |s_{k+1} - s_k|$.

Ejemplo 4.2. Si comenzamos con $s_1 = 1$, es obvio que $s_2 = 2$ y en consecuencia, $d_1 = 1$. El siguiente término no puede ser $s_3 = 3$, pues sino tendríamos que $d_2 = |s_3 - s_2| = |3 - 2| = 1 = d_1$. En cambio, $s_3 = 4$ cumple con las condiciones pedidas en la definición.

Cuadro 4.1: Primeros 90 términos de la sucesión: $s(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 8$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	7	3	8	14	5	12	20
1	6	16	27	9	21	34	10	25	41	11
2	28	47	13	33	54	15	37	60	17	42
3	68	18	45	73	19	48	79	22	55	23
4	58	94	24	61	99	26	66	107	29	71
5	115	30	75	121	31	78	126	32	81	132
6	35	87	140	36	91	147	38	96	155	39
7	100	40	102	165	43	108	44	110	177	46
8	114	183	49	120	192	50	124	199	51	127

Consideremos ahora la sucesión de diferencias $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Esta sucesión está construida por las distancias entre dos términos adyacentes de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nos preguntamos si estas dos sucesiones constituyen una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Nota. Nótese que la inyectividad de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por la definición, y además, como las diferencias son distintas, la sucesión $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ también es inyectiva.

En [12] podemos ver que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuenta también con la propiedad de ser sobreyectiva.

Teorema 4.3. *La sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una permutación de los números naturales.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Sea m el primer número natural que no aparece en la sucesión. Tomemos un índice $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, 3, ..., m - 1\} \subset \{s_1, s_2, s_3, ..., s_k\}$. Dado que la sucesión es inyectiva podemos elegir $m + 1$ subíndices $k_1, k_2, ..., k_{m+1}$ tales que $k + 1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_{m+1}$, con $s_{k_j} > s_i$ para todo $k_j > i$ y $j \in \{1, 2, ..., m + 1\}$. Es decir, $s_{k_{m+1}} = max\{s_1, s_2, ..., s_{k_{m+1}}\}$.
Ahora bien, denotemos por $M_1 = max\{d_1, d_2, ..., d_{k_1-1}\}$ y $M_2 = max\{d_{k-1}, d_{k_2-1}, ..., d_{k_{m+1}-1}\}$. Es claro que si $M = max\{d_1, ..., d_{k_{m+1}-1}\}$, entonces $M = max\{M_1, M_2\}$.
Observemos que $M_1 = max\{d_1, d_2, ..., d_{k_1-1}\} = max\{|s_2 - s_1|, |s_3 - s_2|, ..., |s_{k_1} - s_{k_1-1}|\}$. Y por la forma de elegir los subíndices, sabemos que $max\{s_1, ..., s_{k_1}\} = s_{k_1}$. Dado que además $s_1 = 1$, tenemos entonces que $M_1 \leq s_{k_1} - 1$.
Análogamente, $M_2 \leq s_{k_m+1} - (m + 1)$, pues $(m + 1) \leq \{s_{k+1}, ..., s_{k_{m+1}}\}$. Por lo tanto $M \leq max\{s_{k_1} - 1, s_{k_m+1} - (m + 1)\}$. Pero tenemos que $s_{k_1} - 1 \leq s_{k_2} - 2 \leq ... \leq s_{k_m+1} - (m + 1)$. Luego $M \leq s_{k_{m+1}} - (m + 1) < s_{k_{m+1}} - m$. En consecuencia $s_{k_m+1} - m > d_j$ para $1 \leq j \leq k_{m+1} - 1$, por lo que $s_{k_{m+1}+1} = m$. Llegando así a una contradicción. $\square$

En cuanto a la sucesión $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$, aún no se sabe si es o no una permutación de los números naturales. Hemos construido simultáneamente una sucesión basada en diferencias de términos consecutivos, así como la propia sucesión de diferencias. Además, hemos logrado probar que la primera es una permutación. Aunque en este caso particular no tengamos una respuesta sobre si la sucesión de diferencias es o no una permutación, nos preguntamos si existe alguna sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que la sucesión $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sí sea una permutación.
Diremos que el conjunto de enteros positivos $\{a_1, ..., a_t\}$ cumple la propiedad 1 si posee las dos características siguientes:

- Todos los enteros a_i del conjunto son distintos.
- Las distancias $d_i = |a_{i+1} - a_i|$ para $i = 1, ..., t - 1$, son distintas.

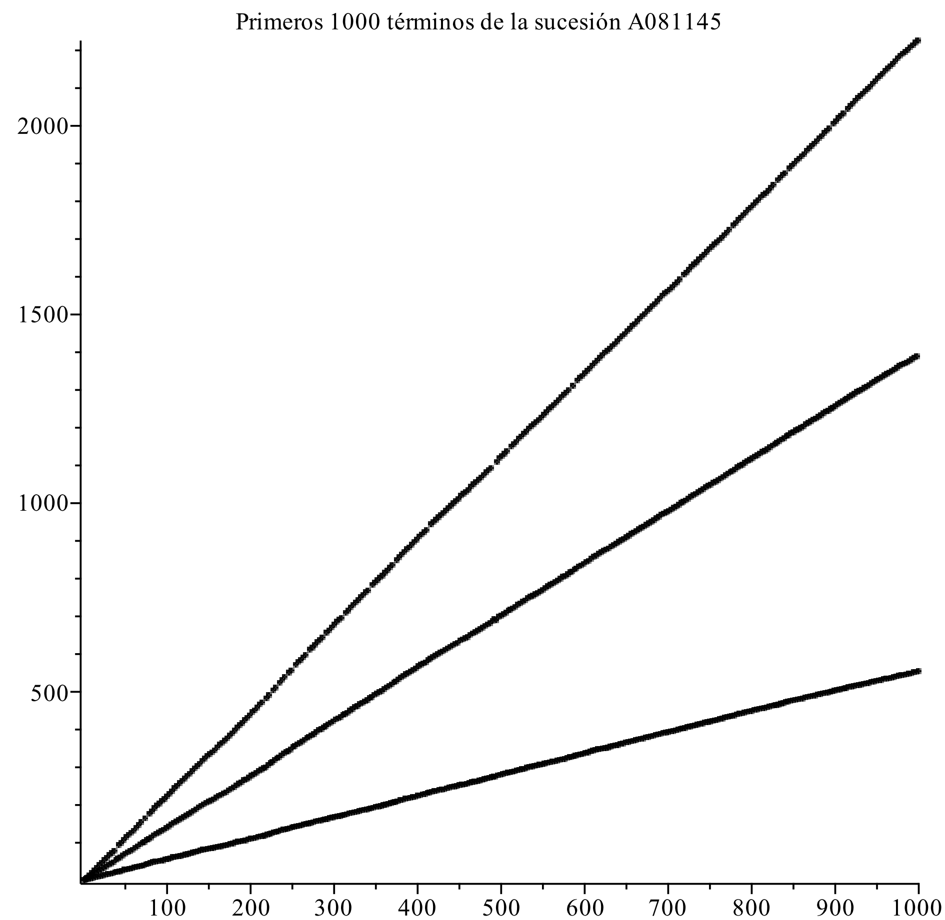
Notación. Denotaremos por i_t al menor entero positivo que no aparece en el conjunto $\{a_1, ..., a_t\}$. Por e_t al menor entero positivo que no aparece en el conjunto $\{d_1, ..., d_{t-1}\}$, $I_t = max\{a_1, ..., a_t\}$ y $E_t = max\{d_1, ..., d_{t-1}\}$.

Nota. Observemos en primer lugar que $E_t < I_t$. Además, si $e_t < E_t$ entonces $e_t \leq I_t$. Y si $e_t > E_t$, entonces necesariamente $e_t = E_t + 1$, por ser e_t el menor entero que no aparece en el conjunto $\{d_1, ..., d_{t-1}\}$ y que además es estrictamente mayor que $E_t = max\{d_1, ..., d_{t-1}\}$. El caso $e_t = E_t$ no puede darse por definición de e_t. En consecuencia, siempre tenemos que $e_t \leq I_t$.

Dado el conjunto $\{a_1, ..., a_t\}$, tomaremos $a_{t+1} = 2I_t + 1$. Si $e_t \leq i_t$, entonces pondremos $a_{t+2} = a_{t+1} - e_t$. Si en cambio $e_t > i_t$, entonces $a_{t+2} = i_t$. Una vez que tenemos las bases claras sobre cómo se definen los dos términos siguientes, es primordial que los términos a_{t+1} y a_{t+2} junto al conjunto $\{a_1, ..., a_t\}$ cumplan la propiedad 1 para así repetir el proceso. En el siguiente lema vemos que así es.

Lema 4.4. *Supongamos que* $\{a_1, ...a_t\}$ *cumple la propiedad 1, y que* a_{t+1} *y* a_{t+2} *son construidos de la manera indicada anteriormente. Entonces el conjunto de enteros* $\{a_1, ..., a_t, a_{t+1}, a_{t+2}\}$ *también cumple la propiedad 1.*

Demostración. En primer lugar tenemos que $\{a_{t+1}\} \cap \{a_1, ..., a_t\} = \emptyset$ por la propia definición de a_{t+1}. Por otro lado, $d_t = |a_{t+1} - a_t| = a_{t+1} - a_t = 2I_t + 1 - a_t = I_t + 1 + (I_t - a_t) \geq I_t + 1 > E_t$. Por tanto, d_t es estrictamente mayor que el máximo del conjunto $\{d_1, ..., d_{t-1}\}$, luego $\{d_t\} \cap \{d_1, ..., d_{t-1}\} = \emptyset$. Ahora bien, supongamos que $e_t \leq i_t$. En ese caso, $a_{t+2} = 2I_t + 1 - e_t = I_t + 1 + (I_t - e_t) \geq I_t + 1$. Por lo tanto, $\{a_{t+2}\} \cap \{a_1, ..., a_t\} = \emptyset$. Y como evidentemente tenemos que $a_{t+1} \neq a_{t+2}$, llegamos a que los enteros del conjunto $\{a_1, ..., a_t, a_{t+1}, a_{t+2}\}$ son todos distintos. Además, $d_{t+1} = |a_{t+2} - a_{t+1}| = |a_{t+1} - e_t - a_{t+1}| = e_t \notin \{d_1, ..., d_{t-1}\}$ por definición de e_t. En consecuencia, los enteros del conjunto $\{d_1, ..., d_{t+1}\}$ son todos distintos. Luego $\{a_1, ..., a_{t+2}\}$ cumple la propiedad 1.
Supongamos ahora que $e_t > i_t$. Entonces $a_{t+2} = i_t \notin \{a_1, ..., a_t\}$ por definición. Luego el conjunto $\{a_1, ..., a_{t+2}\}$ está compuesto por $t + 2$ enteros distintos. Además, $d_{t+1} = 2I_t + 1 - i_t = I_t + 1 + (I_t - i_t) > (I_t + 1) + (I_t - e_t) \geq I_t + 1 > E_t$. Luego $\{d_{t+1}\} \cap \{d_1, ..., d_t\} = \emptyset$. □



Ahora que ya sabemos que el conjunto $\{a_1, ..., a_{t+2}\}$ cumple la propiedad 1, podemos definir los términos a_{t+3} y a_{t+4} de la misma manera que hicimos previamente con los términos a_{t+1} y a_{t+2}, y obtener un conjunto $\{a_1, ..., a_{t+4}\}$ que verifica la propiedad 1.

Teorema 4.5. *Supongamos que tenemos* $\{a_1, ..., a_t\}$ *cumpliendo la propiedad 1. Ahora, prolongamos infinitamente el conjunto hallando los dos términos siguientes según la regla que hemos visto, obteniendo* $\{a_1, a_2, ..., a_t, a_{t+1}, ...\}$*. Entonces, las sucesiones* $(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *y* $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *son permutaciones.*

Nota. No daremos los detalles de la demostración del teorema anterior. Pero sí ha de tenerse en cuenta lo siguiente:

- Si $e_t \leq i_t$, entonces $d_{t+1} = |a_{t+2} - a_{t+1}| = e_t$. Recordemos que e_t es el menor entero que no aparece en el conjunto $\{d_1, ..., d_{t-1}\}$. Por lo tanto, la menor diferencia que aún no ha aparecido en el conjunto $\{d_1, ..., d_{t+1}\}$ es estrictamente mayor que e_t, pues de ser menor, haría aparecido ya en el conjunto. Ahora bien, siempre tenemos que $i_t \leq I_t + 1$. Luego si $i_t = a_{t+1} \implies 2I_t + 1 = i_t \leq I_t + 1$, lo cuál es absurdo. Y si $a_{t+2} = i_t \implies a_{t+1} - e_t = 2I_t + 1 - e_t = i_t \leq I_{t+1} \implies 2I_t + 1 - e_t \leq I_t + 1 \implies I_t \leq e_t$, en contra de la nota previa. Por tanto i_t sigue siendo el menor entero que no ha aparecido en el conjunto $\{a_1, ..., a_{t+2}\}$.
- Si en cambio $i_t < e_t$, entonces $a_{t+2} = i_t$, por lo que el menor entero que no ha aparecido en el conjunto $\{a_1, ..., a_{t+2}\}$ es mayor que i_t. Mientras que el menor entero que aún no ha aparecido en $\{d_1, ..., d_{t+1}\}$ sigue siendo e_t.

Capítulo 5

Los números de Ulam

Stanisław Ulam fue un científico del siglo XX polaco que contribuyó significativamente en la física nuclear de entonces. De hecho, dadas sus aportaciones en el Proyecto Manhattan, es considerado uno de los padres de la bomba atómica. No obstante, sus aportaciones a la ciencia no estarían únicamente dedicadas a la física, sino que también a las matemáticas. Desarrolló diferentes herramientas matemáticas en la teoría de números, teoría de conjuntos y topología algebraica, como por ejemplo el método Montecarlo, los números de Ulam o la espiral de Ulam. Además, su mentor en el campo de las matemáticas fue Stefan Banach.

Definición 5.1. Se definen los números de Ulam de la siguiente forma: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Para cada $n > 2$, el término u_n es el menor número natural que se expresa de forma única mediante la suma de dos términos previos distintos.

Ulam introdujo por primera vez esta sucesión en su libro [16], donde se plantean diversas cuestiones sobre análisis, problemas de álgebra, teoría de conjuntos, notas sobre espacios métricos y espacios topológicos entre otros. Para aclarar esta definición, que a priori puede parecer confusa, veamos unos ejemplos.

Ejemplo 5.2. Empezamos la sucesión con los términos $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$. El término u_3 ha de ser suma de dos números distintos que ya hayan aparecido en la sucesión. En este caso, $u_3 = 3$. Análogamente, obtendríamos $u_4 = 4$, ya que $4 = 3+1$, y además esa es la única suma posible, con los números actualmente presentes en la sucesión, que de 4. Sin embargo, $u_5 \neq 5$, ya que $5 = 3+2$ y también $5 = 4+1$. Luego la suma para expresar el número 5 no es única. Por tanto, ha de ser $u_5 = 6$.

Procediendo recurrentemente, se obtienen los números de Ulam que se muestran en el cuadro 5.1 más adelante. Si el lector lo desea, puede consultar la sucesión en la OEIS [15] con el código A002858, donde se pueden encontrar cientos de estos números e incluso programas para su computación, que por cierto, no es trivial a pesar de la sencillez de la definición.

Evidentemente los números de Ulam no forman una permutación de los números naturales. Lo que realmente llama la atención de esta sucesión es que depende únicamente de la estructura aditiva de $(\mathbb{N}, +)$. No utilizamos ni el producto ni condiciones de coprimalidad o sobre el máximo común divisor. Sin embargo, en [6] se plantean preguntas realmente interesantes acerca de esta sucesión. Aparte de la terna $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ y $u_3 = 2+1 = 3$, ¿hay otro par de números de Ulam consecutivos cuya suma sea también un número de Ulam? La respuesta es que sí, $u_{19}+u_{20} = 62+69 = 131 = u_{31}$. Sin embargo, no se han encontrado más números de Ulam con esta propiedad, al menos para $u_n < 6{,}4 \times 10^8$. ¿La densidad de los números de Ulam es positiva? Formalmente, la densidad se define de la forma siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{u_j : u_j \leq n\}}{n}$$

Ulam conjeturó que este límite es 0. Sin embargo, gracias a una serie de cálculos del tamaño de $6{,}759 \times 10^8$, sabemos que la densidad de los números de Ulam se mantiene en torno a 0.074.

Cuadro 5.1: Primeros 100 términos de la sucesión: $u(10i + j)$ con $0 \leq i \leq 9$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	3	4	6	8	11	13	16	18
1	26	28	36	38	47	48	53	57	62	69
2	72	77	82	87	97	99	102	106	114	126
3	131	138	145	148	155	175	177	180	182	189
4	197	206	209	219	221	236	238	241	243	253
5	258	260	273	282	309	316	319	324	339	341
6	356	358	363	370	382	390	400	402	409	412
7	414	429	431	434	441	451	456	483	485	497
8	502	522	524	544	546	566	568	585	602	605
9	607	612	624	627	646	668	673	685	688	690

5.1. Propiedades interesantes

A priori no tendría por qué haber infinitos números de Ulam. Lo primero que uno se pregunta al estudiar una sucesión, es si la sucesión es infinita. En este caso, podríamos llegar a un punto en el que todo número pudiese ser expresado de dos formas distintas mediante una suma de dos números Ulam. Sin embargo, esto no es así.

Proposición 5.3. *Hay infinitos números de Ulam.*

Demostración. Supongamos que hay una cantidad finita de números de Ulam. Llamemos u_n al mayor de todos ellos y u_{n-1} al segundo más grande. Entonces el número $u_n + u_{n-1}$ es mayor que u_n y que u_{n-1}, por lo que no ha aparecido aún en la sucesión. Además, está expresado de forma única mediante la suma de dos números de Ulam. Luego $u_n + u_{n-1}$ es un número de Ulam. □

Aunque la construcción que hemos dado en la proposición anterior nos otorga un candidato a número de Ulam, en la práctica esto no ocurre. Es decir, siempre somos capaces de encontrar antes un número de Ulam menor que la suma de los dos más grandes, a excepción del término $u_3 = 3$ que sí lo verifica.

Proposición 5.4. *El único número de Ulam que es suma de los dos anteriores es $u_3 = 3$.*

Demostración. Supongamos que para algún $n > 2$ se tiene que $u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$. Por definición, u_{n+1} es el menor número natural que se escribe de forma única como suma de dos números de

Ulam que ya han aparecido previamente. Entonces $u_n + u_{n-2}$ es un candidato a número de Ulam menor que $u_{n-1} + u_n$, llegando a una contradicción. $\square$

Si observamos el cuadro 5.1, no aparece ninguna potencia de 10 en los primeros 100 términos de la sucesión. De hecho, a día de hoy las únicas potencias de 10 que se sabe que son números de Ulam son 10^6 y 10^{11}.
Otra característica que llama la atención es que aparece una terna de números de Ulam pares consecutivos, $(u_4 = 4, u_5 = 6, u_6 = 8)$, pero que más adelante esto no ocurre. Esto se debe a que $u_2 = 2$ y $u_4 = 4$. Si tenemos una dupla de números de Ulam pares consecutivos, $(2m, 2m+2)$, entonces siempre podemos poner $2m + 4 = 2m + u_4 = 2m + 2 + u_2$, expresándolo así mediante dos formas distintas. Por último, mencionar que en cinco enteros positivos consecutivos y mayores que 4 no puede haber más de dos números de Ulam. Esto es porque si dado $n > 4$, tenemos los números $n, n+1, n+2, n+3$ y $n+4$, podemos escribir tres de ellos como dos sumas distintas de los anteriores. Si suponemos sin pérdida de generalidad que $n = u_j$ es un número de Ulam, entonces $n + 1 = u_{j+1}$ puede ser también un número de Ulam. Sin embargo tenemos que

$$n + 2 = u_1 + u_{j+1} = u_2 + u_j$$

$$n + 3 = u_2 + u_{j+1} = u_3 + u_j$$

$$n + 4 = u_3 + u_{j+1} = u_4 + u_j.$$

Por lo que los otros tres números no pueden ser de Ulam.
La siguiente proposición se debe a Roger B. Eggleton y la podemos encontrar en [3].

Proposición 5.5. *Para cada $n \geq 3$ se tiene que*

$$u_{n+1} \leq u_n + u_{n-2}. \tag{5.1}$$

Demostración. Es claro que el número $u_{n-2} + u_n$ es suma de dos números de Ulam previos y distintos. Veamos que esa suma es única razonando por reducción al absurdo. Supongamos que $u_{n-2} + u_n = u_i + u_j$ para $1 \leq i < j \leq n$. Entonces j no puede ser n, pues si $j = n$ entonces $i = n - 2$. Además, j tampoco puede ser menor que $n - 2$, pues de ser así tendríamos que $i < j < n - 2$ y como la sucesión de los números de Ulam es creciente, la igualdad $u_{n-2} + u_n = u_i + u_j$ no se cumpliría. Luego $n - 2 \leq j < n$. Ahora bien, si $j = n - 2$ entonces $i = n < j = n - 2$, lo cual es absurdo. Y si $j = n - 1$ entonces $i < j = n - 1$ implica que $i \leq n - 2$, lo cual también es absurdo pues la igualdad $u_{n-2} + u_n = u_i + u_j$ no se daría debido al crecimiento estricto de la sucesión. Luego $u_{n-2} + u_n$ es un número de Ulam. Por tanto $u_{n-2} + u_n \geq u_{n+1}$, pues si $u_{n-2} + u_n < u_{n+1}$, entonces $u_{n-2} + u_n = u_k$ para $n < k < n + 1$ entero, llegando de nuevo a un absurdo. $\square$

Nota. Nótese que para cada número natural n siempre se tiene que

$$u_{n+1} \leq u_n + u_{n-1}.$$

Esto es porque $u_n + u_{n-1}$ siempre es un claro candidato a ser número de Ulam. Además, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota la conocida sucesión de Fibonacci, se tiene que $a_n \leq F_n$, donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci.

A raíz de la proposición 5.5 surge una cota para cada número de Ulam.

Corolario 5.6. *Para cada n natural se tiene que $u_n \leq \alpha^n$, siendo $\alpha \sim 1{,}465571...$ la raíz del polinomio $x^3 - x^2 - 1 = 0$.*

Demostración. Razonaremos por inducción sobre n. Evidentemente para $n = 1$ es cierto. Supongamos que para n existe α tal que $a_n \leq \alpha^n$ y veámoslo para $n+1$. En virtud de la cota de Eggleton tenemos la desigualdad (5.1), y por la hipótesis de inducción llegamos a que

$$u_{n+1} \leq \alpha^n + \alpha^{n-2} = \alpha^{n-2}(\alpha^2 + 1).$$

Luego nos basta con resolver la ecuación en α siguiente:

$$\alpha^{n-2}(\alpha^2 + 1) = \alpha^{n+1} \iff \alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0.$$

□

A continuación introducimos un concepto nuevo. Veremos qué es lo que se conoce como sucesión completa, veremos que de hecho los números de Ulam son una sucesión completa, y mencionaremos algunas conjeturas relacionadas con este concepto.

Definición 5.7. Una sucesión de enteros positivos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es completa si cada entero $m \in \mathbb{Z}_+$ es suma de una cantidad finita de términos distintos de la sucesión.

Es decir, a partir de la sucesión podemos obtener todo entero simplemente sumando una cantidad finita de términos de la sucesión. Podríamos decir que la definición es similar a la de base de un espacio vectorial, al menos conceptualmente hablando. Para probar que la sucesión de los números de Ulam es una sucesión completa, necesitamos un lema previo. Seguiremos la estructura de [8]. De ahora en adelante, $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_i\}$ tomarán los valores 1 ó 0.

Lema 5.8. *Sea $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos (no necesariamente distintos) tal que*

- $u_1 = 1$.
- $u_{p+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{p} u_i$ *para cada p natural.*

Entonces existe una familia de escalares $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ con $\alpha_i \in \{0,1\}$, tales que $n = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ para cada $0 < n \leq \sum_{i=1}^k u_i$.

Demostración. Probaremos el lema mediante inducción sobre k. Para $k = 1$ se tiene que $\alpha_1 = n$ verifica que $n = n \cdot u_1$. Como $0 < n \leq u_1 = 1$, ha de ser $n = \alpha_1 = 1$. Supongamos que el lema es cierto para $k = N$. Buscamos una familia de escalares $\{\beta_i\}_{i=1}^{N+1}$ de modo que $n = \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i u_i$. Sea $0 < n \leq \sum_{i=1}^{N+1} u_i$. Si $0 < n \leq \sum_{i=1}^{N} u_i$, entonces queda probado por la hipótesis de inducción. Por tanto, supongamos que $\sum_{i=1}^{N} u_i < n \leq \sum_{i=1}^{N+1} u_i$. En particular se tiene que

$$n \leq \sum_{i=1}^{N+1} u_i \implies n - u_{N+1} \leq \sum_{i=1}^{N} u_i.$$

Ahora bien, si $n - u_{N+1} = 0$, entonces $n = u_{N+1}$ por lo que basta elegir $\beta_{N+1} = 1$. Si en cambio $0 < n - u_{N+1} \leq \sum_{i=1}^{N} u_i$, por la hipótesis de inducción sabemos que existen unos escalares $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$, con $\alpha_i \in \{0,1\}$, tales que

$$n - u_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i.$$

En consecuencia, $n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i + u_{N+1}$. Por lo que basta identificar $\alpha_i = \beta_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$ y tomar $\beta_{N+1} = 1$. □

Una vez demostrado este lema, estamos en condiciones de caracterizar las sucesiones completas.

Teorema 5.9. *Sea $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de enteros positivos tal que $u_1 = 1$. Entonces $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es completa si y sólo si $u_{p+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{p} u_i$ para cada p natural.*

Demostración. La implicación de derecha a izquierda es inmediata a partir del lema previo. Para probar la implicación contraria razonaremos por contrarrecíproco. Supongamos que existe un número natural $n_0 \geq 1$ tal que $u_{n_0+1} > 1 + \sum_{i=1}^{n_0} u_i$. Entonces $u_{n_0+1} - 1 > \sum_{i=1}^{n_0} u_i$, y como la sucesión $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es creciente por hipótesis, el entero $u_{n_0+1} - 1$ no es de la forma $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i$, para ninguna familia de escalares $(\beta_i)_{i=1}^{\infty}$. Luego no es completa. □

Evidentemente la sucesión de Ulam siempre verifica la condición de que el término siguiente sea menor o igual que la suma de todos los anteriores más uno. Pero más aún, hemos dado una caracterización de las sucesiones completas. Sucesiones como la de Fibonacci también verifican esta hipótesis, por lo que es completa. Un corolario inmediato es el siguiente:

Corolario 5.10. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión completa creciente de enteros positivos, entonces $u_n \leq 2^{n-1}$ para cada n natural.*

Demostración. Razonamos por inducción sobre n. Para $n = 1$ es evidente. Supongamos que se cumple para n y veámoslo para $n + 1$. En ese caso tenemos que

$$u_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} u_i \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n,$$

donde la primera desigualdad se debe al teorema 5.9, la segunda surge al aplicar la hipótesis de inducción y la igualdad final se debe a que la suma es una progresión geométrica de razón $r = 2$. □

En [8] podemos encontrar aún más resultados sobre la completitud de las sucesiones. En este artículo se responden a preguntas como qué ocurre si omitimos un término o qué debe ocurrir para que la sucesión pierda su completitud.

5.2. Generalizaciones

En la sección anterior hemos definido la sucesión de los números de Ulam para valores iniciales $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$. Esta es la forma habitual de definir los números de Ulam. Sin embargo, en ocasiones resulta interesante inspeccionar ciertas generalizaciones de las sucesiones. ¿Qué ocurre por ejemplo cuando tomamos como valores iniciales otro par de números distintos?
En primer lugar, cuando tomamos como valores iniciales $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$, obtenemos el cuadro 5.1. Observamos que con esta definición, las diferencias entre dos números de Ulam consecutivos son las siguientes:

1	1	1	2	2	3	2	3	2	8
2	8	2	9	1	5	4	5	7	3
5	5	5	10	2	3	4	8	12	5
7	7	3	7	20	2	3	2	7	8
9	3	10	2	15	2	3	2	10	5 ...

Es decir, $u_2 - u_1 = 1$, $u_3 - u_2 = 1$, $u_4 - u_3 = 1$, $u_5 - u_4 = 2\ldots$ Aparentemente no hay ningún patrón en la sucesión formada por las diferencias entre números de Ulam consecutivos.
Si ahora tomamos como valores iniciales $u_1 = 2$ y $u_2 = 3$, construyendo el resto de números de Ulam como vimos en la definición 5.1, obtenemos la siguiente sucesión:

Cuadro 5.2: Primeros 60 términos de la sucesión generalizada: $u(10i+j)$ con $0 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	3	5	7	8	9	13	14	18	19
1	24	25	29	30	35	36	40	41	46	51
2	56	63	68	72	73	78	79	83	84	89
3	94	115	117	126	153	160	165	169	170	175
4	176	181	186	191	212	214	230	235	240	245
5	266	273	278	283	288	325	331	332	337	342

Si analizamos las diferencias entre números de Ulam consecutivos para estos valores iniciales obtenemos:

1	1	2	2	1	1	4	1	4	1
2	5	1	4	1	5	1	4	1	5
5	5	5	7	5	4	1	5	1	4
1	5	5	21	2	9	27	7	5	4
1	5	1	5	5	5	21	2	16	5 ...

Aunque tampoco hay un patrón reconocible en esta sucesión, se puede apreciar que el número 5 aparece con más frecuencia que el resto. A medida que avanzamos, la frecuencia con la que aparece el 5 aumenta.
Un caso realmente interesante es cuando tomamos como valores iniciales $u_1 = 2$ y $u_2 = 5$. Los primeros términos se muestran a continuación:

Cuadro 5.3: Primeros 60 términos de la sucesión generalizada: $u(10i+j)$ con $0 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 10$

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	5	7	9	11	12	13	15	19	23
1	27	29	35	37	41	43	45	49	51	55
2	61	67	69	71	79	83	85	87	89	95
3	99	107	109	119	131	133	135	137	139	141
4	145	149	153	155	161	163	167	169	171	175
5	177	181	187	193	195	197	205	209	211	213

Resulta sorprendente que los únicos números pares son el 2 y el 12. Y es más, si calculamos las diferencias de los términos consecutivos obtenemos un patrón.

3	2	2	2	1	1	2	4	4	4
2	6	2	4	2	2	4	2	4	6
6	2	2	8	4	2	2	2	6	4
8	2	10	12	2	2	2	2	2	4
4	4	2	6	2	4	2	2	4	2 ...

Ignorando los seis primeros términos, la estructura **2,4,4,4,2,6,2,4,2,2,4,2,4,6,6,2,2,8,4,2,2,2, 6,4,8,2,10,12,2,2,2,2** se repite. Es decir, la sucesión es periódica de periodo 32. Algo similar ocurre cuando tomamos los valores iniciales $u_1 = 4$ y $u_2 = 5$. En este caso, tras ignorar los primeros nueve términos podemos reconocer un patrón que se repite a lo largo de toda la sucesión. Es más, el periodo de la sucesión vuelve a ser 32, pero lo más destacable es que solo aparecen tres números pares: 4, 14 y 24. Este fenómeno no es casualidad como veremos en la sección siguiente.

5.3. Sucesiones 1-aditivas

El propio Ulam definió el concepto de sucesiones 1-Aditivas, que necesitaremos para indagar más en esta sucesión.

Definición 5.11. Sean $u < v$ dos enteros positivos tales que $mcd(u, v) = 1$. Una sucesión 1-aditiva con base $\{u, v\}$ es una sucesión infinita

$$(u, v) = a_1, a_2, a_3, ...$$

Donde $a_1 = u$, $a_2 = v$, y el término a_n es el menor entero mayor que el término previo, a_{n-1}, y que se puede expresar de forma única mediante suma de dos términos anteriores distintos.

Las generalizaciones de los números de Ulam vistas anteriormente son sucesiones 1-aditivas con bases $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$ y $\{4, 5\}$ respectivamente.

Definición 5.12. Se dice que una sucesión 1-aditiva es **regular** si la sucesión construida a partir de las diferencias de términos sucesivos es periódica a partir de un momento.

Denotaremos por N al **periodo** de la sucesión formada por las diferencias de los términos sucesivos.

Definición 5.13. Llamaremos **diferencia fundamental** de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la constante $D = a_{N+n} - a_n$, para un n suficientemente grande.

Ejemplo 5.14. Tomemos la sucesión 1-aditiva con base $\{4, 5\}$. Los primeros términos de la sucesión se muestran en la tabla siguiente.

Cuadro 5.4: Primeros 50 términos de la sucesión 1-aditiva: $u(10i+j)$ con $0 \leq i \leq 4$ y $1 \leq j \leq 10$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	4	5	9	13	14	17	19	21	24	25
1	27	35	37	43	45	47	57	67	69	73
2	77	83	93	101	105	109	113	115	123	125
3	133	149	153	163	173	197	201	205	209	211
4	213	217	219	227	229	235	237	239	249	259

Construimos ahora la sucesión de diferencias consecutivas, obteniendo los términos:

$$\begin{array}{llllllllll}
1 & 4 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
8 & 2 & 6 & 2 & 2 & 10 & 10 & 2 & 4 & 4 \\
6 & 10 & 8 & 4 & 4 & 4 & 2 & 8 & 2 & 8 \\
16 & 4 & 10 & 24 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 \ldots
\end{array}$$

Ignorando los nueve primeros términos, esta estructura se repite infinitamente. De hecho en este caso $N = 32$. Tomemos ahora un n suficientemente grande. Por ejemplo $n = 800$. Obtenemos que $a_{32+800} - a_{800} = 4949 - 4757 = 192$. El lector puede comprobar que el valor $D = 192$ se repite constantemente al hacer esa diferencia para un n suficientemente grande. Luego la diferencia fundamental de la sucesión 1-aditiva con base $\{4, 5\}$ es $D = 192$. Para el caso particular de las sucesiones 1-aditivas regulares, es especialmente sencillo calcular su densidad. Pensemos que la diferencia entre dos términos consecutivos es periódica de periodo $N = 32$. Además tenemos el dato de que la diferencia entre un término a_n y el término de 32 posiciones más adelante a_{32+n}, es siempre $D = 192$ para un n suficientemente grande. Dicho de otra forma, entre 32 términos de la sucesión, esta incrementa su valor numérico en 192. Es decir, cada posición aumenta de media en $6 = D/N = 192/32$. Resulta claro entonces que la densidad de la sucesión es $1/6$, ya que para alcanzar el valor de un entero m, necesito avanzar en la sucesión $m/6$ posiciones.

En [5], Steven R. Finch nos da una condición suficiente para saber cuándo una sucesión 1-aditiva es regular.

Teorema 5.15. *Toda sucesión 1-aditiva que tiene una cantidad finita de números pares es regular.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión 1-aditiva que tiene una cantidad finita de términos pares y sea e el número de términos pares que aparecen en la sucesión. Llamemos $x_1 < x_2 < ... < x_e$ a los números pares. Para cada k, con $1 \leq k \leq e$, sea $y_k = \frac{1}{2}x_k$. Sea ahora $n \geq y_e$ un entero y denotemos por b_n el número de representaciones distintas que admite el número $2n+1$ mediante suma de dos términos distintos de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dado que los x_k son todos pares y $2n+1$ es impar, para obtener $2n+1$ como suma de dos términos distintos, es necesario que un sumando sea impar y el otro sea uno de los x_k. Es decir, si $2n+1 = a_i + a_j$, con $i < j$, entonces para algún k, ó bien $a_i = x_k$ ó bien $a_j = x_k$.
Ahora bien, es claro que $b_n = 1$ si y sólo si el número $2n+1$ aparece en la sucesión. Y como $2n+1$ es suma de un número par y otro impar, basta contar cuántas veces aparece el sumando impar en la sucesión de entre todas las combinaciones de sumandos posibles. Es decir, queremos contar cuántas veces se da el caso de que aparece en la sucesión el número $2n+1-x_k = 2(n-y_k)+1$.

Luego queremos hallar b_{n-y_k} para cada k. Esto se traduce en la suma

$$b_n = \sum_{k=1}^{e} \delta(b_{n-y_k}), \tag{5.2}$$

donde δ es una función que en 1 vale 1 y en el resto de enteros vale 0.
Ahora bien, para cada $n \geq x_e$, definimos el vector siguiente:

$$\beta_n = (b_{n-y_e}, b_{n-y_e+1}, b_{n-y_e+2}, ..., b_{n-1}).$$

Observemos que β_n es un vector de y_e componentes y que a partir de x_e, todos los a_n son impares. La regularidad de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la periodicidad de la sucesión de vectores β_{x_e}, β_{x_e+1}... Pues la periodicidad del vector es equivalente a la periodicidad de la suma (5.2). Además, el número de representaciones mediante sumas que un término impar de la sucesión puede tener, no puede ser mayor que e. Luego las componentes de β_n son menores ó iguales que e. Y dado que el número de vectores enteros de longitud finita y_e, cuyas componentes están acotadas por e, es finito, necesariamente se tienen que repetir ciertos β_n, lo que desemboca en periodicidad. □

El potencial del teorema anterior depende de si somos capaces de caracterizar las sucesiones 1-aditivas que tienen una cantidad finita de números pares. Existen ciertas conjeturas sobre qué propiedades debe cumplir una sucesión 1-aditiva para verificar la hipótesis del teorema 5.15. Estas conjeturas fueron publicadas en 1992 en [5].

Conjetura 5.16. (a) Las siguientes sucesiones 1-aditivas satisfacen la hipótesis del teorema 5.15:

- $(2, v)$, para $v \geq 5$.
- $(4, v)$, para $v \geq 5$ impar.
- $(5, 6)$
- (u, v), para $u \geq 6$ par.
- (u, v), para v par y $u \geq 7$ impar.

(b) El resto de sucesiones 1-aditivas tienen una cantidad infinita de números pares.

5.3.1. Caso $(2, v)$ para $v \geq 5$

Haremos un breve recorrido a través de los distintos tipos de sucesiones 1-aditivas mencionadas en la conjetura anterior. Veremos algunas de las consecuencias que provocaría la veracidad de la conjetura así como por qué pueden ser ciertas.
En primer lugar examinaremos el caso $(2, v)$ para $v \geq 5$.

Nota. Se sabe que la siguiente conjetura es cierta para todo $v \geq 5$ impar. La demostración se debe a Schmerl y Spiegel. Aunque en este trabajo no veremos la prueba por ser demasiado extensa, el lector puede consultarla en [11].

Conjetura 5.17. La sucesión 1-aditiva con base $(2, v)$ para $v \geq 5$ tiene exactamente dos términos pares: 2 y $2v + 2$.

Los datos recogidos mediante un ordenador por Raymond Queneau, mostrados en el cuadro 5.5, sugieren que esta conjetura es cierta. Si este es el caso, la igualdad 5.2 se traduce en

$$b_n = \delta(b_{n-1} - 1) + \delta(b_{n-v-1} - 1). \tag{5.3}$$

Bajo la presunción de que la conjetura 5.17 es cierta, tenemos que la cantidad de representaciones que admite un número cualquiera de la sucesión mediante la suma de dos previos y distintos, es a lo sumo dos. Pues únicamente hay dos números pares. Luego, si denotamos por z_n a la variable indicadora que vale 1 si $2n+1$ aparece en la sucesión, es decir tiene una única representación mediante sumas, y 0 si no aparece, podemos simplificar la fórmula 5.3 obteniendo

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-v-1} \pmod 2,$$

la cual disminuye considerablemente el costo operativo del cálculo de $N(v)$ y $D(v)$ del cuadro 5.5

Cuadro 5.5

v	periodo N	diferencia fundamental D
5	32	$126 = 2(2^6 - 1)$
$7 = 2^3 - 1$	$26 = 3^3 - 1$	$126 = 2(2^6 - 1)$
9	444	$1778 = 2(2^3 - 1)(2^7 - 1)$
11	1628	$6510 = 2(2^3 - 1)(2^7 - 1)$
13	5906	$23{,}622 = 2(2^2 - 1)(2^5 - 1)(2^7 - 1)$
$15{=}2^4 - 1$	$80 = 3^4 - 1$	$510 = 2(2^8 - 1)$
17	126.960	$507{,}842 = 2(2^5 - 1)(2^{13} - 1)$
19	380.882	$1{,}523{,}526 = 2(2^2 - 1)(2^5 - 1)(2^{13} - 1)$
21	2.097.152	$8{,}388{,}606 = 2(2^{22} - 1)$
23	1.047.588	$4{,}194{,}302 = 2(2^{21} - 1)$
25	148.814	$597{,}870 = 2(2^9 - 1)(2^{12} - 1)/7$
27	8.951.040	$35{,}791{,}394 = 2(2^{28} - 1)/15$
29	5.406.720	$21{,}691{,}754 = 2(2^{30} - 1)/99$
$31 = 2^5 - 1$	$242 = 3^5 - 1$	$2046 = 2(2^{10} - 1)$

Por otro lado, en [10] el lector puede encontrar una serie de resultados, que aunque no son el objetivo de este trabajo, sirven para la demostración de la siguiente desigualdad, que relaciona el periodo N y la diferencia fundamental D. Siempre suponiendo que la conjetura 5.17 es cierta.

$$|N(v) - \frac{1}{4}D(v)| \leq 2^{(v-1)/2}.$$

Cabe destacar que el cuadro previo nos plantea una pregunta realmente interesante. Cuando v toma un valor de la forma $2^m - 1$ para $m \geq 3$, los valores que toman a su vez $N(v)$ y $D(v)$ son de la forma $3^m - 1$ y $2(2^{2m} - 1)$. Nos preguntamos si este fenómeno ocurre para todo $m \geq 3$ o solamente en los primeros cálculos.

5.3.2. Caso $(4, v)$ para $v \geq 5$ impar

Es uno de los casos más interesantes. Veremos una serie de consecuencias y resultados que se encuentran en [5] y que dependen de la veracidad de la siguiente conjetura. En 1995 Julien Cassaigne y Steven R. Finch publicaron en [2] una prueba de que la conjetura siguiente es cierta para $v \geq 5$ impar y $v \equiv 1 \pmod 4$.

Conjetura 5.18. Sea $v \geq 5$ impar.
(a) Si $v \neq 2^m - 1$ para todo $m \geq 3$, entonces la sucesión $(4, v)$ tiene exactamente tres términos pares: 4, $2v + 4$ y $4v + 4$.
(b) Si $v = 2^m - 1$ para algún $m \geq 3$, entonces la sucesión 1-aditiva con base $(4, v)$ tiene cuatro términos pares: 4, $2v + 4$, $4v + 4$ y $2(2v^2 + v - 2)$.

Trataremos los casos (a) y (b) de la conjetura anterior por separado. Supongamos en primer lugar que $v \neq 2^m - 1$ para todo $m \geq 3$. En ese caso tenemos únicamente tres términos pares y en consecuencia la fórmula 5.2 se convierte en

$$b_n = \delta(b_{n-2} - 1) + \delta(b_{n-v-2} - 1) + \delta(b_{n-2v-2} - 1), \tag{5.4}$$

ya que si los únicos términos pares son 4, $2v + 4$ y $4v + 4$, entonces los y_k de la demostración del teorema 5.15 son 2, $v + 2$ y $2v + 2$, para $k = 1, 2, 3$. Y al igual que hicimos en el caso previo, podemos simplificar aún más la ecuación 5.4 si trabajamos módulo 3. Sin embargo, en este caso la fórmula que se obtiene no presenta ninguna ventaja teórica con respecto a la anterior. Si ahora suponemos que $v = 2^m - 1$ para algún m entero, también podemos simplificar la fórmula previa pero de nuevo sin ninguna ventaja.

Cuadro 5.7: Los asteriscos indican que no se detectó ninguna periodicidad para esas sucesiones durante los primeros $3{,}65 \times 10^9$ términos.

v	periodo N	diferencia fundamental D
5	32	$192 = 2^5(5 + 1)$
$7 = 2^3 - 1$	1,927,959	11,301,098
9	88	$640 = 2^6(9 + 1)$
11	246	1318
13	104	$896 = 2^6(13 + 1)$
$15 = 2^4 - 1$	$*$	$*$
17	248	$2304 = 2^7(17 + 1)$
19	352	2560
21	280	$2816 = 2^7(21 + 1)$
23	5173	29,858
25	304	$3328 = 2^7(25 + 1)$
27	10.270	57,862
29	320	$3840 = 2^7(29 + 1)$
$31 = 2^5 - 1$	$*$	$*$
33	712	$8704 = 2^8(33 + 1)$

Lo que más llama la atención de la tabla previa es la relación entre N, D y el residuo de v módulo

4.

Conjetura 5.19. Si $v \equiv 1 \pmod 4$, entonces

$$D(v) = 2^{m+3}(v+1),$$

donde m es el mayor entero tal que $2^m < v$.

En el cuadro 5.7 hay varios ejemplos donde ocurre esto. Por ejemplo, para $v = 5$ se tiene que efectivamente $5 \equiv 1 \pmod 4$ y $D(5) = 192 = 2^5(5+1)$, con $m = 2$.

5.3.3. Casos $(5,6)$ y (u,v) para $u \geq 6$ par

Mostramos a continuación los primeros términos de la sucesión 1-aditiva con base $(5,6)$.

5	6	11	16	17	21	23	26	29	31
33	35	36	43	45	53	55	65	67	73
80	83	85	93	97	115	124	125	144	149
157	159	169	172	184	187	191	196	199	211 ...

Para esta sucesión 1-aditiva se cree que hay únicamente trece números pares que son: 6,16,26,36,80, 124,144,172,184,196,238,416 y 448. De ser cierto, podríamos determinar que para esta sucesión $N = 208$ y $D = 1720$. También podríamos concluir que esta sucesión es regular en virtud del teorema 5.15 y, en consecuencia, su densidad sería $N/D = 26/215 \approx 0{,}12$.
En cuanto a las sucesiones 1-aditivas de la forma (u,v) para $u \geq 6$ par, no sabemos mucho acerca de ellas. El punto de partida sería el siguiente:

Conjetura 5.20. La sucesión 1-aditiva (u,v) para $u \geq 6$ par tiene $2+\frac{1}{2}u$ términos pares que son: $u + 2pv$ para $0 \leq p \leq \frac{1}{2}u$ y $(2u+4)v$.

Sin embargo, para este tipo de sucesiones, el costo operativo y los tiempos de ejecución para discernir un periodo N ó hallar la diferencia fundamental son demasiado altos. En particular, para la sucesión 1-aditiva con base $(8,17)$ es necesario calcular alrededor de 2×10^8 términos.

5.3.4. Caso (u,v) para v par y $u \geq 7$ impar

Al contrario de lo que ocurría en las sucesiones del tipo anterior, en este caso los tiempos de computación no son tan largos lo que permite llegar a ciertas conjeturas experimentales que se muestran a continuación.

Conjetura 5.21. Las sucesiones 1-aditivas de la forma (u,v) para v par y $u \geq 7$ impar tienen $2 + \frac{1}{2}v$ términos pares que son: $2qu + v$ para $0 \leq q \leq \frac{1}{2}v$ y $u(2v+4)$.

Bajo la hipótesis de que esta conjetura fuese verdad, por el teorema 5.15 tendríamos que este tipo de sucesiones 1-aditivas son regulares.
Observando la tabla 5.11, que recoge los periodos y diferencias fundamentales para los casos $u = 7$, $u = 9$ y $u = 11$, tenemos lo siguiente:

Conjetura 5.22. Sea $u \geq 7$ un entero impar. Entonces existe un número natural v_0 tal que para enteros pares $v \geq v_0$, los periodos $N(u,v)$ y las diferencias fundamentales $D(u,v)$ son de la forma:

$$N(u,v) = f_N(u)v + g_N(u),$$

$$D(u,v) = f_D(u)v + g_D(u).$$

Cuadro 5.9: Algunos de los valores de f y g

u	f_N	g_N	f_D	g_D	v_0
7	6	10	112	224	38
9	14	-2	144	288	56
11	64	194	704	1408	30
13	19	-56	208	416	56
15	42	672	480	960	52
17	28	-180	272	544	118
19	48	-60	608	1216	120

Ejemplo 5.23. Si tomamos $u = 7$ y $v = 38$, obtenemos que

$$N(7, 38) = f_N(7) \cdot 38 + g_N(7) = 6 \cdot 38 + 10 = 238.$$

El lector puede comprobar en la tabla 5.11 que efectivamente para esos valores escogidos el periodo es $N = 238$.

	$u = 7$		$u = 9$		$u = 11$	
v	N	D	N	D	N	D
8	5874	42,758	–	–	–	–
10	830	6,594	80,240	630,818	–	–
12	182	1,568	–	–	272	2,464
14	–	–	258	2,304	164	1,408
16	124	1,008	546	5,184	670	6,336
18	228	2,240	–	–	708	7,040
20	156	1,232	300	3,168	842	7,744
22	140	1,344	334	3,456	–	–
24	310	2,912	–	–	488	4,576
26	532	5,488	292	4,032	1506	21,560
28	–	–	288	4,320	614	5,280
30	132	1,792	–	–	2114	22,528
32	326	4,284	984	9,792	2242	23,936
34	326	4,032	636	5,184	2370	25,344
36	364	4,256	–	–	2498	26,752
38	238	4,480	870	11,520	2626	28,160

Cuadro 5.11: Parámetros para la secuencia 1–aditiva (u, v) con $u \geq 7$ impar y v par, asumiendo que la conjetura 5.21 es cierta.

A lo largo de esta sección hemos mencionado una serie de conjeturas, las motivaciones que llevan a ellas y las consecuencias que pueden llegar tener sobre las sucesiones 1-aditivas. Existen generalizaciones de estas sucesiones, denominadas sucesiones s-aditivas. No es el objetivo de este trabajo indagar más en este tema, pero sí mencionar que en [4] podemos encontrar una serie de resultados sobre estas sucesiones.

Índice de sucesiones

Bibliografía

[1] David L. Applegate, Hans Havermann, Robert G. Selcoe, Vladimir Shevelev, N. J. A. Sloane, and Reinhard Zumkeller. The yellowstone permutation. *Journal of Integer Sequences*, **18**(2015), Article 15.6.7.

[2] Julien Cassaigne and Steven R. Finch. A class of 1-additive sequences and quadratic recurrences. *Experimental Mathematics*, **4**(1995):50–60, No. 1.

[3] François Clément and Stefan Steinerberger. Small Gaps in the Ulam Sequence. *arXiv preprint arXiv:2501.16285*, **1**(2025).

[4] Steven R. Finch. Conjetures about s-additive sequences. *Fibonacci Quart*, **29**(1991), 209–214.

[5] Steven R. Finch. Patterns in 1-additive sequences. *Experimental Mathematics*, **1**(1992), 57–63.

[6] Shyam Gupta Sunder. *Exploring the Beauty of Fascinating Numbers*. Springer Nature, 2025.

[7] Piotr Hofman and Marcin Pilipczuk. A Few New Facts about the EKG Sequence. *Journal of Integer Sequences*, **11**(2008), Article 08.4.2.

[8] Jr J.L.Brown. Note on complete sequences of integers. *The American Mathematical Monthly*, **68**(1961), 557–560.

[9] J. C. Lagarias, E. M. Rains, and N. J. A. Sloane. The EKG Sequence. *Experimental Mathematics*, **11**(2002), 437-446.

[10] H. Niederreiter. On the cycle structure of linear recurring sequences. *Mathematica Scandinavica*, **38**(1976), 53–77.

[11] James Schmerl and Eugene Spiegel. The regularity of some 1-additive sequences. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A **66**(1994), 172–175.

[12] Peter J. Slater and William Yslas Vélez. Permutations of the positive integers with restrictions on the sequence of differences. *Pacific Journal of Mathematics*, **71**(1977):193–196, No. 1.

[13] N. J. A. Sloane. My favorite integer sequences. In *Sequences and their applications. Proceedings of the international conference, SETA '98, Singapore, December 14–17, 1998*, pages 103–130. London: Springer, 1999.

[14] N. J. A. Sloane. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. *Notices of the American Mathematical Society*, **50**(2003), 912–915.

[15] N.J.A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. `https://oeis.org/?language=english`.

[16] Stanisław Ulam. *Problems in Modern Mathematics*. Interscience, 1964.