Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

Construcción de la medida de Haar y sus aplicaciones

Autor: Sergio Martín Nieto
Tutor: Santiago Encinas Carrión
2025

Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi grande et de même nature.

Henry Poincaré

Resumen

La medida de Haar es una herramienta utilizada en numerosas áreas de las matemáticas y de la física teórica. Se trata de una medida que se puede construir en algunos grupos topológicos, y que es invariante bajo traslaciones vía la operación de grupo. En este trabajo se da una construcción de la medida de Haar en grupos topológicos localmente compactos, y se prueba su unicidad salvo constante multiplicativa. También se demuestra la existencia de una medida G-invariante en los espacios cocientes G/H donde H es un subgrupo cerrado de G. Finalmente, se demuestra, utilizando dominios de Siegel, que la medida G-invariante del cociente $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ es finita.

Palabras clave: Medida de Haar, grupos topológicos, dominios de Siegel.

Abstract

The Haar measure is a tool used in numerous areas of mathematics and theoretical physiscs. It is a measure that can be constructed in some topological groups, and it is invariant under translations using the group operation. In this thesis, we give a construction of the Haar measure on locally compact and Hausdorff topological groups, and we show its uniqueness up to a multiplicative factor. We also show the existence of a G-invariant measure on the quotient spaces G/H where H is a closed subgroup of G. Finally, we show, using Siegel domains, that the G-invariant measure of the quotient $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ is finite.

Keywords: Haar measure, topological groups, Siegel domains.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

En el año 1933, el matemático húngaro Alfred Haar (1885-1933) introdujo la medida que lleva su nombre; una medida que puede construirse en cualquier grupo topológico localmente compacto, y de Hausdorff, G, y cuya propiedad fundamental es que es invariante bajo multiplicación por la derecha o por la izquierda por elementos del grupo, es decir, son medidas μ tales que para todo conjunto medible A y todo $g \in G$ cumplen $\mu(gA) = \mu(A)$ o $\mu(Ag) = \mu(A)$, según si son medidas por la izquierda o por la derecha respectivamente. El objetivo de este trabajo es construir la medida de Haar en dichos espacios, y mostrar algunas de sus aplicaciones.

Uno de los objetivos con los que se desarrolló el concepto de la medida de Haar fue el de dar respuesta al quinto problema de Hilbert. Por contextualizar, en el año 1900, en la conferencia internacional de matemáticos de París, el matemático alemán David Hilbert publicó una lista de 23 problemas no resueltos en la época (de los cuales muchos siguen aún sin respuesta). El quinto de estos problemas, trataba sobre grupos de Lie (grupos que son a su vez variedades diferenciables reales y tales que las operaciones producto e inversión son $\mathscr{C}^\infty$), y puede enunciarse como sigue [Fou]:

¿Es todo grupo topológico localmente euclídeo isomorfo a un grupo de Lie? [Tao]

No vamos a entrar en más detalles, pues en este trabajo no se va a estudiar este problema, pero sí que merece la pena destacar que la existencia de la medida de Haar fue de vital importancia para resolver este problema. De hecho, aunque vamos a trabajar con grupos de matrices reales en el último capítulo (que son grupos de Lie), no vamos a trabajar con grupos de Lie genéricos.

En cualquier caso, las aplicaciones de la medida de Haar no se reducen a la resolución de este problema. Por un lado, volviendo por última vez a los grupos de Lie (que son grupos topológicos de Hausdorff y localmente compactos), en ellos puede construirse una integral mediante formas diferenciales, y bajo ciertas condiciones, esa construcción lleva a una medida de Haar en el sentido en que la presentaremos en este trabajo. Esto por sí solo ya es de suma relevancia, pues los grupos de Lie son una herramienta de uso continuo en física teórica. También en el ámbito de la física, la medida de Haar tiene aplicaciones en teoría de la información cuántica [Mel24], lo cual no solo es interesante en sí mismo, sino que tiene potencial para dar lugar a numerosas aplicaciones prácticas una vez haya ordenadores cuánticos más capaces. En el ámbito de las matemáticas más puras, también podemos encontrarle utilidad a la medida de Haar. Por ejemplo, se utiliza en teoría de números, teoría de representaciones (para grupos compactos y localmente compactos), o en estadística y probabilidad, e incluso en análisis sobre los números p-ádicos [Zúñ22].

Más concretamente, la medida de Haar es una medida (en el sentido de la teoría de la medida) que se define sobre el σ-álgebra de Borel en grupos topológicos de Hausdorff y localmente compactos. Como detallaremos a lo largo del texto, un grupo topológico es un espacio topológico, que tiene además estructura de grupo, y para el que las operaciones producto e inversión son continuas. La particularidad de las medidas de Haar es que son invariantes bajo traslaciones vía la operación de grupo, es decir, generalizan la propiedad de invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue, con la salvedad de que hay que distinguir entre medidas invariantes bajo la operación del grupo por la derecha y por la izquierda, pues la medida de Haar existe en grupos no abelianos, pero ser invariante bajo operación por la derecha no garantiza, en general, ser invariante bajo operación por la derecha y viceversa. Uno de los teoremas centrales que demostraremos es que todo grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff admite una medida de Haar, que es esencialmente única una vez se elige un conjunto al que asignarle medida unidad. Para ciertas aplicaciones, es suficiente con mostrar que dichos grupos topológicos admiten una medida de Haar. Sin embargo, en ocasiones es muy útil considerar este tipo de medidas en conjuntos cociente G/H donde H es un subgrupo cerrado de G, que es el grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto de partida. Por supuesto, el caso en que H es normal es trivial una vez se demuestra que en ese caso G/H vuelve a ser de Hausdorff y localmente compacto, pues se vuelve a tener un grupo que admite una medida de Haar. El caso más interesante se produce cuando H no es normal, pues en ese caso G/H puede dotarse de la topología cociente, y puede construirse sobre él una medida invariante bajo la acción de G sobre G/H siempre que se cumplan ciertas condiciones que se detallarán llegado el momento. Es con esta construcción que se va a desarrollar el ejemplo concreto de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, espacio cociente que admite una medida $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-invariante, para la cual el cociente tiene medida finita.

En lo que se refiere a la estructura de este trabajo, en el primer capítulo se presentan algunos conceptos básicos de teoría de la medida, como pueden ser la definición de σ-álgebra, medida, o la definición de la integral a partir de una medida en un espacio de medida abstracto. Algunos de los resultados que aparecen en dicho capítulo no se demostrarán por dos motivos: en primer lugar, porque haría muy extenso el desarrollo, y en segundo lugar, porque muchos de esos resultados se presentan en los cursos estándares de grado en el contexto de la medida de Lebesgue, y la adaptación de las demostraciones a contextos más generales es sencilla. En este tema se incluyen también algunos resultados de carácter más específico que harán falta en capítulos posteriores, pero que se demuestran allí por su estrecha relación con la teoría de la medida abstracta. El segundo capítulo vuelve a ser de carácter introductorio. En él, se presentan los grupos topológicos, que son grupos en el sentido usual, y que tienen una topología que es compatible con la estructura de grupo, es decir, que hace continuas las operaciones de multiplicación e inversión. Se asume en este capítulo que el lector tiene un conocimiento básico de teoría de grupos y topología, y se demuestran numerosos resultados prácticos que son imprescindibles para el desarrollo de los capítulos posteriores. Se incluye al inicio una pequeña digresión sobre las posibles definiciones de un espacio topológico localmente compacto. Esto se debe a dos motivos principales. El primero es que durante todo el trabajo, se manejarán espacios localmente compactos, de modo que conviene coger soltura con la definición. El segundo, es que en ocasiones la definición de espacio localmente compacto que se da es diferente a que damos en este texto (que es la de [Mun00], referencia estándar de topología). Añadimos entonces un resultado que muestra que en espacios de Hausdorff, ambas definiciones son equivalentes. Concluimos el capítulo con un ejemplo desarrollado con cierto detalle; el grupo general lineal $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, que es el conjunto de matrices invertibles, al cual dotaremos de una topología y obtendremos así un primer ejemplo de grupo topológico. Este ejemplo será además relevante para el resto del texto, pues dedicaremos parte del mismo a estudiar algunos subgrupos suyos.

El tercer capítulo se dedica a probar los teoremas de existencia y unicidad de la medida de Haar. Comenzamos observando que basta con ver que existe una medida de Haar por la derecha (o por la izquierda), pues siempre es posible obtener una medida de Haar por la izquierda a partir de una por la derecha y viceversa. Tras esto, demostramos una serie de resultados accesorios y demostramos el teorema de existencia. Las referencias bibliográficas principales para dicho teorema son [Coh13] y [Gle10]. Ambos textos presentan una prueba muy similar, con ligeras modificaciones el uno respecto al otro. En ambas pruebas, así como en la dada aquí (que es una modificación de la dada por André Weil [Wei65]) utiliza el axioma de elección. Existen construcciones que no dependen del axioma de elección, como la dada por Élie Cartan, que puede encontrarse en [Nac76] o [HR94], aunque no entraremos en ellas. Una vez probada la existencia, damos la prueba de la unicidad (salvo multiplicación por constante positiva). Por último, dedicamos el final del capítulo a mostrar algunos ejemplos de medidas de Haar en diferentes grupos, así como a dar algunas consecuencias de su existencia.

En el capítulo 4, consideramos cocientes G/H en los que H es un subgrupo cerrado pero no normal. El caso en que H es normal no tiene particular interés una vez probado el teorema de existencia, pues en ese caso existe automáticamente una medida de Haar en G/H, que vuelve a ser un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff. Es interesante buscar lo que llamaremos medidas G-invariantes en G/H. Tras introducir una versión del lema de Urysohn, y el concepto de unimodularidad, veremos bajo qué condiciones ciertos cocientes admiten una medida G-invariante, que en su caso será única. Por último, dedicamos el capítulo 5 a mostrar un ejemplo detallado de la medida en un cociente. Concretamente, mostraremos que la medida del cociente $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es finita ($\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ con determinante unidad). Introduciremos para ello el concepto de dominio de Siegel. El grupo $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es un ejemplo de un tipo de grupo más general, que se conoce como *subgrupo* *aritmético* de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, y trata de generalizar la idea de *puntos enteros* ($\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$) a contextos más generales.

Aunque el texto trata de ser lo más autocontenido posible, habrá algunos resultados cuyas demostraciones no se incluirán, bien por ser resultados que se suponen conocidos por el lector, al entrar en el temario de alguna de las asignaturas obligatorias que se ven en el grado en matemáticas, o bien porque salgan del objetivo principal del texto. En todos estos casos, y en los casos en que se haga referencia a resultados que se suponen conocidos pero no se enuncian explícitamente, se incluirán referencias bibliográficas en las que encontrar dichas demostraciones.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE LA MEDIDA

En este capítulo, vamos a explorar una serie de definiciones y resultados básicos de teoría de la medida que son necesarios para contextualizar la medida de Haar, y que proporcionan herramientas que utilizaremos después para su construcción y estudio. La exposición que presentamos está basada fundamentalmente en [Coh13], libro que presenta un estudio muy detallado de la teoría de la medida, y al que referiremos al lector para algunas de las demostraciones. La teoría de la medida trata de generalizar los conceptos que tenemos de longitud, área y volumen a espacios abstractos, es decir, trata de responder formalmente a la pregunta de "cómo de grande es un determinado conjunto". Para dotar de sentido a estas ideas, necesitamos comenzar trabajando en un conjunto ambiente, que denotaremos X, y serán (algunos de) los subconjuntos de este los que trataremos de "medir".

El objeto de estudio de este trabajo no es la teoría de la medida en su forma más genérica, sino una aplicación concreta de la misma, es por ello que, para que no sea excesivamente extenso, se omitirán las pruebas de algunos resultados, en especial de aquellos resultados que son conocidos para la medida de Lebesgue, y cuyas demostraciones se adaptan sin dificultad a contextos más generales. Tampoco se detallarán las demostraciones de resultados que requieran mucho desarrollo previo. El resultado más importante que no demostraremos es el teorema de representación de Riesz. Se trata de un teorema que utilizaremos en varias pruebas a lo largo del trabajo, pero cuya demostración requeriría demasiados resultados previos. Sí que se darán todas las definiciones que vayan a ser necesarias, tratando de que el texto sea lo más autocontenido posible.

El capítulo está estructurado en 5 secciones. Las dos primeras se dedican a dar las definiciones básicas: medida, espacio de medida, σ-álgebra... La sección sobre medidas exteriores enuncia y prueba el teorema de Carathéodory, que es uno de los resultados en los que se apoya el teorema de existencia de la medida de Haar. Incluimos también una sección dedicada a la construcción de la integral. Esta sección es breve, pero se asume que el lector ya conoce cómo se construye la integral de Lebesgue, y una vez conocida esta construcción, la definición de la integral en espacios abstractos no supone ninguna dificultad. Finalmente, se dedica la última sección a enunciar generalizaciones de los teoremas clásicos del cálculo integral, como el teorema de Fubini, o el teorema del cambio de variable, resultados que se utilizarán de manera asidua a lo largo del trabajo. También se enunciará el teorema clásico del cambio de variable, pues vamos a utilizarlo con frecuencia en el desarrollo de los ejemplos de medidas de Haar en diferentes espacios. Esto se debe a que la mayoría de ejemplos de medida de Haar que vamos a manejar se construyen a partir de la medida de Lebesgue.

1.1. σ-álgebras y estructura básica

Definición 1.1 (**σ-álgebra**). Sea X un conjunto cualquiera, una σ-álgebra sobre X es una familia Ω de subconjuntos de X que satisface:

1. $X \in \Omega$.
2. Si $A \in \Omega$, entonces $A^c \in \Omega$.
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia numerable de subconjuntos de X tales que $A_n \in \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$.

Notemos que la última condición equivale a que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$. Además, combinando las condiciones 1 y 2 deducimos que $\varnothing \in \Omega$. Llamamos a los elementos de Ω *conjuntos medibles*. En el contexto de la medida de Haar, el conjunto X no será simplemente un conjunto, sino que estará dotado de una estructura adicional de espacio topológico. Necesitaremos además que exista una relación entre esta estructura y el correspondiente σ-álgebra. Es por ello que necesitamos poder construir "la menor σ-álgebra que contenga todos los abiertos de X", o lo que es lo mismo, la menor σ-álgebra que contenga la topología τ en X. Como vemos en la proposición siguiente, el σ-álgebra buscada existe.

Proposición 1.2. Sea X un conjunto, y $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria y no vacía de σ-álgebras sobre X. Entonces $\cap_{i \in I} \Omega_i$ es de nuevo una σ-álgebra sobre X.

Demostración. Sea $A \subset X$, si $A \in \Omega_i$ para cada $i \in I$, entonces $A^c \in \Omega_i$ para cada $i \in I$, luego es un elemento de la intersección. Este razonamiento aplica al propio X, y si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Omega_i$ para cada $i \in I$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega_i$ para todo $i \in I$, luego $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \cap_{i \in I} \Omega_i$. □

Corolario 1.3. Dados un conjunto X y una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de X, entonces existe la σ-álgebra más pequeña (para la relación de contención) de X que contiene a todos los elementos de $\mathcal{F}$.

Demostración. Es suficiente con notar que $\mathcal{P}(X)$ es siempre una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$ y, aplicando la proposición anterior, definir esta σ-álgebra como la intersección de todas las que contienen a $\mathcal{F}$. Nótese que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ garantiza que la familia de la proposición es no vacía. □

En particular, si $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$, denotaremos $\sigma(\Omega)$ a la σ-álgebra generado por la familia Ω. Con esto, podemos dar la definición siguiente.

Definición 1.4 (**σ-álgebra de Borel**). Dado un espacio topológico X con topología τ, la *σ-álgebra de Borel* de X, denotado $\mathcal{B}(X)$ es la menor σ-álgebra de X que contiene a τ. Si $A \in \mathcal{B}(X)$, diremos que A es un *subconjunto de Borel* de X.

Notemos que, en términos de la definición anterior, $\sigma(\tau) = \mathcal{B}(X)$.

Ejemplo 1.5. El ejemplo más común es la σ-álgebra de $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel contiene a todos los intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos (con uno de los extremos pudiendo ser infinito). De hecho, la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ está generada por cada uno de los tipos de intervalos separadamente. Para $\mathbb{R}^d$, generan la σ-álgebra los cerrados, los semiespacios cerrados $\{(x_1, \dots x_d) : x_i \leq b\}$ y los rectángulos del tipo $\{(x_1, \dots x_d) : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots d\}$ No probaremos aquí estos resultados, pero una demostración puede encontrarse en [Coh13, Prop. 1.1.4 y Prop. 1.1.5].

Normalmente, en análisis siempre se trabaja con conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^d$, y de hecho, casi todo conjunto interesante en análisis es de Borel.

1.2. Medidas

Una vez establecidos cuáles son los conjuntos que queremos poder medir, necesitamos encontrar una manera de hacerlo. Para ello, y buscando generalizar los conceptos de medida en $\mathbb{R}^d$, definimos una medida como una aplicación definida en la σ-álgebra que cumple una serie de propiedades que son a la vez razonables y convenientes para una aplicación destinada a "medir el tamaño" de los conjuntos.

Definición 1.6 (medida). Sea X un conjunto y Ω una σ-álgebra en X. Una *medida* sobre X es una aplicación $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ que satisface:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de Ω tal que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, entonces $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Además, diremos que la medida es *finita* si $\mu(X) < \infty$, y *σ-finita* si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de medibles tales que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Las medidas son aplicaciones que tienen llegada en la *recta real extendida*. La definición y construcción de este espacio se detallan en la sección 1.4. Por el momento, basta con saber que esto permite que algunos conjuntos tengan medida infinita cuando se trabaja con medidas abstractas, del mismo modo que se dice que $\mathbb{R}$ tiene medida infinita cuando se trabaja con la medida de Lebesgue usual. Nótese que si $\mu(A_n) \in [0, \infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \in [0, \infty]$, y la suma tiene sentido en la recta real ampliada, sea o no convergente la serie. Además, toda medida es automáticamente finitamente aditiva, es decir, la medida de una familia finita de conjuntos medibles disjuntos es la suma de las medidas, esto es obvio tomando una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos en la que todos los conjuntos sean el vacío salvo una cantidad finita de ellos. Si X es un conjunto y Ω es una σ-álgebra sobre X, decimos que (X, Ω) es un *espacio medible*, y que (X, Ω, μ) es un *espacio de medida*. La propiedad 2 de la definición anterior se llama *aditividad numerable*.

Ejemplo 1.7.

1. Dado X un conjunto cualquiera y Ω una σ-álgebra cualquiera, podemos definir la *medida del conteo* como
$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si} \quad A \text{ es finito} \\ \infty & \text{si} \quad A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

2. Manteniendo X y Ω cualesquiera, y fijando $x \in X$ se define la *medida de Dirac asociada a* x como
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

En ambos casos se comprueba fácilmente que las dos aplicaciones cumplen los axiomas de la definición de medida. Veamos el primer ejemplo con algo de detalle. Es evidente que $\mu(\varnothing) = |\varnothing| = 0$. Tomemos entonces una familia $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de medibles disjuntos dos a dos. Distingamos casos.

1. Si hay una cantidad infinita de conjuntos no vacíos en la familia, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto infinito, y la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ tiene una cantidad infinita de términos mayores o iguales que 1, luego tenemos la igualdad $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$.

2. Si todos los conjuntos son vacíos salvo una cantidad finita de ellos (salvo reordenación, supongamos que los k primeros son los no vacíos), entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \sqcup_{n=1}^{k} A_n$, y como la unión es disjunta, su cardinal es la suma de los cardinales de los A_n.

Proposición 1.8 (propiedades básicas de las medidas). Sea (X, Ω, μ) un espacio de medidas. Entonces:

1. Si A, B son medibles y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$, y si además $\mu(A) < +\infty$, se tiene $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia numerable de medibles, entonces $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A)_n$.

Demostración.

1. A y $B \backslash A$ son disjuntos y su unión es B. Por las propiedades de la definición de medida, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$, luego la desigualdad se obtiene de manera inmediata, pues si $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(B) = \infty$, y se da igualdad, y si son finitas, el resultado sigue trivialmente de $\mu(B \backslash A) \geq 0$. Además, si $\mu(A) < \infty$, se puede pasar restando al otro miembro para obtener la igualdad deseada. Nótese que para poder hacer esto último solamente es necesario que A tenga medida finita, si B o la diferencia tienen medida infinita, el razonamiento que hemos realizado sigue teniendo sentido.

2. Definamos $B_1 = A_1$ y $B_n = A_n \backslash \left(\cup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ para $n \geq 2$. Por construcción, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de medibles disjuntos (son medibles porque se construyen a partir de uniones e intersecciones de medibles y sus complementarios). Aplicando entonces la aditividad numerable y el apartado anterior,

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

ya que $B_n \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Aunque en la definición de medida no se exige que X sea un espacio topológico, en muchas ocasiones se definen medidas en espacios topológicos, pues esta nueva estructura aporta mucha riqueza a la teoría. Bajo esta hipótesis, una medida de Borel regular, que definimos a continuación, es una medida que relaciona las estructuras topológica y medible. Este concepto es muy relevante, pues la medida de Haar es una medida de de Borel regular.

Definición 1.9 (medida de Borel regular). Sean X un espacio topológico de Hausdorff y μ una medida sobre $\mathcal{B}(X)$. Decimos que μ es una *medida de Borel regular* si satisface:

1. $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K.

2. Si $E \subset X$ es medible, entonces $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\}$. Esta propiedad se llama *regularidad exterior* .

3. Si $U \subset X$ es abierto, entonces $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \text{ compacto}\}$. Esta propiedad se llama *regularidad interior* .

En primer lugar, el hecho de exigir que X sea de Hausdorff se hace para asegurar que los conjuntos compactos sean cerrados, y por ello medibles. Esto hace que tenga sentido pedir $\mu(K) < \infty$. Observemos que el inferior y el superior en la definición anterior siempre tienen sentido. En el caso del inferior, basta notar que las medidas de conjuntos están acotadas inferiormente por 0, luego el conjunto $\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\}$, que es no vacío porque contiene a $\varnothing$, lo está también. Para el superior, basta notar que la medida puede ser infinita. Además, si $U \neq \varnothing$, entonces $\{\mu(K) : K \subset U, K \text{ compacto}\}$ es no vacío, pues contiene a los conjuntos unipuntuales formados por los elementos de U, que son compactos por ser finitos.

Observación 1.10. En algunas ocasiones, las medidas que satisfacen estas propiedades se llaman *medidas de Radon* (ver, por ejemplo [Tor20]). También hay ocasiones en las que no se pide exactamente que una medida Borel esté definida en $\mathcal{B}(X)$, sino que se permite que esté definida en una σ-álgebra más grande que lo contenga. Puesto que no hay una tendencia clara en la literatura, se han fijado las definiciones de [Coh13]. En caso de consultarse alguna de las fuentes de la literatura, téngase en cuenta que quizás haya algunas definiciones ligeramente diferentes a las aquí proporcionadas.

Proposición 1.11. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida, con $\mathcal{B}(G) \subset \Omega$, $a \in (0, \infty)$ y supongamos que μ es una medida de Borel regular. Entonces la aplicación $\nu : \Omega \to [0, +\infty]$ definida por $\nu(E) := a\mu(E)$ para cada $E \in \Omega$ es de nuevo una medida de Borel regular.

Demostración. Claramente ν cumple las propiedades de la definición de medida. Además, si K es compacto, $\nu(K) = a\mu(K) < \infty$. Por otro lado, para cada $E \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\nu(E) =& a\mu(E) = a \cdot \text{ínf}\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\} = \text{ínf}\{a\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\} \\ =& \text{ínf}\{\nu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que se toma el inferior de cantidades mayores o iguales que 0 y que $a > 0$. Del mismo modo se prueba que para cada U abierto

$$\nu(U) = \sup\{\nu(K) : K \subset U, K \text{ compacto}\}.$$

□

1.3. Medidas exteriores

En ocasiones, como va a suceder en la construcción Haar que propondremos después, no se construye directamente una medida, sino que se construye un objeto más simple, llamado medida exterior, y después se demuestra que este objeto, al restringirse sobre cierta σ-álgebra, es una medida. Esto se hace mediante el teorema de Carathéodory, que demostramos también en esta sección.

Definición 1.12 (medida exterior). Sea X un conjunto cualquiera. Una *medida exterior* sobre X es una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty)$ que satisface las propiedades siguientes:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Esta propiedad se llama *monotonía*.
3. Para toda familia numerable de subconjuntos de X, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ se cumple $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Además, dado $B \in \mathcal{P}(X)$, diremos que es μ^**-medible* si para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \tag{1.1}$$

Nótese que no toda medida es una medida exterior. En efecto, si una medida no está definida en todo $\mathcal{P}(X)$, sino en un conjunto más pequeño, no puede ser una medida exterior.

Observación 1.13. Nótese que a la hora de mostrar que un conjunto B es μ^*-medible, no es necesario probar la igualdad de (1.1), pues la desigualdad

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

se obtiene a partir de la definición de medida exterior, observando que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, y tomando una sucesión con $A_1 = A \cap B$, $A_2 = A \cap B^c$ y $A_n = \varnothing, n \geq 3$. Es por ello que solamente es necesario demostrar la otra desigualdad.

Proposición 1.14. Sea X un conjunto cualquiera y sea μ^* una medida exterior. Si B cumple $\mu^*(B) = 0$ o $\mu^*(B^c) = 0$, entonces B es un conjunto μ^*-medible.

Demostración. De acuerdo con la observación anterior, tomamos $A \subset X$ y tenemos que probar

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Supongamos que $\mu^*(B) = 0$, entonces, como $A \cap B \subset B$, de la monotonía de la medida exterior deducimos que $\mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(B) = 0$, y finalmente, dado que $A \cap B^c \subset A$, se tiene $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) = \mu^*(A \cap B^c) \leq \mu^*(A)$, como queríamos probar. Si $\mu^*(B^c) = 0$, entonces $\mu^*(A \cap B^c) = 0$ y el razonamiento es análogo. □

El siguiente resultado es el que va a permitir obtener medidas definiendo en primer lugar una medida exterior. Además, una vez definida la medida exterior, nos proporciona directamente la σ-álgebra a utilizar.

Teorema 1.15 (de Carathéodory). Sea X un conjunto cualquiera y μ^* una medida exterior sobre X. Entonces se cumplen las propiedades siguientes:

1. El conjunto Ω_{μ^*} de los conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra sobre X.

2. La restricción de μ^* a Ω_{μ^*} es una medida sobre X (que denotamos μ).

Demostración. Comenzamos probando que Ω_{μ^*} es una σ-álgebra a partir de la definición. Tanto $\varnothing$ como X satisfacen la condición de la proposición 1.14, luego son elementos de Ω_{μ^*}. Además, notemos que la ecuación (1.1) no cambia si se sustituye B por B^c, luego Ω_{μ^*} es invariante bajo toma de complementarios, lo cual prueba la segunda parte de la definición 1.1. Finalmente, hemos de mostrar que si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de Ω_{μ^*}, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Omega_{\mu^*}$. Para ello, comenzamos mostrando que si $B_1, B_2 \in \Omega_{\mu^*}$, entonces $B_1 \cup B_2 \in \Omega_{\mu^*}$. Sea $A \subset X$ cualquiera. Dado que B_1 es μ^*-medible, se tiene, aplicando la definición de conjunto medible a $A \cap (B_1 \cup B_2) \in \mathcal{P}(X)$, la identidad siguiente

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) &= \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) \\ &\overset{(1)}{=} \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde en (1) hemos utilizado simplemente la igualdad $A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1 = A \cap B_1$. Por otro lado, $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$. Con esto,

$$\mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) = \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c)$$
$$\overset{(1.2)}{=} \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*((A \cap B_1^c) \cap B_2) + \mu^*((A \cap B_1^c) \cap B_2^c) \overset{(2)}{=} \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) \overset{(3)}{=} \mu^*(A),$$

utilizando que B_1 y B_2 son medibles en (3) y (2) respectivamente. Como A era arbitrario, deducimos que $B_1 \cap B_2$ debía ser medible. Dicho esto, tomemos una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos *disjuntos dos a dos* y veamos por inducción que

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n} B_i^c))$$

para cada $A \subset X$.

Para $n = 1$ tenemos simplemente la medibilidad de B_1, que es cierta por hipótesis de inducción. Para n lo suponemos cierto, veámoslo para $n+1$. Utilizando que B_{n+1} es medible y que la sucesión es disjunta,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n} B_i^c)) &= \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n} B_i^c) \cap B_{n+1}) + \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n} B_i^c) \cap B_{n+1}^c) = \\ &= \mu^*(A \cap B_{n+1}) + \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n+1} B_i^c)). \end{aligned}$$

Concretamente, hemos utilizado que $B_{n+1} \subset B_j^c$ para $j \neq n+1$. Con lo cual, utilizando la hipótesis de inducción y la igualdad anterior

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n} B_i^c)) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap B_{n+1}) + \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n+1} B_i^c)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap (\cap_{i=1}^{n+1} B_i^c)). \end{aligned}$$

En esta última igualdad, el miembro derecho no aumenta (de hecho, podría disminuir) si sustituimos $\mu^*(A\cap(\cap_{i=1}^{n+1}B_i^c))$ por $\mu^*(A\cap(\cap_{i=1}^{\infty}B_i^c)) = \mu^*(A\cap(\cup_{i=1}^{\infty}B_i)^c)$, pues $A\cap(\cap_{i=1}^{\infty}B_i^c) \subset A\cap(\cap_{i=1}^{n+1}B_i^c)$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)^c).$$

Por ello, la desigualdad se mantiene al hacer $n \to \infty$ en la suma

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)^c). \tag{1.3}$$

Además, por la subaditividad numerable de μ^*, tenemos $\mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)) = \mu^*(\cup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i)$ de modo que

$$\begin{aligned}\mu^*(A) \geq& \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)^c)\\ \geq& \mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)) + \mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i)^c) \geq \mu^*(A),\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la observación 1.13. Concluimos así que $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \Omega_{\mu^*}$. Para concluir que Ω_{μ^*} es una σ-álgebra, hemos verificar que es cerrada para uniones numerables arbitrarias. Es decir, sin asumir que la familia esté compuesta por conjuntos disjuntos dos a dos. Tomando una failia numerable arbitraria de conjuntos de Ω_{μ^*}, que seguimos denotando $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos $C_n := (\cap_{i=1}^{n-1} B_i^c) \cap B_n$. Observemos que $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Explícitamente, la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$$B_1,\ B_1^c \cap B_2,\ \dots\ B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots B_{n-1}^c \cap B_n,$$

y esta sucesión es disjunta por construcción. Así, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} C_n \in \Omega_{\mu^*}$, y concluimos que Ω_{μ^*} es en efecto una σ-álgebra sobre X.

Finalmente, veamos que μ^* es una medida al restringirla sobre Ω_{μ^*}. Como ya es una medida exterior, solamente hemos de verificar que se cumple la aditividad numerable. Para ello, basta notar que si tomamos la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos disjuntos, y $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces, aplicando la expresión (1.3) a A, se obtiene

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \mu^*((\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n)^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

Puesto que la otra desigualdad es cierta por ser μ^* una premedida, se tiene la igualdad, lo cual concluye el resultado. □

1.4. Funciones medibles e integración

Una vez definido el concepto de medida, buscamos definir la integral de funciones que toman valores en espacios de medida arbitrarios. El procedimiento es análogo al que se utiliza para definir la integral de Lebesgue, así que simplemente vamos a hacer un esbozo del mismo, sin entrar en demasiados detalles. Esta sección está basada en [Fol13]. En todos los resultados siguientes, (X, Ω, μ) denota un espacio de medidas, y $E \subset X$ es un conjunto medible.

Definición 1.16 (aplicación medible). Sean (X, Ω) y (Y, Σ) dos espacios medibles. Una aplicación $f : X \to Y$ se llama *medible* si para cada $E \in \Sigma$, se cumple $f^{-1}(E) \in \Omega$.

En particular, nos interesan las funciones medibles $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, donde $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es la *recta real ampliada* o *recta real extendida*. Dicho conjunto se dota de una topología y una relación como describimos a continuación.

1. Relación de orden. Si $a, b \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, se mantiene su relación de orden. Si $b = \pm\infty$ se define el orden en $\overline{\mathbb{R}}$ de manera que $-\infty < a < \infty$.

2. Topología. Dado $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, A es abierto si para cada $x \in A$ se tiene:

   a) Si $x \in \mathbb{R}$, existe $r > 0$ con $(x-r, x+r) \subset A$. En particular, los abiertos de $\mathbb{R}$ son abiertos de $\overline{\mathbb{R}}$.

   b) Si $x = \infty$, existe $C \in \mathbb{R}$ con $(C, \infty] := (C, \infty) \cup \{\infty\} \subset A$.

   c) Si $x = -\infty$, existe $D \in \mathbb{R}$ con $[-\infty, D) := (-\infty, D) \cup \{-\infty\} \subset A$.

3. Operaciones. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define la operación de modo que $a \pm \infty := \pm\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $a \cdot (\pm\infty) = \pm\operatorname{sgn}(a)\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = \infty \cdot \infty = \infty$ e $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$. Se conviene además que $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Obsérvese que la topología usual de $\mathbb{R}$ es la topología de subespacio inducida por $\overline{\mathbb{R}}$, y esto implica que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Así, una función medible con llegada en $\mathbb{R}$, también lo es cuando se ve con llegada en $\overline{\mathbb{R}}$.

Para definir la integral, se comienzan definiendo las funciones *indicatrices*. Dado $E \subset X$, se define su función indicatriz asociada como:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

Nótese que $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ es una función medible si y solo si lo es $E \subset X$. A partir de aquí, una función s, en general compleja, se denomina *simple* si alcanza solamente una cantidad finita de valores: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Es claro que en ese caso, s puede escribirse de forma única como combinación lineal de funciones indicatrices del modo siguiente, que se denomina *forma canónica o estándar* de s,

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \qquad \text{donde} \qquad E_i := s^{-1}(\alpha_i). \tag{1.4}$$

Para definir la integral de una función medible cualquiera, el primer paso es definirla para las funciones simples y medibles, e ir generalizando esta definición, primero a las funciones medibles positivas, y después a las funciones medibles con llegada en la recta real extendida.

Definición 1.17. Sea $s : X \to [0, \infty]$ simple y medible, cuya forma canónica está dada por (1.4) y sea $E \subset X$ medible, entonces se define

$$\int_E s(x) \mathrm{d}\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(E_i \cap E).$$

Nótese que si s es medible, también lo son los E_i, y como E es medible, la expresión anterior es una suma bien definida que es o bien finita y positiva, o bien $+\infty$.

A partir de aquí, si $f : X \to [0, \infty]$ es medible, su integral en un conjunto medible E con respecto de la medida μ se define a partir de las integrales de funciones simples del modo siguiente

$$\int_E f(x) \mathrm{d}\mu := \sup\Big\{ \int_E s(x) \mathrm{d}\mu : s : X \to [0, \infty] \text{ es simple y } 0 \leq s \leq f \Big\}.$$

En principio, se tienen dos definiciones para las integrales de funciones simples, pero puede comprobarse, al igual que en el caso de la medida de Lebesgue, que coinciden (ver [Fol13, Prop. 2.13]). Extendemos ahora esta definición a funciones reales cualesquiera.

Definición 1.18. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, se definen sus partes positiva y negativa como

$$f^+ := \text{máx}\{f, 0\} \qquad f^- := \text{máx}\{-f, 0\}$$

y se define, cuando al menos una de las integrales $\int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu$, $\int_E f^-(x)\mathrm{d}\mu$ es finita, la *integral* de f

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) := \int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_E f^-(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

En ese caso se dice que la integral *existe*. Decimos que f es integrable en E cuando ambas integrales anteriores son finitas, es decir, cuando $\int_E |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < \infty$. Denotamos $\mathscr{L}^1(E, \mathbb{R})$ al conjunto de las funciones integrables definidas en E.

Notación 1.19. Es común escribir $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ para explicitar que se integra con respecto a la medida μ, y respecto a la variable (f podría depender de otros parámetros). En ocasiones, también se prescinde totalmente de la variable de integración, y se escribe simplemente $\int_E f\ \mathrm{d}\mu$. A lo largo del trabajo, se van a utilizar indistintamente estas notaciones. También es habitual escribir $\int f \mathrm{d}\mu$ para indicar que se integra a todo el espacio X. Nosotros explicitaremos siempre el conjunto sobre el que se integra, aunque esta última notación es frecuente en la literatura. Por último, cabe destacar que para cualquier medible E, se tiene la identidad $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E \mathrm{d}\mu$.

Al igual que se hace cuando se estudia la integral de Lebesgue, se define $L^1(E, \mathbb{R}) := \frac{\mathscr{L}^1(E;\mathbb{R})}{\mathcal{R}}$ donde $\mathcal{R}$ es la relación de equivalencia $f \sim g$ si y solo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \backslash A$ donde $\mu(A) = 0$. En estas condiciones, suele decirse que f y g coinciden *casi siempre*. Es decir, dos funciones coinciden casi siempre si coinciden en todo punto salvo en un conjunto de medida nula.

Consideramos finalmente el caso de las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ medibles. Diremos que son integrables en E si $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son integrables como funciones reales, y en ese caso, se define su integral como:

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mathrm{d}\mu(x) := \int_E \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}\mu(x) + i\int_E \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

Puede probarse que $f : X \to \mathbb{C}$ es medible si y solo si $|f| : X \to [0, \infty]$ lo es, y que f es integrable sí y solo $\int_E |f(x)|d\mu(x) < \infty$. Se define entonces $\mathscr{L}^1(E, \mathbb{C})$ como el conjunto de funciones complejas integrables en E, y $L^1(E, \mathbb{C})$ de manera análoga al caso real.

Observación 1.20. Como vimos en la proposición 1.11, si μ es una medida en un espacio medible (X, Ω), entonces $\nu := a\mu$ para $a > 0$ define también una medida en el mismo espacio. Es entonces inmediato, a partir de la definición de integral que hemos dado, que para cada $f \in L^1(X, \mathbb{C})$ y cada $E \in \Omega$ se tiene la igualdad

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\nu(x) = a\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Damos finalmente algunas propiedades sobre la integral que no demostraremos (las demostraciones son muy similares a las dadas al trabajar con la integral de Lebesgue).

1. La integral es lineal, es decir, si $f, g : X \to \mathbb{C}$ son integrables en un conjunto E medible, y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces:
$$\int_E (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\mathrm{d}\mu + \beta\int_E g\mathrm{d}\mu$$
2. La integral es monótona, es decir, si $f, g : G \to \overline{\mathbb{R}}$ son integrables y $f(x) \le g(x)$ para cada $x \in E$, entonces $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) \le \int_E g(x)\mathrm{d}\mu(x)$. [Coh13, Prop 2.3.6]
3. $f : E \to \mathbb{C}$ es integrable si y solo si lo es $|f|$, en cuyo caso, $|\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)| \le \int_G |f(x)|\mathrm{d}\mu(x)$.
4. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida, $E \in \Omega$ y $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, s_n : E \to [0, +\infty)$ tal que $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$ para cada $x \in E, n \in \mathbb{N}$ y con $f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} s_n(x)$ para cada $x \in E$. [Coh13, Prop 2.1.8]

5. **Teorema de la convergencia monótona** [Coh13, Th 2.4.1]. Seaed (X, Ω, μ) un espacio de medida, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : X \to [0, +\infty]$. Supongamos que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ casi siempre. Entonces,

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

6. Dados un espacio de medida (X, Ω, μ), y una función $f : X \to \mathbb{R}$ son equivalentes las afirmaciones siguientes: [Fol13, Prop 2.3]:

   a) f es medible.

   b) $f^{-1}((a, \infty)) \in \Omega$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

   c) $f^{-1}([a, \infty)) \in \Omega$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

   d) $f^{-1}((-\infty, a)) \in \Omega$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

   e) $f^{-1}((-\infty, a]) \in \Omega$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

1.5. Resultados auxiliares de teoría de la medida

Dedicamos esta última sección a enunciar y probar algunos resultados auxiliares que utilizaremos a lo largo del trabajo. Entre ellos, uno de los más importantes es el teorema de representación de Riesz, que nos permite relacionar las medidas de Borel regulares con los funcionales positivos que actúan sobre funciones continuas de soporte compacto. Antes de enunciarlo, recordamos brevemente el concepto de *soporte de una función*, así como algunas de sus propiedades.

Definición 1.21 (soporte de una función). Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ (o $f : X \to \mathbb{C}$) una función, se define su soporte como el conjunto

$$\operatorname{sop}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

El conjunto de funciones *reales* continuas y cuyo soporte es compacto se denota $\mathscr{C}_c(X)$.

Fijémonos en que $\operatorname{sop}(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})}$ si f es real (si es compleja, se cambia $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$). Merece la pena destacar que puede haber puntos en el soporte en los que f se anule, por ejemplo, para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to t$, $f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, conjunto cuya adherencia es todo $\mathbb{R}$. Lo que sí que es cierto, es que para cualquier $f : X \to \mathbb{R}$, si $x \notin \operatorname{sop}(f)$, entonces $f(x) = 0$. Por otro lado, es claro que la combinación lineal de funciones de soporte compacto vuelve a tener soporte compacto. En efecto, si $f, g \in \mathscr{C}_c(X)$, y se define $h := \alpha f + \beta g$, entonces,

$$\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subset \{x \in X : f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X : g(x) \neq 0\}.$$

Tomando adherencias, se sigue que $\operatorname{sop}(h) \subset \operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(g)$ siendo el segundo compacto por ser unión finita de compactos.

El otro ingrediente necesario para enunciar el teorema de representación de Riesz es el concepto de funcional lineal positivo. Un *funcional lineal positivo* en $\mathscr{C}_c(X)$ es una aplicación lineal $\phi : \mathscr{C}_c(X) \to \mathbb{R}$ tal que si $f \in \mathscr{C}_c(X)$ cumple $f(x) \geq 0$ para cada $x \in X$, entonces $\phi(f) \geq 0$. Es decir, un funcional lineal positivo es una aplicación lineal definida en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathscr{C}_c(X)$ que envía funciones no negativas en números reales positivos.

Teorema 1.22 (de representación de Riesz). Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, y sea $\phi : \mathscr{C}_c(X) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal positivo. Entonces existe una única medida de Borel regular μ en X tal que:

$$\phi(f) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{para cada } f \in \mathscr{C}_c(X)$$

Además, para todo abierto $U \subset X$, y todo compacto $K \subset X$ se cumple

$$\mu(U) = \sup\{\phi(f) : f \prec U, f \in \mathscr{C}_c(X)\} \qquad \mu(K) = \inf\{\phi(f) : K \prec f, f \in \mathscr{C}_c(X)\}$$

Demostración. Una prueba de este resultado requeriría demostrar y enunciar muchos resultados previos, con lo que no la detallaremos aquí. Puede consultarse en [Coh13, Th 7.2.8]. □

En el teorema anterior, utilizamos las notaciones $K \prec f$ para indicar que $f(k) = 1$ para cada $k \in K$ y $f \prec U$ para indicar que $\mathrm{sop}(f) \subset U$. Estas notaciones se desarrollan en el contexto del lema Urysohn, que probamos en el capítulo 4. Obsérvese que toda función continua de soporte compacto está acotada, de modo que $\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ siempre es un número real positivo. Este resultado es muy útil por varias razones, pero la principal es que permite ver si dos medidas son la misma, pues basta comprobar que al integrar con dichas medidas funciones reales de soporte compacto, el resultado obtenido es el mismo.

Vamos a introducir brevemente ahora el concepto de medida producto. El caso en que lo introducimos aquí no es exactamente el que vamos a estudiar después, pues vamos a comenzar introduciendo la medida producto en espacios de medida cualesquiera, a los que no les pedimos que tengan estructura de espacio topológico. En la subsección siguiente estudiaremos el caso particular de los espacios de medida que son además espacios topológicos localmente compactos y de Hausdorff. Para una exposición detallada de los resultados que vamos a presentar, referimos a [Coh13, Cap. 5]. Dados (X, Ω) y (Y, Σ) dos espacios medibles, y $X \times Y$ su producto cartesiano, un conjunto $A \times B$ con $A \in \Omega$ y $B \in \Sigma$ se llama *rectángulo de lados medibles*. Llamamos *σ-álgebra producto* en $X \times Y$ al generado por todos los rectángulos de lados medibles, y lo denotamos $\Omega \times \Sigma$. Además, dado un conjunto medible $E \in \Omega \times \Sigma$, se definen sus secciones como los conjuntos:

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \subset Y \qquad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\} \subset X.$$

Si μ y ν son medidas en X e Y respectivamente, entonces las aplicaciones $x \mapsto \nu(E_x)$ e $y \mapsto \mu(E^y)$ son medibles (ver [Coh13, Prop 5.1.3]). Además, si $f : X \times Y \to Z$ es una función definida sobre otro conjunto, definimos las *secciones* de f como las aplicaciones:

$$f_x(y) = f(x, y) \qquad f^y(x) = f(x, y).$$

Nótese que para x fijo, f_x es una función definida en Y y para y fijo, f^y es una función definida en X, ambas con llegada en Z.

Teorema 1.23. Sean (X, Ω, μ) y (Y, Σ, ν) dos espacios de medidas, con μ y ν σ-finitas. Entonces, existe una única medida, llamada *medida producto* y denotada $\mu \times \nu$ en $\Omega \times \Sigma$ tal que

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

para todos $A \in \Omega, B \in \Sigma$. Además, para cada $E \in \Omega \times \Sigma$ se tiene

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\mathrm{d}\mu(y)$$

Por supuesto, la generalización a un producto finito de espacios medibles es inmediata, manteniendo las definiciones razonables. Por ejemplo, dados espacios de medida $(X_i, \Omega_i), 1 \leq$

$i \leq n$, la σ-álgebra producto es la generada por los rectángulos n-dimensionales $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ con $A_i \in \Omega_i$, y se denota $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$. Las secciones se definen de manera análoga: para E medible,

$$E_{x_i} = \{(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n : (x_1, \ldots x_n) \in E\},$$

y se tiene un resultado análogo al teorema anterior, que permite construir una medida producto $\prod_{i=1}^n \mu_i$ en el espacio producto a partir de las medidas $\mu_1, \ldots \mu_n$. Es conveniente recordar entonces los teoremas de Fubini y Toneli, que establecen que, en las condiciones anteriores, si f es una función $\Omega \times \Sigma$-medible, y positiva o integrable, respectivamente, entonces la integral con respecto a la medida producto podrá hacerse iteradamente en cualquier orden. Esto es,

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \times \nu)(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y).$$

Observación 1.24. En $\mathbb{R}^n$ se puede construir la medida de Lebesgue λ_n construyendo una medida exterior a partir de semi-intervalos, y aplicando después el teorema de Carathéodory. Ahora bien, en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ también se puede considerar la medida producto $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_1$. Resulta que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, y que $\lambda_n = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_1$. Denotaremos por λ_n la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, y simplemente por λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (omitiremos el subíndice 1). En particular, la medida de Lebesgue es σ-finita, de modo que los teoremas de Fubini y Toneli se aplican, y permiten intercambiar el orden de las integrales.

También en lo que se refiere a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, enunciamos el teorema del cambio de variable, que pese a ser un resultado estándar de análisis, vamos a utilizar con mucha frecuencia a lo largo del texto.

Teorema 1.25 (del cambio de variables). Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, y $\varphi : U \to V$ un difeomorfismo. Sea $E \subset V$ medible. Una función f es integrable en E si y solo si $(f \circ \varphi) \cdot |\det \mathcal{J}\varphi|$ es integrable en $\varphi^{-1}(E)$. Además, en ese caso,

$$\int_E f(y)\mathrm{d}\lambda_n(y) = \int_{\varphi^{-1}(E)} (f \circ \varphi)(x) \cdot |\det \mathcal{J}\varphi(x)|\mathrm{d}\lambda_n(x).$$

Este teorema puede generalizarse en cierto sentido, proporcionando un resultado que permite pasar integrales de un espacio de medida a otro, siempre que haya una aplicación medible entre ellos, y que las medidas en cada uno estén relacionadas. Es decir, siempre que una medida sea la medida *push-forward* obtenida de la otra mediante la aplicación f.

Definición 1.26. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medidas, e (Y, Σ) un espacio medible. Dada una función medible $f : X \to Y$, se define la aplicación siguiente,

$$\begin{array}{rccc} f_*\mu : & \Sigma & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & E & \mapsto & f_*\mu(E) := \mu(f^{-1}(E)). \end{array}$$

La aplicación $f_*\mu$ es una medida, y se llama *medida progrediente* (en inglés, *push-forward measure*).

Es claro que $f_*\mu$ está bien definida por ser f medible. Además, $f_*\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$, y si $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de medibles disjuntos de Y, entonces $\{f^{-1}(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de medibles disjuntos de X y

$$f_*\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^\infty f_*\mu(B_n),$$

con lo que $f_*\mu$ define verdaderamente una medida. Con esto, podemos enunciar la generalización del teorema del cambio de variable que introducíamos antes.

Teorema 1.27. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medidas, y (Y, Σ) un espacio medible. Sea $f : X \to Y$ una función medible, y $g : Y \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces g es $f_*\mu$-integrable si y solo si $g \circ f$ es μ-integrable y en ese caso, se tiene la igualdad:

$$\int_Y g(y)\mathrm{d}(f_*\mu)(y) = \int_X (g \circ f)(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Demostración. Ver [Coh13, Prop. 2.6.8] □

1.5.1. Productos de espacios localmente compactos

La medida de Haar se construye en espacios topológicos de Hausdorff y localmente compactos. Es por ello interesante dedicar una sección al estudio de las medidas en este tipo de espacios, y más concretamente, al estudio de sus productos. El estudio que presentamos se basa principalmente en [Coh13, Sec. 7.6] y se centra en demostrar un resultado que permite intercambiar el orden de las integrales, de un modo similar a como ocurre con el teorema de Fubini en análisis.

El teorema 1.23 establece que si μ y ν son medidas σ-finitas en espacios medibles (X, Ω) e (Y, Σ), entonces existe una única medida producto cumpliendo $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ para $A \in \Omega, B \in \Sigma$. Nos gustaría tener un resultado similar pero no para medidas cualesquiera, sino para medidas de Borel regulares. Vamos a tomar X e Y espacios de Hausdorff y localmente compactos, y vamos a suponer que μ y ν son medidas de Borel regulares. En primer lugar, $X \times Y$ vuelve a ser un espacio de Hausdorff y localmente compacto, y sería conveniente que la construcción que se expone en el teorema 1.23 proporcionase nuevamente una medida de Borel regular. Sin embargo, esto en general no será cierto, pues no hay ninguna garantía de que una medida de Borel sea σ-finita. Además, no estamos considerando el producto solamente como producto de σ-álgebras, sino también como espacio topológico, y puede ocurrir que $\mathcal{B}(X \times Y) \not\subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Aquí, $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ denota el *σ-álgebra producto*, y $\mathcal{B}(X \times Y)$ el *σ-álgebra de Borel del espacio producto*. De hecho, siempre se tiene $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ [Coh13, Lema 7.6.1], y cuando ambos espacios cumplen el segundo axioma de numerabilidad, es decir, tienen bases numerables de sus topologías, entonces se da la igualdad. De hecho, en ese caso, si μ y ν son medidas regulares de Borel, entonces son automáticamente σ-finitas, y $\mu \times \nu$, definida como en el teorema 1.23 vuelve a ser una medida de Borel regular [Coh13, Prop. 7.6.2]. El problema es que no siempre vamos a trabajar con espacios que cumplan el segundo axioma de numerabilidad, y de hecho, dicho axioma no es condición necesaria en el teorema de existencia de la medida de Haar. Como vamos a ver, hay una forma de solucionar este problema.

Lema 1.28. Sean X y K dos espacios topológicos, y supongamos que K es compacto. Sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, para cada $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un entorno U de x_0 tal que para cada $x \in U$, $y \in K$ se tiene

$$|f(x_0, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Demostración. Fijemos $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Dado $y \in K$ cualquiera, f es continua en (x_0, y) luego existe un entorno abierto W_y de (x_0, y) tal que $|f(x_0, y) - f(x, y')| < \varepsilon/2$ para cada $(x, y') \in W_y$. Puede elegirse $W_y = U_y \times V_y$ para ciertos abiertos U_y y V_y de X y K que contienen a x_0 e y respectivamente porque los productos de abiertos constituyen una base de la topología producto. De este modo, para cada $x \in U_y$ e $y' \in V_y$ se tiene,

$$|f(x, y') - f(x_0, y')| \le |f(x, y') - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Puesto que K es compacto, y claramente $K \subset \cup_{y \in K} V_y$, existen $y_1, \dots y_n$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^n V_{y_i}$. Sea entonces $U := \cap_{i=1}^n U_{y_i}$, que es un entorno abierto que contiene a x_0. Entonces, si $x \in U$ e $y \in K$, se tiene que $y \in V_{y_i}$ y $x \in U_{y_i}$ para cierto $1 \le i \le n$, y por la desigualdad anterior,

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$$

como queríamos ver. □

Una vez probado esto, volvemos a nuestro problema con el segundo axioma de numerabilidad. Vamos a tomar X e Y espacios topológicos localmente compactos y de Hausdorff arbitrarios, y μ y ν medidas de Borel regulares, a las que no les pedimos que sean σ-finitas. Además, bajo estas hipótesis, en general tendremos $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subsetneq \mathcal{B}(X \times Y)$. Ahora bien, como vamos a ver en la proposición 1.29, para toda función $f \in \mathscr{C}_c(X \times Y)$, las integrales iteradas pueden calcularse en cualquier orden, y el resultado obtenido es el mismo. Es decir,

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y).$$

Una vez probado esto, se puede definir $I : \mathscr{C}_c(X \times Y) \to \mathbb{R}$ como la aplicación que envía f a cualquiera de las integrales iteradas anteriores. Es obvio que esto va a definir un funcional lineal positivo. Aplicando entonces el teorema de representación de Riesz 1.22, existe una medida de Borel regular en $X \times Y$ asociada al funcional. Esta medida se vuelve a denotar $\mu \times \nu$, y se llama *producto de Borel regular*. Por construcción, la integral con respecto a esta medida cumple

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\nu\times\mu)(x,y) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y)$$

para toda función continua y de soporte compacto. Además, cuando X e Y sí que cumplen el segundo axioma de numerabilidad, esta medida coincide con la medida producto usual como consecuencia de la unicidad en el teorema de representación de Riesz.

Proposición 1.29. Sean X e Y espacios topológicos de Hausdorff y localmente compactos, y sean μ y ν medidas de Borel regulares sobre X e Y respectivamente. Supongamos que $f \in \mathscr{C}_c(X \times Y)$. Entonces:

1. Para cada $x \in X$ e $y \in Y$, se tiene $f_x \in \mathscr{C}_c(Y)$ y $f^y \in \mathscr{C}_c(X)$.
2. Las aplicaciones
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_Y f_x(y)\mathrm{d}\nu(y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \int_X f^y(x)\mathrm{d}\mu(x) \end{array} \tag{1.5}$$
pertenecen a $\mathscr{C}_c(X)$ y $\mathscr{C}_c(Y)$ respectivamente.
3. Se tiene la igualdad
$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y).$$

Demostración. Sean $K := \operatorname{sop}(f)$ y $K_1 := \pi_X(K)$ y $K_2 := \pi_Y(K)$ donde π_X y π_Y denotan las proyecciones sobre X e Y respectivamente, y K_1 y K_2 son compactos porque son imágenes de compactos por aplicaciones continuas. Veamos que $f_x \in \mathscr{C}_c(Y)$. La continuidad es evidente porque f_x es composición de aplicaciones continuas. En efecto, $f_x = f \circ \vartheta_x$ donde $\vartheta_x : Y \to X \times Y, y \mapsto \vartheta_x(y) := (x,y)$. Además, $\operatorname{sop}(f_x) \subset K_2$. Esto se sigue tomando adherencias en la cadena de contenciones siguiente

$$\{y \in Y : f_x(y) \neq 0\} \subset \{y \in Y : \exists\, x \in X : f(x,y) \neq 0\} = \pi_Y\{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) \neq 0\} \subset K_2.$$

Así, $f_x \in \mathscr{C}_c(Y)$, y el mismo razonamiento prueba que $f_y \in \mathscr{C}_c(X)$. Concluimos así que las aplicaciones de la ecuación (1.5) existen. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ cualquiera. Consideremos el espacio $X \times K_2$. Por el lema 1.28, existe un entorno abierto U de x_0 tal que para $x \in U$, $y \in K_2$ se tiene $|f(x_0,y) - f(x,y)| < \varepsilon/\nu(K_2)$, donde hemos utilizado que al ser K_2 compacto, y ν una medida regular de Borel, $\nu(K_2) < \infty$. Así, para cada $x \in U$ se tiene

$$\begin{aligned} \left|\int_Y f_x(y)\mathrm{d}\nu(y) - \int_Y f_{x_0}(y)\mathrm{d}\nu(y)\right| &= \left|\int_Y (f(x,y) - f(x_0,y))\mathrm{d}\nu(y)\right| \leq \int_Y |f(x,y) - f(x_0,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) \\ &\overset{(1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{\nu(K_2)} \cdot \nu(K_2) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En el paso (1) hemos utilizado el hecho de que f_x tiene soporte compacto y contenido en K_2 para cada $x \in X$. Observando que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, y razonando igual en el segundo caso, concluimos que las aplicaciones de la ecuación (1.5) son continuas. Probemos la última afirmación. Tomamos de nuevo $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K_1$, tomemos U_x un entorno abierto de x tal que para cada $x' \in U_x, y \in K_2$ se tenga $|f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon' = \varepsilon/(2 \cdot \mu(K_1) \cdot \nu(K_2))$ (utilizamos de nuevo el lema 1.28). Claramente la familia $\{U_x\}_{x \in K_1}$ recubre K_1, que es compacto, luego existen $x_1, \ldots x_n$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. Tomemos $A_1 := U_{x_1} \cap K_1$ (medible por ser intersección de medibles) y para cada $2 \leq k \leq n$ definimos

$$A_k := K_1 \cap U_{x_k} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} U_{x_i}^c \right).$$

De este modo, los conjuntos $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ son todos medibles y disjuntos por construcción. Claramente, $A_i \subset U_{x_i}$ $\cup_{i=1}^n A_i \subset K_1$ pues cada $A_i \subset K_1$. Además, dado $x \in K_1$, se define $i_x := \min\{i : 1 \leq i \leq n \text{ y } x \in U_{x_i}\}$. Entonces $x \in A_{i_x}$, luego $K_1 \subset \cup_{i=1}^n A_i$ y se tiene la igualdad $K_1 = \sqcup_{i=1}^n A_i$. Sea entonces

$$\begin{array}{cccc} g: & X \times Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sum_{i=1}^n f(x_i,y) \cdot \chi_{A_i}(x). \end{array}$$

Claramente, $g(x,y) = 0$ si $x \notin K_1$ (se anulan las funciones indicatrices) y si $y \notin K_2$ (se anula $f(x_i,y)$). Se concluye así que f y g se anulan fuera de $K_1 \times K_2$. Además, para cada $(x,y) \in K_1 \times K_2$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(x,y) - g(x,y)| &= \left| f(x,y) - \sum_{i=1}^n f(x_i,y) \cdot \chi_{A_i}(x) \right| \overset{(2)}{=} \left| \sum_{i=1}^n f(x,y) \cdot \chi_{A_i}(x) - \sum_{i=1}^n f(x_i,y) \cdot \chi_{A_i}(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\chi_{A_i}(x)| \cdot |f(x,y) - f(x_i,y)| \overset{(3)}{\leq} 1 \cdot \varepsilon', \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde hemos utilizado en el paso (2) que al ser $K_1 = \sqcup_{i=1}^n A_i$, $\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) \equiv 1$ para $x \in K_1$, y en (3) que para cada $x \in K_1$, solo uno de los sumandos es no nulo, y en ese caso, hemos justificado que $|f(x,y) - f(x_i,y)| \leq \varepsilon'$. A partir de aquí, observemos que,

$$\begin{aligned} &\int_X \left[\int_Y g(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left[\int_Y \sum_{i=1}^n f(x_i,y) \cdot \chi_{A_i}(x) \mathrm{d}\nu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) \left[\int_Y f(x_i,y) \mathrm{d}\mu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \cdot \int_Y f_{x_i}(y) \mathrm{d}\nu(y) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_y f(x_i,y) \left[\int_X \chi_{A_i}(x) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \left[\int_X \sum_{i=1}^n f(x_i,y) \cdot \chi_{A_i}(x) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_Y \left[\int_X g(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\nu(y). \end{aligned}$$

De modo que las dos integrales iteradas de g coinciden. Ahora bien, aplicando el resultado de (1.7) se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_Y \int_X f(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) - \int_Y \int_X g(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) \right| &\leq \int_Y \int_X |f(x,y) - g(x,y)| \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) \\ &\leq \varepsilon' \cdot \mu(K_1) \cdot \nu(K_2) = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

y análogamente $\left| \int_X \int_Y f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) d\mu(x) - \int_X \int_Y g(x,y) \mathrm{d}\nu(y) d\mu(x) \right| \leq \varepsilon/2$. Puesto que las dos integrales iteradas de g son iguales, concluimos que

$$\begin{aligned} &\left| \int_Y \int_X f(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) - \int_X \int_Y f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_Y \int_X f(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) - \int_Y \int_X g(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) + \int_X \int_Y g(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) - \int_X \int_Y f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) \right| \\ &\leq \left| \int_Y \int_X f(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) - \int_Y \int_X g(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) \right| + \left| \int_X \int_Y g(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) - \int_X \int_Y f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, las integrales iteradas de f deben coincidir, tal y como queríamos probar. $\square$

CAPÍTULO 2

GRUPOS TOPOLÓGICOS

En esta sección vamos a estudiar los grupos topológicos, que son objetos matemáticos que tienen dos estructuras: son simultáneamente grupos y espacios topológicos, y además estas estructuras son compatibles, en el sentido de que las operaciones de grupo son continuas. Utilizaremos la notación multiplicativa para la operación de grupo salvo que se indique expresamente lo contrario y denotaremos al elemento neutro por e. Además, dados subconjuntos A, B de un grupo G, denotaremos

$$A \cdot B = AB = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} \qquad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\} \qquad A \cdot b = Ab = \{a \cdot b : a \in A\},$$

y abreviaremos $A^2 = AA$ o $A^{-2} = A^{-1}A^{-1}$ y lo mismo para potencias superiores. Cuando se trabaja con grupos abelianos, es habitual utilizar el símbolo $+$ para denotar la operación de grupo. En esos casos, las notaciones anteriores se traducen de la manera obvia, es decir $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $-A = \{-a : a \in A\}$, etc.

Diremos que un conjunto V es *simétrico* si $V^{-1} = V$. También denotaremos $H \leq G$ para indicar que H es un subgrupo de G. Utilizaremos la palabra *entorno* del siguiente modo: si X es un espacio topológico, y $x \in X$, un entorno V de x es un subconjunto de X que contiene a un abierto U con $x \in U \subset V$. Es decir, no requerimos que los entornos sean abiertos, como sí que hacen algunos autores. Como último comentario en lo que se refiere a notación, si X es un conjunto y $A \subset X$, vamos a utilizar las notaciones A^c y $X \backslash A$ indistintamente para referirnos al complementario de A.

Este segundo capítulo está basado en los textos [Bou90] y [AA22b], aunque algunos resultados aparecen demostrados en [Gle10] y [Tor20]. Se han incluido resultados básicos de la teoría de grupos topológicos, que serán necesarios en los capítulos siguientes, todos con sus demostraciones, que son en su mayoría bastante directas. Se trata de un capítulo que no contiene resultados particularmente profundos, sino más bien herramientas que utilizaremos con frecuencia en el resto del texto. Es por ello que es casi una colección de resultados, y no contiene demasiado desarrollo entre los enunciados de los diferentes resultados. Se asumen conocidas definiciones y resultados básicos de topología y teoría de grupos. Por otro lado, a la hora de construir la medida de Haar, se asumirá que los espacios son localmente compactos. La definición que vamos a tomar de espacio localmente compacto es la de [Mun00], que es la más habitual.

Definición 2.1 (espacio localmente compacto). Sea X un espacio topológico, diremos que X es *localmente compacto* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno compacto.

En ocasiones, la definición que se da de espacio localmente compacto es ligeramente distinta. Concretamente, es habitual ver la definición siguiente: X es localmente compacto si para cada $x \in X$ y cada entorno W de x, existe un entorno compacto K de x con $K \subset W$. Esta definición no es equivalente a la anterior en general, pero sí que lo es cuando el espacio es de Hausdorff. Dado que la mayoría de los espacios en los que estamos interesados son de Hausdorff, esta diferencia entre las definiciones no es importante. De hecho, vamos a probar su equivalencia, así como la de una tercera que nos será de utilidad en la prueba del Lema de Urysohn (o al menos de la versión que vamos a probar) en el capítulo 4. Comenzamos la exposición probando un lema previo, que establece que en un espacio cualquiera, es equivalente poder separar puntos de cerrados que no los contienen por abiertos disjuntos, a poder encontrar, para cada entorno de un punto, un abierto que contiene al punto y cuya adherencia está contenida en el entorno original.

Lema 2.2. Sea X un espacio topológico Son equivalentes:

1. Para cada $x \in X$ e $Y \subset X$ tal que $x \notin Y$, existen abiertos U, V disjuntos y tales que $x \in U, Y \subset V$.
2. Para cada $x \in X$ y para cada U abierto con $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$.

Demostración. Veamos las dos implicaciones.

(1) ⇒ (2) Dados un punto $x \in X$ y un abierto U con $x \in U$, definimos $Y := X \backslash U$, que es cerrado. Aplicando (1), existen abiertos V, W disjuntos y con $x \in V$, $Y \subset W$. En particular, $Y = X \backslash U \subset W$ implica que $X \backslash W \subset U$. De la condición $V \cap W = \varnothing$ se sigue que $V \subset X \backslash W$. Por tanto, por ser $X \backslash W$ cerrado, deducimos que $x \in V \subset \overline{V} \subset X \backslash W \subset U$ como queríamos ver.

(2) ⇒ (1) Tomemos x e Y como en (1). En ese caso, $x \in X \backslash Y = U$ que es abierto. Por consiguiente, existe un abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Tomemos el abierto $W := X \backslash \overline{V}$. Se tiene entonces que $\overline{V} \subset X \backslash Y$ implica que $Y \subset X \backslash \overline{V} = W$, y $V \cap W \subset \overline{V} \cap W = \varnothing$, luego son los abiertos disjuntos buscados.

□

Los espacios topológicos que cumplen la condición (1) del lema anterior se denominan *espacios regulares* [Mun00, Cap. 4, Sec. 31].

Teorema 2.3. Sea X un espacio de Hausdorff. Son equivalentes:

1. Para cada $x \in X$, y cada W entorno de x, existe un entorno de x compacto, K tal que $x \in K \subset W$.
2. Para cada abierto U de X y cada $x \in U$, existe un abierto V que contiene a x y tal que $\overline{V} \subset U$ es compacto.
3. X es localmente compacto.

Demostración. Veamos cada una de las implicaciones.

(1) ⇒ (2) Sea U abierto en X. Como X es localmente compacto y U es entorno de x, existe un entorno compacto K de x con $x \in K \subset U$. Por definición de entorno, existe un abierto V que contiene a x con $V \subset K$. Puesto que X es de Hausdorff, todo compacto es cerrado [Mun00, Th. 26.3], luego $\overline{V} \subset K$ y se trata de un cerrado en un compacto, luego compacto [Mun00, Th. 26.2]. De este modo, $x \in V \subset \overline{V} \subset K \subset U$ como queríamos ver.

(2) ⇒ (3) Basta tomar $U = X$, y observar que $\overline{V}$ es el entorno compacto buscado.

(3) ⇒ (1) Sea W un entorno de x, que puede elegirse abierto sin pérdida de generalidad. Por ser X localmente compacto, existe un entorno compacto K de x. Puesto que la intersección de entornos de un punto vuelve a ser entorno de dicho punto, deducimos que $W \cap K$ es entorno de x. Existe entonces un abierto O con $x \in O \subset W \cap K$. Por ser X de Hausdorff y K compacto, es cerrado, de modo que $\overline{O} \subset K$, y $\overline{O}$ es un cerrado en un compacto, luego

compacto. Que $\overline{O}$ sea compacto y de Hausdorff implica que el espacio $\overline{O}$ cumple (1) (esta afirmación está justificada al final de la demostración). Como O es un entorno abierto de x en $\overline{O}$, existe $\mathcal{K}$, entorno compacto de x en $\overline{O}$ y tal que $\mathcal{K} \subset O$. Con esto, $\mathcal{K} = \mathcal{K} \cap O$ es entorno de x en O, y como O es entorno de x en X, deducimos que $\mathcal{K}$ es un entorno compacto tal que $x \in \mathcal{K} \subset O \subset W \cap K \subset W$, como queríamos ver.

Justifiquemos finalmente que todo espacio compacto y de Hausdorff X cumple (1). Para ello, basta utilizar el lema 2.2 y recordar que la primera condición de dicho lema se cumple, pues todo cerrado en un compacto es de nuevo compacto, y todo compacto puede separarse de un punto no contenido en él por abiertos disjuntos en un espacio de Hausdorff [Mun00, Lema 26.4]. De este modo, si $x \in X$, y U es un entorno que contiene a x, y que sin pérdida de generalidad suponemos abierto, existe un abierto V con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, pero $\overline{V}$ es compacto por ser cerrado en un compacto, y es entorno porque V es subconjunto suyo. □

Los subespacios de un espacio X cuya adherencia es compacta se llaman *relativamente compactos*.

2.1. Definición y propiedades básicas de los grupos topológicos

Definición 2.4 (grupo topológico). Un grupo topológico es un espacio topológico G que además tiene definida una operación de grupo $\cdot : G \times G \to G$ que satisface las propiedades siguientes:

1. La aplicación $\cdot : (x, y) \mapsto x \cdot y$ es continua. En algunas ocasiones denotaremos ψ a la aplicación que envía dos elementos en su producto.
2. La aplicación $i : G \to G, x \mapsto x^{-1}$ es continua.

Por otra parte, es evidente a partir de la definición que i es un homeomorfismo. Además, las aplicaciones $l_g(h) = g \cdot h$ y $r_g(h) = h \cdot g$, que se llaman *traslaciones por la izquierda y por la derecha* respectivamente son continuas, y de hecho homeomorfismos (sus inversas son $l_{g^{-1}}$ y $r_{g^{-1}}$, respectivamente). Además, se cumple $r_g \circ r_h = r_{g \cdot h}$ y $l_g \circ l_h = l_{g \cdot h}$. En efecto, si $x \in X$, entonces,

$$r_g \circ r_h(x) = r_g(r_h(x)) = r_g(x \cdot h) = x \cdot h \cdot g = r_{h \cdot g}(x)$$

y lo mismo con l. Por otro lado, la aplicación definida como

$$\phi_a : G \to G, x \mapsto axa^{-1}$$

es un homemorfismo. Esto es evidente porque $\phi_a = l_a \circ r_{a^{-1}}$ es composición de homeomorfismos.

Observación 2.5. Por ser l_g, r_g e i homeomorfismos, si A es un abierto o un cerrado, $Ag = r_g(A)$, $gA = l_g(A)$ y $i(A) = A^{-1}$ lo son también. Además, es claro que si V es un entorno de e y $x \in G$, entonces xV es un entorno de x.

Dados dos grupos topológicos G_1 y G_2, parece razonable pensar que $G_1 \times G_2$ con la operación usual de grupo producto

$$\begin{array}{ccc} (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ ((g_1, g_2), (t_1, t_2)) & \mapsto & (g_1 \cdot t_1, g_2 \cdot t_2), \end{array}$$

vuelve a ser un grupo topológico. Esto es lo que comprobamos en el lema siguiente. Recordemos antes que por la propiedad fundamental de topología producto, una aplicación con llegada en un espacio producto es continua si y solo si lo son sus proyecciones.

Lema 2.6. Sean G_1 y G_2 dos grupos topológicos, entonces $G_1 \times G_2$ dotado de la topología producto y la estructura de grupo producto, vuelve a ser un grupo topológico.

Demostración. La aplicación $\hat{\imath} : (g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$ es continua por serlo sus proyecciones. Por ejemplo, $\pi_1 \circ \hat{\imath} = \pi_1 \circ i_1$ es composición de aplicaciones continuas, donde π_1 es la proyección sobre G_1, e i_1 la aplicación que envía cada elemento en su inverso en G_1, que ya hemos visto que es continua. Así, $\pi_1 \circ \hat{\imath}$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. El mismo argumento muestra que $((g_1, g_2), (t_1, t_2)) \mapsto (g_1 \cdot t_1, g_2 \cdot t_2)$ es continua. □

En lo que respecta a los conjuntos simétricos que hemos definido antes, se trata de conjuntos que son de gran utilidad, especialmente cuando se utilizan para construir entornos simétricos de puntos en el grupo. Con vistas a esto, probamos el lema siguiente, que permite construir conjuntos simétricos partiendo de conjuntos cualesquiera, o partiendo de conjuntos simétricos.

Lema 2.7. Sea G un grupo topológico y $V, W \subset G$. Entonces VV^{-1} y $V \cap V^{-1}$ son simétricos, y si tanto V como W son simétricos, entonces $V \cap W$ es simétrico.

Demostración. Comenzamos notando que $U \subset G$ es simétrico si y solo si para cada $x \in U$, $x^{-1} \in U$. Para la primera afirmación, supongamos que $x \in VV^{-1}$, entonces $x = yz^{-1}$ para ciertos $y, z \in V$, luego $x^{-1} = zy^{-1} \in VV^{-1}$ como queríamos ver. La segunda afirmación es inmediata, y para la tercera, basta notar que $(V \cap W)^{-1} = V^{-1} \cap W^{-1} = V \cap W$ si son ambos simétricos. □

En un espacio topológico cualquiera, la topología queda definida unívocamente al conocerse los entornos de todos los puntos. En los grupos topológicos, no es necesario especificar tanto, pues la topología de G queda definida de manera unívoca por el conjunto de entornos del elemento neutro e de G. Para justificar esto, comenzamos notando que si se conocen todos los entornos de todos los elementos de un espacio topológico arbitrario, entonces se conoce la topología completa, pues conocer la topología es conocer los abiertos, y un subespacio es abierto si y solo si es entorno de todos sus puntos. Por otro lado, todo grupo topológico es *homogéneo*, es decir, dados $x, y \in G$ siempre existe un homeomorfismo $\xi : G \to G$ con $\xi(x) = y$ (podemos tomar $l_{yx^{-1}}$). La idea intuitiva es que podemos mover cualquier $x \in G$ a cualquier posición sin cambiar la estructura topológica a su alrededor, de modo que se puede "llevar" cualquier entorno del neutro a otro punto $x \in X$, obteniéndose un entorno de este. Por wllo, es suficiente con estudiar los entornos del neutro. Concretamente, en la proposición siguiente vamos a ver que a partir de una base de entornos abiertos de e, pueden obtenerse una base de la topología y una base de entornos de cualquier punto.

Proposición 2.8. Sea G un grupo topológico, y sea $\mathcal{U}$ una base de entornos de e formada por abiertos. Entonces,

$$\mathcal{U}_l = \{gU : g \in G, U \in \mathcal{U}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_r = \{Ug : g \in G, U \in \mathcal{U}\}$$

son bases de la topología. Por otro lado, si pedimos simplemente que $\mathcal{U}$ sea una base de entornos de e, y tomamos $g \in G$ fijo,

$$\mathcal{U}_l^g = \{gU : U \in \mathcal{U}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_r^g = \{Ug : U \in \mathcal{U}\}$$

son bases de entornos de g.

Demostración. Veamos que $\mathcal{U}_l$ es una base de la topología (el otro caso es igual). Para ello, sea $V \subset G$ abierto y $g \in V$. Entonces $L_{g^{-1}}(V) = g^{-1}V$ es un abierto por ser $L_{g^{-1}}$ un homeomorfismo, y contiene a e. Es por tanto un elemento de $\mathcal{U}$, luego existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $e \in U \subset g^{-1}V$. Multiplicando entonces por g (aplicando l_g) tenemos $g \in gU \subset gg^{-1}V = V$, lo que prueba que todo abierto V que contiene a g contiene un abierto de la forma gU con $U \in \mathcal{U}$, de donde se sigue que $\mathcal{U}_l$ es base de la topología. La demostración de que los restantes conjuntos son bases de entornos es análoga. □

Ejemplo 2.9. Veamos algunos ejemplos sencillos de grupos topológicos.

1. Cualquier grupo G dotado de la topología discreta es un grupo topológico, pues con esta topología toda aplicación es continua. De hecho, esto implica que los grupos topológicos

existen, aunque, por supuesto, este ejemplo es completamente trivial, y nos interesan grupos más complejos.

2. Tanto la recta real $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^n$ con la operación usual de suma constituyen grupos topológicos. Lo mismo con la suma usual en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^n$.

3. $\mathbb{R}^*$ dotado de la topología de subespacio con la operación producto de números reales es también un grupo topológico. Lo mismo ocurre con $\mathbb{C}^*$ y el producto de números complejos.

4. Consideremos la esfera unidad $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ con la topología de subespacio. Como $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y $|z_1 \cdot z_2| = |z_1 1 \cdot |z_2|$, se sigue que $\mathbb{S}^1$ es un subgrupo de $\mathbb{C}^*$. Si se dota a $\mathbb{S}^1$ de la topología de subespacio que induce $\mathbb{C}$, entonces es un grupo topológico.

5. Un último ejemplo que mencionamos simplemente por su relevancia, aunque no vayamos a utilizarlo en este trabajo, es el de los grupos de Lie. Un grupo de Lie es un grupo que además tiene una estructura de variedad diferenciable con respecto de la cual las operaciones ψ e i son $\mathscr{C}^\infty$. En particular, se trata de aplicaciones continuas. Estos grupos son muy relevantes en física teórica, pues permiten describir las simetrías continuas de ciertos sistemas físicos.

Vamos ahora a probar algunos resultados relativos a las propiedades de los grupos topológicos que vamos a necesitar en la construcción de la medida de Haar.

Lema 2.10. Sea G un grupo topológico. Entonces, para todo $x \in G$ y todo entorno U de e, existe un entorno abierto V de x tal que $V^{-1}V \subset U$. Si además $x = e$, entonces V puede elegirse *simétrico*

Demostración. La aplicación $\varphi : G \times G \to G, (g,h) \mapsto g^{-1} \cdot h$ es continua, pues es composición de la aplicación que fija una componente e invierte la otra (continua por serlo sus proyecciones) y la aplicación producto (continua por definición de grupo topológico). Dado que $(x,x) \in \varphi^{-1}(\{e\})$, φ es continua y los productos de abiertos son una base de la topología producto, existen abiertos $V_1, V_2 \subset G$ tales que $(x,x) \in V_1 \times V_2 \subset \varphi^{-1}(U)$. Entonces, $\varphi(V_1 \times V_2) = V_1^{-1}V_2 \subset U$. Tomemos $V = V_1 \cap V_2$. Este conjunto es abierto porque es intersección de abiertos, además contiene a x porque ambos lo hacen, y claramente $V^{-1}V \subset V_1^{-1}V_2 \subset U$, como queríamos ver.

Para el segundo caso, notemos que si $e = x$, entonces podemos aplicar el razonamiento anterior pero tomando ψ en lugar de φ. Entonces $(e,e) \in \psi^{-1}(\{e\})$ y existen $V_1, V_2 \subset G$ que contienen a e y con $V_1 \times V_2 \subset \psi^{-1}(U)$. Aplicando ψ, tenemos $e \in \psi(V_1 \times V_2) = V_1V_2 \subset U$. Tomemos $S = V_1 \cap V_2$, que vuelve a ser un abierto que contiene a e. Si definimos ahora $V = S \cap S^{-1}$. Claramente $e \in S$ implica $e \in S^{-1}$, luego $e \in V$, y como V es intersección de abiertos, es abierto. Por último, V es simétrico por el lema 2.7, tal y como queríamos ver. □

Lema 2.11. Sea G un grupo topológico, K un subconjunto compacto y U un abierto que contiene a K. Entonces existe un entorno abierto V de e tal que $KV \subset U$.

Demostración. Para cada $x \in K$, definimos el abierto $W_x = x^{-1}U$, que es abierto por ser $l_{x^{-1}}$ un homeomorfismo, y contiene a e. De acuerdo con el lema 2.10 (segunda afirmación), existe un entorno abierto de e, V_x tal que $V_xV_x \subset W_x$. Consideremos la colección $\{xV_x : x \in K\}$. Este conjunto es un recubrimiento por abiertos de K (pues cada xV_x contiene a x). Por la compacidad de K, existe un subrecubrimiento finito, luego existe una cantidad finita de puntos de K, $x_1, x_2, \dots x_n$ tales que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} x_k V_{x_k}.$$

Definimos $V = \cap_{k=1}^n V_{x_k}$, que es abierto por ser intersección finita de abiertos. Tomemos $x \in K$, este elemento debe estar en uno de los abiertos del recubrimiento: $x \in x_jV_{x_j}$ para algún $j \in \{1, 2, \dots n\}$. Entonces,

$$xV \subset x_jV_{x_j}V_{x_j} \subset x_jW_{x_j} = x_jx_j^{-1}U = U,$$

utilizando la definición de los W_x en el último paso. Como esto es válido para cada $x \in K$, deducimos que $KV = \cup_{x\in K} xV \subset U$ como queríamos ver. □

El siguiente lema será necesario en la construcción de la medida de Haar, aunque su demostración no requiere utilizar las técnicas de los grupos topológicos.

Lema 2.12. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $K \subset X$ compacto. Sean U_1, U_2 abiertos tales que $K \subset U_1 \cup U_2$. Entonces existen compactos $K_1, K_2 \subset X$ que satisfacen $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$ y $K = K_1 \cup K_2$.

Demostración. Comenzamos recordando que en un espacio de Hausdorff todo subespacio compacto es también cerrado, luego K es cerrado. Definimos ahora los conjuntos $C_1 = K \cap U_1^c$ y $C_2 = K \cap U_2^c$. Ambos son cerrados por ser intersección de cerrados, y como están contenidos en K que es compacto, son compactos. En un espacio de Hausdorff, todo par de compactos disjuntos se puede separar por abiertos disjuntos. Además, C_1 y C_2 son disjuntos, pues $C_1 \cap C_2 = U_1^c \cap U_2^c \cap K = (U_1 \cup U_2)^c \cap K$, pero por hipótesis $K \subset U_1 \cup U_2$. Por lo tanto, existen abiertos disjuntos V_1 y V_2 tales que $C_1 \subset V_1$ y $C_2 \subset V_2$. Definimos ahora $K_1 = K \cap V_1^c$ y $K_2 = K \cap V_2^c$, que son compactos por el mismo razonamiento que hemos utilizado para C_1 y C_2. Veamos que K_1 y K_2 satisfacen lo pedido.

1. $K_1 \subset U_1$ ya que
$$K_1 = K \cap V_1^c \subset K \cap C_1^c \subset K \cap (K \cap U_1^c)^c \subset K \cap (K^c \cup U_1) \subset U_1$$
y para K_2 igual.

2. $K = K_1 \cup K_2$ ya que
$$K_1 \cup K_2 = (K \cap V_1^c) \cup (K \cap V_2^c) = K \cap (V_1^c \cup V_2^c) = K \cap (V_1 \cap V_2)^c = K \cap \varnothing^c = K$$

obtenemos el resultado buscado. □

Probamos por último algunos resultados que nos permiten deducir si un subconjunto de G que es producto de otros dos es abierto, cerrado o compacto en función de los conjuntos a partir de cuyo producto lo obtenemos.

Proposición 2.13. Sea G un grupo topológico, y sean $A, B \subset G$. Supongamos que A es abierto, entonces AB y BA son abiertos. Por otro lado, si A y B son compactos, entonces AB también lo es.

Demostración. Como hemos visto antes (ver observación 2.5), Ab y bA son abiertos. Basta entonces notar que la unión de abiertos es abierto, luego
$$AB = \bigcup_{b\in B} Ab \qquad BA = \bigcup_{b\in B} bA$$
son abiertos. En cuanto a la compacidad, notemos que $A \times B$ es compacto porque es producto de compactos, luego $AB = \psi(A \times B)$ es un compacto por ser la imagen de un compacto por una aplicación continua. □

De hecho, la segunda afirmación la proposición anterior admite una generalización al caso en que uno es compacto y el otro es cerrado. Para probar dicha generalización, hemos de demostrar antes el lema siguiente.

Lema 2.14. Sea G un grupo topológico, B un cerrado, y A un compacto tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces existe un entorno abierto V de e tal que $B \cap AV = \varnothing$

Demostración. En primer lugar, por ser B cerrado, $G\backslash B$ es abierto. Dado entonces $x \in A$, por ser $A \cap B = \varnothing$, se sigue que $x \in G\backslash B$. Esto implica que $x^{-1}(G\backslash B)$ es un entorno abierto de e. Aplicando el lema 2.10 se sigue que existe W_x entorno abierto de e tal que $W_x W_x \subset x^{-1}(G\backslash B)$. Es claro que

$$A \subset \bigcup_{x\in A} xW_x,$$

de este modo, los abiertos $\{xW_x : x \in A\}$ constituyen un recubrimiento abierto de A, que es compacto y por ello admite un subrecubrimiento finito. Existen entonces $x_1, \dots x_n$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^n x_i W_i$ donde hemos abreviado $W_i = W_{x_i}$. Sea $V := \cap_{i=1}^n W_i$, que es entorno de e. Puesto que para cada $x \in A$ existe $1 \le i \le n$ tal que $x \in x_i W_i$, deducimos que

$$xV \subset xW_i \subset x_i W_i W_i \subset G\backslash B,$$

utilizando en la última contención que $W_x W_x \subset x^{-1}(G\backslash B)$ para todo $x \in A$. Con esto, deducimos que $xV \cap B = \varnothing$ para todo $x \in A$, luego $AV \cap B = (\cup_{x\in A} xV) \cap B = \cup_{x\in A} (xV \cap B) = \varnothing$ como queríamos ver. □

Proposición 2.15. Sea G un grupo topológico, y sean $A, B \subset G$ un compacto y un cerrado respectivamente. Entonces AB es cerrado.

Demostración. El caso $AB = G$ es obvio, luego supongamos que existe $y \in G\backslash AB$. Esto implica que $B \cap A^{-1}y = \varnothing$. En caso contrario, $b = a^{-1}y$ para ciertos $a \in A, b \in B$, luego $y = ab \in AB$. Además, por compacidad de A, sabemos que $A^{-1}y = (r_y \circ i)(A)$ es compacto. Existe entonces un entorno abierto V de e tal que $B \cap A^{-1}yV = \varnothing$ como consecuencia del lema 2.14, lo cual implica que $AB \cap yV = \varnothing$ por un razonamiento análogo al anterior. Como en ese caso, yV es un entorno abierto de y, y $yV \subset G\backslash AB$, deducimos que AB es efectivamente de un cerrado.

□

2.2. Subgrupos de los grupos topológicos y homomorfismos continuos

Comencemos recordando que dado un grupo G, un subgrupo H es un subconjunto de G que es un grupo con la restricción de la operación definida en G. Lo denotamos $H \le G$. Nótese que un subgrupo vuelve a ser un grupo topológico porque la restricción a un subespacio de aplicaciones continuas es continua. Diremos que un subgrupo N es *normal* en G si $g^{-1}Ng = N$ para todo $g \in G$. Lo denotamos $N \triangleleft G$. Esta condición equivale a que $gNg^{-1} \subset N$ o a que $gN = Ng$ para cada $g \in G$ (ver [Dav21, Th. 9.8]). Los conjuntos gN y Ng se llaman clases a izquierda y a derecha (en inglés *left* y *right cosets*). En la literatura en ocasiones se intercambian los nombres de clases a izquierdas y derechas. Nosotros elegimos el convenio de llamar clase a izquierdas si el subgrupo se escribe a la izquierda, y análogamente a derechas. Vamos a ver que en un grupo topológico tomar adherencias preserva la propiedad de ser un subgrupo o de ser un subgrupo normal. Comenzamos probando un lema previo.

Lema 2.16. Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo, entonces $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$.

Demostración. Como f es homeomorfismo, f^{-1} existe y es continua. De la continuidad de f, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Por continuidad de f^{-1}, $f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset \overline{f^{-1}(f(A))} = \overline{A}$. Aplicando f de nuevo,

$$f\left(f^{-1}(\overline{f(A)})\right) = \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}),$$

con lo que tenemos la doble contención y por consiguiente la igualdad. □

Proposición 2.17. Sea G un grupo topológico y $H \leq G$. Entonces:

1. $\overline{H}$ es un subgrupo.
2. Si H es normal, entonces $\overline{H}$ también.

Demostración.

1. Para ver que $\overline{H}$ es un subgrupo, es suficiente con comprobar que para todos $x, y \in \overline{H}$ se tiene $xy^{-1} \in \overline{H}$ (de hecho, $T \subset G$ es un subgrupo si y solo si es no vacío y $xy^{-1} \in T$ para todos $x, y \in T$, ver [Dav21, Th. 3.61]). Para ello, consideremos la aplicación $\eta : G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$, que es continua porque es composición de continuas. Se tiene entonces
$$\eta(\overline{H} \times \overline{H}) = \eta(\overline{H \times H}) \subset \overline{\eta(H \times H)} = \overline{H},$$
donde la inclusión se deduce de la continuidad de η, y una de las caracterizaciones de continuidad [Mun00, Th 18.1]. La primera igualdad es un resultado general: el producto de adherencias es la adherencia del producto, y la última se sigue de que, al ser H subgrupo, la caracterización anterior implica $\eta(H \times H) = H$. Ahora bien, esto implica que para todos $x, y \in \overline{H}$, $\eta(x, y) \in \overline{H}$, que es justamente lo que queríamos ver.

2. Vamos a comprobar que $g^{-1}\overline{H}g \subset \overline{H}$ para cada $g \in G$. Para ello, basta notar que $\phi_{g^{-1}}$ es un homeomorfismo, luego por el lema 2.16 se tiene
$$g^{-1}\overline{H}g = \phi_{g^{-1}}(\overline{H}) = \overline{\phi_g^{-1}(H)} = \overline{g^{-1}Hg} = \overline{H}$$
utilizando en la última igualdad que al ser H normal, $g^{-1}Hg = H$.

□

En la línea de algunos de los resultados anteriores, vamos a ver que cuando trabajamos con homomorfismos continuos definidos entre grupos topológicos, es suficiente con comprobar la continuidad en un punto para obtener la continuidad en todo punto. Recordemos que un homomorfismo es una aplicación $f : G \to G'$ entre dos grupos G y G' tal que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos $x, y \in G$. Cuando decimos *homomorfismo continuo* estamos suponiendo que ambos grupos están dotados de una topología tal que son grupos topológicos. Esto no es más que otro ejemplo de un razonamiento muy habitual cuando se trabaja con grupos topológicos: muchas veces es suficiente con estudiar ciertas propiedades cerca de un punto, que suele tomarse como la identidad, para obtener propiedades relativas a todo el grupo.

Proposición 2.18. Sean G y G' dos grupos topológicos y $f : G \to G'$ un homomorfismo entre ellos. Entonces f es continua si y solo si es continua en algún $g_0 \in G$.

Demostración. Es un resultado conocido de la topología que f es continua si y solo si es continua en todo punto. Así, si suponemos que es continua, lo será en cualquier g_0. Recíprocamente, tomemos $g \in G$ y veamos que f es continua en g. Para ello, sea U un entorno de $f(g)$, vamos a ver que $f^{-1}(U)$ es entorno de g. Notemos que $f(g_0)f(g)^{-1}U$ es entorno de $f(g_0)$, de modo que por continuidad de f en g_0 deducimos que $f^{-1}(f(g_0)f(g)^{-1}U)$ es entorno de g_0. Nótese que por ser f homomorfismo se tiene la igualdad siguiente $f^{-1}(f(g_0)f(g)^{-1}U) = g_0g^{-1}f^{-1}(U)$. En efecto:
$$\begin{aligned} f^{-1}(f(g_0)f(g)^{-1}U) &= \{x \in G : f(x) \in f(g_0)f(g^{-1}U)\} = \{x \in G : f(gg_0^{-1}x) \in U\} \\ &= \{x \in G : f \circ l_{gg_0^{-1}}(x) \in U\} = (f \circ l_{gg_0^{-1}})^{-1}(U) = l_{gg_0^{-1}}^{-1}(f^{-1}(U)) = g_0g^{-1}f^{-1}(U). \end{aligned}$$
Por tanto, si $g_0g^{-1}f^{-1}(U)$ es entorno de g_0, entonces multiplicando por gg_0^{-1} deducimos que $f^{-1}(U)$ es entorno de g, lo cual prueba la continuidad en g. □

2.3. Ejemplo: el grupo general lineal como grupo topológico

Denotemos $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices cuadradas reales de tamaño n. Este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Para definir su topología, notemos que $M(n,\mathbb{R})$ es el espacio de los operadores lineales de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. En particular, podemos definir la topología asociada a la norma matricial obtenida de la norma euclídea usual en $\mathbb{R}^n$. Con esto,

$$\|A\|_2 := \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Por otro lado, es inmediato comprobar que la *norma de Fröbenius* siguiente también es una norma

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Puesto que $M(n,\mathbb{R})$ es un espacio de dimensión finita, esta norma es equivalente a la anterior, es decir, define la misma topología. Esta forma de entender la topología es muy ventajosa, pues permite ver $M(n,\mathbb{R})$ simplemente como $\mathbb{R}^{n^2}$ con la topología usual del siguiente modo:
Denotemos $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ y definamos la aplicación

$$f : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}, A \mapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22} \dots a_{nn}).$$

Notemos que lo único que hace esta aplicación es tomar las columnas de las matrices, y ponerlas unas tras otras en un vector. Es claro que f es biyectiva y homeomorfismo si vemos la topología de $M(n,\mathbb{R})$ mediante la norma de Fröbenius (esto se sigue de que la norma de Fröbenius es simplemente la norma euclídea usual en $\mathbb{R}^{n^2}$). De este homeomorfismo deducimos que $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ es Hausdorff y localmente compacto.

Por otra parte, hay n^2 proyecciones:

$$\pi_{ij} : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \pi_{ij}(A) = a_{ij},$$

que son todas continuas, pues componiendo con f^{-1} obtenemos las proyecciones de $\mathbb{R}^{n^2}$, que son continuas por las propiedades de la topología producto.

Además, denotamos $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ al conjunto de matrices reales cuadradas e invertibles. Este conjunto con el producto usual de matrices es un grupo. Si probamos que inversión y producto son continuas, podremos deducir que se trata de un grupo topológico (para la topología de subespacio). Además, como $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ es Hausdorff también lo será $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ porque esta propiedad se conserva al tomar subespacios. Por último, si probamos que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ es abierto en $M(n,\mathbb{R})$, también será localmente compacto, pues los subespacios abiertos de los espacios localmente compactos son localmente compactos [Mun00, Cor 29.1].

Proposición 2.19. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ es un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff.

Demostración. Comencemos viendo que $\psi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ es continua. Vamos a ver que el producto de matrices definido directamente en $M(n,\mathbb{R})$ es continuo, pues al restringir a un subespacio seguirá siéndolo. Para ello, notemos que por ser $f : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ homeomorfismo (definida como antes), $\psi : M(n,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ es continua si y solo si lo es $\tilde{\psi} = f \circ \psi \circ (f^{-1} \times f^{-1})$ donde $f^{-1} \times f^{-1} : M(n,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ está definida como $(f^{-1} \times f^{-1})(x,y) = (f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ es de nuevo un homeomorfismo.

Sean $a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22} \dots a_{nn})$ y $b = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}, b_{21}, b_{22} \dots b_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, estos elementos se corresponden con dos matrices $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ y $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mediante f. $\tilde{\psi}$ tiene llegada en $\mathbb{R}^{n^2}$ luego será continua si y solo si lo son sus proyecciones, y a partir de la definición del producto de matrices

$$\pi_{ij} \circ \tilde{\psi}(a,b) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

que es continua por ser suma de productos de componentes.

Tomemos ahora la aplicación $i : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ que asigna a cada matriz su inversa. Para ver que esta aplicación es continua también, comencemos notando que el determinante es continuo por ser composición de sumas y productos, tal y como se sigue de la fórmula de Leibniz (ver [Str09, Cap. 5])

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \right),$$

donde S_n denota el *grupo de las permutaciones de* n *elementos*, y $\mathrm{sgn}(\sigma)$ es el signo de una permutación $\sigma \in S_n$. Por otro lado, para toda matriz invertible A, su inversa puede calcularse mediante la fórmula de la adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A),$$

donde $\mathrm{adj}(A)$ es la traspuesta de la matriz de cofactores, que tiene en la posición i, j el determinante de la matriz A en la que se han suprimido la fila i y la columna j. En particular, si $a \in \mathbb{R}^{n^2}$ se corresponde con A mediante f, entonces $\pi_{ij} \circ i$ es continua porque es un cociente de determinantes, ambos continuos, siendo el del denominador no nulo. Concluimos con esto que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ es un grupo topológico, que además es de Hausdorff. Veamos que es localmente compacto, para lo cual vamos a comprobar que es abierto en $M(n,\mathbb{R})$. La aplicación $\det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua como ya hemos comentado, y $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, siendo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ un abierto, luego su preimagen por una aplicación continua también.

□

Aunque no vamos a trabajar con $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, en el capítulo 5 sí que estudiaremos dos subgrupos suyos $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. En dicho capítulo, será importante tener en cuenta que en la demostración anterior hemos probado que la aplicación determinante es continua, de modo que lo será restringida a cualquier subespacio.

CAPÍTULO 3

CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIDA DE HAAR

Dedicamos ese capítulo a enunciar y demostrar los teoremas de existencia y unicidad de la medida de Haar. Para ello. nos basaremos fundamentalmente en los textos [Gle10] y [Coh13]. Comenzaremos dando una prueba de la existencia, y después veremos la unicidad. Realmente, no tenemos unicidad, sino unicidad salvo multiplicación por escalares positivos. De todas formas, esto no es problemático, pues se obtiene unicidad en el momento en que se fija una unidad de medida, como detallaremos. Comencemos definiendo lo que es una medida de Haar.

Definición 3.1 (medida de Haar). Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Una *medida de Haar por la izquierda* (resp. *medida de Haar por la derecha*) en G es una medida de Borel regular no nula y tal que para todo medible $A \subset G$ se cumple $\mu(gA) = \mu(A)$ (resp. $\mu(Ag) = \mu(A)$).

El hecho de exigir que el espacio sea de Hausdorff tiene dos justificaciones principales. La primera es que la mayoría de los espacios con los que se trabaja en la práctica son de Hausdorff, y la segunda es que así nos aseguramos de que los conjuntos compactos sean medibles, pues los subespacios compactos de los espacios de Hausdorff son siempre cerrados, luego complementarios de abiertos, y esto implica que están en $\mathcal{B}(X)$ por la definición de σ-álgebra. Respecto a la definición, una medida de Haar es, en términos informales, una medida invariante bajo traslaciones por la izquierda (o por la derecha). Siempre vamos a asumir que los grupos topológicos son de Hausdorff, salvo que indiquemos explícitamente lo contrario.

Observación 3.2. Aunque hemos dado la definición de medida de Haar al inicio del capítulo para mostrar cuál va a ser el objeto centra del mismo, técnicamente aún no estamos en condiciones de afirmar que la definición dada sea correcta, pues la condición de invarianza por acción grupo impone que para cada medible $A \in \mathcal{B}(G)$ y cada $g \in G$, $\mu(A) = \mu(gA)$. Ahora bien, hasta que no probemos que si A es medible, entonces gA también, no tiene sentido escribir $\mu(gA)$. Por supuesto, gA va a ser medible, y la definición es correcta, pero posponemos la demostración de esta afirmación hasta el lema 3.5.

Dicho esto, y como ya se mencionó en la introducción, este capítulo está dedicado a demostrar los teoremas de existencia y unicidad de la medida de Haar en los grupos topológicos de Haussdorff y localmente compactos. Sin embargo, antes de embarcarnos en la prueba, merece la pena considerar un primer ejemplo, que si bien es bastante sencillo, no es completamente trivial. Este ejemplo es además interesante por otro motivo: la medida de Haar que vamos a estudiar es una de las medidas que ya pusimos como ejemplo en el primer capítulo.

Ejemplo 3.3. Un ejemplo de medida de Haar es la medida del conteo en $\mathbb{Z}$ con la operación de suma usual. Dotamos a $\mathbb{Z}$ de su estructura de grupo usual para operación suma, y de la de topología de subespacio inducida por $\mathbb{R}$, que resulta ser la topología discreta (en la que recordamos, pues lo vamos a utilizar continuamente en el ejemplo, que *todo subespacio es abierto*). Fijémonos en que con esta topología $\mathbb{Z}$ resulta ser de Hausdorff y localmente compacto (es cerrado en $\mathbb{R}$ que es localmente compacto). Esto no va a ser necesario, pero lo indicamos aquí porque al final del capítulo discutiremos si la condición de compacidad local es necesaria o no para que exista la medida de Haar. Tenemos en este caso que $\mathcal{B}(\mathbb{Z}) = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ porque la topología ya contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{Z}$. La medida del conteo quedó definida en el ejemplo 1.7. Denotémosla por μ. Es evidente que para cada $A \subset \mathbb{Z}$, $\mu(A) = \mu(m + A)$, pues si A es finito y tiene n elementos, entonces $m + A$ también, y si es infinito, entonces $m + A$ también. Si comprobamos que se trata de una medida de Borel regular, habremos probado que es una medida de Haar. Veamos entonces las propiedades de la definición.

1. Los únicos compactos de $\mathbb{Z}$ con la topología trivial son los conjuntos finitos. Es obvio que los conjuntos finitos son compactos, y si A es infinito, entonces $\{\{a\} : a \in A\}$ es un recubrimiento por abiertos de A del que no puede extraerse un subrecubrimiento finito. Es evidente entonces que $\mu(K) < \infty$.

2. Sea $E \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ hemos de ver que $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\} = \inf\{\mu(U) : E \subset U : U \subset \mathbb{Z}\}$. Si E es un conjunto infinito, entonces también lo es cualquier conjunto que lo contenga, y la igualdad anterior se da de manera trivial. Supongamos que E es finito y llamemos α al inferior anterior. E es abierto y $E \subset E$, luego $\mu(E)$ es un elemento del conjunto anterior, de modo que $\mu(E) \geq \alpha$. Para cada abierto U finito con $E \subset U$, como ambos conjuntos deben ser finitos, $\mu(E) \leq \mu(U)$ y tomando inferiores, $\mu(E) = \alpha$, lo que prueba la igualdad.

3. Sea $U \subset \mathbb{Z}$ abierto, hemos de ver que $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \text{ compacto}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \text{ finito}\} := \beta$. Si U es infinito, entonces $\mu(U) = \infty$. Como $U \subset \mathbb{Z}$, debe ser numerable, luego podemos escribir $U = \cup_{n=1}^{m}\{u_n\}$. Definamos $K_m = \cup_{m=1}^{\infty}\{u_n\}$. K_m es una familia de conjuntos compactos con $\mu(K_m) = m$. Se tiene entonces que $\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\mu(K_m)\} \leq \beta$ y se da la igualdad. Supongamos que U es finito, entonces es compacto y se contiene a sí mismo, lo cual implica que $\mu(U) \leq \beta$. Ahora bien, si $K \subset U$, entonces ambos son finitos y U tiene el mismo número de elementos que K o más. Por tanto $\mu(K) \leq \mu(U)$ y tomando superiores $\beta = \mu(U)$.

Con esto, concluimos que la medida del conteo es una medida de Haar por la izquierda sobre $\mathbb{Z}$. Obsérvese que, de hecho, es una medida de Haar por la izquierda y por la derecha porque el grupo es abeliano,. Es obvio que esto último es algo general: siempre que un grupo topológico abeliano G tenga una medida de Haar por la izquierda, esta será una medida también por la derecha y viceversa. Gran parte del capítulo 4 se centrará en saber en qué otros casos es cierto que toda medida de Haar por la izquierda lo es también por la derecha.

Una vez visto este primer ejemplo, pasamos a dar algunos resultados previos que son necesarios para la construcción de la medida de Haar.

Lema 3.4. Sean X e Y dos conjuntos y $f : X \to Y$. Sea $\Omega \subset \mathcal{P}(Y)$. Entonces $\sigma(f^{-1}(\Omega)) = f^{-1}(\sigma(\Omega))$.

Demostración. Comencemos observando que tanto $\sigma(f^{-1}(\Omega))$, como $f^{-1}(\sigma(\Omega))$ son *familias de subconjuntos de* X. Veremos la igualdad por doble inclusión

- Comencemos viendo que $\sigma(f^{-1}(\Omega)) \subset f^{-1}(\sigma(\Omega))$. Para ello, basta con comprobar que $f^{-1}(\sigma(\Omega))$ es una σ-álgebra y que contiene a $f^{-1}(\Omega)$ (pues entonces contendrá al σ-álgebra que genera).

  1. Sea $A \in f^{-1}(\Omega)$, entonces A es preimagen de uno de los elementos de Ω, luego existe $B \in \Omega$ con $A = f^{-1}(B)$. Como evidentemente se tiene $B \in \sigma(\Omega)$, se tiene que $A \in f^{-1}(\sigma(\Omega))$, luego $f^{-1}(\Omega) \subset f^{-1}(\sigma(\Omega))$.
  2. Veamos que $f^{-1}(\sigma(\Omega))$ es una σ-álgebra a partir de la definición. Como $Y \in \sigma(\Omega)$, $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\sigma(\Omega))$. Por otro lado, si $A \in f^{-1}(\sigma(\Omega))$, entonces $A = f^{-1}(B)$ para cierto $B \in \sigma(\Omega)$. En particular, $B^c \in \sigma(\Omega)$, y $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c = A^c \in f^{-1}(\sigma(\Omega))$, luego $f^{-1}(\sigma(\Omega))$ es cerrado para la toma de complementarios. Veamos finalmente que es cerrado para las uniones numerables. Sea entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f^{-1}(\sigma(\Omega))$. De nuevo,

para cada A_n, existe $B_n \in \sigma(\Omega)$ tal que $f^{-1}(B_n) = A_n$. Puesto que $\sigma(\Omega)$ es un σ-álgebra, es cerrado para uniones numerables, luego $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma(\Omega)$, y por ello, $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\sigma(\Omega))$.

- Veamos que $f^{-1}(\sigma(\Omega)) \subset \sigma(f^{-1}(\Omega))$. Para ello, comenzamos definiendo

$$\Sigma := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\Omega))\}.$$

Comencemos viendo que Σ es un σ-álgebra en Y que contiene a Ω. Si $B \in \Omega$, entonces $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\Omega) \subset \sigma(f^{-1}(\Omega))$, luego $B \in \Sigma$. Veamos que Σ es un σ-álgebra. Para ello, observemos que $Y \in \Sigma$ porque $f^{-1}(Y) = X \in \sigma(f^{-1}(\Omega))$ (porque todo σ-álgebra debe contener al conjunto total). Por otro lado, si $A \in \Sigma$, entonces $f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\Omega))$, luego $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \sigma(f^{-1}(\Omega))$, y por consiguiente, $A^c \in \Sigma$. Tomemos, finalmente, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$. Tenemos entonces $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \sigma(f^{-1}(\Omega))$ nuevamente por ser este último una σ-álgebra. De la definición de Σ se sigue que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. Concluimos que Σ es un σ-álgebra que contiene a Ω, luego $\sigma(\Omega) \subset \Sigma$. Con esto, sea $A \in f^{-1}(\sigma(\Omega))$, entonces existe $B \in \sigma(\Omega) \subset \Sigma$ tal que $f^{-1}(B) = A$. Como $B \in \Sigma$, aplicando la definición de Σ, se tiene $A = f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\Omega))$, lo cual prueba la inclusión.

□

Utilizaremos el nombre *espacio de medida topológico* para referirnos a un espacio topológico X dotado de una medida, en el que el σ-álgebra es $\mathcal{B}(X)$.

Lema 3.5. Sea $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ un espacio de medida topológico y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Entonces, son equivalentes:

1. $A \in \mathcal{B}(X)$.
2. $f(A) \in \mathcal{B}(X)$.
3. $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$.

Demostración. Comencemos notando que si $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ es la topología en X, entonces $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$. Ahora que lo tenemos en términos del lema anterior, veamos las implicaciones.

(1) ⇒ (2) Supongamos que $A \in \sigma(\tau)$. Entonces

$$f(A) \in f(\mathcal{B}(X)) = f(\sigma(\tau)) = \sigma(f(\tau)) = \sigma(\tau) = \mathcal{B}(X)$$

donde hemos aplicado el lema anterior a f^{-1} (f es homeomorfismo, luego biyección) y el hecho de que al ser f homeomorfismo, $f(\tau) = \tau$. Por detallar algo más esto último, todo homeomorfismo es una aplicación abierta, luego $f(\tau) \subset \tau$ y para la otra contención, si $U \subset \tau$, entonces $f^{-1}(U) \subset \tau$ porque en particular f es continua, y $f(f^{-1}(U)) = U$. Esto prueba $\tau \subset f(\tau)$, y se tiene la igualdad.

(2) ⇒ (3) Supongamos que $f(A) \in \sigma(\tau)$. Entonces

$$A \in f^{-1}(\sigma(\tau)) = f^{-1}(\sigma(\tau)) = \sigma(f^{-1}(\tau)) = \sigma(\tau) = \mathcal{B}(X)$$

la justificación de la penúltima igualdad es idéntica a la de la implicación anterior utilizando que f es homeomorfismo si y solo si f^{-1} lo es. Por otro lado, para la primera igualdad hemos utilizado que $f(A) \in \sigma(\tau)$ implica que $A \in f^{-1}(\tau)$. Podemos utilizar (1) ⇒ (2) con f^{-1}, que es un homeomorfismo, de modo que $A \in \mathcal{B}(X)$ implica que $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$.

(3) ⇒ (1) Razonando como antes:

$$A = f(f^{-1}(A)) \in f(\sigma(\tau)) = \sigma(f(\tau)) = \sigma(\tau) = \mathcal{B}(X)$$

□

Observación 3.6.

1. Con este lema, ya podemos afirmar que la definición de medida de Haar es correcta, pues si $A \in \mathcal{B}(G)$, el lema 3.5 aplicado a los homeomorfismos r_g y l_g permite deducir que Ag y gA son medibles.

2. El lema anterior admite una generalización. Concretamente, si X e Y son dos espacios topológicos, con topologías respectivas τ_X y τ_Y, y $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $A \in \mathcal{B}(X)$ si y solo si $f(A) \in \mathcal{B}(Y)$. La demostración es simplemente probar (1) $\Rightarrow$ (2) del lema anterior, teniendo en cuenta que al ser f un homeomorfismo, $f(\tau_X) = \tau_Y$.

El resultado que vamos a probar a continuación nos va a mostrar que las medidas de Haar por la derecha y por la izquierda son, en cierto sentido, equivalentes. Más concretamente, vamos a probar que dada una medida de Haar por la izquierda, siempre se puede obtener de ella una medida de Haar por la derecha y viceversa. Así, a la hora de probar la existencia de la medida de Haar, probaremos solamente que existe una medida de Haar por la izquierda, y la existencia de la medida por la derecha seguirá de manera inmediata. Probamos antes un lema previo con algunos resultados auxiliares que utilizaremos en la demostración.

Lema 3.7. Sea G un grupo topológico y sea $\{A_i\}_{i \in I} \subset G$ una familia de subconjuntos de G. Entonces:

1. $(\cup_{i\in I} A_i)^{-1} = \cup_{i\in I} A_i^{-1}$.

2. Si $A_i \cap A_j = \varnothing$, entonces $A_i^{-1} \cap A_j^{-1} = \varnothing$.

3. Sean $A, B \subset G$, entonces $A \subset B$ si y solo si $A^{-1} \subset B^{-1}$.

Demostración. Veamos ambas afirmaciones.

1. Vemos la doble inclusión, si $a \in (\cup_{i\in I} A_i)^{-1}$, entonces $a^{-1} \in \cup_{i\in I} A_i$, luego existe $i_0 \in I$ con $a^{-1} \in A_{i_0}$, esto implica $a \in A_{i_0}^{-1} \subset \cup_{i\in I} A_i^{-1}$, lo cual prueba $(\cup_{i\in I} A_i)^{-1} \subset \cup_{i\in I} A_i^{-1}$. Recíprocamente, si $a \in \cup_{i\in I} A_i^{-1}$, entonces $a^{-1} \in A_{j_0} \subset \cup_{i\in I} A_i$ para cierto $j_0 \in I$, luego $a \subset (\cup_{i\in I} A_i)^{-1}$, y tenemos la otra inclusión.

2. Por reducción al absurdo, si existe $x \in A_i^{-1} \cap A_j^{-1}$, entonces $x^{-1} \in A_i$ y $x^{-1} \in A_j$, luego $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ y tenemos contradicción.

3. Veamos la implicación $\Rightarrow$), sea $a \in A \subset B$, entonces $a^{-1} \in B^{-1}$ luego $A^{-1} \subset B^{-1}$. La implicación contraria se obtiene aplicando esta a A^{-1} y B^{-1} y notando que $(A^{-1})^{-1} = A$.

$\square$

Proposición 3.8. Sea G un grupo topológico de Hausdorff y sea $\mu : \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$. Entonces μ es una medida de Haar por la izquierda (respectivamente por la derecha), si y solo si la aplicación $\mu' : \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ definida como $\mu'(A) = \mu(A^{-1})$ es una medida de Haar por la derecha (respectivamente por la izquierda).

Demostración. Vamos a probar que μ es una medida de Haar por la izquierda si y solo si μ' es una medida de Haar por la derecha, pues el otro caso se demuestra igual.

$\Rightarrow$) Lo primero que debemos notar que es que $i : G \to G$ es un homeomorfismo, de modo que utilizando el lema 3.5, $A \in \mathcal{B}(G)$ si y solo si $A^{-1} \in \mathcal{B}(G)$, lo cual justifica que μ' esté bien definida. Además, $\mu'(A) = \mu(A^{-1}) \geq 0$, luego realmente tiene llegada en $[0, \infty]$. Veamos que es una medida de Borel regular, para lo cual comenzamos viendo que se satisfacen las condiciones de las definiciones de medida y medida de Borel regular.

1. $\mu'(\varnothing) = \mu(\varnothing^{-1}) = \mu(\varnothing) = 0$.

2. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(G)$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Entonces,

$$\mu'\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}\right) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^{-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A_n).$$

   Notemos que hemos utilizado el lema 3.7, la primera afirmación en la primera igualdad, y la segunda afirmación para garantizar que $\{A_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de medibles disjuntos dos a dos, y poder aplicar así que μ es una medida.

Concluimos con esto que μ' es una medida. Veamos que es de Borel regular. Comprobamos de nuevo las propiedades de la definición.

1. Sea $K \in \mathcal{B}(G)$ compacto, como i es homeomorfismo, $i(K) = K^{-1}$ es compacto también, de modo que $\mu'(K) = \mu(K^{-1}) < \infty$ porque μ es una medida de Haar por hipótesis.
2. Sea E medible. Notemos que si U es un abierto que contiene a E^{-1} si y solo si U^{-1} es un abierto que contiene a E, utilizando que i es homeomorfismo y el lema 3.7 de nuevo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mu'(E) =& \mu(E^{-1}) = \inf\{\mu(U) : U \text{ es abierto y } E^{-1} \subset U\} = \\ =& \inf\{\mu(U^{-1}) : U \text{ es abierto y } E \subset U\} = \inf\{\mu'(U) : U \text{ es abierto y } E \subset U\},\end{aligned}$$

   donde hemos utilizado $\{U : U \text{ es abierto y } E^{-1} \subset U\} = \{U : U \text{ es abierto y } E \subset U^{-1}\} = \{U^{-1} : U \text{ es abierto y } E \subset U\}$.
3. Sea $U \subset G$ abierto, $K \subset U^{-1}$ es compacto si y solo si $K^{-1} \subset U$ es compacto de nuevo por ser i homeomorfismo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mu'(U) =& \mu(U^{-1}) = \sup\{\mu(K) : \text{es compacto y } K \subset U^{-1}\} = \\ =& \sup\{\mu(K^{-1}) : \text{es compacto y } K \subset U\} = \sup\{\mu'(K) : \text{es compacto y } K \subset U\}.\end{aligned}$$

   Las igualdades se justifican del mismo modo que en el caso anterior.

Con esto concluimos que μ' así definida es una medida. Veamos que es una medida de Haar por la derecha. Para ello, dados $E \in \mathcal{B}(G)$ y $g \in G$, tenemos

$$\mu'(Eg) = \mu((Eg)^{-1}) = \mu(g^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \mu'(E),$$

utilizando que μ es una medida de Haar por la izquierda.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que μ' es una medida de Haar por la derecha. Entonces, para cada $A \in \mathcal{B}(G)$ implica que $\mu(A) = \mu'(A^{-1})$, luego todo lo anterior demuestra que μ es una medida de Borel regular sin más que intercambiar los papeles de μ y μ'. Finalmente, para ver que si μ' es una medida de Haar por la derecha, entonces μ lo es por la izquierda, razonamos como antes. Tomando $g \in G$ cualquiera,

$$\mu(gA) = \mu'((gA)^{-1}) = \mu'(A^{-1}g^{-1}) = \mu'(A^{-1}) = \mu(A).$$

□

Así, si en un grupo topológico sabemos que existe una medida de Haar por la izquierda μ, y queremos

Con los resultados que hemos probado hasta ahora, ya estamos preparados para probar la existencia de la medida de Haar. Como ya hemos comentado, es suficiente con ver que existe una medida de Haar por la izquierda.

3.1. Teorema de existencia de la medida de Haar

Dedicamos esta sección íntegramente a la demostración del teorema de existencia de la medida de Haar por la izquierda en un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto G.

Antes de comenzar con la prueba, vamos a dar algunas definiciones y resultados previos que utilizaremos directamente.

Definición 3.9. Sea X un conjunto y $\{Z_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que la familia satisface la *propiedad de intersección finita* si para cada $J \subset I$ finito, $\cap_{i\in J} Z_i \neq \varnothing$.

Esta definición, junto con el teorema siguiente, proporciona una caracterización de los conjuntos compactos. Realmente, solo necesitaremos una de las implicaciones del teorema, pero probaremos la doble implicación por cuestión de completitud. La demostración está tomada de [AA22a, Th 5.9.6].

Teorema 3.10 (de Vietoris). Un espacio topológico X es compacto si y solo si para cada familia de cerrados $\mathcal{F}$ que cumple la propiedad de intersección finita, se tiene que $\cap_{C\in\mathcal{F}} C \neq \varnothing$.

Demostración. Veamos la doble implicación.
$\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto, y sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\cap_{C\in\mathcal{F}} C = \varnothing$. Tomando complementarios, se sigue que $X = X \backslash (\cap_{C\in\mathcal{F}} C) = \cup_{C\in\mathcal{F}} (X\backslash C)$. Para cada $C \in \mathcal{F}$, el conjunto $U_C := X\backslash C$ es abierto, de modo que los U_C constituyen un recubrimiento abierto de X. Por compacidad, existen $C_1, \ldots C_n$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{C_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (X\backslash C_i) = X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i \right),$$

ahora bien, esto implica que $\cap_{i=1}^n C_i = \varnothing$, en contra de que $\mathcal{F}$ tenga la propiedad de intersección finita.

$\Leftarrow$) Tomemos ahora un espacio topológico X tal que la intersección de cualquier familia de cerrados que cumple la propiedad de intersección finita es no vacía. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Tomando complementarios en $X = \cup_{U\in\mathcal{U}} U$ se obtiene

$$\varnothing = X \backslash \left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \right) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} (X\backslash U).$$

Tomemos entonces la colección de cerrados $\mathcal{F} := \{X\backslash U : U \in \mathcal{U}\}$. Por ser su intersección vacía, la hipótesis implica que $\mathcal{F}$ no puede tener la propiedad de intersección finita. Por consiguiente, existen $U_1, \ldots U_n$ tales que $\cap_{i=1}^n (X\backslash U_i) = \varnothing$. Ahora bien, tomando complementarios

$$X = X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X\backslash U_i) \right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

de modo que hemos obtenido un subrecubrimiento finito, y por consiguiente, X es compacto. □

3.1.1. Productos infinitos y el teorema de Tychonoff

Dedicamos esta subsección a hacer un breve recordatorio de los productos infinitos y el teorema de Tychonoff, que aunque no demostraremos, es necesario en la demostración del teorema de existencia. Comencemos recordando que dada una familia arbitraria de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$, su producto cartesiano se define como

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : \ \forall\, i \in I, \ f(i) \in X_i \right\}.$$

Además, si los X_i son espacios topológicos, se puede dotar a $\prod_{i\in I} X_i$ de una topología llamada *topología producto* (que cuando el producto es finito se reduce a la topología producto usual).

Dicha topología es la que tiene por base el conjunto siguiente

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i \ \forall\, i \in I, \text{ y } U_i = X_i \text{ salvo para una cantidad finita de índices} \right\},$$

donde τ_i denota la topología del espacio X_i.

Teorema 3.11 (de Tychonoff). Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de espacios topológicos compactos. Entonces $\prod_{i\in I} X_i$ es también compacto.

Demostración. Ver [Mun00, Th. 37.3]. Es interesante destacar que el teorema de Tychonoff necesita en su demostración, y de hecho es equivalente, al axioma de elección. □

3.1.2. Demostración del teorema de existencia

Con esto, ya estamos en condiciones de dar la demostración completa. Puesto que se trata de una demostración larga, iremos haciendo algunas afirmaciones que iremos probando poco a poco. La demostración que aquí se presenta es en esencia la presentada en [Gle10, Th. 4.3] Esquemáticamente, la demostración consta de los siguientes pasos.

1. Se fija un compacto K_0 de interior no vacío que se utiliza como "unidad de medida". Se define así una forma de medir conjuntos compactos para cada abierto: μ_U. La idea es ver cuantas traslaciones del abierto U hacen falta, como mínimo, para recubrir K. Se compara este número con el número de traslaciones que hacen falta para medir K_0 haciendo el cociente de estas cantidades.

2. Se define una aplicación μ que no depende del abierto utilizando el teorema de Tychonoff.

3. Se demuestra que μ, que aún permite medir solamente conjuntos compactos, cumple una serie de propiedades básicas: monotonía y que la medida de la unión de compactos es la suma de las medidas de los compactos.

4. Se comprueba que la aplicación así definida es una premedida en G.

5. Se utiliza el teorema de Carathéodory para definir la medida en un subálgebra de $\mathcal{P}(G)$.

6. Se comprueba que es una medida de Borel regular y que es de Haar por la izquierda.

Teorema 3.12 (de existencia de la medida de Haar). Sea G un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto. Entonces existe una medida de Haar por la izquierda .

Demostración: Sean $K \subset G$ un conjunto compacto, y $V \subset G$ un subespacio cualquiera de interior no vacío. Es claro que $\{g \cdot \mathrm{Int}(V) : g \in G\}$ es un recubrimiento por abiertos de K (de hecho de G, pues dado $f \in G$, $f \in fh^{-1}\mathrm{Int}(V)$ donde h es un elemento de $\mathrm{Int}(V)$). Como K es un compacto, existe un subrecubrimiento finito. Existen, por lo tanto, $g_1, g_2, \ldots g_n$ (no necesariamente únicos) tales que $K \subset \cup_{i=1}^n g_i \cdot \mathrm{Int}(V)$. Denotemos mediante $(K : V)$ al menor entero n tal que hacen falta n abiertos del tipo $g_i \cdot \mathrm{Int}(V)$ para recubrir K. Dicho n existe y es único, pues queda definido mediante

$$n := \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists\, g_1, \ldots g_k : K \subset \cup_{j=1}^k g_j \cdot \mathrm{Int}(V)\},$$

y todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene mínimo. Entendemos que si hay 0 elementos cumpliendo la condición anterior, entonces $K \subset \varnothing$. Obsérvese que $n \geq 1$ salvo que $K = \varnothing$, en cuyo caso, $n = 0$.

Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{U}$ las familias de subconjuntos de G formadas por los subconjuntos compactos de G y los abiertos que contienen a e, respectivamente. Como G es localmente compacto, todo punto tiene un entorno compacto, y como todo entorno de un punto contiene un abierto, debe existir un compacto de interior no vacío, que denotamos K_0. Para cada $U \in \mathcal{U}$ definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mu_U: & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & K & \mapsto & \mu_U(K) := \frac{(K:U)}{(K_0:U)}. \end{array}$$

Fijémonos en que hemos elegido K_0 de interior no vacío, luego en particular no vacío. Por consiguiente, $(K_0 : U) > 0$ y la aplicación está bien definida.

Afirmación 1: Se cumple $0 \leq \mu_U(K) \leq (K : K_0)$ para todos $K \in \mathcal{K}$ y $U \in \mathcal{U}$.
Para verlo, denotemos $n = (K_0 : U)$ y $m = (K : K_0)$. Eso quiere decir que para ciertas sucesiones finitas de elementos $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$ se tienen las relaciones $K_0 \subset \cup_{i=1}^n g_i \cdot U$ (obsérvese que $\operatorname{Int}(K_0) \subset K_0 \subset \cup_{i=1}^n g_i \cdot U$) y $K \subset \cup_{j=1}^m h_j \cdot \operatorname{Int}(K_0)$ de modo que

$$K \subset \cup_{j=1}^m h_j \cdot \operatorname{Int}(K_0) \subset \cup_{j=1}^m h_j \cdot K_0 \subset \cup_{j=1}^m h_j \cdot (\cup_{i=1}^n g_i \cdot U) = \cup_{i=1,j=1}^{n,m} (g_i \cdot h_j) \cdot U,$$

pero por definición de $(K : U)$ esto implica que $(K : U) \leq nm = (K_0 : K)(K_0 : U)$, y y dividiendo por $(K_0 : U)$ se obtiene el resultado buscado.

Vamos a construir la medida inicialmente en $\mathcal{K}$. Para definirla, vamos a tomar en cierto sentido, el "límite" de las cantidades $\mu_U(K)$ para $U \in \mathcal{U}$. De un modo más riguroso, la construcción es la siguiente. Sea $X = \prod_{K \in \mathcal{K}} [0, (K : K_0)]$. Observemos que los espacios $[0, (K : K_0)]$ son intervalos cerrados, y están dotados de la topología de subespacio de $\mathbb{R}$, luego son compactos. Aplicando el teorema de Tychonoff 3.11, deducimos que X es un espacio compacto con la topología de los productos infinitos. Por otro lado, de acuerdo con la afirmación 1, para cada $K \in \mathcal{K}$ se tiene $\mu_U(K) \in [0 : (K : K_0)]$, de modo que $\mu_U \in X$ (ver subsección 3.1.1). En este caso, $\mathcal{K}$ hace el papel de I, y denotando $X_k = [0, (K : K_0)]$, entonces $\mu_U : \mathcal{K} \to X$ cumple $\mu_U(K) \in X_k$. Dicho esto, para cada $V \in \mathcal{U}$ se define el conjunto

$$C(V) := \overline{\{\mu_U : U \in \mathcal{U} \ \text{ y } \ U \subset V\}} \subset X,$$

donde la adherencia se toma con respecto a la topología producto en X. Nótese que $\mu_V \in C(V)$, luego $C(V) \neq \varnothing$. Consideremos ahora la familia de cerrados $\{C(V) : V \in \mathcal{U}\}$, y veamos que tiene la propiedad de intersección finita. Sean entonces $V_1, \ldots V_n \in \mathcal{U}$ y consideremos $\{C(V_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Por definición de $\mathcal{U}$, $e \in V_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, luego $\cap_{i=1}^n V_i \neq \varnothing$ es un elemento de $\mathcal{U}$, y tiene sentido considerar $\mu_{\cap_{i=1}^n V_i}$. Como $\cap_{i=1}^n V_i \subset V_i$, se tiene $\mu_{\cap_{i=1}^n V_i} \in C(V_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Así, $\mu_{\cap_{i=1}^n V_i} \in \cap_{i=1}^n C(V_i)$. Por consiguiente, $\cap_{i=1}^n C(V_i) \neq \varnothing$, y concluimos que la familia tiene la propiedad de intersección finita. Como X es compacto, del teorema de Vietoris 3.10 deducimos que $\cap_{V \in \mathcal{U}} C(V) \neq \varnothing$. Por tanto, podemos tomar $\mu \in \cap_{V \in \mathcal{U}} C(V)$. Este elemento μ es el que hace las veces de "límite" de las aplicaciones μ_U.

Afirmación 2: Si $K_1 \subset K_2$ son compactos, entonces $\mu(K_1) \leq \mu(K_2)$.
Para verlo, comenzamos observando que el resultado es trivialmente cierto para μ_U. Concretamente, si $n = (K_2 : U)$, entonces $K_2 \subset \cup_{i=1}^n g_i \cdot U$ para ciertos g_i. Como $K_1 \subset K_2$, también hemos recubierto K_1, y como $(K_1 : U)$ es el menor número de elementos necesarios para recubrir K_1 con traslaciones de U, deducimos que $(K_1 : U) \leq (K_2 : U)$, y sin más que dividir por $(K_0 : U)$ a ambos lados, se obtiene $\mu_U(K_1) \leq \mu_U(K_2)$. Para ver μ satisface esta misma propiedad, tomemos $h \in X$ cualquiera. Puede verse $h : \mathcal{K} \to \cup_{K \in \mathcal{K}} [0, (K : K_0)]$ como una aplicación con llegada a $\mathbb{R}$, pues para cada $K \in \mathcal{K}$, se tiene $h(K) \in [0, (K : K_0)] \subset \mathbb{R}$. Fijados K_1 y K_2 como en el enunciado, consideremos la aplicación $\rho : X \to \mathbb{R}, h \mapsto \rho(h) = h(K_2) - h(K_1)$ y veamos que es continua. Podemos ver esta aplicación como la composición de la aplicación $X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, h \mapsto (h(K_2), h(K_1))$ y la aplicación $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y$. La segunda es evidentemente continua, luego basta ver que la primera lo es. Una aplicación con llegada a un producto es continua si lo son sus componentes, luego es suficiente con ver que la aplicación $X \to \mathbb{R}, h \mapsto h(K)$ es continua, ahora bien, esta aplicación es la proyección $\pi_K : X \to X_K$, que es continua por construcción de la topología producto. Observemos que $\rho(\mu_U) \geq 0$ para cada $U \in \mathcal{U}$, de modo que ρ es no negativa en cada $C(V)$ (necesitamos la continuidad justamente para asegurar que al pasar a la adherencia ρ no se hace negativa). Como esto es cierto para cada $C(V)$, y $\mu \in \cap_{V \in \mathcal{U}} C(V)$, se tiene

$\rho(\mu) = \mu(K_2) - \mu(K_1) \geq 0$, como queríamos ver.

Afirmación 3: Para todos compactos $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, se tiene $\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2)$. El razonamiento es muy similar al de la afirmación anterior; comenzamos probando el resultado para μ_U y después utilizamos el mismo razonamiento para pasar a μ. Para verlo para μ_U, observemos que si $n = (K_1 : U)$ y $m = (K_2 : U)$, entonces

$$K_1 \cup K_2 \subset (\cup_{i=1}^{n} g_i \cdot U) \cup \left(\cup_{j=1}^{m} h_j \cdot U\right)$$

para ciertos g_i y h_j. Como estamos recubriendo $K_1 \cup K_2$, debe ser $(K_1 \cup K_2 : U) \leq (K_1 : U) + (K_2 : U)$ y dividiendo por $(K_0 : U)$ se concluye $\mu_U(K_1 \cup K_2) \leq \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$. Por último, consideramos la aplicación $X \to \mathbb{R}, h \to h(K_1) + h(K_2) - h(K_1 \cup K_2)$ que es continua aplicando el razonamiento anterior, y notando que $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$. Esta aplicación vuelve a ser no negativa en cada $C(V)$, de donde se sigue que $\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

Afirmación 4: Si K_1 y K_2 son compactos y $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, entonces $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Como en los casos anteriores, vamos a comenzar demostrando la versión correspondiente para μ_U. Concretamente, vamos a comenzar viendo que si $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \varnothing$, entonces $\mu_U(K_1 + K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$. Puesto que la desigualdad en el sentido $\leq$ se ha visto en la afirmación anterior, hemos de ver $\geq$. Para ello, tomando $n = (K_1 \cup K_2 : U)$, entonces $K_1 \cup K_2 \subset \cup_{i=1}^{n} g_i \cdot U$. Observemos que cada $g_i \cdot U$ tiene intersección no vacía con K_1 o K_2. Veamos que no puede intersecar a ambos. Si intersecase a ambos, entonces existiría $s_1 \in U$ con $g_i \cdot s_1 \in K_1$, y por consiguiente $g_i \in K_1 \cdot U^{-1}$. Aplicando el mismo razonamiento a K_2, $g_i \in K_2 \cdot U^{-1}$, y finalmente $g_i \in K_1 \cdot U^{-1} \cap K_2 \cdot U^{-1}$, con lo que llegamos a contradicción. Veamos que el resultado es cierto para μ. Puesto que G es de Hausdorff, existen abiertos U_1, U_2 disjuntos tales que $K_1 \subset U_1$ y $K_2 \subset U_2$. Aplicando el lema 2.11, existen entornos abiertos V_1 y V_2 de e tales que $K_1 V_1 \subset U_1$ y $K_2 V_2 \subset U_2$. Sea $V = V_1 \cap V_2$. Es claro que V es un entorno abierto de e, y además $K_1 V \subset U_1$ y $K_2 V \subset U_2$. Puesto que U_1 y U_2 son disjuntos, se tiene $K_1 V \cap K_2 V = \varnothing$. Tomemos ahora $U \subset V^{-1}, U \in \mathcal{U}$, esto implica que $U^{-1} \subset V$, luego $K_1 U^{-1} \subset K_1 V$ y lo mismo para K_2. Con esto, $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \varnothing$ y por lo anterior, $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$. Como antes, definimos la aplicación $X \to \mathbb{R}, h \mapsto h(K_1 \cup K_2) - h(K_2) - h(K_1)$. Esta aplicación vuelve a ser continua, y como se anula para todos los $U \subset V^{-1}, U \in \mathcal{U}$, se anula en $C(V^{-1})$. Como $\mu \in C(V^{-1})$, tenemos el resultado buscado.

Con esto, tenemos una aplicación que permite medir conjuntos compactos, pues cumple las propiedades que uno esperaría de una medida, es decir, que es no negativa, monótona y es tal que la medida de compactos disjuntos es suma de las medidas de cada uno de los compactos. Buscamos ahora extender esta medida a los abiertos de G. Para ello, si $U \subset G$ se define:

$$\mu(U) := \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \in \mathcal{K}\}.$$

Con esta definición, μ será automáticamente regular interior. Veamos también que $\mu(U) \geq 0$. Para ello, basta comprobar que $\mu(K) \geq 0$ para todo compacto. Ahora bien, utilizando el razonamiento habitual, la aplicación $X \to \mathbb{R}, h \mapsto h(K)$ es continua, y $\mu_U(K) \geq 0$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Por continuidad, $h(K) \geq 0$ para todo $h \in C(V)$ para todo $V \in \mathcal{U}$, luego $\mu(K) \geq 0$.

Afirmación 5: Sea $K \subset X$ abierto y compacto, entonces ambas definiciones de $\mu(K)$ coinciden.
Es decir, hemos de comprobar que

$$\mu(K) = \sup\{\mu(K') : K' \subset K, K' \in \mathcal{K}\},$$

donde μ aquí denota la aplicación que hemos definido antes. Denotemos $A = \{\mu(K') : K' \subset K, K' \in \mathcal{K}\}$ y M su superior. Observemos que claramente $K \in \mathcal{K}$ y $K \subset K$, luego $K \in A$, y por ello $M \geq \mu(K)$. Por otro lado, aplicando la afirmación 2 se tiene que para cada $K' \in A$, puesto que $K' \subset K$, $\mu(K') \leq \mu(K)$, y tomando superiores $M \leq \mu(K)$, con lo que se tiene la igualdad.

Afirmación 6: Sean U_1 y U_2 abiertos de G con $U_1 \subset U_2$. Entonces $\mu(U_1) \leq \mu(U_2)$. Para verlo, observemos que si $K \subset U_1$ es compacto, entonces $K \subset U_1 \subset U_2$. En particular, $\mu(K) \leq \mu(U_2)$. Por

lo tanto
$$\mu(U_1) = \sup\{\mu(K) : K \subset U_1, K \in \mathcal{K}\} \leq \mu(U_2).$$
Dado ahora $A \subset X$ cualquiera, se define:
$$\mu(A) := \text{ínf}\{\mu(U) : U \subset A, U \text{ abierto}\}.$$
Esta definición se da para que μ sea regular interior. Además, $\mu(A)$ está bien definida porque $\mu(U) \geq 0$, luego el conjunto $\{\mu(U) : U \subset A, U \text{ abierto}\}$ está acotado inferiormente por 0, y por ello tiene extremo inferior.

Afirmación 7: μ[1] es una medida exterior en G. Hemos de comprobar que se cumplen las propiedades de la definición 1.12.
Obsérvese que μ está definida en $\mathcal{P}(G)$ porque se ha definido la medida de los conjuntos cualesquiera de G. Además, $\mu(A) \geq 0$ como ya hemos justificado. Dicho esto, veamos que se cumplen las propiedades de la definición de medida exterior.

1. $\mu(\varnothing) = 0$. Obsérvese que $\varnothing$ es abierto y compacto, y $\varnothing$ es el único compacto contenido en sí mismo. Dado ahora U un abierto cualquiera, $(\varnothing : U) = 0$ por definición.

2. Sean $A_1 \subset A_2 \subset G$, entonces $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. Para verlo, supongamos que U es un abierto tal que $A_2 \subset U$. En particular, $A_1 \subset U$, luego $\mu(A_1) \leq \mu(U)$ y tomando inferiores en el miembro derecho, $\mu(A_1) \leq \text{ínf}\{\mu(U) : U \subset A_2, U \text{ abierto}\} = \mu(A_2)$.

3. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia numerable de subconjuntos de G. Veamos que $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Para verlo, vamos a comenzar probando el resultado para una familia numerable de abiertos $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Aplicando la definición, sea $K \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$. Puesto que es compacto y lo tenemos recubierto por abiertos de G, tiene un subrecubrimiento finito, de modo que $K \subset \cup_{n=1}^{m} U_n$ (suponiendo que los abiertos que lo recubren son los m primeros, lo cual puede hacerse reordenando). Aplicamos ahora el lema 2.12 inductivamente. Escribimos entonces $K \subset U_1 \cup (\cup_{n=2}^{m} U_n)$. Puesto que ambos son abiertos, existen $K_1, K^{(1)}$ compactos con $K = K_1 \cup K^{(1)}$, $K \subset U_1$ y $K^{(1)} \subset \cup_{n=2}^{m} U_n$. Tomando ahora $K^{(1)} \subset U_2 \cup (\cup_{n=3}^{m} U_n)$ repetimos el razonamiento. Concluimos así que existen $K_1, K_2, \ldots K_m$ compactos y tales que $K_i \subset U_i, 1 \leq i \leq m$ y $K = \cup_{n=1}^{m} K_n$ (denotamos $K_m := K^{(m-1)}$ para que los indices sean correctos). Aplicando inductivamente la afirmación 3,
$$\mu(K) = \mu\left(\cup_{n=1}^{m} K_n\right) \leq \mu(K_1) + \mu\left(\cup_{n=2}^{m} K_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu(K_n).$$
Como además $K_i \subset U_i$, se tiene $\mu(K_i) \leq \mu(U_i)$, de modo que
$$\mu(K) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu(K_n) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n),$$
utilizando en el último paso que $\mu(U_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $K \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ era arbitrario, tomando superiores en el miembro izquierdo se tiene
$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \in \mathcal{K}\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n).$$
Para el caso general, si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$, entonces la desigualdad es trivial. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\mu(A_n)$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$ U_n abierto con $A_n \subset U_n$ y $\mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \mu(U_n)$. Así,
$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(U_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon,$$
donde en la primera desigualdad hemos utilizado que $A_n \subset U_n$ implica que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n$, luego $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \mu(\cup_{n=1}^{\infty} U_n)$, y en la penúltima igualdad que ambas series convergen. Como la desigualdad anterior es válida para cada $\varepsilon > 0$, debe ser $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, tal y como queríamos mostrar.

[1] Estamos denotándola μ en lugar de μ^* aunque esta notación sea ligeramente diferente de la introducida en el primer capítulo.

Concluimos que μ es una medida exterior en G.

Afirmación 8: Si $A \in \mathcal{B}(G)$, entonces A es μ-medible (en el sentido de la definición 1.12). Aplicando el teorema de Carathéodory 1.15, sabemos que los conjuntos μ-medibles constituyen un σ-álgebra. Si este σ-álgebra contiene a todos los abiertos, entonces deberá contener a $\mathcal{B}(G)$, de modo que vamos a comprobar esto último. Sean entonces U abierto, y $A \subset G$ cualquiera. Hemos de ver que

$$\mu(A) = \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c).$$

De acuerdo con la observación 1.13, basta ver que $\mu(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c)$. Si $\mu(A) = \infty$ es evidente, luego podemos suponer que $\mu(A) < \infty$. Sea entonces $\varepsilon > 0$, de nuevo por la definición de $\mu(A)$, existe $V \subset G, A \subset V$ abierto con $\mu(A) + \varepsilon/3 \geq \mu(V)$. Aplicando ahora la definición de $\mu(U \cap V)$, existe K compacto con $K \subset U \cap V$ y de manera que $\mu(U \cap V) - \varepsilon/3 \leq \mu(K)$. Como G es Hausdorff, y K compacto, es cerrado, luego K^c es abierto, y $V \cap K^c$ también. Por el mismo motivo, existe $L \subset V \cap K^c$ compacto y tal que $\mu(V \cap K^c) - \varepsilon/3 \leq \mu(L)$. Por otro lado, $K \subset U \Rightarrow U^c \subset K^c$ de modo que $U^c \cap V \subset K^c \cap V$. Así,

$$\mu(V \cap U^c) - \frac{\varepsilon}{3} \leq \mu(V \cap K^c) - \frac{\varepsilon}{3} \leq \mu(L).$$

Por lo tanto,

$$\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) - \frac{2\varepsilon}{3} \leq \mu(V \cap U) + \mu(V \cap U^c) - \frac{2\varepsilon}{3} \leq \mu(K) + \mu(L) \overset{(1)}{=}$$
$$\mu(L \cup K) \overset{(2)}{\leq} \mu(V) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

En (1) hemos utilizado que K y L son compactos disjuntos ($L \subset K^c$) y la afirmación 4. En (2) hemos utilizado que $L \subset V, K \subset V$, luego $K \cup L \subset V$. Por último, en muchas de las desigualdades hemos aplicado la monotonía de la medida exterior. Concluimos así que para cada $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \leq \mu(A) + \varepsilon,$$

luego debe ser $\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \leq \mu(A)$, como queríamos ver. Observemos que no podemos decir directamente que $\mu(V \cap U) + \mu(V \cap U^c) = \mu(V)$ pese a que $(V \cap U^c) \cap (V \cap U) = \varnothing$ porque la afirmación 4 está probada solamente para conjuntos compactos. Del teorema de Carathéodry (manteniendo la notación allí establecida) deducimos que μ restringida a Ω_μ es una medida, y que $\mathcal{B}(G) \subset \Omega_\mu$.

Afirmación 9: μ es una medida de Borel regular.
$\mu(K) < \infty$, pues $\mu \in X$ implica que $\mu(K) \leq (K : K_0) < \infty$ por definición de X, y las otras propiedades de la definición son ciertas por construcción de μ.

Afirmación 10: μ es no trivial.
Por construcción, $\mu_U(K_0) = \frac{(K_0:U)}{(K_0:U)} = 1$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Como ya hemos justificado, la aplicación $X \to \mathbb{R}, h \mapsto h(K_0)$ es continua. Por ello, se trata de una aplicación constantemente igual a 1 en cada $C(U)$, y como $\mu \in \cap_{U \in \mathcal{U}} C(U)$, se sigue que $\mu(K_0) = 1 \neq 0$.

Afirmación 11: μ es una medida de Haar por la izquierda.
Vamos a comenzar probando que si K es compacto, entonces $\mu(K) = \mu(g \cdot K)$ para cada $g \in G$. Para ello, consideremos la aplicación $X \to \mathbb{R}, h \mapsto h(K) - h(g \cdot K)$. Esta aplicación es continua, pues al ser compacto, $l_g(K) = g \cdot K$ lo es también, y podemos repetir los argumentos anteriores. Si vemos que es idénticamente nula en $\{\mu_U : U \in \mathcal{U}, U \subset V\}$, para cada $V \in \mathcal{U}$, lo será también en su adherencia $C(V)$, y como $\mu \in \cap_{V \in \mathcal{U}} C(V)$, $\mu(K) = \mu(g \cdot K)$ para cada compacto. Para ello, notemos que si $n = (K : U)$ y $K \subset \cup_{i=1}^n g_i \cdot U$, entonces $g \cdot K \subset \cup_{i=1}^n (g \cdot g_i) \cdot U$, de modo que $(g \cdot K : U) \leq (K : U)$, y aplicando el mismo razonamiento a $g \cdot K$ con g^{-1} se tiene $(K : U) = (g^{-1} \cdot g \cdot K : U) \leq (g \cdot K : U)$, lo cual prueba la igualdad. Así,

$$\mu_U(g \cdot K) = \frac{(g \cdot K : U)}{(K_0 : U)} = \frac{(K : U)}{(K_0 : U)} = \mu_U(K),$$

como queríamos ver. Dado ahora U abierto es evidente que $\mu(g \cdot U) = \mu(U)$ pues

$$\begin{aligned}\mu(g \cdot U) &= \sup\{\mu(K) : K \subset g \cdot U, K \in \mathcal{K}\} = \sup\{\mu(K) : g^{-1} \cdot K \subset U, K \in \mathcal{K}\} = \\ &= \sup\{\mu(g^{-1} \cdot K) : g^{-1} \cdot K \subset U, g^{-1} \cdot K \in \mathcal{K}\} = \sup\{\mu(K') : K' \subset U, K' \in \mathcal{K}\} \\ &= \mu(U),\end{aligned}$$

donde hemos utilizando que K es compacto si y solo si $g \cdot K$ lo es, y que $\mu(K) = \mu(g^{-1} \cdot K)$. A partir de aquí, es evidente, repitiendo el razonamiento que para cada A medible, $\mu(A) = \mu(g \cdot A)$. □

3.2. Unicidad de la medida de Haar

Una vez probada la existencia, vamos a probar un resultado de unicidad. Como ya hemos mencionado en varias ocasiones, en realidad, la medida de Haar no es única, pero sí que es única salvo multiplicación por constantes positivas, es decir, es única en el momento en que se fija una unidad de medida. De nuevo, antes de probar el resultado de unicidad, necesitamos algunos resultados previos, de carácter más técnico, y que probamos a continuación.

Lema 3.13. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ medible y $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Supongamos que $\mu(A) > 0$. Entonces existe algún $a > 0$ tal que $\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) > 0$.

Demostración. Comencemos observando que $A = f^{-1}(0, \infty)$ es medible por serlo f (ver las propiedades del final de la sección 1.4). Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que para cada $a > 0$, $\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) = 0$, y definamos $S_n := \{x \in A : f(x) > 1/2n\}$. Es claro entonces que $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, luego por las propiedades de las medidas (proposición 1.8)

$$0 \leq \mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) = 0,$$

luego $\mu(A) = 0$ y tenemos contradicción. □

Lema 3.14. Sea G un grupo topológico localmente compacto, y $f \in \mathscr{C}_c(G)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto U de e tal que para cada $x \in G, y \in x \cdot U$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demostración. Sea $K = \operatorname{sop}(f)$, compacto porque $f \in \mathscr{C}_c(G)$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y tomemos $x \in G$ cualquiera. Como f es continua, en particular es continua en x, de modo que existe un entorno W_x de x tal que para todo $y \in W_x$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Por la proposición 2.8, existe un entorno abierto de e, U_x tal que $xU_x \subset W_x$ es un entorno de x, luego para cada $y \in xU_x$ se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Utilizando ahora el lema 2.10, existe un entorno de e, V_x simétrico y tal que $V_x V_x \subset U_x$. En particular, $V_x \subset U_x$. Así, $K \subset \cup_{x \in K} xV_x$, y por compacidad, $K \subset \cup_{k=1}^n x_k V_{x_k}$ para ciertos $x_1, \ldots x_n \in K$. Definimos ahora $V = \cap_{k=1}^n V_{x_k}$ y $U = V \cap V^{-1}$ Puesto que cada V_{x_k} es un entorno abierto de e, V lo es, y por consiguiente, U también. Veamos que este abierto cumple la propiedad del enunciado. Sea $y \in xU$. Distinguimos casos.

1. Si $x, y \notin K$, entonces $f(x) = f(y) = 0$ y trivialmente $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$.
2. Supongamos $x \in K$, entonces $x \in x_k V_{x_k} \subset x_k U_{x_k}$ para algún $1 \leq k \leq n$ porque tenemos recubierto el compacto K. Como $x \in x_k U_{x_k}$, debe ser $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon/2$. Por otro lado, $x \in x_k V_k$ y $V \subset V_{x_k}$ (por definición de V) implica que si se toma $y \in xU$, entonces $y \in xU \subset xV \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k}$. Con esto, $y \in x_k U_{x_k}$, luego $|f(x_k) - f(y)| < \varepsilon/2$. Finalmente,
$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x_k) + f(x_k) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
3. Supongamos ahora que $y \in K$. Como $y \in xU$, existe $u \in U$ tal que $y = xu$, de modo que $x = yu^{-1}$. Observemos entonces que $u^{-1} \in U$, porque U es simétrico (ver lema 2.7). Así, $x \in yU$ con $y \in K$. Aplicamos entonces el mismo procedimiento que en el párrafo anterior pero intercambiando los papeles de x e y.

□

El siguiente resultado nos va a mostrar que para integrar una función $f(g)$ en todo el grupo G, puede integrarse $f(xg)$ a todo G, y el resultado es el mismo. La idea es que si g recorre todo G, entonces xg también para $x \in G$ fijo, y como la medida μ es invariante bajo traslaciones, la integral de ambas funciones es igual.

Lema 3.15. Sea G un grupo topológico, y sea μ una medida de Haar por la izquierda en G. Entonces para cada $x \in G$, $\int_G f(xg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g)$ para cada $f \in L^1(G, \mathbb{C})$.

Demostración. Como es habitual cuando se demuestran propiedades de las integrales, comenzamos probando el resultado para funciones características, pasamos después a las funciones simples, luego a las reales no negativas, y por último, a las funciones complejas en $L^1(G, \mathbb{C})$.

1. Sea $E \in \mathcal{B}(G)$, entonces:

$$\int_G \chi_E(xg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G \chi_{x^{-1}E}(g)d\mu(g) = \mu(x^{-1}E) \overset{\text{def. 3.1}}{=} \mu(E) = \int_G \chi_E(g)\mathrm{d}\mu(g),$$

   utilizando que $\chi_E(xg) = 1$ si $xg \in E \Leftrightarrow g \in x^{-1}E$ y es 0 en otro caso, luego $\chi_E(xg) = \chi_{x^{-1}E}(g)$.

2. Sea $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ una función simple, utilizando la linealidad de la integral, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_E s(xg)\mathrm{d}\mu(g) &= \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}(xg)\mathrm{d}\mu(g) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \chi_{E_i}(xg)\mathrm{d}\mu(g) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \chi_{E_i}(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}(xg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_E s(g)\mathrm{d}\mu(g).\end{aligned}$$

3. Sea $f : G \to \mathbb{R}$ medible no negativa, entonces existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ con $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ para cada $x \in G, n \in \mathbb{N}$ con $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ casi siempre. Por el teorema de la convergencia monótona, se tiene

$$\begin{aligned}\int_G f(xg)\mathrm{d}\mu(g) &= \int_G \lim_{n\to\infty} s_n(gx)\mathrm{d}\mu(g) = \lim_{n\to\infty} \int_G s_n(xg)\mathrm{d}\mu(g) = \lim_{n\to\infty} \int_G s_n(g)\mathrm{d}\mu(g) \\ &= \int_G \lim_{n\to\infty} s_n(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),\end{aligned}$$

   donde referimos al lector a la sección 1.4 para las afirmaciones relativas a la teoría de la medida.

4. Sea $f : G \to \mathbb{R}$ real e integrable, entonces $f = f^+ - f^-$ (ver 1.18), siendo f^+ y f^- medibles no negativas, luego por el apartado anterior:

$$\begin{aligned}\int_G f(xg)\mathrm{d}\mu(g) &= \int_G f^+(xg)\mathrm{d}\mu(g) - \int_G f^-(xg)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f^+(g)\mathrm{d}\mu(g) - \int_G f^-(g)\mathrm{d}\mu(g) \\ &= \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g).\end{aligned}$$

5. Sea finalmente $f : G \to \mathbb{C}$ integrable, entonces $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : G \to \mathbb{R}$ son integrables y:

$$\begin{aligned}\int_G f(xg)\mathrm{d}\mu(g) &= \int_G \mathrm{Re}(f(xg))\mathrm{d}\mu(g) + i\int_G \mathrm{Im}(f(xg))\mathrm{d}\mu(g) \\ &= \int_G \mathrm{Re}(f(g))\mathrm{d}\mu(g) + i\int_G \mathrm{Im}(f(g))\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),\end{aligned}$$

con lo que el resultado es cierto para cada $f \in L^1(G, \mathbb{C})$. □

Una vez probado esto, estamos en condiciones de probar el teorema de unicidad. Este teorema implica que la medida de Haar es única salvo una constante de *normalización*. Es decir, se puede exigir que un medible concreto (de medida finita y no nula), E en el grupo G tenga medida 1. Para ello, se construye una medida de Haar por la izquierda μ de acuerdo con el teorema de existencia. Por el teorema que mostramos a continuación, cualquier otra medida de Haar por la izquierda será un múltiplo de esta, y la única que asigna a E medida unidad es $(\mu(E)^{-1}) \cdot \mu$. La elección de esta constante se llama *normalización de la medida*. Fijémonos además en que un conjunto medible tiene medida nula para una medida de Haar si y solo si tiene medida nula para todas las demás.

La idea fundamental de la demostración del teorema de unicidad es utilizar la unicidad del teorema de representación de Riesz 1.22. Así, vamos a probar que, si μ y ν son dos medidas de Haar por la izquierda, definiendo $a := \frac{\int_G g(x)\mathrm{d}\nu(x)}{\int_G g(x)\mathrm{d}\mu(x)}$ para $g \in \mathscr{C}_c(G)$, a no depende de la función g que se elija. De aquí se seguirá que para toda función $f \in \mathscr{C}_c(G)$ se da la igualdad

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\nu(x) = a \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

y utilizando el teorema de representación de Riesz, concluiremos que $\mu = a\nu$.

Teorema 3.16 (de unicidad). Sea G un grupo topológico localmente compacto y μ y ν dos medidas de Haar por la izquierda. Entonces, existe $a \in (0, \infty)$ tal que $\mu = a\nu$.

Demostración. Fijemos μ y ν dos medidas de Haar en G. Comencemos viendo que existe $K \subset G$ compacto con $\mu(K) > 0$. Para justificarlo, observemos que μ es no nula por ser una medida de Haar. Existe entonces $E \in \mathcal{B}(G)$ con $\mu(E) > 0$. Como $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\}$, debe existir U abierto con $\mu(U) > 0$. Como además $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \text{ compacto}\}$, debe existir K compacto con $\mu(K) > 0$.

Veamos que para toda $f \in \mathscr{C}_c(G), f \not\equiv 0$ y no negativa se tiene $\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0$. Sea $U := f^{-1}(0, \infty)$. U es abierto porque f es continua por hipótesis, y como es no negativa y no idénticamente nula, $U \neq \varnothing$. Sea entonces $u \in U$, entonces $u^{-1}U$ es un entorno abierto de e. Con esto $K \subset \cup_{y \in K} \, yu^{-1}U$. Por compacidad de K, existen $y_1, \dots y_n \in K$ con $K \subset \cup_{i=1}^n \, y_i u^{-1}U = \cup_{i=1}^n \, g_i U$ donde hemos definido $g_i := y_i u^{-1}$. Por las propiedades de las medidas (proposición 1.8)

$$0 < \mu(K) \leq \mu\left(\cup_{i=1}^n g_i U\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(g_i U) = \sum_{i=1}^n \mu(U) = n\mu(U),$$

de modo que $\mu(U) > 0$. Por el lema 3.13, deducimos que existe $a > 0$ tal que $V := \{g \in G : f(g) \geq a\}$ tiene medida positiva: $\mu(V) > 0$. Como f es no negativa y la integral es monótona

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_V f(x)\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_V a \ \mathrm{d}\mu(x) = a\mu(V) > 0, \tag{3.1}$$

luego en particular $\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0$, como queríamos ver.

Sea $g \in \mathscr{C}_c(G), g \not\equiv 0$ y no negativa, que dejamos fija. Para cada $f \in \mathscr{C}_c(G)$ se define la aplicación

$$\begin{aligned} h_f : \quad G \times G &\longrightarrow \qquad \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)\mathrm{d}\nu(t)}. \end{aligned}$$

Observemos que h_f está bien definida, pues el denominador no se anula, pues la función $g(tx) = g \circ r_x$ tiene soporte compacto, luego aplicando (3.1), la integral es positiva. Veamos que h_f tiene soporte compacto. Denotemos $K_1 := \mathrm{sop}(f)$ y $K_2 := \mathrm{sop}(g)$. Si $f(x)$ o $g(yx)$ son nulas, $h_f(x, y)$ también por definición, de modo que

$$\{(x, y) \in G \times G : h(x, y) \neq 0\} = \{(x, y) \in G \times G : f(x) \neq 0 \text{ y } g(yx) \neq 0\} \subset K_1 \times (K_1^{-1}K_2). \tag{3.2}$$

Tomando adherencias $\operatorname{sop}(h) \subset K_1 \times (K_1^{-1}K_2)$ es un cerrado en un compacto luego compacto. Detallemos algo más la última contención en (3.2). Basta observar que si $(x,y) \in G\times G$ son tales que $f(x) \neq 0$ y $g(yx) \neq 0$, en particular $x \in \operatorname{sop}(f) = K_1$ y $xy \in \operatorname{sop}(g) = K_2 \Rightarrow y \in x^{-1}K_2 \subset K_1^{-1}K_2$.

Comprobemos que la aplicación $h_f : G\times G \to G$ es continua. f y g son continuas por hipótesis (luego $g(xy) = g \circ \psi(x,y)$ también), y por definición de h_f, si probamos que el denominador es continuo, h_f lo será también. Definimos entonces

$$\begin{array}{rccc} I: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_G g(tx)\mathrm{d}\nu(t). \end{array}$$

Para ver que I es continua, podemos ver que es continua en cada punto. Concretamente, fijando $x_0 \in G$, como I tiene llegada en $\mathbb{R}$, vamos a ver que dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto W de x_0 tal que para cada $x \in W$, $|I(x) - I(x_0)| < \varepsilon$. Sea U un entorno abierto de x_0 de adherencia compacta (que existe porque G es localmente compacto). En ese caso, $\overline{U}^{-1} = i(\overline{U})$ es imagen de un compacto por un homeomorfismo, luego es un compacto, y $K_2 \times \overline{U}^{-1}$ es compacto por ser producto de compactos. Por consiguiente, $K_2 \cdot \overline{U}^{-1} = \psi(K_2, \overline{U}^{-1})$ es también compacto. Puesto que la medida de Haar es una medida de Borel regular, los compactos tienen medida finita, luego $\nu(K_2\overline{U}^{-1}) < \infty$. Por tanto, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\delta \cdot \nu(K_2\overline{U}^{-1}) < \varepsilon$. Aplicándole a g el lema 3.14, deducimos que existe un entorno abierto V de e tal que para cada $x \in G$, se tiene que si $y \in xV$, entonces $|g(y) - g(x)| < \delta$. Sea entonces $W := U \cap x_0V$, puesto que ambos son abiertos y contienen a x_0, W es un entorno abierto de x_0. Para cada $x \in W$ se tiene

$$\begin{aligned} |I(x) - I(x_0)| &= \left| \int_G g(tx)\mathrm{d}\nu(t) - \int_G g(tx_0)\mathrm{d}\nu(t) \right| \overset{(1)}{=} \left| \int_G (g(tx) - g(tx_0))\mathrm{d}\nu(t) \right| \\ &\overset{(2)}{\leq} \int_G |g(tx) - g(tx_0)|\mathrm{d}\nu(t) \overset{(3)}{=} \int_{K_2\overline{U}^{-1}} |g(tx) - g(tx_0)|\mathrm{d}\nu(t) \overset{(4)}{\leq} \delta \cdot \nu\left(K_2\overline{U}^{-1}\right) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En (1) hemos utilizado la linealidad de la integral. En (2) que $|\int_G f\mathrm{d}\mu| \leq \int_G |f|\mathrm{d}\mu$. En (3), hemos que utilizado que si $tx \notin K_2, g(tx) = 0$, y $tx \notin K_2 \Leftrightarrow t \notin K_2x^{-1} \subset K_2\overline{U}^{-1}$. Como lo mismo es cierto para x_0, deducimos que si $t \notin K_2\overline{U}^{-1}$, el integrando se anula. Finalmente, en (4) hemos utilizado el razonamiento siguiente: si $x \in U \cap x_0V$, en particular, $x \in x_0V$ y $tx \in tx_0V$, y por lo anterior, $|g(tx) - g(tx_0)| < \varepsilon$ (el entorno V del lema 3.14 sirve para cada $x \in G$, luego en particular para $tx_0 \in G$). Concluimos así que h_f es continua, y puesto que tiene soporte compacto, $h_f \in \mathscr{C}_c(G \times G)$.

Utilizando una ls proposición 1.29 (nótese que es para aplicar este teorema que hemos necesitado probar $h \in \mathscr{C}_c(G\times G)$) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{G\times G} h_f(x,y)d(\mu(x)\times\nu(y)) &= \int_G \left[\int_G h_f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y) \overset{(5)}{=} \int_G \left[\int_G h_f(y^{-1}x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_G \left[\int_G h_f(y^{-1}x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) \overset{(6)}{=} \int_G \left[\int_G h_f(y^{-1},xy)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

En (5) y en (6) hemos aplicado el lema 3.15. Veamos (5) con detalle. Tenemos

$$\int_G \left[\int_G h_f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y)$$

en la integral más interna, y es un parámetro, así que es como tener una integral de la sección $h_f^y(x) := h_f(x,y)$.

$$\int_G h_f^y(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G h_f^y(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G h_f(y^{-1}x,y)\mathrm{d}\mu(x)$$

donde hemos escrito solamente la integral interior y hemos utilizado el lema 3.15 tomando $g = h_f^y$ y $t = y^{-1}$ según la notación de dicho lema. En (5) hemos hecho lo mismo pero considerando $g_x(y) := h_f(y^{-1}x,y)$ de modo que

$$\int_G h_f(y^{-1}x,y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_G g_x(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_G g_x(xy)\mathrm{d}\nu(y) = \int_G h_f((xy)^{-1}x,xy)\mathrm{d}\mu(y) = \int_G h_f(y^{-1},xy)\mathrm{d}\mu(y).$$

A partir de aquí, y teniendo en cuenta que $\int_G g(tx)\mathrm{d}\nu(t) < \infty$ y que la variable de integración es muda,

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G \left[f(x)\cdot \frac{\int_G g(yx)\mathrm{d}\nu(y)}{\int_G g(tx)\mathrm{d}\nu(t)}\right]\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \left[\int_G \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)\mathrm{d}\nu(t)}\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G \left[\int_G h_f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \left[\int_G h_f(y^{-1},xy)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G \left[\int_G \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1})\mathrm{d}\nu(t)}\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) \overset{(7)}{=} \int_G \left[\int_G \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1})\mathrm{d}\nu(t)}\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \left(\int_G g(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\cdot\left(\int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})\mathrm{d}\nu(t)}\mathrm{d}\nu(y)\right).\end{aligned}$$

En (7) hemos intercambiado el orden de integración utilizando que $(x,y)\mapsto h_f(y^{-1},xy)$ vuelve a tener soporte compacto, y la proposición 1.29. Sea $C := \int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})\mathrm{d}\nu(t)}\mathrm{d}\nu(y)$. Tenemos entonces

$$\frac{\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_G g(x)\mathrm{d}\mu(x)} = C,$$

donde C es una constante que no depende de μ (pero sí de f y g). Nótese que nuevamente hemos podido hacer el cociente porque $\int_G g(x)\mathrm{d}\mu(x) > 0$ porque $g \in \mathscr{C}_c(G)$ es no negativa y no nula.

A partir de aquí, vamos a comprobar que existe $a > 0$ tal que $\int_G f(x)\mathrm{d}\nu(x) = a\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Observemos que podemos aplicar exactamente el mismo razonamiento que antes a

$$\int_{G\times G} h_f(x,y)\mathrm{d}(\nu(x)\times\nu(y)).$$

Nótese que hemos considerado la medida $\nu\times\nu$ en lugar de $\mu\times\nu$. Obtenemos así

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\nu(x) = \left(\int_G g(x)\mathrm{d}\nu(x)\right)\cdot\left(\int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})\mathrm{d}\nu(t)}\mathrm{d}\nu(y)\right) = C\cdot\int_G g(x)\mathrm{d}\nu(x),$$

de modo que

$$\frac{\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_G g(x)\mathrm{d}\mu(x)} = C = \frac{\int_G f(x)\mathrm{d}\nu(x)}{\int_G g(x)\mathrm{d}\nu(x)} \Rightarrow \frac{\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_G f(x)\mathrm{d}\nu(x)} = \frac{\int_G g(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_G g(x)\mathrm{d}\nu(x)}$$

de modo que basta definir $a := \frac{\int_G g(x)\mathrm{d}\nu(x)}{\int_G g(x)\mathrm{d}\mu(x)} > 0$, que es una constante que puede parecer que depende de g, sin embargo, la última igualdad de la expresión anterior, implica que $a = \frac{\int_G f(x)\mathrm{d}\nu(x)}{\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)}$. Ahora bien, la función $g \in \mathscr{C}_c(G)$ era arbitraria, de modo que a puede definirse con cualquier función en $\mathscr{C}_c(G)$ y toma el mismo valor.

Veamos finalmente que $\mu = a\nu$. Para ello, vamos a utilizar el teorema de representación de Riesz (teorema 1.22). Definimos entonces la medida $\rho := {}^1/_a\cdot\nu$ (ρ es una medida por la proposición 1.11), y definimos el funcional siguiente

$$\begin{array}{rcl}\phi : \mathscr{C}_c(G) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \mapsto & \phi(f) := \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x).\end{array}$$

Es claro que ϕ es lineal por la linealidad de la integral. Además, se trata de un funcional positivo, pues si $f \in \mathscr{C}_c(X)$ es $f \geq 0$, el desarrollo del inicio de la demostración muestra que $\phi(f) \geq 0$. De acuerdo con el teorema de representación de Riesz, existe una única medida de Borel regular μ tal que $\phi(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)$. Ahora bien,

$$\phi(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{a}\int_G f(x)\mathrm{d}\nu(x) = \int_G f(x)\,\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\rho(x)$$

Pero entonces μ y ρ son medidas de Borel regulares tales que $\phi(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\rho(x)$, luego debe ser $\mu = \rho$ y finalmente, $\nu = a\mu$. □

Corolario 3.17. Existe una única medida de Borel regular λ en $\mathbb{R}^d$ que cumple $\lambda\left(I^d\right) = 1$ y $\lambda(\boldsymbol{a} + A) = \lambda(A)$ para cada $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, donde $I = [-1, 1]$.

Demostración. Basta observar que $\left(\mathbb{R}^d, +\right)$ es un grupo topológico (de hecho abeliano), de Hausdorff, y localmente compacto, que I es compacto, y aplicar los resultados de existencia y unicidad anteriores. □

Nótese que esta medida no es otra que la medida de Lebesgue, pues es claro que la medida de Lebesgue (construida de la forma usual) cumple las condiciones de la definición de medida de Haar, y de nuevo la unicidad fuerza a que coincida con la obtenida con nuestros teoremas de existencia y unicidad. De hecho, este resultado nos garantiza que la única manera de medir conjuntos en $\mathbb{R}^n$ que sea "razonable" (que cumpla las propiedades de medida de Borel regular y sea invariante bajo traslaciones) es la medida de Lebesgue (salvo fijar unidad de medida). Ahora bien, es importante recalcar que la medida de Haar depende de la operación de grupo que estemos considerando. Por ejemplo, si se considera el grupo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ con el producto usual, entonces la medida de Lebesgue *no* es una medida de Haar, pues evidentemente no es cierto que $\lambda\left(2 \cdot I^d\right) = \lambda\left(I^d\right)$. Estudiaremos este caso con detalle en uno de los ejemplos de la sección siguiente.

Otra observación importante es que el teorema de Haar, tal y como lo hemos probado, utiliza el axioma de elección. Es posible dar una demostración alternativa del teorema de existencia que no utiliza dicho axioma, como por ejemplo, la dada en [HR94, Cap. 4]. No es esa la demostración que hemos decidido detallar porque requiere un desarrollo previo bastante más extenso que el dado aquí, y son bastante más complicadas. También en [Nac76, Cap. 2 Sec. 9] se puede encontrar la prueba de existencia debida a Henri Cartan, que de nuevo no utiliza el axioma de elección. En cualquier caso en todos los casos que vamos a tratar vamos a construir explícitamente medidas de Haar (en su mayoría modificando convenientemente la medida de Lebesgue), y no vamos a recurrir al teorema de existencia.

3.3. Propiedades de la medida de Haar y algunos ejemplos

Como ya hemos comentado, a la hora de tratar casos prácticos, no vamos a recurrir al teorema de existencia, pues no nos proporciona una manera sencilla de construir la medida, sino que vamos a aprovechar medidas ya existentes, casi siempre la de Lebesgue, para construir una medida en el espacio en el que estemos interesados. Vamos a mostrar, con todo detalle, como construir una medida de Haar en $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Ejemplo 3.18. Consideremos $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$ dotado de su topología de subespacio, y consideremos $\mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$. Veamos que la aplicación definida del siguiente modo es una medida de Haar,

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & E & \mapsto & \mu(E) := \int_E \frac{1}{|x|} \mathrm{d}\lambda(x). \end{array}$$

donde λ es la medida de Lebesgue, es decir, en la notación usual de la integral de Lesbesgue $\mu(E) := \int_E \frac{1}{|x|} \mathrm{d}x$. Observemos que en este caso, μ será una medida de Haar por la derecha y por la izquierda, pues $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es abeliano. Por otro lado, la aplicación $x \mapsto 1/|x|$ es medible (con respecto a la medida de Lebesgue, porque de hecho es continua en $\mathbb{R}^*$), de modo que μ está bien definida. Para ver que es una medida de Borel regular, vamos comprobando las propiedades de la definición.

1. $\mu(\varnothing) = 0$ pues integramos una función en un conjunto de medida nula

2. Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$. Claramente $\mathcal{B}(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pues hemos dotado a $\mathbb{R}^*$ de la topología de subespacio, luego todo abierto de $\mathbb{R}^*$ lo es también de $\mathbb{R}$. Así, $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, y como $1/|x|$ es medible y positiva, de las propiedades generales de la medida de Lebesgue,

$$\mu\left(\cup_{n=1}^\infty E_n\right) = \int_{\cup_{i=1}^n E_n} \frac{1}{|x|} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{E_n} \frac{1}{|x|} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \mu(E_n),$$

de modo que μ es una medida. Claramente es no trivial, pues $\mu((1,2)) = \int_1^2 \frac{1}{|x|}\mathrm{d}x = \ln(x)|_1^2 = \ln(2) > 0$. Veamos que es una medida de Borel regular.

1. Si $K \subset \mathbb{R}^*$ es compacto, $\mu(K) = \int_K 1/|x|\mathrm{d}x > 0$ porque integramos una función continua y positiva en un compacto.

2. Veamos que μ es regular exterior. Sea U abierto y $\alpha := \sup\{\mu(K) : K \subset U, K$ es compacto$\}$. Si $\mu(U) = +\infty$, el resultado es trivial, luego suponemos que $\mu(U) < \infty$. Por ser μ una medida, $\mu(K) \leq \mu(U)$ para cada $K \subset U$, luego $\alpha \leq \mu(U)$. Para ver la desigualdad contraria, sea $\{\tilde{K}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de compactos tales que $\tilde{K}_n \subset U$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y de manera que $\lambda(U) \leq \lambda(\tilde{K}_n) + 1/n$. Esta sucesión puede elegirse porque la medida de Lebesgue, λ sí que es una medida regular, luego $\lambda(U) = \sup\{\lambda(K) : K \subset U; K$ es compacto$\}$. Definamos entonces $K_n := \cup_{i=1}^n \tilde{K}_i$. Claramente $K_n \subset K_{n+1}$ y $K_n \subset U$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $\lambda(U) \leq \lambda(\tilde{K}_n) + 1/n \leq \lambda(K_n) + 1/n$ porque $\tilde{K}_n \subset K_n$. En particular, se tiene $\chi_{K_n} \leq \chi_{K_{n+1}}$. Aplicando el teorema de la convergencia monótona para la medida de Lebesgue a la familia de funciones $\{1/|x| \cdot \chi_{K_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene:
$$\mu(U) = \int_{\mathbb{R}} \chi_U(x)\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{K_n}(x)\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n)$$
y como $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión concreta de compactos con $K_n \subset U$, debe ser $\mu(U) \leq \alpha$, con lo que se tiene la doble desigualdad y por ello la igualdad.

3. Veamos que μ es regular interior. Sea $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$ y $\beta := \inf\{\mu(U) : E \subset U, U$ es abierto$\}$. Nuevamente, el caso $\mu(E) = +\infty$ es trivial, luego podemos suponer $\mu(E) < \infty$. Veamos que $\mu(E) = \beta$. Claramente $\mu(E) \leq \beta$. Sea $\varepsilon > 0$, y definamos $A_n := \left(-n, -\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, n\right)$. $A_n \cap E^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$, y sea $K_n \subset A_n \cap E^c$ compacto y con $\mu(A_n \cap E^c \cap K_n^c) \leq \varepsilon \cdot 2^{-n}$. Para ello, puesto que $A_n \cap E^c$ es medible (es intersección de medibles), existe un cerrado $K_n \subset A_n \cap E^c$ tal que $\lambda(A_n \cap E^c \cap K_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n} \cdot n^{-1}$ (ver [Tao13, Ex. 1.2.7]), donde λ denota la medida de Lebesgue usual en $\mathbb{R}$. En particular, K_n es cerrado, y está contenido en A_n, que es acotado, de modo que es compacto. Con esto,
$$\mu(A_n \cap E^c \cap K_n^c) = \int_{A_n\cap E^c \cap K_n^c} \frac{1}{|t|}\mathrm{d}t \leq n \int_{A_n\cap E^c \cap K_n^c} \mathrm{d}t = n\lambda(A_n \cap E^c \cap K_n^c) \leq n \cdot \frac{\varepsilon}{n \cdot 2^n} = \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
Es decir, podemos aproximar $A_n \cap E^c$ por conjuntos compactos, de tal modo que la medida μ de la diferencia conjuntista sea arbitrariamente pequeña. En la primera desigualdad hemos acotado $1/|t| \leq 1/(1/n) = n$, pues es el valor máximo que la función $1/|t|$ puede tomar en A_n.

   Definamos $U_n := K_n^c \cap A_n$, que es abierto por ser intersección de abiertos. Además, como $K_n^c \subset E$, se sigue que $E^c \subset K_n$, de modo que $E \cap A_n \subset U_n$. Con esto,
$$U_n \cap E^c = K_n^c \cap A_n \cap E^c,$$
y por ello
$$\mu(U_n \cap E^c) = \mu(K_n^c \cap A_n \cap E^c) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
Sea $U := \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ que es abierto por ser unión de abiertos. Además, como $E \subset \mathbb{R}^*$, se tiene
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap A_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U.$$
Entonces,
$$\mu(U) - \mu(E) \overset{1.8}{=} \mu(U \backslash E) = \mu(U \cap E^c) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} U_n \cap E^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \cap E^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$
Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto U con $E \subset U$ y $\mu(E) = \mu(U) - \varepsilon \geq \beta - \varepsilon$, de modo que $\mu(E) \geq \beta$.

Veamos finalmente que la medida es invariante bajo multiplicación por reales no nulos, para ello, basta aplicar el teorema del cambio de variables. Dado $a \in \mathbb{R}^*$, se tiene:

$$\mu(aE) = \int_{aE} \frac{1}{|y|} \mathrm{d}y = \int_{\varphi^{-1}(aE)} \frac{1}{|ax|} |\mathcal{J}\varphi(x)| \mathrm{d}x = \int_E \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|a|}{|a|} \mathrm{d}x = \int_E \frac{1}{|x|} \mathrm{d}x = \mu(E)$$

donde hemos aplicado el cambio de variable con el difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto a \cdot x = y$. $\mathcal{J}\varphi = a$ denota la matriz jacobiana (1×1 en este caso). Observemos que si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$, entonces $aE \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pues φ en particular es homeomorfismo, y por ello tiene sentido considerar $\mu(aE)$.

Notación 3.19. Es habitual encontrar la medida anterior escrita como $1/|x|\mathrm{d}x$. Esta notación se utiliza para indicar que la medida está definida como $\mu(E) := \int_E 1/|x| \ \mathrm{d}x$ para $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vamos a utilizarla a lo largo del texto del siguiente modo: siempre que se trabaje con subespacios de $\mathbb{R}^n$, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible, la notación $f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ indicará que la medida de un conjunto medible E queda definida como $\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$

Una vez construida la medida de Haar en un grupo topológico, podemos utilizarla para obtener medidas de Haar en otros grupos isomorfos y homeomorfos a este, tal y como mostramos a continuación. Notemos que para que la demostración del resultado siguiente sea correcta, no es suficiente con que ambos conjuntos sean homeomorfos, es decir, tengan la misma topología, también es necesario que el homeomorfismo correspondiente preserve la estructura de grupo.

Proposición 3.20. Sean G y H dos grupos topológicos localmente compactos y de Hausdorff, y sea $\Psi : G \to H$ un homeomorfismo que también es un isomorfismo de grupos. Entonces, μ es una medida de Haar por la izquierda en G si y solo si $\mu \circ \Psi^{-1} = \Psi_* \mu$ es una medida de Haar por la izquierda en H.

Demostración. Es evidente que basta ver una implicación, pues la recíproca se comprueba análogamente teniendo en cuenta que Ψ es homeomorfismo e isomorfismo si y solo si Ψ^{-1} lo es también. Sea entonces $E \subset \mathcal{B}(H)$, aplicando el lema 3.5, deducimos que $\Psi^{-1}(E) \in \mathcal{B}(G)$ y tiene sentido considerar $\mu(\Psi^{-1}(E))$. Veamos que esto define una medida. Obviamente $\mu(\Psi^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$. Por otro lado, si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medibles disjuntos en H, entonces

$$\Psi_*^{-1}\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu\left(\Psi^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} \Psi^{-1}(E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Psi^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_*^{-1}\mu(E_n),$$

utilizando que $\{\Psi^{-1}(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ vuelve a ser una sucesión de medibles disjuntos. Para ver que es una medida de Borel regular, observemos que si $K \subset H$ es compacto, $\Psi^{-1}(K)$ también, y $\mu(\Psi^{-1}(K)) < \infty$. Además, si $E \in \mathcal{B}(H)$,

$$\begin{aligned}\mu(\Psi^{-1}(E)) &= \inf\{\mu(U) : \Psi^{-1}(E) \subset U : U \text{ abierto en } G\} = \inf\{\mu(U) : E \subset \Psi(U) : U \text{ abierto en } G\} \\ &= \inf\{\mu(\Psi^{-1}(V)) : E \subset \Psi^{-1}(V) : V \text{ abierto en } H\}.\end{aligned}$$

Utilizamos aquí que, por ser Ψ homeomorfismo, los abiertos en G son exactamente las imágenes por Ψ^{-1} de los abiertos en H. La regularidad interior se prueba análogamente. Por último, observemos que al ser Ψ^{-1} un isomorfismo, $\Psi^{-1}(gE) = \Psi^{-1}(g)\Psi^{-1}(E)$, y por consiguiente

$$\mu(\Psi^{-1}(gE)) = \mu(\Psi^{-1}(g)\Psi^{-1}(E)) = \mu(\Psi^{-1}(E)),$$

lo cual prueba que se trata de una medida de Haar. □

Diremos que la medida $\mu_*\Psi$ es la medida *inducida* por Ψ en H. De un modo similar, podemos utilizar medidas de Haar en grupos topológicos para obtener medidas de Haar en el grupo producto, que como detallamos en el lema 2.6 vuelve a ser un grupo topológico.

Proposición 3.21. Sean G_1 y G_2 dos grupos topológicos de Hausdorff y localmente compactos que cumplen el segundo axioma de numerabilidad con medidas de Haar por la izquierda (resp. derecha) μ_1 y μ_2. Entonces, $\mu_1 \times \mu_2$ es una medida de Haar por la izquierda (resp. derecha) en $G_1 \times G_2$.

Demostración. El hecho de pedir que los espacios cumplan el segundo axioma de numerabilidad se hace para que el producto regular de Borel coincida con la medida producto. Con esto, para comprobar que se trata de una medida de Haar, basta ver que es invariante bajo multiplicación por la izquierda. Sea entonces E medible, de acuerdo con el teorema 1.23, y utilizando que μ_1 y μ_2 son σ-finitas,

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{G_1} \mu_2(E_x)\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Denotemos $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Entonces $(\boldsymbol{g}E)_x = \{y \in G_2 : (x,y) \in \boldsymbol{g}E\} = \{y \in G_2 : (g_1^{-1}x, y) \in (e, g_2)E\} = ((e,g_2)E)_{g_1^{-1}x} = g_2(E_{g_1^{-1}x})$. Donde la última igualdad se sigue de

$$\begin{aligned}((e,g_2)E)_{g_1^{-1}x} &= \{y \in G_2 : (g_1^{-1}x, y) \in (e,g_2)E\} = \{y \in G_2 : (g_1^{-1}x, g_2^{-1}y) \in E\} \\ &= \{g_2 z \in G_2 : (g_1^{-1}x, z) \in E\} = g_2(E_{g_1^{-1}x}).\end{aligned}$$

Por consiguiente, utilizando que μ_2 es una medida de Haar,

$$(\mu_1 \times \mu_2)(\boldsymbol{g}E) = \int_{G_1} \mu_2((\boldsymbol{g}E)_x)\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{G_1} \mu_2(g_2(E)_{g_1^{-1}x})\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{G_1} \mu_2(E_{g_1^{-1}x})\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Utilizando el teorema 1.27 podemos escribir esto como

$$\int_{G_1} \mu_2(E_{l_{g_1^{-1}}(x)})\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{G_1} \mu_2(E_z)\ \mathrm{d}((l_{g_1^{-1}})_*\mu_1)(z).$$

Ahora bien, $(l_g)_*\mu_1(B) = \mu_1(l_g^{-1}(B)) = \mu_1(g^{-1}B) = \mu_1(B)$ por ser μ_1 una medida de Haar. Por consiguiente, $(l_g)_*\mu_1 = \mu_1$, y

$$\int_{G_1} \mu_2(E_z)\ \mathrm{d}((l_{g_1^{-1}})_*\mu_1)(z) = \int_{G_1} \mu_2(E_z)\mathrm{d}\mu_1(z) = (\mu_1 \times \mu_2)(E),$$

con lo que $\mu_1 \times \mu_2$ es una medida de Haar en $G_1 \times G_2$. El caso en que las medidas son por la derecha es análogo. □

Nótese que este resultado se generaliza de manera inmediata al producto de una cantidad finita cualquiera de grupos topológicos.

Ejemplo 3.22. Vamos a utilizar los resultados de esta sección para construir medidas de Haar en algunos ejemplos que utilizaremos más adelante.

1) Análogamente a como vimos en $\mathbb{R}^*$, podemos probar que $\mu(E) := \int_E |\det A|^{-n}\mathrm{d}\lambda_{n^2}(A)$ define una medida de Haar en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, donde λ_{n^2} denota la medida de Lebesgue en $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ visto como grupo aditivo (ver sección 2.3). Es habitual utilizar la notación $\mathrm{d}\mu(A) = |\det A|^{-n}\mathrm{d}\lambda_{n^2}(A)$ para resumir la definición de la medida μ. Observemos que $\mathrm{d}\lambda_{n^2}(A) = \prod_{i,j=1}^n \mathrm{d}\lambda(a_{ij})$ donde $\lambda(a_{ij})$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. En adelante, y buscando utilizar la notación estándar para la medida de Lebesgue, escribiremos $\mathrm{d}a_{ij}$ en lugar de $\mathrm{d}\lambda(a_{ij})$. Como detallamos a continuación, μ define una medida de Haar por la derecha y por la izquierda. La demostración de que μ define una medida de Borel regular en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ es muy similar a la que hemos dado para $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (nótese que $\mathbb{R}^* = \mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$). Veamos que define una medida invariante por la izquierda. Sean $E \in \mathcal{B}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ y $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Para ello, observemos que la integral se realiza en $\mathbb{R}^{n^2}$, y consideremos el difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}, B \mapsto A^{-1}\cdot B$ donde identificamos las matrices con los vectores correspondientes de $\mathbb{R}^{n^2}$ como en la sección 2.3. Vamos a aplicar el teorema del cambio de variables 1.25 en $\mathbb{R}^{n^2}$ utilizando este difeomorfismo. Observemos entonces que (denotando con $\tilde{a}_{ij}$ los coeficientes de A^{-1})

$$(\varphi(B))_{ij} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik}b_{kj} \Rightarrow \frac{\partial(\varphi(B))_{ij}}{\partial b_{lm}} = \delta_{jm}{}^2\tilde{a}_{il}.$$

Por tanto, $\mathcal{J}\varphi(B)$ es, salvo permutación de filas y columnas, que pueden cambiar el sigo del determinante pero no su valor absoluto, una matriz diagonal por cajas que en cada

[2] δ_{ij} es la δ *de Krocnecker*, toma el valor 1 si $i = j$, y el valor 0 en caso contrario.

caja tiene una copia de A^{-1}. Concluimos así que $|\det \mathcal{J}\varphi| = |\det(A^{-1})|^n$. Una demostración rigurosa de esta afirmación no es complicada, pero sí que es tediosa y no aporta demasiado al desarrollo del trabajo, así que simplemente vamos a ilustrar este comportamiento con un ejemplo sencillo. Supongamos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{21} & b_{12} - b_{22} \\ 2b_{11} + 3b_{21} & 2b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, viendo φ como aplicación de $\mathbb{R}^{2^2}$ en sí mismo

$$\varphi(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = (b_{11} - b_{21}, b_{12} - b_{22}, 2b_{11} + 3b_{21}, 2b_{12} + 3b_{22}),$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} |\det \mathcal{J}\varphi| &= \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}\right| = |\det(A)^{-2}|. \end{aligned}$$

Dicho esto, comprobemos que se trata de una medida invariante bajo el producto por la izquierda por elementos del grupo. Tenemos

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_E \mathrm{d}\mu(C) = \int_E \frac{1}{|\det(C)|^n} \prod_{1\le i,j\le n} \mathrm{d}c_{ij} = \int_{\varphi^{-1}(E)} \frac{|\det \mathcal{J}\varphi(B)|}{|\det(A^{-1}\cdot B)|^n} \prod_{1\le i,j\le n} \mathrm{d}b_{ij} \\ &= \int_{(A^{-1})^{-1}\cdot E} \frac{\cancel{|\det(A^{-1})|^n}}{\cancel{|\det(A^{-1})|^n} \cdot |\det(B)|^{-n}} \prod_{1\le i,j\le n} \mathrm{d}b_{ij} = \int_{A\cdot E} \frac{1}{|\det(B)|^n} \prod_{1\le i,j\le n} \mathrm{d}b_{ij} \\ &= \mu(A\cdot E). \end{aligned}$$

Hacemos aquí una observación en lo que respecta a la notación. Hasta el momento, y como es habitual en la literatura, hemos denotado los elementos de los grupos con letras minúsculas, y una expresión del tipo $A \cdot E$ siempre ha denotado un producto de conjuntos. Ahora bien, al trabajar con matrices, es mucho más habitual utilizar letras mayúsculas para referirnos a ellas. Hemos mantenido este convenio, de modo que ahora $A \cdot E$ es el producto de un elemento por un conjunto. En general, esto no dará problemas, y por el contexto será fácil saber que indica la notación anterior. Considerando ahora $\varphi(B) = B \cdot A^{-1}$ y razonando igual, se prueba que μ es medida de Haar por la derecha.

2) Sea $\mathcal{A} := \{\mathrm{diag}(a_1, \dots a_n) : \prod_{i=1}^n a_i = 1, a_i > 0$ para $i = 1, \dots n\}$. Observemos que $\mathbb{R}_{>0}^{n-1}$ con el producto componente a componente es un grupo, y que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{R}_{>0}^{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (a_1, \dots a_n) & \mapsto & \mathrm{diag}(e^{a_1}, \dots e^{a_{n-1}}, \prod_{i=1}^{n-1} e^{-a_i}) \end{array}$$

es un homeomorfismo que además es un isomorfismo. El hecho de ser un homeomorfismo es evidente cuando se considera la topología de subespacio que $\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ induce en $\mathcal{A}$, y el hecho de ser isomorfismo se debe a que el producto de matrices restringido a las matrices diagonales es simplemente el producto componente a componente, que es justamente el producto en el grupo producto $(\mathbb{R}_{>0}^{n-1}, \cdot)$. En $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ hemos construido una medida de Haar μ, que podemos restringir a una medida en el subgrupo $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, y que está dada por $\mathrm{d}\mu(x) = x^{-1}\mathrm{d}\lambda(x)$ donde λ es la medida de Lebesgue. Podemos considerar entonces el grupo producto $(\mathbb{R}_{>0}^{n-1}, \cdot)$, en el que tendremos la medida producto $\mathrm{d}\mu = \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1}\mathrm{d}\lambda(x_i)$ (es decir, $\mu(E) = \int_E \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1}\mathrm{d}\lambda(x_i)$). Notemos que al trabajar en $\mathbb{R}_{>0}$ se pueden suprimir los valores absolutos. De la proposición 3.20 se sigue que $\mu \circ \Psi^{-1}$ es una medida de Haar (por la derecha y por la izquierda, pues trabajamos con un grupo abeliano) en $\mathcal{A}$. Habitualmente, se denota la correspondiente medida como $\mathrm{d}a = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}a_i}{a_i}$. Para justificarlo, observemos que la medida que hemos definido es hecho la medida progrediente $\Psi_*\mu$. Por consiguiente, para cualquier función $g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ medible, se tiene

$$\int_{\mathcal{A}} g(A)\mathrm{d}(\Psi_*\mu)(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{>0}} g(\Psi(a_1,\dots a_{n-1}))\mathrm{d}\mu(a_1,\dots a_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{>0}} g(\Psi(a_1,\dots a_{n-1}))\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}a_i}{a_i},$$

y se puede escribir

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{>0}} g\begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \prod_{i=1}^{n-1} e^{-a_i} \end{pmatrix}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}a_i}{a_i}.$$

3) Sea $\mathcal{N} = \{N = (u_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) : u_{ii} = 1,$ para $i = 1,\dots n$ y $u_{ij} = 0$ para $i > j\}$, vamos a probar que $\prod_{1\le i<j\le n}\mathrm{d}\lambda(u_{ij})$ una medida de Haar por la derecha y por la izquierda en $\mathcal{N}$. Normalmente, escribiremos directamente $\prod_{1\le i<j\le n}\mathrm{d}u_{ij}$ Hemos denotado u_{ij} los elementos de una matriz $N \in \mathcal{N}$ para evitar confusiones con la dimensión de las matrices, que denotamos n. Comenzamos observando que el conjunto $\mathcal{N}$ es el formado por las matrices de la forma

$$N = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Es obvio que $\mathcal{N}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ para el producto usual de matrices, pues el producto de matrices triangulares es siempre una matriz triangular, y el elemento diagonal de la posición (i,i) se obtiene multiplicando los elementos diagonales de la posición (i,i) de ambas, que en este caso son ambos unos. Además, la inversa de una matriz N del tipo (3.3), vuelve a ser de la misma forma.

Construyamos la medida de Haar explícitamente. Para ello, vamos a observar que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ & N & \mapsto & \Phi(N) = (u_{12}, u_{13},\dots u_{1n}, u_{21},\dots u_{n-1,n}) \end{array}$$

es un homeomorfismo. En efecto, vía la identificación de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ dada en la sección 2.3, esto es igual que decir que $\{(x,1,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$. De hecho, con esa identificación, la aplicación Φ no es más que una proyección. Dicho esto,y considerando en $\mathcal{N}$ la topología de subespacio de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, y en $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ la topología usual, podemos considerar sus correspondientes σ-álgebras de Borel: $\mathcal{B}(\mathcal{N})$ y $\mathcal{B}(\ \mathbb{R}^{n(n-1)/2}\ )$. Esto permite definir, a partir de la observación 3.6 la medida en $\mathcal{N}$ como $\nu := \Phi^{-1}_*\lambda_{n(n-1)/2}$. Es decir, ν queda definida a partir de

$$\nu(E) := \int_{\Phi(E)}\prod_{1\le i<j\le n}\mathrm{d}u_{ij},$$

donde $\Phi(E) \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, y hemos suprimido el λ utilizando la notación habitual para la medida de Lebesgue. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ es de Borel regular, luego basta comprobar que es invariante con respecto al producto de grupo. Sea entonces N de la forma (3.3). Tenemos

$$\begin{aligned}\nu(N\cdot E) &= \int_{\Phi(N\cdot E)}\prod_{1\le i<j\le n}\mathrm{d}u_{ij} = \int_{\varphi^{-1}(\Phi(N\cdot E))}|\det\mathcal{J}\varphi|\prod_{1\le i<j\le n}\mathrm{d}v_{ij} = \int_{\Phi(E)}\prod_{1\le i<j\le n}\mathrm{d}v_{ij} \\ &= \nu(E),\end{aligned}$$

donde hemos definido $\varphi : \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \to \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (el teorema del cambio de variables se aplica en $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$) como $\varphi(B) := N\cdot B$, donde nuevamente identificamos las matrices con los correspondientes vectores (en particular, solo consideramos las componentes con $i < j$ en el producto de matrices). Con esto, es obvio que $\varphi^{-1}(B) = N^{-1} \cdot B$ manteniendo la misma identificación, luego $\varphi^{-1}(\Phi(N \cdot E)) = \Phi(E)$. Falta únicamente comprobar que $|\det \mathcal{J}\varphi| = 1$. Para ello, observemos que la componente i, j con $i < j$ de $\varphi(B)$ está dada por

$$(\varphi(B))_{ij} = b_{ij} + u_{i,i+1}b_{i+1,j} + u_{i,i+2}b_{i+2,j} + \ldots + u_{i,j-1}b_{j,j-1} + u_{ij}$$

En particular, para b_{kl} con $k < i$, o con $k = i$ y $l < j$, se tiene $\frac{\partial(\varphi(B))_{ij}}{\partial b_{kl}} = 0$. Por otro lado, $\frac{\partial(\varphi(B))_{ij}}{\partial b_{ij}} = 1$, de modo que $\mathcal{J}\varphi$ es una matriz triangular con unos en la diagonal, y por consiguiente tiene determinante igual a 1. De este modo, la integral de una función $f \in L^1(\mathcal{N})$ en un medible E puede escribirse como

$$\int_E f(N)\mathrm{d}\nu(N) = \int_E f \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \prod_{1 \le i < j \le n} \mathrm{d}u_{ij}$$

donde hemos hecho el abuso de notación de identificar E con $\Phi(E)$.

3.4. Algunas consecuencias inmediatas de la existencia de la medida de Haar

Veamos en esta sección un resultado curioso, que se sigue directamente de la existencia de la medida de Haar.

Teorema 3.23. Sea G un grupo topológico infinito numerable, localmente compacto y de Hausdorff. Entonces G no es compacto.

Demostración. Sea μ una medida de Haar. Comencemos notando que para cada $g \in G$, el conjunto $\{g\}$ es cerrado, luego medible. Además, si $g, h \in G$, entonces $\mu(\{g\}) = \mu(hg^{-1}\{g\}) = \mu(\{h\})$. Por otro lado, $G = \cup_{i=1}^{\infty}\{g_i\}$ siendo los $\{g_i\}$ disjuntos. Si G es compacto, entonces $\mu(G) < \infty$, pero $\mu(G) = \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty}\{g_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{g_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{e\})$, lo cual no puede ocurrir, pues si $\mu(\{e\}) > 0$, se tendría $\mu(G) = \infty$, y si $\mu(\{e\}) = 0$, entonces $\mu(G) = 0$, y la medida de Haar tendría que ser trivial. □

Observemos que, como consecuencia de este teorema, que no existe ninguna topología en $\mathbb{Z}$ que lo haga compacto y de Hausdorff, y para la que la suma y la aplicación que lleva cada n en $-n$ sean continuas.

A la hora de probar que la medida de Haar existe, hemos supuesto que el grupo G era localmente compacto y de Hausdorff. Ya se justificó al principio del tema el hecho de exigir que todos los grupos con los que fuéramos a trabajar fuesen de Hausdorff. Podemos preguntarnos entonces por la condición de ser localmente compactos. Como muestra el teorema de existencia, es suficiente, pero ¿es necesaria? El siguiente resultado, adaptado de [Fre06, Sec. 443] muestra que sí que lo es.

Teorema 3.24. Sea G un grupo topológico de Hausdorff en el que existe una medida de Haar (por la derecha o por la izquierda). Entonces G es localmente compacto.

Demostración. Sea $K \subset G$ un conjunto compacto de medida no nula. La existencia de K se demuestra al igual que en el primer paso de la prueba del teorema de unicidad de la medida de Haar (teorema 3.16). Tomemos entonces dicho compacto K con $\mu(K) > 0$, y definamos $\tilde{K} := KK$, que es compacto por ser producto de compactos (ver 2.13). Entonces, $\mathrm{Int}(\tilde{K}) \neq \varnothing$ (se trata de una afirmación un tanto técnica que requiere introducir varios conceptos nuevos para su demostración, ver [Fre06, Prop. 443D]). Sea $g \in \tilde{K}$. Lo anterior implica que $\tilde{K}$ es un entorno compacto de g. Dado ahora $h \in G$ cualquiera, $hg^{-1}\tilde{K} = r_{hg^{-1}}(\tilde{K})$ es un entorno compacto de h. Concluimos así que todo punto tiene un entorno compacto, luego G es localmente compacto. $\square$

Observación 3.25. En el teorema anterior no podíamos haber tomado directamente K como compacto de interior no vacío, pues puede ocurrir que en un grupo topológico de Hausdorff K sea compacto, $\mu(K) > 0$ y aun así se tenga $\mathrm{Int}(K) = \varnothing$. Un ejemplo de esta situación, que vamos a comentar solo de manera superficial, es el conjunto de *Smith-Volterra-Cantor* (también conocido en inglés como *fat Cantor set*). Este conjunto se construye del siguiente modo: se parte del intervalo $[0, 1]$, y se elimina un cuarto de intervalo en su medio, es decir, se define $A_1 = [0, 3/8] \cup [5/8, 1]$. Después, se toma cada uno de los intervalos así obtenidos, y se elimina un intervalo de longitud $1/16$ de su medio, obteniéndose $[0, 5/32] \cup [7/32, 3/8] \cup [5/8, 25/32] \cup [27/32, 1]$. Inductivamente, se van eliminando subintervalos de longitud $1/4^n$ de cada uno de los 2^{n-1} intervalos que hay en cada paso. El conjunto de Smith-Volterra-Cantor, que denotamos $\mathcal{S}$, es el conjunto de los puntos de $[0, 1]$ que no se eliminan. Se puede probar entonces que S es cerrado, y como está contenido en $[0, 1]$, es compacto. Además, no contiene ningún intervalo abierto por construcción, de modo que tiene interior vacío. Ahora bien, al considerar $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue, $\mathcal{S}$ es medible porque es cerrado, y se puede probar que $\lambda(\mathcal{S}) = 1/2 \neq 0$. Un análisis más detallado de este ejemplo puede consultarse en [AB81, Sec. 18].

CAPÍTULO 4

UNIMODULARIDAD Y MEDIDAS DE HAAR EN EL ESPACIO COCIENTE

Una vez construida la medida de Haar en un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto G, vamos a dedicar este capítulo a estudiar bajo qué condiciones se puede extender el resultado de existencia para obtener medidas en los espacios cociente G/H donde $H \leq G$. La medida en el cociente tiene aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas, como la teoría de números, la teoría de representaciones y la teoría de los grupos aritméticos, de la que presentaremos un breve ejemplo en el capítulo siguiente. A la hora de construir una medida en el cociente, nos referimos al cociente G/H *como espacio topológico*, así que la medida que vamos a construir no será una medida de Haar al uso, sino una medida G-invariante, es decir, una medida invariante bajo la acción natural de G sobre G/H. Es importante tener en mente esta diferencia, pues es muy habitual encontrar referencias a ella en la literatura que la llaman medida de Haar, pese a que estrictamente hablando, no lo es. Decimos que vamos a considerar G/H como espacio topológico, porque el caso en que $H \triangleleft G$ es trivial; G/H vuelve a ser un grupo localmente compacto y de Hausdorff, de modo que se aplican los teoremas de existencia y unicidad que vimos en el teorema anterior, y se concluye directamente que G/H admite una medida de Haar. Cuando H es un subgrupo, pero no es normal, sigue teniendo sentido considerar G/H, pero esta vez no es un grupo, así que debe considerarse simplemente como un espacio topológico cociente. Este cociente se obtiene de la relación de equivalencia $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$, que es de equivalencia, sea H normal o no. En estas condiciones, G/H es el conjunto de clases a izquierdas xH con $x \in G$. También se puede considerar la relación $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$, lo cual nos lleva a trabajar con el conjunto de clases a derechas, $H\backslash G$, con elementos Hx. Nosotros trabajaremos con el primero de los conjuntos, aunque en algunas de las referencias se trabaja con el otro. A efectos prácticos, ambos espacios topológicos son homeomorfos, y esto no presenta ningún problema.

Un concepto que está estrechamente relacionado con la existencia (o no) de una medida G-invariante en G/H es el concepto de unimodularidad. Como vamos a ver, un grupo G, de Hausdorff y localmente compacto se dirá unimodular cuando sus medidas de Haar lo sean simultáneamente por la izquierda y por la derecha. A lo largo del capítulo, veremos varios ejemplos de grupos unimodulares, y algunos ejemplos de grupos que no lo son. Ligado a este concepto, estudiaremos también la *función unimodular*, que es relevante en los grupos no unimodulares.

Antes de entrar en detalles, el capítulo comienza probando una versión del lema de Urysohn, pues es un resultado que utilizaremos con frecuencia en las demostraciones siguientes. La versión que vamos a probar no es la más general posible, pero sí la más útil para nuestros propósitos. Vamos a probar que dados un compacto y un abierto que lo contiene, siempre existe una función continua y de soporte compacto que vale 1 es en compacto inicial, y cuyo soporte está contenido en el abierto.

4.1. Una versión del lema de Urysohn

Como ya hemos mencionado, dedicamos esta primera sección a enunciar y probar un resultado que vamos a utilizar con suma frecuencia: el lema de Urysohn. En realidad, no vamos a probar el lema de Urysohn en su versión más general, sino que vamos a probar una adaptación al contexto en que lo vamos a utilizar. En su versión más general, el lema de Urysohn establece que un espacio topológico X es normal (esto es, todo par de cerrados disjuntos pueden separarse por abiertos disjuntos) si y solo si para cada par de conjuntos cerrados disjuntos A y B de X, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$ (ver, por ejemplo [Mun00, Cap. 4]). Nosotros vamos a ver solamente la implicación de izquierda a derecha, y en el caso en que X es localmente compacto y de Hausdorff (nótese que esto implica que es normal), pues de nuevo, ese es el contexto en que vamos a utilizar siempre este lema. Además, bajo estas hipótesis más fuertes, vamos a poder construir una función f que además tenga soporte compacto. El hecho de tener soporte compacto resulta ser de gran relevancia, pues muchos de los resultados que vamos a probar y que ya hemos utilizado en el contexto de la teoría de la medida se enuncian en términos de funciones de soporte compacto. La demostración que vamos a proporcionar es en esencia la que se da en [Mun00, Th. 33.1], con algunas modificaciones obtenidas de las demostraciones presentadas en [Rud86, Lema 2.12] y [Tor20]. Puesto que se trata de un resultado cuya demostración es un tanto extensa, vamos a separarla en varios pasos que iremos tratando individualmente. Antes de comenzar la demostración, vamos a probar un lema previo, y a recordar brevemente algunos conceptos sobre ordenaciones que necesitaremos en la prueba.

Lema 4.1. Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Sea $K \subset X$ compacto, y U abierto tal que $K \subset U$. Entonces existe un abierto V relativamente compacto y tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Demostración. De acuerdo con el teorema 2.3, sabemos que para cada $x \in K$ existe V_x relativamente compacto y con $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U$. Es obvio que $K \subset \cup_{x \in K} V_x$, de modo que la familia $\{V_x : x \in K\}$ es un recubrimiento por abiertos de K. Por compacidad de K, existe un subrecubrimiento finito, de modo que existen $x_1, \dots x_n$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^n V_{x_i}$. Denotemos $V := \cup_{i=1}^n V_{x_i}$, que es abierto por ser unión de abiertos. Además, $\overline{V} = \overline{\cup_{i=1}^n V_{x_i}} = \cup_{i=1}^n \overline{V_{x_i}} \subset U$ (ver [Mun00, Sec. 17]). Por consiguiente, $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$, como queríamos ver. □

Una vez probado esto, hablemos brevemente sobre las relaciones de orden.

Definición 4.2. Una *relación de orden simple* u *ordenamiento simple* es una relación $<$ en un conjunto A cumpliendo las propiedades siguientes:

1. Comparibilidad: para todos $x, y \in A$ con $x \neq y$ se tiene $x < y$ o $y < x$.
2. No-reflexividad: no existe $x \in A$ tal que $x < x$.
3. Transitividad: dados $x, y, z \in A$ tales que $x < y$ y $y < z$, se cumple $x < z$.

Obviamente, la relación de orden $<$ usual en $\mathbb{R}$ es un ordenamiento simple, que puede restringirse a $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}$ proporcionando ordenamientos simples en estos conjuntos. Además, diremos que un conjunto A con una relación de orden está *bien ordenado* si todo subconjunto finito suyo tiene un elemento mínimo. Todo conjunto finito tiene un elemento máximo, tal y como se muestra en el lema siguiente.

Lema 4.3. Sea A un conjunto no vacío con un ordenamiento simple, entonces tiene un buen orden, y existe una biyección entre A y $\{1, 2, \dots n\}$ que preserva la relación de orden, esto es, tal que si $a <_A b$, entonces $f(a) < f(b)$ (aquí $<_A$ denota la relación de orden en A, y $<$ la usual en $\{1, 2, \dots n\}$) [Mun00, Th. 10.1].

Demostración. Comenzamos viendo que A tiene un elemento máximo razonando por inducción sobre $|A| = n$. Si $n = 1$, el resultado es obvio. Si no, se toma $a_0 \in A$ y se considera $A\backslash\{a_0\}$, que tiene cardinal $n-1$, y por hipótesis de inducción, tiene un máximo a_1. Finalmente, puesto que el orden es simple, se toma el elemento mayor del conjunto $\{a_0, a_1\}$, que será el máximo del conjunto, y que existe por la condición de comparibilidad. Una vez visto esto, veamos que existe la biyección buscada. De nuevo, esta propiedad es fácil de ver por inducción. Si $|A| = 1$, el resultado vuelve a ser trivial. Si no, se toma a_0 el mayor elemento de A, existe una biyección que preserva el orden $g : A\backslash\{a_0\} \to \{1, 2 \dots n-1\}$. Definimos entonces la biyección $f : A \to \{1, 2 \dots n\}$ del siguiente modo

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \neq a_0 \\ n & \text{si} \quad x = a_0. \end{cases}$$

Es obvio que f preserva el orden, y como $\{1, 2, \dots n\}$ está bien ordenado, A resulta estarlo también. □

El resultado anterior es de utilidad pues implica que el orden en cualquier conjunto finito y bien ordenado es simplemente el orden de $\{1, 2, \dots n\}$, y como tal, permite trasladar las ideas de sucesor y predecesor. En efecto, si $a \in A$ no es el mínimo, se define un antecesor como $f^{-1}(f(a) - 1)$, y si no es el máximo, su sucesor es $f^{-1}(f(a) + 1)$, ambos únicos.

La idea de la prueba del lema de Urysohn es construir una familia de abiertos U_p, indexada por los racionales de $[0, 1]$, y de adherencia compacta para construir la función f.

Lema 4.4 (de Urysohn). Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Sea $K \subset X$ compacto y $U \subset X$ abierto con $K \subset U$. Entonces existe $f \in \mathscr{C}_c(X)$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para cada $x \in X$, $\mathrm{sop}(f) \subset U$, y $f(k) = 1$ para cada $k \in K$.

Demostración. Comencemos observando que K y $B := X\backslash U$ son ambos cerrados. Dicho esto, denotemos $P := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Buscamos definir, para cada $p \in P$ un abierto U_p de X tal que

$$p < q \quad \text{implica} \quad \overline{U}_p \subset U_q, \tag{4.1}$$

y tales que las adherencias sean compactas.

Paso 1: Vamos a comprobar que puede construirse una sucesión de abiertos $\{U_p\}_{p\in P}$ con las propiedades que acabamos de describir.
La definición de estos conjuntos puede hacerse inductivamente. Puesto que P es numerable, puede considerarse un ordenamiento de sus elementos, es decir, una aplicación $r : \mathbb{N} \cup \{0\} \to P$, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r(0) = 0$ y $r(1) = 1$, es decir, que 0 y 1 son los primeros elementos del ordenamiento. A partir del lema 4.1, definimos un abierto U_1 relativamente compacto y tal que $K \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U$. Por el lema 4.1, y por compacidad de K, definimos U_0 como un abierto de adherencia compacta tal que $K \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos el conjunto $P_n := \{r(k) : 0 \leq k \leq n\}$, el conjunto de los $n+1$ primeros elementos de la ordenación. Supongamos que para cada $p \in P_n$, hemos definido U_p tal que $\overline{U}_p$ es compacto, y $\overline{U}_p \subset U_q$ para cada $q > p$. Denotemos $s = r(n+1)$, y definamos U_s. Para ello, observemos que $P_{n+1} = P_n \cup \{s\}$. Se trata de un subconjunto de $[0, 1]$ con una cantidad finita de elementos. Tiene por tanto un ordenamiento simple que se deriva de la relación de orden $<$ habitual de la recta real, y además tiene buen orden. En un conjunto simplemente ordenado finito, todo elemento salvo el primero y el último tiene un predecesor y un sucesor inmediato, tal y como hemos visto en el lema 4.3, y en los comentarios inmediatamente posteriores. 0 es el elemento más pequeño, y 1 es el mayor, luego el elemento s tiene un predecesor inmediato, y un sucesor inmediato en P_{n+1}. Denotémoslos p y q respectivamente. Los conjuntos U_p, U_q ya están definidos por hipótesis, y verifican $\overline{U}_p \subset U_q$, y las adherencias de ambos son compactas. Aplicando nuevamente el lema 4.1, existe un abierto, que denotamos U_s, relativamente compacto, y tal que $\overline{U}_p \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset U_q$. Veamos ahora que para todo par de elementos de P_{n+1}, t, l se verifica la ecuación (4.1). Si $t, l \in P_n$ es cierto por hipótesis de inducción. Supongamos entonces que uno de ellos es s, y el otro es un punto cualquiera $t \in P_n$. Hay dos opciones, o bien $t \leq p$, o bien $t \geq q$. En cada caso se tiene, respectivamente

$$\overline{U}_t \subset \overline{U}_p \subset U_s \qquad \overline{U}_s \subset U_q \subset U_t,$$

y en cualquier caso, los puntos de P_{n+1} cumplen la ecuación (4.1). Aplicando entonces inducción, definimos U_p para todo $p \in P$. Podemos además extender la definición a todos los elementos de $\mathbb{Q}$ sin más que definir

$$\begin{array}{lll} U_p := \varnothing & \text{si} & p < 0 \\ U_p := X & \text{si} & p > 1. \end{array}$$

Notemos que para cada $p \geq 0$ se tiene $K \subset U_p$.

Paso 2: Vamos a dar la definición de la función f buscada.
En primer lugar, dado $x \in X$, definimos el conjunto

$$\mathbb{Q}(x) := \{p : x \in U_p\},$$

que es el conjunto de todos los índices racionales p cuyos correspondientes abiertos contienen al punto x. Es claro que para todo $x \in X$, $\mathbb{Q}(x)$ está acotado inferiormente por 0, pues los U_p correspondientes son vacíos. Además, si $p > 1$, $x \in U_p = X$, de modo que $p \in \mathbb{Q}(x)$. En particular, $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado inferiormente por 0, luego tiene un ínfimo. Definimos entonces

$$f(x) := 1 - \text{ínf}\, \mathbb{Q}(x) = 1 - \text{ínf}\{p : x \in U_p\} = 1 - g(x) \in [0, 1],$$

donde hemos definido $g(x) := \text{ínf}\, \mathbb{Q}(x)$. f toma valores en $[0, 1]$ porque g también. En efecto, $g(x) \geq 0$ porque $\mathbb{Q}(x)$ está acotado inferiormente por 0. Además, $g(x) \leq 1$ porque para cada $p > 1$ se tiene que $x \in U_p = X$.

Paso 3: Veamos que f toma los valores correctos en K y U.
Lo primero que vamos a comprobar es que $f \equiv 1$ en K, y $f \equiv 0$ en $B = X \backslash U$. Para lo primero, si $k \in K$, entonces $k \in U_p$ para cada $p \geq 0$, de modo que $g(x) = \text{ínf}\, \mathbb{Q}(x) = 0$, y $f(x) = 1$. Por otro lado, si $x \in B$, entonces $x \notin U_p$ para $p \leq 1$. Por consiguiente, $\mathbb{Q}(x)$ está formado por todos los racionales mayores que 1, de modo que $g(x) = 1$ y $f(x) = 0$.

Paso 4: La función f es continua.
Es obvio que basta con ver que g lo es. Para ello, vamos a comenzar demostrando las implicaciones siguientes

$$\begin{array}{llll} \text{si} & x \in \overline{U}_r & \text{entonces} & g(x) \leq r, \\ \text{si} & x \notin U_r & \text{entonces} & g(x) \geq r. \end{array} \tag{4.2}$$

Para ver la primera implicación, fijémonos en que si $x \in \overline{U}_r$, entonces $x \in U_s$ para cada $s > r$ por la ecuación (4.1). En particular, $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los racionales mayores que r, luego de la definición se sigue $g(x) = \text{ínf}\, \mathbb{Q}(x) \leq r$. En cuanto a la segunda, notamos que si $x \notin U_r$, entonces $x \notin U_s$ para cada $s < r$ (de nuevo por la ecuación (4.1)). Esto implica que $\mathbb{Q}(x)$ no puede contener ningún racional menor que r, de modo que $g(x) = \text{ínf}\, \mathbb{Q}(x) \geq r$. Con esto, estamos en condiciones de probar la continuidad de g. Para ello, dado $x_0 \in X$ y un intervalo $(c, d) \subset \mathbb{R}$ con $g(x_0) \in (c, d)$, buscamos un entorno V de x_0 tal que $g(V) \subset (c, d)$ (esta es una de las definiciones equivalentes de continuidad, ver [Mun00, Th. 18.1]). Para ello, utilizando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tomemos racionales p, q tales que

$$c < p < g(x_0) < q < d.$$

Veamos que el abierto $V := U_q \backslash \overline{U}_p$ sirve. En primer lugar, veamos que de las condiciones de (4.2), se sigue que $x_0 \in V$. Puesto que $g(x_0) < q$, de la segunda condición se sigue que $x \in U_q$, mientras que al tener $p < g(x_0)$, la primera afirmación implica que $x \notin \overline{U}_p$. Veamos finalmente que $g(V) \subset (c, d)$. Para ello, si tomamos $x \in V$, aplicando de nuevo las condiciones de (4.2), $x \in U_q \subset \overline{U}_q$ implica que $g(x) \leq q$, mientras que $x \notin \overline{U}_p$ implica que $x \notin U_p$, de donde se sigue que $g(x) \geq p$, luego $p \leq g(x) \leq q$, y en particular, $g(x) \in [p, q] \subset (c, d)$. Veamos finalmente que f tiene soporte compacto. Para ello, basta observar que $\text{sop}(f) \subset \overline{U}_1$, siendo el segundo compacto. Esta contención se sigue de que si $x \notin \overline{U}_1$, de la segunda implicación en la ecuación (4.2), se sigue que $g(x) \geq 1$. Como ya hemos detallado, g está acotada entre 0 y 1, luego debe ser $g(x) = 1$, en cuyo caso $f(x) = 0$. De este modo, $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subset \overline{U}_1$, y tomando adherencias se sigue $\text{sop}(f) \subset \overline{U}_1$. Además, $\text{sop}(f) \subset \overline{U}_1 \subset U$.

$\square$

Notemos que esta versión puede enunciarse simplemente diciendo que existe una aplicación continua de soporte compacto tal que $\chi_K \leq f \leq \chi_U$. Si f es tal como en el lema de Urysohn, escribiremos $K \prec f \prec U$. Notemos que, en particular, toda función construida a partir de este lema cumple $0 \leq f \leq 1$. Concretamente, si $f \in \mathscr{C}_c(X)$, K es compacto y U es abierto, escribiremos $K \prec f$ para indicar que $f(k) = 1$ para cada $k \in K$ y $f \prec U$ para indicar que $\operatorname{sop}(f) \subset U$.

4.2. Unimodularidad

Introducimos en esta sección los conceptos de unimodularidad y de función modular en G. Esta función resulta ser de vital importancia a la hora de decidir si un grupo cociente G/H admite una medida G-invariante, tal y como veremos en el teorema 4.23 al final del capítulo.

Definición 4.5 (grupo unimodular). Sea G un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto. Diremos que G es *unimodular* si toda medida de Haar por la izquierda es también una medida de Haar por la derecha.

Observación 4.6. Nótese que la definición anterior implica que G es unimodular si y solo si toda medida de Haar por la derecha es también una medida de Haar por la izquierda (es decir, los papeles de izquierda y derecha se pueden intercambiar). En efecto, sea G unimodular y μ es una medida de Haar por la derecha. Sabemos, por el teorema de existencia 3.12, que G admite una medida de Haar por la izquierda ν, que también es medida de Haar por la derecha por ser unimodular. Por el teorema de unicidad 3.16, existe $a > 0$ tal que $\mu = a\nu$, luego μ es una medida de Haar por la izquierda. Un razonamiento análogo prueba que si toda medida de Haar por la derecha lo es por la izquierda, entonces G es unimodular tal y como se describe en la afirmación anterior.

Además, a la hora de probar que un grupo topológico es unimodular, basta encontrar una medida regular de Borel que es de Haar simultáneamente por la derecha y por la izquierda. En efecto, si μ es dicha medida, y ν es otra medida de Haar por la izquierda, entonces son proporcionales, así que ν es también medida de Haar por la derecha.

El lema siguiente es el que va a permitir definir, a partir del teorema de unicidad de la medida de Haar, la función unimodular. Lo que vamos a hacer es comprobar que a partir de una medida de Haar *por la izquierda* μ, y tomando un elemento $g \in G$ cualquiera, podemos definir una nueva medida de Haar, de nuevo por la izquierda μ_g. Esta medida se define como $\mu_g(E) := \mu(Eg)$. Es decir, a un conjunto E le asignamos la medida de su trasladado por g.

Lema 4.7. Si G es un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto, y μ es una medida de Haar por la izquierda en G. Sea $g \in G$ entonces, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mu_g : & \mathcal{B}(G) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & E & \mapsto & \mu(Eg) \end{array}$$

es una medida de Haar por la izquierda.

Demostración. Es evidente que μ_g es una medida. Además, $\mu_g(K) = \mu(Kg) < \infty$ porque $Kg = r_g(K)$ es imagen de un compacto por un homeomorfismo. Para la regularidad exterior, notemos que

$$\begin{aligned} \mu_g(E) &= \mu(Eg) = \inf\{\mu(U) : Eg \subset U; U \text{ abierto}\} = \inf\{\mu(U) : E \subset Ug^{-1}; U \text{ abierto}\} \\ &= \inf\{\mu(Vg) : E \subset V; Vg \text{ abierto}\} = \inf\{\mu_g(V) : E \subset V; V \text{ abierto}\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde hemos utilizado que $Vg = r_g(V)$ es abierto si y solo si V lo es. La regularidad interior se comprueba igual. Finalmente, utilizando que μ es medida de Haar por la izquierda, comprobamos que μ_g también

$$\mu_g(hE) = \mu(h \cdot Eg) = \mu(Eg) = \mu_g(E).$$

□

Es decir, si μ es una medida de Haar por la izquierda, μ_g es otra, y en principio no son iguales. Ahora bien, del teorema de unicidad 3.16, sabemos que existe una constante, que depende de g y que denotamos $\Delta_G(g)$ tal que para cada $E \in \mathcal{B}(G)$ se tiene

$$\mu_g(E) = \Delta_G(g)\mu(E) \tag{4.4}$$

En particular, $\mu_g = \Delta_G(g)\mu$. La aplicación $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$ se llama *función modular* .

Observación 4.8. En principio, la función modular podría depender de la medida μ de partida. Veamos que no es así. Si ν es otra medida de Haar por la izquierda, entonces existe $a > 0$ tal que $a\mu = \nu$. Es obvio de la definición que esto implica que $\nu_g = a\mu_g$. Por tanto:

$$\nu_g = a\mu_g = a\Delta_G(g)\mu = \Delta_G(g)(a\mu) = \Delta_G(g)\nu$$

de modo que, en efecto, la aplicación modular no depende de la medida inicial. En particular, puede definirse $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$, y está bien definida, pues depende únicamente del grupo. El hecho de tomar valores en $\mathbb{R}_{>0}$ se debe a que la constante de proporcionalidad entre medidas que predice el teorema de unicidad es siempre positiva.

Uno de los objetivos de esta sección es probar que Δ_G es un homomorfismo de grupos, y que además es continuo. Antes de probarlo, necesitamos introducir una nueva herramienta, que es el *funcional de Haar* asociado a una medida de Haar. Para ello, observemos que un grupo topológico puede actuar sobre $\mathscr{C}_c(G)$ a partir de *las representaciones regulares por la izquierda y por la derecha* . Estas representaciones son $\lambda_G : G \to \mathscr{C}_c(G)$, $\varrho_G : G \to \mathscr{C}_c(G)$ y están definidas como:

$$(\lambda_G(g))(f(x)) := f(g^{-1}x) \qquad (\varrho_G(g))(f(x)) = f(xg).$$

Para no sobrecargar la notación, denotaremos $\lambda_G(g)f$ y $\varrho_G(g)f$ las acciones de estos operadores sobre una función $f \in \mathscr{C}_c(G)$.

Observación 4.9. Aunque no vaya a ser necesario para el desarrollo posterior del trabajo, el lector con nociones de teoría de representaciones de grupos podrá observar que las aplicaciones λ_G y ϱ_G definen representaciones de G en $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathscr{C}_c(G)$. En efecto, si f es continua y tiene soporte compacto, es claro que $(\lambda_G(g))(f) = f \circ l_{g^{-1}}$ también. Esto implica que para cada $g \in G$, $\lambda_G(g)$ es un automorfismo de $\mathscr{C}_c(G)$ (la linealidad es inmediata, y es claro que la inversa de $\lambda_G(g)$ es $\lambda_G(g^{-1})$). Para ver que λ_G es verdaderamente una representación, basta ver que $\lambda_G(g_1 \cdot g_2) = \lambda_G(g_1) \circ \lambda_G(g_2)$, lo cual es claramente cierto, pues:

$$(\lambda_G(g_1g_2))f = f \circ l_{(g_1g_2)^{-1}} = f \circ l_{g_2^{-1}g_1^{-1}} = (f \circ l_{g_2^{-1}}) \circ l_{g_1^{-1}} = (\lambda_G(g_1))(f \circ l_{g_2^{-1}}) = \lambda_G(g_1)\big(\lambda_G(g_2)f\big)$$

para cada $f \in \mathscr{C}_c(G)$.

Definición 4.10 (Funcional de Haar). Sea G un grupo topológico de Hausdorff Un *funcional de Haar por la izquierda* (o por la derecha) es un funcional lineal no trivial $\Upsilon : \mathscr{C}_c(G) \to \mathbb{R}$ tal que $\Upsilon \circ \lambda_G(g) = \Upsilon$ para todo $g \in G$ (o tal que $\Upsilon \circ \varrho_G(g) = \Upsilon$ para todo $g \in G$).

Dado un grupo topológico G de Hausdorff y localmente compacto, existe una biyección entre el conjunto de medidas de Haar y el conjunto de funcionales de Haar. Enunciado de manera equivalente, a cada medida de Haar le corresponde un único funcional de Haar y viceversa, a cada funcional de Haar le corresponde una única medida de Haar. La demostración que vamos a proporcionar es una adaptación de la dada en [Tor20, Prop 2.6].

Proposición 4.11. Sea G un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff. Existe una biyección entre el conjunto de las medidas de Haar por la izquierda (o derecha) en G y el de los funcionales de Haar por la izquierda (o derecha) definidos en G.

Demostración. Hacemos la prueba para las medidas y funcionales por la izquierda, para la prueba para funcionales y medidas por la derecha se razona análogamente. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{F}$ los conjuntos de medidas y funcionales de Haar por la izquierda respectivamente. Comenzamos definiendo

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & \mu & \mapsto & \Phi_\mu, \end{array}$$

donde $\Phi_\mu : \mathscr{C}_c(G) \to \mathbb{R}, f \mapsto \Phi_\mu(f) := \int_G f \mathrm{d}\mu$. Es obvio que Φ_μ es un funcional lineal positivo, luego será de Haar si y solo si es no trivial e invariante bajo λ_G. Sean entonces $f \in \mathscr{C}_c(G)$ y $g \in G$, se tiene

$$(\Phi_\mu \circ \lambda_G(g))(f) = \Phi_\mu(f \circ l_{g^{-1}}) = \int_G f(g^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{lema } 3.15}{=} \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \Phi_\mu(f).$$

Para ver la no trivialidad, sea K un entorno compacto de algún punto en G. Entonces, para cualquier medida de Haar, $0 < \mu(K) < \infty$. Aplicando el lema de Urysohn 4.4, tomamos $f \in \mathscr{C}_c(G)$ con $K \prec f \prec G$, de manera que $\Phi_\mu(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_G \chi_K(x)\mathrm{d}\mu(x) = \mu(K) > 0$.

Definimos ahora $\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$. Para ello, notemos que si $\Upsilon \in \mathcal{F}$, entonces Υ es un funcional lineal positivo en $\mathscr{C}_c(G)$, de modo que por el teorema de representación de Riesz 1.22, existe una única medida de Borel regular en G, que denotamos μ_Υ con $\Upsilon(f) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu_\Upsilon(x)$. Definimos entonces $\Psi(\Upsilon) = \mu_\Upsilon$. Comenzamos comprobando que μ_Υ es una medida de Haar. El hecho de ser una medida de Borel regular viene garantizado por el teorema de representación de Riesz. En cuanto a la no trivialidad, como Υ es no nulo, existe una función $f \in \mathscr{C}_c(G)$ tal que $\Upsilon(f) \neq 0$, lo cual implica necesariamente que μ_Υ es no trivial (si fuera trivial cualquier integral sería 0 por la propia definición de integral). Veamos que μ es de Haar por la izquierda. Para ello, sea $E \in \mathcal{B}(G)$ y $g \in G$. Puesto que μ_Υ es una medida de Borel regular, se tiene la identidad siguiente

$$\mu_\Upsilon(gE) = \inf\{\mu_\Upsilon(U) : gE \subset U, U \text{ abierto}\} = \inf\{\mu_\Upsilon(gU) : E \subset U, U \text{ abierto}\}, \tag{4.5}$$

donde la última igualdad se demuestra igual que en el desarrollo de la ecuación (4.3). Ahora bien, del teorema de representación de Riesz se sigue que para cada abierto $U \subset G$

$$\begin{aligned} \mu_\Upsilon(gU) &= \sup\{\Upsilon(f) : f \prec gU\} = \sup\{\Upsilon(\lambda_G(g^{-1})f) : f \prec U\} \\ &\overset{\text{def. } 4.10}{=} \sup\{\Upsilon(f) : f \prec U\} = \mu_\Upsilon(U). \end{aligned} \tag{4.6}$$

La segunda igualdad se sigue de que, al ser l_g un homeomorfismo, $f \prec gU \Leftrightarrow \operatorname{sop}(f) \subset gU \Leftrightarrow \operatorname{sop}(f \circ l_g) \subset U$, de modo que $f \prec U$ si y solo si $\lambda_G(g^{-1})(f) \prec U$. Utilizando esta igualdad en la expresión (4.5), se sigue que $\mu_\Upsilon(gE) = \mu_\Upsilon(E)$, con lo que μ_Υ verdaderamente es una medida de Haar por la izquierda.

Tenemos definidas dos aplicaciones Φ y Ψ entre ambos conjuntos, y falta comprobar que son inversas una de la otra, lo cual es obvio porque el teorema de representación de Riesz garantiza unicidad. $\square$

Por último, el lema siguiente nos permitirá probar la continuidad buscada.

Lema 4.12. Sea G un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff, μ una medida de Haar y Υ su funcional de Haar asociado, entonces para cada $f \in \mathscr{C}_c(G)$

$$\Upsilon(\varrho_G(g^{-1})f) = \Delta_G(g)\Upsilon(f). \tag{4.7}$$

Demostración. Aplicando la generalización del teorema del cambio de variable dada en 1.27 a $r_{g^{-1}} : G \to G$

$$\Upsilon(\varrho_G(g^{-1})f) = \int_G f(xg^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f \circ r_{g^{-1}}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(y)\mathrm{d}((r_{g^{-1}})_*\mu)(y)$$

ahora bien, para cada $E \in \mathcal{B}(G)$, se tiene $(r_{g^{-1}})_*\mu(E) = \mu(r_{g^{-1}}^{-1}(E)) = \mu(r_g(E)) = \mu(Eg) = \mu_g(E)$. Por tanto, $(r_{g^{-1}})_*\mu = \mu_g$. Así:

$$\Upsilon(\varrho_G(g^{-1})f) = \int_G f(y)\mathrm{d}\mu_g(y) \overset{\text{obs. } 1.20}{=} \Delta_G(g)\int_G f(y)\mathrm{d}\mu(y) = \Delta_G(g)\Upsilon(f).$$

$\square$

Observación 4.13. El resultado anterior en particular implica la igualdad siguiente:

$$\int_G f(xg^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \Delta_G(g)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) \tag{4.8}$$

En algunas ocasiones, la función modular se define siguiendo otro convenio. Concretamente, se define de manera que $\mu(Eg) = \Delta_G(g^{-1})\mu(E)$. En ese caso, es obvio que la función modular sigue siendo un homomorfismo, y la igualdad anterior se escribe del siguiente modo:

$$\int_G f(xg)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta_G(g)\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Este convenio se sigue en [EL23], que utilizaremos en el capítulo siguiente. En cualquier caso, nosotros mantendremos el convenio con el que hemos dado la definición de la función modular.

Proposición 4.14. Sea G un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto, entonces la función modular es un homomorfismo de grupos continuo $\Delta_G : (G,\cdot) \to (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$.

Demostración. Comencemos observando que estamos denotando el producto en G y en $\mathbb{R}_{>0}$ con el símbolo "$\cdot$", pero esto en general no dará lugar a confusión. Dicho esto, comencemos viendo que se trata de un homomorfismo de grupos. Para ello, sea μ una medida de Haar por la izquierda en G y denotemos Υ su funcional de Haar por la izquierda asociado. Se tiene

$$\Delta_G(gh)\mu(E) = \mu_{gh}(E) = \mu(Egh) = \mu_h(Eg) = \Delta_G(h)\mu(Eg) = \Delta_G(h)\mu_g(E) = \Delta_G(h)\Delta_G(g)\mu(E)$$

para cada $E \in \mathcal{B}(G)$. Sin más que tomar E con $\mu(E) > 0$, que existe por la no trivialidad de μ, se sigue que $\Delta_G(gh) = \Delta_G(h)\cdot\Delta_G(g) = \Delta_G(g)\cdot\Delta_G(h)$ donde se ha utilizado en la última igualdad que $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ es abeliano. Respecto a la continuidad, por la proposición 2.18, basta con demostrar que Δ_G es continua en e. Dado que Δ_G tiene llegada en $\mathbb{R}$, fijamos $\varepsilon > 0$. Puesto que G es localmente compacto, existe un entorno compacto K de e, y por el lema 4.4, existe $\varphi \in \mathscr{C}_c(G)$ con $K \prec \varphi \prec G$. Ahora bien, por la proposición 2.13, $\operatorname{sop}(\varphi)\cdot K$ es de nuevo un compacto, de modo que que por el lema 4.4, podemos tomar $\psi \in \mathscr{C}_c(G)$ con $K\cdot\operatorname{sop}(\varphi) \prec \psi \prec G$. Por la proposición 3.14, existe un entorno U de e, que puede elegirse simétrico por el lema 2.10, $U \subset K$ tal que para cada $g \in U$, se tiene $|\varphi(xg) - \varphi(x)| < \varepsilon\cdot(\Upsilon(\varphi)/\Upsilon(\psi))$. Para cada $g \in U$ se tiene:

$$\begin{aligned}
|\Delta_G(g) - \Delta_G(e)| &\overset{(1)}{=} |\Delta_G(g) - 1| \overset{(2)}{=} \frac{1}{\Upsilon(\varphi)}|\Delta_G(g)\cdot\Upsilon(\varphi) - \Upsilon(\varphi)| \overset{(3)}{=} \frac{1}{\Upsilon(\varphi)}|\Upsilon(\varrho_G(g^{-1})\varphi) - \Upsilon(\varphi)| \\
&= \frac{1}{\Upsilon(\varphi)}\left|\int_G (\varphi(xg^{-1}) - \varphi(x))d\mu(x)\right| \overset{(4)}{\leq} \frac{1}{\Upsilon(\varphi)}\int_G |\varphi(xg^{-1}) - \varphi(x)|\psi(x)\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \varepsilon\cdot\frac{\Upsilon(\varphi)}{\Upsilon(\psi)}\cdot\frac{1}{\Upsilon(\varphi)}\cdot\int_G \psi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \varepsilon
\end{aligned}$$

donde en (1) hemos utilizado que $\Delta_G(e) = 1$ porque Δ_G es homomorfismo, en (2) que Υ es un funcional positivo, en (3) la relación (4.7). En (4), hemos utilizado que en $\operatorname{sop}(\varphi)\cdot e \subset \operatorname{sop}(\varphi)\cdot K$, $\psi \equiv 1$, luego $\varphi\cdot\psi = \varphi$ para el segundo término. Para el primero, si $\varphi(xg^{-1})$, entonces $x \in g\cdot\operatorname{sop}(\varphi) \subset \operatorname{sop}(\varphi)\cdot K$, y se repite el argumento. Se concluye así la continuidad de Δ_G. □

Corolario 4.15. Sea G un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff, entonces G es unimodular si y solo si $\Delta_G \equiv 1$.

Demostración. Es evidente que si $\Delta_G \equiv 1$ entonces G es unimodular por la relación (4.4). Para el recíproco, sea μ una medida de Haar por la izquierda. Tomemos $E \subset G$ compacto cualquiera y $g \in G$, entonces $\mu(E) \in (0,\infty)$. Si G es unimodular, entonces μ es también medida de Haar por la derecha, luego

$$\mu(E) = \Delta_G(g)\mu_g(E) = \Delta_G(g)\mu(Eg) = \Delta_G(g)\mu(E) \Rightarrow \Delta_G(g) = 1.$$

□

Ejemplo 4.16. Veamos algunos ejemplos de grupos unimodulares. Sea G es un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff.

1. Si además G es abeliano, entonces es unimodular. Esto es bastante evidente, pues en ese caso si μ es una medida de Haar invariante por la izquierda, también lo es por la derecha.

2. Si G es compacto, entonces $\mu(G) \in (0, \infty)$. Ahora bien, en ese caso, $\mu(G) = \Delta_G(g)\mu_g(G) = \Delta_G(g)\mu(Gg) = \Delta_G(g)\mu(G)$ luego $\Delta_G(g) = 1$ para todo $g \in G$.

3. Si G es topológicamente simple (es decir, no tiene subgrupos propios cerrados no triviales), entonces también es unimodular. Para verlo, consideramos $[G, G] := \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$. Este conjunto se llama *abelianizador* de G y es un subgrupo normal (ver [Lan05, Cap. 1]). En particular, por la proposición 2.17, $\overline{[G, G]}$ es también un subgrupo normal. Ahora bien, como el grupo era simple, o bien $\overline{[G, G]} = \{e\} = [G, G]$, en cuyo caso G es abeliano, o bien $\overline{[G, G]} = G$. En ese último caso, por continuidad de Δ_G se tiene:

$$\Delta_G(G) = \Delta_G(\overline{[G, G]}) \subset \overline{\Delta_G([G, G])} = \overline{\{1\}} = \{1\},$$

y G es unimodular.

Consideremos ahora un ejemplo que no es unimodular. Para ello, consideramos $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0\}$ el semiplano superior. Lo dotamos del producto siguiente

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac, ad + b)$$

Observemos que con esta estructura, G realmente es un grupo. Obviamente, si $a, c > 0$, entonces $ac > 0$ y es cerrado para el producto. El neutro es $(1, 0)$, pues

$$(1, 0) \cdot (c, d) = (1 \cdot c, 1 \cdot d + 0) = (c, d) \qquad (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1, a \cdot 0 + b) = (a, b)$$

y dado un elemento (a, c), su inverso es $(a^{-1}, -ba^{-1})$. En efecto,

$$(a, b)\cdot(a^{-1}, -ba^{-1}) = (aa^{-1}, a\cdot(-ba^{-1})+b) = (1, 0) \qquad (a^{-1}, -ba^{-1})\cdot(a, b) = (a^{-1}a, a^{-1}b-ba^{-1}) = (1, 0).$$

Por último, para ver que se cumple la propiedad asociativa, basta con hacer un cálculo sencillo para obtener

$$\big((a, b) \cdot (c, d)\big) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot \big((c, d) \cdot (e, f)\big) = (ace, acf + ad + b)$$

Este grupo se suele llamar *grupo* $ax + b$ y es el grupo de transformaciones afines de la recta real. Observando que $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ (como conjunto, no como grupo), se le dota de la topología producto obtenida a partir de las correspondientes topologías usuales. Afirmamos entonces que $\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ y $\frac{1}{a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ son medidas de Haar por la derecha por la izquierda respectivamente. Observemos que si fijamos $g = (x, y)$, entonces las multiplicaciones a izquierda y derecha por g están dadas por

$$(a, b) \mapsto (xa, xb + y) = \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)^T$$

$$(a, b) \mapsto (ax, bx + y) = \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)^T$$

Veamos que son invariantes a izquierda y derecha respectivamente (para ver que son medidas de Borel regulares puede procederse como en el ejemplo 3.18). Sea $E \in \mathcal{B}(G)$. Consideremos el teorema del cambio de variable 1.27 con el difeomorfismo dado por $\varphi(a, b) = g\cdot(a, b) = (x, y)\cdot(a, b)$. Es obvio que φ^{-1} está dado por la multiplicación por g^{-1}. Así,

$$\int_{gA} \frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_{\varphi^{-1}(gA)} \frac{1}{(ax)^2}|\det \mathcal{J}\varphi(a, b)|\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_A \frac{1}{(ax)^2}x^2\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_A \frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b,$$

ya que $\mathcal{J}\varphi(a, b) = x \cdot I_2$. De un modo similar, consideramos ahora $\psi(a, b) = (a, b) \cdot g$. Tenemos entonces $\mathcal{J}\psi(a, b) = x \cdot I_2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Con esto,

$$\int_{Ag} \frac{1}{a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_{\psi^{-1}(Ag)} \frac{1}{ax}|\det \mathcal{J}\psi(a, b)|\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_A \frac{1}{ax}x\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_A \frac{1}{a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b, \tag{4.9}$$

de modo que $1/a\ \mathrm{d}a\mathrm{d}b$ es una medida de Haar por la derecha. Observemos que esto automáticamente implica que G no es unimodular, pues en caso contrario, ambas medidas deberían ser proporcionales, y no lo son. En efecto, de acuerdo con el teorema de unicidad de la medida de Haar, la medida de Haar por la izquierda, $1/a^2\ \mathrm{d}a\mathrm{d}b$ es única salvo constante multiplicativa. Si G fuera unimodular, entonces $1/a\ \mathrm{d}a\mathrm{d}b$ sería también una medida de Haar por la izquierda, luego proporcional a la anterior. Para ver que no lo son, basta calcular las medidas de $A = [1,2] \times [1,2]$ y $B = [1,3] \times [1,2]$ con ambas, y ver que no salen proporcionales. En efecto

$$\int_A \frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_1^2 \frac{1}{a^2}\mathrm{d}a \int_1^2 \mathrm{d}b = \left.\frac{-1}{a}\right|_1^2 = \frac{1}{2} \qquad \int_A \frac{1}{a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_1^2 \frac{1}{a}\mathrm{d}a \int_1^2 \mathrm{d}b = \ln(a)|_1^2 = \ln(2)$$

y

$$\int_B \frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_1^3 \frac{1}{a^2}\mathrm{d}a \int_1^2 \mathrm{d}b = \left.\frac{-1}{a}\right|_1^3 = \frac{2}{3} \qquad \int_V \frac{1}{a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_1^3 \frac{1}{a}\mathrm{d}a \int_1^2 \mathrm{d}b = \ln(a)|_1^3 = \ln(3),$$

pero

$$\frac{\ln(2)}{1/2} \neq \frac{\ln(3)}{2/3},$$

luego no son proporcionales. Este es un caso en que la función modular no será trivial, luego podemos tratar de calcularla. Veamos que $\Delta_G(x,y) = 1/x$. Tomemos para ello de nuevo el conjunto A, y denotemos μ a la medida $\mu(A) := \int_A 1/a^2\ \mathrm{d}a\mathrm{d}b$. En ese caso, si $g = (x,y)$

$$\mu_g(A) = \mu(Ag) = \int_{Ag} \frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_{\psi^{-1}(Ag)} \frac{1}{(ax)^2} |\det \mathcal{J}\psi(a,b)|\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \int_A \frac{1}{(ax)^2} \cdot x\ dad db = \frac{1}{x} \cdot \mu(A).$$

Por consiguiente, como $\mu(A) > 0$, $\mu_g(A) = \Delta_G(g)\mu(A) = 1/x \cdot \mu(A)$, debe ser $\Delta_G(g) = \Delta_G(x,y) = 1/x$.

Vamos a probar que el grupo $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{A : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ es unimodular, pues es un resultado que utilizaremos en el capítulo siguiente, y de este modo podemos ver otro ejemplo de grupo unimodular, para el que la demostración de que es unimodular es algo más elaborada. Antes de nada, observemos que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es un grupo de Hausdorff, que cumple el segundo axioma de numerabilidad y localmente compacto. El hecho de ser de Hausdorff y cumplir el segundo axioma de numerabilidad se siguen directamente de que sea un subespacio de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, espacio que tiene ambas propiedades. Respecto a la compacidad local, recordemos que todo subespacio abierto o cerrado de un espacio localmente compacto vuelve a ser localmente compacto [Mun00, Cor. 29.3], y $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ es localmente compacto, tal y como se vio en la sección 2.3. También en esa sección se comprobó que la aplicación $\det : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua, y $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, de modo que es cerrado. Concluimos así que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es un grupo localmente compacto y de Hausdorff.

Lema 4.17. Sean G_1 y G_2 dos grupos topológicos de Hausdorff, localmente compactos, y que cumplen el segundo axioma de numerabilidad, y sean Δ_{G_1} y Δ_{G_2} las funciones modulares. Entonces, la función modular de $G = G_1 \times G_2$ está dada por $\Delta_G(g_1, g_2) = \Delta_1(g_1) \cdot \Delta_2(g_2)$.

Demostración. Comencemos notando que en $G_1 \times G_2$ existe una medida de Haar por la proposición 3.21 (ver comentarios relativos a la medida producto del capítulo 1). Sean μ_1 y μ_2 medidas de Haar por la izquierda en G_1 y G_2 respectivamente, y sea $\mu_1 \times \mu_2$ la medida producto en $G_1 \times G_2$. Sean $E_1 \in \mathcal{B}(G_1)$ y $E_2 \in \mathcal{B}(G_2)$ de medida positiva. Entonces, para cada $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2) \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}\Delta_G(\boldsymbol{g})(\mu_1 \times \mu_2)(E_1 \times E_2) &= (\mu_1 \times \mu_2)_{\boldsymbol{g}}(E_1 \times E_2) = (\mu_1 \times \mu_2)((g_1, g_2) \cdot (E_1 \times E_2)) \\ &= (\mu_1 \times \mu_2)((g_1 E_1) \times (g_2 E_2)) = \mu_1(g_1 E_1) \cdot \mu_2(g_2 E_2) \\ &= (\mu_1)_{g_1}(E_1) \cdot (\mu_2)_{g_2}(E_2) = \Delta_{G_1}(g_1)\mu_1(E_1) \cdot \Delta_{G_2}(g_2)\mu_2(E_2).\end{aligned}$$

Ahora bien, $\Delta_G(\boldsymbol{g})(\mu_1 \times \mu_2)(E_1 \times E_2) = \Delta_G(\boldsymbol{g})\mu_1(E_1) \cdot \mu_2(E_2)$, de modo que

$$\Delta_G(\boldsymbol{g})\mu_1(E_1) \cdot \mu_2(E_2) = \Delta_{G_1}(g_1)\mu_1(E_1) \cdot \Delta_{G_2}(g_2)\mu_2(E_2)$$

y dividiendo por $\mu_1(E_1)\mu_2(E_2) > 0$ se obtiene el resultado buscado. □

Antes de estudiar el ejemplo buscado, vamos a hacer un pequeño inciso en el resultado de la proposición 3.20. Observemos que si $\Xi : G \to H$ es un homeomorfismo y un isomorfismo, entonces $\Delta_G = \Delta_H \circ \Xi$. En efecto, sea μ una medida de Haar por la izquierda en G, y $\Xi_*\mu$ la medida inducida por Ξ en H. Sea $E \in \mathcal{B}(H)$ de medida positiva. Entonces, para cada $g \in G$,

$$\begin{aligned}\Delta_H(\Xi(g))\Xi_*\mu(E) &= (\Xi_*\mu)_{\Xi(g)}(E) = \Xi_*\mu(E \cdot \Xi(g)) = \mu(\Xi^{-1}(E\,\Xi(g))) = \mu(\Xi^{-1}(E)g) = \Delta_G(g)\mu(\Xi^{-1}(E)) \\ &= \Delta_G(g)\Xi_*\mu(E)\end{aligned}$$

y dividiendo por $\Xi_*\mu(E) > 0$ se concluye la igualdad.

Proposición 4.18. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el grupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ es unimodular.

Demostración. Observemos que la aplicación siguiente es un isomorfismo ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ denota el conjunto de matrices invertibles de determinante positivo)

$$\begin{array}{rccc}\Xi: & \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})^+ & \longrightarrow & \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0} \\ & A & \mapsto & \left(\frac{A}{\sqrt[n]{\det A}}, \det A\right).\end{array}$$

Ξ está bien definido porque $\det(\det(A)^{-1/n}A) = \det(A)^{-1}\det(A) = 1$, luego el primer término realmente tiene llegada en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ (nótese que $\det(A) > 0$). Por otro lado, es un morfismo de grupos pues

$$\begin{aligned}\Xi(A \cdot B) &= \left(\det(A \cdot B)^{-1/n} A \cdot B, \det(A \cdot B)\right) = \left(\det(A)^{-1/n} \cdot \det(B)^{-n} A \cdot B, \det(A \cdot B)\right) \\ &= (\det(A)^{-1/n} A, \det A) \cdot (\det(B)^{-1/n} B, \det B) = \Xi(A) \cdot \Xi(B).\end{aligned}$$

La continuidad es evidente porque se trata de una aplicación con llegada en un producto y cada componente es continua. Además, $\Xi^{-1}(A, \lambda) = \sqrt[n]{\lambda} \cdot A$ vuelve a ser continua y morfismo de grupos. Concluimos que Ξ es un isomorfismo y un homeomorfismo. A partir de la proposición 3.20, se sigue que una medida de Haar en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ puede obtenerse trasladando mediante Ξ la medida en $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+ \times \mathbb{R}_{>0}$. Ahora bien, del comentario anterior y el lema 4.17 se sigue que $\Delta_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})} = \Delta_{(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})^+ \times \mathbb{R}_{>0})} = \Delta_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} \cdot \Delta_{\mathbb{R}_{>0}}$. $\mathbb{R}_{>0}$ es abeliano, luego unimodular. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ también es unimodular (pues $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ lo es, tal y como se muestra en el ejemplo 3.22-1, y estamos considerando un subgrupo suyo con la restricción de la medida correspondiente). Por consiguiente, $\Delta_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})^+} \equiv 1$ y $\Delta_{\mathbb{R}_{>0}} \equiv 1$, y por ello, $\Delta_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})} \equiv 1$, y concluimos que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ es unimodular. □

4.3. Medida de Haar en el espacio cociente

Vamos a considerar ahora un grupo topológico G, de Hausdorff y localmente compacto, como venimos haciendo todo el texto, y un subgrupo normal suyo H, que además pediremos que sea cerrado en G. Observemos que por la proposición 2.17, si encontramos $H \triangleleft G$, entonces $\overline{H}$ será normal y cerrado. En ese caso, podemos considerar el grupo G/H. A partir de la misma relación de equivalencia que dota al conjunto de clases de estructura de grupo, podemos dotarlo de una topología. En efecto, en G/H puede considerarse la topología cociente. A modo de recordatorio, si en un espacio topológico cualquiera X, se define una relación de equivalencia $\mathcal{R}$, siempre puede considerarse la aplicación de paso al cociente, $q : X \to X/\mathcal{R}$ que es la envía cada elemento en su clase de equivalencia. La topología cociente en $X/\mathcal{R}$ se define como $\tau := \{V \subset X/\mathcal{R} : q^{-1}(V) \text{ es abierto en } X\}$. En el caso particular que nos ocupa, la aplicación de paso al cociente está definida como $q : G \to G/H, g \mapsto q(g) = gH$. De la propia construcción se sigue que la aplicación q es continua. Además, se trata de una aplicación abierta. En efecto, si $A \subset G$ es abierto, entonces $q^{-1}(q(A)) = AH$ es abierto por la proposición 2.13, luego $q(A)$ es abierto en G/H por la definición de topología cociente. Recordamos finalmente que dados un conjunto X cualquiera, no necesariamente un espacio topológico, y una relación de equivalencia, un subconjunto A de X es *saturado* si para cada $x \in A$ se tiene que toda la clase de equivalencia está contenida en A. En nuestro caso, $A \subset G$ es saturado para la relación de equivalencia si y solo si para cada $a \in A$, $aH \subset A$.

Recordamos también brevemente la *propiedad fundamental de topología cociente* (para el caso particular en que la vamos a utilizar, es decir, no en términos de aplicaciones cociente en general). Sea X un espacio topológico, $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia y $q : X \to X/\mathcal{R}$ es su aplicación cociente. Entonces, para todo espacio topológico Z y toda aplicación $f : X/\mathcal{R} \to Z$, f es continua si y solo si lo es $f \circ q : X \to Z$.

Una vez hechos recordatorios, vamos a mostrar que cuando consideramos un subgrupo normal y cerrado H de G, el problema de encontrar una medida de Haar en él es trivial. Esto va a seguir de la proposición siguiente, en el que vamos a probar que bajo estas hipótesis G/H vuelve a ser un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff, y de los resultados de existencia y unicidad del capítulo anterior.

Proposición 4.19. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado. Entonces G/H es de Hausdorff. Si además G es localmente compacto, G/H también.

Demostración. Para ver que G/H es de Hausdorff, vamos a utilizar el resultado siguiente: si X es un espacio topológico y $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, entonces $X/\mathcal{R}$ con la topología cociente es de Hausdorff si y solo si todo par de elementos $x_1, x_2 \in X$ que pertenecen a distintas clases de equivalencia pueden separarse mediante abiertos *saturados* disjuntos.

Tomemos $x, y \in G$ no relacionados, esto es $y^{-1}x \notin H$. En particular, $e \notin yHx^{-1}$ siendo este cerrado. Aplicando el lema 2.10, existe un entorno V de e simétrico con $e \in VV^{-1} \subset G \backslash yHx^{-1}$. Sean VxH y VyH, ambos entornos abiertos y saturados de x e y respectivamente. El hecho de ser abiertos se sigue de que V lo sea, y como $e \in V$ y $e \in H$, deben contener a x e y respectivamente. El hecho de ser saturados se sigue de que se obtengan multiplicando otro conjunto por H. Son también disjuntos, pues si $v_1xh_1 = v_2yh_2$ con $v_1, v_2 \in V$, $h_1h_2 \in H$, entonces $VV^{-1} \ni v_2^{-1}v_1 = yh_2h_1^{-1}x^{-1} \in yHx^{-1}$ lo cual es contradicción. Esto prueba que G/H es de Hausdorff.

Para ver que G/H es localmente compacto, obsérvese que la aplicación $G/H \to G/H, aH \mapsto gaH$ es continua, como resultado de aplicar la propiedad fundamental de topología cociente. Concretamente, se toma $Z = G/H$ de nuevo, y se tiene que $f \circ q = q \circ r_g$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Por consiguiente, si mostramos que H tiene un entorno compacto K, gH tendrá el entorno compacto gK. Por ser G localmente compacto, e tiene un entorno compacto $\tilde{K}$. Sea $K = q(\tilde{K})$, que es compacto por continuidad de q, contiene a $q(e) = H$, y es entorno por ser q abierta. □

Como la búsqueda de una medida de Haar en G/H cuando H es un subgrupo normal y cerrado de G, ya resulta trivial, el siguiente paso es preguntarse lo que ocurre cuando H es un subgrupo cerrado, pero no normal. Como ya detallamos al inicio del capítulo, sigue teniendo sentido considerar el conjunto de clases G/H, y se le puede seguir dotando de la topología cociente, pero ya no será un grupo. Como no es un grupo, no tiene sentido hablar de medidas de Haar en G/H, pero sí que puede seguir hablándose de medidas en su σ-álgebra de Borel. Antes de introducir este concepto con mayor profundidad, vamos a probar algunos resultados que necesitaremos después.

Proposición 4.20. Sea G un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto con medida de Haar por la izquierda μ. Entonces $\bar{\mu} := i_*\mu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una medida de Haar por la derecha en G, cuyo funcional de Haar por la derecha asociado es

$$\Upsilon_{\bar{\mu}} : \mathscr{C}_c(G) \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_G f(x)\Delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x).$$

Además, si G es unimodular, $\bar{\mu} = \mu$.

Demostración. En primer lugar, $\bar{\mu}$ es una medida de Borel regular porque $i : G \to G$ es un homeomorfismo y se puede utilizar la demostración de la proposición 3.20. Como i no es un isomorfismo de grupos en general (de hecho, salvo que G sea abeliano), pues $i(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \neq x^{-1}y^{-1}$, no podemos concluir que $\bar{\mu}$ sea una medida de Haar por la izquierda, pero en dicha demostración, solo se necesita que la aplicación sea isomorfismo de grupos para probar la invarianza por la izquierda. Concluimos entonces que $\bar{\mu}$ es una medida de Borel regular. Para ver que es de Haar por la derecha, basta ver la invarianza. Sean entonces $E \in \mathcal{B}(G)$, $g \in E$. Se tiene

$$\bar{\mu}(Eg) = \mu(i(Eg)) = \mu(g^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \mu(i(E)) = \bar{\mu}(E)$$

por ser μ medida de Haar por la izquierda. Estudiamos ahora el funcional de Haar asociado. Comencemos observando que $\Upsilon_{\bar{\mu}}$ es claramente positivo y no trivial, pues $\Delta_G(g) > 0$ para todo $g \in G$. Además, para ser un funcional de Haar por la derecha debe quedar invariante al componerlo con $\varrho_G(g)$ para cada $g \in G$. Desarrollando, para todos $f \in \mathscr{C}_c(G)$, $g \in G$, se tiene

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\bar{\mu}}(\varrho_G(g)f) &= \int_G (\varrho_G(g)f)(x)\Delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(xg)\Delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x)\\ &\overset{(1)}{=} \Delta_G(g)\int_G f(xg)\cdot(\Delta_G\circ i)(xg)\mathrm{d}\mu(x) \overset{(4.8)}{=} \Delta_G(g)\Delta_G(g^{-1})\int_G f(x)\cdot(\Delta_G\circ i)(x)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G f(x)\cdot\Delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \Upsilon_{\bar{\mu}}(f),\end{aligned}$$

donde en (1) hemos utilizado que $\Delta_G(x^{-1}) = \Delta_G((xgg^{-1})^{-1}) = \Delta_G(g(xg)^{-1}) = \Delta_G(g)\cdot\Delta_G((xg)^{-1})$, y que si f tiene soporte compacto, entonces $(f\circ l_g)\cdot(\Delta_G\circ i\circ l_g)$ también. Concluimos así que $\Upsilon_{\bar{\mu}}$ es un funcional de Haar por la derecha, aunque no tenemos en principio garantizado que esté asociado a $\bar{\mu}$. Ahora bien, como $\bar{\mu}$ sí que es una medida de Haar por la derecha, tendrá un funcional de Haar asociado, que vamos a denotar $\Phi_{\bar{\mu}}$. Por unicidad de la medida de Haar salvo constante, y por la correspondencia entre medidas y funcionales de Haar, debe existir $c > 0$ tal que $\Phi_{\bar{\mu}} = c\Upsilon_{\bar{\mu}}$. De este modo,

$$\begin{aligned}\Phi_{\bar{\mu}}(f) &= c\Upsilon_{\bar{\mu}}(f) = c\int_G f(x)\Delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = c\int_G ((f\circ i)\cdot\Delta_G)\circ i(x)\mathrm{d}\mu(x)\\ &\overset{\text{Th. }1.27}{=} c\int_G f(x^{-1})\Delta_G(x)\mathrm{d}(i_*\mu)(x) = c\int_G f(x^{-1})\Delta_G(x)\mathrm{d}\bar{\mu}(x) \overset{(2)}{=} c^2\int_G f(x^{-1})\Delta_G(x)\Delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x)\\ &= c^2\int_G f(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Th. }1.27}{=} c^2\int_G f(x)\mathrm{d}\bar{\mu}(x) = c^2\Phi_{\bar{\mu}}(f).\end{aligned} \tag{4.10}$$

En ambos casos, el teorema del cambio de variable 1.27 se ha aplicado con la función i. Además, en (2), hemos utilizado que el miembro de la izquierda es el funcional $\Phi_{\bar{\mu}}$ aplicado a $(f\circ i)\cdot\Delta_G$. La igualdad se sigue de que este funcional es igual a $c\Upsilon_{\bar{\mu}}$. Tomamos entonces un entorno compacto K de e, y aplicando el lema de Urysohn 4.4, una función que cumpla $K \prec f \prec G$. En ese caso, $\Phi_{\bar{\mu}}(\varphi) \geq \bar{\mu}(K) > 0$. Dividiendo a ambos lados de (4.10) por $\Phi_{\bar{\mu}}(f)$ debe ser $c^2 = 1$, y como $c > 0$, se sigue que $c = 1$. Por consiguiente, $\Upsilon_{\bar{\mu}} = \Phi_{\bar{\mu}}$, así que $\Upsilon_{\bar{\mu}}$ es el funcional de Haar asociado a $\bar{\mu}$. La ventaja es que lo tenemos escrito en términos de una integral que depende de μ en lugar de $\bar{\mu}$. Si además se pide que G sea unimodular, entonces $\Delta_G \equiv 1$ (corolario 4.15), y se sigue que $\bar{\mu} = \mu$ aplicando la proposición 4.11 y que sus funcionales de Haar coinciden. □

Observación 4.21. De la proposición anterior se deduce que si $f \in \mathscr{C}_c(G)$, y μ es una medida de Haar en G, entonces, puesto que la constante c de la proposición anterior es igual a 1, se tiene

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G (f\circ i\circ i)(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x^{-1})\mathrm{d}(i_*\mu) = \int_G f(x^{-1})\mathrm{d}\bar{\mu}(x) = \Phi_{\bar{\mu}}(f\circ i) =\\ &= \Upsilon_{\bar{\mu}}(f\circ i) = \int_G f(x^{-1})\Delta_G(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Nótese que es obvio que si $f \in \mathscr{C}_c(G)$, entonces $f\circ i \in \mathscr{C}_c(G)$.

Con esto, podemos probar el resultado central de este capítulo, el teorema de existencia de medidas G-invariantes en el espacio cociente. Para ello, comencemos observando que si G es un grupo topológico, de Hausdorff y localmente compacto, y $H \leq G$ es cerrado, entonces H vuelve a ser un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto (los subespacios cerrados de los espacios localmente compactos vuelven a ser localmente compactos [Mun00, Cor. 29.3]). Por consiguiente, tanto G como H tienen medidas de Haar por la izquierda. Supongamos que H no es normal en G. Podemos preguntarnos entonces si admite una medida de Borel regular y G-invariante, es decir, una medida ξ en $\mathcal{B}(G/H)$ tal que $\xi(A) = \xi(gA)$ para todos $A \in \mathcal{B}(G/H)$, $g \in G$. En particular, ξ es una medida invariante bajo la acción de G en G/H dada mediante $G \times G/H \to G/H, (g, aH) \mapsto (ga)H$.

Observación 4.22.

1. Recalcamos que ξ *no* es una medida de Haar estrictamente hablando, pues el espacio topológico G/H *no* es un grupo (al menos, no con la estructura de grupo cociente), y no tiene sentido siquiera hablar de medidas de Haar en ese contexto. Se trata de una medida *invariante bajo la acción* de G en G/H. Ahora bien, es muy habitual en la literatura hacer abuso del lenguaje, y decir que ξ es una medida de Haar en el cociente (ver [Tor20]). También aquí nos referiremos a ξ como medida de Haar en algunas ocasiones a lo largo del capítulo siguiente.

2. Aunque utilizamos la misma notación $g \cdot A$ que utilizábamos para grupos en los que no tomábamos el cociente, A ahora es un conjunto de clases a izquierda xH, y $g \cdot A = \{(gx)H : xH \in A\}$. Es decir, $g \cdot A$ *no* es de la forma $r_g(A)$ en el sentido en que hemos estado trabajando con los grupos topológicos.

Teorema 4.23. Sea G un grupo topológico de Hausdorff y localmente compacto, y sea $H \leq G$ cerrado. Sean μ y ν las medidas de Haar por la izquierda en G y H respectivamente. Entonces existe una medida G-invariante, ξ en G/H si y solo si $(\Delta_G)|_H \equiv \Delta_H$. Además, en ese caso ξ es única salvo constante multiplicativa estrictamente positiva y puede normalizarse de modo que, para toda $f \in \mathscr{C}_c(G)$, se cumpla

$$\int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_{G/H} \left[\int_H f(gh)\mathrm{d}\nu(h)\right] \mathrm{d}\xi(gH). \tag{4.12}$$

De hecho, cuando se supone además que G satisface el segundo axioma de numerabilidad, este resultado se puede extender a funciones $f \in L^1(G)$ (ver [KL06, Th. 7.12] y las explicaciones proporcionadas). Esto nos será de utilidad en el siguiente capítulo, donde se lo aplicaremos a $\chi_A(x)$, una función que, aún si A es compacto, por regla general, no es continua, y por consiguiente no pertenece a $\mathscr{C}_c(G)$.

Demostración. Al igual que la prueba de existencia de la medida de Haar, se trata de una prueba bastante extensa. Es por ello que vamos a redactar la prueba en el estilo de estas, enunciando ciertas afirmaciones y probándolas conforme vaya siendo necesario.

Comenzamos mostrando que si ξ existe satisfaciendo las hipótesis del enunciado, entonces $(\Delta_G)|_H \equiv \Delta_H$. Definamos la aplicación

$$\lambda : \mathscr{C}_c(G) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_{G/H} \left[\int_H f(gh)\ \mathrm{d}\nu(h)\right]\ \mathrm{d}\xi(gH).$$

La primera observación es que el funcional anterior está bien definido. En efecto, la integral interior no depende del representante de la clase de gH elegido. Para verlo explícitamente, si $gH = g'H$, entonces $(g')^{-1}g = \tilde{h} \in H$. En particular, $g = g'\tilde{h}$, de modo que

$$\int_H f(gh)\mathrm{d}\nu(h) = \int_H f(g'\tilde{h}h)\mathrm{d}\nu(h) = \int_H f(g'h)\mathrm{d}\nu(h),$$

aplicando en la última igualdad el teorema 1.27 con el homeomorfismo $l_{\tilde{h}}$. Veamos que λ es un funcional de Haar por la izquierda (ver definición 4.10). Dado entonces $g \in G$, calculemos

$$\begin{aligned}(\lambda \circ \lambda_G(g))(f) &= \int_{G/H} \int_H f(g^{-1}mh) \, \mathrm{d}\nu(h) \, \mathrm{d}\xi(mH) = \int_{G/H} \varphi(g^{-1}m) \, \mathrm{d}\xi(mH) \\ &= \int_{G/H} \varphi \circ L_{g^{-1}}(m) \, \mathrm{d}\xi(mH) = \int_{G/H} \varphi(m) \, \mathrm{d}(L_{g\,*}\xi)(mH) \\ &= \int_{G/H} \varphi(m) \, \mathrm{d}\xi(mH) = \lambda(f),\end{aligned}$$

donde hemos definido $\varphi(g) := \int_H f(gh) \, \mathrm{d}\nu(h)$. Se tiene $\varphi \in \mathscr{C}_c(G)$, pues la aplicación $(g, h) \mapsto f(gh)$ está en $\mathscr{C}_c(G \times H)$, y podemos aplicar la proposición 1.29 notando que $G \times H$ vuelve a ser un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. También hemos definido $L_g : G/H \mapsto G/H, mH \mapsto gmH$, que es continua, luego medible (y cuya inversa es $L_{g^{-1}}$, que es también continua, y por consiguiente homeomorfismo). La continuidad se sigue de la propiedad fundamental de la topología cociente, pues $L_g \circ q = l_g \circ q$ siendo el miembro derecho composición de aplicaciones continuas. Con esto, hemos aplicado el teorema 1.27 observando que $(L_{g^{-1}})_*\xi = \xi$ pues estamos suponiendo que ξ es una medida G-invariante, y para cada $A \in \mathcal{B}(G/H)$ se tiene $(L_{g^{-1}})_*\xi(A) = \xi(L_{g^{-1}}^{-1}(A)) = \xi(gA) = \xi(A)$. Por consiguiente, tenemos un funcional de Haar por la izquierda. Aplicando entonces la proposición 4.11, λ define una única medida de Haar por la izquierda, μ en G. Aplicando (4.7) al funcional λ, se sigue que $\lambda(\varrho_G(t^{-1})f) = \Delta_G(t)\lambda(f)$ para todos $t \in G, f \in \mathscr{C}_c(G)$. Ahora bien, podemos desarrollar esta expresión utilizando la definición de λ, pero tomando $t \in H$. Así,

$$\begin{aligned}\lambda(\varrho_G(t^{-1})f) &= \int_{G/H} \int_H (\varrho_G(t^{-1})f)(gh) \, \mathrm{d}\nu(h) \, \mathrm{d}\xi(gH) = \int_{G/H} \int_H f(ght^{-1}) \, \mathrm{d}\nu(h) \, \mathrm{d}\xi(gH) \\ &= \int_{G/H} \int_H (f \circ l_g)(ht^{-1}) \, \mathrm{d}\nu(h) \, \mathrm{d}\xi(gH) = \int_{G/H} \int_H (\varrho_H(t^{-1})f \circ l_g)(h) \, \mathrm{d}\nu(h) \, \mathrm{d}\xi(gH) \\ &\overset{(1)}{=} \int_{G/H} \int_H \Delta_H(t)(f \circ l_g)(h) \, \mathrm{d}\nu(h) \, \mathrm{d}\xi(gH) \overset{(2)}{=} \Delta_H(t) \int_{G/H} \int_H f(gh) \, \mathrm{d}\nu(h) \, \mathrm{d}\xi(gH) \\ &= \Delta_H(t)\lambda(f)\end{aligned}$$

donde en (1) hemos utilizado (4.7) con $f \circ l_g|_H$ que tiene soporte $g^{-1}\mathrm{sop}(f) \cap H$, que es compacto porque H es cerrado. En (2) simplemente hemos observado que $\Delta_H(t)$ es un número real porque $t \in H$ es fijo y sale de la integral. Aplicando el lema de Urysohn 4.4, podemos tomar K un entorno compacto de algún punto de G (que existe por ser G localmente compacto), y elegir $f \in \mathscr{C}_c(G)$ tal que $K \prec f \prec G$. Entonces, por definición de la medida μ tenemos $\lambda(f) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g)$. Notemos que $\mu(K) \leq \lambda(f) \leq \mu(\mathrm{sop}(f)) < \infty$. Por tanto, tomando $t \in H$ y combinando lo anterior, se tiene

$$\lambda(\varrho_G(t^{-1})f) = \Delta_G(t)\lambda(f) = \Delta_H(t)\lambda(f),$$

y como podemos dividir por $\lambda(f)$, concluimos que $(\Delta_G)|_H \equiv \Delta_H$, tal y como queríamos ver.

El recíproco es algo más elaborado, así que vamos a ir probando el resultado a partir de una serie de afirmaciones que iremos enunciando y demostrando.

Afirmación 1: Si G es un grupo de Hausdorff localmente compacto, y $H \leq G$ cerrado, con medida de Haar por la izquierda ν, se define entonces, para cada $f \in \mathscr{C}_c(G)$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_H : & G/H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & gH & \mapsto & f_H(gH) := \int_H f(gh) \, \mathrm{d}\nu(h). \end{array}$$

Entonces, f_H está bien definida y pertenece a $\mathscr{C}_c(G/H)$. Además, la aplicación $\mathfrak{d} : \mathscr{C}_c(G) \to \mathscr{C}_c(G/H), f \mapsto f_H$ es sobreyectiva.

En primer lugar, para ver que está bien definida, hemos de ver que $f_H(gH)$ no depende del representante de la clase elegido, y que la integral es finita. Lo segundo se sigue inmediatamente de que f tenga soporte compacto. Para lo primero, tomemos $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1H = g_2H$ y veamos que $\int_H f(g_1h)\, \mathrm{d}\nu(h) = \int_H f(g_2h)\, \mathrm{d}\nu(h)$. Desarrollando,

$$\int_H f(g_1h)\mathrm{d}\nu(h) = \int_H f(g_2g_2^{-1}g_1h)\mathrm{d}\nu(h) = \int_{l_{g_2^{-1}g_1(H)}} (f\circ l_{g_2})\circ l_{g_2^{-1}g_1}(h)\mathrm{d}\nu(h)$$

$$\overset{(3)}{=} \int_H f(g_2h)\, \mathrm{d}((l_{g_2^{-1}g_1})_*\nu)(h) \overset{(4)}{=} \int_H f(g_2h)\mathrm{d}\nu(h)$$

donde en (3) hemos utilizado el teorema 1.27, y hemos observado al ser $g_2H = g_1H$, se tiene $g_2^{-1}g_1H = H$. En (4), hemos utilizado que ν es una medida de Haar por la izquierda, luego $(l_{g_2^{-1}g_1})_*\nu = \nu$. Para ver que $\mathrm{sop}(f_H)$ es compacto, basta notar que es un cerrado y que está contenido en $q(\mathrm{sop}(f))$, que es compacto por ser imagen de un compacto por una aplicación continua. Además, es claro que basta ver que $\{gH \in G/H : f_H(gH)\} \subset q(\mathrm{sop}(f))$, pues tomando adherencias se tiene el resultado buscado. Si $f_H(gH) \neq 0$, entonces debe existir $h \in H$ con $f(gh) \neq 0$ (f es no negativa). En particular, $gh \in \mathrm{sop}(f)$, luego $gH \in q(\mathrm{sop}(f))$. Respecto a la continuidad, utilizando de nuevo la propiedad fundamental de la topología cociente, f_H será continua si y solo si lo es $f_H\circ q : G \to \mathbb{R}, g \mapsto \int_H f(gh)\mathrm{d}\nu(h)$, y ya comprobamos en la afirmación anterior que esa aplicación es continua.

Estudiamos finalmente la sobreyectividad. Tomamos para ello $F \in \mathscr{C}_c(G/H)$, y tomemos $K \subset G$ tal que $\mathrm{sop}(F) \subset q(K)$. Para ver que esto puede hacerse, notemos que G puede recubrirse mediante abiertos relativamente compactos $\{U_i\}_{i\in I}$ (ver teorema 2.3). Como q es abierta $\{q(U_i)\}_{i\in I}$ constituye un recubrimiento abierto de $\mathrm{sop}(F)$, que es compacto, y admite por ello un subrecubrimiento finito. Entonces $\mathrm{sop}(F) \subset \cup_{i=1}^n q(U_i) = q(\cup_{i=1}^n U_i) \subset q(\cup_{i=1}^n \overline{U}_i)$, de modo que se puede tomar $K := \cup_{i=1}^n \overline{U}_i$, que es compacto por ser union finita de compactos.

Elijamos también $\eta \in \mathscr{C}_c(G)$ con $K \prec \eta \prec G$ (utilizando el lema de Urysohn 4.4). Definimos entonces $f : G \to \mathbb{R}$ como

$$f(g) = \begin{cases} \frac{F(gH)\eta(g)}{\eta_H(gH)} & \text{si} \quad \eta_H(gH) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \eta_H(gH) = 0. \end{cases}$$

Afirmación 2: La función f así definida es un elemento de $\mathscr{C}_c(G)$.
Comenzamos observando que $\mathrm{sop}(f) \subset \mathrm{sop}(\eta)$, de modo que f tiene soporte compacto. De hecho, el hecho de tomar η se hace precisamente para suplir el posible hecho de que G no sea compacto (en cuyo caso, podría tomarse $\eta \equiv 1$). Falta comprobar que f es una función continua. Para ello, vamos a ver que lo es en la unión de dos abiertos U_1 y U_2 con $G = U_1 \cup U_2$. Definimos entonces

$$U_1 := \{g \in G : \eta_H(gH) \neq 0\} \qquad U_2 := G\backslash KH.$$

En primer lugar, KH es un cerrado aplicando 2.15, luego su complementario, U_2 es abierto. Por otro lado, $U_1 = G\backslash\eta_H^{-1}(\{0\})$ es abierto por ser el complementario de un cerrado, utilizando la continuidad de η_H para afirmar que $\eta_H^{-1}(\{0\})$ es cerrado. Además, en U_1, f es continua, pues es cociente de funciones continuas (F por estar en $\mathscr{C}_c(G/H)$, η por hipótesis, η_H por lo probado en la afirmación 1, y la aplicación $g \mapsto gH$ es la aplicación cociente q, que es continua por la definición de la topología cociente). Por otro lado, en U_2, f es continua porque es nula. Para verlo, si $g \notin KH$ es tal que $\eta_H(gH) = 0$ es nulo, entonces $f = 0$ por definición. Si no, $F(gH) = 0$, pues $\mathrm{sop}(F) \subset q(K)$ y $g \notin KH$ implica que $gH \notin q(K)$, pues en caso contrario, existiría $\ell \in K$ con $gH = \ell H$, lo cual equivale a que $\ell^{-1}g \in H$, que implicaría a su vez $g \in \ell H \subset KH$, que es contradicción. Falta comprobar que $G = U_1 \cup U_2$. Para ello, vamos a ver que dado $g \in G$, si $g \notin U_1$, entonces $g \in U_2$. En caso de tener $g \notin U_1$, se tiene

$$0 = \eta_H(gH) = \int_H \eta(gh)\mathrm{d}\nu(h),$$

pero η es una función real no negativa, de modo que debe ser $\eta(gh) = 0$ para cada $h \in H$. Ahora bien, esto implica que $g \notin KH$, pues en caso contrario $gh \in K$ para cierto $h \in H$, y en ese punto $\eta(gh) = 1$.

Afirmación 3: Manteniendo las definiciones anteriores, tiene $f_H \equiv F$.
Para verlo, observemos que si $g \notin U_1$, entonces $\eta_H(gH) = 0$ y $f(g) = 0$ por construcción. Además,

por lo ya discutido en la afirmación anterior, esto implica que $g \notin KH$, de modo que $F(gH) = 0$. Si $g \in U_1$, entonces f está definido por su primera expresión y desarrollando

$$f_H(gH) := \int_H f(gh)\mathrm{d}\nu(h) = \int_H \frac{F(ghH)\eta(gh)}{\eta_H(ghH)}\,\mathrm{d}\nu(h) = F(gH) \cdot \frac{\cancel{\int_H \eta(gh)\mathrm{d}\nu(h)}}{\cancel{\eta_H(gH)}} = F(gH).$$

Para sacar $F(gH)$ y $\eta_H(gH)$ de las respectivas integrales, hemos utilizado que $ghH = gH$ porque $hH = H$, y que al ser funciones en G/H, dependen solamente de la clase de equivalencia, y no de h.

Lo anterior implica que la aplicación $\mathfrak{d} : \mathscr{C}_c(G) \mapsto \mathscr{C}_c(G/H), f \mapsto f_H$ es sobreyectiva. En particular, puede elegirse una inversa por la derecha $\mathfrak{s} : \mathscr{C}_c(G/H) \to \mathscr{C}_c(G)$. Esta inversa cumple $\mathfrak{d} \circ \mathfrak{s} = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_c(G/H)}$, es decir, $(\mathfrak{s}F)_H = F$ para toda $F \in \mathscr{C}_c(G/H)$. Para definir la aplicación $\mathfrak{s}$, basta tomar como $\mathfrak{s}(F)$ una cualquiera de las $f \in \mathscr{C}_c(G)$ tales que $\mathfrak{d}(f) = f_H = F$. Podemos considerar entonces la aplicación

$$\tilde{\lambda} : \mathscr{C}_c(G/H) \to \mathbb{R}, F \mapsto \int_G (\mathfrak{s}F)(g)\mathrm{d}\mu(g).$$

Afirmación 4: Para cualquier $f \in \mathscr{C}_c(G)$ tal que $f_H \equiv 0$, se tiene $\int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g) = 0$.
Notemos que existe $\eta \in \mathscr{C}_c(G)$ tal que $q(\mathrm{sop}(f)) = \mathrm{sop}(f)H \prec \eta_H \prec G/H$. Para verlo, basta notar que $q(\mathrm{sop}(f))$ es compacto en G/H que es localmente compacto y de Hausdorff. Del lema de Urysohn 4.4, existe φ con $q(\mathrm{sop}(f)) \prec \varphi \prec G/H$, y por ser $\mathfrak{d}$ sobreyectiva, existe $\eta \in \mathscr{C}_c(G)$ tal que $\eta_H = \varphi$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g) &\overset{(6)}{=} \int_G \eta_H(gH)f(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G \left[\int_H \eta(gh)\,\mathrm{d}\nu(h)\right] f(g)\mathrm{d}\mu(g) \\ &\overset{(7)}{=} \int_G \left[\int_H \eta(gh^{-1})\Delta_H(h^{-1})\,\mathrm{d}\nu(h)\right] f(g)\mathrm{d}\mu(g).\end{aligned} \tag{4.13}$$

En (6) hemos utilizado que $f(g)$ puede ser no nulo solamente cuando $g \in \mathrm{sop}(f)$, y al ser $\mathrm{sop}(f)H \prec \eta_H$, $\eta_H \equiv 1$ en los puntos en los que el integrando es no nulo. En (7) hemos utilizado la igualdad expuesta en la observación 4.21 con la función $\eta \circ l_g$. Queremos utilizar la proposición 1.29 para cambiar el orden de integración en la última expresión de 4.13. Para ello, definamos $\theta : G \times H \to \mathbb{R}, (g,h) \to f(g)\eta(gh^{-1})\Delta_H(h^{-1})$. Es obvio que θ es continua, luego si comprobamos que tiene soporte compacto, estaremos en las hipótesis de la proposición 1.29. La compacidad del soporte se sigue, tras tomar adherencias, y notar que el producto cartesiano de compactos es compacto, de la contención

$$\{(g,h) \in G \times H : \theta(g,h) \neq 0\} \subset \mathrm{sop}(f) \times \big(\mathrm{sop}(\eta)^{-1} \cdot \mathrm{sop}(f) \cap H\big). \tag{4.14}$$

Notemos que f y η tienen soporte compacto, y H es cerrado, de modo que $(\mathrm{sop}(\eta))^{-1} \cdot \mathrm{sop}(f) \cap H$ es compacto (proposición 2.13). Para comprobar que es cierta la contención de (4.14), supongamos que $\theta(g,h) \neq 0$. En particular, $f(g) \neq 0$, luego $g \in \mathrm{sop}(f)$. Además, $\eta(gh^{-1}) \neq 0$ implica que $gh^{-1} \in \mathrm{sop}(\eta)$, luego $h^{-1} \in g^{-1}\mathrm{sop}(\eta)$, que implica $h \in \mathrm{sop}(\eta)^{-1}g \subset \mathrm{sop}(\eta)^{-1} \cdot \mathrm{sop}(f)$, y obviamente podemos intersecar con H y concluir que $h \in \mathrm{sop}(\eta)^{-1}g \subset \mathrm{sop}(\eta)^{-1} \cdot \mathrm{sop}(f) \cap H$. Teniendo esto en cuenta, el último término de (4.13) es igual a

$$\int_H \left[\int_G \eta(gh^{-1})f(g)\,\mathrm{d}\mu(g)\right] \Delta_H(h^{-1})\,\mathrm{d}\nu(h) \overset{(8)}{=} \int_H \left[\int_G \eta(g)f(gh)\Delta_G(h)\mathrm{d}\mu(g)\right] \Delta_H(h^{-1})d\nu(h). \tag{4.15}$$

En (8), hemos utilizado de nuevo la observación 4.21 con la función $f(g) \cdot \eta \circ l_g : H \to \mathbb{R}$. Ahora bien, en la ecuación (4.15), podemos utilizar la hipótesis de que $(\Delta_G)|_H \equiv \Delta_H$, de modo que $\Delta_G(h) \cdot \Delta_H(h^{-1}) = \Delta_H(h) \cdot \Delta_H(h^{-1}) = 1$. Así, la ecuación (4.15) es igual (aplicando la proposición 1.29 para cambiar el orden de las integrales) a la expresión siguiente

$$\int_H \left[\int_G \eta(g)f(gh)\mathrm{d}\mu(g)\right] \mathrm{d}\nu(h) = \int_G \eta(g) \left[\int_H f(gh)\mathrm{d}\nu(h)\right] \mathrm{d}\mu(g) = \int_G \eta(g)f_H(gH)\mathrm{d}\mu(g) = 0$$

utilizando que $f_H \equiv 0$ por hipótesis.

Afirmación 5: La aplicación $\tilde{\lambda}$ no depende de la inversa por la derecha $\mathfrak{s}$ elegida.
Para ver que $\tilde{\lambda}$ no depende de la elección de la inversa por la derecha, tomemos $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{s}'$ dos inversas por la derecha diferentes. Tomemos también $F \in \mathscr{C}_c(G/H)$, se tiene entonces

$$\int_G (\mathfrak{s}F)(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_G (\mathfrak{s}'F)(g)\mathrm{d}\mu(g) \iff \int_G ((\mathfrak{s}-\mathfrak{s}')F)(g)\mathrm{d}\mu(g) = 0.$$

Ahora bien, la segunda igualdad se da como consecuencia de la afirmación anterior, pues $((\mathfrak{s}-\mathfrak{s}')F)_H = (\mathfrak{s}F - \mathfrak{s}'F)_H = (\mathfrak{s}F)_H - (\mathfrak{s}'F)_H = \mathfrak{d}\mathfrak{s}F - \mathfrak{d}\mathfrak{s}'F = F - F = 0$ (es obvio por la linealidad de la integral y la definición que $(f-g)_H = f_H - g_H$ para todas $f, g \in \mathscr{C}_c(G)$). Por último, para cada $F \in \mathscr{C}_c(G/H)$, $\mathfrak{s}F \in \mathscr{C}_c(G)$ es no negativa, de modo que $\tilde{\lambda}$ es un funcional lineal positivo.

Del teorema de Riesz 1.22 se sigue que existe una única medida de Borel regular ξ en G/H tal que para cada $F \in \mathscr{C}_c(G/H)$

$$\int_G (\mathfrak{s}F)(g)\mathrm{d}\mu(g) = \tilde{\lambda}(F) = \int_{G/H} F(gH)\mathrm{d}\xi(gH) = \int_{G/H} (\mathfrak{s}F)_H(gH)\mathrm{d}\xi(gH) =$$
$$= \int_{G/H} \left[\int_H (\mathfrak{s}F)(gh)\mathrm{d}\nu(h)\right] \mathrm{d}\xi(gH).$$

Ahora bien, esto implica que se cumple (4.12) para $f \in \mathscr{C}_c(G)$, pues la expresión anterior es independiente de la inversa $\mathfrak{s}$ elegida, así que se puede poner directamente una función $f \in \mathscr{C}_c(G)$.

Afirmación 6: La medida ξ es no trivial porque el funcional $\tilde{\lambda}$ es no idénticamente nulo y G-invariante. Para ver esto último, basta probar que para todo compacto $K \in G/H$ se tiene $\xi(gK) = \xi(K)$, y utilizar la regularidad de ξ. Del teorema de representación de Riesz se sigue que para todo compacto $K \subset G/H$,

$$\xi(K) = \operatorname{ínf}\{\tilde{\lambda}(F) : K \prec F, F \in \mathscr{C}_c(G/H)\}.$$

Además, $gK = L_g(K) \subset G/H$ es compacto por ser L_g continua. De aquí se sigue que $\xi(gK) = \operatorname{ínf}\{\tilde{\lambda}(F) : gK \prec F, F \in \mathscr{C}_c(G/H)\}$. Por otro lado, $gK \prec F$ implica que $F(gg'H) = 1$ para cada $g'H \in K$, de modo que $F \circ L_g \prec K$. Además, $F \circ L_g \in \mathscr{C}_c(G/H)$. De aquí se sigue que

$$\xi(gK) = \operatorname{ínf}\{\tilde{\lambda}(F \circ L_g) : K \prec F \circ L_g, F \in \mathscr{C}_c(G/H)\}.$$

En particular, si vemos que $\tilde{\lambda}(F) = \tilde{\lambda}(F \circ L_g)$ para cada $g \in G$, habremos terminado. Fijando una inversa $\mathfrak{s}$ y desarrollando,

$$\tilde{\lambda}(F \circ L_g) \overset{(9)}{=} \int_G (\mathfrak{s}F) \circ l_g(g')\mathrm{d}\mu(g') = \int_G (\mathfrak{s}F)(g')\mathrm{d}(l_g)_*\mu(g') \overset{(10)}{=} \int_G (\mathfrak{s}F)(g')\mathrm{d}\mu(g') = \tilde{\lambda}(F).$$

En (10) hemos hecho un cambio de variable aplicándole el teorema 1.27 a l_g. Veamos la igualdad (9). Para ello, sea $\mathfrak{s}$ una inversa por la derecha cualquiera de $\mathfrak{d}$. Veamos que para toda $F \in \mathscr{C}_c(G/H)$ se tiene $((\mathfrak{s}F) \circ l_g)_H = F \circ L_g$. En efecto, para todos $g \in G, g'H \in G/H$ se tiene

$$((\mathfrak{s}F) \circ l_g)_H(g'H) = \int_H (\mathfrak{s}F) \circ l_g(g'h)\mathrm{d}\nu(h) = \int_H \mathfrak{s}F(gg'h)\mathrm{d}\nu(h) = (\mathfrak{s}F)_H(gg'H) = F \circ L_g(g'H).$$

Como $\tilde{\lambda}$ es independiente de la inversa elegida, puede elegirse la que envía $F \circ L_g$ en $(\mathfrak{s}F) \circ l_g$ (que ene general será distinta de la inversa $\mathfrak{s}$ originalmente fijada). Con esto, $\xi(gK) = \xi(K)$ para todos $g \in G$ y $K \subset G/H$ compacto. Notando que L_g es homeomorfismo y utilizando la regularidad de Borel de ξ, se conluye que es una medida G-invariante.

Lo único que falta por hacer es comprobar que esta medida es única. Suponemos para ello que ξ_1 y ξ_2 son dos medidas G-invariantes en el cociente (que no necesariamente cumplirán la igualdad (4.12)). Entonces existen medidas de Haar por la izquierda μ_1 y μ_2 en G para las que se cumple (4.12) con ξ_1 y ξ_2 respectivamente (porque el miembro derecho de (4.12) define un funcional de Haar por la izquierda para ξ_1 y ξ_2). Si son ambas medidas de Haar por la izquierda, por la unicidad, deben ser proporcionales para cierta constante positiva c, luego $\mu_2 = c\mu_1$. En ese caso, ξ_2 y $c\xi_1$ satisfacen ambas la expresión (4.12) para μ_2. Por la unicidad que se sigue del teorema de representación de Riesz, debe ser $\xi_2 = c\xi_1$. $\square$

Observación 4.24. Cuando G es compacto, H también (se trata de un cerrado). Puede tomarse entonces $\eta \equiv 1$ en la prueba de la afirmación 1, de modo que el funcional de Haar así construido es

$$\tilde{\lambda} : \mathscr{C}_c(G/H) \to \mathbb{R}, F \mapsto \int_G \frac{F(gH)}{1_H(gH)} \mathrm{d}\mu(g) = \frac{1}{\nu(H)} \int_G F(gH) \mathrm{d}\mu(g)$$

donde $1_H(gH) := \int_H 1 \mathrm{d}\nu(h) = \nu(H) < \infty$ por la compacidad. Además, la medida ξ asociada al funcional $\tilde{\lambda}$ puede calcularse evaluando en funciones características (ver [KL06, Th. 7.12]). Así, si $E \in \mathcal{B}(G/H)$, entonces

$$\xi(E) = \tilde{\lambda}(\chi_E) = \frac{\int_G \chi_E(gH) \mathrm{d}\mu(g)}{\nu(H)} = \frac{\mu(q^{-1}(E))}{\nu(H)}$$

y en particular, si G es compacto

$$\xi(G/H) = \frac{\mu(G)}{\nu(H)}.$$

CAPÍTULO 5

RETÍCULOS Y MEDIDA DE $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$

Como ya hemos comentado, la medida de Haar es útil en distintas ramas de las matemáticas. Una de ellas es el estudio de los grupos aritméticos, que son una clase especialmente relevante de grupos de Lie semisimples, y que son de utilidad en teoría de números. También aparecen en geometría diferencial, ya que son los grupos fundamentales de unos espacios llamados *localmente simétricos* [Mor15]. Aunque no entraremos a discutir estos temas, sí que sirven como motivación para estudiar este tipo de grupos. La idea de los grupos aritméticos es generalizar la idea de que $\mathbb{Z}$ constituye el conjunto de “puntos enteros” a contextos más generales. Así, podremos decir por ejemplo que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ es el conjunto de puntos enteros de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. No vamos a estudiar estos grupos de manera general, sino que vamos a centrarnos en un ejemplo concreto. Vamos a considerar $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \leq \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, donde $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$, y $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ el subgrupo de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ formado por las matrices de coeficientes enteros y determinante 1. Como detallaremos, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ tiene una medida de Haar, y como vamos a ver, esta medida induce una medida de Haar en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. Nuestro objetivo va a ser demostrar que la medida de este último es finita. Este capítulo utiliza técnicas y demostraciones de los textos [Gis18], [Mor15] y [EL23], aunque la exposición que presentamos no se ciñe exactamente a ninguna de las tres referencias, y combina ideas de todas ellas. En caso de consultarse [Gis18], debe tenerse en cuenta que algunas definiciones son ligeramente diferentes, pues se trabaja con el conjunto de clases a izquierdas $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

No vamos a dar un cálculo de la medida del conjunto cociente elegido, pues depende de las normalizaciones de las medidas de Haar elegidas en los diferentes espacios. Nos vamos a contentar con demostrar que la medida del cociente es finita, pues esto no depende de las normalizaciones elegidas; si la medida de un conjunto es finita con una normalización, cambiar de normalización solamente multiplica el valor de la medida por un número positivo, y no modifica su carácter finito o infinito. Para probar que la medida es finita, vamos a construir una descomposición de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ como producto de 3 espacios de matrices, que se denomina *descomposición de Iwasawa*. Utilizando esta descomposición, vamos a construir unos subconjuntos de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ llamados *dominios de Siegel*, que probaremos que tienen medida finita. Por último, relacionaremos la medida de estos conjuntos con la medida de todo el cociente, y deduciremos que la medida del cociente es finita.

Salvo que se indique expresamente lo contrario, denotaremos las matrices con letras mayúsculas, y sus componentes con la correspondiente letra minúscula. Es decir, si A denota una matriz, sus componentes serán a_{ij}. Solamente cuando esto pueda dar lugar a confusión cambiaremos el convenio, esto sucederá principalmente cuando la matriz se denote N, pues en ese caso n denota la dimensión del espacio con el que trabajamos. También nos saltaremos el convenio cuando consideremos entradas de matrices diagonales, que denotaremos a_i en lugar de a_{ii}

Los vectores de $\mathbb{R}^n$ serán vectores fila, y para escribirlos como vectores columna, escribiremos sus traspuestos. Además, denotamos $e_i := (0, 0, \ldots \overset{i}{1}, \ldots 0)$ los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots 0)$.

5.1. Retículos

Dedicamos esta primera sección a definir los conceptos con los que vamos a trabajar: los grupos de Lie (matriciales), y los retículos. Como iremos viendo, uno de los objetivos del capítulo será demostrar que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ es un retículo en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Definición 5.1. Un grupo de Lie G es un grupo topológico que además es una variedad diferenciable real para la que las operaciones $G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ y $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ son $\mathscr{C}^\infty$. Diremos que G es *simple* si no tiene subgrupos conexos normales no triviales.

En la práctica, vamos a estudiar casi siempre subgrupos de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ o $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, *dotados de la operación producto de matrices, no de la suma*, aunque damos la definición general por completitud. En cualquier caso, nada de lo que vamos a hacer en este capítulo precisa de la estructura diferenciable. De hecho, para todos nuestros propósitos, podemos tomar como definición que un grupo de Lie es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ o $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. El único ejemplo de grupo de Lie que vamos a considerar que no es un grupo matricial es $\mathbb{R}^n$, pero este sí, *dotado de la operación suma*. Esto es lo que suele llamarse *grupo de Lie matricial*. Es decir, ya no vamos a trabajar con grupos topológicos de Hausdorff localmente compactos cualesquiera, sino que vamos a trabajar con objetos más concretos, que van a ser subgrupos de el grupo general lineal. Es en estas condiciones que definimos el concepto de retículo.

Definición 5.2. Dado un grupo de Lie G, y $\Gamma \leq G$ un subgrupo. Diremos que Γ es un *retículo* o *red* (*lattice* en inglés) si Γ es discreto (en el sentido de que G induce sobre Γ la topología discreta) y G/Γ admite una medida G-invariante tal que tiene *covolumen* finito. Diremos también que Γ es *cocompacto* o *uniforme* si G/Γ es compacto.

Es decir, Γ será un retículo, si en G/Γ se puede construir una medida de Haar ξ tal que $\xi(G/\Gamma) < \infty$. Llamamos a $\xi(G/\Gamma)$, cuando es finito, covolumen de Γ. Observemos que si ξ es una medida de Haar en el cociente, entonces $\xi(g \cdot A) = \xi(A)$ para todo medible $A \in \mathcal{B}(G/\Gamma)$. Por otro lado, como vamos a considerar medidas en cocientes G/Γ, vamos a necesitar aplicar el teorema 4.23. Por consiguiente, nos interesa conocer la función modular en Γ. Como vamos a ver en el siguiente lema, todo grupo discreto es unimodular, de modo que la función modular va a ser idénticamente uno en ellos.

Lema 5.3. Sea Γ un grupo topológico discreto, entonces es unimodular.

Demostración. Sea μ la medida del conteo en Γ, que es una medida de Borel (recordemos que está bien definida en cualquier σ-álgebra, pero en caso de tener la topología discreta, $\mathcal{B}(\Gamma) = \mathcal{P}(\Gamma)$). Para ver que es regular, observemos que los compactos de Γ son los conjuntos finitos, cuya medida es finita y positiva. Además, como todo subconjunto de Γ es abierto, las regularidades interior y exterior son triviales. Finalmente, es obvio que μ es invariante a izquierda y derecha, pues $|\gamma \cdot E| = |E \cdot \gamma|$ para todos $E \subset \Gamma$, $\gamma \in \Gamma$. No hemos dado demasiados detalles en esta demostración, pues todos los razonamientos son esencialmente iguales a los que presentamos en el ejemplo 3.3. $\square$

Ejemplo 5.4. Consideremos el grupo de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$, en el que ya hemos visto que la medida de Lebesgue es una medida de Haar. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base, y consideremos $\Gamma = \{z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n : z_1, \ldots z_n \in \mathbb{Z}\}$, que es un subgrupo de $\mathbb{R}^n$. Dos puntos $x, y \in \Gamma$ diferentes cumplen que $||x - y|| \geq \min_{i=1}^n ||v_i|| > 0$ donde $|| \cdot ||$ es la norma euclídea usual, luego Γ es discreto. Concretamente, tomando $0 < \varepsilon < \min_{i=1}^n ||v_i||$, se sigue que $\{x\} = \Gamma \cap B(x, \varepsilon)$. Además, $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es homeomorfo a un n-toro, que es compacto, luego si λ' es la medida una medida de Haar en

$\mathbb{R}^n/\Gamma$, $\lambda'(\mathbb{R}^n/\Gamma) < \infty$, y Γ es verdaderamente un retículo. La justificación de que λ' existe pasa por observar que $\mathbb{R}^n$ es abeliano, y $\mathbb{Z}^n$ discreto (o también abeliano), luego $\Delta_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbb{Z}^n} \equiv \Delta_{\mathbb{Z}^n} \equiv 1$.

El ejemplo de $\mathbb{R}^n$ que acabamos de tratar tiene la particularidad de que permite visualizar muy bien la idea de que un retículo es un "conjunto discreto de puntos" de $\mathbb{R}^n$ que están generados al trasladar ciertos vectores linealmente independientes cantidades enteras de veces. La forma más clara de visualizar esto es ver $\mathbb{Z}^2$ dentro de $\mathbb{R}^2$. Vamos a introducir, en el contexto de este ejemplo, la idea de vector primitivo. La idea que trata de reproducir el concepto de vector primitivo se puede ver fácilmente considerando $\mathbb{Z}^2$ como retículo en $\mathbb{R}^2$. En ese ejemplo, $\mathbb{Z}^2$ es el conjunto de puntos de intersección de rectas verticales y horizontales paralelas a los ejes y separadas una unidad. Aquí, los vectores primitivos representan el mínimo desplazamiento que puede hacerse en una dirección concreta, acabando nuevamente en un punto de la red.

Definición 5.5. Sea W un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$, diremos que un vector $w \in W$ es *primitivo* si $\lambda w \notin W$ para $0 < \lambda < 1$.

Ejemplo 5.6. En el caso de $\mathbb{Z}^2$ visto como retículo de $\mathbb{R}^2$, es claro que el vector $(2,0) = 2e_1$ no es primitivo, pues $1/2 \cdot 2e_1 = e_1 \in \mathbb{Z}^2$. Por el contrario, e_1 sí que es un vector primitivo, pues $(\lambda, 0) \notin \mathbb{Z}^2$ cuando $0 < \lambda < 1$. Ahora bien, como $\mathbb{Z}^n$ es el conjunto de las $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales de $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$, uno podría pensar que esos son los únicos vectores primitivos, pero esto *no* es cierto. Por ejemplo, el vector $(1,1) \in \mathbb{Z}^n$ es primitivo, pues $(\lambda, \lambda) \notin \mathbb{Z}^2$ para $0 < \lambda < 1$. En la figura 5.1 vemos $\mathbb{Z}^2$ como retículo de $\mathbb{R}^2$, y vemos dibujados algunos de sus vectores primitivos.

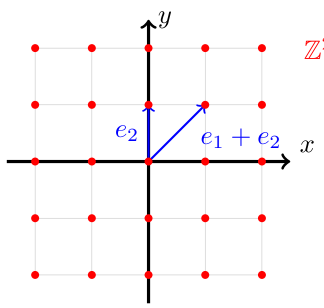

Figura 5.1: $\mathbb{Z}^2$ como retículo de $\mathbb{R}^2$ y algunos de sus vectores primitivos.

A partir del ejemplo anterior, podemos preguntarnos qué tienen en común todos los vectores primitivos de $\mathbb{Z}^2$. Es sencillo ver que en $\mathbb{Z}^2$, un vector (p,q) será primitivo si y solo si $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$. Todo vector de esta forma puede obtenerse multiplicando e_1^T por una matriz con coeficientes enteros de determinante 1. En efecto,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & a \\ q & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde pueden elegirse $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $p \cdot a - q \cdot b = 1$ a partir de la identidad de Bézout. A modo de recordatorio, la *identidad de Bézout* establece que si $p, q \in \mathbb{Z}$ y $d = \mathrm{mcd}(a,b)$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \cdot p + b \cdot q = d$. Ver, por ejemplo [DF04, Cap. 8].

Proposición 5.7. El conjunto de vectores primitivos de $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ está dado por $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})e_1^T$.

Demostración. Denotemos por $\mathfrak{P}$ el conjunto de vectores de $\mathbb{Z}^n$ primitivos, y veamos que $\mathfrak{P} = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})e_1^T$. En primer lugar, es obvio que $\mathfrak{P} \subset \mathbb{Z}^n$ porque si $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, entonces sus entradas son enteras, y Ae_1^T es la primera columna de A, que tiene componentes enteras. Comencemos viendo que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})e_1^T \subset \mathfrak{P}$ por reducción al absurdo. Si no fuera así, existiría $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ tal que $Ae_1^T = x_1 \notin \mathfrak{P}$. En ese caso, existe $0 < \lambda < 1$ con $\lambda x_1 \in \mathbb{Z}^n$. Como las entradas de x_1 son enteras, esto solo puede ocurrir si $\lambda = p/q$ con $p < q$ y $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 1$, y supondremos que la fracción ya es irreducible. Esto implica que q debe dividir a todas las entradas de x_1, luego $1/q \cdot x_1 \in \mathbb{Z}^n$. Ahora bien, eso quiere decir que $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ tiene una columna entera cuyas entradas son múltiplos de $q \neq 1$. En particular, su determinante es también múltiplo de q, luego tenemos contradicción. Para la contención recíproca [Sch60], razonamos por inducción. Para $n = 2$, el resultado es el comentario anterior. Suponiéndolo cierto para $n-1$, veámoslo para n. Sea $x = (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathfrak{P}$. Sea que $d = \mathrm{mcd}(a_1, \dots a_{n-1})$. Definiendo $b_i := a_i \cdot d^{-1}$, tenemos $a_i = d \cdot b_i$ para $i = 1, \dots n-1$. Por construcción, los b_i tienen máximo común divisor igual a 1. Por hipótesis de inducción, existe una matriz en $\mathrm{SL}(n-1,\mathbb{Z})$ cuya primera columna es $(b_1, \dots b_{n-1})^T$. Además, como $\mathrm{mcd}(a_n, d) = 1$ (en caso contrario, el máximo común divisor de los a_i no sería 1, y x no estaría en $\mathfrak{P}$), podemos aplicar la identidad de Bézout para concluir que existen $s, t \in \mathbb{Z}$ con $s \cdot a_n + t \cdot d = 1$. Eligiendo adecuadamente $e \in \{-1, +1\}$, la matriz siguiente es la buscada

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \cdot d & * & \cdots & * & e \cdot s \cdot b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} \cdot d & * & \cdots & * & e \cdot s \cdot b_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix},$$

donde la matriz B que garantiza que existe la hipótesis de inducción es

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & * \\ b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es, desarrollando por la última fila

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{n+1} a_n \cdot e \cdot s \cdot \det(B) + t(-1)^{2n} \cdot d \cdot \det(B) \\ &= \det(B) \cdot ((-1)^{n+1} e \cdot s \cdot a_n + t \cdot d) = (-1)^{n+1} e \cdot s \cdot a_n + t \cdot d = 1, \end{aligned}$$

eligiendo $e = +1$ si n es impar, y $e = -1$ si es par. □

5.2. Dominios de Siegel

Los dominios o conjuntos de Siegel son conjuntos introducidos inicialmente por el matemático alemán Carl Ludwig Siegel (1896-1981) en 1939 en el contexto de la reducción de formas cuadráticas, que a muy grandes rasgos consiste en buscar representaciones lo más sencillas posible de números enteros mediante formas cuadráticas. No vamos a entrar en más detalles, pues solamente vamos a "tomar prestado" el concepto de dominio de Siegel para nuestros propósitos. Como veremos, se trata de subconjuntos de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ que son útiles por dos motivos principales. El primero es que se puede calcular su medida con respecto a la medida de Haar en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ (que detallamos después) con relativa sencillez (nosotros vamos a probar que dicha medida es finita). El segundo es que, eligiéndolos adecuadamente, estos conjuntos tienen medida proporcional a la del cociente $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$.

Vamos a comenzar esta sección detallando una manera de descomponer matrices como producto de otras llamada *descomposición de Iwasawa*. Para ello, definamos los siguientes conjuntos de matrices:

$$\mathcal{K} = \mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) : A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n\},$$

$$\mathcal{A} := \{\mathrm{diag}(a_1, \dots a_n) : \prod_{i=1}^{n} a_i = 1, a_i > 0 \text{ para } i = 1, \dots n\}, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{N} = \{N = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) : u_{ii} = 1, \text{ para } i = 1, \dots n \text{ y } u_{ij} = 0 \text{ para } i > j\}. \tag{5.2}$$

Es decir, $\mathcal{K}$ es el conjunto de las matrices ortogonales de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ (suele denotarse $\mathrm{SO}(n)$, no confundir con $\mathrm{O}(n)$, que es conjunto de matrices ortogonales a los que no se les pide que tengan determinante 1), y $\mathcal{N}$ el conjunto de las matrices triangulares superiores con unos en la diagonal. Es claro que los 3 son subconjuntos de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathcal{K}$ por definición, y los otros dos porque sus elementos tienen determinante unidad.

Observación 5.8. Los 3 conjuntos anteriores son subgrupos de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, lo cual se sigue de propiedades conocidas de las matrices, como por ejemplo que el producto y la inversa de matrices ortogonales vuelven a ser ortogonales, o lo análogo para las triangulares con unos en la diagonales, y las diagonales de determinante 1. Además, $\mathcal{A}$ es unimodular porque es abeliano (ver ejemplo 4.16).

Lema 5.9. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{K}\times\mathcal{A}\times\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \\ & (K,A,N) & \to & K\cdot A\cdot N \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. En primer lugar, en $\mathcal{K}\times\mathcal{A}\times\mathcal{N}$ se considera la topología producto obtenida a partir de la de subespacio de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Φ obviamente tiene llegada en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ porque los 3 conjuntos están contenidos en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Por otro lado, la continuidad de Φ se sigue de que el producto de matrices en $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ es una aplicación continua. Para probar que se trata de un homeomorfismo, vamos a construir explícitamente su inversa. Para ello, vamos a utilizar el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt (ver [MS06, págs. i-3.7]). Sea $S\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, y denotemos $x_1,x_2,\dots x_n\in\mathbb{R}^n$ sus columnas, que constituyen una base de $\mathbb{R}^n$ porque $\det(S)=1\neq 0$. Tal y como establece el procedimiento de Gram-Schmidt, se puede obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ a partir de esta del siguiente modo: se comienza definiendo $y_1:=x_1/\|x_1\|$, y recursivamente se definen

$$y_i:=\frac{x_i-\sum_{j=1}^{i-1}\langle x_i,y_j\rangle y_j}{\|x_i-\sum_{j=1}^{i-1}\langle x_i,y_j\rangle y_j\|}\qquad i=2,3,\dots n.$$

En el teorema de Gram-Schmidt se prueba también que $\langle x_1,x_2,\dots x_i\rangle=\langle y_1,y_2,\dots y_i\rangle$ para cada $1\le i\le n$ [MS06, pág. 113]. Denotemos $\mathcal{B}:=\{e_1,e_2,\dots e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una única matriz K tal que $Ky_i^T=e_i^T$ para $1\le i\le n$. Esto se sigue de que existe una única aplicación lineal que envía una base en otra, siendo K la matriz de dicha aplicación lineal en $\mathcal{B}$. En principio, el hecho de que K transforme una base ortonormal en otra, solamente nos asegura que es una matriz ortogonal, y podría tener determinante -1. Ahora bien, observando que

$$KS=K(y_1^T,y_2^T,\dots y_n^T)=(e_1^T,e_2^T,\dots e_n^T)=I_n,$$

se sigue que $\det(KS)=\det(K)\det(S)=\det(I_n)$, y como $\det(S)=\det(I_n)=1$, debe ser $\det(K)=1$, de modo que $K\in\mathcal{K}$. Sea entonces $\tilde{y}_i:=x_i-\sum_{j=1}^{i-1}\langle x_i,y_j\rangle y_j$. Es obvio que $y_i=\tilde{y}_i/\|\tilde{y}_i\|$. De este modo,

$$K\tilde{y}_i^T=K(\|\tilde{y}_i\|\cdot y_i^T)=\|\tilde{y}_i\|\cdot e_i^T.$$

Definimos entonces $A:=\mathrm{diag}(\|\tilde{y}_1\|,\|\tilde{y}_2\|,\dots\|\tilde{y}_n\|)$. Es claro entonces que $K\tilde{y}_i=Ae_i^T$. Del teorema de Gram-Schmidt se sigue que $y_i\in\langle x_1,x_2,\dots x_i\rangle$ para $1\le i\le n$. Por tanto,

$$S^{-1}\tilde{y}_i^T=S^{-1}\left(x_i^T-\sum_{j=1}^{i-1}\langle x_i,y_j\rangle y_j^T\right)\in S^{-1}(x_i+\langle x_1,\dots x_{i-1}\rangle)=e_i+\langle e_1,\dots,e_{i-1}\rangle,$$

donde hemos utilizado que $S=(x_1^T,\dots x_n^T)$, luego $S^{-1}x_j^T=e_j^T$, $1\le j\le n$. Por consiguiente, debe ser $S^{-1}\tilde{y}_i^T=(a_1,a_2,\dots,a_{i-1},1,0,\dots 0)^T$ para ciertos $a_1,\dots a_{i-1}\in\mathbb{R}$. En particular, se puede escribir

$$S^{-1}\tilde{y}_i^T=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{i-1}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{i-1} & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=N_ie_i^T,$$

donde $N_i \in \mathcal{N}$. Sea $N = (S^{-1}y_1^T, S^{-1}y_2^{-1}, \dots S^{-1}y_n^T)$. Es decir, N es la matriz obtenida al generalizar la idea anterior completando todas las columnas. Sigue siendo cierto que $Ne_i^T = S^{-1}\tilde{y}_i^T$ para $1 \leq i \leq n$, y $N \in \mathcal{N}$. Por consiguiente,

$$N^{-1}S^{-1}\tilde{y}_i^T = e_i^T = A^{-1}K\tilde{y}_i^T \qquad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dadas dos aplicaciones lineales que coinciden sobre todos los elementos de una base, entonces coinciden, de modo que debe ser $N^{-1}S^{-1} = A^{-1}K$, y reorganizando, $S = K^{-1}AN^{-1}$, y como los determinantes de todas las matrices en la expresión anterior salvo quizás A valen 1, debe ser $\det(A) = 1$, luego $A \in \mathcal{A}$. Por último, $K^{-1} \in \mathcal{K}$, y $N^{-1} \in \mathcal{N}$ porque $\mathcal{N}$ y $\mathcal{K}$ son subgrupos de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Se puede definir entonces $\Phi^{-1}(S) = (K^{-1}, A, N^{-1})$, y es evidente que es la inversa de Φ. Falta comprobar que es continua, pero esto se sigue de manera inmediata del hecho de que todos los coeficientes de estas matrices se obtienen de sumas y productos de los de S, sin haber posibilidad de dividir en ningún momento por 0. □

Obsérvese que de este resultado se desprende que toda matriz de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ puede escribirse de manera única como producto de 3 matrices en los conjuntos $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{N}$. En particular, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{K} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{N}$. Dada $S \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, la escritura única de S como el producto $K \cdot A \cdot N$ se denomina *descomposición de Iwasawa* de S. Esta descomposición puede extenderse a grupos de Lie conexos semisimples (para más detalles, ver [Kna02, Sec. 6.3]). Este resultado permite además escribir la integral de funciones $f \in \mathscr{C}_c(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}))$ a partir de la integral iterada en los espacios $\mathcal{K}, \mathcal{A}$ y $\mathcal{N}$. Con algo más de detalle, denotemos α, ν, ρ las medidas de Haar en $\mathcal{A}, \mathcal{N}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente. Recordemos que para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{N}$, ya dimos explícitamente sus medidas en el ejemplo 3.22. Con respecto a $\mathcal{K}$, simplemente afirmamos que existe una medida de Haar, pues se trata de un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff. Se puede dar una construcción explícita de la medida de Haar en $\mathcal{K} = \mathrm{SO}(n)$ pero no vamos a utilizarla explícitamente y ya hemos dado ejemplos de medidas de Haar en grupos topológicos, así que no vamos a detallarla. El hecho de que no vayamos a necesitar explicitar esta medida se debe fundamentalmente a que $\mathcal{K}$ es compacto, tal y como mostramos en la proposición 5.10. Esto hace que, sea cual sea la correspondiente medida de Haar en $\mathcal{K}$, la medida del propio $\mathcal{K}$ sea finita. Cabe destacar también que si se ven los grupos anteriores como grupos de Lie, entonces Φ no sólo es un homeomorfismo, sino que también es un difeomorfismo.

Para la construcción de la medida de Haar en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, recurrimos a la proposición siguiente, que nos muestra cómo calcular la integral de las funciones de soporte compacto en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Es decir, caracteriza la medida de Haar en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Fijémonos además en que el lema 5.9 prueba también que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{K} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{N}$, no sólo que haya un homemorfismo entre $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ y el producto cartesiano. De hecho, también es cierto que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{K} \cdot \mathcal{N} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{N} \cdot \mathcal{K} = \mathcal{N} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{K}$ (ver [Mor15, Ej. 7.1.5]). Además, sabemos que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff (de hecho unimodular), de modo que tiene una medida de Haar μ. Esta medida de Haar queda caracterizada de acuerdo a la proposición 1.29.

Lema 5.10. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el grupo $\mathrm{SO}(n) = \mathcal{K}$ es compacto para la topología de subespacio de $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$.

Demostración. Comencemos observando que en la sección 2.3, vimos que $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ puede verse como un espacio topológico cuya topología proviene de la norma de Frobenius. Como además tiene dimensión finita, todas las normas son equivalentes, y un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Si $K \in \mathrm{SO}(n)$, entonces $KK^T = I_n$, luego las columnas de K forman una base ortonormal. En particular, si x es una de sus columnas $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Podemos acotar $|k_i| \leq 1$, luego $\|K\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |k_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2} = n$. Por consiguiente, $\mathrm{SO}(n)$ es acotado. Para ver que es cerrado, observemos que las aplicaciones $\beta : \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbb{R}), (A) \mapsto (AA^T)$, y $\det : \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ son todas continuas. Como

$$\mathrm{SO}(n) = \det{}^{-1}(\{1\}) \cap \beta^{-1}(\{I_n\})$$

es intersección finita de cerrados, es cerrado. Así, es cerrado y acotado, luego compacto. □

Corolario 5.11. Con las notaciones anteriores, $\rho(\mathcal{K}) < \infty$.

Demostración. Esto es una consecuencia directa de la compacidad de $\mathcal{K}$, y de que la medida de Haar de cualquier compacto es siempre finita por definición de medida regular. □

Proposición 5.12. Sean ρ, α y ν las medidas de Haar en $\mathcal{K}, \mathcal{A}$ y $\mathcal{N}$ descritas en el párrafo anterior, y sea $\vartheta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, A \mapsto \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j}$. Entonces, $\vartheta(A) \cdot \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\nu$ es una medida de Haar por la izquierda y por la derecha en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Demostración. Esta demostración se basa en los resultados de [BM00, Cap. V]. En primer lugar, denotamos $\mathcal{Z} := \mathcal{AN}$, que es el subgrupo de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ formado por las matrices triangulares superiores con entradas diagonales estrictamente positivas. Una medida de Haar por la derecha en $\mathcal{AN}$ queda definida por $\mathrm{d}\eta := \vartheta(A) \cdot \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\nu$. Para ver esta afirmación, comenzamos definiendo el automorfismo de N dado por $\mathrm{Ad}(A) : \mathcal{N} \to \mathcal{N}, N \mapsto ANA^{-1}$. Si lo vemos como una transformación de $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, lo cual tiene sentido porque la medida de Haar en $\mathcal{N}$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (ver 3.22-3), entonces el determinante jacobiano de la transformación está dado por $\det(\mathrm{Ad}(A)) = \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} = \vartheta(A)$. Así,

$$\mathrm{Ad}(A)N = ANA^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & u_{12}a_1 & \dots & u_{1n}a_1 \\ 0 & a_2 & \dots & u_{2n}a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \cdot \frac{a_1}{a_2} & \dots & u_{1n} \cdot \frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \cdot \frac{a_2}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

De hecho, si denotamos E_{ij} la matriz de $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ que tiene un 1 en la posición (i, j) y ceros en todas las demás, tenemos la igualdad $\mathrm{Ad}(A)N = I_n + \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{a_i}{a_j} \cdot u_{ij} \cdot E_{ij}$. De aquí, es obvio que $\det(\mathrm{Ad}(A)) = \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j}$.

Puede comprobarse entonces que $\mathrm{d}\eta = \vartheta(A)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\nu$ es una medida de Haar por la derecha comprobando que su funcional asociado es un funcional de Haar por la derecha (proposición 4.11). En efecto, si $f \in \mathscr{C}_c(\mathcal{Z})$ y $A_0N_0 \in \mathcal{AN}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{N}} f(ANA_0N_0)\vartheta(A)\mathrm{d}\nu(N)\mathrm{d}\alpha(A) &= \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{N}} f(AA_0A_0^{-1}NA_0N_0)\vartheta(A)\mathrm{d}\nu(N)\mathrm{d}\alpha(A) \\
&= \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{N}} f(AA_0 \cdot (\mathrm{Ad}(A_0^{-1})N) \cdot N_0)\vartheta(A)\mathrm{d}\alpha(A)\mathrm{d}\nu(N) \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{N}} f(A' \cdot (\mathrm{Ad}(A_0^{-1})N) \cdot N_0)\vartheta(A_0^{-1}A')\mathrm{d}\nu(N)\mathrm{d}\alpha(A') \\
&\overset{(2)}{=} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{N}'} f(A'N'N_0)\vartheta(A_0)\vartheta(A_0^{-1}A')\mathrm{d}\nu(N')\mathrm{d}\alpha(A) \\
&\overset{(3)}{=} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{N}} f(A'N')\vartheta(A')\mathrm{d}\nu(N')\mathrm{d}\alpha(A').
\end{aligned}$$

En (1) hemos hecho un cambio de variable $A' = AA_0$, que podemos ver en $\mathbb{R}^{n-1}_{>0}$ (ver ejemplo 3.22-2) mediante $\varphi(A') := A'A_0^{-1}$. Obviamente, $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}A_0$, y $|\det \mathcal{J}\varphi| = (\prod_{i=1}^{n-1} a_{0,i})^{-1}$. Con esto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} f(AA_0 \cdot (\mathrm{Ad}(A_0^{-1})N) \cdot N_0)\vartheta(A)\mathrm{d}\alpha(A) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{>0}} f(AA_0 \cdot (\mathrm{Ad}(A_0^{-1})N) \cdot N_0)\vartheta(A) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}a_i}{a_i} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{>0}} f(A'(\mathrm{Ad}(A_0^{-1})N) \cdot N_0)\vartheta(A'A_0^{-1}) \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} a_{0,i}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_{0,i} \cdot \mathrm{d}a'_i}{a'_i} \\
&= \int_{\mathcal{A}} f(A'A_0 \cdot (\mathrm{Ad}(A_0^{-1})N) \cdot N_0)\vartheta(A'A_0^{-1})\mathrm{d}\alpha(A').
\end{aligned}$$

En (2) hemos hecho el cambio de variable dado por $N' = \mathrm{Ad}(A_0^{-1})N$ (visto en $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$), hemos utilizado el difeomorfismo $\varphi(N') = \mathrm{Ad}(A_0)N'$), cuyo jacobiano es justamente $\vartheta(A_0)$. Nótese que $\mathrm{Ad}(A_0)\mathcal{N} = \mathcal{N}$. En (3) hemos utilizado que $\vartheta : A \to \mathbb{R}_{>0}$ es un homomorfismo de grupos, pues $\vartheta(AA') = \prod_{i<j} \frac{a_i \cdot a_i'}{a_j \cdot a_j'} = \left(\prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j}\right) \cdot \left(\prod_{i<j} \frac{a_i'}{a_j'}\right) = \vartheta(A) \cdot \vartheta(A')$.

Por último, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ puede identificarse con $\mathcal{KAN} = \mathcal{KZ}$ vía la descomposición de Iwasawa, y es un grupo unimodular (ver proposición 4.18). Sea μ una medida de Haar por la izquierda en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, entonces también es de Haar por la derecha. La aplicación $\Psi : \mathcal{K}\times\mathcal{Z} \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), (K,B) \mapsto K \cdot B$ es un homeomorfismo (esto se sigue de que Φ lo sea). Consideremos entonces la medida μ' en $\mathcal{K} \times \mathcal{Z}$ definida por $\mu'(E) := \mu(\Psi(E))$ para $E \in \mathcal{B}(\mathcal{K} \times \mathcal{Z})$ (nótese que esta definición puede darse porque Ψ es un homeomorfismo, y que $\Psi_*\mu' = \mu$). Por ser μ de Haar por la derecha y por la izquierda, μ' es invariante por la izquierda bajo $\mathcal{K}$, y por la derecha bajo $\mathcal{Z}$. En efecto, dado $K \in \mathcal{K}$, se tiene

$$\mu'(E) = \mu(\Psi(E)) = \mu(K \cdot \Psi(E)) = \mu(\Psi(K \cdot E)) = \mu'(K \cdot E),$$

y lo mismo para la invarianza por la derecha. Por otro lado, ρ es de Haar por la izquierda y la derecha porque $\mathcal{K}$ es compacto, luego unimodular, y hemos comprobado que η es de Haar por la derecha. Aplicando entonces la proposición 3.21, $\rho \times \eta$ es una medida de Haar por la derecha en $\mathcal{K} \times \mathcal{B}$. Por consiguiente, salvo multiplicar por un escalar positivo, μ' debe ser la medida producto $\rho \times \eta$. En particular, $\mu = C \cdot \Psi_*(\rho \times \eta)$ para $C > 0$. Como C no es relevante para nuestros propósitos, vamos a elegir la medida en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ de manera que $C = 1$.

$\square$

Observación 5.13. Técnicamente, esto quiere decir que si $f \in L^1(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}))$, su integral en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ debe calcularse del siguiente modo

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})} f(S)\mathrm{d}\mu(S) &= \int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})} f(S)\mathrm{d}(\Psi_*(\rho \times \eta))(S) = \int_{\mathcal{K}}\int_{\mathcal{AN}} (f \circ \Psi)(K,B)\mathrm{d}\eta(B)\mathrm{d}\rho(K) \\ &= \int_{\mathcal{K}}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{N}} f(KAN)\vartheta(A)\mathrm{d}\nu(N)\mathrm{d}\alpha(A)\mathrm{d}\rho(K) \\ &= \int_{\mathcal{K}}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{N}} f(KAN) \cdot \left(\prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j}\right) \mathrm{d}\nu(N)\mathrm{d}\alpha(A)\mathrm{d}\rho(K).\end{aligned}$$

Con esto, volvemos a los conjuntos de la descomposición de Iwasawa, y definimos, para $t > 0, \lambda > 0$ los conjuntos siguientes

$$\mathcal{A}_t := \left\{A \in \mathcal{A} : \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq t \text{ para } i = 1, \dots n-1\right\}$$

y

$$\mathcal{N}_\lambda := \{N = (n_{ij})_{1,\leq i,j \leq n} \in \mathcal{N} : |n_{ij}| \leq \lambda \text{ para } i,j = 1,\dots n,\ i \neq j\}. \tag{5.3}$$

Definición 5.14. Un *dominio de Siegel* en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es un conjunto $\mathfrak{S}_{t,\lambda}$ de la forma

$$\mathfrak{S}_{t,\lambda} = \mathcal{K}\mathcal{A}_t\mathcal{N}_\lambda.$$

Estos conjuntos siempre tienen medida finita con respecto a cualquier medida de Haar en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ como detallaremos en el teorema 5.19. Es además inmediato que $\mathfrak{S}_{t,\lambda} \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Observemos que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es unimodular, luego toda medida de Haar por la derecha lo es por la izquierda, y además, como la medida de Haar es única salvo multiplicación por escalares no nulos, si la medida de $\mathfrak{S}_{t,\lambda}$ es finita para una normalización, entonces lo es para todas las demás. Como vamos a ver, hay ciertas elecciones de los parámetros t y λ que permiten recuperar todo $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ a partir de productos de matrices en el dominio de Siegel y matrices en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. Concretamente, probaremos en el teorema 5.18 que $\mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ para todos $t \geq 2/\sqrt{3}$ y $\lambda \geq 1/2$. Para probar este resultado, comenzamos probando los dos lemas siguientes.

Lema 5.15. Sea $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}} := \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \cap \mathcal{N}$. Entonces $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{1/2}\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Dada $N \in \mathcal{N}$, buscamos $L \in N_{1/2}$, y $\tilde{Z} \in \mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$ tales que $N = L\tilde{Z}$. Esto equivale a buscar $Z \in \mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$ tal que $NZ \in \mathcal{N}_{1/2}$ sin más que tomar después $\tilde{Z} = Z^{-1}$. Probamos esta segunda afirmación. Para que $NZ \in \mathcal{N}_{1/2}$, hemos de ver que $|(NZ)_{ij}| \leq 1/2$, en principio para todos $1 \leq i, j \leq n$, sin embargo, como $\mathcal{N}$ es un grupo, y todos sus elementos son triangulares superiores con unos en la diagonal (ver (5.2)), bastará verlo para $j > i$. Denotamos u_{ij} los elementos de N. Observemos que

$$(NZ)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}z_{kj} = z_{ij} + u_{i,i+1}z_{i+1,j} + u_{i,i+2}z_{i+2,j} + \ldots + u_{ij}.$$

En la segunda igualdad, se ha utilizado que N es triangular superior y que $n_i = 1$, y que la matriz Z buscada debe satisfacer lo mismo. Además, buscamos $z_{ij} \in \mathbb{Z}$. La idea es buscarlos recursivamente. Por ejemplo, se comienza eligiendo un $z_{12} \in \mathbb{Z}$ tal que $|z_{12} + u_{12}| \leq 1/2$ (tiene que existir porque cualquier número real dista de un número entero a lo sumo $1/2$). Análogamente se eligen los elementos sobre la diagonal, es decir, los de la forma $z_{i,i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. De este modo, una vez se han elegido todos los elementos de la forma $z_{i,i+j}$ para $1 \leq i \leq n-j$ para $1 \leq j \leq k$ para cierto $k \leq n-1$ (es decir, se han obtenido las k diagonales por encima de la diagonal principal), se eligen los de la forma $z_{i,i+k+1}$ para $1 \leq i \leq n-(k+1)$ (es decir, los de la diagonal $k+1$ por encima de la principal) imponiendo que

$$|z_{i,i+k+1} + (u_{i,i+1} \cdot z_{i+1,i+k+1} + u_{i,i+2} \cdot z_{i+2,i+k+1} + \ldots + u_{i,i+k+1})| \leq \frac{1}{2}.$$

Esto define (no necesariamente de manera única) $Z \in \mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$ que cumple lo buscado. Observemos que los elementos n_{ij} se suponen conocidos. Por otro lado, los $z_{i+1,i+k+1}, z_{i+2,i+k+1}, \ldots$ ya se han calculado porque están en las diagonales más cercanas a la principal. □

Observación 5.16. Hemos dado el enunciado para el caso $\lambda = 1/2$, pero realmente, el único momento en que hemos necesitado que λ fuera $1/2$ ha sido al afirmar que todo número real dista de uno entero una distancia menor o igual que $1/2$. Ahora bien, esto sigue siendo cierto cuando $\lambda \geq 1/2$, de modo que en ese caso, también es cierto que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\lambda}\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$. Esto será relevante en uno de los resultados que probaremos después.

Lema 5.17. Sea $G \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ con descomposición de Iwasawa $G = KAN$. Supongamos que $\|Ge_1^T\| \leq \|Ge_2^T\|$. Entonces $a_{11}/a_{22} \leq 2/\sqrt{3}$.

Demostración. Comenzamos observando que $\|D\tilde{N}e_1^T\| = \|De_1^T\|$ para todos $D \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, y $\tilde{N} \in \mathcal{N}$, esto se sigue de que $\tilde{N}e_1^T = e_1^T$ porque $\tilde{n}_{11} = 1$. Gracias a esto, y al lema 5.15, podemos suponer que $|u_{ij}| \leq 1/2$ para todo $i < j$. Esto se debe a que dado $N \in \mathcal{N}$, podemos escribir $N = LZ$ con $L \in \mathcal{N}_{1/2}$ y $Z \in \mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$. Entonces, utilizando la descomposición de G

$$\|Ge_1^T\| = \|KANe_1^T\| = \|KALZe_1^T\| = \|KALe_1^T\|,$$

donde $L \in \mathcal{N}_{1/2}$ y utilizando que $Z \in \mathcal{N}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{N}$. Con esto, desarrollamos para obtener

$$\|Ge_1^T\| = \|(KAN)e_1^T\| \overset{(1)}{=} \|ANe_1^T\| \overset{(2)}{=} \|Ae_1^T\| = a_{11}.$$

En (1) hemos utilizado que $K \in \mathrm{SO}(n)$ implica que conserva la norma, y en (2) la observación inicial. Notemos además que $Ne_2^T = e_2^T + u_{12}e_1^T$ (ver (5.2)). Aplicando la hipótesis,

$$a_{11}^2 = \|Ge_1^T\|^2 \leq \|Ge_2^T\|^2 = \|KANe_2^T\|^2 = \|A(e_2^T + u_{12}e_1^T)\|^2 = a_{22}^2 + u_{12}^2 a_{11}^2 \leq \frac{a_{11}^2}{4} + a_{22}^2$$

por tanto $a_{11}^2(1 - 1/4) \leq a_{22}^2$, y esto implica $a_{11}/a_{22} \leq 2/\sqrt{3}$. □

Con estos lemas probados, ya estamos en condiciones de enunciar y probar el teorema buscado.

Teorema 5.18. $\mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ para todos $t \geq 2/\sqrt{3}$ y $\lambda \geq 1/2$.

Demostración. Razonemos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es trivial, porque $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{1\} = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ y $\mathfrak{S}_{t,\lambda} = \{1\}$ también, pues de nuevo $\mathcal{K} = \mathcal{A} = \mathcal{N} = \{1\}$. Para $n > 1$, asumimos el resultado cierto para $n-1$. Comencemos observando que la contención $\mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es trivial, luego la prueba se reduce a probar la contención contraria, y esto consiste en probar que dada $G \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, podemos escribirla como producto de una matriz en $\mathfrak{S}_{t,\lambda}$ y otra en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. Fijando $G \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, definimos

$$\begin{array}{rccc} \Phi_G: & \mathbb{R}^n\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \\ & v & \mapsto & \Phi_G(v) := \|Gv^T\|. \end{array}$$

Nótese que tiene llegada en $\mathbb{R}_{>0}$ porque G es invertible, de modo que $Gv^T \neq \mathbf{0}^T$. Veamos que Φ_G alcanza un mínimo (no necesariamente único) cuando se restringe a $\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$. Para ver esto, comencemos observando que $G\mathbb{Z}^n$ es una red. Esto se sigue del ejemplo 5.4, notando que $G\mathbb{Z}^n$ es el conjunto de las $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales de los vectores del conjunto $\{Ge_1^T, Ge_2^T, \ldots Ge_n^T\}$, que constituyen una base porque G es invertible. Veamos que esto implica que se alcanza un mínimo en $\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$. Para ello, consideremos la aplicación $v^T \mapsto Gv^T$, que es un homeomorfismo. Por consiguiente, existe $k_1 > 0$ tal que $k_1\|v\| \leq \Phi_G(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, luego en particular, para $v \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ (es un resultado estándar de análisis funcional, ver [Kes23, Prop. 2.3.1]). Fijemos $M > \Phi_G(e_1)$. Entonces existe $r > 1$ tal que para $v \notin \bar{B}(0,r) \cap \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$, $\Phi_G(v) > M$. Además, $\bar{B}(0,r) \cap \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ es un conjunto finito y no vacío, luego Φ_G alcanza un mínimo en él, que es mínimo absoluto. Sea $v_0 \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ un punto en que se alcanza el mínimo. Este vector debe ser primitivo por ser un mínimo. Esta última afirmación es evidente, pues si v_0 no fuera primitivo, entonces existiría $\lambda > 0$ con $\lambda v_0 \in G\mathbb{Z}^n$. Ahora bien, en ese caso,

$$\Phi_G(\lambda v_0) = \|G(\lambda v_0)^T\| = |\lambda| \cdot \|Gv_0^T\| = |\lambda| \cdot \Phi_G(v_0) < \Phi_G(v_0)$$

y v_0 no sería un mínimo. Por otro lado, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})e_1$ es el conjunto de vectores primitivos de $\mathbb{Z}^n$ (ver proposición 5.7), de modo que existe $\Lambda \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ tal que $\Lambda e_1 = v_0$. Definamos $G' := G\Lambda$. Entonces, para cada $v \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ se tiene

$$\|G'e_1^T\| = \|G\Lambda e_i^T\| = \|Gv_0^T\| \leq \|G\Lambda v^T\| = \|G'v^T\|$$

porque $\Phi_G(v_0) \leq \Phi_G(w)$ para todo $w \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$. Vamos a hacer ahora una serie de observaciones que nos van a permitir reducir la prueba de que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ a una serie de afirmaciones más simples.

1. Si encontramos $\Lambda' \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ tal que $G'\Lambda' \in \mathfrak{S}_{t,\lambda}$, habremos terminado, pues en ese caso, $G\Lambda\Lambda' \in \mathfrak{S}_{t,\lambda}$ implica que $G \in \mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, ($(\Lambda\Lambda')^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$) de donde $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$.

2. Escribamos la descomposición de Iwasawa de G' como $G' = K'A'N'$. Definamos $H := A'N'$. Es suficiente con encontrar $\Lambda' \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ tal que $H\Lambda' \in \mathfrak{S}_{t,\lambda}$. Esto se debe a que si $H\Lambda' \in \mathfrak{S}_{t,\lambda}$, entonces $K'H\Lambda' = G'\Lambda' \in K' \cdot \mathfrak{S}_{t,\lambda} = \mathfrak{S}_{t,\lambda}$ (ver definición 5.14).

3. Es suficiente con encontrar $\Lambda' \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ tal que $H\Lambda' \in \mathcal{K}\mathcal{A}_t\mathcal{N}$. En efecto, esto se sigue de la observación 5.16, (pues aquí fijamos $\lambda \geq 1/2$) y si $H\Lambda' \in \mathcal{K}\mathcal{A}_t\mathcal{N} = \mathcal{K}\mathcal{A}\mathcal{N}_\lambda\mathcal{N}_\mathbb{Z}$, entonces $H\Lambda'Z \in \mathcal{K}\mathcal{A}_t\mathcal{N}_\lambda = \mathfrak{S}_{t,\lambda}$ para algún $Z \in \mathcal{N}_\mathbb{Z}$. En particular, puede elegirse como Λ' la matriz $\Lambda'Z \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$.

Nos centramos entonces en probar esta última afirmación. Para ello, observemos que, sin más que calcular el producto de matrices

$$H = A'N' = \begin{pmatrix} a_1' & * & * & \ldots & * \\ 0 & a_2' & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & a_3' & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' & * \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

donde $*$ denota elementos obtenidos obtenidos al hacer el producto de matrices (no son relevantes), y M es la submatriz triangular superior obtenida de H al eliminar la primera fila y la primera columna. Nuevamente denotamos a_i' en lugar de a_i' los elementos diagonales de A'. Se tiene además, $\det(M) = \prod_{i=2}^{n} a_i' = {}^1/_{a_1'} > 0$ utilizando la definición de $\mathcal{A}$ (5.1). Si tomamos $\beta > 0$ con $\beta^{n-1} = \det(M)$, entonces $M' := \beta^{-1}M \in \mathrm{SL}(n-1,\mathbb{R})$, pues $\det(M') = \beta^{-(n-1)}\det(M) = 1$. Utilizamos ahora la hipótesis de inducción. Denotando $\mathfrak{S}_{t,\lambda}'$ al correspondiente dominio de Siegel de dimensión $n-1$ (pero definido como en 5.14, y con $t \geq {}^2/_{\sqrt{3}}, \lambda \geq {}^1/_2$), existe $\Lambda'' \in \mathrm{SL}(n-1,\mathbb{Z})$ tal que $M'\Lambda'' \in \mathfrak{S}_{t,\lambda}$. Definimos entonces

$$\Lambda' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda'' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}),$$

pues Λ' claramente tiene entradas enteras y $\det(\Lambda') = 1 \cdot \det(\Lambda'') = 1 \cdot 1$ desarrollando por la primera fila. Además, se tiene

$$H\Lambda' = \begin{pmatrix} a_1' & * \\ 0 & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' & * \\ 0 & \beta\ M'\Lambda'' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}).$$

Para ver que realmente $H\Lambda' \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, observemos que $\det(H\Lambda') = a_1'\beta^{n-1}\det(M')\det(\Lambda'') = a_1'\beta^{n-1} = a_1'\prod_{i=2}^{n} a_i' = 1$. Además, $M'\Lambda'' \in \mathrm{SL}(n-1,\mathbb{R})$ (es producto de matrices de determinante 1), luego admite una descomposición de Iwasawa. Denotémosla $K''A''N''$ observemos que en ese caso, desarrollando el producto de matrices,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K'' \end{pmatrix}}_{K} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & \beta A'' \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & (a_1')^{-1}\cdot * \\ 0 & N'' \end{pmatrix}}_{N} = \begin{pmatrix} a_1' & * \\ 0 & \beta M'\Lambda'' \end{pmatrix} = H\Lambda',$$

donde hemos definido K, A y N como en la expresión anterior, y $*$ denota la fila de elementos de H. Notemos que esto define una descomposición de Iwasawa de $H\Lambda'$. En efecto, es inmediato que $K \in \mathrm{SO}(n)$ a partir de $K'' \in \mathrm{SO}(n-1)$. Además, A es diagonal por serlo A'', y el producto de sus elementos diagonales es

$$a_1' \cdot \beta^{n-1} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i''\right) = a_1' \cdot \prod_{i=2}^{n} a_i' = \prod_{i=1}^{n} a_i' = 1.$$

Por último, N es triangular superior con unos en la diagonal porque N'' tiene esta propiedad. Denotemos por a_i las entradas diagonales de A, esto es

$$a_1 = a_1' \ \text{ y } \ a_i = \beta a_i' \ \text{ para } \ 2 \leq i \leq n.$$

Por hipótesis de inducción, sabemos que para $2 \leq i \leq n-1$ se tiene ${}^{a_i}/_{a_{i+1}} \leq {}^2/_{\sqrt{3}}$. Para concluir que $A \in \mathcal{A}_t$, veamos que también se tiene ${}^{a_1}/_{a_2} \leq {}^2/_{\sqrt{3}}$. Notemos que $\Lambda' e_1^T = e_1^T$, de modo que

$$\|H\Lambda' e_1^T\| = \|He_1^T\| = \|A'N'e_1^T\| = \|K'A'N'e_1^T\| = \|G'e_1^T\| \leq \|G'v^T\| = \|K'Hv^T\| = \|Hv^T\|$$

para cada $v \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$. En la desigualdad hemos utilizado lo probado al principio de la demostración. En particular, se tiene $\|H\Lambda' e_1^T\| \leq \|H\Lambda' v^T\|$ para todo $v \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$, pues $v \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\} \Leftrightarrow \Lambda' v \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ y como su descomposición de Iwasawa es $H\Lambda' = KAN$, el lema 5.17 asegura que ${}^{a_1}/_{a_2} \leq {}^2/_{\sqrt{3}}$. Por tanto, hemos probado que existe $\Lambda' \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ tal que $H\Lambda' \in \mathcal{K}\mathcal{A}_t\mathcal{N}$, como queríamos comprobar. □

Se tiene además que la medida de los conjuntos de Siegel con respecto de la medida de Haar es finito. Antes de probar este resaludo, necesitamos probar que, salvo introducir un nuevo factor en la integral, se puede cambiar el orden de integración. Esto se hace por cuestión de conveniencia, pues permite aplicar después un cambio de variable.

Proposición 5.19. Sea μ una medida de Haar en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, entonces $\mu(\mathfrak{S}_{t,\lambda}) < \infty$.

Demostración. Utilizamos la proposición 5.12 y consideramos $f = \chi_{\mathfrak{S}_{t,\lambda}}$.

$$\begin{aligned}
\mu(\mathfrak{S}_{t,\lambda}) &= \int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})} \chi_{\mathfrak{S}_{t,\lambda}}(S)\mathrm{d}\mu(S) = \int_{\mathcal{K}}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{N}} \chi_{\mathfrak{S}_{t,\lambda}}(KAN)\prod_{i<j}\frac{a_i}{a_j}\mathrm{d}\nu(N)\mathrm{d}\alpha(A)\mathrm{d}\rho(K) \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\mathcal{K}}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{N}} \chi_{\mathcal{N}_\lambda}(N)\chi_{\mathcal{A}_t}(A)\chi_{\mathcal{K}}(K)\prod_{i<j}\frac{a_i}{a_j}\mathrm{d}\nu(N)d\rho(K)d\alpha(A) \\
&= \mu(\mathcal{K})\cdot\left[\int_{\mathcal{N}}\chi_{\mathcal{N}_\lambda}(N)\prod_{1\le l<m\le n}du_{lm}\right]\cdot\left[\int_{\mathcal{A}}\chi_{\mathcal{A}_t}(A)\prod_{i<j}\frac{a_i}{a_j}d\alpha(A)\right] \\
&= \mu(\mathcal{K})\cdot\left[\int_{|u_{ij}|\le\lambda}\prod_{1\le l<m\le n}du_{lm}\right]\cdot\left[\int_{\frac{a_i}{a_{i+1}}\le t}\prod_{i<j}\frac{a_i}{a_j}\prod_{r=1}^{n-1}\frac{da_{rr}}{a_{rr}}\right],
\end{aligned}$$

utilizando en (1) que $\chi_{\mathfrak{S}_{t,\lambda}}(KAN) = \chi_{\mathcal{K}}(K)\cdot\chi_{\mathcal{A}_t}(A)\cdot\chi_{\mathcal{N}_\lambda}(N)$ porque la descomposición es única. Por el corolario 5.11, sabemos que $\mu(\mathcal{K}) < \infty$. Además,

$$\int_{|u_{ij}|\le\lambda}\prod_{1\le l<m\le n}du_{lm} = \prod_{1\le l<m\le n}\int_{|u_{lm}|<\lambda}du_{lm} = \prod_{1\le l<m\le n}u_{lm}|_{-\lambda}^{\lambda} = \prod_{1\le l<m\le n}2\lambda < \infty,$$

de modo que basta ver que el tercer factor es también finito. Hemos utilizado el ejemplo 3.22 para pasar a una integral en $\mathbb{R}^{n-1}$. Puesto que así escrita, es una integral en $\mathbb{R}^{n-1}$, podemos aplicar el teorema del cambio de variable usual 1.25. Definimos $b_i := \frac{a_i}{a_{i+1}}$ para $1 \le i \le n-1$. Vamos a comenzar comprobando que se tiene la igualdad siguiente

$$\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} = \prod_{i<j}\frac{a_i}{a_j}.$$

Para ello, vamos a desarrollar ambas expresiones y vamos a ver que coinciden.

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{n-1}\frac{a_i}{a_j} &= \left(\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_1}{a_3}\cdots\frac{a_1}{a_n}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_2}{a_4}\cdots\frac{a_2}{a_n}\right)\cdots\left(\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)\cdot\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \\
&= \frac{a_1^{n-1}\cdot a_2^{n-2}\cdot a_3^{n-3}\cdots a_i^{n-i}\cdots a_{n-2}^2\cdot a_{n-1}}{a_2\cdot a_3^2\cdot a_4^3\cdots a_i^{i-1}\cdots a_n^{n-1}} = a_1^{n-1}\cdot a_2^{n-3}\cdots a_i^{n-2i+1}\cdots a_n^{1-n},
\end{aligned}$$

utilizando en el último paso que $a_i^{n-i}/a_i^{i-1} = a_i^{n-2i+1}$. Por otro lado, desarrollando el miembro derecho obtenemos

$$\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{i(n-i)} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{3(n-3)}\cdots\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} = a_1^{n-1}\cdot a_2^{n-3}\cdots a_{n-1}^{-1-n}\cdot a_n^{1-n},$$

utilizando que al agrupar términos en a_i, el exponente correspondiente es $i(n-i)-(i-1)(n-(i-1)) = in-i^2-(i-1)n+(i-1)^2 = n-i^2+i^2-2i+1 = n-2i+1$, y vemos que es el mismo exponente que en el caso anterior. Puesto que vamos a aplicar el teorema del cambio de variables 1.25, calculamos la matriz jacobiana de la aplicación que envía $\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}$. Para ello, observemos que

$$\frac{\partial b_i}{\partial a_j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j\ne i, i+1 \\ {}^{1}/_{a_{i+1}} & \text{si} \quad j=i, \text{ para } 1\le i\le n-2 \\ -{}^{a_i}/_{a_{i+1}^2} & \text{si} \quad j=i+1, \text{ para } 1\le i\le n-2 \\ {}^{2a_{n-1}}/_{\prod_{i=1}^{n-2}a_i^{-1}} & \text{si} \quad i=j=n-1, \end{cases}$$

donde hemos utilizado que en $\mathcal{A}$ se tiene la relación $a_n = \prod_{i=1}^{n-1}a_i^{-1}$ (ver (5.1)). Podemos calcular el determinante teniendo en cuenta que se trata de una matriz triangular. Así, el determinante de la aplicación es

$$\det\left(\frac{\partial b_i}{\partial a_j}\right)_{1\le i,j\le n-1} = \left(\prod_{i=2}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)\cdot\left(2a_{n-1}\cdot\prod_{i=1}^{n-2}a_i\right) = 2a_1.$$

Por lo tanto, denotando

$$\mathscr{A} := \{(a_1,\dots a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}_{>0} : a_i/a_{i+1} \leq t \text{ para } 1 \leq i \leq n-1 \text{ y } a_{n-1}/\prod_{i=1}^{n-2} a_i^{-1} \leq t\},$$

y $\mathscr{B} := \{(b_1,\dots b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq b_i \leq t \text{ para } 1 \leq i \leq n-1\}$, se tiene,

$$\int_{\mathscr{A}} \prod_{i<j} \frac{a_i}{a_j} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{da_r}{a_r} = \int_{\mathscr{B}} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i(n-i)} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} b_i a_{i+1}} \frac{1}{2a_1} \prod_{i=1}^{n-1} db_i = \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^t b_i^{i(n-i)-1} db_i < \infty. \tag{5.4}$$

Hemos utilizado que $a_i = b_i a_{i+1}$, y que $\prod_{i=2}^n a_i^{-1} 2^{-1} a_1^{-1} = 2^{-1} \prod_{i=1}^n a_i^{-1} = 1/2$. Además, $i(n-i)-1 \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, de modo que cada integral es finita. Se concluye así que $\mu(\mathfrak{S}_{t,\lambda}) < \infty$. □

Para nuestros propósitos, es suficiente con probar que la medida de este conjunto es finita, y no estamos particularmente interesados en su valor concreto. En [Gis18, Th. 4.3.1], sí que se proporciona un cálculo exacto, y de hecho, después se utiliza para dar un cálculo exacto de la medida de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$.

5.3. Medida de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$

Dedicamos esta última sección a probar que la medida del cociente $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es finita con respecto a la medida $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-invariante ξ obtenida del teorema 4.23. Con algo más de detalle, denotamos μ la medida de Haar en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ y ν la medida en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, que va a ser proporcional a la medida del conteo porque $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es discreto (ver la proposición 5.20 más abajo). De hecho, vamos a elegir la normalización para que coincida con la medida del conteo. Puesto que tanto $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ como $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ son unimodulares, puede aplicarse el teorema 4.23 para concluir que existe la medida ξ para la cual

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})} f(g)\mathrm{d}\mu(g) &= \int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})} \left[\int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})} f(g\gamma)\nu(\gamma)\right] \mathrm{d}\xi(g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})) \\ &= \int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})} \left[\sum_{\gamma\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})} f(g\gamma)\right] \mathrm{d}\xi(g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})).\end{aligned}$$

Es esta medida ξ con respecto de la cual vamos a probar que el cociente tiene medida finita. Es decir, vamos a probar que $\xi(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})) = \int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})} 1\mathrm{d}\xi(g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})) < \infty$. Saltándonos la convención indicada al principio del tema, vamos a denotar matrices con letras minúsculas. Este cambio de notación se debe, por un lado, a que no vamos a necesitar hacer referencia explícita a las componentes de ninguna matriz, y por otro, a no sobrecargar la notación cuando denotemos clases de equivalencia en el cociente.

Proposición 5.20. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ induce la topología discreta en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. Es decir, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es un espacio discreto.

Demostración. Basta ver que todo conjunto unipuntual de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es abierto para la topología de subespacio. Notemos que la topología de subespacio que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ hereda de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es la misma que hereda de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ (ver, por ejemplo [Mun00, pág. 91, ejercicio 1]), luego trabajemos con la topología heredada de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, que como ya hemos discutido, es la topología métrica para la norma de Frobenius. Dado entonces $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, sea $\epsilon < 1$. Veamos que $B(A,\epsilon) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) = \{A\}$ (lo cual implicará que $\{A\}$ es abierto en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$). Supongamos entonces que existiera $B \neq A$, $B \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \cap B(A,\epsilon)$, entonces

$$\epsilon \geq \|A-B\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|} \overset{(1)}{\geq} \sqrt{1} = 1$$

y tenemos contradicción. La desigualdad (1) se debe a que si $A \neq B$, entonces existen $1 \leq i_0, j_0 \leq n$ con $a_{i_0 j_0} \neq b_{i_0 j_0}$, y como ambos son enteros, debe ser $|a_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_0}| \geq 1$. □

Dicho esto, vamos a probar un resultado de carácter general, que permite obtener la medida que cualquier conjunto medible Borel a partir de una integral en el grupo cociente.

Lema 5.21. Sea G un grupo topológico de Haussdorff y localmente compacto que cumple el segundo axioma de numerabilidad, y sea Γ un subgrupo discreto de G equipado con la medida del conteo, que denotamos ν. Supongamos también que $(\Delta_G)|_\Gamma \equiv \Delta_\Gamma$. Sea ξ la medida en G/Γ definida en 4.23. Entonces para cada $A \in \mathcal{B}(G)$, con $\mu(A) < \infty$ se tiene

$$\mu(A) = \int_{G/\Gamma} |A \cap g\Gamma| \, \mathrm{d}\xi(g\Gamma).$$

Demostración. Comenzamos observando que si $\mu(A) < \infty$, entonces $\int_G |\chi_A(g)| dg = \mu(A) < \infty$, de modo que $\chi_A \in L^1(G)$, y se le puede aplicar la expresión del teorema 4.23 a la correspondiente medida ξ (ver el comentario bajo el teorema 4.23). A partir de aquí, se deduce que

$$\mu(A) = \int_G \chi_A(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_{G/\Gamma} \left[\int_\Gamma \chi_A(g\gamma)\mathrm{d}\mu(\gamma) \right] \mathrm{d}\xi(g\Gamma) = \int_{G/\Gamma} \left[\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_A(g\gamma) \right] \mathrm{d}\xi(g\Gamma).$$

En la segunda igualdad se ha utilizado que la medida en Γ es la del conteo. Veamos que $|A \cap g\Gamma| = \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_A(g\gamma)$. Observemos para ello que $\chi_A(g\gamma) = 1 \Leftrightarrow g\gamma \in A$. Es decir, en la suma del miembro derecho, hay tantos unos como $\gamma \in \Gamma$ para los cuales $g\gamma \in A$, y eso es justamente $|A \cap g\Gamma|$. $\square$

Teorema 5.22. Sea ξ la medida en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ ya descrita. Entonces $\xi(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})) < \infty$. En particular, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es un retículo en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

Demostración. En primer lugar, del teorema 5.18, se sigue que $\mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ para t, λ adecuadamente elegidos. Por otro lado, hemos probado en 5.19 que $\mu(\mathfrak{S}_{t,\lambda}) < \infty$. Podemos utilizar entonces el lema 5.21 como sigue

$$\begin{aligned} \xi(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})) &= \int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})} 1\mathrm{d}\xi(g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})) \leq \int_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})} |\mathfrak{S}_{t,\lambda} \cap g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})|\mathrm{d}\xi(g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})) \\ &= \mu(\mathfrak{S}_{t,\lambda}) < \infty. \end{aligned}$$

Hemos utilizado que $1 \leq |\mathfrak{S}_{t,\lambda} \cap g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})|$ para todo $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Esto se sigue de 5.18. Obviamente, para ver la desigualdad es suficiente con comprobar que dicha intersección no es nula, ahora bien, como $\mathfrak{S}_{t,\lambda}\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, dado $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, existen $A \in \mathfrak{S}_{t,\lambda}, M \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ con $AM = g$, luego $A = gM^{-1}$ con $M^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. En particular, $A \in \mathfrak{S}_{t,\lambda} \cap g\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, y la intersección es no vacía. $\square$

Este es un caso particular de un resultado más general, probado por Borel y Harish-Chandra (ver [BH62]) que establece que si $\mathbf{G} \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ es un grupo algebraico semisimple sobre $\mathbb{Q}$, entonces el cociente $\mathbf{G}_\mathbb{R}/\mathbf{G}_\mathbb{Z}$ tiene medida de Haar finita. No vamos a entrar a discutir esto en mayor profundidad, pues la demostración se vuelve bastante extensa, y no hemos definido lo que es un grupo algebraico. En cualquier caso, la demostración de ese resultado generaliza las técnicas que hemos desarrollado aquí.

Por otro lado, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ es un ejemplo interesante, pues no es compacto, tal y como se demuestra en [EL23, Sec. 5], pero aun así tiene medida finita.

Conclusiones

La noción de medida de Haar, así como los teoremas de existencia y unicidad son resultados relativamente asentados, que se llevan conociendo desde la segunda mitad del siglo pasado. Se trata de un concepto con multitud de aplicaciones prácticas en el ámbito de las matemáticas puras, e incluso en física, pero es un tema relativamente avanzado, y es por ello que no hay muchas referencias bibliográficas que puedan resultar fácilmente comprensibles para aquellos que no sean versados en el tema. Por consiguiente, este trabajo ha tratado de presentar una exposición detallada, a la par que accesible y autocontenida de los resultados principales de existencia y unicidad de la medida de Haar, y la medida G-invariante en un espacio cociente. El último capítulo ha mostrado, también con tantos detalles como ha sido posible, un ejemplo concreto de cálculo de la medida G-invariante en un conjunto. De nuevo, se trata de un tema relativamente avanzado para el que no hay demasiada literatura destinada a un público principiante, y es por ello que se ha tratado de presentar una exposición clara y detallada.

En cualquier caso, este trabajo puede servir como texto introductorio para aquellos que, teniendo los conocimientos básicos que se adquieren en un grado en matemáticas, quieran aprender las bases de la medida de Haar y consultar algunos ejemplos desarrollados en detalle.

Finalmente, una posibilidad para continuar este trabajo en un futuro sería investigar sobre las aplicaciones de medida de Haar en física, tanto en lo que respecta a la integración de grupos de Lie, que es un tema bastante estudiado, como en lo que se refiere a su uso en computación cuántica, que es una disciplina algo más reciente, y que ha sido foco de los esfuerzos de muchas investigaciones en la última década.

ÍNDICE ALFABÉTICO.

ÍNDICE DE NOTACIONES.

A^c complementario del conjunto A

τ topología en un espacio topológico

$\sigma(E)$ σ-álgebra de X generada por una familia de subconjuntos $E \subset \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{B}(X)$ σ-álgebra de Borel de un espacio topológico X

$f \circ g$ composición de las funciones f y g

μ medida

μ^* medida exterior

$X \backslash A$ complementario del conjunto A

$\mathcal{P}(X)$ partes de un conjunto X

$|A|$ cardinal de un conjunto A

$H \leq G$ H es un subgrupo de G

$N \lhd G$ N es un subgrupo normal de G

$B \backslash A$ diferencia de conjuntos

$\mathrm{Int}(V)$ Interior topológico del subespacio V

$\mathbb{R}_{>0}$ números reales estrictamente positivos

$\mathbb{R}^*$ números reales distintos de 0

$\mathbb{C}^*$ números complejos distintos de 0

$\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ conjunto de matrices $n \times n$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ grupo general lineal

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con determinante positivo

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con determinante igual a 1

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con determinante igual a 1 y con coeficientes enteros

$\mathscr{C}_c(X)$ funciones continuas de $X \to \mathbb{R}$ con soporte compacto

$\overline{H}$ adherencia de un subespacio

ψ aplicación que envía dos elementos en su producto

i aplicación que envía un elemento en su inverso

$\operatorname{sgn}(a)$ signo de a

$\chi_E(x)$ función indicatriz del conjunto E

$\sqcup$ unión disjunta

S_n grupo cíclico de orden n

I_n matriz identidad de dimensión n

δ_{jm} δ de Kronecker de índices j, m

$\sigma(\Omega)$ σ-álgebra generada por Ω

$\operatorname{sop}(f)$ soporte de a función f

$K \prec f$ f es idénticamente 1 en K

$f \prec U$ el soporte compacto de f está contenido en U

λ_G representación regular por la izquierda de G en $\mathscr{C}_c(G)$

ϱ_G representación regular por la derecha de G en $\mathscr{C}_c(G)$

G/H conjunto de clases a izquierda de G dotado de la topología cociente

$B(x, \varepsilon)$ bola en $\mathbb{R}^n$ centrada en x y de radio $\varepsilon > 0$

$|| \cdot ||$ norma euclídea usual

$\operatorname{mcd}(a, b)$ máximo común divisor de a y b

$\mathcal{K}$ $\{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) : A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n\}$

$\mathcal{A}$ $\{\operatorname{diag}(a_1, \dots a_n) : \prod_{i=1}^n a_i = 1, a_i > 0$ para $i = 1, \dots n\}$

$\mathcal{N}$ $\{N = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) : u_{ii} = 1,$ para $i = 1, \dots n$ y $u_{ij} = 0$ para $i > j\}$

$\langle x_1, x_2, \dots x_i \rangle$ subespacio vectorial generado por el conjunto $\{x_1, x_2, \dots x_i\}$

REFERENCIAS.

[AA22a] A. Adhikari y M.R. Adhikari. *Basic Topology 1: Metric Spaces and General Topology*. Springer, 2022. ISBN: 9789811665103.

[AA22b] A. Adhikari y M.R. Adhikari. *Basic Topology 2: Topological Groups, Topology of Manifolds and Lie Groups*. Springer Nature Singapore, 2022. ISBN: 9789811665769.

[AB81] C.D. Aliprantis y O. Burkinshaw. *Principles of Real Analysis*. North Holland, 1981. ISBN: 9780444004482.

[BH62] A. Borel y Harish-Chandra. "Arithmetic Subgroups of Algebraic Groups". En: *Annals of Mathematics* 75.3 (1962), págs. 485-535. ISSN: 0003486X, 19398980. URL: http://www.jstor.org/stable/1970210 (visitado 02-06-2025).

[BM00] M. B. Bekka y M. Mayer. *Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2000.

[Bou90] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. v. 1-4. Masson, 1990. ISBN: 9782225819100.

[Coh13] D.L. Cohn. *Measure Theory: Second Edition*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Springer New York, 2013. ISBN: 9781461469568.

[Dav21] B. Davvaz. *A First Course in Group Theory*. Springer Nature Singapore, 2021. ISBN: 9789811663659.

[DF04] D. S. Dummit y R. M. Foote. *Abstract Algebra*. III. Singapore ; John Wiley & Sons, 2004. ISBN: 9780471452348.

[EL23] R. J. Miatello E. A. Laurent y B. Linowitz. *Introducción a los grupos aritméticos*. 2023. URL: https://pmu.uy/pmu18/pmu18-0165.pdf.

[Fol13] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013. ISBN: 9781118626399.

[Fou] Simons Foundation. *Hilbert's Problems: 23 and Math*. Visitado el 07/05/2025. URL: https://www.simonsfoundation.org/2020/05/06/hilberts-problems-23-and-math/.

[Fre06] D.H. Fremlin. *Measure theory. 4. Topological measure spaces : Pt. 1*. Measure Theory v. 1;v. 4. Torres Fremlin, 2006. ISBN: 9780953812943.

[Gis18] P. Gisele Teixeira. "On geometry of Siegel sets for lattices in SLn". Tesis doct. Rio de Janeiro-RJ, Brazil: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2018. URL: https://w3.impa.br/~mbel/tese/GiseleTeixeiraPaula-Tese-2018.pdf.

[Gle10] J. Gleason. "Existence and uniqueness of Haar measure". En: *preprint* (2010).

[HR94] E. Hewitt y K.A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis: Volume I Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer New York, 1994. ISBN: 9780387941905.

[Kes23] S. Kesavan. *Functional analysis*. eng. 2nd ed. 2023. Texts and Readings in Mathematics, 52. Singapore: Springer, 2023. ISBN: 981-19-7633-3.

[KL06] A. Knightly y C. Li. *Traces of Hecke Operators*. Mathematical surveys and monographs v. 10. American Mathematical Society, 2006. ISBN: 9780821837399.

[Kna02] A. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction, Second edition*. Vol. 140. Ene. de 2002. ISBN: 978-1-4757-2455-4. DOI: 10.1007/978-1-4757-2453-0.

[Lan05] S. Lang. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005. ISBN: 9780387953854.

[Mel24] A. A. Mele. "Introduction to Haar Measure Tools in Quantum Information: A Beginner's Tutorial". En: *Quantum* 8 (mayo de 2024), pág. 1340. ISSN: 2521-327X. DOI: 10.22331/q-2024-05-08-1340. URL: http://dx.doi.org/10.22331/q-2024-05-08-1340.

[Mor15] D. W. Morris. *Introduction to Arithmetic Groups*. 2015. arXiv: math/0106063 [math.DG]. URL: https://arxiv.org/abs/math/0106063.

[MS06] L. M. Merino González y E. Santos Aláez. *Álgebra lineal con métodos elementales*. spa. Madrid: Thomson, 2006. ISBN: 84-9732-481-1.

[Mun00] J. R. Munkres. *Topology*. 2.ª ed. Prentice Hall, Inc., ene. de 2000. ISBN: 0131816292.

[Nac76] L. Nachbin. *The Haar Integral*. University series in higher mathematics. R. E. Krieger Publishing Company, 1976. ISBN: 9780882753744.

[Rud86] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, mayo de 1986. ISBN: 0070542341. URL: http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20%5C&path=ASIN/0070542341.

[Sch60] E. Schenkman. "The Basis Theorem for Finitely Generated Abelian Groups". En: *American Mathematical Monthly* 67 (1960), pág. 770. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123212578.

[Str09] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Fourth. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2009. ISBN: 9780961408848.

[Tao] T. Tao. *The structure of locally compact groups, and Hilbert's fifth problem*. Visitado el 07/05/2025. URL: https://terrytao.wordpress.com/tag/hilberts-fifth-problem/.

[Tao13] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2013. ISBN: 9781470409227.

[Tor20] S. Tornier. *Haar Measures*. 2020. arXiv: 2006.10956 [math.GR]. URL: https://arxiv.org/abs/2006.10956.

[Wei65] A. Weil. *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications*. fre. 2éme ed. Actualités scientifiques et industrielles ; 1145. París: Hermann, 1965.

[Zúñ22] W. Zúñiga-Galindo. "p-Adic analysis: A quick introduction". En: *p-Adic Analysis, Arithmetic and Singularities*. Ed. por Carlos Galindo et al. Vol. 778. Contemporary Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2022. DOI: 10.1090/conm/778. URL: https://doi.org/10.1090/conm/778.