



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Aproximación asintótica de integrales

Autor: Paula Martínez Morais

Tutor: Javier Sanz Gil

Curso 2024-2025

Índice general

Resumen	3
Abstract	4
Introducción	5
1. Desarrollos asintóticos	7
1.1. Relaciones de orden	8
1.2. Desarrollos asintóticos	11
1.3. Un primer ejemplo: la integral exponencial	12
1.4. Propiedades de las series de potencias asintóticas	14
1.5. Desarrollos asintóticos generalizados	26
1.6. Truncamiento óptimo de los desarrollos asintóticos	27
2. Desarrollos asintóticos de integrales del tipo Laplace	31
2.1. Lema de Watson	31
2.1.1. Resultados preliminares	31
2.1.2. Lema de Watson para funciones definidas en \mathbb{R}_+	37
2.1.3. Lema de Watson para funciones definidas en sectores de corona no acotados	44
2.2. Integrales con estructuras más generales	50
2.2.1. Transformaciones a la forma estándar	51
2.3. Cálculo de los coeficientes	52
2.3.1. Método de inversión	54
2.3.2. Otros métodos de cálculo	56
3. Método de Laplace y sus aplicaciones	58
3.1. El método de Laplace	58
3.1.1. Primer caso: $h'(\alpha) \neq 0$	59
3.1.2. Segundo caso: $h'(\alpha) = 0$	61
3.1.3. Caso general	65
3.2. Aplicaciones	68
3.2.1. Función de Bessel modificada	68
3.2.2. Función Gamma	70
4. Método de mayor descenso	72

4.1. Resultados preliminares	72
4.2. Descripción del método	81
4.3. Ejemplo: la integral de Airy	84
Apéndice A. Transformada de Laplace	89
Apéndice B. Función gamma	91
B.1. Función Gamma de Euler	91
B.2. Función gamma incompleta y la función error	92
B.3. Integral exponencial	92
Apéndice C. Códigos de Matlab y enlaces de las figuras hechas con Geogebra	94

Resumen

Este trabajo explora los desarrollos asintóticos y su aplicación en la evaluación aproximada de integrales paramétricas. Se hace un breve repaso de las relaciones de orden entre funciones, que sirven de base para la presentación de los desarrollos asintóticos. El primer método que se introduce es el lema de Watson, fundamental para el cálculo de los desarrollos de las integrales de tipo Laplace. A continuación, se estudia el método de Laplace en distintos escenarios, considerando diversas hipótesis sobre la integral de partida. Finalmente, se estudian los puntos de silla y las direcciones de ascenso y descenso de las funciones complejas, lo que permite entender en detalle el método de mayor descenso. Cada uno de estos procedimientos vienen acompañados de ejemplos ilustrativos que destacan la potencia de los desarrollos asintóticos y cada uno de los métodos descritos.

Palabras clave: Desarrollos asintóticos, funciones especiales, integrales paramétricas, lema de Watson, método de Laplace, método de mayor descenso.

Abstract

This project explores asymptotic expansions and their application in the approximate evaluation of parametric integrals. Starting from a brief review of the order relations between functions, the basis of the asymptotic expansions are shown. The first method is known as Watson's lemma, elementary for the computation of the expansions of Laplace-type integrals. Moreover, the Laplace method is studied in assorted scenarios, considering manifold hypotheses about the main integral. Finally, for a detailed understanding of the steepest descent method, the theory of saddle points and the directions of ascent and descent of complex functions is studied. Those methodologies are followed by illustrative examples that highlight the power of asymptotic expansions.

Keywords: Asymptotic expansions, special functions, parametric integrals, Watson's lemma, Laplace method, steepest descent method.

Introducción

En el Análisis Matemático clásico, las series funcionales, en particular las series de potencias desempeñan un papel esencial para desarrollar teorías tan relevantes como los desarrollos de Taylor o de Laurent. Un estudio muy común es identificar los dominios de convergencia de cada una de estas series y cómo de fuerte es esta convergencia: uniforme, absoluta, incondicional, normal, etc. Con este estudio se pretende dar una representación local, sencilla y cómoda, que permite además la evaluación aproximada de estas funciones. En cambio, el análisis de las aproximaciones que proporcionan las series no convergentes se descarta desde el principio. En este trabajo, nos centraremos precisamente en el estudio del concepto de desarrollo asintótico de estas funciones que da un significado analítico a las series de potencias divergentes, proporcionando aproximaciones útiles a pesar de la falta de convergencia.

Los desarrollos asintóticos o series de Poincaré son series funcionales reales o complejas con la propiedad de que si escogemos correctamente el número de términos que queremos sumar, las aproximaciones que nos proporciona es razonablemente buena para la función que se está analizando. Esta propiedad, igual que en el caso clásico, es local; esto es, podemos conseguir una buena aproximación de la evaluación de una función siempre que este valor se encuentre suficientemente cerca del punto en el que se ha hecho el estudio.

El primer matemático que formuló este problema desde un punto de vista riguroso fue H. Poincaré en 1886, que trabajó con el tipo más común de desarrollos asintóticos, los dados por series de potencias formales, con exponentes bien positivos (en torno a 0) o negativos (en torno a infinito). Los métodos que abordaremos en este trabajo son el lema de Watson que viene de la mano de la integración por partes reiterada y los métodos de Laplace y de mayor descenso.

El hecho de que la convergencia de la serie no juegue un papel relevante, hace que podamos ampliar el abanico de funciones que podemos aproximar. En particular, esta técnica de aproximación es especialmente útil en la frontera de los dominios de definición, o en el punto del infinito en el caso de dominios no acotados. En particular, la metodología más común es trabajar en sectores de corona no acotados.

Muchas de las funciones candidatas a ser aproximadas mediante estas técnicas novedosas son las denominadas como funciones especiales; funciones matemáticas que tienen una gran relevancia en el Análisis Matemático, Funcional o aplicaciones a la Física. En particular, dentro de estas funciones especiales, se trabaja con funciones definidas mediante una integral paramétrica, como las funciones Gamma de Euler o las de Bessel.

El hilo conductor que seguiremos es el siguiente: comenzaremos analizando las relaciones de orden, consultando el texto de F. W. J. Olver [8], para luego definir los desarrollos asintóticos y sus propiedades fundamentales. En segundo lugar, con ayuda de los textos [8] y de R. Wong [13], probaremos el lema de Watson. Asimismo, describiremos uno de los métodos más generales para el cálculo de los coeficientes del desarrollo asintótico de la mano de N. M. Temme [11]. En tercer lugar, abordaremos el método de Laplace bajo distintas hipótesis, lo que nos llevará a considerar varios ejemplos abordados, tal como se expone en los textos de E. T. Copson [3], J. D. Murray [7] y [13]. Finalmente, estudiaremos el método de mayor descenso además de ilustrarlo con un ejemplo minucioso, con referencia al libro de N. Bleistein y R. A. Handelsman [2].

A lo largo del trabajo se incluyen numerosas figuras elaboradas con el programa *GeoGebra*. Todas ellas están citadas en el apéndice C, junto con los códigos correspondientes a las gráficas y tablas generadas con *Matlab*. Cada una de estas referencias cuenta con un hipervínculo que dirige a la página donde se encuentra cada figura, lo que facilita su visualización y, en algunos casos, permite manipularlas de manera interactiva.

Capítulo 1

Desarrollos asintóticos

En este primer capítulo, introduciremos los conceptos fundamentales del análisis asintótico. Para poder aproximar una función, lo primero que debemos fijar es el criterio con el que vamos a comparar estas funciones. Por lo tanto, empezaremos introduciendo unos conceptos básicos de la relación de orden entre funciones, las cuáles serán la base sobre la que se construirá todo el trabajo siguiente. En segundo lugar, presentaremos los desarrollos asintóticos. Además de la definición, enunciaremos y probaremos las propiedades principales que cumplen. Por último, a través de un ejemplo, ilustraremos el motivo que respalda el desempeño de este estudio. Los principales textos que hemos seguido en este capítulo son [8] y [11].

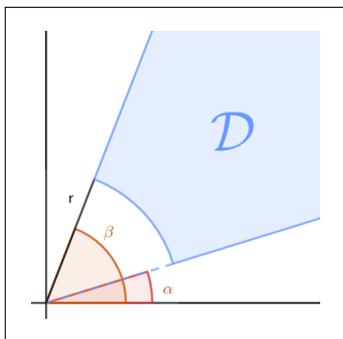
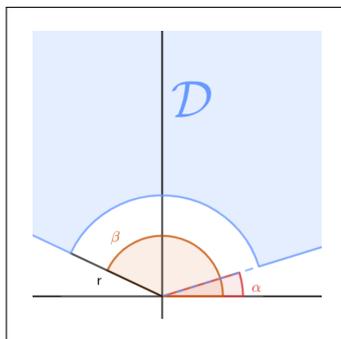
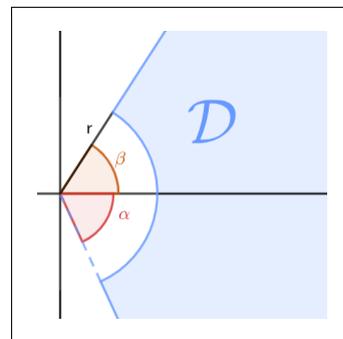
Antes de todo, presentaremos los conjuntos en los que estarán definidas las funciones que estudiaremos. Lo primero que debemos tener en cuenta es que para poder comparar y aproximar una función f con respecto a otra función g , ambas funciones deben estar definidas en un mismo conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. El punto en el que queremos llevar a cabo el análisis asintótico lo llamaremos z_0 el cual será un punto de acumulación de \mathcal{D} . En general, las funciones con las que vamos a comparar el comportamiento asintótico de f son funciones que cumplen que $g(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$, asumiendo siempre que nos aproximaremos al punto siempre desde el interior de \mathcal{D} .

En los casos en los que \mathcal{D} sea un conjunto no acotado, normalmente el punto z_0 en el que queremos la aproximación asintótica será el punto del infinito. De hecho, en el trabajo que llevaremos a cabo trabajaremos habitualmente con conjuntos no acotados y en particular nos centraremos en sectores de coronas no acotadas:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r, \quad \alpha \leq \arg(z) \leq \beta\}, \quad (1.1)$$

siendo $r \geq 0$ y $\alpha \leq \beta$ reales que en general tomaremos en $[-\pi, \pi]$.

En las tres figuras siguientes se presentan tres casos de sectores de coronas no acotadas, con los cuales trabajaremos en secciones futuras. A lo largo de este trabajo manejaremos muchos sectores no acotados como (1.1), pero denominaremos a estos como dominios si todas las desigualdades son estrictas, es decir cuando \mathcal{D} es un sector de corona abierta no acotada y conexa.

Figura 1.1: $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ Figura 1.2: $\alpha < \frac{\pi}{2} < \beta$ Figura 1.3: $\alpha < 0 < \beta$

1.1. Relaciones de orden

Para poder empezar el estudio asintótico nos interesa comparar el comportamiento de las funciones en el punto z_0 . Para ello manejaremos los símbolos O -grande de Landau, o -pequeña de Landau y el símbolo de la equivalencia asintótica, \sim .

Definición 1.1. Dadas dos funciones complejas $f(z)$, $g(z)$ definidas en un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ y z_0 un punto adherente del dominio,

- i) Diremos que f es de orden no superior a g en \mathcal{D} y lo denotaremos por

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \in \mathcal{D},$$

en los casos en los que $\exists M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M|g(z)|$ para cada $z \in \mathcal{D}$. Cuando \mathcal{D} es no acotado, diremos que f es de orden no superior a g en el infinito y lo denotaremos por

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \rightarrow \infty,$$

en los casos que existan $R, M > 0$ tales que $|f(z)| \leq M|g(z)|$ para cada $z \in \mathcal{D} \cap \{z: |z| > R\}$.

- ii) Diremos que f es de orden menor que g en z_0 y lo denotaremos por

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0, \quad z \in \mathcal{D},$$

cuando

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$

- iii) En los casos en los que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1,$$

diremos que las funciones son asintóticamente equivalentes en z_0 y lo denotaremos de la forma siguiente:

$$f(z) \sim g(z), \quad z \rightarrow z_0, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Ejemplos 1.2. En primer lugar, vamos a mencionar el caso particular de que la función g sea idénticamente 1 en el dominio \mathcal{D} :

- I) $f(z) = O(1)$ en \mathcal{D} significa que la función $|f(z)|$ está acotada en \mathcal{D} : $\exists M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$

- II) $f(z) = o(1)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en \mathcal{D} implica que podemos extender por continuidad f al punto z_0 como:

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{1} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0.$$

- III) $f(z) \sim 1$ en z_0 implica que podemos extender por continuidad f al punto z_0 como

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{1} = 1.$$

En segundo lugar, vamos a dar un ejemplo sencillo de cada una de las relaciones para esclarecer el funcionamiento de esta notación.

- I) Veamos que $\sinh(z) = O(e^z)$ en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$:

$$\left| \frac{\sinh(z)}{e^z} \right| = \frac{1}{2} |1 - e^{-2z}| \leq \frac{1}{2} (1 + e^{-2\operatorname{Re}(z)}) \leq 1 \quad \text{si } \operatorname{Re}(z) \geq 0.$$

- II) Veamos que $\frac{1}{z^2} = o\left(\frac{1}{z}\right)$ cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier corona no acotada que no contenga al origen:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1/z^2}{1/z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^2} = 0.$$

- III) Veamos que $(z+1)^2 \sim z^2$ cuando $z \rightarrow \infty$ en \mathbb{C} :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z+1)^2}{z^2} = 1.$$

Observaciones 1.3.

- El símbolo O se puede asociar a todo un dominio, en cambio o y \sim son relaciones asociadas a un único punto de acumulación del dominio. Además, las definiciones II) y III) son mutuamente excluyentes. En cambio, ambas son un caso particular de I). De hecho, II) y III) son dos condiciones más minuciosas sobre el carácter de la función f con respecto a g que la de I).

A la menor constante que cumple la desigualdad se la llama constante implícita y en la práctica no es necesario ni común calcularla. De hecho, al alterar el dominio \mathcal{D} , reduciéndolo por ejemplo, puede que esta constante cambie y en general no nos va suponer ningún problema.

- Las definiciones de los símbolos O , o y \sim implican automáticamente la uniformidad respecto al argumento de cada una de las acotaciones y convergencias respectivamente. En el libro [13], por ejemplo da unas definiciones alternativas en las cuales el argumento de cada punto sí que tiene relevancia para asegurar la relación entre las funciones.
- Este tipo de relaciones también pueden poseer la propiedad de uniformidad respecto a las demás variables o parámetros. Tomemos como ejemplo la función $e^{(z-u)^2}$ siendo $u \in [0, a]$, con $a > 0$, y probemos que $e^{(z-u)^2} = O(e^{z^2})$ cuando $z \rightarrow \infty$ en el semiplano derecho abierto:

$$\begin{aligned} |e^{(z-u)^2}| &= e^{\operatorname{Re}((z-u)^2)} = e^{\operatorname{Re}(z^2+u^2-2zu)} = \left(e^{u^2} e^{-2u \operatorname{Re}(z)} \right) e^{\operatorname{Re}(z^2)} \\ &\leq \left(e^{a^2} \cdot 1 \right) e^{\operatorname{Re}(z^2)} = M |e^{z^2}| \quad \text{siempre que } \operatorname{Re}(z) > 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, si tomamos $-u \in [0, a]$, tenemos que $e^{(z-u)^2} = O(e^{z^2})$ cuando $z \rightarrow \infty$ en el semiplano izquierdo.

- Las notaciones $o(g)$ u $O(g)$ también se utilizan para denotar las clases de funciones con la propiedad II) o I) respectivamente en relación a una función fija y conocida g . De hecho, pueden utilizarse como función genérica que cumple esta relación. Veamos los ejemplos siguientes:

1. $O(g) + O(g) = O(g)$ en \mathcal{D} :

Con la igualdad anterior queremos indicar la propiedad siguiente:

Si $f_1, f_2 \in O(g)$ en el sector \mathcal{D} , entonces la suma también pertenece a $O(g)$, en el sector \mathcal{D} .

Para demostrarlo, consideremos dos funciones $f_1, f_2 \in O(g)$, luego existen las constantes $M_1, M_2 > 0$ tales que

$$|f_1(z) + f_2(z)| \leq M_1 |g(z)| + M_2 |g(z)| = M |g(z)|, \quad z \in \mathcal{D},$$

por lo tanto, $f_1 + f_2 = O(g)$ en \mathcal{D} siendo $M = M_1 + M_2$. Puesto que las funciones f_1 y f_2 son arbitrarias, hemos probado que $O(g) + O(g) = O(g)$.

2. $o(g) + o(g) \in o(g)$ cuando $z \rightarrow \infty$:

Sean $f_1, f_2 \in o(g)$ aplicando la linealidad del límite, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f_1(z) + f_2(z)}{g(z)} = 0$, podemos garantizar que $f_1 + f_2 \in o(g)$ y de la misma manera que antes, probar que $o(g) + o(g) = o(g)$.

3. $o(g) \subsetneq O(g)$ cuando $z \rightarrow \infty$:

Vemos que la clase $O(g)$ es más grande que la clase de $o(g)$ cuando trabajamos en un entorno del punto del infinito. Si $f \in o(g)$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $\frac{|f(z)|}{|g(z)|} < \epsilon$ cuando $|z| > R$. Por lo tanto, si fijamos un ϵ tenemos que $f \in O(g)$ en la corona no acotada $|z| > R$. Para probar que la otra contención no se cumple, bastante considerar el siguiente contraejemplo. Si $f(z) = 2z$ y $g(z) = z$, está claro que $f(z) \in O(g(z))$ en todo el plano complejo (de hecho la constante implícita es $M = 2$), pero como $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = 2 \neq 0$, $f \notin o(g)$.

Observación 1.4. En cuanto a la notación de las funciones complejas, en el estudio asintótico es común expresar las funciones como suma de funciones donde cada una de ellas tiene un carácter asintótico distinto en z_0 : $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

Un caso muy común en donde se utiliza esta notación es cuando la función f es periódica en la recta real. Tomemos como ejemplo $f(z) = \sin(z)$ en \mathbb{C} y z_0 el punto del infinito y las dos componentes de la función serían

$$f_1(z) = \frac{e^{iz}}{2i} \quad f_2(z) = -\frac{e^{-iz}}{2i}$$

que se comportan de manera muy distinta en el plano complejo cuando z tiende a z_0 . Vamos a considerar que z tiende a z_0 con un argumento fijo θ y veamos los casos con los que nos podemos encontrar:

- Si $\theta \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\text{Im}(z) > 0$ y por tanto,

$$\begin{aligned} 2|f_1| &= e^{-\text{Im}(z)} \rightarrow 0 \\ 2|f_2| &= e^{\text{Im}(z)} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

- Si $\theta = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $z \in \mathbb{R}$ y por tanto,

$$\begin{aligned} 2|f_1| &= 1 \rightarrow 1 \\ 2|f_2| &= 1 \rightarrow 1 \end{aligned} \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

- Si $\theta \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\text{Im}(z) < 0$ y por tanto,

$$\begin{aligned} 2|f_1| &= e^{-\text{Im}(z)} \rightarrow \infty \\ 2|f_2| &= e^{\text{Im}(z)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

1.2. Desarrollos asintóticos

En esta segunda sección definiremos lo que son los desarrollos asintóticos que van a ser la base del estudio que realizaremos.

Definición 1.5. Sea f una función de una variable real o compleja z y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ una serie de potencias. Denotaremos por $S_N(z)$ a la suma parcial de los primeros N términos de la serie y por $R_N(z) = f(z) - S_N(z)$ al resto para cada N . Es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + R_N(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{z^{N-1}} + R_N(z), \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

asumiendo que $R_0(z) = f(z)$. En el caso de que para cada N se diese la relación

$$R_N(z) = O(z^{-N}), \quad z \rightarrow \infty,$$

en algún dominio no acotado \mathcal{D} , entonces a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ la llamaremos un desarrollo asintótico de la función $f(z)$ y lo denotaremos

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty \text{ en } \mathcal{D}.$$

Observaciones 1.6.

- Esta definición es la dada por H. Poincaré en 1886, por ello hay muchos textos que las bautizan como desarrollos asintóticos de Poincaré.
- De la misma manera que lo hicimos para la notación de Landau, podemos definir un desarrollo asintótico de una función cuando $z \rightarrow 0$ o cualquier otro punto adherente (finito) del dominio.
- Es de remarcar que en ningún momento se asume que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ sea convergente para algún valor z . De hecho, en el ejemplo de la próxima sección veremos un caso donde la serie del desarrollo es divergente para todos los valores no nulos pero aproxima eficazmente el valor de la función cuando nos alejamos del origen. La razón principal por la que es irrelevante esta característica de la serie, es que en el estudio asintótico se trabaja con una suma parcial de la serie y su respectivo resto, que en ambos casos suelen ser finitos. De hecho, la única condición imprescindible en la definición tiene que ver con las funciones $R_N(z)$.

1.3. Un primer ejemplo: la integral exponencial

En esta sección presentaremos el ejemplo de la integral exponencial con el propósito de ilustrar cómo se aplican los resultados que vamos a ir exponiendo en los primeros dos capítulos. Seguiremos las referencias [6] y [2].

En primer lugar, definiremos la función integral

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (1.2)$$

a la que denominaremos integral exponencial, que es una función especial real. En el apéndice B se concretan las nociones necesarias para saber que esta integral impropia de parámetro z tiene sentido siempre que z sea positivo y que podemos calcular su valor mediante la identidad siguiente:

$$E_1(z) = -\ln(z) - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n! n}, \quad (1.3)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. También definiremos la función integral

$$F(z) = z e^z E_1(z) = z \int_z^{\infty} t^{-1} e^{z-t} dt, \quad z \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (1.4)$$

Al haber multiplicado por z ya no encontramos ningún problema de convergencia en el 0 pues si utilizamos la identidad (1.3), los órdenes de infinitud hacen que podamos extender por continuidad $F(z)$ al origen con el valor 0. Otra forma de ver esto es aplicando la regla de l'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo para funciones reales:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} F(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{E_1(z)}{z^{-1} e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{-z^{-1} e^{-z}}{-z^{-2} e^{-z} - z^{-1} e^{-z}} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z^{-1} + 1} = 0.$$

De este modo, obtenemos una expresión que es válida en todo el entorno del origen y que, además, una de sus partes se presenta en forma de serie de potencias:

$$F(z) = ze^z \left(-\ln(z) - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n! n} \right). \quad (1.5)$$

Sabemos que esta serie es convergente cuando $z > 0$ pero su convergencia es desmesuradamente lenta cuando z toma valores grandes. En concreto, si queremos aproximar el valor de la integral cuando $z = 10$ con tres cifras significativas, vamos a necesitar sumar los primeros 40 términos de la serie. Por lo tanto, es conveniente buscar una manera alternativa de determinar el valor de esta función para argumentos lejanos del origen, y es en este contexto donde los desarrollos asintóticos juegan un papel clave.

Puesto que por ahora solamente conocemos la definición de desarrollo asintótico, nuestro objetivo es intentar encontrar una expresión de $F(z)$ que siga la estructura mencionada en la definición 1.5 con las herramientas básicas del Análisis Matemático. Observamos que la integral (1.4) se puede integrar por partes reiteradamente si seguimos el procedimiento siguiente: para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos

$$\begin{aligned} u &= t^{-k} &\Rightarrow & du = (-k)t^{-k-1} dt \\ dv &= e^{z-t} dt &\Rightarrow & v = -e^{z-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= z \left(\frac{1}{z} - \int_z^{\infty} t^{-2} e^{z-t} dt \right) = z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + 2 \int_z^{\infty} t^{-3} e^{z-t} dt \right) = \\ &= 1 - \frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} - z 3! \int_z^{\infty} t^{-4} e^{z-t} dt = \dots \end{aligned}$$

Después de N iteraciones, llegamos a que la función $F(z)$ se puede expresar en dos sumandos distinguidos, las potencias negativas de z y la integral:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n n!}{z^n} + z (-1)^N N! \int_z^{\infty} t^{-(N+1)} e^{z-t} dt.$$

Siguiendo la notación establecida en la definición (1.5), denominaremos al segundo sumando $R_N(z)$, y el siguiente paso será verificar si cumple con la condición de orden $R_N(z) = O(z^{-N})$. Para ello, vamos a tener que acotar la integral teniendo en cuenta que $t \geq z \Rightarrow t^{-(N+1)} \leq z^{-(N+1)}$:

$$|R_N(z)| = (-1)^N R_N(z) = z N! \int_z^{\infty} t^{-(N+1)} e^{z-t} dt \leq z^{-N} N! \int_z^{\infty} e^{z-t} dt = \frac{N!}{z^N}.$$

Concluimos así que $F(z)$ admite desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow \infty$ y su valor es

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Es de mencionar que la serie en cuestión no es convergente para ningún valor de z , de hecho no cumple ni la condición necesaria de convergencia (su término general no

tiende a 0). En cambio, hemos dado una cota superior para el error cometido al aproximar $F(z)$ por la suma parcial de los primeros N términos. De hecho, considerando z suficientemente grande, podemos dar una aproximación de la función tan precisa como queramos de la que hablaremos más a fondo en la sección 1.6. Para poder entender mejor el propósito de manejar estos desarrollos y seguir el estudio de este ejemplo, debemos probar varias propiedades básicas de los desarrollos asintóticos.

1.4. Propiedades de las series de potencias asintóticas

Teniendo en mente la definición 1.5 en esta sección vamos a demostrar varias propiedades de los desarrollos de Poincaré. La mayor parte de los resultados se han tomado del texto de Olver [8].

Teorema 1.7. *Una función f posee un desarrollo asintótico de la forma descrita en 1.5 si y solo si*

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z); \quad a_n = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(f(z) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^{-m} \right) z^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Demostración. La condición es suficiente, pues la existencia de los límites anteriores garantiza la acotación de $R_N(z)z^N$ para $|z|$ suficientemente grande, y por lo tanto $R_N(z) = O(z^{-N})$ cuando $z \rightarrow \infty$ para cada $N = 0, 1, \dots$. Para ver que la condición es necesaria, empecemos probando el primer límite. Podemos considerar $N = 1$ en la definición de desarrollo asintótico y por tanto,

$$f(z) - a_0 = R_1(z)$$

es $O(z^{-1})$ cuando $z \rightarrow \infty$, luego podemos acotar:

$$|f(z) - a_0| = |R_1(z)| \leq M_1 |z|^{-1} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0,$$

queda así probado el primer límite.

En cuanto al segundo límite, sea $n \geq 1$ y siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \left(f(z) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^{-m} \right) z^n - a_n &= \left(\sum_{m=0}^n a_m z^{-m} + R_{n+1}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^{-m} \right) z^n - a_n \\ &= (a_n z^{-n} + R_{n+1}(z)) z^n - a_n = R_{n+1}(z) z^n \\ \left| \left(f(z) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^{-m} \right) z^n - a_n \right| &= |R_{n+1}(z)| |z|^n, \\ &\leq M_{n+1} |z|^{-n-1+n} = M_{n+1} |z|^{-1} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

La constante M_{n+1} se deduce de que $R_{n+1}(z)$ es de orden no superior a $z^{-(n+1)}$. \square

Corolario 1.8. Si f posee los siguientes desarrollos asintóticos,

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty$$

dentro de un mismo dominio \mathcal{D} , entonces $a_n = b_n$ para cada $n = 0, 1, 2, \dots$

Demostración. Se deduce del lema anterior y de la unicidad del límite. \square

Dos funciones distintas pueden tener el mismo desarrollo asintótico. En otras palabras, si una función f admite un desarrollo asintótico, este es único; no obstante, la función f no es la única función que tiene este desarrollo asintótico.

Definición 1.9. A las funciones $g \neq 0$ que admiten un desarrollo asintótico con todos sus términos nulos las llamaremos funciones planas, o asintóticamente iguales a 0 para todos los órdenes. En el caso que comparemos este tipo de funciones con alguna otra f que tenga al menos un término no nulo, diremos que la función g es exponencialmente pequeña comparada con f .

Observaciones 1.10. Si f es una función definida en el dominio \mathcal{D}_f y admite el desarrollo asintótico

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

entonces si a f le sumamos una función plana g definida en \mathcal{D}_g , la función suma $h = f + g$ está definida en $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ y su desarrollo asintótico es igual al de f . Hay que remarcar que en general, f y h no son iguales en \mathcal{D}_h , ya que g es no nula y como su contribución a partir de $R < |z|$ es ínfima, el desarrollo asintótico no cambia. Con las propiedades de linealidad que probaremos en el resultado 1.13 veremos que es trivial lo afirmado en esta observación.

Ejemplo 1.11. Hay muchas funciones que son planas, una de ellas es $g(z) = e^{-z}$ cuando $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$. La razón de este hecho es que $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n e^{-z} = 0$ en dichos sectores y para cada $n = 0, 1, 2, \dots$; de hecho, si $z = r e^{i\theta}$ y $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$,

$$|z^n e^{-z}| = |z|^n e^{-|z| \cos \theta} \leq r^n e^{-r \sin(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty.$$

Concluimos así, gracias al teorema 1.7, que $g(z) = e^{-z}$ es una función plana en dicho dominio.

El hecho de estar trabajando con la O hace que hagamos hincapié en la comparación de los órdenes de magnitud de las funciones. En cambio, es común olvidarse de la constante M que acompaña a esta noción, como vimos en la definición 1.1. Esta constante puede ser arbitrariamente grande o pequeña dependiendo del contexto en el que estemos trabajando y se le llama constante implícita. En el resultado a continuación daremos una cota inferior para el valor de las constantes implícitas asociadas a cada resto del desarrollo asintótico.

Corolario 1.12. La N -ésima constante M_N implícita en 1.5 en el sector \mathcal{D} no puede ser menor que $|a_N|$.

Demostración. Sabemos que para cada $z \in \mathcal{D}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + R_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} + R_{N+1}(z).$$

Tenemos entonces que si $|z| > R$,

$$R_N(z) = a_N z^{-N} + R_{N+1}(z) \Rightarrow |R_N(z)||z^N| = |a_N + R_{N+1}(z)z^N| \leq M_N$$

y como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R_{N+1}(z)z^N = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{R_{N+1}(z)}{z^{-(N+1)}} z^{-1} = 0,$$

concluimos que $M_N \geq |a_N|$ para cada $N = 0, 1, \dots$ □

Lema 1.13. *Cuando las funciones f y g poseen los desarrollos asintóticos*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathcal{D}$$

entonces cada una de las funciones siguientes poseen un desarrollo asintótico en \mathcal{D} :

- 1) $\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n}$
- 2) $f(z)g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad c_n = \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}$
- 3) $\frac{1}{f(z)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}, \quad \begin{array}{l} \text{si } a_0 \neq 0, d_0 = \frac{1}{a_0} \\ a_0 d_n = -\sum_{m=0}^{n-1} a_{n-m} d_m \end{array}$

Demostración. La primera es inmediata de la definición, como podemos ver a continuación. Dado $N \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + R_N^f(z), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} + R_N^g(z).$$

Entonces,

$$h_1(z) = \alpha f(z) + \beta g(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n} + (\alpha R_N^f(z) + \beta R_N^g(z))$$

Sabiendo que si $|z| > R$ existen $M_N^f, M_N^g > 0$ tales que $|R_N^f(z)| \leq M_N^f |z|^{-N}$ y $|R_N^g(z)| \leq M_N^g |z|^{-N}$, tenemos que

$$|\alpha R_N^f(z) + \beta R_N^g(z)| \leq (\alpha M_N^f + \beta M_N^g) |z|^{-N} = M_N^{h_1} |z|^{-N}$$

probando así el primer desarrollo.

En cuanto a la segunda, debemos separar el estudio en tres tipos de sumandos.

$$\begin{aligned} h_2(z) &= f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + R_N^f(z) \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} + R_N^g(z) \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \right) R_N^g(z) + \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} \right) R_N^f(z) \\ &\quad + R_N^f(z) R_N^g(z). \end{aligned}$$

Para el primer sumando utilizamos la fórmula del producto de Cauchy para calcular el producto de sumas parciales. Observemos que solo nos interesan los primeros N términos de esta nueva suma, luego debemos ver cuál es el orden de estos sumandos restantes.

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^{-n} + \sum_{n=N}^{2N-2} \tilde{c}_n z^{-n}, \quad \text{siendo } c_n = \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}.$$

Teniendo en cuenta que si consideramos $|z| > R > 1$, tenemos que $|z^{-n}| \leq |z|^{-N}$ para cada $n \geq N$,

$$\left| \sum_{n=N}^{2N-2} \tilde{c}_n z^{-n} \right| \leq \sum_{n=N}^{2N-2} |\tilde{c}_n| |z|^{-n} = C_N |z|^{-N}. \quad (1.6)$$

Para el segundo tipo de sumando, debemos aplicar la condición de orden al resto y acotar las potencias de z que nos aparecen en la suma parcial:

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \right) R_N^g(z) \right| &\leq M_N^g \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| |z|^{-(N+n)} \leq K_N^g |z|^{-N}, \\ \left| \left(\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} \right) R_N^f(z) \right| &\leq M_N^f \sum_{n=0}^{N-1} |b_n| |z|^{-(N+n)} \leq K_N^f |z|^{-N}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En cuanto al tercer sumando, solo tenemos que aplicar la condición de orden a ambos restos:

$$\left| R_N^f(z) R_N^g(z) \right| \leq M_N^f M_N^g |z|^{-2N} \leq K_N |z|^{-N}. \quad (1.8)$$

Por último, sumando todos los términos que constituyen el resto, podemos concluir que este es de orden $O(z^{-N})$:

$$\left| f(z)g(z) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^{-n} \right| \leq (C_N + K_N^g + K_N^f + K_N) |z|^{-N} = M_N^{h_2} |z|^{-N}.$$

Luego hemos probado que

$$f(z)g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad c_n = \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}.$$

En cuanto al desarrollo asintótico de la función $h_3(z) = \frac{1}{f(z)}$ cuando $a_0 \neq 0$, lo primero que haremos es probar que

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{a_0} \sim \frac{-a_1}{a_0^2 z} \quad z \rightarrow \infty.$$

En primer lugar, tenemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0}$, luego tiene sentido considerar probar la condición anterior, pues queremos ver cuál es la velocidad de convergencia. Empecemos operando para luego aplicar el límite:

$$\begin{aligned} z \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{a_0} \right) &= \left(\frac{z}{a_0 + \frac{a_1}{z} + R_2(z)} - \frac{z}{a_0} \right) \\ &= \frac{-a_1 - zR_2(z)}{a_0 \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + R_2(z) \right)} \end{aligned}$$

Recordemos que $R_2(z) = O(z^{-2})$, luego

$$|zR_2(z)| \leq \frac{M_2}{|z|} \rightarrow 0, \quad |R_2(z)| \leq \frac{M_2}{|z|^2} \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

y por tanto al pasar al límite,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-a_1 - zR_2(z)}{a_0 \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + R_2(z) \right)} &= \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-a_1}{a_0 \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{z^2 R_2(z)}{z^2} \right)} - \frac{z^2 R_2(z)}{z a_0 \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{z^2 R_2(z)}{z^2} \right)} = \frac{-a_1}{a_0^2}. \end{aligned}$$

Siguiendo este mismo procedimiento, por inducción sobre n podemos probar que

$$\frac{1}{f(x)} - \sum_{n=0}^{N-1} d_n z^{-n} \sim d_{N-1} z^{-N+1}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

No vamos a demostrarlo, ya que los cálculos son tediosos y largos, y estamos tratando con una propiedad básica de los desarrollos asintóticos, la cual no se empleará en el desarrollo de este trabajo. Se pueden ver más detalles en [8, pág. 17] y [3, pág. 9]. \square

Lema 1.14. *Si la función f es continua en el dominio \mathcal{D} y $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ cuando $z \rightarrow \infty$, $z \in \mathcal{D}$, entonces*

$$\int_z^{\infty} \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n} z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathcal{D}, \quad (1.10)$$

donde el camino tomado es el segmento que une z y ∞ dentro del dominio \mathcal{D} .

Queda así probado que

$$\int_z^\infty \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{a_{n+1}}{n} z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathcal{D}.$$

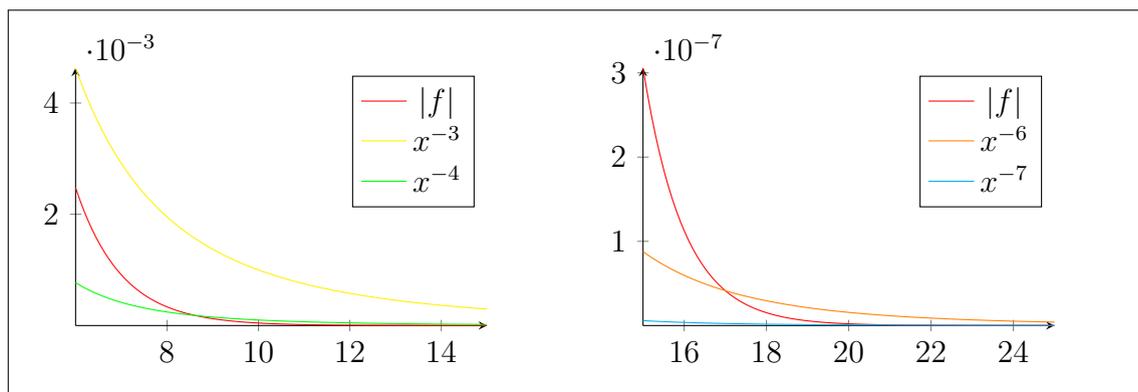
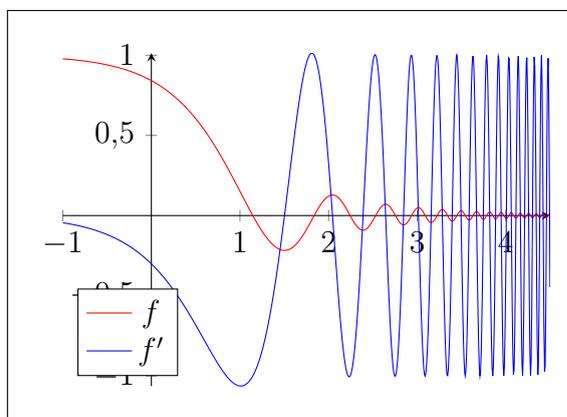
□

El cálculo del desarrollo asintótico de la derivada conociendo el desarrollo asintótico de la función original no es tan inmediato como hemos visto que ocurre con las integrales. Debemos conocer más aspectos de la regularidad de la función original. De hecho, en general no se cumple que la derivada de un desarrollo sea el desarrollo de la derivada, como veremos a continuación.

Ejemplo 1.15. Veamos un ejemplo en el cuál existe un desarrollo asintótico para f y no para f' . Se puede encontrar en [8, pág. 21] y en [6, pág. 28].

Consideramos la función $f(x) = e^{-x} \sin(e^x)$ siendo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que es asintóticamente igual a 0 para todos los órdenes. En cambio, no lo es su derivada: $f'(x) = \cos(e^x) - f(x)$. De hecho, esta función no admite desarrollo asintótico, puesto que si existiera, los coeficientes a_n deberían cumplir el teorema 1.7 pero en particular no existe el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(e^x)$.

En la figura de la derecha veremos reflejadas las grandes diferencias entre la función f y su derivada f' . Como podemos observar, ambas funciones oscilan y están acotadas a lo largo de la semirrecta $x \in [0, \infty)$. En cambio, la función f tiende a 0 y f' oscila en $[-1, 1]$ con una frecuencia proporcional a e^x . El control que da e^{-x} al seno hace que f tienda a 0 con un orden de decrecimiento menor al de cualquier polinomio.



Con las dos figuras superiores queremos ilustrar la velocidad de decrecimiento de las funciones asintóticamente iguales a 0. Como hemos mencionado, la función f

tiende a 0 de manera oscilatoria y por no dificultar la interpretación de las figuras, trabajaremos con el módulo de la función. En ambas figuras vemos como la función f supera rápidamente la velocidad de decrecimiento de las potencias negativas x^{-3} , x^{-4} , x^{-6} y x^{-7} , que es coherente con que $f = O(x^{-n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De hecho, por los órdenes de infinitud de las funciones reales, podemos asegurar que $f = o(z^{-n})$ para cada $n = 0, 1, \dots$

Del ejemplo anterior concluimos que para que se de esta propiedad para las derivadas de una función que admite desarrollo, debemos imponer ciertas condiciones adicionales. A continuación enunciaremos un primer resultado ([13, pág. 7]) que relaciona las derivadas de una función y sus respectivos desarrollos asintóticos.

Lema 1.16. *Sea \mathcal{D} un sector no acotado y suponemos que f posee el desarrollo*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Si f tiene una derivada continua f' en \mathcal{D} y esta posee un desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow \infty$ en \mathcal{D} , entonces

$$f'(z) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{-n-1}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Demostración. Denotemos por $f'(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ al desarrollo asintótico mencionado en el enunciado. Puesto que f' es continua en el dominio \mathcal{D} , podemos aplicar la Regla de Barrow. Vamos a considerar el segmento $[z, z_1]$ que une z y z_1 , donde ambos extremos son no nulos y tienen el mismo argumento (y por ende todos los elementos del segmento):

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z) &= \int_z^{z_1} f'(t) dt \\ &= \int_z^{z_1} \left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right) dt + \int_z^{z_1} \left(b_0 + \frac{b_1}{t} \right) dt \\ &= \int_z^{z_1} \left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right) dt + b_0(z_1 - z) + b_1 \log \left(\frac{z_1}{z} \right). \end{aligned}$$

Observamos que al integrar nos aparece un logaritmo, que por la condición de que z y z_1 tienen el mismo argumento, es un logaritmo real con argumento estrictamente positivo. Teniendo esta igualdad, hagamos tender $z_1 \rightarrow \infty$ dentro del sector \mathcal{D} :

$$a_0 - f(z) = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \left(\int_z^{z_1} \left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right) dt + b_0(z_1 - z) + b_1 \ln \left(\frac{z_1}{z} \right) \right).$$

Como $\lim_{z_1 \rightarrow \infty} f(z_1) - f(z) = a_0 - f(z)$ es finito para cada $z \in \mathcal{D}$, tenemos que el límite que nos aparece al otro lado de la igualdad también debe ser finito. Vemos tres sumandos claros en este límite, la convergencia del primer sumando nos la garantiza el lema 1.14. En cuanto a los otros dos, vemos que el límite

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} \left(b_0(z_1 - z) + b_1 \log \left(\frac{z_1}{z} \right) \right)$$

solo puede ser finito si y solo si $b_0 = b_1 = 0$; ya que los órdenes de infinitud del término logarítmico y del monomio z_1 no se pueden contrarrestar con ningún otro valor de b_0 o b_1 .

Por otro lado, utilizando el lema 1.14 podemos dar una segunda expresión del desarrollo de la función $a_0 - f(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ en \mathcal{D} :

$$a_0 - f(z) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad a_0 - f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n} z^{-n}.$$

Y por el corolario de unicidad de los coeficientes 1.8, concluimos que para cada $n = 1, 2, 3, \dots$

$$-a_n = \frac{b_{n+1}}{n} \iff b_{n+1} = -na_n.$$

Concluimos así que $f'(z) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{-n-1}$ cuando $z \rightarrow \infty$ y $z \in \mathcal{D}$. \square

Antes de probar el segundo lema en referencia a las derivadas de los desarrollos asintóticos, vamos a probar el teorema 1.17. Este resultado nos relaciona los órdenes de una función con los órdenes de sus derivadas, el cual va a ser el primer paso a la hora de calcular el desarrollo asintótico de las derivadas de una función f , a partir del de la misma función f .

Teorema 1.17. *Si f es holomorfa en una región que contiene a un sector \mathcal{S} de una corona circular cerrada y*

$$f(z) = O(z^p) \quad (\text{o bien } f(z) = o(z^p)) \quad (1.12)$$

cuando $z \rightarrow \infty$ en \mathcal{S} y p es un número real fijo arbitrario, entonces

$$f^{(m)}(z) = O(z^{p-m}) \quad (\text{o bien } f^{(m)}(z) = o(z^{p-m})) \quad (1.13)$$

cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier sector cerrado \mathcal{T} de una corona circular interior a \mathcal{S} y con el mismo vértice que el sector \mathcal{S} .

Demostración. La demostración se basa en la fórmula integral de Cauchy para curvas de Jordan. Puesto que f es holomorfa en \mathcal{S} , podemos tomar un camino circular γ interior a \mathcal{S} con el que aplicar el teorema: dado z en el interior del disco que encierra γ ,

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{m+1}} dt.$$

En segundo lugar, sabemos que $|z-c|^p \sim_{\infty} |z|^p$ ya que la traslación no altera el comportamiento asintótico de la función, luego para facilitarnos la notación y las cuentas podemos suponer que el vértice del sector \mathcal{S} es el origen.

Esto es,

$$\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \arg(z) \leq \beta, |z| \geq R\}.$$

Consideramos ahora un sector propiamente interior a \mathcal{S} de la siguiente manera: dado $0 < \delta < \min\left\{\frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ y $R' = \frac{R}{1-\sin\delta}$, definimos

$$\mathcal{S}_{\delta} := \{z : \alpha + \delta \leq \arg(z) \leq \beta - \delta, |z| \geq R'\}$$

Observamos que $R' > R$ ya que $\sin \delta > 0$ y $0 < 1 - \sin \delta < 1$. Sabiendo en qué sectores de corona vamos a trabajar, definimos una γ concreta para cada $z \in \mathcal{S}_\delta$: dado $t \in \gamma$ se cumple

$$|t - z| = \frac{|z|}{2} \sin \delta \quad (1.14)$$

Es decir, una circunferencia de centro z y de radio $\frac{|z|}{2} \sin \delta$ que denotaremos por γ_z . En la figura de continuación vemos reflejada la relación entre ambos sectores.

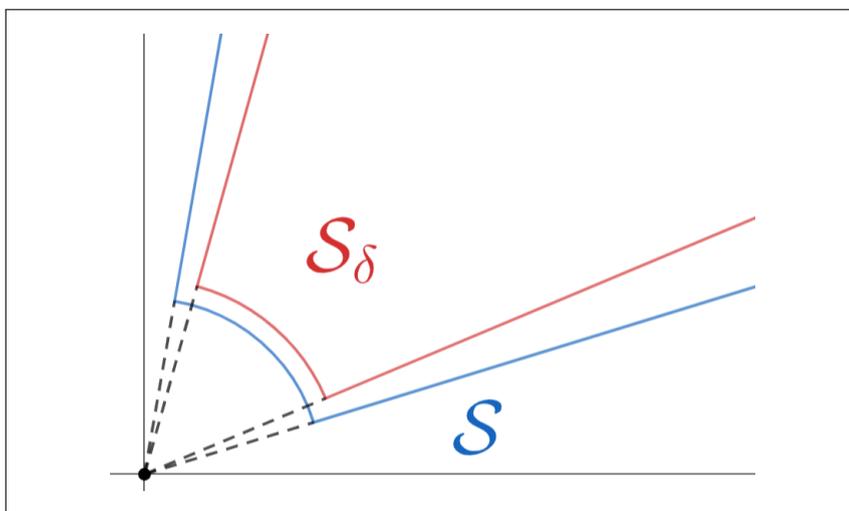


Figura 1.5: Sectores \mathcal{S} y \mathcal{S}_δ

De la segunda desigualdad triangular aplicada a $|t - z|$ podemos deducir las siguientes dos desigualdades

1. $|t| - |z| \leq |t - z| = \frac{|z|}{2} \sin \delta \rightarrow |t| \leq |z|(1 + \frac{\sin \delta}{2})$
2. $|z| - |t| \leq |t - z| = \frac{|z|}{2} \sin \delta \rightarrow |t| \geq |z|(1 - \frac{\sin \delta}{2})$

Por lo tanto, se tiene la relación

$$|t|^p \leq |z|^p (1 \pm \frac{\sin \delta}{2})^p, \quad \forall t \in \gamma_z, \quad (1.15)$$

y como no tenemos ninguna información adicional sobre $p \in \mathbb{R}$, debemos de tener en cuenta el signo de p para determinar el signo de la desigualdad. Es decir, si $p > 0$ tomaremos la suma y en caso contrario la diferencia.

Por otro lado, si consideramos $z \in \mathcal{S}_\delta$, para poder aplicar la fórmula de Cauchy mencionada al principio de la demostración, debemos asegurarnos que la curva γ_z y el abierto que encierra la curva están en \mathcal{S} . En primer lugar, probemos que todo punto de la curva está contenida en la corona $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$. Para ello, deberemos utilizar la segunda desigualdad probada: si $z \in \mathcal{S}_\delta$ significa que

$$|z| \geq R' = \frac{R}{1 - \sin \delta} \Rightarrow R \leq |z|(1 - \sin \delta) \leq |t|.$$

$z \in \mathcal{S}_\delta$ podemos llevar a cabo la siguiente acotación de la función $f^{(m)}$:

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(z)| &= \frac{m!}{2\pi} \left| \int_{\gamma_z} \frac{f(t)}{(t-z)^{m+1}} dt \right| \leq \text{long}(\gamma_z) \max_{t \in \gamma_z^*} \left| \frac{f(t)}{(t-z)^{m+1}} \right| \\ &\leq m! \frac{|z|}{2} \sin \delta M \max_{t \in \gamma_z^*} \left| \frac{t^p}{(t-z)^{m+1}} \right|, \end{aligned} \quad (1.16)$$

y utilizando las desigualdad (1.15) y la identidad (1.14),

$$\begin{aligned} (1.16) &\leq m! \frac{|z|}{2} \sin \delta M |z|^p \left(1 \pm \frac{\sin \delta}{2} \right)^p \frac{1}{(|z| \sin \delta)^{m+1}} \\ &= \frac{m! M}{2^{p+1}} |z|^{p-m} \frac{(2 \pm \sin \delta)^p}{(\sin \delta)^m} = M_\delta |z|^{p-m}, \end{aligned}$$

siendo $M_\delta = \frac{m! M (2 \pm \sin \delta)^p}{2^{p+1} (\sin \delta)^m}$, queda probado que $f^{(m)}(z) = O(z^{p-m})$ en \mathcal{S}_δ cuando $z \rightarrow \infty$.

De hecho, cada uno de los sectores \mathcal{T} mencionados en el enunciado se pueden construir a partir de un \mathcal{S}_δ tomando curvas γ_z con radios más pequeños que el que hemos tomado en esta demostración y por tanto cada una de las constantes involucradas en (1.13) está superiormente acotada por la constante M_δ correspondiente a cada \mathcal{T} . En cambio, como $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta = \infty$, no podemos extender este resultado al sector inicial \mathcal{S} .

En referencia al caso en el que $f(z) = o(z^p)$, la demostración es análoga pero teniendo en cuenta que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^p} = 0 \iff \left| \frac{f(z)}{z^p} \right| < \epsilon, \quad |z| > \rho.$$

□

Este resultado nos va a ser útil para demostrar el resultado siguiente relacionado con el desarrollo asintótico de la derivada de una función f , tomado de [13, pág. 8].

Lema 1.18. *Sea \mathcal{D} un dominio como el definido en (1.1) y suponemos que f es analítica en \mathcal{D} . Si $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier sector cerrado interior a \mathcal{D} , entonces*

$$f'(z) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{-n-1} \quad z \rightarrow \infty$$

cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier sector cerrado interior a \mathcal{D} .

Demostración. Si $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier sector cerrado interior a \mathcal{D} , entonces para cada $z \in \mathcal{T} \subset \mathcal{D}$ cerrado y cada $N > 0$ podemos expresar $f(z)$ como una la N -ésima suma parcial y su respectivo resto:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + R_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + z^{-N} r_N(z),$$

donde $r_N(z) = z^N R_N(z) = z^N O(z^{-N}) = O(1)$. A continuación derivaremos y reordenaremos los términos que acompañan a cada una de las potencias z^{-n} :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{N-1} a_n(-n)z^{-n-1} + (-N)z^{-N-1}r_N(z) + z^{-N}r'_N(z) \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} a_n(-n)z^{-n-1} + z^{-N}(a_{N-1}(-N+1) + r'_N(z)) + z^{-N-1}(-N)r_N(z). \end{aligned}$$

Observamos que los coeficientes que nos han salido como resultado de la derivación de la expresión son justamente los del enunciado y que las potencias llegan hasta $-(N-1)$. Por lo tanto, nos falta probar que los dos sumandos restantes son $O(z^{-N})$ cuando $z \rightarrow \infty$ en \mathcal{T} .

En primer lugar vamos a calcular la derivada de $r_N(z)$ en función de la función resto original:

$$z^{-N}r'_N(z) = z^{-N}(Nz^{N-1}R_N(z) + z^N R'_N(z)) = \frac{N}{z}R_N(z) + R'_N(z).$$

Por ser \mathcal{T} ser un sector cerrado interior a S podemos aplicar el teorema 1.17 a la función $R_N(z)$:

$$R_N(z) = O(z^{-N}), \quad z \in \mathcal{T} \implies R'_N(z) = O(z^{-N-1}), \quad z \in \mathcal{T}.$$

Por lo tanto, utilizando las propiedades de la O grande de Landau tenemos que

$$z^{-N}r'_N(z) = \frac{N}{z}O(z^{-N}) + O(z^{-N-1}) = O(z^{-N-1}) + O(z^{-N-1}) = O(z^{-N-1}).$$

En cuanto los otros dos sumandos, podemos garantizar que

$$a_{N-1}z^{-N} = O(z^{-N}) \quad (-N)z^{-N-1}r_N(z) = O(z^{-N-1}).$$

Por el hecho de que N es fijo, a_{N-1} es una constante y $r_N(z) = O(1)$, como hemos mencionado anteriormente. Asimismo, es fácil probar que $O(z^{-N-1}) = O(z^{-N})$ cuando $z \rightarrow \infty$, de hecho si hacemos el límite tenemos que es *o* pequeña:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{-N-1}}{z^{-N}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0.$$

Concluimos así que el sumando restante es suma de orden $O(z^{-N})$ cuando $z \rightarrow \infty$ en \mathcal{T} y por tanto que

$$z^{-N}(a_{N-1}(-N+1) + r'_N(z)) + z^{-N-1}(-N)r_N(z) = O(z^{-N}), \quad z \in \mathcal{T}, \quad z \rightarrow \infty.$$

□

1.5. Desarrollos asintóticos generalizados

A veces interesa cambiar la sucesión de funciones $\{z^{-n}\}$ por otra que cumple unas condiciones de orden similares. Así, podremos incrementar el número de funciones que podemos aproximar con perspicacia empleando series funcionales que siguen la misma estructura que los desarrollos asintóticos.

Definición 1.19. Sean $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas definidas en un mismo dominio \mathcal{D} y z_0 un punto adherente de \mathcal{D} . Se dice que la sucesión constituye una escala asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en \mathcal{D} cuando la sucesión cumple la condición de orden siguiente:

$$\psi_{n+1}(z) = o(\psi_n(z)), \quad z \rightarrow z_0, \quad z \in \mathcal{D}$$

Definición 1.20. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas definidas en un mismo dominio \mathcal{D} . A la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(z)$ se le llama un desarrollo asintótico generalizado de la función $f(z)$ con respecto de la escala asintótica $\{\psi_n\}$ cuando $z \rightarrow z_0$ en el caso que se cumpla

$$f(z) = \sum_{n=0}^N \phi_n(z) + o(\psi_N(z)), \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

y lo denotamos por

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(z); \quad \{\psi_n\}; \quad z \rightarrow z_0.$$

Observación 1.21. Si comparamos las definiciones 1.5 y 1.20 podemos observar una diferencia entre ambas expresiones. Mientras que en la primera consideramos la suma de 0 a $N - 1$ y $R_N(z) = O(z^{-N})$, en la definición de desarrollo asintótico generalizado consideramos un sumando más y un resto del orden de $o(\psi_N(z))$. Este cambio se debe al hecho de considerar explícitamente el sumando N -ésimo o mantenerlo implícitamente dentro de la O -grande de Landau. En el ejemplo 2.6 detallaremos las diferencias de cada una de las notaciones.

Observación 1.22. La aplicación más común de estos desarrollos es cuando

$$\phi_n(z) = a_n \psi_n(z)$$

siendo a_n una constante, dándonos así una generalización de los desarrollos de Poincaré que hemos definido en la sección 1.2.

1.6. Truncamiento óptimo de los desarrollos asintóticos

A lo largo de este capítulo, hemos presentado los desarrollos asintóticos, las propiedades fundamentales que los rigen, y un primer ejemplo que nos ha permitido vislumbrar el potencial de los desarrollos asintóticos para aproximar funciones especiales. Hemos observado que, como regla general, no podemos garantizar la convergencia de ninguna de las series planteada; por ello, nos centramos exclusivamente en las sumas parciales de estas series de potencias inversas.

La siguiente cuestión que debemos abordar es el número óptimo de términos que debe tener la suma parcial para aproximar el valor de la función $f(z)$ en el punto $z = z_0$. Para ello, retomemos el ejemplo de la sección 1.3 y veamos qué ocurre en este caso particular.

Continuación del ejemplo de la sección 1.3. Recordemos que la función principal con la que estamos trabajando es

$$E_1(z) = \int_z^\infty t^{-1} e^{-t} dt = -\ln(z) - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n! n}, \quad z \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

y que mediante la integración por partes de la función

$$F(z) = z e^z E_1(z) = z e^z (-\ln(z) - \gamma) + e^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{n+1}}{n! n}, \quad z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

hemos encontrado el desarrollo asintótico de la función: cuando $z \rightarrow \infty$,

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{z^n} \quad \text{siendo el resto} \quad R_N^F(z) = z (-1)^N N! \int_z^\infty t^{-(N+1)} e^{z-t} dt.$$

Si analizamos el desarrollo de $F(z)$, al considerar valores de z grandes, lo primero que se nos viene a la mente es que los términos $\frac{n!}{z^n}$ van a ser pequeños. Sin embargo, conocemos bien la velocidad de crecimiento del factorial, y que esta noción de factores pequeños desvanece cuando n no crece en exceso. De hecho, la velocidad de crecimiento de término en término es

$$\left| \frac{\text{Término } n\text{-ésimo}}{\text{Término } (n-1)\text{-ésimo}} \right| = \frac{n! z^{n-1}}{(n-1)! z^n} = \frac{n}{z}. \quad (1.17)$$

Puesto que z es un valor real y positivo, tenemos que la sucesión de restos va alternando de signo, luego las sumas parciales van acotando la función $F(z)$ superior e inferiormente:

$$\begin{aligned} \text{Si } n \in \mathbb{N} \text{ es par,} \quad & R_N^F(z) \geq 0 \quad \text{y} \quad R_{N+1}^F(z) \leq 0 \quad \implies \quad S_N^F(z) \leq F(z) \leq S_{N+1}^F(z). \\ \text{Si } n \in \mathbb{N} \text{ es impar,} \quad & R_N^F(z) \leq 0 \quad \text{y} \quad R_{N+1}^F(z) \geq 0 \quad \implies \quad S_N^F(z) \geq F(z) \geq S_{N+1}^F(z), \end{aligned}$$

donde S_N y S_{N+1} son las sumas parciales de los primeros N y $N+1$ términos del desarrollo asintótico, respectivamente. Por lo tanto, tenemos dos subsucesiones de sumas parciales que nos acotan inferior y superiormente el valor de la función $F(z)$ para cada valor de z , dándonos así un primer candidato de intervalo de acotación. No obstante, que la serie sea divergente hace que la longitud del intervalo cada vez sea mayor:

$$\left| S_N^F(z) - S_{N-1}^F(z) \right| = \frac{N!}{z^N}. \quad (1.18)$$

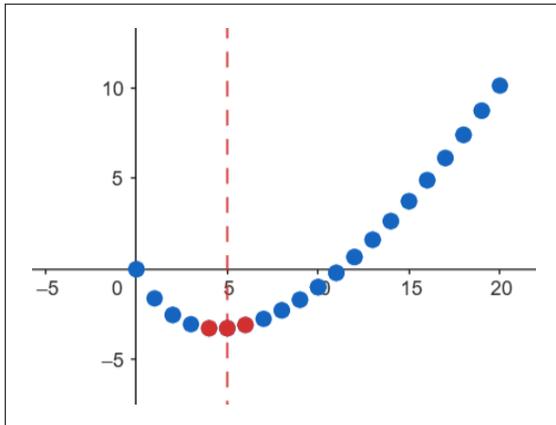
En esencia, dado un z fijo, buscamos un criterio de parada (el número de sumas N que debemos llevar a cabo) para el cual el resto $|R_N^F(z)|$ sea mínimo. De (1.18) sabemos que $|R_N^F(z)| \leq \frac{N!}{z^N}$ y de (1.17) se deduce que este valor decrece mientras $N < z$, pero crece para $N > z$. Por lo tanto, el error óptimo se obtiene cuando

$N \sim z$, y en concreto si se elige N igual a la parte entera de z . Luego, para esa elección y utilizando la fórmula de Stirling,

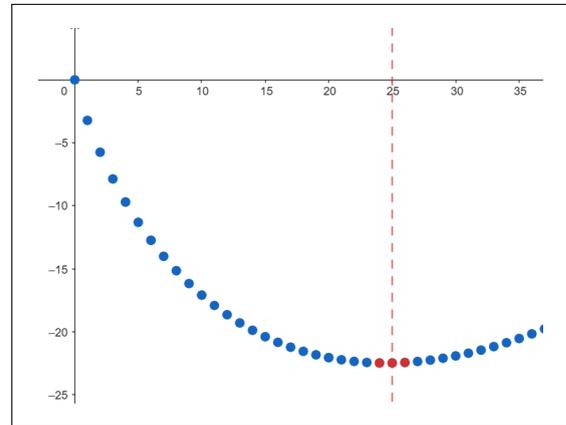
$$|R_N^F(z)| \leq \frac{[z]!}{z^{[z]}} \sim \frac{[z]^{[z]} e^{-[z]} \sqrt{2\pi [z]}}{z^{[z]}} \leq e\sqrt{2\pi z} e^{-z},$$

y hemos obtenido una cota sorprendentemente precisa. Por lo tanto el truncamiento óptimo para este desarrollo asintótico es cuando $N = [z]$, y el error cometido decrece exponencialmente cuando z tiende hacia infinito.

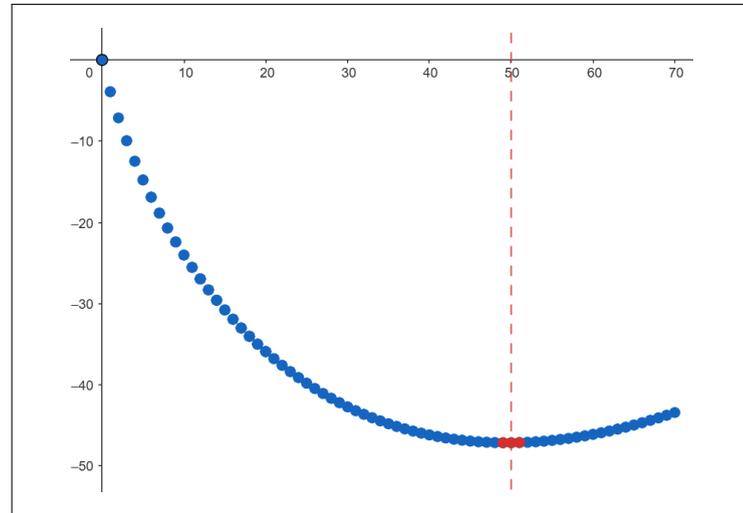
En las tres figuras que incluimos ahora, relativas al error para diferentes valores de z y n , observamos que el error mínimo se alcanza cuando $n \sim z$, además de notar que cuanto más grande sea z , más rápido es el decrecimiento de la acotación en los primeros sumandos. Es decir, cuando z empieza a tomar valores grandes, la aproximación obtenida con la suma parcial de $N \sim z$ términos va a ser mucho más precisa y eficiente que la obtenida mediante la serie de potencias convergente (1.5). De hecho, como este error se comporta como $O(z^{-N})$, podemos lograr la precisión de tres cifras significativas sumando muchos menos términos que los óptimos para cumplir con este requerimiento, siempre que z sea suficientemente grande. Para visualizar con facilidad esta gran virtud de los desarrollos asintóticos, fijémonos en la tabla siguiente.



$$f_5(n) = \log(n! 5^{-n})$$



$$f_{25}(n) = \log(n! 25^{-n})$$



$$f_{50}(n) = \log(n! 50^{-n})$$

Figura 1.10: Comparación de las acotaciones para el resto del desarrollo asintótico de $F(z)$, dependiendo del valor de z .

Observamos que para valores muy pequeños la aproximación no es buena. En cambio para $z = 10$ y $z = 25$ podemos observar que podemos lograr una aproximación con 3 cifras significativas con menos de 10 sumandos, lo que implica una gran eficiencia que con la serie de potencias convergente no podemos garantizar. Estos valores se han tomado de [2, pág. 3].

z	$I(z)$	$S_0(z)$	$S_1(z)$	$S_2(z)$	$S_3(z)$	$S_4(z)$	$S_5(z)$	$S_6(z)$
1	0.59635	1	0	2	-4			
2	0.72266	1	0.5	1	0.25	1.75		
3	0.78625	1	0.66667	0.88889	0.66667	0.96296	0.46914	
5	0.85211	1	0.8	0.88	0.832	0.8704	0.832	0.87808
10	0.91563	1	0.9	0.92	0.914	0.9164	0.9152	0.91592
25	0.9631	1	0.96	0.9632	0.96282	0.96288	0.96287	0.96287

Figura 1.11: Tabla de valores exactos y aproximados de la función $I(z)$

Del ejemplo podemos concluir que el uso del desarrollo asintótico para obtener valores aproximados de una función requiere el estudio de la variación de $|R_N^F(z)|$ con respecto a N y determinar para qué N es este valor mínimo, lo que nos da el número de sumandos con el que conseguimos precisión máxima. En el caso favorable de poder truncar eficientemente el desarrollo, esta técnica tiene una alta capacidad para proporcionar soluciones cada vez más exactas a medida que se suman más términos, siempre sin sobrepasar el umbral comentado de precisión.

Capítulo 2

Desarrollos asintóticos de integrales del tipo Laplace

En el segundo capítulo nos centraremos en calcular los desarrollos asintóticos de las funciones que llamaremos del tipo Laplace, para valores de z *grandes*:

$$F_\lambda(z) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} f(t) e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0. \quad (2.1)$$

Les hemos llamado así por el hecho de que son justamente la transformada de Laplace de las funciones $g(t) = f(t)t^{\lambda-1}$. De hecho, es imprescindible para que la función F_λ tenga sentido, que z esté dentro del dominio de convergencia de la transformada de Laplace de g ; por ello, pediremos que su módulo sea grande. Las propiedades de la transformada de Laplace se presentan con más detalle en el apéndice A.

Para calcular el desarrollo asintótico de las funciones F_λ , vamos a trabajar con el Lema de Watson que nos dará el valor de este desarrollo para funciones f que cumplen unas propiedades muy concretas. En segundo lugar, veremos cuáles son las formas más comunes de generalizar este resultado a funciones que no sigan la estructura tan concreta de la función (2.1). Los textos que seguiremos en este capítulo son [8], [11] y [13].

2.1. Lema de Watson

En esta primera sección abordaremos el resultado principal del capítulo. Empezaremos dando unos resultados preliminares que nos facilitarán las cuentas a la hora de demostrar el lema de Watson. Además, presentaremos diversas versiones del teorema y destacaremos casos particulares en los que el Lema de Watson resulta especialmente útil.

2.1.1. Resultados preliminares

A continuación trataremos dos problemas técnicos que nos encontraremos a la hora de probar el lema de Watson. El primero se debe a la prolongación analítica de

las funciones F_λ , mediante la integración en semirrectas del plano complejo. Aquí trataremos de aclarar que siempre que la función $f(t)$ esté bien definida, podemos girar el camino de integración, prolongando así la función $F_\lambda(z)$ a sectores de mayor amplitud.

La segunda cuestión se debe al cálculo de integrales que se resuelven mediante la función Gamma de Euler, que van a ser muy comunes a lo largo de este capítulo. En el apéndice B se presentan los conocimientos requeridos sobre esta función especial, con los cuales demostraremos este segundo resultado.

Definición 2.1. Se dice que una función $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es de orden exponencial si existen constantes $M > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ y $R > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma|t|} \quad \text{para todo } t \in \mathcal{D} \text{ con } |t| \geq R.$$

Esta condición se denota por $f(t) = O(e^{\sigma|t|})$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Lema 2.2 ([8], pág. 108). *Sea q una función holomorfa definida en el sector no acotado*

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg(z) < \beta\}, \quad \text{tal que } \alpha < 0 < \beta.$$

Supongamos que existe $\mu < 1$ tal que $q(t) = O(|t|^{-\mu})$ cuando $t \rightarrow 0$, y que q es de orden exponencial, $q(t) = O(e^{\sigma|t|})$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, la integral

$$\int_0^{\infty e^{-i\theta}} q(t)e^{-zt} dt, \quad 0 \leq \theta \leq -\alpha - \delta, \quad (2.2)$$

está bien definida para valores z que cumplen $|\arg(z) - \theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$ y $|z|$ suficientemente grande. Además, si $-\frac{\pi}{2} + \theta < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$ y $|z|$ es suficientemente grande, se da la igualdad de integrales

$$I(z) = \int_0^\infty q(t)e^{-zt} dt = \int_0^{\infty e^{-i\theta}} q(t)e^{-zt} dt. \quad (2.3)$$

El camino de integración de (2.2) es la semirrecta $[0, \infty)$ girada con ángulo $-\theta$.

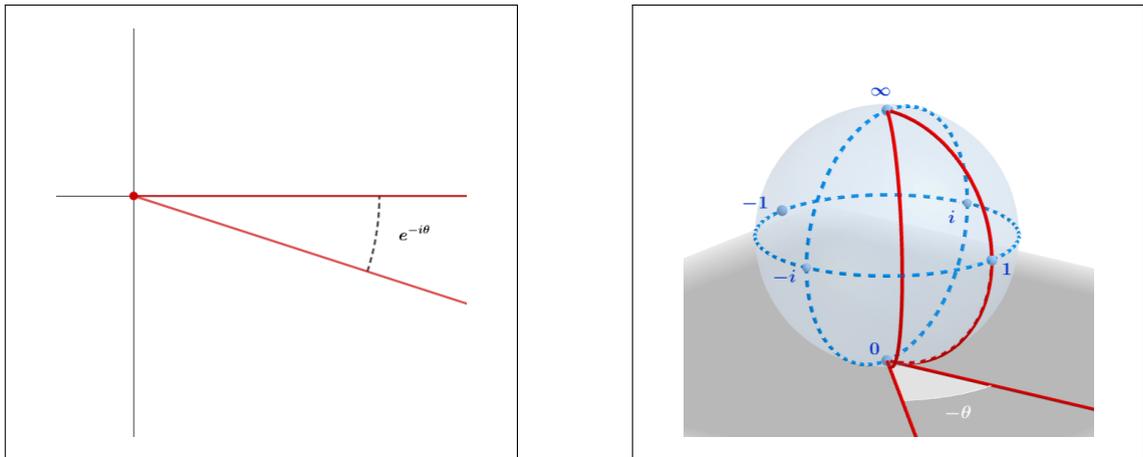


Figura 2.1: Representación de los caminos de integración de (2.3) en el plano complejo y en la esfera de Riemann, respectivamente.

Demostración. Antes de comprobar que las dos integrales en (2.3) coinciden, hay que asegurarse de que ambas tienen sentido y son convergentes. Por cómo hemos escogido θ , se tiene que la semirrecta $(0, \infty e^{-i\theta})$ está contenida en \mathcal{S} , y lo mismo ocurre claramente con el semieje $(0, \infty)$ (que corresponde al valor $\theta = 0$), por lo que ambas integrales tienen sentido. Como $q(t)$ es holomorfa en \mathcal{S} , el integrando es continuo, luego localmente integrable en ambos caminos. La integrabilidad en torno a 0 se debe a la condición $q(t) = O(|t|^{-\mu})$ cuando $t \rightarrow 0$, pues el factor e^{-zt} está localmente acotado en torno a 0 para z fijo. Por último, la integrabilidad en infinito depende del tamaño del integrando. Existen $M_0 > 0$ y $R_0 > 0$ tales que si $t \in \mathcal{D}$ y $|t| \geq R_0$ se tiene que $|q(t)| \leq M_0 e^{\sigma|t|}$. Entonces, si $\arg(t) = -\theta$ se tiene que

$$|q(t)e^{zt}| \leq M_0 e^{\sigma|t|} e^{-\operatorname{Re}(zt)} = M_0 e^{|t|(\sigma - |z| \cos(\arg(z) - \theta))}.$$

Por lo tanto, la integral sobre el semieje real (es decir, con $\theta = 0$) convergerá si se calcula para puntos z con

$$|\arg(z)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad |z| > \frac{\sigma}{\cos(\arg(z))},$$

y la integral sobre la semirrecta de dirección $-\theta$ lo hará para z con

$$|\arg(z) - \theta| < \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad |z| > \frac{\sigma}{\cos(\arg(z) - \theta)}.$$

En conclusión, ambas integrales convergen para puntos z de módulo suficientemente grande y en el sector de corona dado por la condición

$$-\frac{\pi}{2} + \theta < \arg(z) < \frac{\pi}{2}.$$

La igualdad de las integrales se prueba mediante el teorema de los residuos o el teorema de Cauchy-Goursat, puesto que $q(t)$ es holomorfa en \mathcal{S} . Empecemos definiendo el camino en el que queremos aplicar el resultado mencionado anteriormente. Sea $R > 0$ fijo y $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ el camino constituido por la concatenación de los cuatro caminos siguientes: sean $0 < \varepsilon < R$,

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(s) = s & s \in [\varepsilon, R], \\ \gamma_2(s) = R e^{-is\theta} & s \in [0, 1], \\ \gamma_3(s) = s e^{-i\theta} & s \in [\varepsilon, R], \\ \gamma_4(s) = \varepsilon e^{is\theta} & s \in [0, 1]. \end{cases}$$

Puesto que $\gamma^* \subset \mathcal{S}$, se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para deducir que

$$\int_{\gamma} q(t) e^{-zt} dt = 0.$$

Podemos separar la integral y hacer tender ε a 0:

$$\int_{\varepsilon}^R q(t) e^{-zt} dt = \int_{\varepsilon e^{-i\theta}}^{R e^{-i\theta}} q(t) e^{-zt} dt - \int_{\gamma_2} q(t) e^{-zt} dt + \int_{\gamma_4} q(t) e^{-zt} dt. \quad (2.4)$$

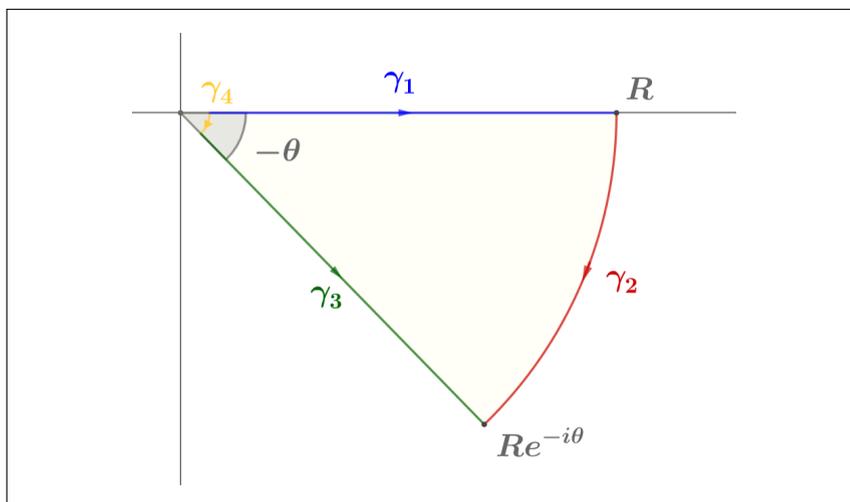


Figura 2.2: Camino γ orientado.

Vemos que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, las dos primeras integrales tienden, por el teorema de la convergencia dominada, a las integrales sobre los segmentos $[0, R]$ y $[0, Re^{-i\theta}]$, respectivamente. Estas integrales son convergentes por la condición impuesta sobre $q(t)$ cuando $t \rightarrow 0$. Probemos que la última integral se anula en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por la condición que acabamos de mencionar, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $M > 0$ de modo que $|q(t)| \leq M|t|^{-\mu}$ si $t \in \mathcal{D}$ y $|t| \leq \varepsilon_0$. Entonces, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ acotemos la integral:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} q(t)e^{-zt} dt \right| &= \text{long}(\gamma_4) \cdot \sup \{ |q(t)|e^{-\text{Re}(zt)} : t \in \gamma_4^* \} \\ &\leq \varepsilon \theta M \varepsilon^{-\mu} \sup \{ |e^{-|z|\varepsilon e^{i(\arg(z)+s\theta)}}| : s \in [0, 1] \}. \end{aligned}$$

Para z fijo y $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, el superior indicado está claramente uniformemente acotado, y como $\mu < 1$ se deduce inmediatamente que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} q(t)e^{-zt} dt = 0.$$

Volviendo a la igualdad (2.4) después de haber llevado a cabo este primer límite, tenemos que

$$\int_0^R q(t)e^{-zt} dt = \int_0^{Re^{-i\theta}} q(t)e^{-zt} dt - \int_{\gamma_2} q(t)e^{-zt} dt. \quad (2.5)$$

Ahora, nos centraremos en la tercera integral cuando hacemos tender R hacia infinito. Empecemos volviendo a aplicar la acotación habitual para integrales complejas:

$$\left| \int_{\gamma_2} q(t)e^{-zt} dt \right| = \sup \{ |q(t)|e^{-\text{Re}(zt)} : t \in \gamma_2^* \} \cdot \text{long}(\gamma_2).$$

La longitud de la curva es $R\theta$. En segundo lugar, acotemos la función en los puntos del soporte del arco. Razonando como antes,

$$\text{Re}(zt) = \text{Re}(zRe^{-is\theta}) = R|z| \text{Re}(e^{i(\arg(z)-s\theta)}) = R|z| \cos(\arg(z) - s\theta). \quad (2.6)$$

La condición del enunciado de que $|\arg(z) - \theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ garantiza que $|s\theta - \arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ cuando $s \in [0, 1]$, y la monotonía de la función coseno permite escribir la acotación siguiente:

$$(2.6) \geq |z|R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = |z|R \sin(\delta).$$

Para acabar con las acotaciones, utilicemos la condición de orden exponencial de la función q : si $R > R_0$,

$$\left| \int_{\gamma_2} q(t)e^{-zt} dt \right| \leq R\theta e^{-|z|R \sin \delta} M_0 e^{\sigma R} = M_0 R \theta e^{R(\sigma - |z| \sin \delta)}.$$

Concluimos que si $|z| > \frac{\sigma}{\sin \delta}$, la última expresión tiende hacia 0 cuando $R \rightarrow \infty$, y se concluye a partir de (2.5) que las integrales en ambas semirrectas coinciden.

El teorema de holomorfía bajo el signo integral garantiza que las funciones definidas por ambas integrales son holomorfas en sus correspondientes dominios de definición. Como coinciden en todos los puntos de un abierto, una es prolongación analítica de la otra, y definen una función holomorfa en la unión de sus dominios. Concretamente, el argumento de los puntos z donde es coherente la definición de la función es

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} + \theta.$$

En la figura 2.3 podemos observar cada uno de los sectores que hemos mencionado y en particular en el de la derecha vemos cómo se define la función $I(z)$ dependiendo del argumento de z . En el sector coloreado de verde debemos utilizar la integral con camino de integración real, en el sector azulado son válidas cualquiera de las dos integrales y en el rojo utilizamos la prolongación analítica dada por el giro del camino de integración.

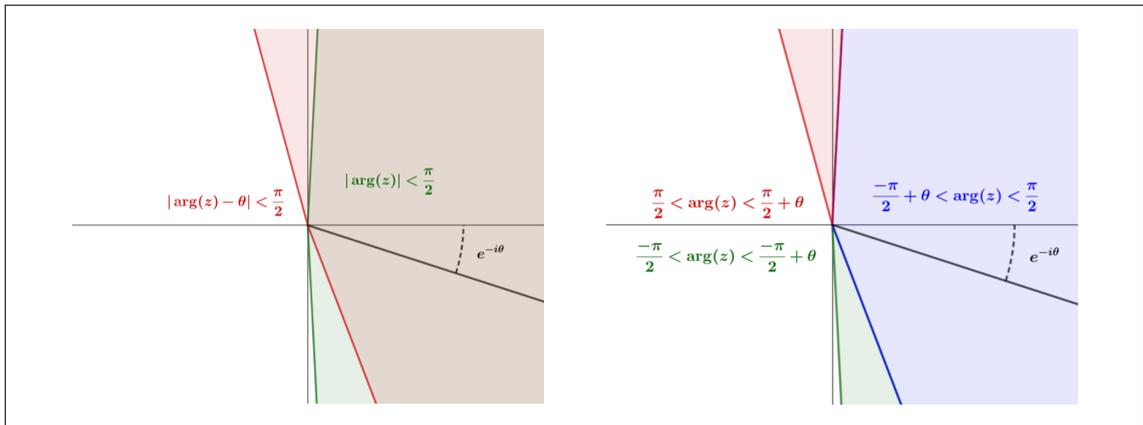


Figura 2.3: Valores de $\arg(z)$ en los que las integrales (2.2) y (2.3) son convergentes

Otra observación relevante es que se ha de exigir que $|z|$ sea suficientemente grande en función de σ y δ :

$$\sigma - |z| \sin \delta < 0 \iff |z| > \frac{\sigma}{\sin \delta},$$

lo que conlleva que el umbral mínimo de convergencia de la integral varíe en cada una de las nuevas semirrectas de integración. En otras palabras, fijado un θ y al hacer decrecer δ , entonces $\sin \delta$ decrece y por tanto $|z|$ ha de ser cada vez mayor para garantizar la convergencia. Incorporando todas estas condiciones a las que ya conocíamos, el dominio de convergencia no tiene forma de sector ni de corona, sino que adopta una estructura como la que podemos apreciar en la figura 2.4 (la región situada a la derecha de la curva en rojo). Esta condición se da en cada uno de los sectores, luego para dar un dominio de holomorfía de $I(z)$ tras la prolongación analítica debemos unir cada una de estas regiones. En resumen, el estudio de la geometría del conjunto en el que las integrales (2.3) convergen presenta cierta dificultad.

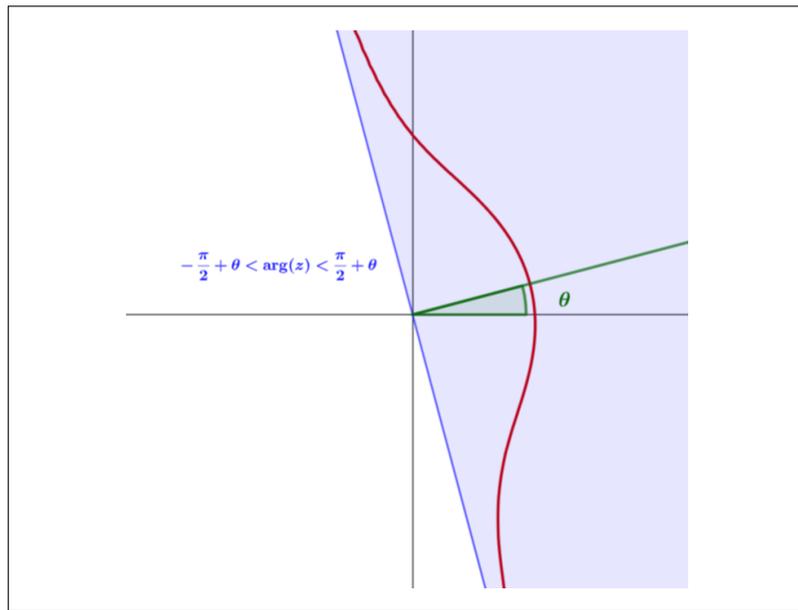


Figura 2.4: Dominio de convergencia para un θ fijo.

□

Observaciones 2.3. Este mismo resultado se puede probar también para valores de $\theta \in \left[\min \left\{ -\beta + \delta, -\frac{\pi}{2} \right\}, 0 \right]$ para considerar semirrectas en el primer cuadrante del plano complejo. El único cambio relevante es que ahora los valores de z deben encontrarse dentro del sector de ángulos $-\frac{\pi}{2} + \delta$ y $-\delta$. En conclusión, podemos prolongar la función $I(z)$ de forma analítica a valores de z mediante la identidad (2.3), siempre que q esté bien definida en el camino de integración seleccionado.

Lema 2.4. *Dados $z, \lambda \in \mathbb{C}$ con partes reales positivas, $\mu > 0$ y $|z|$ suficientemente grande, mediante el cambio de variable $u = \frac{t}{z}$ y considerando la rama principal del logaritmo, se tiene la igualdad*

$$\int_0^\infty t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-zt} dt = \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) z^{-\frac{n+\lambda}{\mu}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.7)$$

Demostración. En primer lugar, observamos que la integral de la cual partimos cumple todas las hipótesis del lema previo. Pues al ser $t \in (0, \infty)$, se tiene que

$t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Además, si $\arg(z) = -\theta$ por tener parte real positiva sabemos que z se encuentra en el semiplano complejo de la derecha, luego $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Sin pérdida de generalidad vamos a considerar que $\theta > 0$ y por tanto aplicando el lema 2.2,

$$\int_0^\infty t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-zt} dt = \int_0^{\infty e^{i\theta}} t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-zt} dt = \int_0^\infty (te^{i\theta})^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-|z|e^{-i\theta}te^{i\theta}} e^{i\theta} dt.$$

Al parametrizar correctamente la semirrecta sobre la que estamos integrando, llegamos a la última igualdad que se podría interpretar como un cambio de variable complejo $u = te^{i\theta}$, que no es más que un giro en sentido positivo de ángulo θ .

Por último, como $f(t) = t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-|z|t}$ es una función de variable real con llegada en el plano complejo, podemos considerar el cambio de variable real $u = \frac{t}{|z|}$:

$$\int_0^\infty t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-zt} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{|z|e^{-i\theta}} \left(\frac{t}{|z|e^{-i\theta}} \right)^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} dt = \frac{1}{z^{\frac{n+\lambda}{\mu}}} \int_0^\infty t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-t} dt.$$

Del apéndice B podemos reconocer sin dificultad que esta última integral es justamente la función Gamma evaluada en $\frac{n+\lambda}{\mu}$ que cumple $\operatorname{Re}\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) > 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Llegamos así a la igualdad que queríamos probar:

$$\int_0^\infty t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1} e^{-zt} dt = \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) z^{-\frac{n+\lambda}{\mu}}.$$

□

2.1.2. Lema de Watson para funciones definidas en \mathbb{R}_+

Habiendo probado estos resultados previos, vamos a enunciar y probar el resultado principal de este capítulo para el caso más sencillo de todos. Este es especialmente efectivo cuando conocemos de antemano cuál es la regularidad global y local (en el origen en el caso trasladado) de la función f . Se ha seguido esencialmente [8, pág. 71 y 113].

Teorema 2.5 (Lema de Watson).

Supongamos que:

1. La función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un número finito de discontinuidades.
2. $f(t) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ cuando $t \rightarrow 0^+$.
3. La integral

$$F_\lambda(z) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} f(t) e^{-zt} dt, \tag{2.8}$$

es convergente para $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ y valores suficientemente grandes de $\operatorname{Re}(z)$.

Entonces, la función $F_\lambda(z)$ admite el desarrollo asintótico generalizado

$$F_\lambda(z) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{z^{n+\lambda}}, \quad z \rightarrow \infty, \tag{2.9}$$

en el sector $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$, donde consideramos la rama principal del logaritmo a la hora de calcular $z^{n+\lambda}$.

Demostración. Llamaremos $g(t) = t^{\lambda-1}f(t)$ y su desarrollo asintótico generalizado (desarrollo de tipo Taylor si $\lambda \in \mathbb{N}$) se deduce fácilmente de la segunda hipótesis del enunciado:

$$g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda-1}, \quad t \rightarrow 0^+.$$

Por la hipótesis 3, $g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ y F_λ es justamente la transformada de Laplace de $g(t)$, que tendrá abscisa de convergencia $\sigma_g \neq \infty$ siempre que $\text{Re}(\lambda) > 0$ (ver el apéndice A).

Definimos la sucesión de funciones siguiente:

$$\phi_N(t) = g(t) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^{n+\lambda-1}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Por definición sabemos que $\phi_N(t) = O(t^{N+\lambda-1})$ cuando $t \rightarrow 0^+$, por lo que existen $K_N, \varepsilon_N > 0$ tales que si $t \in (0, \varepsilon_N)$ entonces

$$|\phi_N(t)| \leq K_N |t^{n+\lambda-1}| = K_N t^{n+\text{Re}(\lambda)-1}. \quad (2.10)$$

Por cómo hemos definido esta función, suma de dos funciones que admiten transformada, podemos plantearnos calcular su transformada de Laplace siempre que sea convergente: si $\text{Re}(z) > \sigma_g$

$$\begin{aligned} R_N(z) &= F_\lambda(z) - I_N(z), \\ \int_0^\infty \phi_N(t) e^{-zt} dt &= \int_0^\infty g(t) e^{-zt} dt - \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n t^{(n+\lambda-1)} \right) e^{-zt} dt. \end{aligned}$$

En primer lugar, calculemos el valor de $I_N(z)$. Dado que es una suma finita y la integral es lineal, $I_N(z)$ se reduce a una combinación lineal finita de las transformadas de Laplace de los monomios $t^{n+\lambda-1}$:

$$I_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \left(\int_0^\infty t^{n+\lambda-1} e^{-zt} dt \right) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{z^{n+\lambda}}.$$

Para llegar a la igualdad anterior, debemos aplicar el cambio de variable $u = \frac{t}{z}$, como hemos probado en lema 2.4. No nos podemos olvidar que $\text{Re}(z) > \sigma_g$ y que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{Re}(z) > 0$ por lo que no hay problemas de definición en ninguna de las igualdades.

En vista de que $I_N(z)$ nos da justamente la suma parcial del desarrollo asintótico, nos falta probar que $R_N(z) = O(z^{-(N+\lambda)})$ cuando $z \rightarrow \infty$, es decir que es el resto del desarrollo asintótico. Para ello, debemos estudiar por separado lo que ocurre en un entorno del 0 y en el infinito. Empecemos fijando un valor de $z \in \mathbb{C}$ y emplearemos la cota (2.10),

$$\left| \int_0^{\varepsilon_N} \phi_N(t) e^{-zt} dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon_N} |\phi_N(t) e^{-zt}| dt \leq \int_0^{\varepsilon_N} K_N t^{n+\operatorname{Re}(\lambda)-1} e^{-\operatorname{Re}(z)t} dt \quad (2.11)$$

y siguiendo los mismos pasos que con la integral anterior,

$$\left| \int_0^{\varepsilon_N} \phi_N(t) e^{-zt} dt \right| \leq \frac{K_N}{\operatorname{Re}(z)^{N+\operatorname{Re}(\lambda)}} \Gamma(N + \operatorname{Re}(\lambda)) = O(z^{-(N+\lambda)}). \quad (2.12)$$

La última igualdad se deduce de que $K_N \Gamma(N + \operatorname{Re}(\lambda))$ no dependen de z y que $\operatorname{Re}(z)^{n+\operatorname{Re}(\lambda)}$ y $z^{n+\lambda}$ son comparables. En efecto, como $\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\arg(z)) > 0$, cuando $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ con $\delta > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta &\implies \sin \delta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \leq \cos(\arg(z)), \\ &\implies |z| \sin \delta \leq \operatorname{Re}(z), \\ |z^{N+\lambda}| = |z|^{N+\operatorname{Re}(\lambda)} e^{-\arg(z) \operatorname{Im}(\lambda)} &\implies |z^{N+\lambda}| \leq (\operatorname{Re}(z))^{N+\operatorname{Re}(\lambda)} \frac{e^{-\arg(z) \operatorname{Im}(\lambda)}}{\sin \delta^{N+\operatorname{Re}(\lambda)}}. \end{aligned}$$

Para la cota de la otra parte de la integral, dado $X \in \mathbb{R}$ donde $X > \sigma_g$, debemos definir

$$\Phi(t) = \int_{\varepsilon_N}^t \phi_N(v) e^{-Xv} dv, \quad L_N = \sup_{t \in [\varepsilon_N, \infty)} |\Phi(t)|. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, si $\operatorname{Re}(z) > X$

$$\int_{\varepsilon_N}^{\infty} \phi_N(t) e^{-zt} dt = \int_{\varepsilon_N}^{\infty} \phi_N(t) e^{-(z-X)t} e^{-Xt} dt, \quad (2.14)$$

pudiendo aplicar la integración por partes (al considerar $\operatorname{Re}(z) > X$ nos aseguramos que $e^{-(z-X)t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$):

$$(2.14) = e^{-(z-X)t} \Phi(t) \Big|_{\varepsilon_N}^{\infty} + \int_{\varepsilon_N}^{\infty} e^{-(z-X)t} (z-X) \Phi(t) dt = (z-X) \int_{\varepsilon_N}^{\infty} e^{-(z-X)t} \Phi(t) dt.$$

Por último, la acotación que deducimos es la siguiente:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon_N}^{\infty} \phi_N(t) e^{-zt} dt \right| &= |z-X| \left| \int_{\varepsilon_N}^{\infty} e^{-(z-X)t} \Phi(t) dt \right| \\ &\stackrel{(2.13)}{\leq} |z-X| L_N \int_{\varepsilon_N}^{\infty} e^{-(\operatorname{Re}(z)-X)t} dt \\ &= \frac{|z-X| L_N}{(\operatorname{Re}(z)-X)} e^{-(\operatorname{Re}(z)-X)\varepsilon_N}. \end{aligned}$$

Observamos que para poder acotar esta última expresión, necesitamos imponer cierto control en el decrecimiento del divisor, por lo que sin pérdida de generalidad, vamos a imponer que $\operatorname{Re}(z) > 2X$. Repitiendo el mismo razonamiento que en la última igualdad de (2.12), tenemos que

$$\text{si } \operatorname{Re}(z) > 2X \implies |\arg(z-X)| \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \implies \frac{|z-X|}{\operatorname{Re}(z)-X} \leq \frac{1}{\cos(\varphi)}.$$

El ángulo φ podemos asegurarnos que se encuentra suficientemente lejos de $\frac{\pi}{2}$ por el hecho de que $\operatorname{Re}(z) - 2X > X > 0$. Para visualizar mejor el valor de este argumento, tenemos la figura 2.5.

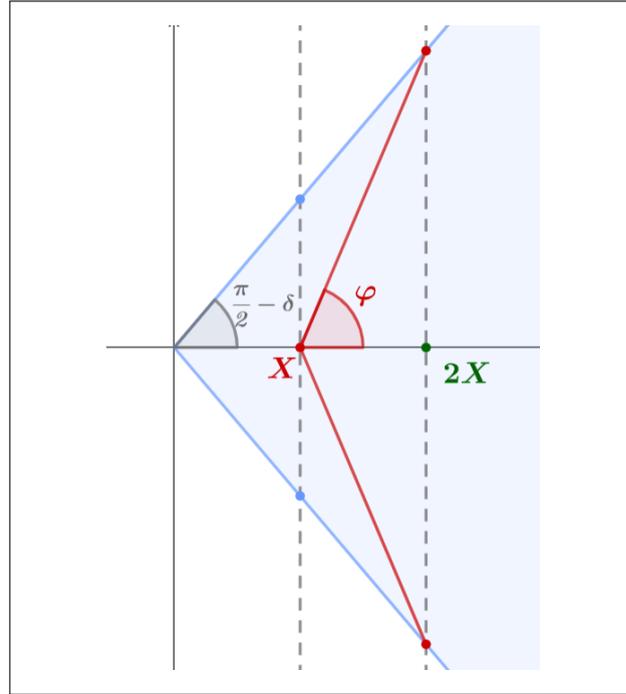


Figura 2.5: Condición $\operatorname{Re}(z) > 2X$.

Por último, deducimos que $e^{-(\operatorname{Re}(z)-X)\varepsilon_N} = O\left(e^{-\frac{\varepsilon_N}{\cos \varphi}|z-X|}\right)$. Sumando ambas partes de la integral, llegamos a lo que queríamos probar:

$$R_N(z) = O(z^{-(N+\lambda)}) + O\left(e^{-\frac{\varepsilon_N}{\cos \varphi}|z-X|}\right) = O(z^{-(N+\lambda)}).$$

Concluimos así que

$$F_\lambda(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{z^{n+\lambda}}, \quad z \rightarrow \infty$$

siempre que $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$. □

Continuación del ejemplo de la sección 1.3. Otra forma de calcular este desarrollo es hacer el cambio de variable

$$t = z(1+u) \implies dt = z du,$$

dándole a la función la estructura de transformada de Laplace:

$$F(z) = z \int_0^\infty \frac{e^{-zu}}{1+u} du = z \int_0^\infty e^{-zu} f(u) du. \quad (2.15)$$

Sabemos que la función $f(t)$ está bien definida en \mathbb{R}_+ y admite desarrollo en serie de Taylor siempre que $t \in [0, 1)$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Además, sabemos que $F(z)$ es convergente para valores grandes de $z \in \mathbb{R}_+$. Por lo tanto, podemos aplicar el Lema de Watson 2.5, teniendo en cuenta que $\lambda = 1$, para llegar al mismo desarrollo que en la sección anterior:

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty.$$

No obstante, hemos ampliado el dominio en el que podemos manejar esta relación. Pues en la sección anterior solo hablábamos de valores reales y no negativo de z , pero el Lema de Watson nos asegura que es válido siempre que $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ con $\delta > 0$. Es decir, el desarrollo asintótico es valido en el semiplano complejo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$:

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty \text{ en } \mathcal{D}.$$

Ejemplo 2.6. El desarrollo $f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $t \rightarrow 0$ lo podemos expresar como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^n + t^N f_N(t), \quad N = 0, 1, \dots$$

donde $f_N(t) = O(1)$ si $t \rightarrow 0$. La razón principal es que sabemos que el resto N -ésimo de un desarrollo asintótico generalizado es $R_N(t) = o(t^N)$ y por tanto,

$$\begin{aligned} t^N f_N(t) &= t^N a_N + R_N(t) = t^N a_N + o(t^N) & t \rightarrow 0, \\ f_N(t) &= a_N + \frac{o(t^N)}{t^N} = O(1) & t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si además suponemos que cada f_N es de orden exponencial, existirán las constantes reales positivas M_N , σ y t_0 tales que

$$|f_N(t)| \leq M_N e^{\sigma t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Volviendo a la expresión de la función $F_\lambda(z)$ dada en el teorema,

$$F_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{\Gamma(n + \lambda)}{z^{n+\lambda}} + \int_0^\infty t^{\lambda+N-1} f_N(t) e^{-zt} dt = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{\Gamma(n + \lambda)}{z^{n+\lambda}} + R_N(z, \lambda),$$

nos encontramos con una acotación para el error de manera más directa: si $\operatorname{Re}(z) > 0$ y suponemos que $t_0 = 0$

$$|R_N(z, \lambda)| \leq \int_0^\infty |f_N(t)| |t^{\lambda+N-1} e^{-zt}| dt \leq M_N \int_0^\infty |t^{\lambda+N-1} e^{-(z-\sigma)t}| dt.$$

Para calcular esta última integral vamos a ajustar la función gamma a los parámetros con los que trabajamos:

$$|R_N(z, \lambda)| \leq M_N \int_0^\infty t^{\operatorname{Re}(\lambda)+N-1} e^{-(\operatorname{Re}(z)-\sigma)t} dt = M_N \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(\lambda) + N)}{(\operatorname{Re}(z) - \sigma)^{\operatorname{Re}(\lambda)+N}}.$$

Un caso muy usual es que la función f no esté definida en el origen pero que admita una prolongación dada por una expresión de la forma

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{\frac{n}{\mu}}, \quad t \longrightarrow 0^+,$$

donde $\mu > 0$. Un ejemplo sencillo en la que se da este suceso es en la función compuesta $f(t) = \sin(\sqrt{t})$ donde $t \in \mathbb{R}_+$ y podemos dar la expresión siguiente en un entorno del origen:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{\frac{2n+1}{2}}, \quad t \longrightarrow 0^+.$$

Por lo tanto, el siguiente resultado que enunciaremos y demostraremos en esta sección tiene como propósito ilustrar un segundo caso en el que es posible aplicar el lema de Watson. Se ha seguido [13, pág. 20].

Corolario 2.7. *Supongamos que:*

1. La función $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene un número finito de discontinuidades y es localmente integrable.
2. $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{\frac{n}{\mu}}$ cuando $t \rightarrow 0^+$ y $\mu > 0$.
3. La función $t^{-1}f(t)$ es de orden exponencial cuando t tiende a infinito, es decir, existen $R, K > 0$ y $\sigma \geq 0$ tales que, para todo $t > R$,

$$|t^{-1}f(t)| < Ke^{\sigma t}.$$

Entonces, la función $F^\mu(z)$ admite el desarrollo asintótico generalizado

$$F^\mu(z) = \int_0^\infty t^{-1}f(t)e^{-zt} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma\left(\frac{n}{\mu}\right) z^{-\frac{n}{\mu}}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

en el sector $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$, donde consideramos la rama principal del logaritmo a la hora de calcular $z^{\frac{n}{\mu}}$.

Demostración. Para probar este resultado seguiremos el mismo procedimiento que en el teorema 2.5. Asimismo, por ser $g(t) = t^{-1}f(t)$ de orden exponencial, sabemos $F_\mu(z) = \mathcal{L}(g)(z)$ y que su abscisa de convergencia es menor o igual que σ .

Definamos

$$\phi_N(t) = g(t) - \sum_{n=1}^N a_n t^{\frac{n}{\mu}-1},$$

y para cada $\operatorname{Re}(z) > \sigma$,

$$R_N(z) = F_\mu(z) - I_N(z),$$

$$\int_0^\infty \phi_N(t)e^{-zt} dt = \int_0^\infty g(t)e^{-zt} dt - \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{N-1} a_n t^{\frac{n}{\mu}-1} e^{-zt} \right) dt.$$

En primer lugar, tenemos que $I_N(z)$ es una suma de integrales convergentes que vienen dadas en función de la función gamma. Utilizando el resultado 2.4, tenemos que

$$I_N(z) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \Gamma\left(\frac{n}{\mu}\right) z^{-\frac{n}{\mu}}.$$

Puesto que I_N nos da los primeros sumandos del desarrollo asintótico que queremos probar, nos falta probar que $R_N(z) = O(z^{-\frac{N}{\mu}})$. Para ello, tomamos $\varepsilon_N > 0$ y dividiremos la integral en

$$R_N(z) = R^1(z) + R^2(z) = \int_0^{\varepsilon_N} \phi(t)e^{-zt} dt + \int_{\varepsilon_N}^{\infty} \phi(t)e^{-zt} dt.$$

Esta división se debe a las hipótesis del enunciado, pues en la primera región podemos aplicar la definición de desarrollo asintótico y en la segunda la de orden exponencial.

Empecemos con $R^1(z)$, para ello utilizaremos la condición de que si $t \in (0, \varepsilon_N)$, existe K_N tal que

$$|\phi_n(t)| \leq K_N t^{\frac{N}{\mu}-1}.$$

Por lo tanto, volvemos a caer en una integral que podemos acotar mediante la función gamma:

$$|R^1(z)| \leq K_N \int_0^{\varepsilon_N} t^{\frac{N}{\mu}-1} e^{-\operatorname{Re}(z)t} dt \leq \frac{K_N}{\operatorname{Re}(z)^{\frac{N}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{N}{\mu}\right) = O\left(z^{-\frac{N}{\mu}}\right),$$

teniendo en cuenta que la última igualdad hemos vuelto a echar mano de la condición probada en (2.12).

En segundo lugar, la condición de orden exponencial nos facilita la acotación de la cola de la integral. Notemos que las potencias $t^{\frac{k}{N}}$ son de orden exponencial para cada $k \in \mathbb{N}$, luego ϕ_N también lo es. Por lo tanto, si $\tilde{\sigma} > 0$ es la nueva constante del orden exponencial, siguiendo el mismo procedimiento que en la demostración del teorema 2.5, llegamos a que

$$|R^2(z)| \leq M_N \Gamma\left(\frac{N}{\mu}\right) (\operatorname{Re}(z) - \tilde{\sigma})^{-\frac{N}{\mu}} = O\left(z^{-\frac{N}{\mu}}\right).$$

Por lo tanto, sumando cada una de estas acotaciones, llegamos a que $R_N(z) = O(z^{-\frac{N}{\mu}})$ y que el desarrollo asintótico de $F_\mu(z)$ viene dado por

$$F^\mu(z) = \int_0^{\infty} t^{-1} f(t) e^{-zt} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma\left(\frac{n}{\mu}\right) z^{-\frac{n}{\mu}}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Finalmente, veamos para qué valores de z es coherente este desarrollo asintótico. Observemos que para que la última integral

$$\int_R^{\infty} e^{(\tilde{\sigma}-\operatorname{Re}(z))t} dt,$$

sea convergente, se debe cumplir que $\tilde{\sigma} - \operatorname{Re}(z) > 0$, asimismo esta condición es demasiado débil como hemos visto anteriormente. Por lo tanto, la parte real de z debe ser suficientemente grande como para cumplir que $2\tilde{\sigma} < \operatorname{Re}(z)$, en otras palabras, $|z|$ debe ser grande y $|\arg(z - X)| < \varphi$. \square

Observación 2.8. Conociendo estas dos versiones del lema de Watson, es fácil comprobar que si f cumple las hipótesis del teorema que hemos llamado Lema de Watson, con la diferencia de que

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\frac{n+\lambda-\mu}{\mu}}, \quad t \rightarrow 0^+,$$

entonces, su desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow \infty$ es el siguiente:

$$\int_0^{\infty} t^{\frac{\lambda}{\mu}-1} f(t) e^{-zt} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) z^{-\frac{n+\lambda}{\mu}}, \quad |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

No vamos a probar este resultado, pues es volver a repetir las cuentas del teorema pero teniendo en cuenta las aportaciones del nuevo parámetro μ .

2.1.3. Lema de Watson para funciones definidas en sectores de corona no acotados

A continuación probaremos un resultado, tomado de [8, pág. 114], que amplía la utilidad del lema de Watson a funciones analíticas definidas en un dominio que contenga a la semirrecta $[0, \infty)$. Asimismo, esto afectará a los valores de z con los que podemos aplicar el desarrollo asintótico. Es decir, cuanto mayor sea el dominio de definición de f , mayor será el sector en el que podremos utilizar el desarrollo asintótico.

Teorema 2.9 (Lema de Watson extendido).

Suponiendo,

1. f es analítica en el interior de un sector

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg(z) < \beta\}, \quad \text{siendo} \quad \alpha < 0 < \beta.$$

2. Para cada $\delta \in (0, \frac{\beta-\alpha}{2})$ se cumple

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad t \rightarrow 0$$

en el sector $\mathcal{D}_\delta = \{z : \alpha + \delta < \arg(z) < \beta - \delta\}$.

3. Existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = O(e^{\sigma|t|})$ cuando $t \rightarrow \infty$ en \mathcal{D}_δ .

Entonces la integral

$$F_\lambda(z) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} f(t) e^{-zt} dt,$$

o su continuación analítica admite el desarrollo asintótico

$$F_\lambda(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n + \lambda)}{z^{n+\lambda}}, \quad z \rightarrow \infty$$

en el sector

$$-\beta - \frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg(z) \leq -\alpha + \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Demostración. En primer lugar, reparamos en que si restringimos la función f a la semirrecta real positiva, se cumplen todas las condiciones necesarias del Lema de Watson. Pues, la primera y segunda condición son equivalentes si sólo nos fijamos en esta región del plano y que f sea de orden exponencial nos garantiza la convergencia de la función integral $F(\lambda)$ como en el teorema mencionado. Luego,

$$F_\lambda(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n + \lambda)}{z^{n+\lambda}}, \quad z \rightarrow \infty$$

en el sector $|\arg(z)| \leq \frac{\pi-\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

El segundo paso a tomar es utilizar el lema 2.2 para poder aplicar el lema de Watson en estos nuevos caminos de integración. Es decir, dado $\theta \in [0, -\alpha - \frac{\delta}{2}]$, podemos extender por continuidad la función F_λ a todo el sector $\mathcal{D}_{\frac{\delta}{2}}$:

$$I_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t) dt = \int_0^{\infty e^{-i\theta}} e^{-zt} g(t) dt = I_2(z),$$

siempre que $|\arg(ze^{-i\theta})| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ y considerando $g(t) = t^{\lambda-1} f(t)$. Parametrizando esta segunda semirrecta, llegamos a una integral que cumple todas las condiciones del resultado principal:

$$I_2(z) = \int_0^\infty e^{-z\rho e^{-i\theta}} g(\rho e^{-i\theta}) e^{-i\theta} d\rho = e^{-i\theta} \int_0^\infty e^{-w\rho} h(\rho) d\rho = e^{-i\theta} H_\lambda(w),$$

donde $w = ze^{-i\theta}$ y $h(\rho) = g(\rho e^{-i\theta})$. La primera condición es trivial sabiendo que la rotación considerada no nos saca del dominio de definición de f . En cuanto al desarrollo asintótico de h ,

$$h(\rho) = (\rho e^{-i\theta})^{\lambda-1} f(\rho e^{-i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\rho e^{-i\theta})^{n+\lambda-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \rho^{n+\lambda-1},$$

cuando $\rho \rightarrow 0$. La condición de que estemos en el dominio $\mathcal{D}_{\frac{\delta}{2}}$ está asegurada por la elección de θ . Por último, sabemos que la integral que define $e^{-i\theta} H_\lambda(w)$ es convergente y es la prolongación analítica de $F_\lambda(z)$.

El lema de Watson nos dice que

$$H_\lambda(w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \frac{\Gamma(n + \lambda)}{w^{n+\lambda}}, \quad w \rightarrow \infty,$$

en el sector $|\arg(w)| \leq \frac{\pi-\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$, y deshaciendo todas las transformaciones llegamos al desarrollo

$$I_2(z) = e^{-i\theta} H_\lambda(z) \sim e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-i\theta})^{n+\lambda-1} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{(ze^{-i\theta})^{n+\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{z^{n+\lambda}}$$

en el sector $|\arg(ze^{-i\theta})| \leq \frac{\pi-\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Veamos por último cuál es el sector de definición de z . Sabemos que $\theta \in [0, -\alpha - \frac{\delta}{2}]$ y que para poder extender la integral de forma analítica y utilizar el desarrollo asintótico, se debe cumplir que $|\arg(ze^{-i\theta})| \leq \frac{\pi-\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Concluimos así que

$$-\frac{\pi-\delta}{2} \leq \arg(z) - \theta \leq \frac{\pi-\delta}{2} \implies \arg(z) \leq \frac{\pi-\delta}{2} + \theta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha - \delta.$$

De forma análoga, si consideramos $-\theta \in [0, \beta - \frac{\delta}{2}]$, podemos probar que el desarrollo es válido en el sector

$$-\beta - \frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg(z) \leq -\alpha + \frac{\pi}{2} - \delta.$$

□

Observaciones 2.10.

- Observemos que si $\beta - \alpha > \pi$, conseguimos un desarrollo válido para más de una hoja de la superficie de Riemann del logaritmo. Es decir, es válido para valores de z que toman argumentos en un intervalo de mayor longitud que 2π . En consecuencia, a la hora de hacer la prolongación asintótica probada en el lema previo 2.2, debemos tener en cuenta la determinación del argumento en cada uno de los casos.
- Al considerar que la función f sea de orden exponencial, podemos acotar con mayor facilidad el error cometido y no como lo hicimos en la demostración del Lema de Watson inicial. Esta simplificación de las acotaciones la vemos reflejada en el ejemplo 2.6.

Continuación del ejemplo de la sección 1.3. Ahora, consideremos las funciones integrales definidas por

$$\operatorname{si}(z) = - \int_z^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad \operatorname{Ci}(z) = - \int_z^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt, \quad (2.17)$$

y, mediante la relación del seno y coseno complejos

$$\sin(z) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad (2.18)$$

podemos establecer una conexión con la función $E_1(z)$ de la sección 1.3. Teniendo en cuenta que con el cambio de variable (2.15), podemos aplicar el Lema de Watson

extendido en el dominio $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg(z) < \pi\}$ y garantizar que el desarrollo asintótico

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

es válido para todo z que cumpla que

$$-\pi - \frac{\pi}{2} + \delta = -\frac{3\pi}{2} + \delta \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2} - \delta = \pi + \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Es decir, el desarrollo es válido para argumentos dentro del intervalo $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, que es un intervalo de longitud mayor que 2π . Para no complicar más las cuentas, vamos a suponer que $z \in \mathbb{R}_{>0}$ y que vamos a trabajar con la rama principal del logaritmo. Entonces, la diferencia de funciones a continuación está bien definida,

$$E_1(iz) - E_1(-iz) = \int_{iz}^{i\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{-iz}^{-i\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (2.19)$$

entendiendo que los caminos de integración son las semirrectas que unen los números complejos iz y $-iz$ con el infinito, como vemos en la figura 2.6. Es decir, nos aproximamos al infinito con números complejos imaginarios puros de parte imaginaria positiva y negativa respectivamente.

Mediante la parametrización de las curvas, se tiene que

$$(2.19) = i \int_z^{\infty} \frac{e^{-it}}{it} dt - (-i) \int_z^{\infty} \frac{e^{it}}{-it} dt = -2i \int_z^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt. \quad (2.20)$$

Análogamente, podemos relacionar la función $E_1(z)$ y $\text{Ci}(z)$ con la suma de estas mismas funciones:

$$E_1(iz) + E_1(-iz) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-it}}{t} dt + \int_z^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt = -2 \int_z^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, en virtud de la linealidad de los desarrollos asintóticos y del Lema de Watson extendido, podemos conseguir fácilmente el desarrollo de estas dos nuevas funciones. Las cuentas que hay que hacer se basan en la agrupación de los términos dependiendo de las potencias de la unidad imaginaria:

$$\begin{aligned} E_1(iz) - E_1(-iz) &\sim \frac{e^{-iz}}{iz} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(iz)^n} - \frac{e^{iz}}{-iz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(iz)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(iz)^{2n}} \left(\frac{e^{-iz} + e^{iz}}{iz} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(iz)^{2n+1}} \left(\frac{-e^{-iz} + e^{iz}}{iz} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(iz)^{2n}} \left(\frac{2 \cos(z)}{iz} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(iz)^{2n+1}} \left(\frac{2 \sin(z)}{z} \right) \\ \implies \text{si}(z) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n!}{z^{2n}} \left(\frac{-\cos(z)}{z} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{z^{2n}} \left(\frac{-\sin(z)}{z^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_1(iz) + E_1(-iz) &\sim \frac{e^{-iz}}{iz} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(iz)^n} + \frac{e^{iz}}{-iz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(iz)^n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(iz)^{2n}} \left(\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{iz} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(iz)^{2n+1}} \left(\frac{-e^{-iz} - e^{iz}}{iz} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(iz)^{2n}} \left(\frac{-2 \sin(z)}{z} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(iz)^{2n+1}} \left(\frac{-2 \cos(z)}{iz} \right) \\
 \implies \text{Ci}(z) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n!}{z^{2n}} \left(\frac{\sin(z)}{z} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{z^{2n}} \left(\frac{-\cos(z)}{z^2} \right).
 \end{aligned}$$

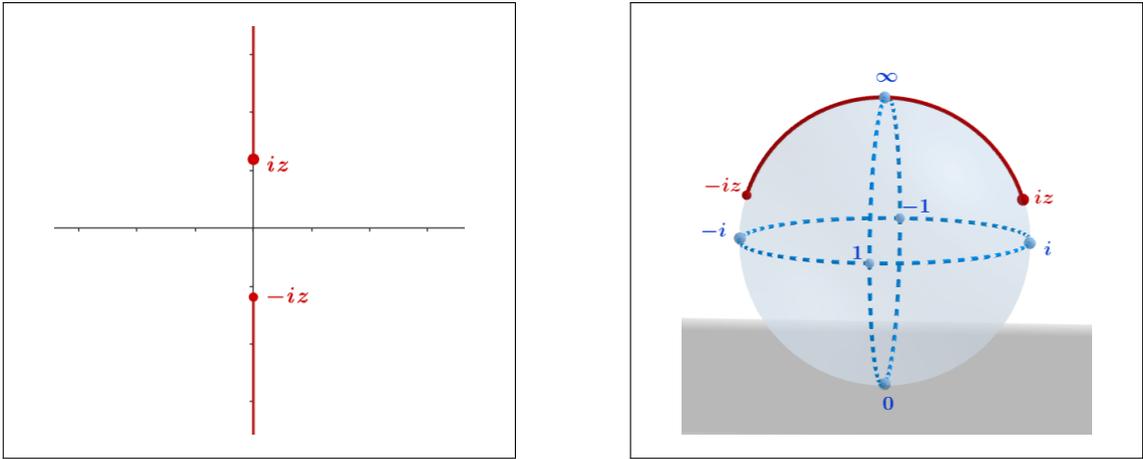


Figura 2.6: Representación de los caminos de integración de (2.19) en el plano complejo y en la esfera de Riemann, respectivamente.

Luego, si llamamos f y g a las dos funciones que cumplen que

$$\begin{aligned}
 \text{si}(z) &= -\cos(z)f(z) - \sin(z)g(z), \\
 \text{Ci}(z) &= -\cos(z)g(z) + \sin(z)f(z),
 \end{aligned}$$

sabemos que sus desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$ son justamente

$$f(z) \sim \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2!}{z^2} + \frac{4!}{z^4} - \frac{6!}{z^6} + \dots \right), \quad g(z) \sim \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \frac{7!}{z^6} + \dots \right).$$

Hemos construido así los desarrollos asintóticos de otras dos nuevas funciones especiales válidos para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|\arg(iz)| < \frac{3\pi}{2}$.

Observación 2.11. En los teoremas 2.5 y 2.9 hemos exigido que $\text{Re}(\lambda) > 0$, tomando la forma normalizada de la integral $F_\lambda(z)$ conseguimos relajar esta condición. La nueva función integral con la que vamos a querer trabajar es la siguiente:

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} f(t) e^{-zt} dt.$$

Dado que la única diferencia radica en el producto por una constante, y gracias a la linealidad de los desarrollos asintóticos ya demostrada en el lema 1.13, conocemos el desarrollo asintótico de esta nueva función:

$$G_\lambda(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\lambda)_n}{z^{n+\lambda}}, \quad z \rightarrow \infty.$$

El símbolo de Pochhammer $(\lambda)_n$ se define de la forma siguiente

$$(\lambda)_0 = 1, \quad (\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + n - 1), \quad n \geq 1.$$

Está bien definido para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y generaliza el concepto de factorial o número combinatorio a valores no naturales. La prueba de que tiene sentido considerar esta integral para valores λ tales que $\text{Re}(\lambda) < 0$, se lleva a cabo mediante la reparametrización del camino $t^\lambda - 1 = u$. Dado que esto es simplemente una observación de una generalización del Lema de Watson y la demostración es puramente mecánica y extensa, no la presentaremos, indicando que se puede encontrar en la referencia [9].

Ejemplo 2.12. Un ejemplo sencillo en el que el símbolo de Pochhammer nos agiliza la notación es el caso de la función gamma incompleta, que encontramos en [3, pág. 14]. Pues utilizando una de las identidades dada en el apéndice B,

$$\Gamma(a, z) = \frac{e^{-z}}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty e^{-zt} \frac{t^{-a}}{1+t} dt = G_{1-a}(z).$$

Puesto que la función $f(t) = \frac{1}{1+t}$ cumple todas las propiedades del Lema de Watson extendido, su desarrollo asintótico es

$$\Gamma(a, z) \sim e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-a)_n}{z^{n+1-a}}. \quad (2.22)$$

Además, conociendo la identidad dada en el apéndice B,

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}, z\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{Erfc}(\sqrt{z}) = \int_{\sqrt{z}}^\infty e^{-t^2} dt,$$

donde $\text{Erfc}(z)$ es la función de error complementario de la función gaussiana, dar el desarrollo asintótico de esta última función es inmediato:

$$2\text{Erfc}(\sqrt{z}) \sim \frac{e^{-z}}{2\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{z^n}. \quad (2.23)$$

Este desarrollo asintótico será útil para la demostración del teorema 3.3, el cual establece uno de los casos más favorables para aplicar el método de Laplace.

Observación 2.13. Otra generalización del lema de Watson viene dada por considerar funciones que admiten desarrollos asintóticos generalizados de la forma

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\lambda_n - 1}, \quad t \rightarrow 0^+,$$

donde la sucesión de números complejos $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ cumplen la condición de monotonía

$$\operatorname{Re}(\lambda_{n+1}) > \operatorname{Re}(\lambda_n) > \cdots > \operatorname{Re}(\lambda_0) > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, si $t \in \mathbb{R}_+$ y trabajamos en la rama principal del logaritmo, tenemos que

$$|t^{\lambda_0-1}| = e^{(\operatorname{Re}(\lambda_0)-1)\ln t} < e^{(\operatorname{Re}(\lambda_1)-1)\ln t} < \cdots < e^{(\operatorname{Re}(\lambda_n)-1)\ln t},$$

que se comportan de manera similar a la sucesión de potencias $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$. No obstante, puede que no conozcamos ninguna otra característica del carácter de convergencia de la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, lo que da lugar a una nueva área de estudio. No vamos a llevar a cabo las cuentas requeridas, puesto que son análogas al caso probado pero teniendo en mente la definición de desarrollo asintótico generalizado, véase [13, pág. 22] y [14]. El resultado es que

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(\lambda_n) z^{-\lambda_n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

cuando $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$.

2.2. Integrales con estructuras más generales

Las integrales del tipo (2.1) son muy frecuentes en los ámbitos aplicados de las matemáticas, física, etc. puesto que son un tipo de transformadas de Laplace. Muchas de las integrales con las que vamos a querer trabajar tienen estas mismas características aunque a primera vista no lo aparenten. Por ello, en esta sección nos centraremos en estudiar alguna de las estrategias que podemos llevar a cabo para darle la estructura que queremos a la integral.

Ejemplo 2.14. Siguiendo [12], consideremos la integral paramétrica

$$F_{\lambda}(z) = \int_0^1 t^{\lambda-1} e^{-zp(t)} dt, \quad p(t) = \frac{t}{1-t}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0,$$

para los valores de z en los cuales sea convergente y hagamos el cambio de variable real

$$\begin{cases} u = \frac{t}{1-t} & \leftrightarrow & \frac{u}{1+u} = t \\ & & \frac{du}{(1+u)^2} = dt \end{cases}$$

$$F_{\lambda}(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{\lambda-1} e^{-zu} \frac{du}{(1+u)^2} = \int_0^{\infty} u^{\lambda-1} e^{-zu} f(u) du,$$

siendo $f(u) = (1+u)^{-(\lambda+1)}$ una función compleja que, si consideramos la rama principal del logaritmo, es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$. Esta nueva integral sigue la estructura de la transformada de Laplace, f cumple todas las condiciones de regularidad requeridas y por definición sabemos que existen valores $z \in \mathbb{C}$ de parte real suficientemente grande en donde la integral converge. Por consiguiente, podemos aplicar el Lema de Watson a esta función para calcular su desarrollo asintótico. Utilizando la fórmula del binomio de Newton generalizada para $u \in [0, 1)$,

$$\frac{1}{(1+u)^{\lambda+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\lambda-1}{n} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n}{n} (-u)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda+n)_n}{n!} u^n,$$

conseguiamos los coeficientes $\{a_n\}$ y concluimos que

$$\begin{aligned} F_\lambda(z) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda+n)_n \Gamma(\lambda+n)}{n! z^{n+\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+2n) \Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+n) n!} z^{-n-\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+2n)}{n!} z^{-n-\lambda}, \quad z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Cuando $z \rightarrow \infty$ y $\arg(z) \in (-\frac{3\pi}{2} + \delta, \frac{3\pi}{2} - \delta)$, teniendo siempre en cuenta las prolongaciones analíticas mencionadas en 2.2.

2.2.1. Transformaciones a la forma estándar

Siguiendo con la idea del ejemplo 2.14 vamos a dar una transformación general para las funciones que cumplen las condiciones que mencionaremos a continuación. Dado $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, definimos la función

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-zp(t)} q(t) dt$$

que cumple las tres condiciones siguientes:

- a) $F_\lambda(z)$ converge para $\operatorname{Re}(z)$ suficientemente grandes.
- b) $p(t)$ y $q(t)$ son analíticas en el disco centrado en el origen y radio $r > 0$ y en el interior de un sector de la forma $\mathcal{D} = \{z : \alpha < \arg(z) < \beta\}$, siendo $(\alpha < 0 < \beta)$. De hecho, dentro de estos dominios las funciones admiten desarrollos en serie de potencias, siendo en particular

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n,$$

los desarrollos de Taylor centrados en el origen de la función p y q respectivamente.

- c) $p'(t) > 0$ cuando $t \geq 0$ y $q(0) \neq 0$, luego los coeficientes de los desarrollos anteriores deben cumplir que $p_1 > 0$ y $q_0 \neq 0$.

Que la derivada de p sea no nula hace que la función sea inyectiva en $(0, \infty)$ y por tanto tenga sentido considerar el cambio de variable $p(t) = p_0 + p_1 u$ en la integral F_λ :

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty u^{\lambda-1} e^{-z(p_0+p_1 u)} f(u) du,$$

donde la función $f(u) = \left(\frac{t}{u}\right)^{\lambda-1} q(t) \frac{dt}{du}$ denota la transformación ocurrida en las función $q(t)$ y t después de haber aplicado el cambio de variable. La función f sigue siendo analítica, pero en un nuevo dominio Ω , que depende estrechamente de la función p y del dominio de holomorfía. En la sección siguiente estudiaremos más a fondo lo que ocurre con $f(u)$ y cómo conseguir los coeficientes c_n del desarrollo en series de potencias.

Por el momento, supongamos que estas propiedades de la función f son conocidas y que para $u \in \Omega \cap B(0, \rho)$,

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n. \quad (2.24)$$

Sea

$$G_\lambda(z) = \int_0^\infty u^{\lambda-1} f(u) e^{-uz} du,$$

la función auxiliar definida a partir de la relación

$$F_\lambda(z) = \frac{e^{-zp_0}}{\Gamma(\lambda)} G_\lambda(p_1 z). \quad (2.25)$$

A G_λ le podemos aplicar el Lema de Watson, puesto que las tres hipótesis listadas anteriormente hacen que se cumplan las hipótesis del teorema. Como consecuencia tenemos el desarrollo de la función

$$G_\lambda(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n + \lambda)}{z^{n+\lambda}}, \quad z \rightarrow \infty,$$

y aplicando las correspondientes adaptaciones inducidas por la relación (2.25), conseguimos el desarrollo asintótico de la función principal:

$$F_\lambda(z) \sim \frac{e^{-zp_0}}{p_1^\lambda z^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\lambda)_n}{p_1^n z^n}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Como hemos mencionado anteriormente, para saber en qué región del plano complejo podemos aplicar este desarrollo, debemos tener más información sobre las funciones $p(t)$ y $q(t)$. En particular, debemos saber en qué puntos se encuentran las singularidades de estas funciones, cómo afectan estas al construir $f(t)$ y si se crea alguna singularidad más al llevar a cabo el cambio de variable.

2.3. Cálculo de los coeficientes

En esta sección nos vamos a encargar del estudio de uno de los métodos para el cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la función f . Para evitar que la notación y la abstracción resulten demasiado pesadas, trabajaremos con un ejemplo paralelo a las explicaciones teóricas.

Ejemplo 2.15 (Función gamma incompleta).

La función gamma incompleta es una función especial que viene definida por

$$\Gamma(a, z) = z^a e^{-z} \int_0^\infty (1+t)^{a-1} e^{-zt} dt,$$

con la cual queremos definir la función con la que trabajaremos durante toda esta sección:

$$F(z) = z^{\alpha z} e^z \Gamma(-\alpha z, z) = \int_0^\infty e^{-zp(t)} q(t) dt,$$

siendo

$$\alpha \geq 0, \quad p(t) = t + \alpha \ln(1+t), \quad q(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Para llegar a la última expresión integral, debemos manipular ligeramente la expresión de la función Gamma:

$$\begin{aligned} \Gamma(-\alpha z, z) &= z^{-\alpha z} e^{-z} \int_0^\infty (1+t)^{-\alpha z-1} e^{-zt} dt = z^{-\alpha z} e^{-z} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z \ln(1+t)}}{1+t} e^{-zt} dt, \\ \implies F(z) &= \int_0^\infty e^{-z(\alpha \ln(1+t)+t)} \frac{1}{1+t} dt. \end{aligned}$$

Observamos que en este caso $\lambda = 1$ y debemos comprobar que las funciones reales p y q cumplen las tres condiciones que hemos mencionado en la sección 2.2.

- a) Para que la integral sea convergente, debemos impedir que el crecimiento de $p(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ haga que la integral no converja, luego considerando z con parte real estrictamente positiva nos basta. Pues con los criterios de comparación de funciones reales podemos comprobar que el módulo del integrando es integrable en la semirrecta positiva.
- b) Empezando con la función p , sabemos que su dominio de definición es la semirrecta real $(-1, \infty)$ y que desarrollo en serie de potencias centrada en el origen es:

$$p(t) = t + \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-t)^n}{n} \right) = (1+\alpha)t + \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}, \quad |t| < 1.$$

En cuanto a la función q , su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ya que tiene un polo simple en este punto. En cuanto a su desarrollo en serie de potencias, es el siguiente:

$$q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n, \quad |t| < 1.$$

- c) Como $\alpha \geq 0$, es claro que $p_1 = (1+\alpha) \geq 0$. Asimismo, la derivada de la función (real) es

$$p'(t) = 1 + \frac{\alpha}{1+t} = \frac{1+t+\alpha}{1+t} = (1+\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^n$$

la cual es estrictamente positiva en $(-1, \infty)$. En cuanto a la función q , con facilidad podemos asegurar la condición $q(0) = q_0 = 1 \neq 0$.

Por lo tanto, podemos aplicar el razonamiento de la sección anterior para calcular el desarrollo asintótico de $F(z)$. Veamos cómo podemos calcular los coeficientes de la nueva función que nos aparece. siguiendo [11, pág. 92].

2.3.1. Método de inversión

El método de inversión se basa en dar una expresión de t en serie de potencias en función de la variable u . Para ello, utilizamos la transformación $p(t) - p_0 = p_1 u$, sabemos que podemos expresar u como serie de potencias en los dominios donde la función p es analítica:

$$p_1 u = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n.$$

Ahora bien, nuestro objetivo es encontrar los coeficientes del desarrollo dado en (2.24). Para ello, la idea intuitiva del método es invertir la relación dada anteriormente. Es decir, conseguir expresar t como serie de potencias en la variable u :

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} s_k u^k \implies \frac{dt}{du} = \sum_{k=1}^{\infty} k s_k u^{k-1}. \quad (2.26)$$

La función $\frac{dt}{du}$ hereda la regularidad de la función p , pudiendo así aplicar el teorema de los desarrollos de Laurent en un entorno del origen: para cada $k \geq 1$,

$$k s_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_u} \frac{dt}{du} \frac{1}{u^k} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} \frac{1}{u^k} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} \left(\frac{p_1 t}{p(t) - p_0} \right)^k \frac{dt}{t^k},$$

siendo C_u y C_t las circunferencias centradas en el origen de radio suficientemente pequeño ρ_u y ρ_t . En la cadena de igualdades hemos llevado a cabo un cambio de variable de u a t . Este se debe hacer con meticulosidad, ya que estamos cambiando las curvas en las que estamos integrando y dependiendo de las funciones involucradas nos podemos encontrar algún que otro caso patológico. Puesto que estamos trabajando con una p genérica, por ahora no vamos a entrar en más detalles.

Por otro lado, basándonos en la serie de potencias de la función p podemos dar la siguiente expresión del integrando:

$$\left(\frac{p(t) - p_0}{p_1 t} \right)^{-k} = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{p_1} t^{n-1} \right)^{-k}.$$

Observamos que esta función no se anula en el origen y que es analítica en C_t , por lo tanto vamos a poder utilizar el teorema de los residuos para calcular esta integral:

$$k s_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_t} \frac{\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{p_1} t^{n-1} \right)^{-k}}{t^k} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_t} \frac{F(t)}{t^k} dt = \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

De aquí deducimos una expresión genérica para cada uno de los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de $t(u)$ centrada en el origen:

$$s_k = \frac{F^{(k-1)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Vemos que para calcular cada uno de estos coeficientes, debemos llevar a cabo muchísimos cálculos, por ello solamente daremos la expresión explícita de los tres primeros coeficientes:

$$\begin{array}{l}
 k = 1 : \quad \left. \begin{array}{l} F(t) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_n}{p_1} t^{n-1} \\ F(0) = 1 \end{array} \right\} \implies s_1 = 1 \\
 k = 2 : \quad \left. \begin{array}{l} F(t) = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{p_1} t^{n-1}\right)^{-2} \\ F'(0) = -2 \frac{p_2}{p_1} \end{array} \right\} \implies s_2 = -\frac{p_2}{p_1} \\
 k = 3 : \quad \left. \begin{array}{l} F(t) = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{p_1} t^{n-1}\right)^{-3} \\ F''(0) = (-3)(-2) \frac{2p_2^2 - p_1 p_3}{p_1^2} \end{array} \right\} \implies s_3 = \frac{2p_2^2 - p_1 p_3}{p_1^2}
 \end{array}$$

Tabla de cálculo de s_1 , s_2 y s_3

Por último, nos falta unificar todo para conseguir el desarrollo de la función $f(u)$. La función la hemos definido como

$$f(u) = \left(\frac{t}{u}\right)^{\lambda-1} q(t) \frac{dt}{du}$$

y los desarrollos en serie de potencias (2.24) y (2.26) ya los conocemos. Por lo tanto, tenemos que $f(u)$ es el producto de todos estos:

$$f(u) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k u^{k-1}\right)^{\lambda-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k u^k\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} k s_k u^{k-1}\right)$$

Dar una expresión genérica de los c_k es muy tedioso por lo que daremos solo los primeros dos coeficientes de esta serie de potencias:

$$c_0 = q_0, \quad c_1 = \left(\frac{p_1 q_1 - (1 + \lambda) p_2 q_0}{p_1}\right).$$

Continuación del ejemplo de la función gamma incompleta. Al aplicar el cambio de variable mencionado en la sección anterior, tenemos las siguientes expresiones

$$p(t) = (1 + \alpha)u \implies \frac{dt}{du} = \frac{1 + \alpha}{p'(t)} = \frac{(1 + \alpha)(1 + t)}{1 + t + \alpha} \implies f(u) = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha + t}.$$

Luego buscamos los coeficientes c_k con los cuales se da la igualdad $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k$. Utilizando la tabla 2.7, tenemos que

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -\frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha}{2(1 + \alpha)}, \quad s_3 = \frac{2p_2^2 - p_1 p_3}{p_1^2} = \frac{\frac{\alpha^2}{2} - (1 + \alpha)\frac{\alpha}{3}}{(1 + \alpha)^2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{6(1 + \alpha)^2},$$

y aplicando la fórmula del producto de Cauchy al producto de series de potencias

$$f(u) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-u)^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) s_{n+1} u^n\right),$$

podemos calcular los primeros c_n :

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad c_0 &= q_0 \quad s_1 = 1 \\ n = 1 : \quad c_1 &= q_0 \quad 2s_2 + q_1 \quad s_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha} - 1 = \frac{-1}{1+\alpha} \\ n = 2 : \quad c_2 &= q_0 \quad 3s_3 + q_1 \quad 2s_2 + q_2 \quad s_1 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{2(1+\alpha)^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha} + 1 \\ &= \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{2(1+\alpha)^2} + \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\alpha^2 + 2}{2(1+\alpha)^2} \end{aligned}$$

Concluimos así que,

$$F(z) = z^\alpha e^z \Gamma(-\alpha z, z) \sim \frac{1}{(1+\alpha)z} - \frac{1}{(1+\alpha)^3 z^2} + \frac{\alpha^2 + 2}{(1+\alpha)^5 z^3}, \quad z \rightarrow \infty. \tag{2.27}$$

Si quisiésemos una mayor exactitud, bastaría con llevar a cabo las cuentas requeridas para calcular los coeficientes de s_k y seguir la fórmula del producto de Cauchy. Este ejemplo se ha tomado de [11, pág. 21].

2.3.2. Otros métodos de cálculo

Un segundo método de cálculo se lleva a cabo integrando por partes la integral

$$F_\lambda(z) = \int_0^\infty e^{-zp(t)} q(t) dt.$$

El procedimiento a seguir es similar al llevado a cabo en el ejemplo 1.4. Integramos por partes N veces para conseguir una expresión explícita de los primeros N términos del desarrollo asintótico de G_λ y por separado estudiamos el orden de la integral restante que nos aparece en la N -ésima integración por partes. Es una forma sencilla de calcular los coeficientes, siempre que estas integrales sean fácilmente calculables.

Continuación del ejemplo de la función gamma incompleta. En este caso, deberíamos integrar por partes la integral paramétrica

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zp(t)}}{1+t} dt$$

$$\left. \begin{aligned} u &= q(t) = \frac{1}{1+t} \\ dv &= e^{-zp(t)} \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} du &= -\frac{1}{(1+t)^2} \\ v &= -\frac{1}{z p'(t)} e^{-zp(t)} \end{aligned} \right. = -\frac{1}{z(1+t+\alpha)} e^{-zp(t)}$$

Al llevar a cabo la primera iteración llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{e^{-(1+\alpha)z}}{(1+\alpha)z} - \frac{1}{z} \int_0^\infty \frac{e^{-zp(t)}}{(1+\alpha+t)^2} dt \\ &= \frac{e^{-(1+\alpha)z}}{(1+\alpha)z} + \frac{1}{z} \int_0^\infty \frac{q'(t)p'(t) - q(t)p''(t)}{p'(t)^2} e^{-zp(t)} dt \\ &= \frac{e^{-(1+\alpha)z}}{(1+\alpha)z} + \frac{1}{z} \int_0^\infty \left(\frac{q(t)}{p'(t)} \right)' e^{-zp(t)} dt. \end{aligned}$$

Repetiendo este procedimiento tantas veces como nos haga falta, llegaremos a la expresión (2.27) lograda mediante el método de inversión.

Es relevante mencionar este método de cálculo, ya que fue una de las primeras técnicas utilizadas para obtener desarrollos asintóticos. La ventaja de que solo requiere conocimientos básicos de integración, hace que resulte natural que sea uno de los enfoques más comunes e introductorios en este campo.

Capítulo 3

Método de Laplace y sus aplicaciones

El tercer capítulo se centra en la descripción detallada del método de Laplace. El método se presenta de forma gradual, del caso más sencillo hasta el caso más complejo que abordaremos. Asimismo, por cada resultado probado, se incluirá un ejemplo de aplicación del método que vienen acompañados de algunas observaciones y detalles que destacan el brillante funcionamiento del método de Laplace en este tipo de integrales paramétricas. Las referencias clave que seguiremos en este capítulo incluyen [3], [7] y [13].

3.1. El método de Laplace

Consideremos la función integral

$$I(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt, \quad (3.1)$$

que cumple las propiedades siguientes: las funciones $\phi(t)$ y $h(t)$ son reales y continuas en $[\alpha, \beta]$ (si $\alpha < \beta$), α es finito y para $z \in \mathbb{R}_+$ grandes $I(z)$ es absolutamente convergente. El hecho de considerar valores grandes de z hace que la mayor aportación de la integral venga dada por los entornos donde $h(t)$ toma su valor máximo, que puede que sea en uno o en más puntos del intervalo. Sin pérdida de generalidad, supondremos que este punto es único; pues si hay más de uno, basta con separar la integral en los intervalos que contienen a estos puntos, lo que no altera la convergencia de la integral.

En el caso de que β sea también finito, hace que estemos trabajando en un compacto y por tanto que la mayor aportación de la integral venga dada por este entorno se debe a que siempre podemos encontrar un $z \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande como para que la exponencial $e^{zh(t)}$ lidere la aportación de la integral, pues $\phi(t)$ está acotada. De hecho, al trabajar en un compacto, sabemos que este valor máximo puede encontrarse o bien en la frontera del conjunto o bien en un extremo de la función, afectándonos

en la aproximación asintótica. Es decir, si el máximo se alcanza en $h(t_0)$, entonces el valor de la aproximación depende de si $h'(t_0)$ es nulo o no.

En el caso de que β no sea finito, la condición necesaria de convergencia nos garantiza que dado $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que si $|t| > K$ entonces

$$|\phi(t)|e^{zh(t)} < \varepsilon.$$

Luego, si trabajamos por separado con el compacto $[\alpha, K]$ y el intervalo infinito $[K, \beta]$, del caso anterior sabemos que la mayor aportación de la primera integral viene dada por un entorno donde $h(t)$ toma su máximo en el compacto $[\alpha, K]$. Asimismo, al poder tomar ε tan pequeño como queramos, podemos hacer que la aportación de esta segunda integral sea tan pequeña como queramos.

Conociendo los preliminares del problema que abordaremos durante este capítulo, empezaremos estudiando el caso que $\alpha < \beta$ y

$$h(\alpha) = \sup\{h(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad h'(\alpha) \neq 0.$$

Es decir, que el máximo se alcanza en el extremo inferior del intervalo sin que la derivada se anule en este punto. En el caso de trabajar en el compacto es claro que este máximo se alcanza, en cuanto al segundo caso viene asegurado por la condición necesaria de convergencia que hemos comentado anteriormente. En segundo lugar, estudiaremos el caso en el que la función h posea un máximo en α donde la derivada $h'(\alpha)$ se anule. Además comentaremos los casos en los que este extremos se encuentre en β (finito), ya que dependiendo del caso nos encontramos con un cambio de signo significativo. Finalmente, ampliaremos el resultado a un caso menos restrictivo para las funciones ϕ y h . Al haber trabajado primero con los casos más sencillos hace que profundicemos en la metodología y el razonamiento seguido para calcular estos desarrollos; de modo que al abordar el caso general, comprendamos el fundamento analítico subyacente de cada una de las acotaciones y razonamientos.

3.1.1. Primer caso: $h'(\alpha) \neq 0$

Teorema 3.1. Sean $\phi(t)$ y $h(t)$ dos funciones reales y continuas definidas en el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde β puede no ser finito, y que cumplen las condiciones siguientes:

1. La función integral $I(z)$ definida en (3.1) es absolutamente integrable para cada valor z positivo.
2. $h(t)$ alcanza su valor máximo en $t = \alpha$:

$$h(\alpha) = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \{h(t)\}. \quad (3.2)$$

3. $h''(t)$ es continua, $h'(\alpha) < 0$ y $\phi(\alpha) \neq 0$.

Entonces, cuando $z \rightarrow \infty$

$$I(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt \sim -\frac{\phi(\alpha)}{h'(\alpha)} \frac{e^{zh(\alpha)}}{z}. \quad (3.3)$$

Demostración. Por la conservación del signo de la función $h'(t)$, existe un entorno $t \in [\alpha, \alpha + \delta]$ en el cual $h'(t)$ se encuentra lejano al origen: $\exists M$ tal que $h'(t) \leq -M < 0$ para cada $\alpha \leq t \leq \alpha + \delta$. Por lo tanto, la función $h(t)$ es inyectiva (estrictamente decreciente) en el intervalo $[\alpha, \alpha + \delta]$ y podemos llevar a cabo el cambio de variable real

$$h(t) = h(\alpha) - s \quad t \in [\alpha, \alpha + \delta] \implies s \in [0, \tau = h(\alpha) - h(\alpha + \delta)].$$

Puesto que la integral es absolutamente integrable para todo valor de z positivo, podemos separar en dos esta integral y aplicar el cambio de variable. Observamos que no tenemos una expresión explícita para las funciones $\phi(t)$ y $h'(t)$ en la variable s ; sin embargo, al estar considerando valores suficientemente pequeños de δ , se cumple que $h'(x) \sim h'(\alpha)$ y $\phi(t) \sim \phi(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \phi(t)e^{zh(t)} dt &= - \int_0^{\tau} \frac{\phi(t)}{h'(t)} e^{z(h(\alpha)-s)} ds \\ &\sim - \frac{\phi(\alpha)}{h'(\alpha)} e^{zh(\alpha)} \int_0^{\tau} e^{-zs} ds = - \frac{\phi(\alpha)}{zh'(\alpha)} e^{zh(\alpha)} (1 - e^{-z\tau}) \\ &\sim - \frac{\phi(\alpha)}{zh'(\alpha)} e^{zh(\alpha)}. \end{aligned}$$

La última equivalencia se debe a que la función $e^{-z\tau}$ tiende a 0 cuando $z \rightarrow \infty$.

Para concluir la equivalencia de funciones (3.3), nos falta ver que la cola de la integral dividida por la función equivalente tiende a 0 cuando hacemos crecer z :

$$\left| - \frac{\phi(\alpha)}{h'(\alpha)} z e^{-zh(\alpha)} \int_{\alpha+\delta}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt \right| \leq \left| - \frac{\phi(\alpha)}{h'(\alpha)} \right| z e^{-zh(\alpha)} \int_{\alpha+\delta}^{\beta} |\phi(t)| e^{zh(t)} dt.$$

Puesto que $-\frac{\phi(\alpha)}{h'(\alpha)}$ es un valor constante, vamos a omitir este término de las acotaciones siguientes, ya que no nos afecta en el estudio del orden de la integral cuando $z \rightarrow \infty$. Si llamamos $M = \sup_{t \in [\alpha+\delta, \beta]} \{h(t)\}$, se tiene que $M < h(\alpha)$, luego

$$zh(t) = (zh(t) - h(t)) + h(t) \leq (z-1)M + h(t).$$

Por otro lado, la primera hipótesis nos garantiza que la integral la convergencia de la integral $\tilde{I}(1) = \int_{\alpha+\delta}^{\beta} |\phi(t)| e^{h(t)} dt$ y que la condición $(M - h(\alpha)) < 0$ hace que la acotación obtenida tienda a 0:

$$\left| z e^{-zh(\alpha)} \int_{\alpha+\delta}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt \right| \leq \tilde{I}(1) z e^{z(M-h(\alpha))} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty.$$

□

Corolario 3.2. Sean $\phi(t)$ y $h(t)$ dos funciones reales y continuas definidas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ compacto, y que cumplen las condiciones siguientes:

1. La función integral $I(z)$ definida en (3.1) es absolutamente integrable para cada valor z positivo.

2. $h(t)$ alcanza su valor máximo en $t = \beta$:

$$h(\beta) = \sup_{t \in [a, b]} \{h(t)\}. \quad (3.4)$$

3. $h''(t)$ es continua, $h'(\beta) > 0$ y $\phi(\alpha) \neq 0$.

Entonces, cuando $z \rightarrow \infty$

$$I(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt \sim \frac{\phi(\beta)}{h'(\beta)} \frac{e^{zh(\beta)}}{z}. \quad (3.5)$$

Demostración. Este resultado es inmediato teniendo en cuenta que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt = - \int_{\beta}^{\alpha} \phi(t)e^{zh(t)} dt$$

y que se cumplen todas las condiciones del teorema 3.1 teniendo en cuenta que en la tercera condición solo nos interesa que la derivada no sea nula y no su signo. \square

3.1.2. Segundo caso: $h'(\alpha) = 0$

Teorema 3.3. Sean $\phi(t)$ y $h(t)$ dos funciones reales y continuas definidas en el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde β puede no ser finito, y que cumplen las condiciones siguientes:

1. La función integral $I(z)$ definida en (3.1) es absolutamente integrable para cada valor z positivo.
2. $h(t)$ tiene un único máximo en el intervalo que se alcanza en $t = \alpha$ y se cumple que

$$\sup_{t \in [a, b]} \{h(t)\} < h(\alpha) \quad \text{para cada } \alpha < a < b \leq \beta. \quad (3.6)$$

3. $h''(t)$ es continua, $h'(\alpha) = 0$, $h''(\alpha) < 0$ y $\phi(\alpha) \neq 0$.

Entonces, cuando $z \rightarrow \infty$

$$I(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt \sim \phi(\alpha)e^{zh(\alpha)} \left(\frac{-\pi}{2zh''(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Demostración. Por la continuidad de las dos funciones, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para valores $\alpha \leq t \leq \alpha + \delta$ se cumplen,

$$\phi(\alpha) - \varepsilon \leq \phi(t) \leq \phi(\alpha) + \varepsilon, \quad (3.8)$$

$$h''(\alpha) - \varepsilon \leq h''(t) \leq h''(\alpha) + \varepsilon < 0. \quad (3.9)$$

Asimismo, mediante la fórmula de Taylor, sabemos que para cada uno de estos valores t , existe $\xi_t \in (\alpha, \alpha + \delta)$ tal que

$$h(t) - h(\alpha) - h'(\alpha)(t - \alpha) = h(t) - h(\alpha) = h''(\xi_t) \frac{(t - \alpha)^2}{2}.$$

Por lo tanto, incorporando las desigualdades (3.9) a la identidad anterior,

$$-\frac{(t-\alpha)^2}{2}(-h''(\alpha) + \varepsilon) \leq h(t) - h(\alpha) \leq -\frac{(t-\alpha)^2}{2}(-h''(\alpha) - \varepsilon). \quad (3.10)$$

Para agilizar la notación llamaremos $B = -h''(\alpha) + \varepsilon$ y $A = -h''(\alpha) - \varepsilon$ a las constantes que sabemos que son estrictamente positivas. El siguiente paso a dar es el cálculo de la integral en el entorno de α que estamos contemplando. Por la monotonía de la integral y la positividad de la exponencial real, la desigualdad (3.8) se conserva al integrar y lo mismo ocurre con las desigualdades (3.10).

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \phi(t)e^{zh(t)} dt &\leq (\phi(\alpha) + \varepsilon) \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{zh(t)} dt \\ &\leq (\phi(\alpha) + \varepsilon)e^{zh(\alpha)} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{-\frac{zA}{2}(t-\alpha)^2} dt, \\ \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \phi(t)e^{zh(t)} dt &\geq (\phi(\alpha) - \varepsilon) \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{zh(t)} dt \\ &\geq (\phi(\alpha) - \varepsilon)e^{zh(\alpha)} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{-\frac{zB}{2}(t-\alpha)^2} dt. \end{aligned}$$

Examinemos ahora el valor de la integral que proporciona una cota superior para la contribución de la integral $I(z)$ en la que estamos enfocándonos. Empecemos aplicando el cambio de variable real $u = t - \alpha$:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{-\frac{zA}{2}(t-\alpha)^2} dx = \int_0^{\delta} e^{-\frac{zA}{2}u^2} du = \int_0^{\infty} e^{-\frac{zA}{2}u^2} du - \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{zA}{2}u^2} du \quad (3.11)$$

La última igualdad se deduce de que $e^{-\frac{zA}{2}u^2}$ es una función gaussiana integrable en la recta real y ajustando la segunda integral al ejemplo de la función gamma incompleta 2.23, podemos concluir que

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{-\frac{zA}{2}(t-\alpha)^2} dx = \left(\frac{\pi}{2zA}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(e^{-\frac{A\delta^2}{2}z}\right)\right).$$

De forma análoga se puede probar la identidad de la integral que acota inferiormente la integral, llegando así a la cadena de desigualdades siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \phi(t)e^{zh(t)} dt &\leq (\phi(\alpha) + \varepsilon)e^{zh(\alpha)} \left(\frac{\pi}{2zA}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(e^{-\frac{A\delta^2}{2}z}\right)\right) \\ &\geq (\phi(\alpha) - \varepsilon)e^{zh(\alpha)} \left(\frac{\pi}{2zB}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(e^{-\frac{B\delta^2}{2}z}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ahora, acotemos el valor de la cola de la integral imponiendo las dos primeras hipótesis del enunciado. Esto es, puesto que $I(z)$ es absolutamente integrable para cada $z > 0$,

$$\left| \int_{\alpha+\delta}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt \right| \leq \int_{\alpha+\delta}^{\beta} |\phi(t)|e^{zh(t)} dt \quad (3.13)$$

es finita para estos valores de z . En cuanto a la segunda hipótesis, se tiene que

$$M := \sup \{h(t) : t \in [\alpha + \delta, \beta]\} < h(\alpha),$$

y por tanto,

$$zh(t) = (zh(t) - h(t)) + h(t) \leq (z - 1)M + h(t).$$

Incorporando esta acotación, seguimos teniendo garantizada la convergencia de la integral por la integrabilidad absoluta de $I(1)$:

$$(3.13) \leq e^{(z-1)M} \int_{\alpha+\delta}^{\beta} |\phi(t)| e^{h(t)} dt = \tilde{I}(1) e^{(z-1)M}. \quad (3.14)$$

Por último, combinemos las acotaciones (3.12) y (3.14):

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{z} e^{-zh(\alpha)} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) e^{zh(x)} dx \\ & \leq (\phi(\alpha) + \varepsilon) \left(\frac{\pi}{2A} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + O \left(e^{-\frac{A\delta^2}{2}z} \right) \right) + \frac{\tilde{I}(1)\sqrt{z}}{e^M} e^{z(M-h(\alpha))} \quad (3.15) \\ & \geq (\phi(\alpha) - \varepsilon) \left(\frac{\pi}{2B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + O \left(e^{-\frac{B\delta^2}{2}z} \right) \right) - \frac{\tilde{I}(1)\sqrt{z}}{e^M} e^{z(M-h(\alpha))}. \end{aligned}$$

Hagamos tender $z \rightarrow \infty$ para probar que los límites inferior y superior de la expresión $\left(\sqrt{z} e^{-zh(\alpha)} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^{zh(t)} dt$ cuando $z \rightarrow \infty$ coinciden. En el primer sumando de ambas funciones nos encontramos con el límite

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + O \left(e^{-\frac{C\delta^2}{2}z} \right) \right),$$

donde $C = A, B > 0$ respectivamente. Sabemos que este límite vale 1 ya que existe $K > 0$ tal que

$$\left| 1 + O \left(e^{-\frac{C\delta^2}{2}z} \right) \right| \leq 1 + K e^{-\frac{C\delta^2}{2}z} \rightarrow 1 + 0 \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

En cuanto al segundo sumando, tiende a 0 por el hecho de que la exponencial domina el límite y $M - h(\alpha) < 0$. Abreviando, llegamos a la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} (\phi(\alpha) - \varepsilon) \left(\frac{\pi}{2B} \right)^{\frac{1}{2}} & \leq \liminf_{z \rightarrow \infty} \left(\sqrt{z} e^{-zh(\alpha)} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^{zh(t)} dt \leq \\ & \leq \limsup_{z \rightarrow \infty} \left(\sqrt{z} e^{-zh(\alpha)} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^{zh(t)} dt \leq (\phi(\alpha) + \varepsilon) \left(\frac{\pi}{2A} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

válida para cada $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, si hacemos tender este valor a 0, llegamos a que el límite existe y su valor es

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\sqrt{z} e^{-zh(\alpha)} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^{zh(t)} dt = \phi(\alpha) \left(\frac{\pi}{-2h''(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En otras palabras, al pasar el límite dividiendo ambos lados de la igualdad, hemos obtenido la equivalencia de funciones que deseábamos demostrar:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^{zh(t)} dt \sim \left(\phi(\alpha) \left(\frac{\pi}{-2h''(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{z} e^{-zh(\alpha)} \right)^{-1} = \phi(\alpha) e^{zh(\alpha)} \left(\frac{-\pi}{2zh''(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Corolario 3.4. Sean $\phi(t)$ y $h(t)$ dos funciones reales y continuas definidas en el compacto $[\alpha, \beta]$, que cumplen las condiciones siguientes:

1. La función integral $I(z)$ definida en (3.1) es absolutamente integrable para cada valor z positivo.
2. $h(t)$ tiene un único máximo en el intervalo que se alcanza en $t = \beta$ y se cumple que

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \{h(t)\} < h(\beta) \quad \text{para cada } \alpha \leq a < b < \beta. \quad (3.16)$$

3. $h''(t)$ es continua, $h'(\beta) = 0$, $h''(\beta) < 0$ y $\phi(\alpha) \neq 0$.

Entonces, cuando $z \rightarrow \infty$

$$I(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt \sim \phi(\beta)e^{zh(\beta)} \left(\frac{-\pi}{2zh''(\beta)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

Demostración. En esta ocasión, aunque la propiedad de integrales

$$\int_{\alpha}^{\beta} \phi(t)e^{zh(t)} dt = - \int_{\beta}^{\alpha} \phi(t)e^{zh(t)} dt$$

nos cambia el signo, a la hora de llevar a cabo las cuentas vuelve a invertirse este signo. Esto se debe a que siguiendo la demostración del teorema 3.3 vamos a acotar $-I(z)$ y en el cambio de variable llevado a cabo en (3.11) nos encontramos con un cambio de signo: tomando el cambio de variable $u = x - \beta$

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\beta-\delta} e^{-\frac{zA}{2}(x-\beta)^2} dx &= \int_0^{-\delta} e^{-\frac{zA}{2}u^2} du = - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{zA}{2}u^2} du + \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{zA}{2}u^2} du \\ &= \left(\frac{\pi}{2zA} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-1 + O\left(e^{-\frac{A\delta^2}{2}z} \right) \right). \end{aligned}$$

Estos cambios de signo no afectan a las desigualdades siguientes, y al tomar el límite, este doble cambio de signo asegura que el resultado permanezca sin alteraciones en los signos. \square

Observaciones 3.5. Otra forma alternativa de probar el resultado 3.3 es utilizando la notación de O grande del resto del polinomio de Taylor en (3.10). Esta notación es útil cuando queremos aportar un desarrollo asintótico de más de un término, puesto que podemos calcular términos de mayor orden siempre que $h(t)$ cumpla con toda la regularidad requerida.

Una forma más general de este resultado es cuando las primeras $n - 1$ derivadas de $h(t)$ son nulas en el punto α y que $h^{(n)}(\alpha) < 0$. En este caso habría que considerar el cambio de variable $h(x) = h(\alpha) - t^n$ o equivalentemente, el polinomio de Taylor de orden n . En consecuencia perdemos la estructura gaussiana de la integral (3.11), pero al tratarse de integrales de la forma $e^{-\frac{zA}{2}u^n}$, lo que obtenemos son órdenes asintóticos considerablemente mayores. Se pueden ver los detalles en [3, pág. 36-41] y [7, pág. 28-35].

3.1.3. Caso general

Para completar el método de Laplace, trabajaremos con un caso más general que el abordado hasta ahora y seguiremos [13, pág. 55-60]. A la función ϕ le vamos a debilitar las restricciones considerablemente. Si la función ϕ es compleja y le dejamos ser nula, la mayor aportación de la integral se verá alterada dependiendo del orden del cero de esta función. Asimismo, la aportación de la integral se ve afectada dependiendo del orden del cero de la función h' , por ello también englobaremos el caso en el cual este cero sea de un orden mayor que 1. El procedimiento de la prueba es idéntica, el cambio significativo se debe a los órdenes de los ceros de ϕ y h' , que como ya hemos mencionado juegan un papel relevante a la hora de calcular el desarrollo.

Teorema 3.6. Sean $[\alpha, \beta]$ un intervalo real, $\phi(t)$ una función compleja definida en un dominio que contiene a $[\alpha, \beta]$, $h(t)$ una función real definida en $[\alpha, \beta]$ y $I(z)$ la función integral

$$I(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^{-zh(t)} dt. \quad (3.18)$$

Si se cumplen las condiciones

1. $h(t)$ toma su valor mínimo en α y

$$\inf_{t \in [\alpha + \delta, \beta]} h(x) - h(\alpha) > 0, \quad \forall \delta > 0.$$

2. $\phi(t)$ es continua en un entorno de α y $h(t)$ es de clase C^1 en un entorno de α , con excepción del punto α .
3. Las funciones $\phi(t)$, $h(t)$ y $h'(t)$ admiten desarrollos cuando $t \rightarrow a^+$:

$$\phi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - \alpha)^{n+\lambda-1}, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \quad b_0 \neq 0,$$

$$h(t) \sim h(\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - \alpha)^{n+\mu}, \quad \mu > 0, \quad a_0 \neq 0,$$

$$h'(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \mu) (t - \alpha)^{n+\mu-1}.$$

4. La integral $I(z)$ converge absolutamente para valores suficientemente grande de z .

Entonces, $I(z)$ admite un desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow \infty$, dado por

$$I(z) \sim e^{-zh(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{c_n}{z^{\frac{n+\lambda}{\mu}}}, \quad (3.19)$$

donde los coeficientes c_n vienen dados en términos de a_n y b_n . En particular, los tres

primeros coeficientes son

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{b_0}{\mu a_0^\mu}, \\ c_1 &= \left(\frac{b_1}{\mu} - \frac{(\lambda + 1)a_1 b_0}{\mu^2 a_0} \right) \frac{1}{a_0^{\frac{\lambda+2}{\mu}}}, \\ c_2 &= \left(\frac{b_2}{\mu} - \frac{(\lambda + 2)a_1 b_1}{\mu^2 a_0} + [(\lambda + \mu + 2)a_1^2 - 2\mu a_0 a_2] \frac{(\lambda + 2)b_0}{2\mu^3 a_0^2} \right) \frac{1}{a_0^{\frac{\lambda+2}{\mu}}}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\gamma \in (\alpha, \beta]$, tal que $\phi(t)$ y $h'(t)$ son continuas en $(\alpha, \beta]$ y $h'(t)$ sea positiva. La existencia de γ se debe a las hipótesis 2 y 3 y que h alcanza su valor mínimo en α . Por lo tanto, podemos aplicar el cambio de variable $u = h(x) - h(\alpha)$ a la función en este entorno de α :

$$e^{zh(\alpha)} \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(t) e^{-zh(t)} dt = \int_0^T f(u) e^{-zu} du, \quad (3.20)$$

donde, $T = h(\gamma) - h(\alpha)$ y $f(u)$ denota la función ϕ tras el cambio de variable y el jacobiano del difeomorfismo,

$$f(u) = \phi(t) \frac{dt}{du} = \left. \frac{\phi(x)}{h'(x)} \right|_u.$$

De forma análoga en la que procedimos en la sección 2.3, basándonos en el desarrollo asintótico de $h(t)$ podemos calcular el desarrollo asintótico de $(t - \alpha)$ en función de la nueva variable u :

$$u = h(t) - h(\alpha) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - \alpha)^{n+\mu} \implies (t - \alpha) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n u^{\frac{n}{\mu}}, \quad u \rightarrow 0^+.$$

Luego, aplicando las propiedades del lema 1.13, la función $f(u)$ tiene un desarrollo asintótico en un entorno del 0

$$\begin{aligned} f(u) &\sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k u^{\frac{k}{\mu}} \right)^{n+\lambda-1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_0 (n + \mu) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k u^{\frac{k}{\mu}} \right)^{n+\mu-1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\frac{n+\lambda-\mu}{\mu}}. \end{aligned}$$

Si la función f la extendemos a \mathbb{R}_+ dándole el valor 0 a partir de T , podemos garantizar que se cumplen las hipótesis del lema de Watson general:

1. $f(u)$ es continua en $(0, T]$ y nula en (T, ∞) , luego tiene una única discontinuidad en $u = T$.
2. Conocemos el desarrollo asintótico de $f(u)$ cuando $u \rightarrow 0^+$.
3. La integral

$$\int_0^{\infty} f(u) e^{-zu} du = \int_0^T f(u) e^{-zu} du$$

es integrable cuando z es suficientemente grande, por ser $I(z)$ absolutamente convergente.

Por lo tanto,

$$e^{zh(\alpha)} \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(t) e^{-zh(t)} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{c_n}{z^{\frac{n+\lambda}{\mu}}}. \quad (3.21)$$

Por último, probemos que la función auxiliar

$$e^{zh(\alpha)} \tilde{I}(z) = e^{zh(\alpha)} \int_{\gamma}^{\beta} \phi(t) e^{-zh(t)} dt,$$

es una función plana, es decir que su desarrollo asintótico es nulo. Para ello, acotaremos el argumento de la exponencial utilizando la primera hipótesis del teorema. Sean $z \geq z_0 > 0$ un valor en la cual $I(z_0)$ es absolutamente convergente y

$$\varepsilon = \inf_{\gamma \leq t \leq \beta} (h(x) - h(\alpha)) > 0.$$

Por lo tanto, tenemos la acotación del argumento siguiente:

$$z(h(t) - h(\alpha)) = (z - z_0)(h(t) - h(\alpha)) + z_0(h(t) - h(\alpha)) \geq (z - z_0)\varepsilon + z_0(h(x) - h(\alpha)).$$

Concluimos así que

$$\begin{aligned} e^{zh(\alpha)} |\tilde{I}(z)| &\leq \int_{\gamma}^{\beta} |\phi(t)| e^{-z(h(t)-h(\alpha))} dt \\ &\leq \left(e^{z_0(\varepsilon+h(\alpha))} \int_{\gamma}^{\beta} |\phi(t)| e^{z_0 h(t)} dt \right) e^{-z\varepsilon} = M e^{-z\varepsilon}, \end{aligned}$$

y por tanto $e^{zh(\alpha)} \tilde{I}(z)$ es una función plana por ser $z\varepsilon > 0$. Unificando ambas colas de la integral, llegamos al desarrollo asintótico que buscábamos.

$$\begin{aligned} e^{zh(\alpha)} I(z) &= e^{zh(\alpha)} \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(t) e^{-zh(t)} dt + e^{zh(\alpha)} \int_{\gamma}^{\beta} \phi(t) e^{-zh(t)} dt \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{c_n}{z^{\frac{n+\lambda}{\mu}}}, \\ \implies I(z) &\sim e^{-zh(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{c_n}{z^{\frac{n+\lambda}{\mu}}}. \end{aligned}$$

□

Observaciones 3.7. Vemos que este último resultado nos generaliza los dos anteriores teoremas, teniendo en cuenta el cambio de signo, aunque el cálculo de los coeficientes del desarrollo asintótico continúa siendo un trabajo laborioso. De hecho, los primeros coeficientes dados en el teorema no los hemos probado, puesto que es un caso particular de lo estudiado en las secciones 2.2 y 2.3. Dependiendo de las funciones ϕ y h estos cálculos serán más sencillos o más complejos; por ello, no profundizaremos más en estos aspectos técnicos y lo veremos reflejado a través de uno de los ejemplos que presentaremos en la siguiente sección.

3.2. Aplicaciones

El objetivo de esta segunda sección es visualizar tres formas distintas de aplicar el método de Laplace. Empezaremos con el caso más sencillo con la función de Bessel modificada y seguiremos con un caso más general en el cual la función ϕ se anula. A continuación, estudiaremos el caso en el que el extremo se encuentra en el interior del intervalo de integración.

3.2.1. Función de Bessel modificada

Consideremos la función de Bessel modificada de primera especie

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos(\theta)} \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0. \quad (3.22)$$

Esta función es una solución de la ecuación de Bessel modificada:

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} - (x^2 + n^2)y = 0,$$

y x debe ser estrictamente positivo. Para lograr una expresión explícita de la función de Bessel $I_n(t)$, se requiere un tratamiento teórico extenso y elaborado. En su lugar, nos centraremos en la obtención del desarrollo asintótico de esta función integral, a partir de [3, pág. 41].

Siguiendo la notación que hemos utilizado en la primera sección,

$$h(\theta) = \cos(\theta), \quad \phi_n(\theta) = \cos(n\theta),$$

que son dos funciones reales bien definidas y acotadas en $[0, \pi]$. $h(\theta)$ alcanza su máximo en $\theta = 0$ y cumple todas las hipótesis del teorema 3.3:

$$h(0) = 1, \quad h'(0) = 0, \quad h''(0) = -1 < 0,$$

y $\phi_n(0) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, el teorema nos dice que

$$I_n(t) \sim \frac{1}{\pi} e^t \left(\frac{\pi}{2t} \right)^{\frac{1}{2}} = e^t \left(\frac{1}{2t\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

En segundo lugar, siguiendo [7, pág. 36], consideremos la función

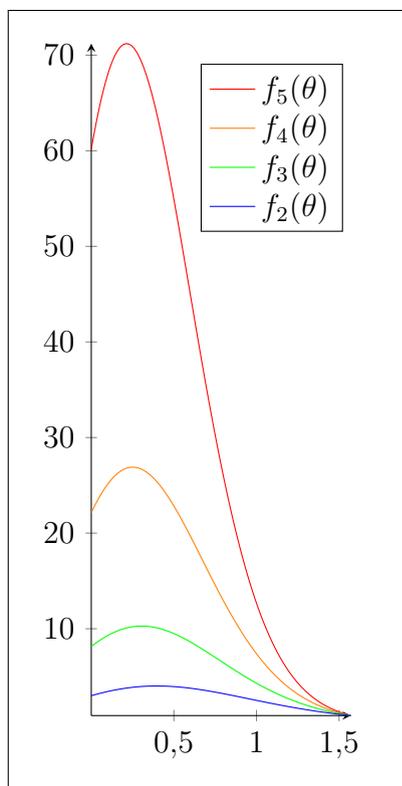
$$I_\lambda(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{t \cos(\theta)} \log(\lambda + \sin(\theta)) d\theta, \quad \lambda > 0. \quad (3.23)$$

Hemos mantenido la función h , pero hemos sustituido la función coseno por la función $\phi_\lambda(\theta) = \log(\lambda + \sin(\theta))$ además de quedarnos con la mitad del intervalo de integración.

Llamemos f_t a la función real de parámetro $t \in (0, \infty)$, $\lambda = 1,5$ y $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f_t(\theta) = e^{-t \cos(\theta)} \log(1,5 + \sin(\theta)),$$

$$f'_t(\theta) = e^{-t \cos(\theta)} \left(t \sin(\theta) \log(1,5 + \sin(\theta)) + \frac{\cos(\theta)}{1,5 + \sin(\theta)} \right).$$



Si calculamos los máximos de las funciones $-\cos(\theta)$ y $\log(1, 5 + \sin(\theta))$, vemos que se encuentran en 0 y $\frac{\pi}{2}$ respectivamente. Durante todo este capítulo hemos comentado que cuando t toma valores suficientemente grandes, la mayor aportación de la integral se alcanza en los entornos del origen. No obstante, vemos que la derivada de la función se anula en puntos distintos dependiendo de t . De hecho, cuanto más grande sea t , más pequeño va a tener que ser $t \sin(\theta) \log(1, 5 + \sin(\theta))$, pues el segundo sumando está acotado. No vamos a dar una expresión explícita de estos puntos críticos, pero basándonos en la figura de la izquierda, vemos que cuando t aumenta, el extremo de f_t en $[0, \frac{\pi}{2}]$ se va desplazando hacia el origen y toma valores cada vez más grandes.

En resumen, para t grandes, con ayuda de la figura, vemos que el mayor área bajo la curva $(\theta, f_\theta(t))$ se concentra en entornos cada vez más pequeños de $\theta = 0$. Por lo tanto, aplicar el método de Laplace a esta integral es coherente.

Si $\lambda \neq 1$, del ejemplo previo deducimos que seguimos cumpliendo todas las hipótesis del teorema 3.3 y por tanto,

$$I_\lambda(t) \sim \log(\lambda) e^t \left(\frac{\pi}{2t}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Para el caso $\lambda = 1$, deberemos aplicar el teorema general 3.6. Empecemos dando los polinomios de Taylor de orden 2 de $\phi_1(t)$.

$$\phi_1(t) = t - \frac{1}{2}t^2$$

Si seguimos calculando términos llegaremos a una serie de potencias

$$\phi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1}$$

donde $\lambda = 1$ y $b_0 = 1$. En cuanto a la función $h(t)$, sabemos que la serie de Taylor de la función coseno es válida para todo número real y complejo y su desarrollo es

$$-h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} z^{2n+2},$$

donde $\mu = 2$ y $a_0 = -\frac{1}{2}$. Como todas las demás hipótesis del teorema sabemos que se cumplen, el método de Laplace nos dice que

$$\begin{aligned} I_1(t) &\sim e^{-zh(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \frac{c_n}{t^{\frac{n+2}{2}}} = e^{-t} \left(\Gamma(1) \frac{1}{t} - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) + O\left(\frac{e^{-t}}{t^2}\right) \\ &= e^t \left(\frac{1}{t} - \sqrt{\frac{\pi}{4t^3}}\right) + O\left(\frac{e^{-t}}{t^2}\right), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

3.2.2. Función Gamma

El segundo ejemplo que estudiaremos, tomado de [3, pág. 41-42], es la función gamma,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t+x \log(t)} dt, \quad x \geq 0, \quad (3.24)$$

que mediante el cambio de variable $t = \tau x$ pasa a ser una integral que sigue el patrón mencionado en (3.1):

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau x + x \log(\tau x)} x d\tau = x^{x+1} \int_0^{\infty} e^{x(\log(\tau) - \tau)} d\tau.$$

Vemos que en este caso $\phi \equiv 1$ y que $h(\tau) = \log(\tau) - \tau$ es una función que alcanza su máximo en el punto interior del intervalo $\tau = 1$. Por lo tanto, al ser una integral absolutamente convergente, podemos separar en dos la integral y aplicar el método en estas dos integrales por separado:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^1 e^{x(\log(\tau) - \tau)} d\tau \sim e^{-x} \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}}, & x \rightarrow \infty, \\ I_2(x) &= \int_1^{\infty} e^{x(\log(\tau) - \tau)} d\tau \sim e^{-x} \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}}, & x \rightarrow \infty, \\ \Gamma(x+1) &= x^{x+1} I_1(x) + x^{x+1} I_2(x) \sim x^x e^{-x} (2\pi x)^{\frac{1}{2}}, & x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado lo que ya conocíamos por la fórmula de Stirling, mediante el método de Laplace.

En el ejemplo de la función de Bessel modificada y en el de la función gamma hemos dado un único sumando, por lo tanto no podemos llevar a cabo un truncamiento óptimo. En cambio, podemos comparar cómo de precisas son estas dos primeras observaciones. En las figuras a continuación vemos el cociente del desarrollo por la evaluación exacta de la función para los primeros 101 números enteros.

En ambas gráficas observamos una gran mejora cuando hacemos crecer el argumento. No obstante, la eficacia de la fórmula de Stirling para valores pequeños es algo a destacar, pues el desarrollo de la función de Bessel no es capaz de conseguir esa exactitud hasta llegar a valores más moderados.

Para analizar con mayor precisión los errores en la aproximación, es necesario calcular términos adicionales en el desarrollo asintótico. Sin embargo, dado que el costo computacional de obtener coeficientes adicionales puede ser considerablemente alto, es fundamental encontrar un equilibrio entre la complejidad del cálculo y el nivel de precisión deseado. Este compromiso es especialmente relevante en aplicaciones prácticas, donde un número excesivo de términos puede aumentar el esfuerzo computacional sin una mejora significativa en la exactitud de la aproximación.

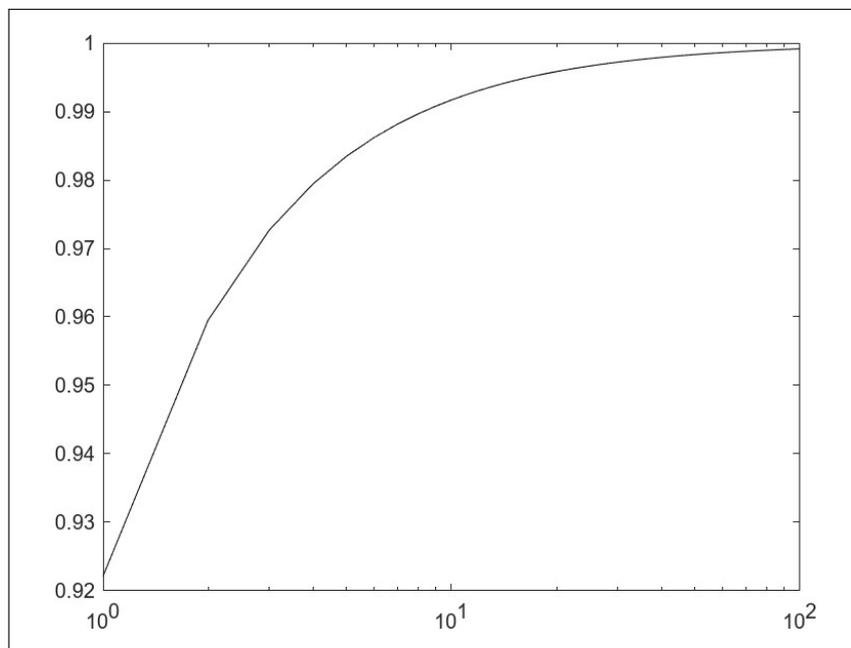
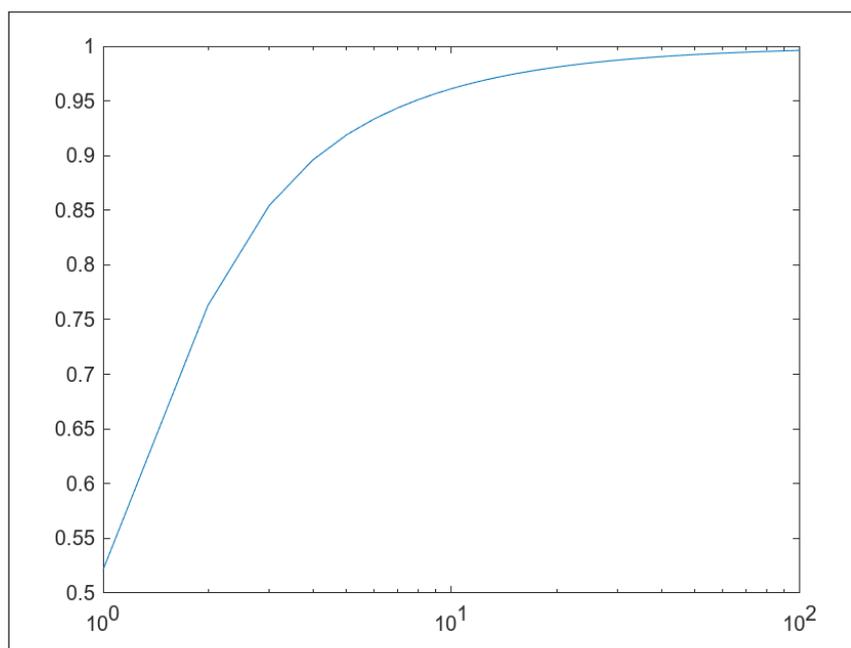


Figura 3.1: Gráfica del error de la función gamma

Figura 3.2: Gráfica del error de la función de Bessel, $n = 1$.

Capítulo 4

Método de mayor descenso

Sean $g(w)$ y $f(w)$ dos funciones analíticas en un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, γ un camino en el plano complejo con soporte contenido en \mathcal{D} , definimos la función compleja

$$F(z) = \int_{\gamma} g(w)e^{zf(w)} dw, \quad z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| \text{ grande.} \quad (4.1)$$

El objetivo de este cuarto capítulo es generalizar el método de Laplace a funciones complejas. Sin embargo, en el caso complejo no podemos repetir este mismo procedimiento, ya que los números complejos no son comparables bajo la relación de orden \leq . En cambio, sí que podemos considerar las direcciones de ascenso y descenso que tiene una función, como veremos en la primera sección del capítulo. Asimismo, dado que trabajamos con funciones holomorfas en un dominio abierto y conexo, podemos aplicar el teorema de Cauchy para justificar la deformación del camino de integración γ que nos interesa. A lo largo de este capítulo, utilizaremos como base los resultados de [2], [3] y [13].

4.1. Resultados preliminares

La forma habitual de comparar números complejos es a través de sus módulos. En este caso, queremos determinar para qué valores de $f(w)$ la función $e^{zf(w)}$ alcanza su mayor valor en módulo. Es decir, cuándo la función $\operatorname{Re}(zf(w))$ alcanza su valor máximo.

Para abordar este problema, supondremos que f no es constante. Según el teorema del módulo máximo, deducimos que no hay extremos absolutos de $|f|$ en el interior del conjunto de definición. Por lo tanto, los puntos que buscamos deben cumplir con la condición de crecimiento que estamos considerando, pero no serán extremos de la función. Es decir, serán los puntos en los que la función $e^{zf(w)}$ presenta direcciones de crecimiento y decrecimiento máximo, pero no serán puntos donde se alcanza el máximo de la función. Este enfoque nos permite explorar el comportamiento de la integral en función de $f(w)$ sin que estemos necesariamente buscando los máximos locales.

Lo primero que haremos es presentar las nociones de direcciones y curvas de descenso y ascenso a la par que las primeras propiedades que cumplen las funciones cuando toman las direcciones de mayor descenso y ascenso. Para ello, trabajaremos con la parte real de la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, siendo $z = x + iy$.

Definición 4.1. Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{D}$. Una dirección que parte de z_0 en la que la función real $u(x, y)$ decrece en comparación con $u(x_0, y_0)$, la denominaremos como dirección de descenso de z_0 . De forma análoga, una dirección de ascenso es aquella que parte de z_0 y la función $u(x, y)$ toma valores mayores que $u(x_0, y_0)$.

Observaciones 4.2. En general, un punto z_0 no tiene una única dirección de descenso o ascenso como en el caso real de una única variable. Por lo tanto, vamos a querer determinar cuáles son aquellas direcciones en las cuales el cambio de pendiente es máximo. De hecho, conocemos que la dirección de mayor descenso (ascenso) coincide con la dirección del vector gradiente $-\nabla u(x, y)$ ($\nabla u(x, y)$), siempre que no sea nulo.

Definición 4.3. Sea γ una curva orientada regular con punto inicial z_0 y punto final z_1 , finito o infinito. Si en cada punto de la curva la tangente sigue la dirección de (mayor) descenso (ascenso) para la función real $u(x, y)$, con $\nabla u(x, y)$ no nulo para todo (x, y) , entonces γ es un camino de (mayor) descenso (ascenso) para u .

Definición 4.4. $z_1 = x_1 + iy_1$ está en un *valle* de f con respecto de z_0 si $u(x_1, y_1) < u(x_0, y_0)$ y en una *cima* si $u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0)$. En el caso de que haya una igualdad, $u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0)$, diremos que es un punto *límite* de un *valle* y una *colina* de la función f con respecto a z_0 .

Dada una función f , si consideramos un camino de descenso o ascenso, cada vez que nos movamos estaremos más cerca de un *valle* o *cima* respectivamente. En el caso del *valle*, si queremos que esta trayectoria sea la más rápida o empinada posible, deberemos tomar la dirección de mayor descenso.

Observación 4.5. La nomenclatura de *valle*, *cima* y *punto límite* proviene de una analogía con la geografía y la topografía en la naturaleza. El asociar el comportamiento de la función con una ilustración más familiar, hace que entendamos y visualicemos con mayor facilidad el comportamiento de estas funciones.

Un *valle* se define como una llanura entre montes o alturas; luego, los puntos de un *valle* son aquellos que están rodeados de puntos de mayor altura. En el contexto que nos concierne, el *paisaje* natural se relaciona con la superficie generada por $(x, y, u(x, y))$ y los puntos *valle* son aquellos que se encuentran en las zonas de menor valor de la superficie o en una depresión del valor de la función $u(x, y)$.

Por el contrario, una *cima* se define como el punto más alto de los montes, cerros y collados; por lo tanto hace una clara analogía al vértice de un máximo relativo o absoluto de la función u . Diremos entonces que un punto z_1 se encuentra en una *cima* de la función si se encuentra en una región alta de la superficie y existen puntos más bajos que z_1 .

Por último, un *límite* (en la geografía) es una línea real o imaginaria que separa dos

terrenos, dos países, dos territorios. Con este término nos referiremos a los puntos que se encuentran en el umbral del ascenso y el descenso, respecto de un punto z_0 . En otras palabras, los puntos límites respecto de la función u en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, son aquellos puntos tales que su imagen se encuentra en la misma curva de nivel que $u(x_0, y_0)$.

Observación 4.6. El lema a continuación tiene una estrecha relación con las condiciones de Cauchy-Riemann que deben cumplir las partes real e imaginaria de la función f . Si $f = u + iv$ es una función compleja holomorfa en un dominio \mathcal{D} , entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x, y),\end{aligned}$$

en cada punto $z = x + iy$ del dominio. Luego, los vectores gradientes son ortogonales en cada uno de los puntos de \mathcal{D} :

$$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x, u_y) \cdot (-u_y, u_x) = u_x u_y - u_x u_y = 0.$$

Asimismo, las funciones reales u y v son armónicas en el dominio isomorfo a \mathcal{D} en el plano real (\mathbb{R}^2):

$$\begin{aligned}\Delta u &= (u_x)_x + (u_y)_y = -v_{yx} + v_{xy} = 0, \\ \Delta v &= (v_x)_x + (v_y)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0.\end{aligned}$$

Si existe $z_0 \in \mathcal{D}$ tal que $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = 0$, igualando partes reales e imaginarias, llegamos a que las derivadas parciales de las funciones u y v se anulan simultáneamente y que z_0 es un punto crítico. Si u y v alcanzan un extremo en este punto, el teorema del módulo máximo para funciones armónicas nos dice que ambas funciones son constantes y que el estudio de direcciones de máximo descenso carece de interés. En el caso de sea un punto de silla, el estudio es algo más complejo y lo trataremos con mayor precisión.

En el caso de que la derivada no se anule, las líneas de contorno donde una de las componentes de la función f es constante, son ortogonales entre sí. Además, el hecho de que la dirección de mayor descenso de la función en un punto venga dada por ∇u hace que esta sea única y se caractericen con la propiedad del lema 4.8.

Ejemplo 4.7. Consideremos la función $f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2$. Basándonos en las figuras 4.1, vemos que $z_0 = 0$ está en un valle con respecto de $z_1 = 1$ y en una cima con respecto $z_2 = i$.

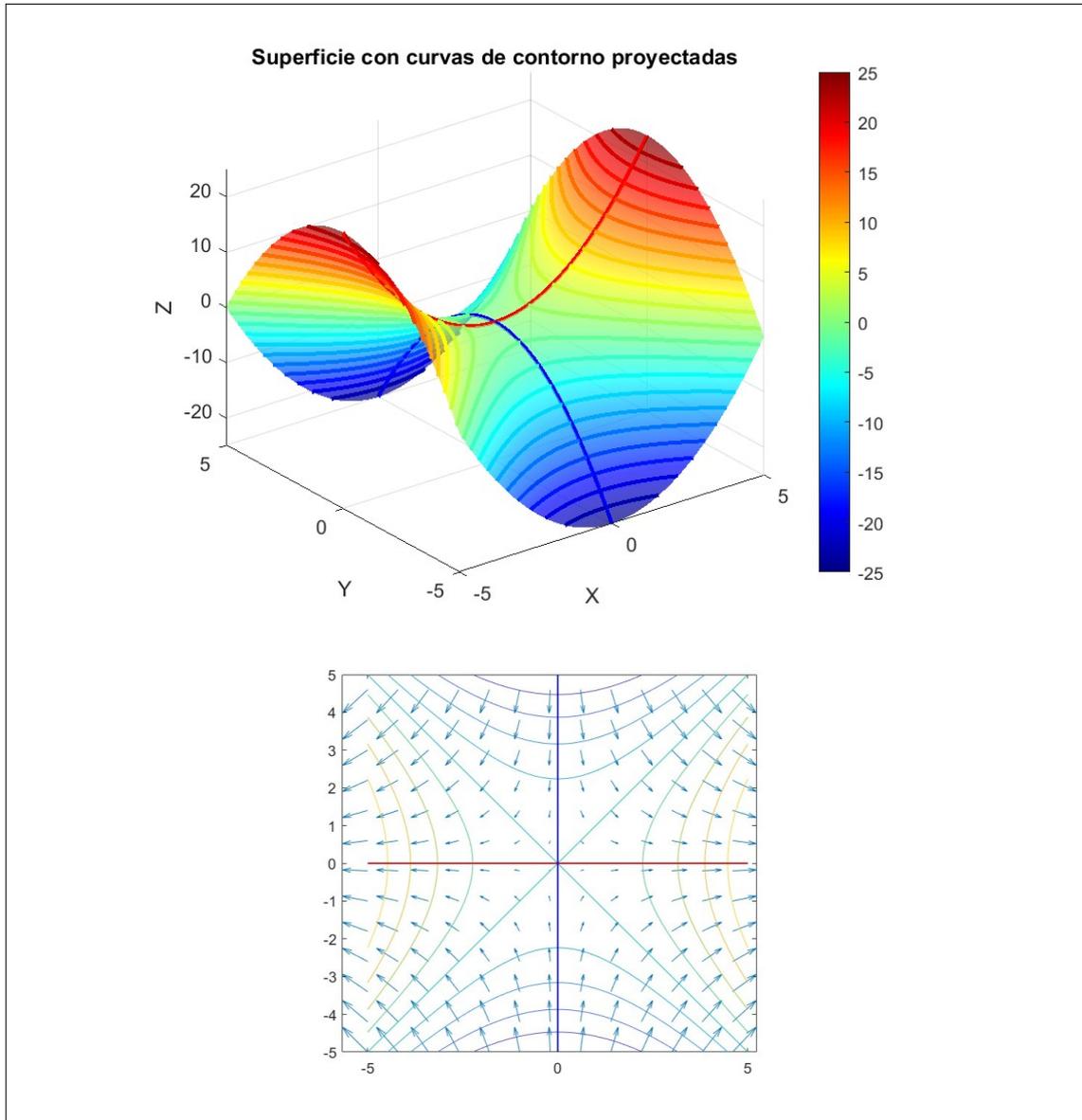


Figura 4.1: Figuras de $f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2$

El siguiente resultado se ha tomado de [2, pág. 255] y [5].

Lema 4.8. Sean f holomorfa en \mathcal{D} y $z_0 \in \mathcal{D}$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, las curvas de mayor descenso o ascenso de f en $z_0 = x_0 + iy_0$ son aquellas en las que su parte imaginaria es constante.

Demostración. En primer lugar, de lo comentado en la observación 4.5 sabemos que

$$\overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla u.$$

Supongamos que trabajamos en la curva

$$\text{Im}(f) = v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Dado $z = x + iy$ suficientemente cercano a $z_0 = x_0 + iy_0$, podemos considerar la diferencia

$$\delta_f = f(z) - f(z_0) = \delta_u + i\delta_v,$$

y si z se encuentra en la curva mencionada, se tiene que $\delta_v = 0$. Por lo tanto, se tiene que $\delta_f = \delta_u$ y pasando al límite, tenemos que el vector tangente de la curva compleja $\text{Im}(f) = v(x_0, y_0)$ es la misma que la de $\nabla u(x, y)$.

Probemos ahora la otra implicación. Supongamos que $\gamma(t)$ con $t \in [\alpha, \beta]$ es una curva de mayor pendiente de la función f . Por lo tanto, se tiene que

$$\arg(\gamma'(t)) = \arg(\overline{f'(\gamma(t))}) = -\arg(f'(\gamma(t))), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (4.2)$$

Aplicando la regla de la cadena a la función

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))\gamma'(t),$$

vemos que todas las derivadas son reales, puesto que (4.2) nos asegura que las dos funcione involucradas son de argumento opuesto. En otras palabras, la parte imaginaria de la función f tiene derivada idénticamente nula en γ^* , concluyendo así que $\text{Im}(f)$ es constante a lo largo de la curva γ . \square

Consideramos a continuación el caso en que $f'(z_0) = 0$.

Definición 4.9. Sean f una función holomorfa en \mathcal{D} y $z_0 \in \mathcal{D}$. Diremos que la función f tiene un punto de silla de orden $n \geq 1$ en el punto z_0 si

$$f'(z_0) = \dots = f^{(n)}(z_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(z_0) \neq 0. \quad (4.3)$$

Proposición 4.10 ([2]). Sean w una función holomorfa en un dominio \mathcal{D} y z_0 un punto de silla de w de orden $n - 1$ donde

$$f^{(n)}(z_0) = ae^{i\alpha}, \quad a > 0.$$

Dado $z \in \mathcal{D}$ tal que $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ y ρ es suficientemente pequeño, entonces las direcciones de mayor descenso, ascenso o donde $u = \text{Re}(f)$ es constante en el punto $f(z_0)$ son las siguientes:

<i>Dirección:</i>	<i>Ángulo:</i>
<i>Descendente</i>	$\theta = \frac{-\alpha}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi \quad k = 0, 1, \dots, n-1$
<i>Ascendente</i>	$\theta = \frac{-\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi \quad k = 0, 1, \dots, n-1$
<i>Constante</i>	$\theta = \frac{-\alpha}{n} + \frac{2k+1}{2n}\pi \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1$

Demostración. Del polinomio de Taylor de orden n , deducimos que

$$\delta_f = f(z) - f(z_0) = \frac{ae^{i\alpha}}{n!}\rho^n e^{in\theta} + O(\rho^{n+1}), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Si le damos la estructura de cociente incremental y acotamos utilizando la hipótesis de que z y z_0 están suficientemente próximos, tenemos que

$$\left| \frac{\delta_f}{\rho^n} - \frac{ae^{i(\alpha+n\theta)}}{n!} \right| \leq M\rho \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \rho \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, las derivadas direccionales de la función $f = u + iv$ en el punto z_0 vienen dadas por $\frac{ae^{i(\alpha+n\theta)}}{n!}$, y en consecuencia las derivadas direccionales de u y v son, salvo una constante positiva, las dadas por $\cos(\alpha + n\theta)$ y $\sin(\alpha + n\theta)$, respectivamente. Por lo tanto, las direcciones de mayor ascenso de u ocurrirán cuando $\cos(\alpha + n\theta) = 1$, y las de mayor descenso cuando $\cos(\alpha + n\theta) = -1$. Lo primero ocurre cuando

$$\alpha + n\theta = k\pi, \quad \text{con } n \text{ par,}$$

y lo segundo cuando

$$\alpha + n\theta = k\pi, \quad \text{con } n \text{ impar.}$$

Despejando θ en función de k , y quedándonos solo con las direcciones distintas, las de ascenso son

$$\theta = \frac{-\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

y las de descenso

$$\theta = \frac{-\alpha}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Finalmente, las direcciones en las que la parte real de la función f es constante vienen dadas por aquellas derivadas direccionales en las cuales su parte real es nula. Por lo tanto,

$$\cos(\alpha + n\theta) = 0 \iff \alpha + n\theta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \iff \theta = \frac{-\alpha}{n} + \frac{2k+1}{2n}\pi,$$

para $k = 0, 1, \dots, 2n$. □

Observaciones 4.11. Con este resultado concluimos que una función con un punto de silla de orden $n - 1$ tiene n direcciones de mayor descenso y otros n de mayor ascenso. De hecho, un entorno de este punto se divide en $2n$ regiones (sectores de misma amplitud) en los cuales las direcciones de una misma región son ascendentes o descendentes y las fronteras constantes.

En la figura 4.1 se muestra el caso de $n = 2$, mientras que en la figura 4.5 se presentan otros tres casos de interés. A simple vista nos percatamos de que en los casos pares las n proyecciones de las direcciones de ascenso constituyen $\frac{n}{2}$ rectas en el plano que pasan por z_0 , creando una simetría en la superficie que forma $(x, y, u(x, y))$. En el caso impar, las direcciones de ascenso y descenso confluyen en el punto z_0 , resultando en una figura con forma de silla de mono.

Asimismo, este teorema es una versión equivalente del teorema del módulo máximo. Puesto que si en un dominio (conjunto abierto y conexo) existiese un máximo (en módulo o de alguna de sus partes reales o complejas), todas las direcciones del punto serían del mismo carácter ascendente o descendente.

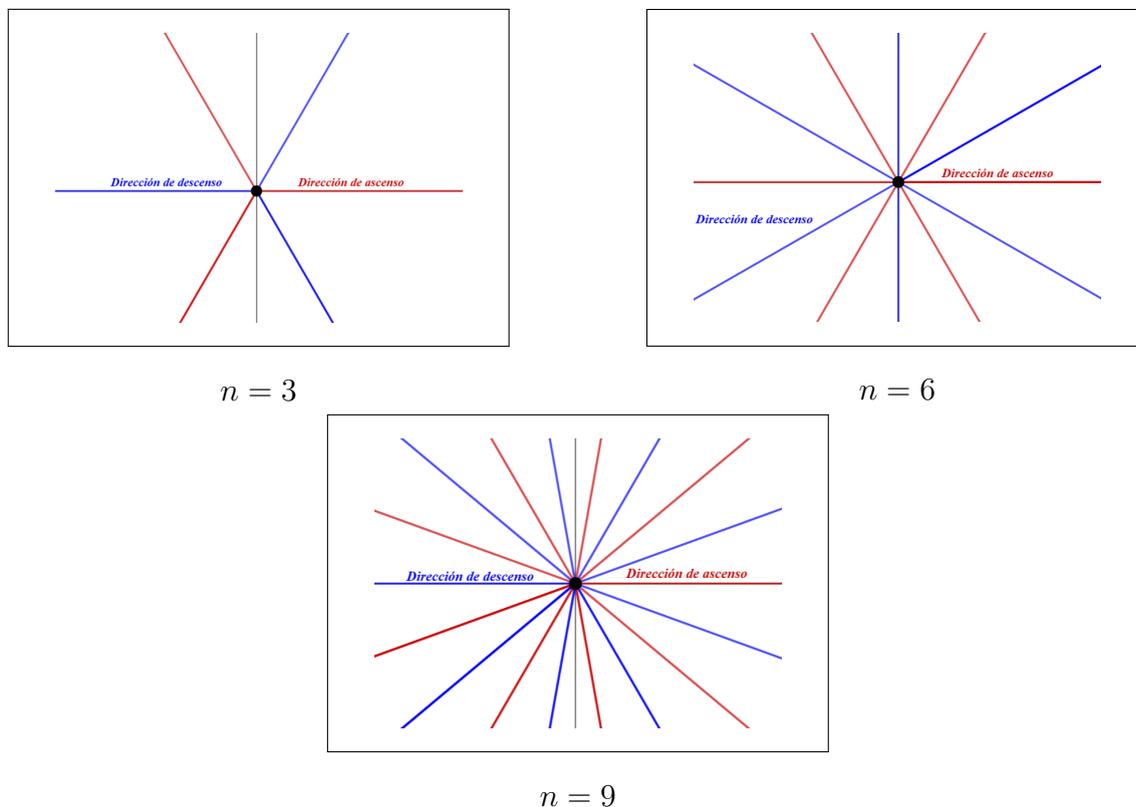


Figura 4.5: Proyección en el plano de las direcciones de mayor ascenso y descenso de un punto de silla de orden n , de una función $u(x, y)$ y $\alpha = 0$.

Ejemplo 4.12. Consideremos la función compleja

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3}, \tag{4.4}$$

de parte real $u(x, y) = x - \frac{x^3}{3} + xy^2$ e imaginaria $v(x, y) = y - x^2y + \frac{y^3}{3}$. Hagamos un breve estudio de las direcciones de mayor descenso y ascenso de esta función, siguiendo [2, pág. 259]. En primer lugar, calculemos sus derivadas de primer y segundo orden:

$$w'(z) = 1 - z^2, \quad w''(z) = -2z.$$

Vemos que la ecuación $w'(z) = 0$ tiene dos raíces reales, $z = 1$ y $z = -1$, y que ninguna de las dos tiene segunda derivada nula. Por lo tanto, $z = \pm 1$ son puntos de silla de primer orden, luego tienen un par de direcciones de mayor ascenso y descenso. Para ver cuáles son estas direcciones, veamos cuál es la curva que cumple la condición

$$v(x, y) = y \left(1 - x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = v((\pm 1, 0)) = 0.$$

Vemos que esta se constituye de las dos ramas de la hipérbola $x^2 - \frac{y}{3} = 1$, que pasan por $z_{\pm} = \pm 1$, y la recta $y = 0$. Conociendo ya cuáles son estas direcciones, mediante la proposición 4.10 vamos a clasificar cada una de estas direcciones. Empecemos evaluando esta segunda derivada en los puntos de silla y expresándolos en forma

polar:

$$w''(z_+) = -2 = 2 e^{i\pi}, \quad w''(z_-) = 2 = 2e^{i0}.$$

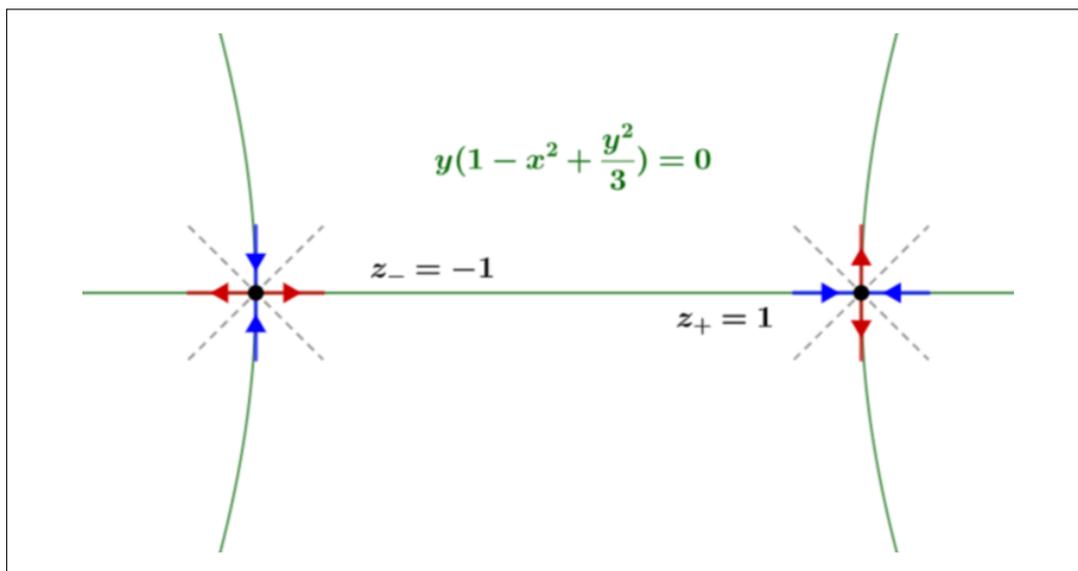


Figura 4.6: Proyección de las direcciones de mayor pendiente

En la tabla siguiente vemos esta clasificación, teniendo en cuenta cuál es el valor de θ en cada caso:

	Ascenso		Descenso		Constante			
$z = 1$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	π	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
$z = -1$	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$

En la figura 4.6 vemos que las direcciones de ascenso, descenso y constante de la tabla coinciden con las direcciones tomadas por la recta $y = 0$ y las ramas de la hipérbola. De hecho, observamos que la dirección de mayor ascenso que sale de $z_- = -1$ (con ángulo $\alpha = 0$) es la misma dirección de mayor descenso que entra en $z_+ = 1$ (con ángulo $\alpha = \pi$), lo que es coherente con el valor de la función en estos puntos: $u(\pm 1, 0) = \pm \frac{2}{3}$.

Por último, clasifiquemos los valles y cimas de la función u ; para ello, nos basaremos en la información que nos proporciona la gráfica de la derecha. Vemos que la función crece rápidamente en las direcciones de ascenso, lo que hace que no seamos capaces de percibir correctamente los valles y cimas de la función. El crecimiento tan pronunciado de la función se debe a que $u(x, y)$ es una función polinómica de tercer grado.

Asimismo, debemos darnos cuenta de que todo valle de $z = -1$ es un valle de $z = 1$ y que toda cima de $z = 1$ es una cima de $z = -1$, por el hecho de que $u(1, 0) = \frac{2}{3} > u(-1, 0) = -\frac{2}{3}$. Por lo tanto, nos centraremos en determinar cuáles son estas regiones intermedias. Basándonos en las direcciones de ascenso de la figura 4.6, se tiene que cuando $x \in (-1, 1)$ la región encerrada entre ambas curvas de nivel es una cima para $z = -1$ y un valle para $z = 1$. De forma similar, vemos que cuando

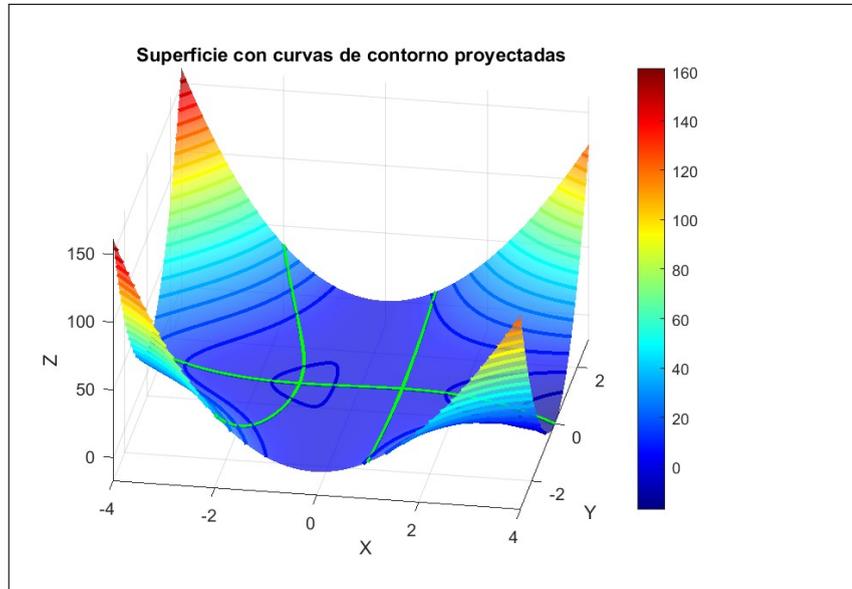


Figura 4.7: $f(z) = u(x, y) = x - \frac{x^3}{3} + xy^2$

$x > 1$ la dirección del eje $y = 0$ es descendente, por lo tanto para $z = 1$ es el inicio de un valle y en cambio para $z = -1$ es el final de la cima.

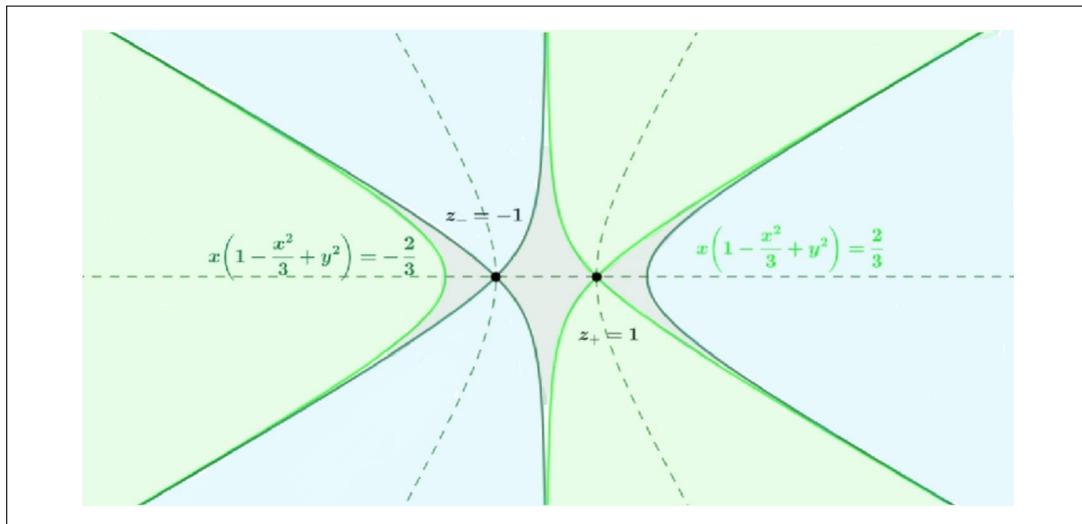


Figura 4.8: Proyección de las cimas y valles de $u(x, y)$.

Todas estas regiones se ven reflejadas en la figura 4.8. Conociendo las direcciones de ascenso y descenso, en la figura se destacan las direcciones constantes o las curvas de nivel para los dos puntos de silla de u . Las regiones de valle y cima para ambos puntos se resaltan en azul claro y verde claro, respectivamente. En cuanto a las regiones intermedias, estas vienen representadas con un tono verdoso más oscuro.

Por último, no se nos debe olvidar que el estudio de valles y cimas de un punto es un estudio local. En el ejemplo que estamos manejando lo hemos generalizado con el objetivo de abarcar todo lo estudiado en esta sección. En la práctica, nos bastaría

conocer las direcciones de ascenso, descenso y las curvas de nivel de u y v en cada uno de los puntos de silla de la función real u .

4.2. Descripción del método

El método de mayor descenso que abordaremos a continuación fue introducido por Debye en 1909, por ello textos como el [3] lo llaman el método de Debye de mayor descenso. El método consiste en escoger un camino de integración que cumpla ciertas propiedades geométricas que nos aporten ventajas a la hora de calcular su desarrollo asintótico. Esta modificación tiene como objetivo facilitar la aplicación del método de Laplace o el lema de Watson en una integral de este tipo, donde los caminos de mayor descenso y ascenso juegan un papel clave al aportar propiedades de *monotonía* a la función f .

Si existe un camino equivalente a γ , que llamaremos $\tilde{\gamma}$, tal que sea un camino de mayor descenso o ascenso de f , que parte de un punto de silla w_0 , entonces

$$\int_{\gamma} g(w)e^{zf(w)}dw = \pm \int_{\tilde{\gamma}} g(w)e^{zf(w)}dw.$$

De las propiedades probadas en la sección anterior, tenemos que la parte imaginaria de f sobre esta curva es constante, luego nos podemos centrar en el estudio asintótico de la integral

$$I(z) = \int_{\tilde{\gamma}} g(w)e^{z\operatorname{Re}(f(w))}dw, \quad F(z) = e^{iz\operatorname{Im}(w_0)}I(z). \quad (4.5)$$

Esta nueva integral cumple que $\operatorname{Re}(f(w))$ es monótona a lo largo de todo el camino de integración, lo que la hace tener una estructura similar a las integrales que ya hemos tratado en el método de Laplace.

Conociendo cuál es el objetivo de este método, debemos determinar cuáles son las direcciones que nos interesan. Puesto que un punto de silla de orden $m - 1$, tiene $2m$ direcciones de ascenso y descenso, la elección de esta no es algo trivial. En particular, no hay una regla estricta que nos garantice que la elección es correcta independientemente del camino y de la función que estemos integrando. No obstante, sí que debemos tener en cuenta que las direcciones con las que vamos a querer trabajar son justamente las de descenso. La causa principal de esta elección se debe a la necesidad de garantizar la convergencia absoluta de la integral y así poder aplicar uno de los dos métodos que ya hemos comentado anteriormente.

En el siguiente desarrollo seguimos las referencias [13, pág. 84-90] y [2, pág. 262]. Dado que ya hemos expuesto la filosofía subyacente del método de mayor descenso, procedamos a enumerar los pasos a seguir en este extenso y complejo procedimiento:

Paso 1: Identificación de los puntos críticos del integrando. Es decir, los extremos de la curva, singularidades de las funciones g y f , y los puntos de silla de f .

Paso 2: Determinar las direcciones de mayor descenso de cada uno de los puntos de silla de la función f .

Paso 3: Aplicar el teorema de Cauchy para deformar el camino de integración a un nuevo camino que pase por los puntos de silla de f y que en cada una de ellas tome una de las direcciones de mayor descenso.

Paso 4: Dividir la integral en cada uno de los caminos de mayor descenso y mediante el método de Laplace calcular los desarrollos asintóticos de cada uno de ellos.

Paso 5: Sumar cada uno de estos desarrollos para conseguir el desarrollo asintótico de la integral completa.

Teniendo una visión periférica del método de mayor descenso, centrémonos en cada uno de los pasos y veamos qué obstáculos y beneficios nos podemos encontrar al seguir esta metodología. Empecemos con “Paso 1.” y “Paso 2.”, que como hemos comentado en la sección anterior, son dos procedimientos conceptualmente sencillos pero costosos, en cuanto a cuentas se refiere. En los ejemplos que hemos manejado las cuentas han sido sencillas, pero cuando la función f deja de ser un polinomio de orden bajo, estas cuentas se pueden complicar considerablemente. Un ejemplo modelo del estudio que hay que llevar en estos dos pasos viene dada por el ejemplo 4.12.

Para llevar a cabo el “Paso 3.”, debemos escoger cuáles son los puntos de silla por los que queremos que pase la nueva curva y cuáles son las direcciones de descenso de cada una de estas partes de la curva. Es decir, la nueva curva $\tilde{\gamma}$ pasa por k puntos de silla de la función f que denotaremos por $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathcal{D}$ y en cada trozo de integral que pasa por $[z_j, z_{j+1}]$ la curva toma la dirección de mayor descenso de z_j que llega a z_{j+1} . En el caso de que uno de los extremos no sea un punto de silla, basta con cambiarle la orientación a ese trozo de la integral y actuar de la misma forma que en el caso anterior.

Ahora, hay que aplicar el teorema de Cauchy o el de los residuos, dependiendo del problema. En una primera instancia, no podemos garantizar la posibilidad de llevar a cabo este cambio de curva de integración. Este procedimiento es altamente delicado ya que depende de los dominios de definición de f y g . En el caso más sencillo, ambas funciones son holomorfas en una misma región conexa donde los soportes γ^* y $\tilde{\gamma}^*$ se encuentran en el interior de una de sus componentes conexas y por tanto podemos aplicar el teorema de Cauchy. En el caso de que en la región encerrada por las curvas γ y $\tilde{\gamma}$ haya alguna singularidad aislada, el teorema de los residuos nos da la solución. En este segundo caso, al realizar los cálculos, arrastraremos los valores de los residuos de la función $g(t)e^{zf(t)}$ en cada una de las singularidades.

Una vez determinada cuáles son los nuevos caminos de integración, toca parametrizar cada uno de los trozos de la curva y dar pie al “Paso 4.”. Para simplificar las cuentas, vamos a suponer que u tiene un único punto de silla en el origen y que es el punto inicial de $\tilde{\gamma}$. Es decir, que si tomamos una parametrización, $\tilde{\gamma} : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ de la curva, se cumple que $\tilde{\gamma}(0) = 0$ y

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma} g(w)e^{zf(w)}dw = \int_{\tilde{\gamma}} g(w)e^{zf(w)}dw = \int_0^T g(\tilde{\gamma}(t))e^{zf(\tilde{\gamma}(t))}\tilde{\gamma}'(t)dt \\ &= e^{iz\operatorname{Im}(f(\tilde{\gamma}(0)))} \int_0^T (g(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t)) e^{z\operatorname{Re}(f(\tilde{\gamma}(t)))} dt = e^{iz\operatorname{Im}(f(\tilde{\gamma}(0)))} I(z). \end{aligned}$$

Si renombramos las funciones,

$$\phi(t) = g(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t), \quad h(t) = \operatorname{Re}(f(\tilde{\gamma}(t))),$$

veamos que cumplen las condiciones necesarias para poder aplicar el método de Laplace. Primero, nos vamos a centrar en $\phi(t)$. Por cómo hemos elegido la curva $\tilde{\gamma}$, sabemos que la función ϕ es continua en un entorno del origen. Pues para poder considerar este camino de integración, g debe ser suficientemente regular a lo largo de toda la curva y $\tilde{\gamma}$ es una parametrización \mathcal{C}^1 a trozos. Para calcular el desarrollo asintótico de la función ϕ en el origen, debemos calcular los desarrollos de $g(\tilde{\gamma}(t))$ y $\tilde{\gamma}'(t)$. En primer lugar, tenemos que si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(\tilde{\gamma}(t)) = \theta$ y

$$g(w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^{n+\lambda-1}, \quad w \rightarrow 0 \text{ a lo largo de la curva } \tilde{\gamma},$$

entonces,

$$g(\tilde{\gamma}(t)) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\tilde{\gamma}(t))^{n+\lambda-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (te^{i\theta})^{n+\lambda-1}, \quad t \rightarrow 0^+.$$

En segundo lugar, solamente calcularemos el primer término del desarrollo de $\tilde{\gamma}'$, pues en general puede que no se cumplan las condiciones de regularidad requeridas:

$$\tilde{\gamma}'(t) = e^{i\theta} + o(t^1) \sim e^{i\theta}, \quad t \rightarrow 0^+.$$

Multiplicando ambos desarrollos, tenemos que

$$\phi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{i\theta(n+\lambda)} t^{n+\lambda-1}, \quad t \rightarrow 0^+.$$

Observemos que las nuevas condiciones para poder aplicar el método son

$$b_0 e^{i\lambda\theta} = b_0 e^{-\operatorname{Im}(\lambda)\theta} e^{i\operatorname{Re}(\lambda)\theta} \neq 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0.$$

En cuanto a la función h , si

$$f(w) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n+m} = f(0) + z^m f_1(w), \quad t \rightarrow 0 \text{ a lo largo de la curva } \tilde{\gamma},$$

se tiene que $w^m f_1(w)$ es una función real y estrictamente negativa; pues al estar en una curva de mayor descenso, la parte imaginaria de f es constante y

$$f(w) - f(0) = u(x, y) - u(0, 0) < 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f(\tilde{\gamma}(t)) - f(0)) &= f(\tilde{\gamma}(t)) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\tilde{\gamma}(t))^{n+m} \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (te^{i\theta})^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\theta(n+m)} t^{n+m}. \end{aligned}$$

A continuación, nos debemos asegurar de que además de que $a_n e^{i\theta(n+m)} \neq 0$, podemos aplicar el método de inversión para calcular los coeficientes del desarrollo como indicamos en el teorema 3.6. Al ser $a_n e^{i\theta(n+m)} \neq 0$, cuando queremos llevar a cabo el cambio de variable $\tau = -(f(\tilde{\gamma}(t)) - f(0))$, nos aparece una raíz m -ésima a la cual le tenemos que dar una única solución. Para ello, vamos a imponer la condición siguiente al argumento de a_0 :

$$|\arg(z) + m\theta + \arg(a_0)| < \frac{\pi}{2}.$$

Esta condición se debe a que τ debe ser un valor real positivo y como esta condición es demasiado exigente para asegurar la unicidad de la raíz del cambio de variable y la convergencia de la integral, nos basta con que su parte real sea positiva:

$$z\tau \sim za_0 e^{im\theta} \implies \arg(z\tau) = \arg(z) + im + \arg(z_0).$$

Finalmente, si hemos sido capaces de cumplir todas estas condiciones, somos capaces de calcular el desarrollo asintótico de la integral mediante el método de Laplace.

Aunque no hayamos llevado a cabo ninguna cuenta explícita, daremos cuál es el primer término del desarrollo asintótico para poder aplicar el método de forma más rápida en el ejemplo a continuación:

$$I(z) \sim e^{-zf(0)} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \frac{b_0}{m} (a_0 z)^{-\frac{1}{m}}, \quad z \longrightarrow \infty. \quad (4.6)$$

Finalmente, en el “Paso 5:” solamente hay que combinar los desarrollos asintóticos de cada uno de los trozos de la curva modificada y los posibles residuos que nos hayan ido apareciendo al llevar a cabo la deformación del camino en el tercer paso.

4.3. Ejemplo: la integral de Airy

Un ejemplo clásico de la aplicación del método de mayor descenso es el desarrollo asintótico de la función de Airy. Las funciones de Airy son representaciones integrales de las soluciones de la ecuación diferencial de Airy:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - zf = 0.$$

El cálculo de estas expresiones se consigue mediante la formulación diferencial a través de la transformada de Laplace. La descripción del procedimiento se describe en el apéndice A del cual no haremos mayor mención. En resumen, las integrales con las que trabajaremos serán

$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} e^{-\frac{s^3}{3} + sz} ds, \quad n = 1, 2, 3, \quad (4.7)$$

donde los C_n son los caminos de integración que aparecen en la figura 4.9. Por lo tanto, las funciones Airy son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Primer tipo:} & \quad \text{Ai}(z) = h_1(z), \\ \text{Segundo tipo:} & \quad \text{Bi}(z) = i(h_2(z) - h_3(z)). \end{aligned}$$

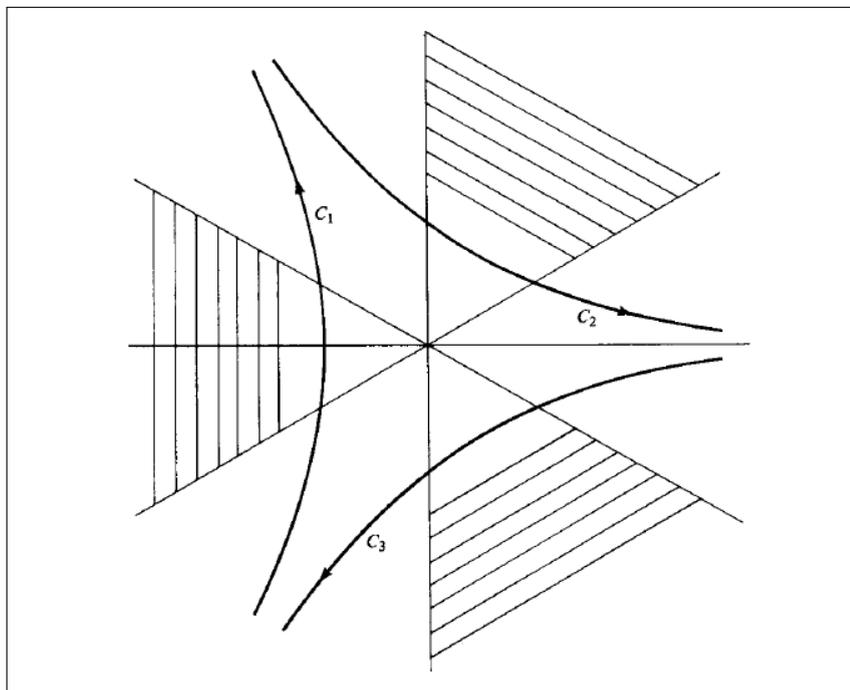


Figura 4.9: Imagen de los caminos de integración tomada de [2].

En primer lugar, para simplificar las cuentas vamos a suponer que z es real. En el caso que queramos generalizar el estudio a z complejos, deberemos escoger la rama del logaritmo dependiendo del camino de integración C_n y no estropear la convergencia y definición de las integrales. Hagamos el cambio de variable $w = \sqrt{z}s$ para que el integrando tome la estructura con la que hemos trabajado todo este capítulo:

$$h_n(z) = \frac{\sqrt{z}}{2\pi i} \int_{C_n} e^{z^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{w^3}{3} + w\right)} dw.$$

Si consideramos $\lambda = z^{\frac{3}{2}}$ y definimos $f(w) = w - \frac{w^3}{3}$ y $g(w) = 1$, llegamos a la integral que estábamos buscando:

$$h_n(z) = I_n(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{1}{3}}}{2\pi i} \int_{C_n} g(w) e^{\lambda f(w)} dw.$$

No hemos prestado atención al cambio del camino de integración en estos cambios de variable. La razón principal es que, debido a la regularidad de las funciones f y g , podemos deformar el camino de integración libremente. Es decir, al realizar el cambio de variable, el camino C_n podría transformarse en una trayectoria que no nos resulte conveniente (considerando los puntos de silla de la función $\text{Re}(f)$). Sin embargo, gracias al teorema de Cauchy, podemos modificarlo de manera que recupere la geometría mostrada en la figura 4.9.

Lo primero que debemos es estudiar las funciones f y g , que al ser polinomios de grado 3 y 0 respectivamente, son dos funciones enteras. Del ejemplo 4.12, conocemos

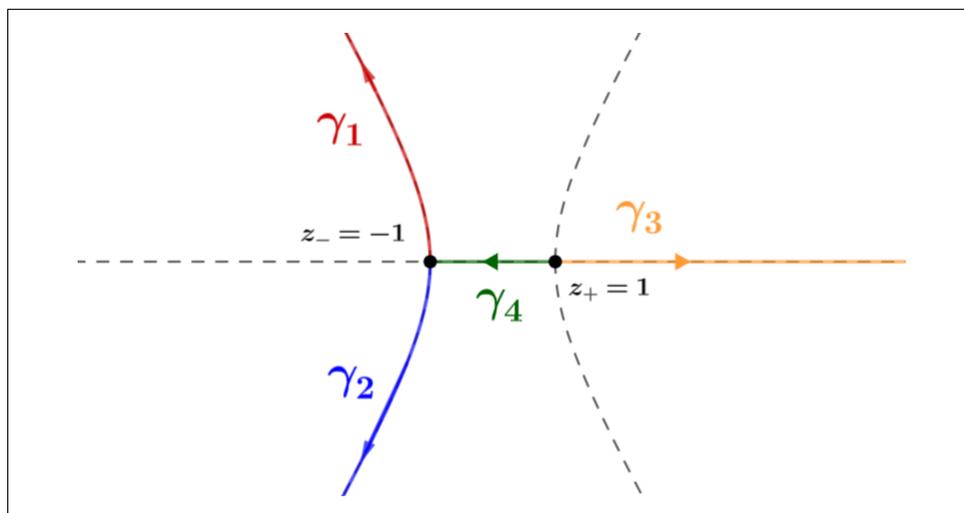


Figura 4.10: Curvas de mayor descenso en los puntos de silla de $\text{Re}(f)$ orientadas

los puntos de silla de f y sus direcciones de descenso los cuales hemos orientado y denotado con γ_k en la figura 4.10. Luego, pasemos directamente al estudio de los caminos de integración equivalentes.

El objetivo principal de este tercer paso es sustituir los caminos C_1 , C_2 y C_3 por las curvas de mayor descenso $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 sin alterar extremadamente el valor de la integral. Es decir, debemos decidir cuáles son los puntos de silla relevantes para cada uno de los caminos C_k y a partir de estos concluir cuáles son las direcciones de descenso que vamos a tomar.

- El camino C_1 atraviesa el semiplano complejo $\text{Re}(w) < 0$, luego el punto de silla $z = 1$ queda descartado. En segundo lugar, vamos a querer sustituir el camino C_1 por la combinación $\gamma_1 - \gamma_2$.
- El camino C_2 es una curva cerrada que sale del punto del infinito y se aproxima al eje real con argumento $\frac{2\pi}{3}$ y vuelve a aproximarse al infinito tomando $\text{Im}(w) > 0$ y con argumento 0. De aquí deducimos que en este caso ambos puntos de silla van a ser relevantes y que la combinación de caminos con lo que vamos a sustituir C_2 es $\gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_4$.
- Por simetría de los caminos C_2 y C_3 , es inmediato que la combinación de curvas que van a sustituir este tercer camino va a ser $\gamma_2 + \gamma_4 - \gamma_3$.

A continuación, debemos aplicar el teorema de Cauchy para legitimar el cambio de camino. Este procedimiento no requiere excesivo trabajo más allá de una buena parametrización C_1 , C_2 y C_3 , ya que el integrando es una función entera. No vamos a entrar en más detalle en este tercer paso, ya que se trata de un procedimiento mecánico que no aporta ningún razonamiento particularmente ingenioso, más allá de la aplicación de conceptos elementales de variable compleja.

El siguiente paso a dar es la aplicación del teorema 3.6 a cada una de las integrales

$$I^k(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{1}{3}}}{2\pi i} \int_{\gamma_k} g(w) e^{\lambda f(w)} dw, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Recordemos que f es una función real a lo largo de estas curvas, luego es legítimo la aplicación del teorema siempre que tengamos especial cuidado con los ángulos con los que salen las curvas de descenso de los puntos de silla. A continuación aplicaremos el teorema de forma simultánea a las cuatro integrales, siguiendo la tabla siguiente:

	m	α	$\gamma(t)$	θ	$h(\gamma(t))$	$h(\alpha)$	a_0	b_0
I^1	2	-1	$(t, \sqrt{3(t^2 - 1)})$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{8}{3}t^3 - 2t$	$\frac{2}{3}$	-1	-1
I^2	2	-1	$(t, -\sqrt{3(t^2 - 1)})$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{8}{3}t^3 - 2t$	$\frac{2}{3}$	-1	1
I^3	2	1	$(-t, 0)$	π	$t - \frac{t^3}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	-1
I^4	2	1	$(t, 0)$	0	$-t + \frac{t^3}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	1

Hemos dado las parametrizaciones de las curvas en \mathbb{R}^2 para facilitar la evaluación $u(x, y)$, y evaluando en (4.6) concluimos que los desarrollos asintóticos de cada I^k cuando $\lambda \rightarrow \infty$ son

$$\begin{aligned} I^1(\lambda) &\sim \frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{4\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2\lambda}{3}}, & I^2(\lambda) &\sim -\frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{4\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2\lambda}{3}}, \\ I^3(\lambda) &\sim \frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{4i\sqrt{\pi}} e^{\frac{2\lambda}{3}}, & I^4(\lambda) &\sim -\frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{4i\sqrt{\pi}} e^{\frac{2\lambda}{3}}, \end{aligned}$$

y que si combinamos correctamente cada una de estas integrales llegamos al desarrollo asintótico de las funciones h_n :

$$\begin{aligned} I^1(\lambda) &\sim \frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2\lambda}{3}} &\implies h^1(z) &\sim \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2}{3}z^{\frac{3}{2}}} \\ I^2(\lambda) &\sim \frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{2i\sqrt{\pi}} e^{\frac{2\lambda}{3}} - \frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{4\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2\lambda}{3}} &\implies h^2(z) &\sim \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{2i\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2}{3}z^{\frac{3}{2}}} - \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{4\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2}{3}z^{\frac{3}{2}}} \\ I^3(\lambda) &\sim -\frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{2i\sqrt{\pi}} e^{\frac{2\lambda}{3}} - \frac{\lambda^{-\frac{1}{6}}}{4\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2\lambda}{3}} &\implies h^3(z) &\sim -\frac{z^{-\frac{1}{4}}}{2i\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2}{3}z^{\frac{3}{2}}} - \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{4\sqrt{\pi}} e^{\frac{-2}{3}z^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a los dos desarrollos asintóticos de las dos funciones de Airy

cuando $z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &\sim \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & z \longrightarrow \infty, \\ \text{Bi}(z) &\sim \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & z \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Apéndice A

Transformada de Laplace

En este primer apéndice presentaremos las nociones esenciales de la transformada de Laplace. El objetivo principal es esclarecer la relación que hay entre la transformada de Laplace y las funciones de orden exponencial de las que hablamos en el segundo capítulo. Este resumen viene dado en el texto [4] con mucho más detalle. En cuanto a las demostraciones de los dos resultados que vamos a enunciar, no las vamos a llevar a cabo pues son dos pruebas elementales del análisis de convergencia absoluta de integrales.

Definición A.1. Se dice que una función compleja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es localmente integrable en $[0, \infty)$ si es integrable en cada intervalo $[0, b]$, esto es, si la integral de f en $[0, b]$ tiene sentido y

$$\int_0^b |f(t)| dt < \infty \quad \text{para todo } b > 0.$$

Al conjunto de las funciones localmente integrables en $[0, \infty)$ se denotará por $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$.

En lo que concierne al estudio de la transformada de Laplace, cuando definamos un función $f(x)$ mediante una fórmula explícita, entenderemos que dicha expresión sólo se utilizará para valores $x \geq 0$: $f(x) = f(x)\chi_{[0, \infty)}$.

Definición A.2. Se dice que $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ admite transformada de Laplace si existe un número complejo z tal que la integral

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt \tag{A.1}$$

converge absolutamente. En este caso, el conjunto

$$A = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty \right\}$$

es un intervalo no vacío, y se tienen dos posibilidades:

1. A no está acotado inferiormente. Se define $\sigma_f := -\infty$.
2. A está acotado inferiormente. Se define $\sigma_f := \inf A \in \mathbb{R}$.

El valor σ_f se denomina abscisa de convergencia absoluta de la transformada de Laplace de f .

Proposición A.3. *Si la función f admite transformada de Laplace y σ_f es su abscisa de convergencia, se tiene que:*

1. *La integral (A.1) converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) > \sigma_f$.*
2. *La integral (A.1) no converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) < \sigma_f$.*

Definición A.4. Sean f una función que admite transformada de Laplace y σ_f su abscisa de convergencia absoluta. Se llama dominio de convergencia absoluta de la transformada de Laplace de f al conjunto

$$D_f := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \sigma_f\}.$$

Si $\sigma_f = -\infty$, se entiende que $D_f = \mathbb{C}$, en otro caso D_f es un semiplano abierto. Se define la transformada de Laplace de f , denotada por $\mathcal{L}(f)$ como la función definida en D_f mediante

$$\mathcal{L}(f)(z) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt, \quad z \in D_f.$$

Ejemplo A.5. Sea $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la función de Heaviside dada por

$$H(t) = \chi_{[0, \infty)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

H es una función localmente integrable en $[0, \infty)$, pues al ser una constante la integración en compactos es evidentemente convergente. Además su abscisa de convergencia es $\sigma_H = 0$, pues para que se de la convergencia de la integral (A.1), solamente nos debemos fijar en la exponencial. Por lo tanto, su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}H(z) = \int_0^{\infty} H(t)e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Proposición A.6. *Si $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ es de orden exponencial, con $f(t) = O(e\alpha|t|)$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces f admite transformada de Laplace. En concreto, siguiendo la notación de la definición anterior, $\sigma_f \leq \alpha$.*

Apéndice B

Función gamma

Este segundo apéndice presenta un formulario con las funciones especiales que se utilizan con mayor frecuencia a lo largo del trabajo. Dado que resulta laborioso demostrar cada una de estas propiedades e identidades, únicamente las enumeraremos y citaremos los textos en los que se encuentran las pruebas correspondientes, con el fin de poder hacer uso de ellas de manera eficiente. La mayoría de estas se encuentran en el texto [10, cap. 6].

B.1. Función Gamma de Euler

La función Gamma surgió como una solución al problema de interpolación de la función factorial: ¿existe alguna función Γ de clase $\mathcal{C}^\infty([1, \infty))$ tal que cumpla las dos propiedades siguientes:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)?$$

La respuesta fue afirmativa, una de las expresiones más conocidas de esta función Gamma viene dada en forma de integral paramétrica, la cual toma el nombre de integral de Euler:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Vemos que esta función no toma únicamente valores reales y que si $0 < \delta \leq \operatorname{Re}(z) \leq \Delta$, podemos acotar el módulo de las potencias por

$$|t^{z-1}| \leq t^{\delta-1}, \quad \text{si } 0 < t \leq 1, \quad |t^{z-1}| \leq t^{\Delta-1}, \quad \text{si } 1 < t.$$

Luego el criterio M de Weierstrass [1], nos garantiza que la integral es uniformemente convergente con respecto a z en los compactos del semiplano de la derecha. Además de las tres propiedades que ya hemos mencionado, esta función cumple la siguiente lista de propiedades:

1. $\Gamma(n) = (n - 1)!$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para cada $\operatorname{Re}(z) > 0$, de la cual podemos prolongar la función a todos los números complejos tales que $\operatorname{Re}(z) \notin \mathbb{Z}_-$.

3. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, siempre que $z \notin \mathbb{Z}$, de donde se deduce $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

No probaremos ninguna de estas propiedades, solamente las presentamos para poder utilizarlas a lo largo del trabajo y en las secciones a continuación. Todos estos detalles se pueden encontrar en el texto de Olver [8, pág. 31-35].

B.2. Función gamma incompleta y la función error

La función gamma incompleta es otra función especial que tiene varias expresiones integrales, las dos más frecuentes son

$$\begin{aligned}\Gamma(a, z) &= z^a e^{-z} \int_0^\infty (1+t)^{a-1} e^{-zt} dt, & \operatorname{Re}(z) > 0, \\ &= \frac{e^{-z}}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty \frac{e^{-zt} t^{-a}}{1+t} dt, & \operatorname{Re}(a) < 1, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.\end{aligned}$$

La función error complementaria es el valor de la cola de la integral de la función gaussiana y viene dada por

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt.$$

Ambas funciones se relacionan de la siguiente manera:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right)}{\sqrt{\pi}},$$

ver [8, pág. 45] y [11, pág. 92].

B.3. Integral exponencial

La integral exponencial es la función paramétrica definida por

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

y la integral exponencial complementaria se define como

$$\operatorname{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

De la primera integral podemos observar que la función no está bien definida en el origen y en cambio la segunda es convergente para todo valor de z , en particular es una función entera, luego tiene un desarrollo de Taylor convergente en todo el plano complejo:

$$\operatorname{Ein}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{z^n}{n!}.$$

Además, si suponemos que $z > 0$, podemos combinar ambas funciones especiales:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ein}(z) &= \int_0^z \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^z \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \ln(z) - \int_1^z \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \ln(z) + E_1(z) - \int_1^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

Llevando a cabo varias técnicas como el cambio de variable y la integración por partes, se puede probar que

$$\gamma = - \int_0^\infty e^{-t} \ln(t) dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_1^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t} dt,$$

que es la constante de Euler-Mascheroni. Entonces, podemos expresar E_1 como suma de una serie de potencias, la función logaritmo y la constante mencionada:

$$E_1(z) = -\ln(z) - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

De esta propiedad, obtenida a partir de [8, pág. 40-42], partiremos para calcular el desarrollo asintótico de la función en la sección 1.3.

Apéndice C

Códigos de Matlab y enlaces de las figuras hechas con Geogebra

Código de Matlab de la tabla 1.11

```
format default

% Serie de potencias convergente
a = eulergamma;
syms n
x = [1,2,3,5,10,25,30];
I=[];
for i = 1: length(x)
    z = x(i);
    sum = double(symsum((-1)^(n+1)*z^n/(n*factorial(n)),1,Inf)
    );
    b=double(z*exp(z)*(sum - a -log(z)));
    [z,sum,b];
    I=[I; b];
end

% Desarrollo asintotico
S=zeros(length(x),length(x));
for i = 1:length(x)
    z = x(i);
    for j = 0:z+2
        sum = double(symsum((-1)^n * factorial(n)/(z^n),0,j));
        S(i,j+1)=sum;
    end
end
[x',S]

T = table(x', I, S(:,1:12), 'VariableNames', {'z', 'I(z)', '
Sumas_parciales_n=0,...,z+2'});
writetable(T, 'tabla.csv');
```

Código de Matlab de las figuras 3.1 y 3.2

```

% Formula de Stirling
format shortE
z=[1:100];
f(:)=gamma(z(:)+1);
d(:)=z(:).^z(:).*exp(-z(:)).*sqrt(2*pi*z(:));
e1(:)=d(:)./f(:);

figure(1)
semilogx(z(:),e1(:),'k');
hold off

% Funcion de Bessel
I(:) = besseli(1,z(:));
a(:)=exp(z(:)).*sqrt(1./(2*z(:)*pi));
e2(:)=I(:)./a(:);

figure(2)
semilogx(z(:),e2(:),'k');
hold off

```

Código MATLAB figura 4.1 2D

```

% Discretizacion de la funcion y gradiente
spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-5:spacing:5);
Z = X.^2-Y.^2
[DX,DY] = gradient(Z,spacing);

% Graficar los vectores de ascenso y descenso
skip = 10;
quiver(X(1:skip:end, 1:skip:end), Y(1:skip:end, 1:skip:end),
...
DX(1:skip:end, 1:skip:end), DY(1:skip:end, 1:skip:end));
hold on
% Graficar lineas de contorno: 10 niveles
contour(X,Y,Z,10);
% Graficar las curvas de mayor ascenso y descenso
plot(X(1,:),zeros(1,length(X)), 'r');
plot(zeros(1,length(X)),X(1,:), 'b');

xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
axis equal;

hold off;

```

Código de Matlab de la figura 4.1 3D

```
[x, y] = meshgrid(-5:0.05:5, -5:0.05:5);

% Definicion de z = f(x, y)
z = x.^2-y.^2;
% Discretizacion
[xxm, xxp] = meshgrid(-2:0.05:-1, 1:0.05:2);
yy = sqrt(3.*(xxm.^2-1));

% Graficar la superficie 3D
figure;
surf(x, y, z, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'interp', 'FaceAlpha', 0.7);
hold on; % Mantener el grafico para agregar las curvas de contorno

% Graficar las curvas de contorno sobre la superficie: 20 niveles
contour3(x, y, z, 20, 'LineWidth', 2);

% Graficar las curvas de mayor ascenso y descenso
plot3(x(1,:), zeros(1, length(x)), x(1,:).^2, 'g', 'LineWidth', 2);
plot3(zeros(1, length(x)), x(1,:), -x(1,:).^2, 'g', 'LineWidth', 2);

% Mejorar la visualizacion
colormap jet; % Cambiar la paleta de colores
colorbar; % Agregar barra de color
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
title('Superficie con curvas de contorno proyectadas');

hold off;
```

Código de Matlab de la figura 4.7

```
[x, y] = meshgrid(-4:0.05:4, -3:0.05:3);

% Definicion de z = f(x, y)
z = x.*(1-(x.^2)./3 + x.*(y.^2));
% Discretizacion
[xxm, xxp] = meshgrid(-2:0.05:-1, 1:0.05:2);
yy = sqrt(3.*(xxm.^2-1));

% Graficar la superficie 3D
figure;
surf(x, y, z, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'interp', 'FaceAlpha', 0.7);
hold on;

% Graficar las curvas de contorno sobre la superficie: 20 niveles
contour3(x, y, z, 20, 'LineWidth', 2);

% Graficar las curvas de mayor ascenso y descenso
% y=0:
plot3(x(1,:), zeros(1, length(x)), x(1,:).*(1-(x(1,:).^2)./3), 'g', 'LineWidth', 2);
% Hiperbola:
plot3(xxm(1,:), yy(1,:), xxm(1,:).*(1-(xxm(1,:).^2)./3 + xxm(1,:).*(yy(1,:).^2)), 'g', 'LineWidth', 2)
plot3(xxm(1,:), -yy(1,:), xxm(1,:).*(1-(xxm(1,:).^2)./3 + xxm(1,:).*(yy(1,:).^2)), 'g', 'LineWidth', 2)
plot3(xxp(1,:), yy(1,:), xxp(1,:).*(1-(xxp(1,:).^2)./3 + xxp(1,:).*(yy(1,:).^2)), 'g', 'LineWidth', 2)
plot3(xxp(1,:), -yy(1,:), xxp(1,:).*(1-(xxp(1,:).^2)./3 + xxp(1,:).*(yy(1,:).^2)), 'g', 'LineWidth', 2)

% Mejorar la visualizacion
colormap jet; % Cambiar la paleta de colores
colorbar; % Agregar barra de color
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
title('Superficie con curvas de contorno proyectadas');

hold off;
```

Lista de enlaces a las figuras hechas con Geogebra:

- **Sectores circulares:** Tipos de sectores de coronas circulares con las que trabajaremos.
- **Camino de integración de (1.10):** Figura que ilustra semirrecta de integración en la que integramos en (1.10). 1.4
- **Sector interior:** en el resultado 1.17, debemos trabajar en un sector más pequeño que el de definición.
- **Entornos interiores:** Para probar que la distancia entre las fronteras de los sectores considerados en 1.17 nos basamos en esta figura que ilustra las tres posibilidades.
- **Comparación de las acotaciones del resto:** Simulación de los valores óptimos del resto mediante la gráfica de $\log(n!z^{-n})$, con z fijo.
- **Esfera de Riemann de la semirrecta de integración girada:** Figura en la se plasma el camino de integración en la esfera de Riemann cuando giramos la semirrecta de integración.
- **Camino de integración de 2.2:** En la figura aparece la concatenación de camino y sus respectivas orientaciones a la que vamos a aplicar el teorema de Cauchy-Goursat.
- **Sectores de definición:** región de definición de la integral paramétrica 2.3 que hemos prolongado de forma analítica.
- **Dominio de convergencia para cada semirrecta:** en esta figura se representa una curva que cumple unas propiedades similares a la que debe cumplir el módulo de $|z|$ dependiendo de su argumento, para que la nueva integral girada converge.
- **Condición lema de Watson:** Figura que ilustra el por qué debemos imponer la condición $\operatorname{Re}(z) > 2X$ en la demostración del resultado 2.5.
- **Camino de integración si y Ci, Esfera de Riemann:** Caminos de integración del seno y coseno integral en el plano y en la esfera. 2.6
- **Direcciones de ascenso y descenso**
- **Curva de nivel $\operatorname{Im}(f(\pm 1))$**
- **Esquema de direcciones de ascenso y descenso:** figura con las direcciones de ascenso y descenso de cada uno de los puntos de silla de u .
- **Direcciones de ascenso y descenso Airy:** Las proyecciones de las direcciones de ascenso y descenso de la función Airy del 4. Las curvas de nivel del mismo ejemplo también se han hecho con esta figura además del coloreado de las regiones.

Bibliografía

- [1] R. B. Ash. *Complex Variables*. Academic Press, 1971. ISBN: 9780120652501. URL: <https://books.google.es/books?id=8DXvAAAAAAAJ>.
- [2] N. Bleistein y R. A. Handelsman. *Asymptotic Expansions of Integrals*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 1986. ISBN: 9780486650821. URL: <https://books.google.es/books?id=3GZf-bCLFxcC>.
- [3] E. T. Copson. *Asymptotic Expansions*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521604826. URL: <https://books.google.es/books?id=aTPZmnz4uGsC>.
- [4] F. Galindo Soto et al. *Guía práctica de variable compleja y aplicaciones*. Ediciones Universidad de Valladolid (EdUVa), 2019.
- [5] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*. Vol. 2. John Wiley y Sons, Inc., 1977.
- [6] S. J. A. Malham. *An Introduction to Asymptotic Analysis*. Department of Mathematics, Heriot-Watt University, Lecture Notes. URL: <https://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/ae.pdf>.
- [7] J. D. Murray. *Asymptotic Analysis*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461211228. URL: <https://books.google.es/books?id=PC3rBwAAQBAJ>.
- [8] F. W. J. Olver. *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, 2014. ISBN: 9781483267449. URL: <https://books.google.es/books?id=JLziBQAAQBAJ>.
- [9] P. J. Olver. «Symbolic Methods». En: *Classical Invariant Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1999, págs. 99-127.
- [10] W. H. Press. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [11] N. M. Temme. *Asymptotic Methods For Integrals*. Series In Analysis. World Scientific Publishing Company, 2014. ISBN: 9789814612173. URL: <https://books.google.es/books?id=7hS3CgAAQBAJ>.
- [12] E. W. Weisstein. *Negative Binomial Series*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. 2025. URL: <https://mathworld.wolfram.com/NegativeBinomialSeries.html>.
- [13] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial y Applied Mathematics, 2001. ISBN: 9780898714975. URL: <https://books.google.es/books?id=gI0oRz736q0C>.
- [14] R. Wong y M. Wyman. «Generalization of Watson’s Lemma». En: *Canadian Journal of Mathematics* 24.2 (1972), págs. 185-208. DOI: 10.4153/CJM-1972-016-0.