



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**IDEALES MONOMIALES ASOCIADOS A GRAFOS**

**Autor: Begoña Mazarío Fresco**

**Tutores: Sara Asensio Ferrero y Philippe Gimenez**

**2025**



## **Resumen:**

En este trabajo se definirán los ideales de aristas y de cubierta asociados a un grafo, se estudiará la relación entre ellos y se presentará un primer ejemplo de la conexión entre el álgebra conmutativa y la teoría de grafos a través de un resultado que permite calcular el número cromático de un grafo en términos puramente algebraicos relacionados con el ideal de cubierta.

Además, se definirá la propiedad de persistencia de un ideal, se demostrará que todos los ideales de aristas la tienen, y que esto no es cierto para los ideales de cubierta.

## **Palabras clave:**

Grafo, Ideal de aristas, Ideal de cubierta, Propiedad de persistencia

## **Abstract:**

In this work, the definition of the edge and cover ideals associated to a graph will be provided, and their relationship will be studied. A first example of the connection between commutative algebra and graph theory will be presented, through a result that allows the chromatic number of a graph to be calculated in purely algebraic terms related to the cover ideal.

Furthermore, the persistence property of an ideal will be defined, and it will be proved that all edge ideals have the property, and that this is not true for cover ideals.

## **Keywords:**

Graph, Edge ideal, Cover ideal, Persistence property



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Ideales de aristas y de cubierta</b>	<b>9</b>
1.1. Ideales monomiales . . . . .	9
1.2. Conceptos básicos. Dual de Alexander . . . . .	14
1.3. Coloración de grafos . . . . .	21
<b>2. Propiedad de persistencia</b>	<b>29</b>
2.1. Propiedad de persistencia de un ideal . . . . .	29
2.2. Persistencia para ideales de aristas . . . . .	31
<b>3. Persistencia para ideales de cubierta</b>	<b>45</b>
3.1. Conjetura en teoría de grafos . . . . .	47
3.2. Construcción de un contraejemplo . . . . .	49



# Introducción

Los ideales monomiales desempeñan un papel importante en el estudio de las conexiones entre el álgebra conmutativa y la combinatoria. A finales del siglo XX, los especialistas en álgebra conmutativa se empezaron a interesar por el estudio de los ideales monomiales a través de las propiedades de los grafos finitos simples asociados a ellos. Para ello, se definieron dos tipos de ideales monomiales libres de cuadrados a partir de las aristas de un grafo finito simple, llamados ideal de aristas e ideal de cubierta. Estos ideales se van a poder estudiar utilizando propiedades del grafo, y viceversa.

En este Trabajo de Fin de Grado se busca ilustrar la relación entre los ideales monomiales libres de cuadrados y los grafos finitos simples. Además, veremos que la teoría de grafos resulta de gran utilidad para abordar problemas propios del álgebra conmutativa, y viceversa. La memoria se divide en tres partes:

En el Capítulo 1 empezamos recordando algunos resultados específicos de ideales monomiales, que serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo. Seguidamente introduciremos los [ideales de aristas y de cubierta](#) asociados a grafos, de los cuales se detallarán algunas propiedades. Por ejemplo, en el Lema [1.20](#) se presentará el origen del nombre de los ideales de cubierta, y en el Corolario [1.24](#) se presentará la relación que hay entre ideales de aristas y de cubierta a través de la [dualidad de Alexander](#). En la última sección, se estudiará un primer ejemplo de la relación entre la teoría de grafos y el álgebra conmutativa a través del problema de la coloración, un tema fundamental y complejo de la teoría de grafos. El objetivo será calcular el número cromático en términos puramente algebraicos. Este capítulo se basa en la Parte II del libro “Monomial Ideals, Computations and Applications” ([\[13\]](#)), escrita por A. Van Tuyl.

Una vez presentados estos conceptos básicos, en el segundo capítulo utilizaremos lo conocido para demostrar que el ideal de aristas de cualquier grafo tiene la [propiedad de persistencia](#). Aquí veremos de forma detallada cómo se puede demostrar una propiedad puramente algebraica a través de propiedades de los grafos. Por ejemplo, un resultado clásico de la teoría de grafos que será de vital importancia para dicha demostración será el Teorema de [Berge](#).

Finalmente, nos preguntamos: ¿los ideales monomiales libres de cuadrados tienen en general la propiedad de persistencia?, o en particular, ¿la tienen los ideales de cubierta? En un principio se creía que esto era cierto debido a los experimentos computacionales y a que se llegó a demostrar para los ideales de cubierta asociados a grafos perfectos en 2010. No obstante, en 2014 T. Kaiser, M. Stehlik y R. Skrekovski refutaron esta afirmación dando un contraejemplo a partir de una construcción previa de T. Gallai. En el último capítulo, analizaremos la evolución de esta pregunta, desde la formulación de la Conjetura [3.10](#) referente a la teoría de grafos hasta su posterior refutación.

# Capítulo 1

## Conceptos básicos sobre ideales de aristas y cubierta

### 1.1. Ideales monomiales

Vamos a empezar introduciendo algunos conceptos básicos sobre ideales monomiales que utilizaremos a lo largo de este Trabajo de Fin de Grado. Todos los resultados que no están demostrados en esta sección o bien será porque son resultados generales de álgebra conmutativa que se han visto en la asignatura “Álgebra conmutativa y computacional” de cuarto curso del Grado en Matemáticas o bien porque son muy sencillos.

Denotamos  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios en las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , donde  $K$  es un cuerpo arbitrario. Un monomio  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$  de  $R$  se denotará por  $x^\alpha$  donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  (por conveniencia consideramos el 0 como un elemento de  $\mathbb{N}$ ). Además, denotaremos por  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ .

**Definición 1.1.** Un ideal monomial en  $R$  es un ideal de  $R$  generado por monomios en las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Los ideales monomiales en los que nos vamos a centrar a lo largo de este trabajo serán de la siguiente forma:

**Definición 1.2.** Se dice que un ideal monomial es libre de cuadrados si está generado por monomios libres de cuadrados, es decir monomios de la forma

$x^\alpha$  con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y  $\alpha_i \in \{0, 1\}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Veamos en este apartado una serie de propiedades propias de los ideales monomiales que no son ciertas para ideales más generales.

**Lema 1.3.** *Sea  $I$  un ideal monomial en  $R$ . Para todo polinomio  $f \in R$ , de la forma*

$$f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \text{finita}}} a_\alpha x^\alpha, \text{ con } a_\alpha \in K,$$

*se tiene que  $f \in I$  si y solo si  $x^\alpha \in I$  para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tal que  $a_\alpha \neq 0$ .*

El Teorema de la base de Hilbert afirma que si  $A$  es un anillo noetheriano, entonces el anillo  $A[x]$  es noetheriano. Luego el anillo  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo noetheriano. Esta propiedad, junto con el Lema 1.3, nos proporciona el siguiente resultado:

**Lema 1.4** (Lema de Dickson). *Todo ideal monomial de  $R$  está finitamente generado, es más, está generado por un conjunto finito de monomios.*

Dicho de otra manera, todo ideal monomial  $I$  se puede escribir de la siguiente forma:  $I = \langle x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t} \rangle$  con  $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$  para todo  $j \in \{1, \dots, t\}$ .

**Proposición 1.5.** (a) *Sean  $I = \langle x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t} \rangle \subset R$  un ideal monomial y  $x^\alpha \in R$  un monomio de  $R$ . Entonces  $x^\alpha \in I$  si y solo si existe  $i$ , con  $1 \leq i \leq t$ , tal que  $x^{\alpha_i}$  divide a  $x^\alpha$ .*

(b) *Un sistema de generadores monomial  $\{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t}\}$  de un ideal monomial  $I$  es minimal si y solo si para todo  $i \neq j$ ,  $x^{\alpha_i}$  no divide a  $x^{\alpha_j}$  y  $x^{\alpha_j}$  no divide a  $x^{\alpha_i}$ .*

(c) *Todo ideal monomial  $I$  de  $R$  tiene un único sistema minimal de generadores formado por monomios. Dicho sistema minimal de generadores lo denotaremos por  $G(I)$ .*

A continuación damos la definición de descomposición primaria para un anillo conmutativo  $S$  general. Antes de eso, es conveniente recordar que un ideal  $Q$  del anillo conmutativo  $S$  es primario si no es el total y además se cumple que si tenemos  $a, b \in S$  con  $ab \in I$  pero  $a \notin I$  entonces  $b \in \sqrt{I}$ . Además, es bien conocido que el radical de un ideal primario es siempre un ideal primo.

**Definición 1.6.** Sea  $I$  un ideal propio de un anillo conmutativo  $S$ . Llamamos una descomposición primaria del ideal  $I$  a una expresión de  $I$  como intersección de un número finito de ideales primarios.

Decimos que el ideal  $I$  es descomponible si admite una descomposición primaria. Decimos que una descomposición primaria

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t \text{ con } \mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i} \text{ para } i = 1, \dots, t,$$

del ideal  $I$  es minimal cuando cumple las dos condiciones siguientes:

1. Los ideales  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$  son todos distintos.
2. Para todo  $j \in \{1, \dots, t\}$  se tiene que  $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^t Q_i \not\subset Q_j$ .

**Definición 1.7.** Sea  $I$  un ideal de un anillo conmutativo  $S$ . Diremos que  $I$  es irreducible si  $I$  es propio y no puede ser expresado como intersección de dos ideales que contienen estrictamente a  $I$ . Es decir, si y solo si cuando podemos escribir  $I = I_1 \cap I_2$ , siendo  $I_1$  e  $I_2$  dos ideales de  $R$ , entonces necesariamente  $I = I_1$  o  $I = I_2$ .

**Proposición 1.8.** *Sea  $S$  un anillo conmutativo noetheriano. Entonces todo ideal propio de  $S$  puede escribirse como la intersección de un número finito de ideales irreducibles de  $S$ .*

Tanto este resultado como el siguiente se han dado en la asignatura “Álgebra conmutativa y computacional” y podemos encontrar su demostración en el Capítulo 7 del libro “Introduction to commutative algebra” de M. Atiyah e I.G. Macdonald, Lema 7.11 y Lema 7.12 respectivamente ([1]).

**Proposición 1.9.** *Sea  $S$  un anillo conmutativo noetheriano e  $I$  un ideal irreducible de  $S$ . Entonces  $I$  es primario.*

Como sabemos que  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo noetheriano, podemos concluir de estos últimos resultados que todo ideal en dicho anillo tiene una descomposición primaria. En particular, todo ideal monomial libre de cuadrados la tiene y nos interesa saber cómo es.

**Teorema 1.10.** *Sea  $I$  un ideal monomial de  $R$ . Entonces  $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$ , donde cada  $Q_i$  está generado por potencias de variables, es decir, cada  $Q_i$  es de la forma  $\langle x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k} \rangle$ , donde  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  y  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ . Además, una expresión irredundante de esta forma es única.*

*Demostración.* Sea  $G(I) = \{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_r}\}$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{N}^n$  y supongamos que algún  $x^{\alpha_i}$  no es una potencia de una única variable, digamos que es  $x^{\alpha_1}$ . Entonces, podemos escribir  $x^{\alpha_1} = x^\beta x^\gamma$  donde  $x^\beta$  y  $x^\gamma$  son monomios coprimos con  $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ , es decir,  $\text{mcd}(x^\beta, x^\gamma) = 1$  y  $x^\beta \neq 1$ ,  $x^\gamma \neq 1$ . Veamos que  $I = I_1 \cap I_2$  donde  $I_1 = \langle x^\beta, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_r} \rangle$  e  $I_2 = \langle x^\gamma, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_r} \rangle$ :

Obviamente,  $I$  está contenido en la intersección de  $I_1$  e  $I_2$ . Veamos la contención contraria, sea  $x^\alpha$  un monomio de  $I_1 \cap I_2$ . Si  $x^\alpha$  es un múltiplo de uno de los  $x^{\alpha_i}$  para  $i = 2, \dots, r$ , entonces  $x^\alpha \in I$ . Si no,  $x^\alpha$  es un múltiplo de  $x^\beta$  y  $x^\gamma$ , y por tanto de  $x^{\alpha_1}$ , ya que  $x^\beta$  y  $x^\gamma$  son coprimos. En cualquier caso,  $x^\alpha \in I$ .

Si  $G(I_1)$  o  $G(I_2)$  contiene un elemento que no es potencia pura, procedemos como antes y después de un número finito de iteraciones (pues todo ideal en un anillo de polinomios está finitamente generado) obtenemos una expresión de  $I$  como una intersección de ideales monomiales generados por potencias puras de variables. Si omitimos los ideales que contienen la intersección de los demás, terminamos con una descomposición irredundante del ideal  $I$ .

Probamos ahora la unicidad. Sean  $Q_1 \cap \dots \cap Q_r = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_s$  dos descomposiciones iredundantes del ideal  $I$  donde cada ideal está generado por potencias puras de variables. Veremos que para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$  existe un  $j \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $Q'_j \subseteq Q_i$ , y por simetría tendremos que para cada  $k \in \{1, \dots, s\}$  existe un  $l \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $Q_l \subseteq Q'_k$ . Entonces, para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$ , existen  $l \in \{1, \dots, s\}$  y  $k \in \{1, \dots, r\}$  tales que  $Q_k \subseteq Q'_l \subseteq Q_j$ . Luego  $j = k$ , puesto que si no  $Q_k \subseteq Q_j$  en contradicción con que  $Q_1 \cap \dots \cap Q_r$  era una descomposición irredundante. Entonces  $Q_j = Q'_l$  y se concluye así que  $r = s$  y  $\{Q_1, \dots, Q_r\} = \{Q'_1, \dots, Q'_s\}$ .

Entonces veamos que para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$  existe un  $j \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $Q'_j \subseteq Q_i$  para finalizar la demostración. Sea  $i \in \{1, \dots, r\}$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $Q_i = \langle x_1^{a_1}, \dots, x_k^{a_k} \rangle$ . Si  $Q'_j \not\subseteq Q_i$  para todo  $j \in \{1, \dots, s\}$ , entonces para cada  $j$ , existe una variable  $x_{l_j}$  y un entero  $b_j \geq 1$  tales que  $x_{l_j}^{b_j} \in Q'_j \setminus Q_i$ . Luego  $l_j \notin \{1, \dots, k\}$  o  $b_j < a_{l_j}$ . Sea  $x^\alpha = \text{mcm}\{x_{l_1}^{b_1}, \dots, x_{l_s}^{b_s}\}$ . Tenemos que  $x^\alpha \in \bigcap_{j=1}^s Q'_j = \bigcap_{t=1}^r Q_t \subset Q_i$ , por lo que existe  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $x_{i_0}^{a_{i_0}}$  divide a  $x^\alpha$ , por la Proposición 1.5(a), lo cual claramente contradice la construcción de  $x^\alpha$ .  $\square$

**Corolario 1.11.** *Un ideal monomial es irreducible si y solo si está generado*

por potencias de las variables.

*Demostración.* Sea  $Q = \langle x_1^{a_1}, \dots, x_k^{a_k} \rangle$  donde  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ , y supongamos que  $Q = I \cap J$  donde  $I$  y  $J$  son ideales monomiales que contienen a  $Q$ . Por el Teorema 1.10 tenemos que  $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$  y  $J = \bigcap_{j=1}^s Q'_j$  donde  $Q_i$  y  $Q'_j$  están generados por potencias de variables para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$  y todo  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Entonces, podemos escribir

$$Q = I \cap J = \left( \bigcap_{i=1}^r Q_i \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^s Q'_j \right).$$

Omitiendo los ideales adecuados en la intersección del lado derecho de la igualdad anterior, obtenemos una descomposición irredundante de  $Q$  como intersección de ideales generados por potencias de variables. Por la unicidad demostrada en el Teorema 1.10 se tiene que  $Q = Q_i$  o  $Q = Q'_j$  para algún  $i$  o  $j$ , luego  $I = Q$  o  $J = Q$ . Por tanto,  $Q$  es irreducible.

Veamos la implicación contraria, supongamos que  $Q$  es un ideal monomial irreducible. Si  $G(Q)$  contiene un monomio  $x^\alpha = x^\beta x^\gamma$  con  $\text{mcd}(x^\beta, x^\gamma) = 1$  y  $x^\beta \neq 1 \neq x^\gamma$ , entonces, como en la prueba del Teorema 1.10,  $Q$  se puede escribir como una intersección de ideales monomiales distintos de  $Q$ , lo cual es absurdo.  $\square$

Combinando estos dos últimos resultados llegamos a que todo ideal monomial se puede expresar de forma única como una intersección irredundante de ideales monomiales irreducibles que llamaremos su descomposición irreducible irredundante. Como  $R$  es noetheriano, por la Proposición 1.9 estos ideales serán primarios y por tanto tendremos que dicha descomposición irredundante será una descomposición primaria del ideal.

Además, está claro que si  $I$  es un ideal monomial libre de cuadrados, los ideales monomiales irreducibles que aparecen en la descomposición de  $I$  van a ser de la forma  $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$ , es decir, serán ideales generados por variables. De hecho, se verifica que estos ideales son primos:

**Lema 1.12.** *Los ideales monomiales del anillo de polinomios  $R$  generados por variables son ideales primos.*

*Demostración.* Es conocido que un ideal  $J$  en un anillo conmutativo  $S$  es un ideal primo si y solo si el anillo  $R/J$  es un dominio de integridad. Luego, sea

$I = \langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$  un ideal generado por variables en el anillo de polinomios  $R$ . Vamos a ver que  $R/I$  es un dominio de integridad:

Es claro que si  $K$  es un cuerpo todo anillo de polinomios en  $K$  va a ser un dominio de integridad, y además

$$R/I \cong K[x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_k-1}, x_{i_k+1}, \dots, x_n],$$

que como hemos dicho es un dominio de integridad. Por tanto, el ideal  $I = \langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$  es un ideal primo.  $\square$

Una vez vistos estos resultados básicos de ideales monomiales, procedemos a profundizar en los aspectos particulares que constituyen el objetivo principal de este trabajo.

## 1.2. Ideales de aristas y de cubierta. Dual de Alexander

En la presente sección, vamos a introducir los conceptos de ideal de aristas y de cubierta, conjunto independiente y cobertura de vértices. Veremos un resultado que relaciona el ideal de cubierta con las coberturas minimales de vértices del grafo. Además, se dará una muestra de la relación entre la teoría de grafos y el álgebra conmutativa a través de la correspondencia entre los ideales de aristas y de cubierta y los grafos finitos simples. Posteriormente, relacionaremos estos dos ideales introduciendo el dual de Alexander.

**Definición 1.13.** Un grafo finito  $G$  es un par  $G = (V(G), E(G))$  donde  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$  es el conjunto de vértices de  $G$ , y  $E(G)$  es una colección de subconjuntos de dos elementos de  $V(G)$ , que llamaremos aristas de  $G$ . Diremos que un grafo es simple si a lo sumo existe una arista uniendo dos vértices cualesquiera y además no presenta lazos, es decir, no hay una arista desde el vértice  $x_i$  hacia sí mismo.

**Ejemplo 1.14.** Un ejemplo de un grafo finito y simple es:

$$G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_3, x_5\}, \{x_1, x_5\}\}).$$

Generalmente se representa el grafo como una figura. Cada elemento del conjunto de vértices será un nodo y trazaremos una línea entre los vértices  $x_i$  y  $x_j$  si el par  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ . Luego, el grafo anterior queda representado

como en la Figura 1.1.

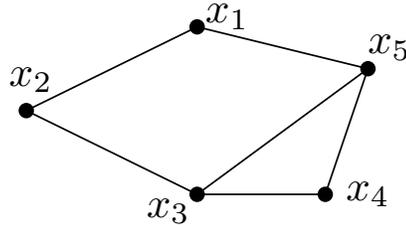


Figura 1.1: Grafo finito simple

Si al grafo  $G$  le añadimos otra arista  $\{x_1, x_2\}$  y el lazo  $\{x_5, x_5\}$ , obtenemos un grafo que no es simple y cuya representación corresponde a la Figura 1.2.

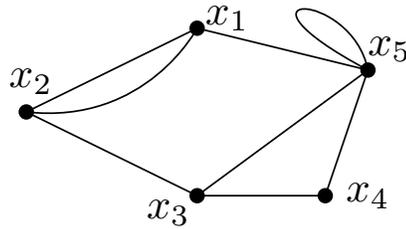


Figura 1.2: Grafo finito no simple

De ahora en adelante asumiremos que  $G$  es un grafo finito simple. Vamos a estudiar este tipo de grafos a partir de ideales monomiales en un anillo de polinomios adecuado. Es decir, supongamos que tenemos un grafo  $G = (V(G), E(G))$  con  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , entonces identificaremos los vértices del grafo con las variables del anillo de polinomios  $R = K[x_1, \dots, x_n]$ , donde  $K$  es un cuerpo arbitrario.

Al grafo  $G$  le podemos asociar dos ideales monomiales:

**Definición 1.15.** Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo simple.

- El ideal de aristas asociado a  $G$  es el ideal monomial

$$I(G) = \langle x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G) \rangle \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n].$$

- El ideal de cubierta asociado a  $G$  es el ideal monomial

$$J(G) = \bigcap_{\{x_i, x_j\} \in E(G)} \langle x_i, x_j \rangle \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n].$$

Estos dos ideales monomiales son libres de cuadrados. El primero está minimalmente generado por monomios de grado dos, mientras que el segundo no. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 1.16.** Consideramos el grafo finito simple  $G$  del Ejemplo 1.14. Los ideales de aristas y de cubierta son, respectivamente:

- $I(G) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_3x_5, x_1x_5 \rangle$  y
- $J(G) = \langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \cap \langle x_3, x_4 \rangle \cap \langle x_4, x_5 \rangle \cap \langle x_3, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_5 \rangle = \langle x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_2x_4x_5, x_2x_3x_5 \rangle$ .

El nombre de ideal de cubierta se debe a un lema que veremos a continuación y para el cual necesitamos unos conceptos previos.

**Definición 1.17.** Un subconjunto  $W \subseteq V(G)$  se denomina conjunto independiente si ninguno de los elementos de  $W$  están unidos por una arista en  $G$ . Un conjunto independiente maximal es un conjunto independiente que es maximal para la inclusión.

**Definición 1.18.** Un subconjunto  $W \subseteq V(G)$  es una cobertura de vértices si  $W \cap e \neq \emptyset$  para todo  $e \in E(G)$ . Diremos que una cobertura de vértices  $W$  es una cobertura minimal de vértices si es minimal para la inclusión.

Podemos relacionar estas definiciones de la siguiente forma:

**Lema 1.19.** Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo.

1. Un subconjunto  $Y \subseteq V(G)$  es un conjunto independiente si y solo si  $V(G) \setminus Y$  es una cobertura de vértices.
2.  $Y$  es un conjunto independiente maximal si y solo si  $V(G) \setminus Y$  es una cobertura minimal de vértices.

*Demostración.* 1) Si  $V(G) \setminus Y$  no es una cobertura de vértices, entonces existe  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$  tal que

$$(V(G) \setminus Y) \cap \{x_i, x_j\} = \emptyset,$$

es decir,  $x_i, x_j \in Y$ . Por tanto,  $Y$  no es un conjunto independiente pues  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ .

Veamos la implicación contraria. Supongamos que  $V(G) \setminus Y$  es una cobertura de vértices, y veamos que entonces  $Y$  es un conjunto independiente. Sean  $x_i, x_j \in Y$ , tenemos que

$$(V(G) \setminus Y) \cap \{x_i, x_j\} = \emptyset,$$

y como  $V(G) \setminus Y$  es una cobertura de vértices, concluimos que  $\{x_i, x_j\} \notin E(G)$ .

- 2) Supongamos que  $Y$  es un conjunto independiente maximal, veamos que  $V(G) \setminus Y$  es minimal, pues ya sabemos que es cobertura de vértices. Sea  $A \subsetneq V(G) \setminus Y$ , entonces existe un  $W \subset V(G)$  tal que  $Y \subsetneq W$  de forma que  $A = V(G) \setminus W$ . Como  $Y \subsetneq W$  e  $Y$  es maximal,  $W$  no es un conjunto independiente. Finalmente por (1),  $A = V(G) \setminus W$  no es una cobertura de vértices.

Si  $Y$  no es maximal, existe  $W$  conjunto independiente tal que  $Y \subsetneq W$ , entonces  $V(G) \setminus W$  sería una cobertura de vértices con  $V(G) \setminus W \subsetneq V(G) \setminus Y$ , luego  $V(G) \setminus Y$  no sería minimal.  $\square$

Con todo esto estamos en disposición de enunciar el lema que da lugar al nombre de ideal de cubierta:

*Notación.* Si  $W \subseteq V = \{x_1, \dots, x_n\}$ , entonces  $x_W := \prod_{x_i \in W} x_i$ .

**Lema 1.20.** *Sea  $G = (V(G), E(G))$ . Denotamos por  $J(G)$  a su ideal de cubierta. Entonces:*

$$J(G) = \langle x_W \mid W \subseteq V(G) \text{ es una cobertura minimal de vértices de } G \rangle.$$

*Demostración.* Defino

$$L = \langle x_W \mid W \subseteq V(G) \text{ es una cobertura minimal de vértices de } G \rangle.$$

Sea  $x_W$  un generador de  $L$  donde  $W$  es una cobertura minimal de vértices. Entonces, para cada arista  $e = \{x_i, x_j\} \in E(G)$ , se tiene que  $W \cap e \neq \emptyset$ . Luego,  $x_i \in W$  o  $x_j \in W$ , y por tanto,  $x_i$  divide a  $x_W$  o  $x_j$  divide a  $x_W$ .

Por lo que es claro que  $x_W \in \langle x_i, x_j \rangle$ . Además, como se da para toda arista  $e \in E(G)$ ,

$$x_W \in \bigcap_{\{x_i, x_j\} \in E(G)} \langle x_i, x_j \rangle = J(G).$$

Concluimos así que  $L \subseteq J(G)$ .

Tomamos ahora  $m \in J(G)$  cualquier generador minimal en el sistema minimal de generadores de  $J(G)$  formado por monomios, que es único (Proposición 1.5 (c)). Notemos que  $m$  es libre de cuadrados pues  $J(G)$  es una intersección de un número finito de ideales monomiales libres de cuadrados, así que  $m = x_{i_1} \dots x_{i_r}$ , con  $i_1, \dots, i_r$  distintos. Sea  $W = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$ . Como para cada  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ ,  $m \in \langle x_i, x_j \rangle$ , se tiene que  $x_i$  divide a  $x_W$  o  $x_j$  divide a  $x_W$  (Proposición 1.5 (a)), y por tanto,  $x_i \in W$  o  $x_j \in W$ . De esta forma llegamos a que  $W$  es una cobertura de vértices. Sea  $W' \subseteq W$  una cobertura minimal de vértices. Como  $x_{W'} \in L$  y  $x_{W'}$  divide a  $m = x_W$ , se verifica que  $m \in L$ .  $\square$

Observamos que podemos invertir la construcción de la Definición 1.15 como sigue. Si  $I$  es cualquier ideal monomial libre de cuadrados en  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  de la forma  $I = \langle x_{1_1}x_{1_2}, \dots, x_{s_1}x_{s_2} \rangle$ , es decir minimalmente generado en grado 2, hacemos la siguiente asociación:

$$I \mapsto G = (\{x_1, \dots, x_n\}, \{\{x_{1_1}, x_{1_2}\}, \dots, \{x_{s_1}, x_{s_2}\}\}).$$

Análogamente, si partimos de un ideal monomial libre de cuadrados de la forma,  $J = \bigcap_{i=1}^t \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle$ , tenemos:

$$J \mapsto G = (\{x_1, \dots, x_n\}, \{\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \mid i = 1, \dots, t\}).$$

Es obvio que ambas asociaciones definen correspondencias biunívocas:



Dadas estas dos correspondencias observamos que existe una cierta relación entre la teoría de grafos y el álgebra conmutativa, es decir, vamos

a poder utilizar resultados de la teoría de grafos para ayudar a demostrar resultados algebraicos, y recíprocamente, aplicar resultados algebraicos para demostrar resultados de la teoría de grafos.

Notamos que, por el momento, no hemos relacionado directamente entre sí los ideales de aristas con los ideales de cubierta, pero vamos a ver que sí existe una relación entre ellos a través del dual de Alexander.

**Lema 1.21.** *Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo con  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , y sean  $W_1, \dots, W_t$  las coberturas minimales de vértices de  $G$ , donde  $\langle W_i \rangle = \langle x_j \mid x_j \in W_i \rangle$ . Entonces*

$$I(G) = \langle W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle W_t \rangle.$$

*Demostración.* En primer lugar, si estamos en el caso muy degenerado en que no existan aristas, ambos lados de la igualdad son nulos. Luego suponemos que al menos hay una arista.

Tomamos primero un monomio  $x^\alpha \in I(G)$  que existe, pues hemos supuesto que al menos hay una arista y por ello  $I(G)$  no es nulo. Notamos que nos basta con tomar un monomio ya que un polinomio con más de un término pertenece a un ideal monomial si y solo si todos sus términos (que son monomios) pertenecen al ideal monomial (Lema 1.3). Por definición de ideal de aristas sabemos que  $x^\alpha = qx_i x_j$ , para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$  y donde  $q \in R = K[x_1, \dots, x_n]$ . Como  $W_k$  es una cobertura de vértices para todo  $k = 1, \dots, t$ , tenemos que  $W_k \cap \{x_i, x_j\} \neq \emptyset$ , luego al menos  $x_i \in W_k$  o  $x_j \in W_k$  para todo  $k = 1, \dots, t$ , y así  $x^\alpha \in \langle W_k \rangle$  para todo  $k = 1, \dots, t$ , con lo que podemos concluir que

$$x^\alpha \in \langle W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle W_t \rangle.$$

Para la otra contención, por el mismo razonamiento que antes, nos basta con ver que si un monomio  $x^\alpha \notin I(G)$ , se tiene que  $x^\alpha \notin \langle W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle W_t \rangle$ . Sea  $x^\alpha = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_l}^{\alpha_l} \notin I(G)$ , de manera que  $x_{i_1} \dots x_{i_l} \notin I(G)$ .

Luego, por definición de ideal de aristas  $\{x_{i_j}, x_{i_k}\} \notin E(G)$  para todos  $j, k \in \{1, \dots, l\}$ . Si  $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$  no pertenecen a ninguna arista del grafo, es obvio que no van a pertenecer a ninguna cobertura minimal de vértices. Supongamos entonces que sí existen aristas del grafo a las que esos vértices pertenezcan,

estas aristas serán de la forma  $\{x_{i_s}, y_{k'}\}$ , con  $y_{k'} \neq x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ . Construimos una cobertura minimal de vértices  $W$  en la que las aristas de la forma  $\{x_{i_s}, y_{k'}\}$  estén cubiertas por los vértices  $y_{k'} \in W$  y el resto de aristas (si las hay) se cubren de tal forma que  $W$  sea minimal. De esta forma,  $x_{i_k} \notin W$  para todo  $k = \{1, \dots, l\}$ , luego  $x^\alpha \notin \langle W \rangle$  y entonces

$$x^\alpha \notin \langle W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle W_l \rangle.$$

□

*Nota.* Aunque este lema proviene de un resultado más general que relaciona el ideal de Stanley-Reisner con las facetas de su complejo simplicial asociado, como podemos ver en el Lema 1.5.4 del Capítulo 1 de [7], aquí se demuestra directamente a partir de las definiciones de ideal de aristas y de cobertura minimal de vértices.

**Ejemplo 1.22.** Considerando otra vez el grafo del Ejemplo 1.14, es claro que sus coberturas minimales de vértices son (ver Figura 1.3):

$$W_1 = \{x_1, x_3, x_5\}, W_2 = \{x_1, x_3, x_4\}, W_3 = \{x_2, x_3, x_5\} \text{ y } W_4 = \{x_2, x_4, x_5\}.$$

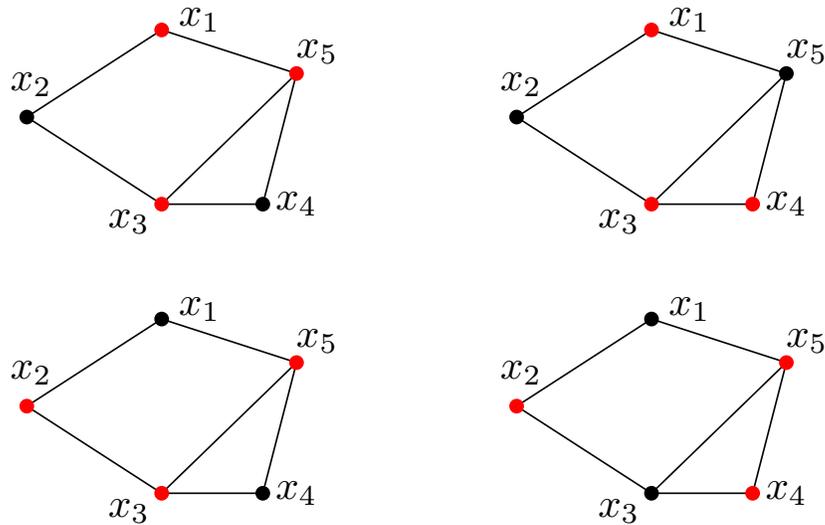


Figura 1.3: Coberturas minimales de vértices del grafo del Ejemplo 1.14

Por tanto, por el Lema 1.21 podemos escribir el ideal de aristas como

$$I(G) = \langle x_1, x_3, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_3, x_4 \rangle \cap \langle x_2, x_3, x_5 \rangle \cap \langle x_2, x_4, x_5 \rangle.$$

**Definición 1.23.** Sea  $I$  un ideal monomial libre de cuadrados, que en virtud de los resultados presentados en la Sección 1.1 tiene una descomposición primaria única de la forma

$$I = \langle x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,s_1} \rangle \cap \langle x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,s_2} \rangle \cap \dots \cap \langle x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,s_t} \rangle.$$

El dual de Alexander de  $I$ , denotado por  $I^\vee$ , es el ideal monomial libre de cuadrados

$$I^\vee = \langle x_{1,1}x_{1,2} \cdots x_{1,s_1}, x_{2,1}x_{2,2} \cdots x_{2,s_2}, \dots, x_{t,1}x_{t,2} \cdots x_{t,s_t} \rangle.$$

Como consecuencia inmediata de los Lemas 1.20 y 1.21, y la definición del [dual de Alexander](#) tenemos una conexión entre los ideales de aristas y de cubierta de  $G$ ,  $I(G)$  y  $J(G)$ :

**Corolario 1.24.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces  $I(G)^\vee = J(G)$ .*

**Ejemplo 1.25.** Continuando con el ejemplo anterior, calculo ahora el dual de Alexander de  $I(G)$ :

$$I(G)^\vee = \langle x_1x_3x_5, x_1x_3x_4, x_2x_3x_5, x_2x_4x_5 \rangle,$$

que como vimos en el Ejemplo 1.16, coincide con el ideal de cubierta.

### 1.3. Coloración de grafos

En esta sección se ilustra la relación entre la teoría de grafos y el álgebra conmutativa utilizando el número cromático de un grafo como caso de estudio. El objetivo será demostrar que el número cromático de un grafo es el mínimo número natural  $d$  tal que el monomio formado por la multiplicación de las variables correspondientes a todos los vértices del grafo elevadas a  $d-1$  pertenece a la  $d$ -ésima potencia del ideal de cubierta de dicho grafo.

**Definición 1.26.** Sea  $G$  un grafo.

- Una coloración de  $G$  es una asignación de un color a cada vértice de modo que dos vértices adyacentes, es decir, dos vértices unidos por una arista, reciben colores diferentes. Llamaremos  $k$ -coloración de  $G$  a una coloración de  $G$  que emplee  $k$  colores distintos, y diremos que  $G$  es  $k$ -coloreable si admite una  $k$ -coloración.

- El número cromático de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , es el mínimo número de colores necesarios para colorear  $G$ . Diremos que  $G$  es  $k$ -cromático si su número cromático es  $k$ .

A continuación se definen un par de familias de grafos muy conocidas, que utilizaremos para ilustrar esta definición.

1. Para  $n \geq 2$ , se llama grafo completo con  $n$  vértices,  $K_n$ , al grafo con conjunto de vértices  $V(K_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$  y conjunto de aristas  $E(K_n) = \{\{x_i, x_j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ .

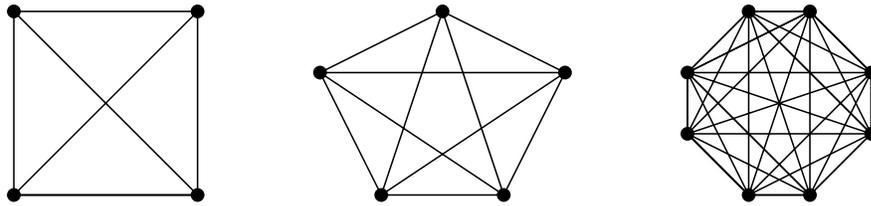


Figura 1.4: Grafos completos  $K_4, K_5, K_8$

2. Llamamos  $n$ -ciclo con  $n \geq 3$ , denotado por  $C_n$ , al grafo con conjunto de vértices  $V(C_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$  y conjunto de aristas  $E(C_n) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, x_1\}\}$ .

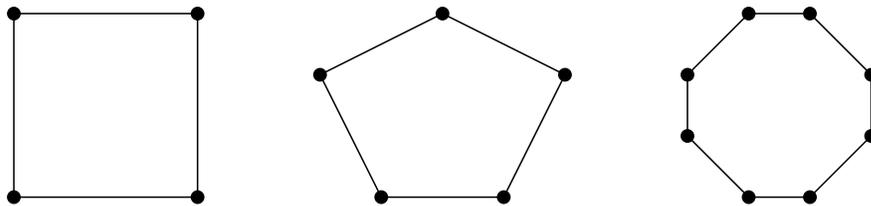


Figura 1.5: Ciclos  $C_4, C_5, C_8$

En el caso de estas familias de grafos, se calcula fácilmente su número cromático:

**Lema 1.27.** *Sea  $n$  un entero positivo.*

1. *El número cromático de  $K_n$ , es  $\chi(K_n) = n$ .*

2. El número cromático de  $C_n$ , está dado por

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración.* 1) Sea  $G = K_n$  con  $n \geq 2$ , por definición sabemos que cada vértice es adyacente al resto de vértices, por lo que cada vértice será de un color distinto. Luego  $\chi(K_n) = n$ .

2) Consideramos el grafo  $G = C_n$  con  $n \geq 3$ . Es obvio que como mínimo se necesitan dos colores pues sabemos que cada vértice es adyacente a otros dos.

Supongamos que  $n$  es par, observamos que en todas las aristas de  $G$  uno de los extremos corresponde a un vértice par y el otro extremo corresponde a un vértice impar. Luego es obvio que podemos colorear los impares de un color y los pares de otro ya que no hay dos vértices del mismo grupo (par o impar) conectados por una arista. Por tanto su número cromático será 2.

Veamos ahora qué pasa si  $n$  es impar. Comenzamos intercalando dos colores como antes hasta que quede un vértice por colorear. Este último vértice no se va a poder colorear de ninguno de estos dos colores pues al ser  $n$  impar, vemos que es adyacente a  $x_1$  (impar) y a  $x_{n-1}$  (par), luego habrá que utilizar un tercer color para este último vértice. Así concluimos que si  $n$  es impar su número cromático va a ser 3.  $\square$

**Ejemplo 1.28.** A simple vista podemos ver que  $C_5$  es 3-cromático, y  $K_5$  es 5-cromático, como se demuestra en el Lema 1.27:

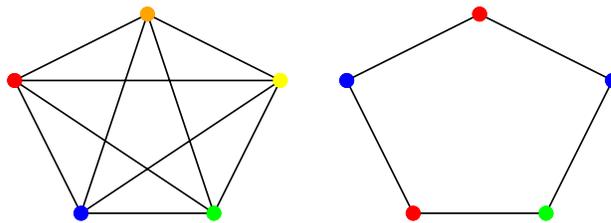


Figura 1.6: Coloración de  $K_5$  y  $C_5$

La coloración es un tema central en la teoría de grafos pues tiene numerosas aplicaciones prácticas, como el problema de planificar un horario. Pongamos un ejemplo.

Supongamos que queremos organizar un evento con 8 actividades y reducir su duración al máximo, solapando tantas actividades como sea posible sin afectar a los participantes. Para ello, representamos cada actividad con un vértice y unimos dos vértices si hay alguna persona que deba asistir a ambas actividades. Imaginemos que tenemos la siguiente situación:

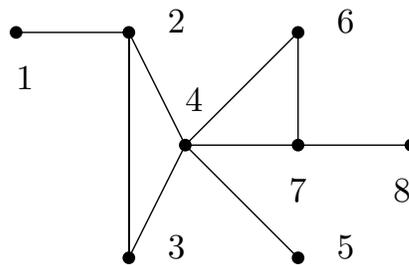


Figura 1.7: Posible conexión entre las 8 actividades

Es fácil ver que podemos colorear este grafo con tres colores, es decir, es 3-coloreable, como se muestra en la Figura 1.8. Además el número cromático de este grafo es exactamente 3 ya que contiene a un triángulo ( $K_3$ ), por lo que no puede ser menor que 3.

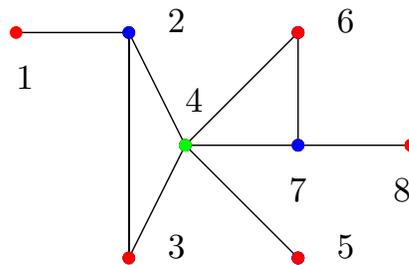


Figura 1.8: Posible 3-coloración del grafo

De esta forma concluimos que las actividades a las que se ha asignado el mismo color pueden programarse a la vez, ya que ninguno de los asistentes tiene más de una de esas actividades. El número cromático de este grafo será

por lo tanto el menor número de franjas horarias distintas que necesitamos para llevar a cabo todas las actividades.

Como una primera observación, dado un grafo  $G$  el cual ya ha recibido una coloración, se tiene que todos los vértices del mismo color forman un conjunto independiente. Esto se deduce directamente de ambas definiciones, pues si dos vértices están coloreados del mismo color significa que no son adyacentes, es decir no hay una arista que los une. Esto nos lleva al siguiente lema:

**Lema 1.29.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces,  $\chi(G) \leq d$  si y solo si  $V(G)$  se puede particionar en  $d$  conjuntos independientes  $C_1, \dots, C_d$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\chi(G) \leq d$ , esto significa que podremos dar una coloración de  $G$  con  $d$  colores distintos, y por lo dicho en el párrafo anterior, todos los vértices del mismo color formarán un conjunto independiente, es decir, tendremos  $d$  conjuntos independientes. Es claro que estos conjuntos forman una partición de  $V(G)$  pues en una coloración todos los vértices han de estar coloreados y cada vértice solo puede estar coloreado de un color.

Supongamos ahora que  $V(G)$  se puede particionar en  $d$  conjuntos independientes, es decir  $V(G) = C_1 \cup \dots \cup C_d$  con  $C_i$  conjuntos independientes para todo  $i = 1, \dots, d$  y disjuntos dos a dos. Por definición, en estos conjuntos no hay vértices adyacentes, luego podríamos colorear cada vértice perteneciente a  $C_i$  de un mismo color, para  $i = 1, \dots, d$ . Como estos conjuntos cubren todos los vértices, llegamos a que  $G$  es  $d$ -coloreable, con lo que concluimos que  $\chi(G) \leq d$ .  $\square$

El siguiente teorema proporciona un método para calcular el número cromático de un grafo a través de conceptos algebraicos, ilustrando de forma clara la relación entre el álgebra y la combinatoria.

**Teorema 1.30.** *Sea  $G$  un grafo con vértices  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Si  $J(G)$  es su ideal de cubierta, entonces*

$$\chi(G) = \min\{d \mid x_{V(G)}^{d-1} = (x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J(G)^d\}.$$

*Demostración.* Sea  $J = J(G)$ .

En primer lugar, veamos que si  $\chi(G) = d$ , entonces  $(x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J^d$ .

Como  $\chi(G) = d$ , por el Lema 1.29 tenemos una partición  $V(G) = C_1 \cup \dots \cup C_d$  en conjuntos independientes. Ahora, como  $C_i$  es un conjunto independiente para cada  $i = 1, \dots, d$ , por el Lema 1.19 el conjunto  $W_i = V(G) \setminus C_i$  es una cobertura de vértices y por tanto  $x_{W_i} \in J$  para cada  $i = 1, \dots, d$ , debido al Lema 1.20. Así que  $x_{W_1} \cdots x_{W_d} \in J^d$ . Como los conjuntos  $C_i$  son disjuntos dos a dos, cada  $x_i \in V(G)$  está exactamente en un  $C_i$ , por lo que cada  $x_i$  está en  $d - 1$  de los  $W_j$ . Por tanto  $x_{W_1} \cdots x_{W_d} = (x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J^d$ . Lo que prueba que

$$\chi(G) \geq \text{mín}\{d \mid x_{V(G)}^{d-1} = (x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J^d\}.$$

Veamos la desigualdad contraria: sea  $d$  tal que  $(x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J^d$ . Entonces existen  $d$  coberturas de vértices  $W_1, \dots, W_d$  no necesariamente distintas y un monomio  $M$  (puede ser  $M = 1$ ) tales que

$$(x_1 \cdots x_n)^{d-1} = x_{W_1} \cdots x_{W_d} M \in J^d.$$

Construimos

$$\begin{aligned} C_1 &= V(G) \setminus W_1, \\ C_2 &= (V(G) \setminus W_2) \setminus C_1, \\ C_3 &= (V(G) \setminus W_3) \setminus (C_1 \cup C_2), \\ &\vdots \\ C_d &= (V(G) \setminus W_d) \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_{d-1}). \end{aligned}$$

Veamos que  $C_1 \cup \dots \cup C_d$  es una partición en conjuntos independientes de  $V(G)$ . Notemos primero que cada  $C_i$  es un subconjunto de  $V(G) \setminus W_i$ , el cual es un conjunto independiente (pues  $W_i$  es una cobertura de vértices), por tanto cada  $C_i$  será un conjunto independiente. Por construcción, para cada  $i \neq j$ , tenemos  $C_i \cap C_j = \emptyset$ . Finalmente, para  $x_j \in V(G)$ , hay al menos un  $W_i$  tal que  $x_j \notin W_i$ , pues si  $x_j \in W_i$  para todo  $i$ , entonces  $x_j^d$  dividiría a  $x_{W_1} \cdots x_{W_d} M = (x_1 \cdots x_n)^{d-1}$ , y esto es absurdo. Tenemos dos posibles casos:

- Caso 1:  $x_j \in C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ . Por tanto, existe un  $k \in \{1, \dots, i-1\}$  tal que  $x_j \in C_k$ .
- Caso 2:  $x_j \notin C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ . Entonces, como  $x_j \notin W_i$ ,

$$x_j \in (V(G) \setminus W_i) \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}) = C_i.$$

Con lo que concluimos que  $V(G) = C_1 \cup \dots \cup C_d$ , y por el Lema 1.29, se tiene que

$$\chi(G) \leq \min\{d \mid x_{V(G)}^{d-1} = (x_1 \cdots x_n)^{d-1} \in J^d\}. \quad \square$$

**Ejemplo 1.31.** Volviendo al grafo  $G$  del Ejemplo 1.14, vemos en la Figura 1.9 una posible coloración de dicho grafo.

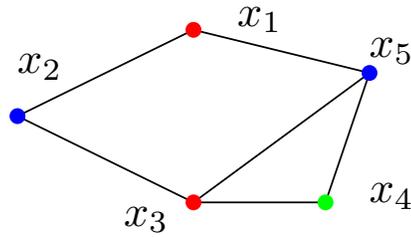


Figura 1.9: Coloración del grafo del Ejemplo 1.14

Luego, una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes será

$$V(G) = \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_5\} \cup \{x_4\}.$$

Puesto que  $\{x_1, x_3\}$ ,  $\{x_2, x_5\}$  y  $\{x_4\}$  son conjuntos independientes, los conjuntos  $\{x_2, x_4, x_5\}$ ,  $\{x_1, x_3, x_4\}$  y  $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$  (que son sus complementarios) son coberturas de vértices y por tanto,  $x_2x_4x_5$ ,  $x_1x_3x_4$ ,  $x_1x_2x_3x_5 \in J(G)$ , con lo que concluimos que

$$(x_2x_4x_5)(x_1x_3x_4)(x_1x_2x_3x_5) = (x_1x_2x_3x_4x_5)^2 \in J(G)^3.$$

Vista una primera muestra de la relación entre la teoría de grafos y el álgebra conmutativa, en los próximos capítulos trataremos de abordar la pregunta de si los ideales monomiales tienen o no la propiedad de persistencia, un concepto propio del álgebra conmutativa que introduciremos en el siguiente capítulo. Veremos que para responder a esta pregunta será imprescindible recurrir a la conexión con la teoría de grafos.



# Capítulo 2

## Propiedad de persistencia

Sea  $G$  un grafo con  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . A partir de ahora vamos a suponer que  $G$  no tiene vértices aislados, es decir, cada vértice de  $G$  es extremo de al menos una arista. Consideramos  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios sobre el cuerpo  $K$ .

Determinar si un ideal posee la propiedad de persistencia es, en general, una tarea difícil. No obstante, su conexión con la teoría de grafos permite demostrar que todo ideal monomial cuadrático libre de cuadrados la tiene. Veremos que el Teorema de [Berge](#), un resultado clásico de la teoría de grafos, será fundamental para dicha demostración.

Este capítulo se inspira en el artículo [\[11\]](#) escrito por J. Martínez-Bernal, S. Morey y R.H. Villarreal. El objetivo será demostrar que los ideales de aristas tienen la propiedad de persistencia.

### 2.1. Propiedad de persistencia de un ideal

En esta sección definimos la propiedad de persistencia, para lo que necesitaremos recordar el concepto de conjunto de primos asociados a un ideal. Daremos algunas características particulares de dicho conjunto para el caso de ideales monomiales, que serán fundamentales posteriormente.

**Definición 2.1.** Sea  $I$  un ideal descomponible de un anillo conmutativo  $R$

y sea

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t \text{ con } \mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i} \text{ para } i = 1, \dots, t$$

una descomposición primaria minimal de  $I$ . El conjunto de ideales primos  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}$ , que es independiente de la descomposición primaria elegida, es el llamado conjunto de primos asociados a  $I$  y se denota por  $\text{Ass}_R(I)$ . Los elementos de este conjunto son los primos asociados a  $I$ .

Se puede ver en [1, Capítulo 4, Teorema 4.5], que también se puede definir de manera equivalente el conjunto de primos asociados del ideal  $I$  de la siguiente forma:

$$\text{Ass}_R(I) = \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} = \sqrt{(I : c)} \text{ para algún } c \in R\}.$$

Una vez recordada la definición de primo asociado, procedemos a definir la propiedad de persistencia:

**Definición 2.2.** Un ideal  $I$  en un anillo noetheriano  $R$ , se dice que tiene la propiedad de persistencia si

$$\text{Ass}_R(I^k) \subseteq \text{Ass}_R(I^{k+1}), \text{ para todo } k \geq 1.$$

Dado que posteriormente nos centraremos en los ideales de aristas y de cubierta asociados a grafos (que son ideales monomiales), vamos a hacer algún comentario al respecto. Si  $I$  es un ideal monomial y  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(I)$ , entonces existe un monomio  $v \in R$  tal que  $\mathfrak{p} = (I : v)$ . Una demostración de este resultado de álgebra conmutativa se encuentra en [7, Capítulo 1, Corolario 1.3.10]. Luego, como  $I^k$  para  $k \geq 1$  es un ideal monomial, podemos escribir el conjunto de primos asociados de la siguiente forma: para  $k \geq 1$ ,

$$\text{Ass}_R(I^k) = \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ es primo y } \mathfrak{p} = (I^k : v) \text{ para algún monomio } v \in R\}.$$

Si  $I$  es un ideal monomial en el anillo de polinomios  $R$ , los primos asociados serán ideales monomiales primos, que por lo visto en la Sección 1.1 estarán generados por subconjuntos de las variables de  $R$ .

En la siguiente sección veremos que es posible dar una descripción más explícita del conjunto de primos asociados al ideal de aristas  $I(G)$ , lo que nos ayudará a probar que todos los ideales de aristas tienen la propiedad de persistencia.

## 2.2. Propiedad de persistencia para ideales de aristas

En primer lugar, veamos que los primos asociados de  $I(G)$  se relacionan de manera directa con las coberturas minimales de vértices del grafo  $G$ :

Recordamos que,

$$I(G) = \langle W_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle W_t \rangle,$$

donde  $W_1, \dots, W_t$  son las coberturas minimales de vértices de  $G$ , como vimos en el Lema 1.21. Observamos que estamos ante una descomposición primaria del ideal  $I(G)$ , pues para todo  $i = 1, \dots, t$  los ideales  $\langle W_i \rangle$  son ideales primos, luego  $\sqrt{\langle W_i \rangle} = \langle W_i \rangle$ . Además es minimal, dado que  $\langle W_i \rangle \neq \langle W_j \rangle$  si  $i \neq j$  (las coberturas minimales de vértices son todas distintas) y para todo  $j \in \{1, \dots, t\}$  se tiene que

$$\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^t \langle W_i \rangle \not\subset \langle W_j \rangle,$$

ya que si existiera un  $j \in \{1, \dots, t\}$  tal que  $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^t \langle W_i \rangle \subset \langle W_j \rangle$ , tendríamos que  $W_j$  no es una cobertura minimal de vértices lo que es una contradicción.

De todo esto, podemos concluir que los primos asociados a  $I(G)$  son los ideales generados por las variables correspondientes a los vértices que constituyen cada cobertura minimal de vértices. Esta relación será necesaria para demostrar el resultado principal del capítulo. Por otro lado, se cumple que  $\text{Min}(I(G)) = \text{Ass}(I(G))$ , donde  $\text{Min}(I(G))$  denota los primos minimales del ideal  $I(G)$  (que son los primos asociados a  $I(G)$  que son minimales para la contención), puesto que  $I(G)$  es un ideal monomial libre de cuadrados. La prueba de este resultado se puede ver en [7, Capítulo 1, Corolario 1.3.6]. Además, para ideales de aristas se cumple que  $\text{Ass}_R(I(G)) \subseteq \text{Ass}_R(I(G)^k)$  para todo  $k \geq 1$ .

A continuación, vamos a proceder a establecer los fundamentos necesarios para demostrar que el ideal de aristas de cualquier grafo tiene la propiedad de persistencia.

**Definición 2.3.** Sea  $G$  un grafo con conjunto de vértices  $V(G)$  y sea  $S \subset V(G)$ . El subgrafo inducido de  $G$  en  $S$ , denotado por  $G_S$ , es el grafo cuyos

vértices son los vértices del conjunto  $S$  y cuyas aristas son las aristas de  $G$  que unían entre sí vértices de  $S$ .

**Definición 2.4.** Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo con  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

- La duplicación de un vértice  $x_i$  de  $G$  da lugar a un nuevo grafo de la siguiente forma: se extiende el conjunto de vértices  $V(G)$  con un nuevo vértice  $x'_i$  y se reemplaza  $E(G)$  por

$$E(G) \cup \{(e \setminus \{x_i\}) \cup \{x'_i\} \mid e \in E(G) \text{ es una arista que contiene a } x_i\}.$$

- La eliminación de  $x_i$ , denotada por  $G \setminus \{x_i\}$ , es el grafo obtenido a partir de  $G$  al eliminar el vértice  $x_i$  y todas las aristas que contienen a  $x_i$ . Dado un subconjunto de vértices  $S \subset V(G)$ , denotaremos por  $G \setminus S$  al grafo obtenido a partir de  $G$  mediante la eliminación sucesiva de todos los vértices pertenecientes a  $S$ .
- Un grafo obtenido a partir de  $G$  mediante una sucesión de eliminaciones y duplicaciones de vértices se llama paralelización de  $G$ .

Si  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ , denotamos por  $G^a$  al grafo obtenido a partir de  $G$  mediante las eliminaciones de los vértices  $x_i$  con  $a_i = 0$ , y  $a_i - 1$  duplicaciones de los vértices  $x_i$  si  $a_i \geq 1$ .

*Nota.* Observamos que  $G \setminus S$  coincide con  $G_{V(G) \setminus S}$ , el subgrafo inducido de  $G$  en  $V(G) \setminus S$ .

**Ejemplo 2.5.** Sea  $G$  el grafo de la Figura 2.1, un triángulo.

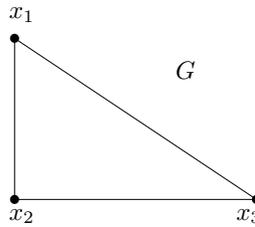


Figura 2.1: Grafo  $G$

Se representa a continuación un ejemplo de paralelización de este grafo, en el que vamos a realizar dos duplicaciones del vértice  $x_1$ , una duplicación del vértice  $x_2$  y por último una eliminación del vértice  $x_3$ . Luego, el conjunto

de vértices de la paralelización será  $V(G^{(3,2,0)}) = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_2^1, x_2^2\}$ , y las Figuras 2.2 y 2.3 muestran primero la doble duplicación de  $x_1$  y luego la duplicación de  $x_2$  y la eliminación de  $x_3$ .

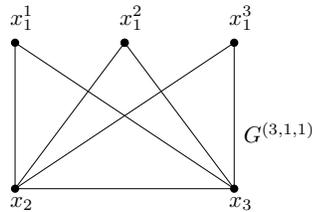


Figura 2.2: Dos duplicaciones del vértice  $x_1$

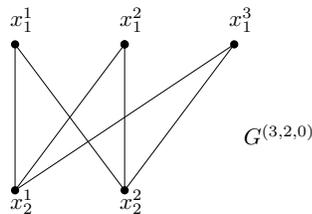


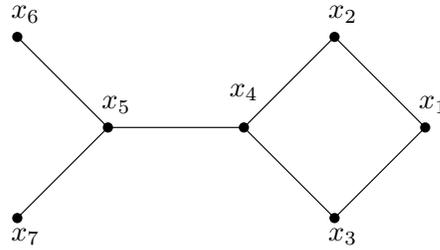
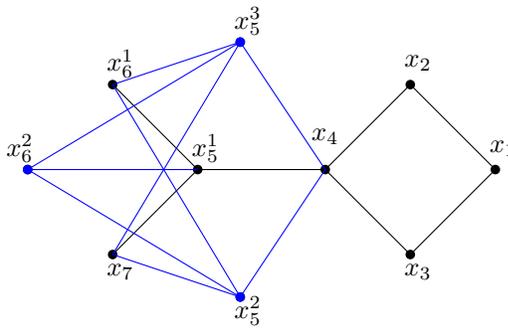
Figura 2.3: Duplicaciones de  $x_1$ ,  $x_2$  y eliminación de  $x_3$

Vamos ahora a ampliar la definición de independencia que hemos dado en la Definición 1.17 para vértices a las aristas de un grafo:

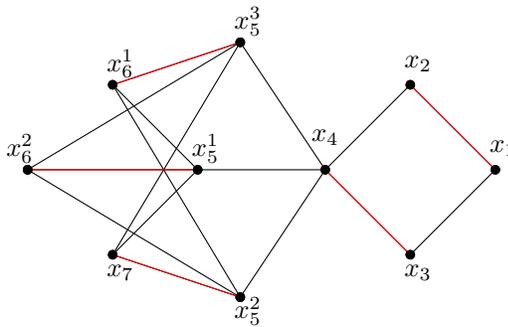
**Definición 2.6.** Sea  $G$  un grafo.

- Dos aristas de  $G$  son independientes si no tienen vértices en común.
- Un emparejamiento de  $G$  es un subconjunto de  $E(G)$  tal que dos aristas cualesquiera no tienen ningún vértice en común, es decir, es un conjunto de aristas independientes dos a dos.
- Un emparejamiento es máximo si no hay otro de cardinal mayor, y el número de emparejamiento de  $G$ , denotado por  $\nu(G)$ , es el tamaño de cualquier emparejamiento máximo de  $G$ . Un emparejamiento que cubre todos los vértices de  $V(G)$  se llama emparejamiento perfecto de  $G$ .

**Ejemplo 2.7.** Dado el grafo  $G$  representado en la Figura 2.4, se presenta en la Figura 2.5 una paralelización del grafo  $G$ . Para una mayor claridad se han representado en azul tanto los vértices como las aristas que se han añadido.

Figura 2.4: Grafo  $G$ Figura 2.5:  $G^{(1,1,1,1,3,2,1)}$ 

En la Figura 2.6, se representa en rojo un conjunto de aristas que forman un emparejamiento perfecto del grafo  $G^{(1,1,1,1,3,2,1)}$ .

Figura 2.6: Emparejamiento perfecto de  $G^{(1,1,1,1,3,2,1)}$

Dado un grafo  $G$ , el subanillo de aristas de  $G$  es el subanillo

$$K[G] = K[x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G)].$$

**Lema 2.8.** *Sea  $G$  un grafo con  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$  y sea  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ . Entonces,  $G^a$  tiene un emparejamiento perfecto si y solo si  $x^a \in K[G]$ .*

*Demostración.* Podemos asumir que  $a_i \geq 1$  para todo  $i$ , porque si existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a_j = 0$ , consideramos el subgrafo inducido por el conjunto de vértices  $\{x_i \mid a_i > 0\}$ . Luego el conjunto de vértices de  $G^a$  es

$$V(G^a) = \{x_1^1, \dots, x_1^{a_1}, x_2^1, \dots, x_2^{a_2}, \dots, x_n^1, \dots, x_n^{a_n}\}$$

y las aristas de  $G^a$  son exactamente los pares de la forma  $\{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\}$  con  $i \neq j$ ,  $k_i \leq a_i$ ,  $k_j \leq a_j$ , donde  $\{x_i, x_j\}$  es una arista de  $G$ .

Si  $G^a$  tiene un emparejamiento perfecto, sabemos que existe un conjunto de aristas  $M$  que cubre todos los vértices de  $G^a$  sin repetir vértices. Es decir,  $M$  es un conjunto de pares de la forma  $\{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\}$  con  $i \neq j$ ,  $k_i \leq a_i$ ,  $k_j \leq a_j$ , tales que para cualesquiera dos aristas distintas  $\{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\}, \{x_l^{k_l}, x_m^{k_m}\} \in M$ , se cumple que  $\{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\} \cap \{x_l^{k_l}, x_m^{k_m}\} = \emptyset$ . Esto garantiza que cada vértice de  $G^a$  aparece en exactamente una arista de  $M$ .

Asociamos cada par  $\{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\} \in M$  con su arista correspondiente  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$  y formamos así el conjunto  $M'$ . Es decir,  $M'$  está formado por aristas de  $G$  que provienen de las aristas pertenecientes al emparejamiento perfecto de  $G^a$  a través de la asociación descrita antes. Dado que en  $G^a$  cada vértice  $x_i$  ha sido duplicado  $a_i - 1$  veces (hay  $a_i$  vértices de la forma  $x_i^{k_i}$ ), en  $M'$  tendremos  $a_i$  veces el vértice  $x_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Y si multiplicamos todos los vértices pertenecientes a aristas de  $M'$  obtendremos  $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = x^a$ , que es claro que está en  $K[G]$ .

Recíprocamente, supongamos que  $x^a \in K[G]$ . Entonces podemos escribir  $x^a$  como producto de pares de vértices correspondientes a aristas de  $G$ . Como cada  $x_i$  aparece  $a_i$  veces en  $x^a$ , podemos asociar cada una de estas repeticiones a un vértice  $x_i^{k_i}$  de  $G^a$  de tal forma que todo vértice de  $G^a$  aparece una, y solo una vez en esta relación. Entonces, cada una de las aristas en la factorización de  $x^a$  se corresponde con una arista de  $G^a$ . Además, en estas no aparecen vértices repetidos, pues todos los vértices son distintos al hacer la asignación. Luego tenemos que hay un emparejamiento perfecto en  $G^a$ .  $\square$

**Ejemplo 2.9.** Volvamos al Ejemplo 2.7, con  $a = (1, 1, 1, 1, 3, 2, 1)$ . Se puede observar con facilidad el resultado anterior, pues tenemos un emparejamiento perfecto en  $G^a$  y vemos que a través de él se puede escribir

$$x^a = x_1x_2x_3x_4x_5^3x_6^2x_7 = (x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6)^2(x_5x_7) \in K[G].$$

**Definición 2.10.** Llamamos deficiencia de  $G$ ,  $\text{def}(G)$ , al número de vértices que se quedan sin cubrir por un emparejamiento máximo. Por tanto,

$$\text{def}(G) = |V(G)| - 2\nu(G).$$

**Ejemplo 2.11.** Consideramos el grafo  $G$  del Ejemplo 2.7. Como vemos en la Figura 2.7:  $\nu(G) = 3$  y  $\text{def}(G) = 1$ .

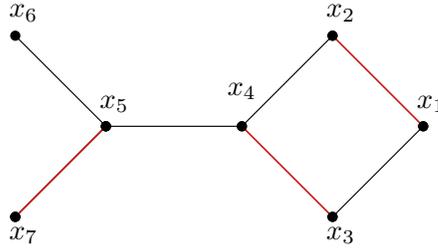


Figura 2.7: Un emparejamiento máximo de  $G$

*Notación.* Denotaremos por  $F(G) = \{f_1, \dots, f_q\}$  al sistema minimal de generadores formado por monomios de  $I(G)$ , que es lo que denotábamos en el Capítulo 1 por  $G(I(G))$ , es decir,  $F(G)$  es el conjunto de todos los monomios  $x_i x_j$  tales que  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ . También usaremos  $f^c$  como una abreviación de  $f_1^{c_1} \dots f_q^{c_q}$ , donde  $c = (c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{N}^q$ .

Dada una arista  $e = \{x_i, x_j\}$  del grafo  $G$ , denotamos por  $G^e$  o  $G^{\{x_i, x_j\}}$  al grafo obtenido a partir de  $G$  duplicando los vértices  $x_i$  y  $x_j$ , es decir,  $G^e := G^{\mathbf{1} + e_i + e_j}$ , donde  $e_i \in \mathbb{R}^n$  es el vector de todo ceros y un uno en la posición  $i$ -ésima y  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema 2.12.** Sea  $G$  un grafo,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$  y  $c = (c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{N}^q$ . Entonces

$$a) \quad x^a = x^\delta f^c, \text{ donde } |\delta| = \text{def}(G^a) \text{ y } |c| = \nu(G^a).$$

- b)  $x^a \in I(G)^k \setminus I(G)^{k+1}$  si y solo si  $k = \nu(G^a)$ .
- c)  $(G^a)^e = G^{a+e_i+e_j}$  para cualquier arista  $e = \{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\}$  de  $G^a$ .

*Demostración.* De la misma forma que en el Lema 2.8, podemos suponer que  $a_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

- (a) Tomamos  $c = (c_1, \dots, c_q) = (0, \dots, 0)$  y  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) = (0, \dots, 0)$ . Sea  $M$  un emparejamiento máximo de  $G^a$ . Para todo  $\{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\} \in M$ , sabemos que  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ , luego existe  $k \in \{1, \dots, q\}$  tal que  $f_k = x_i x_j$  y actualizamos  $c_k = c_k + 1$ .

Por otro lado, para todo  $x_i^{k_i}$  que no es extremo de ninguna arista de  $M$ , asignamos  $\delta_i = \delta_i + 1$ .

Es claro que de esta forma,

$$|\delta| = \text{def}(G^a) \text{ y } |c| = \nu(G^a).$$

Además,  $x^a = x^\delta f^c$  pues, por construcción, en el lado derecho de la igualdad la variable  $x_i$  aparece tantas veces como duplicaciones haya en  $G^a$  del vértice correspondiente, y esto es lo que representa el exponente  $a_i$  de  $x_i$  en el lado izquierdo.

- (b) Se deduce directamente de (a).
- (c) Sea  $e = \{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\}$  una arista cualquiera de  $G^a$ . Llamamos  $y_i$  e  $y_j$  a las duplicaciones de los vértices  $x_i^{k_i}$  y  $x_j^{k_j}$  de  $G^a$ , respectivamente, y usamos la misma notación para las últimas duplicaciones de los vértices  $x_i$  y  $x_j$  de  $G$ . Luego el conjunto de vértices en  $(G^a)^e$  y en  $G^{a+e_i+e_j}$  es  $V(G^a) \cup \{y_i, y_j\}$ .

Veamos que  $E((G^a)^e) \subseteq E(G^{a+e_i+e_j})$ . Sea  $f$  una arista de  $(G^a)^e$ , se tienen dos casos:

- $f = \{y_i, y_j\}$  o  $f \cap \{y_i, y_j\} = \emptyset$ . Trivialmente se obtiene que  $f \in E(G^{a+e_i+e_j})$ .
- $f = \{y_i, x_l^{k_l}\}$  o  $f = \{y_j, x_l^{k_l}\}$ . Si  $f = \{y_i, x_l^{k_l}\}$ , entonces  $\{x_i^{k_i}, x_l^{k_l}\} \in E(G^a)$  lo que implica que  $\{x_i, x_l\}$  es una arista de  $G$ , luego  $f = \{y_i, x_l^{k_l}\} \in E(G^{a+e_i+e_j})$ . Igual para  $f = \{y_j, x_l^{k_l}\}$ .

La contención contraria se concluye de forma análoga.  $\square$

Enunciamos ahora un resultado clásico que describe los grafos que tienen emparejamientos perfectos. Este teorema fue probado por W.T. Tutte en 1947. Podemos ver una demostración en [2, Capítulo 2, Teorema 2.2.1].

**Teorema 2.13** (Tutte). *Un grafo  $G$  tiene un emparejamiento perfecto si y solo si  $c_0(G \setminus S) \leq |S|$  para todo  $S \subset V(G)$ , donde  $c_0(G)$  denota el número de componentes conexas impares de un grafo  $G$ , es decir, componentes conexas con un número impar de vértices.*

*Nota.* Recordamos que una componente conexa de  $G$  es un subconjunto maximal de vértices  $C \subset V(G)$  tal que para cada par de vértices  $u, v \in C$  existe un camino entre ellos.

Presentamos ahora la Fórmula de Berge. Este teorema es equivalente al Teorema de Tutte, y nos resultará de utilidad posteriormente. En [10, Capítulo 3, Teorema 3.1.14] encontramos una demostración de dicho resultado, aunque no usa el Teorema de Tutte para su prueba.

**Teorema 2.14** (Berge). *Sea  $G$  un grafo. Entonces*

$$\text{def}(G) = \max\{c_0(G \setminus S) - |S| \mid S \subset V(G)\}.$$

A continuación, establecemos un resultado clave que relaciona la deficiencia del grafo  $G^e$  con la de  $G$  bajo unas ciertas condiciones:

**Teorema 2.15.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces,  $\text{def}(G^e) = \delta$  para todo  $e \in E(G)$  si y solo si  $\text{def}(G) = \delta$  y  $\nu(G^e) = \nu(G) + 1$  para todo  $e \in E(G)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\text{def}(G^e) = \delta$  para todo  $e \in E(G)$ .

Se tiene que  $\text{def}(G^e) \leq \text{def}(G)$  para cualquier  $e \in E(G)$ , pues  $G$  se puede ver como un subgrafo de  $G^e$ , con  $\nu(G) + 1 \leq \nu(G^e)$  y por la igualdad en la Definición 2.10 se concluye.

Vamos a demostrar la igualdad por contradicción: supongamos que  $\text{def}(G) > \delta$ . Entonces, por el Teorema de Berge, existe un  $S \subset V(G)$  tal que  $c_0(G \setminus S) - |S| > \delta$ . Llamaremos  $r = c_0(G \setminus S)$  y  $s = |S|$ . Sean  $H_1, \dots, H_r$  las componentes impares de  $G \setminus S$ .

Caso (I):  $|V(H_k)| \geq 2$  para algún  $1 \leq k \leq r$ . Tomamos una arista  $e = \{x_i, x_j\}$  de  $H_k$  y consideramos la paralelización  $H'_k$  obtenida al duplicar en  $H_k$

los vértices  $x_i$  y  $x_j$ , es decir,  $H'_k = H_k^e$ . Luego, es claro que las componentes conexas impares de  $G^e \setminus S$  son  $H_1, H_2, \dots, H_{k-1}, H'_k, H_{k+1}, \dots, H_r$ . Por tanto,

$$c_0(G^e \setminus S) - |S| = r - s > \delta = \text{def}(G^e),$$

lo que contradice el Teorema de [Berge](#) cuando se aplica a  $G^e$ .

Caso (II):  $|V(H_k)| = 1$  para todo  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Notamos en este caso que  $S \neq \emptyset$  pues  $G$  no tiene vértices aislados. Tomamos  $e = \{x_i, x_j\}$  una arista de  $G$  donde  $\{x_i\} = V(H_t)$  para algún  $t \in \{1, \dots, r\}$  y  $x_j \in S$  (notemos que existe  $x_j \in S$  de esta manera, ya que no es posible que todos los vértices de  $S$  verifiquen que no son adyacentes a ningún  $H_k$  pues en ese caso  $V(H_k)$  sería un vértice aislado de  $G$  para todo  $k$ ). Sean  $y_i$  e  $y_j$  las duplicaciones de  $x_i$  y  $x_j$ , respectivamente. Entonces, las componentes impares de  $G^e \setminus \{S \cup \{y_j\}\}$  son  $H_1, \dots, H_r, \{y_i\}$ . Por tanto,

$$c_0(G^e \setminus (S \cup \{y_j\})) - |S \cup \{y_j\}| = r + 1 - (s + 1) = r - s > \delta = \text{def}(G^e),$$

lo que vuelve a contradecir el Teorema de [Berge](#).

Luego,  $\text{def}(G) = \text{def}(G^e)$  para todo  $e \in E(G)$ , y por la [definición de deficiencia](#) se tiene que  $\nu(G^e) = \nu(G) + 1$  para todo  $e \in E(G)$ .

La implicación contraria se deduce de la igualdad en la [Definición 2.10](#):

$$\begin{aligned} \text{def}(G^e) &= |V(G^e)| - 2\nu(G^e) = 2 + |V(G)| - 2(\nu(G) + 1) = \\ &= |V(G)| - 2\nu(G) = \text{def}(G), \end{aligned}$$

para todo  $e \in E(G)$ . □

Este resultado nos permite dar la siguiente caracterización de grafos con emparejamientos perfectos en términos de duplicaciones de aristas.

**Corolario 2.16.** *Sea  $G$  un grafo. Entonces  $G$  tiene un emparejamiento perfecto si y solo si  $G^e$  tiene un emparejamiento perfecto para cada arista  $e$  de  $G$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  tiene un emparejamiento perfecto. Sean  $\{f_1, \dots, f_{n/2}\}$  el conjunto de aristas de  $G$  que forman dicho emparejamiento, donde  $n$  es el número de vértices de  $G$ . Sea  $e = \{x_i, x_j\}$  una arista de

$G$ , y llamamos  $y_i$  e  $y_j$  a las duplicaciones de los vértices  $x_i$  y  $x_j$ , respectivamente. Como  $e$  es una arista de  $G$ ,  $\{y_i, y_j\}$  es una arista de  $G^e$ . Luego,  $\{f_1, \dots, f_{n/2}, \{y_i, y_j\}\}$  es un emparejamiento perfecto de  $G^e$ .

Supongamos ahora que  $G^e$  tiene un emparejamiento perfecto para todo  $e \in E(G)$ . Entonces  $\text{def}(G^e) = 0$  para todo  $e \in E(G)$  y por el Teorema 2.15 concluimos que  $\text{def}(G) = 0$ . Por tanto,  $G$  tiene un emparejamiento perfecto.  $\square$

El siguiente lema juega un papel crucial en la demostración del resultado principal de este capítulo.

**Lema 2.17.** *Sea  $I$  el ideal de aristas del grafo  $G$ . Entonces  $(I^{k+1} : I) = I^k$ , para  $k \geq 1$ .*

*Demostración.* Usamos la [notación](#) descrita anteriormente.

Es claro que  $I^k \subseteq (I^{k+1} : I)$ , por la propia definición de ideal cociente. Veamos que  $(I^{k+1} : I) \subseteq I^k$ . Por un resultado básico de álgebra conmutativa (podemos verlo, por ejemplo, en [12, Teorema 2.5.1]), como  $I^{k+1}$  e  $I$  son ambos ideales monomiales, se tiene que  $(I^{k+1} : I)$  es un ideal monomial. Entonces, nos basta probar que un monomio de  $(I^{k+1} : I)$  pertenece a  $I^k$ . Tomamos  $x^a \in (I^{k+1} : I)$ , entonces  $f_i x^a \in I^{k+1}$  para cada  $i = 1, \dots, q$ .

Si  $f_i x^a \in I^{k+2}$  para algún  $i$ , entonces existen  $k+2$  elementos de  $F(G)$  (no necesariamente distintos) que dividen a  $f_i x^a$ , es decir, podemos escribir

$$x_i x_j x^a = f_i x^a = f_{i_1} \cdots f_{i_{k+1}} f_{i_{k+2}} x^a.$$

Observamos que en el peor de los casos existen  $c \neq b$  tales que  $x_i \in f_c$ ,  $x_j \in f_b$ , entonces si dividimos la igualdad anterior entre  $x_i x_j$  obtenemos que  $x^a$  es igual al producto de los  $f_k \notin \{f_c, f_b\}$  por un monomio. Luego,  $x^a$  es producto de al menos  $k$  elementos de  $I$ , lo que quiere decir que  $x^a \in I^k$ , como queríamos.

Por tanto, supongamos que  $f_i x^a = x^{a+e_i+e_j} \in I^{k+1} \setminus I^{k+2}$  para cada  $e_i + e_j$  tal que  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ . Por el Lema 2.12(b),  $\nu(G^{a+e_i+e_j}) = k+1$  para cada  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ , esto es, el tamaño de un emparejamiento máximo de  $G^{a+e_i+e_j}$  es  $k+1$  para toda arista  $\{x_i, x_j\}$  de  $G$ . Y además, de acuerdo con el Lema 2.12(c), se tiene que  $G^{a+e_i+e_j} = (G^a)^{\{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\}}$  para toda arista

$e = \{x_i^{k_i}, x_j^{k_j}\}$  de  $G^a$ . Luego, un emparejamiento máximo de  $(G^a)^e$  es de tamaño  $k+1$  para toda arista  $e$  de  $G^a$ , y por la fórmula de la Definición 2.10,

$$\text{def}((G^a)^e) = (|V(G^a)| + 2) - 2(k+1) = (|a| + 2) - 2(k+1) = |a| - 2k,$$

para cada arista  $e$  de  $G^a$ . Entonces,  $\text{def}(G^a) = |a| - 2k$  debido al Teorema 2.15.

El Lema 2.12(a) nos dice que podemos escribir  $x^a = x^\delta f^c$ , donde  $|\delta| = \text{def}(G^a)$  y  $|c| = \nu(G^a)$ . Luego,

$$|a| = |\delta| + 2|c| = (|a| - 2k) + 2|c| \Rightarrow |c| = k,$$

de lo que concluimos que  $x^a \in I^k$ .  $\square$

**Proposición 2.18.** *Sea  $I$  el ideal de aristas de un grafo  $G$  y sea  $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Si  $\mathfrak{m} \in \text{Ass}_R(I^k)$ , entonces  $\mathfrak{m} \in \text{Ass}_R(I^{k+1})$ , para  $k \geq 1$ .*

*Demostración.* Si  $\mathfrak{m}$  es un primo asociado de  $I^k$ , existe un monomio  $x^a \notin I^k$  tal que  $\mathfrak{m} = (I^k : x^a)$ , y en consecuencia  $\mathfrak{m}x^a \subset I^k$ . Por el Lema 2.17 se tiene que  $I^k = (I^{k+1} : I)$  y como  $x^a \notin I^k$  va a existir una arista  $\{x_i, x_j\}$  de  $G$  tal que  $x_i x_j x^a \notin I^{k+1}$ . Pero como  $\mathfrak{m}x^a \subset I^k$ , entonces  $x_l x^a \in I^k$  para todo  $l = 1, \dots, n$ , y además,  $x_i x_j \in I$ . Luego,

$$(x_i x_j)(x_l x^a) = x_l (x_i x_j x^a) \in I^{k+1}$$

para todo  $l = 1, \dots, n$ . Por tanto, hemos visto que existe un monomio  $x_i x_j x^a \notin I^{k+1}$  tal que  $\mathfrak{m} = (I^{k+1} : x_i x_j x^a)$ , es decir,  $\mathfrak{m}$  es un primo asociado de  $I^{k+1}$ .  $\square$

Para poder generalizar este resultado para un primo asociado arbitrario, será necesario utilizar la localización. Además, nos resultará útil el siguiente lema sobre primos asociados. Podemos ver la demostración en [8, Lema 3.4].

**Lema 2.19.** *Sea  $S = K[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_r]$  e  $I$  un ideal monomial libre de cuadrados en dicho anillo, tal que  $I = I_1 + I_2$  donde  $I_1 \subset S_1 = K[x_1, \dots, x_m]$  e  $I_2 \subset S_2 = K[x_{m+1}, \dots, x_r]$ . Entonces,  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_S(I^k)$  si y solo si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ , donde  $\mathfrak{p}_1 \in \text{Ass}_{S_1}(I_1^{k_1})$  y  $\mathfrak{p}_2 \in \text{Ass}_{S_2}(I_2^{k_2})$  con  $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) = k - 1$ .*

Finalmente, estamos en disposición de demostrar el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 2.20.** *Sea  $G$  un grafo e  $I(G)$  su ideal de aristas, entonces  $I(G)$  tiene la *propiedad de persistencia*.*

*Demostración.* Recordamos que estamos bajo la hipótesis de que  $G$  no tiene vértices aislados. Por simplicidad denotaremos  $I = I(G)$ , y fijamos  $k \geq 1$ .

Sea  $\mathfrak{p}$  un primo asociado de  $I^k$  y sea  $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  ideal maximal de  $R$ . Como recordamos al principio del capítulo, los primos asociados a un ideal monomial serán ideales generados por subconjuntos de las variables del anillo  $R$ , luego para simplificar la notación podemos suponer  $\mathfrak{p} = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$  para  $1 \leq r \leq n$ . Entonces, como mencionamos al inicio de esta sección, el conjunto  $C = \{x_1, \dots, x_r\}$  es una cobertura minimal de vértices de  $G$ .

Si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \in \text{Ass}_R(I^k)$ , por la Proposición 2.18,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \in \text{Ass}_R(I^{k+1})$  como queríamos. Suponemos entonces que  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ .

Consideramos la localización del ideal  $I$  en el primo  $\mathfrak{p}$ ,  $I_{\mathfrak{p}}$ .

Para todo  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ , o  $x_i \in \{x_1, \dots, x_r\}$  o  $x_j \in \{x_1, \dots, x_r\}$ , pues  $C = \{x_1, \dots, x_r\}$  es una cobertura de vértices. Entonces,  $I_{\mathfrak{p}} \neq R_{\mathfrak{p}}$ .

Escribimos la localización del ideal  $I$  como  $I_{\mathfrak{p}} = \langle I_1, I_2 \rangle_{\mathfrak{p}}$ , donde:

- $I_1$  es el ideal primo de  $R$  generado por todas las variables  $x_i$  cuya imagen bajo el homomorfismo natural del anillo de fracciones  $f : R \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$  es un generador minimal de  $I_{\mathfrak{p}}$ . Es decir,  $I_1$  está generado por las variables  $x_i$  tales que  $i \in \{1, \dots, r\}$  y existe algún  $j \in \{r+1, \dots, n\}$  con  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ .
- $I_2$  es el ideal de  $R$  generado por los monomios de grado dos libres de cuadrados  $x_i x_j$  cuya imagen bajo el homomorfismo natural del anillo de fracciones es un generador minimal de  $I_{\mathfrak{p}}$ . Es decir,  $I_2$  está generado por monomios de la forma  $x_i x_j$  que cumplen que  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ , tanto  $i$  como  $j$  pertenecen al conjunto  $\{1, \dots, r\}$ , y además ni  $x_i$  ni  $x_j$  son adyacentes a ningún vértice  $x_k$  con  $k \in \{r+1, \dots, n\}$ . Esta última condición es necesaria para que sean generadores minimales de  $I_{\mathfrak{p}}$ , puesto que si por ejemplo  $x_j$  es adyacente a un vértice  $x_k$  tal que  $k \in \{r+1, \dots, n\}$ , entonces  $x_j$  sería un elemento del sistema minimal de generadores formado por monomios de  $I_1$ .

A partir de la definición de  $I_1$  e  $I_2$ , notamos que los elementos de los sistemas minimales de generadores formados por monomios de  $I_1$  e  $I_2$  se encuentran

en  $S = K[x_1, \dots, x_r]$ .

Además, se tiene que los dos conjuntos de variables que aparecen en los sistemas minimales de generadores formados por monomios de  $I_1$  e  $I_2$  son disjuntos:

Sean  $C_1$  y  $C_2$  los conjuntos de variables que aparecen en los sistemas minimales de generadores formados por monomios de  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Si  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , entonces existe  $x_i$  con  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $x_i \in C_1$  y  $x_i \in C_2$ . Como  $x_i \in C_1$ ,  $x_i$  es un generador minimal de  $I_{\mathfrak{p}}$ ; y como  $x_i \in C_2$ , existe  $x_j$  tal que  $x_i x_j$  es un generador minimal de  $I_2$ . Por tanto,  $x_i x_j \in R_{\mathfrak{p}}$  es un generador minimal de  $I_{\mathfrak{p}}$ , lo cual entra en contradicción con el hecho de que  $x_i$  también sea un generador minimal de  $I_{\mathfrak{p}}$ .

Por otra parte, la unión de los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  es  $C = \{x_1, \dots, x_r\}$ :

Claramente  $C_1 \cup C_2$  está contenido en  $C$ . Veamos la contención contraria. Sea  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Como  $G$  no tiene vértices aislados, existe una arista  $e \in E(G)$  tal que  $x_i \in e$ .

- Si existe  $j \in \{r+1, \dots, n\}$  tal que  $e = \{x_i, x_j\}$  entonces  $x_i \in C_1$ .
- Si no existe  $j \in \{r+1, \dots, n\}$  tal que  $e = \{x_i, x_j\}$ , entonces no puede ser que todos los vértices adyacentes a  $x_i$  sean adyacentes a algún vértice  $x_k$  con  $k \in \{r+1, \dots, n\}$  (ya que  $C$  es una cobertura minimal de vértices). Por tanto existe algún  $j \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$  y  $x_j$  no es adyacente a ningún vértice  $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ , luego  $x_i, x_j \in C_2$ .

Recordemos un resultado importante que utilizaremos a continuación: la localización preserva los primos asociados, esto es si  $J$  es un ideal en el anillo conmutativo  $R$  entonces  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(J)$  si y solo si  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(J_{\mathfrak{p}})$  ([1, Capítulo 4, Proposición 4.8]).

Si  $I_2 = \langle 0 \rangle$ , entonces  $C_2 = \emptyset$  y por tanto  $C_1 = \{x_1, \dots, x_r\}$ , esto es  $I_1 = \langle x_1, \dots, x_r \rangle = \mathfrak{p}$ , luego  $\mathfrak{p}$  es un primo asociado de  $I_1$ , y como la localización preserva los primos asociados tenemos que  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}((I_1)_{\mathfrak{p}})$ . Además,  $I_{\mathfrak{p}} = (I_1)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ , y volviendo a utilizar que la localización preserva los primos asociados concluimos que  $\mathfrak{p}$  es un primo asociado de  $I$ . Como para ideales de aristas se cumple que  $\text{Ass}_R(I) \subseteq \text{Ass}_R(I^j)$  para todo  $j \geq 1$ , concluimos que  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I^{k+1})$ .

Supongamos entonces que  $I_2 \neq \langle 0 \rangle$ . Sabemos que  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(I^k)$  si y so-

lo si  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}((I^k)_{\mathfrak{p}}) = \text{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}((I_{\mathfrak{p}})^k) = \text{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(\langle I_1, I_2 \rangle_{\mathfrak{p}}^k)$  si y solo si  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(\langle I_1, I_2 \rangle^k)$ . Como  $I_1, I_2 \subseteq S$ ,  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(\langle I_1, I_2 \rangle^k)$  si y solo si  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_S(\langle I_1, I_2 \rangle^k)$ .

Además, se cumplen las condiciones del Lema 2.19 considerando  $S_1 = K[C_1]$  y  $S_2 = K[C_2]$ , así que  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_S(\langle I_1, I_2 \rangle^k)$  si y solo si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ , donde  $\mathfrak{p}_1 \in \text{Ass}_{S_1}(I_1^{k_1})$  y  $\mathfrak{p}_2 \in \text{Ass}_{S_2}(I_2^{k_2})$  con  $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) = k - 1$ . Tenemos entonces que nuestro ideal primo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(I^k)$  es de esta forma. Notemos que  $\mathfrak{p} = \langle x_1, \dots, x_r \rangle = \langle C_1 \rangle + \langle C_2 \rangle$ , luego necesariamente  $\mathfrak{p}_1 = \langle C_1 \rangle$  y  $\mathfrak{p}_2 = \langle C_2 \rangle$ .

Como  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$  son ideales maximales de  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, y además  $\mathfrak{p}_1 \in \text{Ass}_{S_1}(I_1^{k_1})$  y  $\mathfrak{p}_2 \in \text{Ass}_{S_2}(I_2^{k_2})$ , por la Proposición 2.18,  $\mathfrak{p}_1 \in \text{Ass}_{S_1}(I_1^{k_1+1})$  y  $\mathfrak{p}_2 \in \text{Ass}_{S_2}(I_2^{k_2+1})$ . Y de nuevo por el Lema 2.19 obtenemos que  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_S(\langle I_1, I_2 \rangle^{k+1})$ . Por tanto, repitiendo la argumentación anterior pero ahora en el otro sentido podemos concluir que  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(I^{k+1})$ .  $\square$

Una vez comprobado que los ideales de aristas tienen la propiedad de persistencia, en el siguiente capítulo estudiaremos lo que ocurre en el caso de los ideales de cubierta.

## Capítulo 3

# Propiedad de persistencia para ideales de cubierta

Sea  $G$  un grafo con  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Consideramos el anillo  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  y el ideal de cubierta  $J(G)$  del grafo  $G$  en el anillo  $R$ . En este capítulo, nos planteamos si el ideal  $J(G)$  tiene la propiedad de persistencia.

En primer lugar, se va a introducir un tipo de grafos para los cuales se comprobó que dicha propiedad era cierta, lo que llevó a pensar que quizá podría serlo para todos los grafos. Motivados por este problema, varios autores formularon una conjetura en teoría de grafos; si dicha conjetura era cierta entonces la propiedad de persistencia se verificaría para todos los ideales de cubierta. El objetivo de este capítulo es analizar la evolución del problema de la propiedad de persistencia para los ideales de cubierta, desde su planteamiento inicial hasta su desenlace.

En la primera sección introducimos la conjetura en teoría de grafos cuya veracidad implicaría que todos los ideales de cubierta tienen la propiedad de persistencia. En la segunda sección, presentaremos un contraejemplo que demuestra que dicha conjetura no es cierta. Finalmente, se mostrará que el ideal de cubierta asociado a este grafo no tiene la propiedad de persistencia.

Procedemos a definir los grafos para los cuales se ha probado que sus ideales de cubierta sí tienen la propiedad de persistencia, para lo que necesitamos introducir la definición de clique:

**Definición 3.1.** Sea  $G$  un grafo.

- Un clique en  $G$  es un subconjunto  $C \subseteq V(G)$  tal que el subgrafo inducido por  $C$  en  $G$  es un grafo completo.
- Un clique máximo en  $G$ , es un clique en  $G$  tal que no existe otro clique en  $G$  con mayor número de vértices. Además, el número de clique de  $G$ , denotado  $\omega(G)$ , es el número de vértices de un clique máximo en  $G$ .

**Definición 3.2.** Un grafo perfecto es un grafo  $G$  tal que todos sus subgrafos inducidos verifican que su número cromático es igual a su número de clique. Es decir, un grafo es perfecto si:

$$\chi(G') = \omega(G'),$$

para todo subgrafo inducido  $G'$  de  $G$ .

**Ejemplo 3.3.** El ejemplo más sencillo de grafos perfectos lo constituye la familia de grafos completos. Como vimos en el Capítulo 2,  $\chi(K_n) = n$ , y es obvio que  $\omega(K_n) = n$  para todo  $n \geq 1$ , luego  $\chi(K_n) = \omega(K_n)$  para todo  $n \geq 1$ . Además, como todo subgrafo inducido de un grafo completo es completo se concluye que se trata de grafos perfectos.

En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de un grafo perfecto que no es completo. El número cromático de este grafo es 4, pues como vemos en la Figura 3.1, este grafo es 4-coloreable ( $\chi(G) \leq 4$ ) y además el grafo contiene un clique de tamaño 4 ( $\chi(G) \geq 4$ ). Este clique de tamaño 4 es máximo y hemos representado en rojo sus aristas. Se tiene por tanto que el número cromático es igual al número de clique, y analizando el grafo es posible observar que esto se cumple también en cualquier subgrafo inducido y propio.

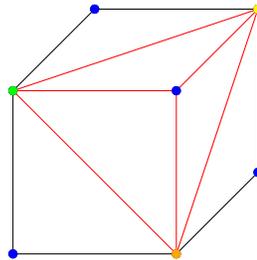


Figura 3.1: Ejemplo de un grafo perfecto

En el artículo [3] escrito por C.A. Francisco, H.T. Hà y A. Van Tuyl en el año 2010, se demuestra el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.** *Si  $G$  es un grafo perfecto, entonces  $J(G)$  tiene la propiedad de persistencia.*

En este momento, los experimentos computacionales sugerían que este teorema se cumpliría para cualquier grafo  $G$ , es decir, el ideal de cubierta  $J(G)$  tendría la propiedad de persistencia, pero no se había demostrado. Esto dio lugar a la siguiente conjetura.

**Conjetura 3.5.** Todo ideal de cubierta tiene la propiedad de persistencia.

En el artículo [4], escrito por C.A. Francisco, H.T. Hà y A. Van Tuyl, se pudo probar que existía un resultado de teoría de grafos cuya veracidad implicaría la de la Conjetura 3.5, pero no se consiguió demostrar ni refutar este resultado hasta años más tarde. Presentamos dicho resultado a continuación.

### 3.1. Una conjetura clave en teoría de grafos para la propiedad de persistencia

Como ya hemos comentado, vamos a presentar una conjetura que se encuadra en el marco de la teoría de grafos y que, de ser cierta, implicaría la veracidad de la Conjetura 3.5. Introduciremos previamente un par de definiciones.

**Definición 3.6.** Diremos que un grafo  $G$  es críticamente  $k$ -cromático si es  $k$ -cromático y para cada  $x \in V(G)$ ,  $\chi(G \setminus \{x\}) < k$ .

**Ejemplo 3.7.** Sea  $K_n$  el grafo completo de tamaño  $n$ . Entonces, vimos en el Capítulo 2 que  $\chi(K_n) = n$ , luego es  $n$ -cromático. Además, si eliminamos un vértice  $x$ , obtenemos el grafo  $K_{n-1}$ , y su número cromático es  $n - 1$ . Por tanto,  $K_n$  es críticamente  $n$ -cromático.

**Definición 3.8.** Sea  $W \subseteq V(G)$ . La expansión de  $G$  en  $W$ , denotada por  $G[W]$ , es el grafo que se obtiene añadiendo un nuevo vértice  $x'_i$  para cada  $x_i \in W$  y conectando el nuevo vértice con  $x_i$  y con todos los vértices adyacentes a  $x_i$  (esto es, con los  $x_j \in V(G)$  tales que  $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ ). A este nuevo vértice  $x'_i$  le llamaremos clon de  $x_i$ .

*Nota.* Notamos que la expansión es un concepto distinto a la paralelización del capítulo anterior. Aunque en ambas el clon se une con todos los vértices adyacentes al vértice del que procede, en la expansión añadimos una arista entre el vértice duplicado y su clon, cosa no se hace en la paralelización.

**Ejemplo 3.9.** Consideramos el grafo  $G$  representado a la izquierda en la Figura 3.2. Sea  $W = \{x_1\}$ , entonces la expansión de  $G$  en  $W$  se observa a la derecha en dicha figura.

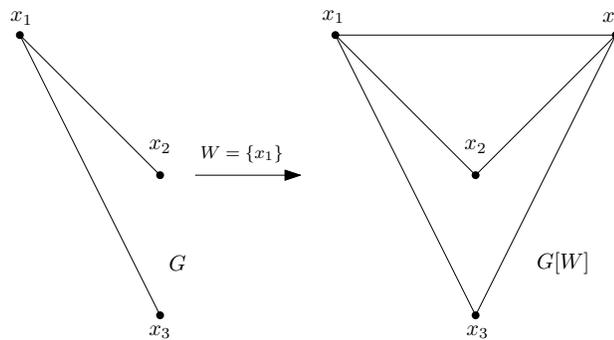


Figura 3.2: Ejemplo de una expansión de un grafo

C. A. Francisco, H. T. Hà y A. Van Tuyl, motivados por la Conjetura 3.5 plantearon la siguiente conjetura en [4].

**Conjetura 3.10.** Sea  $s$  un entero positivo, y sea  $G$  un grafo finito simple que es críticamente  $s$ -cromático. Entonces existe un subconjunto  $W \subseteq V(G)$  tal que  $G[W]$  es un grafo críticamente  $(s + 1)$ -cromático.

Además, en ese mismo artículo se probó que si la Conjetura 3.10 perteneciente a la teoría de grafos era cierta entonces la Conjetura 3.5 también lo sería.

**Teorema 3.11.** *Si la Conjetura 3.10 es cierta, entonces todos los ideales de cubierta  $J(G)$  tienen la propiedad de persistencia.*

**Ejemplo 3.12.** La Conjetura 3.10 es cierta para todos los ciclos impares (es decir, los grafos críticamente 3-cromáticos; ver [4] para una demostración). Ilustramos este resultado para el grafo  $C_5$ . Si expandimos este grafo en los vértices  $W = \{x_2, x_5\}$ , obtenemos el grafo de la Figura 3.3, que es críticamente 4-cromático.

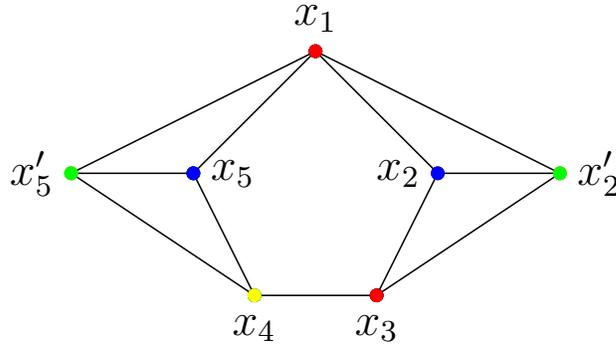


Figura 3.3: 4-coloración del grafo  $C_5[W]$

### 3.2. Construcción de un contraejemplo

En enero de 2014, T. Kaiser, M. Stehlik y R. Skrekovski publicaron un artículo ([9]) en el que presentaron un contraejemplo a la Conjetura 3.10. Si bien esto no implica directamente que existan ideales de cubierta que carecen de la propiedad de persistencia, la construcción de este contraejemplo permite refutar también la Conjetura 3.5, como veremos posteriormente. Veamos dicha construcción.

Para un entero positivo  $n$ ,  $[n]$  denotará el conjunto  $\{0, \dots, n - 1\}$ . Sea  $K_3$  el grafo completo cuyos vértices están en el grupo  $\mathbb{Z}_3$ , y sea  $P_n$  un camino con conjunto de vértices  $[n]$ , los cuales están colocados en orden creciente a lo largo de  $P_n$ . Recordamos que un camino es una sucesión alterna de vértices distintos y aristas de la forma  $\{v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n\}$  donde  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$  es la arista que une los vértices  $v_{i-1}$  y  $v_i$ .

Damos a continuación la definición del producto cartesiano de grafos, que utilizaremos seguidamente para definir la familia de grafos a estudiar.

**Definición 3.13.** Sean  $G$  y  $H$  dos grafos. El producto cartesiano de los grafos  $G$  y  $H$ , denotado por  $G \square H$ , es un grafo con conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$ , y donde dos vértices  $(u, v), (u', v')$  serán adyacentes si:

- $u = u'$  y  $v$  es adyacente a  $v'$  en  $H$ , o
- $v = v'$  y  $u$  es adyacente a  $u'$  en  $G$ .

**Definición 3.14.** Para  $n \geq 4$ , definimos  $H_n$  como el grafo obtenido a partir del producto cartesiano  $P_n \square K_3$  añadiendo las tres aristas que unen  $(0, j)$  a

$(n - 1, -j)$  para  $j \in \mathbb{Z}_3$ .

*Notación.* Sea  $i \in [n]$  y  $j \in \mathbb{Z}_3$ . Se define la  $i$ -ésima columna de  $H_n$  como el conjunto  $C_i = \{i\} \times \mathbb{Z}_3$ . De forma análoga, la  $j$ -ésima fila de  $H_n$  es  $R_j = [n] \times \{j\}$ . El vértice en  $C_i \cap R_j$  se denota por  $v_{i,j}$ .

Se puede ver un ejemplo del grafo  $H_4$  en la Figura 3.4.

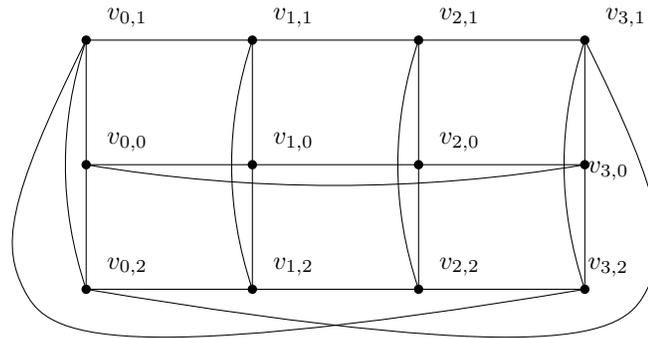


Figura 3.4: Grafo  $H_4$

La construcción de esta familia infinita de grafos la dio T. Gallai en 1963 ([5]). Notamos que estos grafos son 4-regulares, es decir, todos los vértices son de grado 4. Además, se puede ver que son 4-cromáticos y todo subgrafo propio se puede colorear con 3 colores. Este fue el primer ejemplo de un grafo  $k$ -cromático sin vértices de grado  $k - 1$  tal que todo subgrafo propio es  $(k - 1)$ -coloreable.

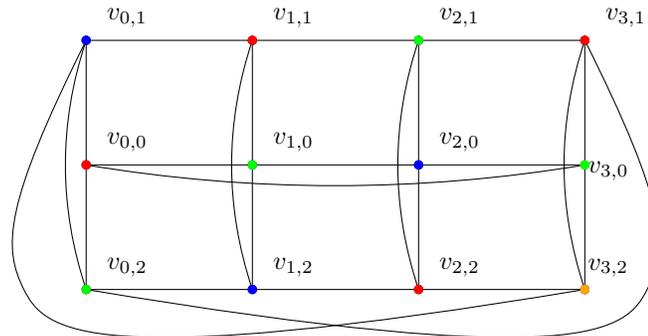


Figura 3.5: Una 4-coloración del grafo  $H_4$

Nos centraremos ahora en ver que los grafos de T. Gallai,  $H_n$ , son un contraejemplo a la Conjetura 3.10:

**Teorema 3.15.** *Para cualquier  $n \geq 4$  y cualquier  $W \subseteq V(H_n)$ , el grafo  $H_n[W]$  no es críticamente 5-cromático.*

Dividiremos la demostración de este teorema en dos partes. En primer lugar, demostraremos que para ciertos conjuntos  $W$ , el número cromático de  $H_n[W]$  es al menos 5, pero  $H_n[W]$  no es críticamente 5-cromático (Lema 3.16). Después, probaremos que para cualquier otro conjunto  $W$ ,  $H_n[W]$  es 4-cromático (Proposición 3.29).

*Notación.* Al nuevo vértice obtenido de la duplicación de  $v_{i,j} \in W$  en  $H_n[W]$  se le denotará por  $v'_{i,j}$ .

Sea  $i \in [n]$ . Denotamos por  $X_i$  al clique en  $H_n[W]$  formado por los vértices de  $C_i$  y sus clones. Además, llamaremos  $Y_i$  al subgrafo inducido de  $H_n[W]$  con conjunto de vértices  $V(X_i) \cup V(X_{i+1})$  (donde  $i+1$  es una suma módulo  $n$ ).

**Lema 3.16.** *Sea  $n \geq 4$  y sea  $W \subseteq V(H_n)$ . En cada uno de los siguientes casos, el grafo  $H_n[W]$  tiene número cromático al menos 5 y no es críticamente 5-cromático:*

- (a) *Existe algún  $i \in [n]$  tal que el conjunto  $W \cap C_i$  tiene cardinal al menos 2.*
- (b)  *$W$  contiene al menos  $n - 1$  vértices de la fila  $R_0$  y  $n$  es impar.*
- (c) *El subgrafo inducido de  $H_n$  en  $W \setminus R_0$  contiene un camino con al menos  $n$  vértices y  $n$  es par.*

*Demostración.* (a) Supongamos que  $W \cap C_i$  tiene cardinal al menos 2, así que  $|V(X_i)| \geq 5$  (puesto que  $C_i$  tiene 3 vértices y hay al menos 2 clones). Dado que  $H_n[W]$  contiene al clique  $X_i$  como un subgrafo propio, no es ni 4-coloreable ni es críticamente 5-cromático.

- (b) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $W$  contiene  $R_0 \setminus \{v_{n-1,0}\}$ . Además, estamos bajo la hipótesis de que  $n$  es impar. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo en primer lugar que  $H_n[W]$  es 4-coloreable. Sea  $c$  una coloración de  $H_n[W]$  con cuatro colores  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

Por simetría, podemos suponer que los vértices  $v_{0,0}$  y  $v'_{0,0}$  tienen los colores 1 y 2 de  $c$ . Esto fuerza a que los pares de colores asignados a  $v_{i,0}$

y  $v'_{i,0}$  se alternen entre  $\{1, 2\}$  y  $\{3, 4\}$  a medida que  $i$  aumenta. Entonces, al ser  $n$  impar,  $v_{n-1,0}$  está unido a vértices que tienen los 4 colores distintos de  $c$ , ya que por construcción en  $H_n[W]$  se tienen las aristas:  $\{v_{0,0}, v_{n-1,0}\}$ ,  $\{v_{n-2,0}, v_{n-1,0}\}$ ,  $\{v'_{0,0}, v_{n-1,0}\}$  y  $\{v'_{n-2,0}, v_{n-1,0}\}$  (ver Figura 3.6, en la que las aristas añadidas al expandir  $H_n$  en  $W$  se representan en color gris, mientras que las aristas discontinuas resaltan la conexión del vértice coloreado con un quinto color con los vértices de los otros cuatro colores). En consecuencia  $H_n[W]$  no es 4-coloreable.

El subgrafo  $H_n[W] \setminus \{v_{1,2}\}$  no es 4-coloreable, pues en la anterior coloración solo estaba implicada la fila  $R_0$ . Concluimos así que  $H_n[W]$  no es críticamente 5-cromático.

- (c) Supongamos que  $n$  es par y que el subgrafo inducido por  $W \setminus R_0$  contiene un camino con al menos  $n$  vértices. Por simetría, asumimos que  $R_1 \subseteq W$ . Veamos que  $H_n[W]$  no es 4-coloreable razonando por reducción al absurdo. Supongamos que sí lo es. Por un razonamiento análogo al del apartado (b), se tiene que los vértices  $v_{0,1}$ ,  $v'_{0,1}$ ,  $v_{n-1,1}$  y  $v'_{n-1,1}$  tienen colores distintos (ver Figura 3.7). Además, todos estos vértices son adyacentes a  $v_{n-1,2}$ , al que entonces habrá que colorear de un nuevo color, por lo que entramos en contradicción.

También tenemos que  $H_n[W]$  no es críticamente 5-cromático. Como en la coloración descrita en el párrafo anterior no está implicada la fila  $R_0$ , el subgrafo  $H_n[W] \setminus \{v_{0,0}\}$  no es 4-coloreable.  $\square$

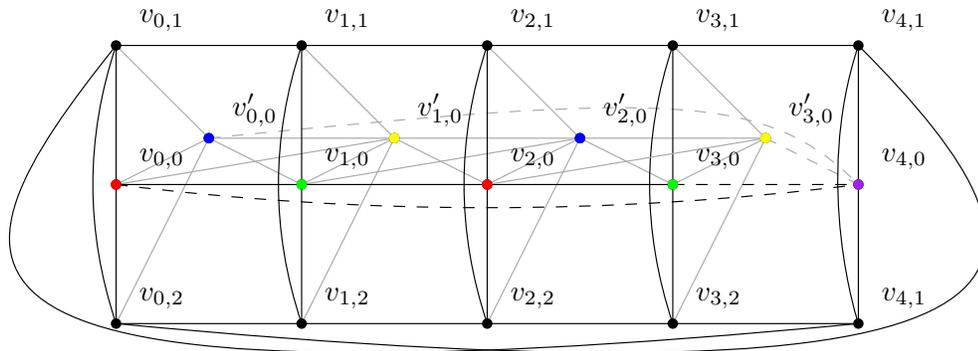


Figura 3.6: Ilustración de la prueba del apartado (b)

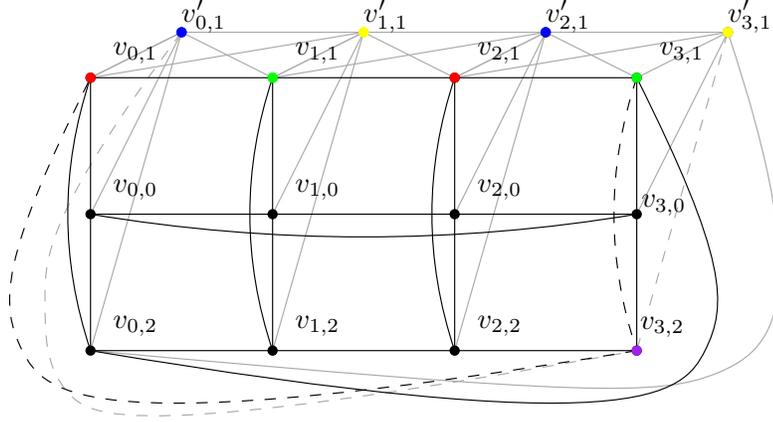


Figura 3.7: Ilustración de la prueba del apartado (c)

Para probar la proposición que nos falta para finalizar la demostración del Teorema 3.15, será necesario presentar ciertos conceptos y resultados previos. El siguiente lema nos servirá para garantizar una condición de gran relevancia en la demostración de la Proposición 3.29.

**Lema 3.17.** *Si  $W \subseteq V(H_n)$  no satisface ninguna de las condiciones (a) – (c) en el Lema 3.16, entonces existe un conjunto  $Z$  tal que  $W \subseteq Z \subseteq V(H_n)$ ,  $Z$  contiene exactamente un vértice de cada  $C_i$  ( $i \in [n]$ ) y  $Z$  sigue sin cumplir (a) – (c).*

*Demostración.* Como  $W$  no satisface la condición (a), contiene como mucho un vértice de cada  $C_i$  para  $i \in [n]$ . Tenemos dos casos:

1.  $W \cap C_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in [n]$ . Si consideramos  $Z = W$  se tiene.
2.  $W \cap C_i = \emptyset$  para algún  $i \in [n]$ . Podemos afirmar que existe un  $w \in C_i$  tal que el conjunto  $W \cup \{w\}$  no satisface las condiciones (a) – (c):

Si  $W \cup \{v_{i,0}\}$  satisface alguna de las condiciones, deberá ser la (b) (porque  $v_{i,0} \in R_0$ , luego si  $W$  no cumple (c),  $W \cup \{v_{i,0}\}$  tampoco). Entonces,  $n$  tiene que ser impar. En este caso,  $W \cup \{v_{i,1}\}$  no cumple ninguna de las condiciones, puesto que tendría  $n - 2$  vértices de la fila  $R_0$  y  $n$  es impar.

Si para cada  $i$  tal que  $W \cap C_i = \emptyset$ , añadimos vértices de esta forma, llegamos a un conjunto  $Z$  con las propiedades deseadas. □

Supongamos ahora que  $W \subseteq V(H_n)$  es un conjunto que no satisface ninguna de las condiciones del Lema 3.16. Gracias al Lema 3.17, en la prueba de la Proposición 3.29 veremos que además podemos suponer que

$$|W \cap C_i| = 1 \text{ para todo } i \in [n].$$

Notemos que en este caso  $X_i$  tendrá 4 vértices. Para cada  $i \in [n]$ , llamaremos  $w_i$  al único elemento de  $\mathbb{Z}_3$  tal que  $W \cap C_i = \{v_{i,w_i}\}$ , es decir, para cada columna  $i \in [n]$ ,  $w_i$  es el elemento de  $\mathbb{Z}_3$  que coincide con la fila en la que se encuentra el vértice duplicado en dicha columna.

Codificamos el conjunto  $W$  a través de una sucesión de signos, definida como sigue.

**Definición 3.18.** Una sucesión de signos  $\sigma$  es una sucesión de elementos de  $\mathbb{Z}_3$ . A menudo, representaremos con ‘+’ el elemento 1 y ‘-’ el elemento 2 (que coincide con  $-1$ ).

Por ejemplo, la sucesión de signos  $(0 + - +)$  representa la sucesión  $(0, 1, 2, 1)$ .

Al conjunto  $W \subseteq V(H_n)$ , le asignamos la sucesión de signos  $\sigma^W = s_0 \dots s_{n-1}$ , donde cada  $s_i \in \mathbb{Z}_3$  se define como

$$s_i = \begin{cases} w_{i+1} - w_i & \text{si } 0 \leq i \leq n-2, \\ -w_0 - w_{n-1} & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

El cambio de signo en el último caso refleja el hecho de que el vértice  $v_{n-1,-j}$  es adyacente al vértice  $v_{0,j}$ , en lugar de al vértice  $v_{0,-j}$ . Para entender la naturalidad en la definición de  $s_{n-1}$  puede ayudarnos ver  $H_n$  como el grafo obtenido a partir del producto cartesiano  $P_{n+1} \square K_3$  identificando los vértices  $(0, j)$  y  $(n, -j)$  para cada  $j \in \mathbb{Z}_3$ . Entonces es natural definir  $w_n$  como  $-w_0$ , en cuyo caso  $s_{n-1}$  es precisamente  $w_n - w_{n-1} = -w_0 - w_{n-1}$ .

Para describir una 4-coloración del clique de tamaño cuatro  $X_i$  en  $H_n[W]$  ( $i \in [n]$ ), introducimos la noción de patrón. Se trata de una partición del conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  en tres partes, con una parte de tamaño 2 y el resto de tamaño 1. Dos patrones que solo se diferencian por una permutación cíclica de las partes (sin alterar el contenido de estas) se consideran idénticos. Se dice que dos colores contenidos en la parte de tamaño 2 están emparejados.

Dada una 4-coloración  $c$  de  $X_i$ , el correspondiente patrón de  $X_i$  se define como

$$\pi(c) = (\{c(v_{i,w_i}), c(v'_{i,w_i})\}, \{c(v_{i,w_i+1})\}, \{c(v_{i,w_i+2})\}).$$

Usaremos una notación más precisa para los patrones: en lugar de escribir  $(\{1, 2\}, \{3\}, \{4\})$  escribiremos  $12 \cdot 3 \cdot 4$ . Notemos que un patrón no determina una coloración de forma única ya que no especifica el orden de los colores emparejados.

Determinemos ahora las posibles combinaciones de patrones de  $X_i$  y  $X_{i+1}$  en una coloración válida de  $Y_i$ , que recordamos que es el subgrafo inducido de  $H_n[W]$  con conjunto de vértices  $V(X_i) \cup V(X_{i+1})$ . Supongamos que  $c_0$  es una coloración de  $X_0$  con patrón  $12 \cdot 3 \cdot 4$ , y sea  $s = w_1 - w_0$ . Se puede comprobar fácilmente que, considerando los posibles valores de  $s$ , el conjunto de patrones de  $X_1$  correspondientes a una extensión válida de  $c_0$  es:

$$\begin{array}{llll} 12 \cdot 3 \cdot 4 & 14 \cdot 2 \cdot 3 & 24 \cdot 1 \cdot 3 & \text{si } s = 1, \\ 12 \cdot 3 \cdot 4 & 13 \cdot 4 \cdot 2 & 23 \cdot 4 \cdot 1 & \text{si } s = -1, \\ 34 \cdot 1 \cdot 2 & 34 \cdot 2 \cdot 1 & & \text{si } s = 0. \end{array}$$

Observamos estas combinaciones en la Figura 3.8 donde hemos supuesto que  $w_0 = 0$ . En dicha figura se muestra la coloración de  $Y_0$  en el subgrafo inducido en  $H_n[W]$  por los vértices de  $C_0 \cup C_1$ . Los vértices duplicados se representan con un círculo vacío, y el resto de vértices con un punto sólido.

Se dice que los patrones de la primera fila de la clasificación anterior son +-compatibles con  $12 \cdot 3 \cdot 4$ . De la misma forma se definen a partir de la segunda y la tercera fila las nociones de --compatibilidad y 0-compatibilidad, respectivamente. Aplicando una permutación adecuada al conjunto de colores, podemos extender esta definición a cualquier otro patrón de  $x_0$  en lugar de  $12 \cdot 3 \cdot 4$ .

Del mismo modo, esto se puede aplicar a cualquier otro patrón de  $X_i$  y  $X_{i+1}$ , donde  $1 \leq i \leq n - 2$ . Para  $i = n - 1$ , tenemos que tener en cuenta el “giro” en  $Y_{n-1}$ :

Para una coloración válida de  $Y_{n-1}$ , el patrón  $\pi$  inducido por  $X_{n-1}$  y el patrón  $\rho$  inducido por  $X_0$  tienen la propiedad de que  $\bar{\rho}$  es  $s'$ -compatible con  $\pi$ , donde  $\bar{\rho}$  es el inverso de  $\rho$  (el patrón obtenido invirtiendo el orden de las dos partes de tamaño uno en  $\rho$ ) y  $s' = -w_0 - w_{n-1}$ .

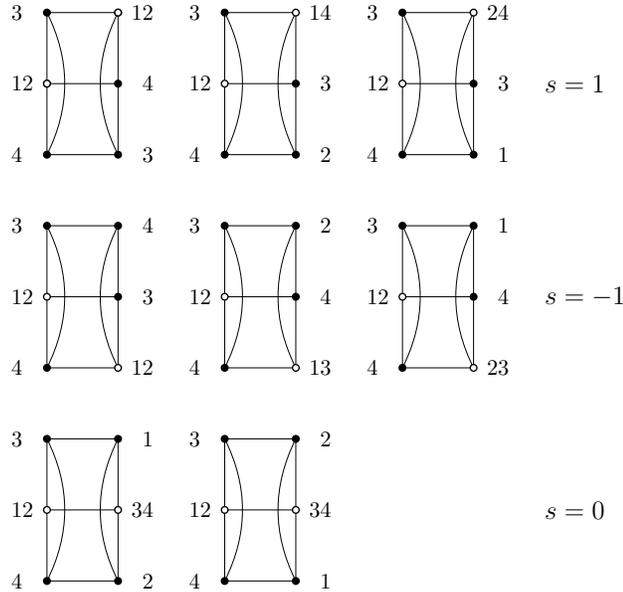


Figura 3.8: Coloraciones válidas de  $Y_0$  tales que el patrón de  $X_0$  es  $12 \cdot 3 \cdot 4$

Es posible dar una descripción de los patrones que son  $\pm$ -compatibles con un determinado patrón  $\pi = xy \cdot z \cdot w$  de forma sencilla.

Uno de ellos es el propio  $\pi$ . Para obtener el resto, elegimos un color que está emparejado a otro en  $\pi$ , por ejemplo  $x$ ; desplazamos  $x$  a la parte que está inmediatamente a la derecha; y hacemos lo mismo con las partes de tamaño 1 de forma cíclica hasta obtener el patrón  $wy \cdot x \cdot z$ . Intercambiando  $x$  con  $y$  obtenemos el otro patrón  $\pm$ -compatible con  $\pi$ , que es  $xw \cdot y \cdot z$ . Invertiendo el sentido del desplazamiento, obtenemos los patrones  $--$ -compatibles. Por último, para obtener los dos patrones  $0$ -compatibles, la parte de tamaño 2 estará compuesta por los dos colores que no están emparejados en  $\pi$ , y las partes de tamaño 1 estarán formadas por los otros dos colores, eligiendo cualquiera de las dos posibles ordenaciones.

Representamos la noción de compatibilidad de patrones usando un grafo auxiliar  $D$ , en el que permitimos tanto aristas dirigidas (esto se refiere a aristas que tienen un sentido concreto) como no dirigidas, así como lazos dirigidos. El conjunto de vértices de  $D$  es el conjunto de los 12 patrones. Los patrones  $\pi$  y  $\rho$  están unidos por una arista no dirigida y discontinua si son  $0$ -compatibles. Hay una arista dirigida de  $\pi$  a  $\rho$  si  $\rho$  es  $\pm$ -compatible con  $\pi$

(o equivalentemente, si  $\pi$  es  $--$ -compatible con  $\rho$ ). Además,  $D$  tiene un lazo dirigido en cada vértice, lo que refleja el hecho de que un patrón es tanto  $+$ -compatible como  $--$ -compatible consigo mismo. Se muestra el grafo  $D$  en la Figura 3.9 (se han omitido los lazos para simplificar el dibujo).

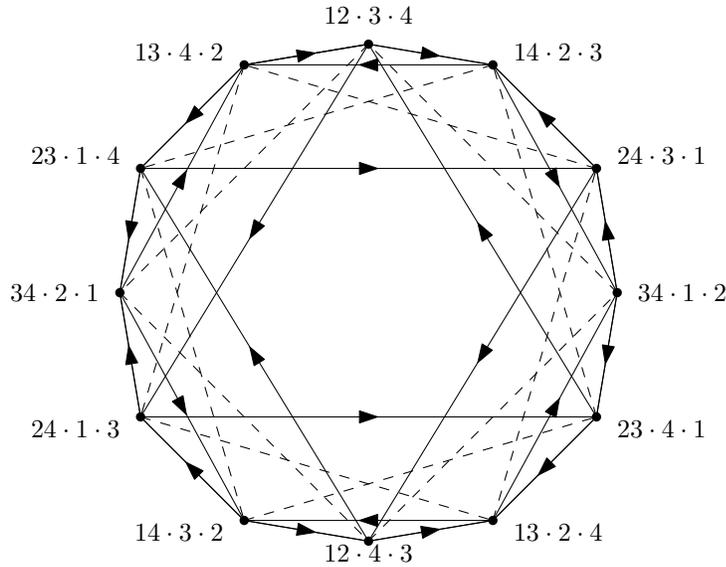


Figura 3.9: Grafo auxiliar  $D$

**Definición 3.19.** Sea  $\sigma = s_0 \dots s_k$  una sucesión de signos. Un  $\sigma$ -recorrido  $S$  es una sucesión  $\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{k+1}$ , donde cada  $\pi_i$  ( $0 \leq i \leq k+1$ ) es un vértice de  $D$  y se cumple una de las siguientes condiciones para cada  $j$  ( $0 \leq j \leq k$ ):

- $s_j = 0$  y  $D$  contiene una arista no dirigida con vértices  $\pi_j$  y  $\pi_{j+1}$ ,
- $s_j = 1$  y hay una arista dirigida de  $\pi_j$  a  $\pi_{j+1}$ ,
- $s_j = -1$  y hay una arista dirigida de  $\pi_{j+1}$  a  $\pi_j$ .

Un  $\sigma$ -recorrido como en la definición se dice que empieza en  $\pi_0$  y termina en  $\pi_{k+1}$  (o es un  $\sigma$ -recorrido de  $\pi_0$  a  $\pi_{k+1}$ ).

**Ejemplo 3.20.** Si  $\sigma = (- - + 0 + -)$ , entonces en la Figura 3.10 podemos ver que un  $\sigma$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $12 \cdot 4 \cdot 3$  es

$$(12 \cdot 3 \cdot 4, 13 \cdot 4 \cdot 2, 34 \cdot 2 \cdot 1, 14 \cdot 3 \cdot 2, 23 \cdot 4 \cdot 1, 13 \cdot 2 \cdot 4, 12 \cdot 4 \cdot 3).$$

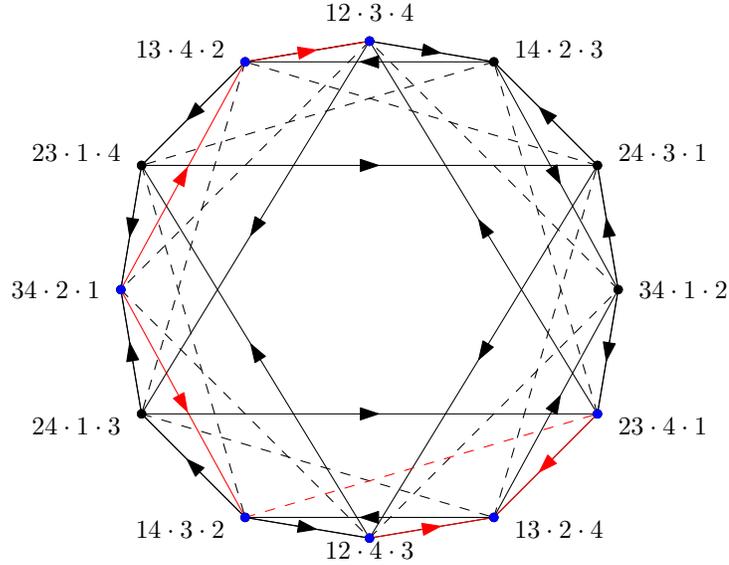


Figura 3.10: Camino resaltado en  $D$  que confirma la validez del  $\sigma$ -recorrido del Ejemplo 3.20

**Definición 3.21.** Sea  $\sigma$  una sucesión de signos. Diremos que:

- $\sigma$  es invertible si hay un  $\sigma$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $34 \cdot 1 \cdot 2$ .
- $\sigma$  es buena si existe un  $\sigma$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $12 \cdot 4 \cdot 3$ .

*Nota.* Notemos que  $\sigma$  también es invertible si hay un  $\sigma$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $34 \cdot 2 \cdot 1$ , puesto que podemos intercambiar los colores 1 y 2.

El nombre de sucesión de signos buena se debe al siguiente lema.

**Lema 3.22.** Si  $\sigma^W$  es buena, entonces el grafo  $H_n[W]$  es 4-coloreable.

*Demostración.* Sea  $\sigma^W = s_0 \dots s_{n-1}$  y sea  $S = \pi_0 \pi_1 \dots \pi_n$  un  $\sigma^W$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $12 \cdot 4 \cdot 3$ . Para cada  $i = 0, \dots, n-1$ , se colorean los vértices de  $X_i$  de tal forma que el patrón sea  $\pi_i$ . Por definición, cada  $\pi_i$  ( $0 \leq i \leq n-2$ ) es  $s_i$ -compatible con  $\pi_{i+1}$ , y así  $Y_i$  está coloreado correctamente.

Falta comprobar la coloración de  $Y_{n-1}$ . Como vimos anteriormente,  $Y_{n-1}$  está coloreado correctamente si el inverso  $\bar{\pi}_0$  de  $\pi_0$  (que es  $12 \cdot 4 \cdot 3$ ) es  $s_{n-1}$ -compatible con  $\pi_{n-1}$ . Como se tiene que  $\pi_{n-1}$  es  $s_{n-1}$ -compatible con  $\pi_n$  (por

definición de  $\sigma$ -recorrido) y  $\pi_n = 12 \cdot 4 \cdot 3$ , concluimos que  $\bar{\pi}_0 = 12 \cdot 4 \cdot 3 = \pi_n$  es  $s_{n-1}$ -compatible con  $\pi_{n-1}$ .  $\square$

Para una sucesión de signos  $\sigma$ , denotamos por  $-\sigma$  a la sucesión de signos obtenida al remplazar cada signo  $-$  por un signo  $+$ , y viceversa.

**Lema 3.23.** *Si  $\sigma$  es buena, entonces  $-\sigma$  es buena.*

*Demostración.* Inspeccionando la Figura 3.9 o directamente a partir de la definición, podemos observar que si  $D$  tiene una arista dirigida de  $\pi$  a  $\rho$ , entonces también tiene una arista dirigida de  $\bar{\rho}$  a  $\bar{\pi}$ , y se puede hacer una observación análoga con las aristas no dirigidas. Por esta razón, si  $S = (\pi_0, \dots, \pi_k)$  es un  $\sigma$ -recorrido, entonces  $\bar{S} = (\bar{\pi}_0, \dots, \bar{\pi}_k)$  es un  $(-\sigma)$ -recorrido. Además, si  $\sigma$  es buena, entonces existe un  $(-\sigma)$ -recorrido  $\bar{S}$  que empieza por  $12 \cdot 4 \cdot 3$  y termina en  $12 \cdot 3 \cdot 4$ . Intercambiando los colores 3 y 4 en cada patrón en  $\bar{S}$ , obtenemos un  $(-\sigma)$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $12 \cdot 4 \cdot 3$ . Luego, si  $\sigma$  es buena,  $-\sigma$  también lo será.  $\square$

**Definición 3.24.** Sea  $\sigma = s_0 \dots s_{k-1}$  una sucesión de signos, y sean  $\pi$  y  $\rho$  patrones entre los cuales hay una arista no dirigida en  $D$  (que por tanto son 0-compatibles). Se define  $S(\sigma; \pi, \rho) = \pi_0 \dots \pi_k$  como un  $\sigma$ -recorrido que cumple:

1.  $\pi_0 = \pi$ ,
2. si  $s_i \neq 0$ , entonces  $\pi_{i+1} = \pi_i$  (donde  $0 \leq i \leq k-1$ ),
3. si  $s_i = 0$ , entonces  $\pi_{i+1}$  es el vértice en  $\{\pi, \rho\}$  distinto de  $\pi_i$  (donde  $0 \leq i \leq k-1$ ).

Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  dos sucesiones de signos y sea  $\sigma$  su concatenación. Si  $P = (\pi_0, \dots, \pi_k)$  es un  $\sigma_1$ -recorrido y  $R = (\rho_0, \dots, \rho_l)$  es un  $\sigma_2$ -recorrido tal que  $\pi_k = \rho_0$ , entonces la composición de  $P$  y  $R$  es el  $\sigma$ -recorrido

$$P \circ R = (\pi_0, \dots, \pi_k, \rho_1, \dots, \rho_l).$$

**Definición 3.25.** Para una sucesión de signos  $\sigma$ , denotaremos por  $z(\sigma)$  al número de veces módulo 2 que aparece el símbolo 0 en  $\sigma$ .

**Observación 3.26.** Sea  $\sigma$  una sucesión de signos y  $\pi, \rho$  patrones entre los que hay una arista no dirigida en  $D$ . Entonces el  $\sigma$ -recorrido  $S(\sigma; \pi, \rho)$  que empieza por  $\pi$  satisface lo siguiente:

- (i) Si  $z(\sigma) = 0$ , entonces  $S(\sigma; \pi, \rho)$  termina en  $\pi$ .
- (ii) Si  $z(\sigma) = 1$ , entonces  $S(\sigma; \pi, \rho)$  termina en  $\rho$ .

Procedemos a definir un orden  $\preceq$  en el conjunto de sucesiones de signos.

**Definición 3.27.** Sean  $\tau, \sigma$  dos sucesiones de signos, donde  $\sigma = s_0 \dots s_k$ . Definimos  $\tau \preceq \sigma$  si existen índices  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_m \leq k$  tales que:

- $\tau = s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_m}$ ,
- si  $i_0 \neq 0$ ,  $z(s_0 s_1 \dots s_{i_0-1}) = 0$ , y
- para cada  $j$  tal que  $0 \leq j \leq m-1$ ,  $z(s_{i_{j+1}} \dots s_{i_{j+1}-1}) = 0$ .

Veamos un resultado que relaciona el orden presentado en la definición anterior con las sucesiones de signos buenas e invertibles, que será de gran utilidad en la demostración de la Proposición 3.29 puesto que nos llevará a diversas contradicciones:

**Lema 3.28.** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  dos sucesiones de signos tales que  $\tau \preceq \sigma$ . Entonces:

- (i) Si  $z(\sigma) = z(\tau)$  y  $\tau$  es buena, entonces  $\sigma$  es buena.
- (ii) Si  $z(\sigma) \neq z(\tau)$  y  $\tau$  es invertible, entonces  $\sigma$  es buena.

*Demostración.* Supongamos que  $\sigma = s_0 \dots s_k$  y  $\tau = s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_{m-1}}$ , donde  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{m-1} \leq k$ .

- (i) Como  $\tau$  es buena, existe un  $\tau$ -recorrido  $S = (\rho_0, \dots, \rho_m)$  de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $12 \cdot 4 \cdot 3$ .

Si  $i_0 \neq 0$ , denotamos por  $\sigma^0$  a la subsucesión de  $\sigma$  que va de  $s_0$  a  $s_{i_0-1}$ ; si  $i_0 = 0$ ,  $\sigma^0$  será vacío. Para  $j = 1, \dots, m-1$ , representamos por  $\sigma^j$  a la subsucesión de  $\sigma$  que va de  $s_{i_{j-1}+1}$  a  $s_{i_j-1}$ .

Para cada  $j = 0, \dots, m-1$ , se escoge un patrón  $\epsilon_j$  tal que  $\rho_j$  y  $\epsilon_j$  estén unidos por una arista no dirigida en el grafo  $D$ .

Por la tercera condición en la definición del orden  $\preceq$ , tenemos que  $z(\sigma^j) = 0$  para cada  $j = 0, \dots, m-1$ . Luego, por la Observación 3.26(i),

se tiene que  $S(\sigma^j; \rho_j, \epsilon_j)$  es un  $\sigma^j$ -recorrido de  $\rho_j$  a  $\rho_j$ . Así, la composición

$$S' = S(\sigma^0; \rho_0, \epsilon_0) \circ (\rho_0, \rho_1) \circ S(\sigma^1; \rho_1, \epsilon_1) \circ (\rho_1, \rho_2) \\ \circ \cdots \circ S(\sigma^{m-1}; \rho_{m-1}, \epsilon_{m-1}) \circ (\rho_{m-1}, \rho_m),$$

es un  $s_0 s_1 \dots s_{i_{m-1}}$ -recorrido válido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $12 \cdot 4 \cdot 3$ . Entonces, si  $i_{m-1} = k$  tendremos que  $\sigma$  es buena.

Si  $i_{m-1} < k$ , llamamos  $\sigma^m$  a la sucesión  $s_{i_{m-1}+1} \dots s_k$ . Teniendo en cuenta que  $z(\sigma^j) = 0$  para todo  $j = 0, \dots, m-1$ ,

$$z(\sigma^m) \equiv z(\sigma) - z(\tau) \pmod{2}.$$

Por hipótesis  $z(\sigma) = z(\tau)$ , luego  $z(\sigma^m) = 0$ . Entonces,

$$S'' = S(\sigma^m; 12 \cdot 4 \cdot 3, 12 \cdot 3 \cdot 4),$$

es un  $\sigma^m$ -recorrido de  $12 \cdot 4 \cdot 3$  a  $12 \cdot 3 \cdot 4$  (como consecuencia de la Observación 3.26 (i)).

Por tanto,  $S' \circ S''$  es un  $\sigma$ -recorrido que nos dice que  $\sigma$  es buena.

(ii) La demostración es similar a la de (i). En este caso, consideramos  $S = (\rho_0, \dots, \rho_m)$  un  $\tau$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $34 \cdot 1 \cdot 2$ .

Construyendo  $S'$  de la misma forma que antes, concluimos ahora que  $S'$  es un  $s_0 s_1 \dots s_{i_{m-1}}$ -recorrido válido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $34 \cdot 1 \cdot 2$ . Además, como  $z(\sigma) \neq z(\tau)$ , se tiene que  $z(\sigma^m) = 1$ . Luego el  $\sigma^m$ -recorrido  $S'' = S(\sigma^m; 34 \cdot 1 \cdot 2, 12 \cdot 4 \cdot 3)$  termina en  $12 \cdot 4 \cdot 3$  (por la Observación 3.26 (ii)). Entonces, la composición  $S' \circ S''$  es un  $\sigma$ -recorrido de  $12 \cdot 3 \cdot 4$  a  $12 \cdot 4 \cdot 3$ , como queríamos.  $\square$

**Proposición 3.29.** *Sea  $n \geq 4$  y sea  $W \subseteq V(H_n)$ . Si no se cumple ninguna de las condiciones (a) – (c) del Lema 3.16, entonces  $H_n[W]$  es 4-coloreable.*

*Demostración.* Sea  $W$  un conjunto que no cumple ninguna de las condiciones (a) – (c) del Lema 3.16. Por el Lema 3.17, existe un conjunto  $Z \subseteq V(H_n)$  tal que  $W \subseteq Z$  y la intersección de  $Z$  con  $C_i$  tiene exactamente un vértice para

cada  $i = 0, \dots, n - 1$ . Como  $H_n[W]$  es un subgrafo de  $H_n[Z]$ , es suficiente con probar la proposición bajo la hipótesis

$$|W \cap C_i| = 1 \text{ para todo } i \in [n].$$

Por tanto, suponemos que  $W$  cumple que  $|W \cap C_i| = 1$  para todo  $i \in [n]$ . Analizaremos diversos casos que nos permitirán asegurar que  $\sigma^W$  es buena, y así por el Lema 3.22 concluiremos que  $H_n[W]$  es 4-coloreable. Supongamos que  $\sigma^W$  no es buena y veamos que llegamos a distintas contradicciones.

**Caso 1.** Aparece al menos un 0 en  $\sigma^W$  y  $z(\sigma^W) = 0$ .

Como  $z(\sigma^W) = 0$ , hay un número par de 0 en  $\sigma^W$ . Luego, tomamos las dos primeras apariciones de 0 en  $\sigma^W$ . Como entre estos dos símbolos 0 no hay ninguno y antes de estos tampoco, es claro que  $(00) \preceq \sigma^W$ . Puesto que  $(00)$  es buena (ver Tabla 3.1) y  $z(00) = 0 = z(\sigma^W)$ , el Lema 3.28 dice que  $\sigma^W$  es buena, lo que lleva a una contradicción.

Tabla 3.1: Algunas sucesiones de signos  $\sigma$  buenas y los correspondientes  $\sigma$ -recorridos  $S$

$\sigma$	$S$
(00)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 34 \cdot 1 \cdot 2, 12 \cdot 4 \cdot 3$
(+ - +)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 14 \cdot 2 \cdot 3, 24 \cdot 3 \cdot 1, 12 \cdot 4 \cdot 3$
(+ + + +)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 14 \cdot 2 \cdot 3, 34 \cdot 1 \cdot 2, 24 \cdot 3 \cdot 1, 12 \cdot 4 \cdot 3$
(+ + + -)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 14 \cdot 2 \cdot 3, 13 \cdot 4 \cdot 2, 23 \cdot 1 \cdot 4, 12 \cdot 4 \cdot 3$
(+ + - -)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 14 \cdot 2 \cdot 3, 34 \cdot 1 \cdot 2, 13 \cdot 2 \cdot 4, 12 \cdot 4 \cdot 3$
(+ - - -)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 14 \cdot 2 \cdot 3, 24 \cdot 3 \cdot 1, 23 \cdot 1 \cdot 4, 12 \cdot 4 \cdot 3$
(0 + +)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 34 \cdot 1 \cdot 2, 24 \cdot 3 \cdot 1, 12 \cdot 4 \cdot 3$
(0 + 00 -)	$12 \cdot 3 \cdot 4, 34 \cdot 1 \cdot 2, 23 \cdot 4 \cdot 1, 14 \cdot 3 \cdot 2, 23 \cdot 1 \cdot 4, 12 \cdot 4 \cdot 3$

**Caso 2.** En  $\sigma^W$  no aparece ningún 0.

Por el Lema 3.23, podemos suponer que  $s_0 = +$ . Si  $(+ - +) \preceq \sigma^W$ , entonces  $\sigma^W$  es buena por el Lema 3.28(i), ya que como vemos en la Tabla 3.1  $(+ - +)$  es buena. Supongamos entonces que  $(+ - +) \not\preceq \sigma^W$ . Dado que  $n \geq 4$ , podemos considerar la subsucesión  $\sigma' = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  de  $\sigma^W$  de longitud 4. Para evitar la sucesión  $(+ - +)$ , necesariamente

tenemos que

$$\sigma' \in \{(++++) , (+++-) , (++++-), (+---)\}.$$

Se puede observar en la [Tabla 3.1](#) que todos estos posibles valores de  $\sigma'$  son sucesiones de signos buenas. Ya que  $\sigma' \preceq \sigma^W$  y  $z(\sigma') = 0 = z(\sigma^W)$ , de nuevo por el [Lema 3.28\(i\)](#),  $\sigma^W$  es buena. Llegamos de nuevo a una contradicción.

**Caso 3.**  $z(\sigma^W) = 1$ .

Que  $W$  no cumpla las condiciones (b) y (c) del [Lema 3.16](#) quiere decir que  $W$  no tiene todos los vértices de ninguna fila, y como  $z(\sigma^W) = 1$  sabemos que al menos hay un vértice de la fila 0. Por tanto, aplicando una simetría adecuada al grafo  $H_n$ , podemos suponer que  $s_0 = 0 \neq s_1$ . Además, podemos suponer que  $s_1 = +$ , aplicando el [Lema 3.23](#).

La sucesión  $(0++)$  es buena (ver [Tabla 3.1](#)) y  $z(0++) = z(\sigma^W)$ . Como consecuencia  $(0++) \not\preceq \sigma^W$  (si no contradecimos el [Lema 3.28](#)), y por simetría,  $(0--) \not\preceq \sigma^W$ . Si  $0 \notin \{s_2, s_3\}$ , teniendo en cuenta que  $s_0s_1s_2s_3 = 0 + s_2s_3$ :

- Si  $s_2 = +$  o  $s_3 = +$ , entonces  $(0++) \preceq \sigma^W$ .
- Si  $s_2 = s_3 = -$ , entonces  $(0--) \preceq \sigma^W$ .

Luego para que se cumpla que  $(0++) \not\preceq \sigma^W$  y  $(0--) \not\preceq \sigma^W$ , es necesario que  $0 \in \{s_2, s_3\}$ . Elegimos el menor  $j$  tal que  $j \geq 2$  y  $s_j = 0$ .

Veamos que existe  $k > j$  tal que  $s_k \neq 0$ . Supongamos lo contrario. Como la suma de todos los  $s_i \in \mathbb{Z}_3$  ( $i \in [n]$ ) es

$$\sum_{i=0}^{n-1} s_i = (w_1 - w_0) + (w_2 - w_1) + \dots + (w_{n-1} - w_{n-2}) + (-w_0 - w_{n-1}) = w_0,$$

tenemos dos posibilidades:

1.  $\sigma^W = (0 + -00\dots 0)$ . Luego  $w_0 = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = 0$ , por lo que:

$$\begin{aligned} w_1 - w_0 = 0 &\Rightarrow w_1 = 0, \\ w_2 - w_1 = 1 &\Rightarrow w_2 = 1, \\ w_3 - w_2 = -1 &\Rightarrow w_3 = 0, \\ w_4 - w_3 = 0 &\Rightarrow w_4 = 0, \\ &\vdots \\ w_{n-1} - w_{n-2} = 0 &\Rightarrow w_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que hay  $n - 1$  vértices de la fila  $R_0$  en  $W$ , lo que contradice que no se verifica la condición (b) del Lema 3.16.

2.  $\sigma^W = (0 + 00\dots 0)$ . Entonces,  $w_0 = 1$  y mediante el proceso anterior, concluimos esta vez que  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = -1$ ,  $w_3 = -1, \dots, w_{n-1} = -1$ , lo que contradice que no se verifica la condición (c) del Lema 3.16.

Por tanto, tomemos el menor  $k > j$  tal que  $s_k \neq 0$ . Supongamos en primer lugar que  $s_k = +$ . Esto implica que  $k - j$  es impar, puesto que si no  $(0 + +) \preceq \sigma^W$  y ya hemos visto que esto significa que  $\sigma^W$  es buena. Pero si  $k - j$  es impar, entonces  $(0 + 0 +) \preceq \sigma^W$ . Como muestra la Tabla 3.2,  $(0 + 0 +)$  es invertible, y además  $z(0 + 0 +) = 0 \neq 1 = z(\sigma^W)$ , luego entramos en contradicción con el Lema 3.28(ii).

Tabla 3.2: Algunas sucesiones de signos  $\sigma$  invertibles y los correspondientes  $\sigma$ -recorridos  $S$ . Los  $\sigma$ -recorridos para  $34 \cdot 2 \cdot 1$  pueden obtenerse intercambiando los colores 1 y 2 en todos los patrones

$\sigma$	$S$
$(0 + 0 +)$	$12 \cdot 3 \cdot 4, 34 \cdot 1 \cdot 2, 23 \cdot 4 \cdot 1, 14 \cdot 2 \cdot 3, 34 \cdot 1 \cdot 2$
$(0 + 0 -)$	$12 \cdot 3 \cdot 4, 34 \cdot 2 \cdot 1, 13 \cdot 4 \cdot 2, 24 \cdot 3 \cdot 1, 34 \cdot 1 \cdot 2$

Debe ser  $s_k = -$ . Si  $k - j$  es impar, entonces, para la sucesión invertible  $(0 + 0 -)$  (ver Tabla 3.2) se cumple que  $(0 + 0 -) \preceq \sigma^W$ , por lo que entramos en contradicción con el Lema 3.28(ii) otra vez. Así,  $k - j$  es par. En este caso,  $(0 + 00 -) \preceq \sigma^W$ . Como podemos ver en la Tabla 3.1,  $(0 + 00 -)$  es buena. Además,  $z(0 + 00 -) = z(\sigma^W) = 1$ , luego  $\sigma^W$  es buena por el Lema 3.28(i), y esto es una contradicción.

Con este último caso queda finalizada la demostración. □

Finalmente, al demostrar esta última proposición, queda demostrado el Teorema 3.15, lo que, a su vez, confirma que los grafos de T. Gallai son un contraejemplo a la Conjetura 3.10.

Como ya hemos comentado, que la Conjetura 3.10 no sea cierta, no implica que haya ideales monomiales libres de cuadrados que no tengan la propiedad de persistencia. No obstante, a continuación vamos a ver que el ideal de cubierta del grafo  $H_4$  introducido en este capítulo no la tiene.

Para esto, se va a usar el programa Macaulay2 (ver una introducción a dicho programa en la segunda parte del capítulo escrito por A. Van Tuyl en el libro [13]). Este programa es una herramienta esencial para manejar computacionalmente conceptos de álgebra conmutativa y geometría algebraica. Utilizaremos el paquete “EdgeIdeals”, que fue escrito por C. Francisco, A. Hoefel y A. Van Tuyl. Este paquete proporciona numerosas funciones para trabajar con ideales de cubierta y de aristas.

Consideramos el grafo  $H_4$ , con conjunto de vértices  $V(H_4) = \{x_1, \dots, x_{12}\}$ . Llamamos  $J = J(H_4)$  a su ideal de cubierta en el anillo de polinomios  $R = K[x_1, \dots, x_{12}]$  (en el programa introduciremos  $K = \mathbb{Q}$ ). Si calculamos el conjunto de primos asociados de  $J^3$  y  $J^4$  y comparamos los resultados, resulta que:

$$\text{Ass}_R(J^4) = \text{Ass}_R(J^3) \setminus \{M\},$$

donde  $M$  es el ideal maximal de  $R$ .

Introducimos el programa en Macaulay2:

```
i1 : loadPackage "EdgeIdeals"

o1 = EdgeIdeals
o1 : Package

i2 : R = QQ[x_1..x_12]

o2 = R
o2 : PolynomialRing

i3 : E = {{x_1,x_2},{x_2,x_3},{x_3,x_4},{x_5,x_6},
```

```

    {x_6,x_7},{x_7,x_8},{x_9,x_10},{x_10,x_11},
    {x_11,x_12},{x_1,x_5},{x_5,x_9},{x_9,x_1},
    {x_2,x_6},{x_6,x_10},{x_10,x_2},{x_3,x_7},
    {x_7,x_11},{x_11,x_3},{x_4,x_8},{x_8,x_12},
    {x_12,x_4},{x_1,x_12},{x_9,x_4},{x_5,x_8}};

i4 : H = graph(R,E);

i5 : J = coverIdeal H;

i6 : primosJ3 = associatedPrimes (J^3);

i7 : primosJ4 = associatedPrimes (J^4);

i8 : M = ideal gens R

o8 = ideal(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_10,
          x_11,x_12)
o8 : Ideal of R

i9 : primosJ3menosM = select(primosJ3, P -> P!=M);

i10 : primosJ3menosM == primosJ4

o10 = true

```

Por tanto, queda demostrado que el ideal de cubierta  $J(H_4)$  no tiene la propiedad de persistencia, lo que permite refutar la Conjetura 3.5. De esta forma podemos dar una respuesta a la pregunta de C.A. Francisco, H.T. Hà y A. Van Tuyl sobre la propiedad de persistencia para los ideales monomiales libres de cuadrados: en general, no todos los ideales monomiales libres de cuadrados tienen la propiedad de persistencia. Aunque, como vimos en el Capítulo 2, el caso particular de los ideales monomiales cuadráticos libres de cuadrados sí la tienen.

Para probar que los ideales de aristas tienen la propiedad de persistencia, pero no todos los ideales monomiales libres de cuadrados la tienen, hemos visto que ha sido fundamental el uso de la teoría de grafos, dando así una

muestra clara de la conexión entre el álgebra conmutativa y la teoría de grafos. Esta conexión también estaba presente en el Capítulo 1, en el que relacionamos el número cromático de un grafo con el ideal de cubierta asociado al mismo.

Cabe mencionar que, si bien en este trabajo hemos demostrado que el grafo  $H_4$  no satisface la Conjetura 3.5, en 2015 H.T. Hà y M. Sun publicaron un artículo ([6]) en el cual probaron que, en realidad, ninguno de los grafos  $H_n$  tienen la propiedad de persistencia. Luego, no solo existe un grafo que refute la Conjetura 3.5, sino que una familia infinita de grafos constituyen contraejemplos de la misma.



# Bibliografía

- [1] Michael F. Atiyah and Ian Grant Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.
- [2] Reinhard Diestel. *Matching, Covering and Packing*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2025.
- [3] Christopher A. Francisco, Huy Tàì Hà, and Adam Van Tuyl. Colorings of hypergraphs, perfect graphs, and associated primes of powers of monomial ideals. *Journal of Algebra*, **331**(1):224–242, 2011.
- [4] Christopher A. Francisco, Huy Tàì Hà, and Adam Van Tuyl. A conjecture on critical graphs and connections to the persistence of associated primes. *Discrete Mathematics*, **310**(15):2176–2182, 2010.
- [5] Tibor Gallai. Kritische graphen I. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, **8**(1-2):165–192, 1963.
- [6] Huy Tàì Hà and Mengyao Sun. Squarefree monomial ideals that fail the persistence property and non-increasing depth. *Acta Mathematica Vietnamica*, **40**:125–137, 2015.
- [7] Jürgen Herzog and Takayuki Hibi. *Monomial Ideals*. Springer, London, 2011.
- [8] Huy Tàì Hà and Susan Morey. Embedded associated primes of powers of square-free monomial ideals. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **214**(4):301–308, 2010.
- [9] Tomáš Kaiser, Matěj Stehlík, and Riste Škrekovski. Replication in critical graphs and the persistence of monomial ideals. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **123**(1):239–251, 2014.

- 
- [10] László Lovász and Michael D. Plummer. *Matching theory*. American Mathematical Soc., 2009.
  - [11] José Martínez-Bernal, Susan Morey, and Rafael H. Villarreal. Associated primes of powers of edge ideals. *Collectanea mathematica*, **63**(3):361–374, 2012.
  - [12] W. Frank Moore, Mark Rogers, and Sean Sather-Wagstaff. *Monomial ideals and their decompositions*. Springer, 2018.
  - [13] Adam Van Tuyl. *A Beginner's Guide to Edge and Cover Ideals*. In: Monomial Ideals, computations and applications (A. Bigatti, P. Gimenez, E. Sáenz-de-Cabezón Eds), Lecture Notes in Mathematics **2083** 63-94. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.

# Índice alfabético

- $\sigma$ -recorrido, 57
- $k$ -coloración, 21
- $k$ -coloreable, 21
- $k$ -cromático, 21
- Aristas independientes, 33
- Clique, 45
- Clique máximo, 45
- Clon, 47
- Cobertura de vértices, 16
- Cobertura minimal de vértices, 16
- Coloración, 21
- Compatibilidad, 55
- Componente conexa, 38
- Conjunto independiente, 16
- Conjunto independiente maximal, 16
- Críticamente  $k$ -cromático, 47
- Deficiencia, 36
- Dual de Alexander, 21
- Duplicación, 32
- Eliminación, 32
- Emparejamiento, 33
- Emparejamiento máximo, 33
- Emparejamiento perfecto, 33
- Expansión, 47
- Grafo  $H_n$ , 49
- Grafo finito simple, 14
- Grafo perfecto, 46
- Ideal de aristas, 15
- Ideal de cubierta, 15
- Número cromático, 21
- Número de clique, 45
- Número de emparejamiento, 33
- Paralelización, 32
- Patrón, 54
- Primo asociado, 29
- Primos minimales, 31
- Propiedad de persistencia, 30
- Subgrafo inducido, 31
- Sucesión de signos, 54
- Sucesión de signos buena, 58
- Sucesión de signos invertible, 58