



---

**Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Trabajo Fin de Grado**

GRADO EN MATEMÁTICAS

**La ecuación de Korteweg-de Vries:  
análisis y solución numérica**

Autora: Leyre Miguel Gómez

Tutores: Ángel Durán Martín  
Miguel Ángel López Marcos

Curso: 2024-2025



# Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre la ecuación de Korteweg-de Vries, una ecuación de gran importancia tanto en el campo de la Matemática Aplicada como en Física e Ingeniería. En un primer lugar lo trataremos desde una perspectiva analítica, describiendo algunas de sus propiedades más relevantes como, por ejemplo, la existencia de soluciones con forma solitónica. Por otro lado, se tratará también este problema desde el punto de vista numérico, utilizando un integrador numérico adecuado para su simulación a tiempos largos.

## Palabras Clave

Ecuación de Korteweg-de Vries, Solitones, Leyes de Conservación, Métodos Numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales, Simulación Numérica.

## Abstract

This work presents a study of the Korteweg-de Vries equation, a fundamental equation with significant importance in Applied Mathematics, Physics, and Engineering. First, we address it from an analytical point of view, describing some of its most relevant properties as, for example, the existence of solitonic solutions. Furthermore, this problem is also examined from a numerical standpoint, by means of a suitable numerical integration for long time simulations.

## Keywords

Korteweg-de Vries equation, Solitons, Conservation Laws, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Numerical Simulation.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Historia y primeras observaciones . . . . .	11
1.2. Otras ecuaciones, otras soluciones . . . . .	13
<b>2. La ecuación de Korteweg-de Vries y alguna de sus propiedades</b>	<b>15</b>
2.1. Dispersión y no linealidad . . . . .	15
2.2. Simetrías y transformaciones . . . . .	19
2.2.1. Traslaciones . . . . .	19
2.2.2. Cambios de escala . . . . .	20
2.2.3. Transformación Galileana . . . . .	21
2.2.4. Transformación de Miura . . . . .	22
2.2.5. Transformación de Gardner . . . . .	23
2.3. Leyes de conservación . . . . .	25
<b>3. Soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries en forma de solitón</b>	<b>31</b>
3.1. Existencia de soluciones en forma de solitón . . . . .	31
3.2. Expresión analítica de los solitones . . . . .	41
<b>4. Integración numérica de la ecuación de Korteweg-de Vries</b>	<b>45</b>
4.1. Discretización espacial . . . . .	45
4.2. Discretización temporal . . . . .	53
<b>5. Experimentos numéricos</b>	<b>55</b>
5.1. Experimento con un único solitón . . . . .	55
5.2. Interacción entre solitones . . . . .	59
<b>6. Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>Apéndices</b>	<b>66</b>
<b>A. Código en Matlab</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>



# Índice de figuras

2.1. Evolución temporal de una solución de la ecuación (2.2) para $\beta = 1$ .	16
2.2. Evolución temporal de una solución de la ecuación (2.5) para $\alpha = 1$ .	18
2.3. Evolución temporal de una solución de la ecuación (2.1) para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ .	19
3.1. Caso $k > 0$ ( $k = 1$ ).	36
3.2. Caso $k = 0$ .	37
3.3. Caso $k < \frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2}$ ( $k = -2$ ).	37
3.4. Caso $k = \frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2}$ ( $k = -\frac{2}{3}$ ).	38
3.5. Caso $\frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2} < k < 0$ ( $k = -\frac{1}{2}$ ).	39
3.6. Diagrama de fases para el sistema (3.4).	39
3.7. Evolución de un solitón entre $t = 0$ y $t = 20$ ( $\alpha = \beta = 1$ , $c = \frac{1}{3}$ , $x_0 = 0$ ).	43
5.1. Evolución del error en la solución hasta $T = 10000$ , para $J = 1024$ , $N = 4000000$ (rojo) y $J = 8000000$ (azul).	57
5.2. Evolución del error en la amplitud hasta $T = 10000$ , para $J = 1024$ , $N = 4000000$ (rojo) y $N = 8000000$ (azul).	58
5.3. Evolución del error en la fase hasta $T = 10000$ , para $J = 1024$ y $N = 4000000$ (rojo) y $N = 8000000$ (azul).	58
5.4. Simulación del choque de dos solitones: $c_1 = 1$ ( $A_1 = 3$ ), $x_0^{(1)} = -30$ , $c_2 = 4$ ( $A_2 = 12$ ), $x_0^{(2)} = -50$ .	60
5.5. Desfase de los solitones tras la interacción	61
5.6. Interacción “fusión-separación” entre solitones $c_1 = 1$ ( $A_1 = 3$ ), $x_0^{(1)} =$ $-30$ , $c_2 = 4$ ( $A_2 = 12$ ), $x_0^{(2)} = -50$ .	62
5.7. Interacción “rebote-intercambio” entre solitones $c_1 = 2$ ( $A_1 = 6$ ), $x_0^{(1)} = -30$ , $c_2 = 4$ ( $A_2 = 12$ ), $x_0^{(2)} = -45$ .	63



# Índice de tablas

5.1. Errores en la solución $(e_{J,N})$ para distintos valores de $J$ y $N$ . . . . .	56
---	----



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Historia y primeras observaciones

En 1834 un ingeniero naval escocés, John Scott Russell, se encontraba realizando observaciones en un canal próximo a Edimburgo con el objetivo de diseñar un nuevo barco más eficiente. Allí observó lo que llamó *onda de traslación* [20]. Esta onda se caracterizaba por no presentar ningún cambio aparente en su velocidad de propagación ni en su forma a lo largo de su evolución, como él mismo describió:

*“I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped — not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles. I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation.”*

En 1844, Russell recreó aquella situación en su laboratorio para poder investigar más detenidamente las propiedades que tenía esta onda. Logró deducir empíricamente que la velocidad  $c$  de la onda solitaria, estaba relacionada con su amplitud máxima  $a$ , con la profundidad del canal  $h$ , y la constante gravitacional  $g$  en la forma:

$$c^2 = g(h + a).$$

El interés en estas observaciones promovió las investigaciones teóricas de, entre otros, el inglés Lord Rayleigh y el francés Joseph Boussinesq en la década de 1870.

Pero no fue hasta 1895 que los neerlandeses Diedrick Korteweg y su estudiante de doctorado, Gustav de Vries [14] establecieron una expresión matemática que modelaba el comportamiento de esta onda solitaria. La ecuación en derivadas parciales

que propusieron, que actualmente lleva su nombre y que denotaremos por abreviar como ecuación KdV, fue:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \varepsilon \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right), \quad (1.1)$$

donde  $\eta$  es la elevación de la superficie por encima del nivel de equilibrio  $l$  del agua;  $g$  representa la constante de gravitación,  $\varepsilon$  es una constante arbitraria relacionada con la velocidad del movimiento uniforme del líquido y  $\sigma = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ , siendo  $T$  la tensión superficial y  $\rho$  la densidad. Sin embargo, debemos destacar que esta ecuación ya aparecía de manera paralela en algunos trabajos de Boussinesq y de Rayleigh.

En 1965, gracias al desarrollo de la informática, los estadounidenses Norman Zabusky y Martin Kruskal experimentaron con estas ondas mediante simulación computacional, y se percataron de que tras colisionar entre ellas tan sólo presentaban un pequeño desfase manteniendo su forma y su velocidad previa al choque (comportamiento ya observado por Russell en sus experimentos de laboratorio). Se comprobó que esto no sólo ocurría cuando colisionaban dos ondas solitarias sino una onda solitaria con otro perfil. Este comportamiento, típico de las partículas, motivó a Zabusky y Kruskal [21] a llamar *solitones* a estas soluciones, siendo esta palabra similar a *protón*, *neutrón* y *electrón*, con lo que querían destacar el comportamiento elástico de estas ondas.

Esta ecuación tiene muchas otras aplicaciones físicas a sólidos, líquidos, gases y plasmas. Por ejemplo [16], en ondas magnetohidrodinámicas en un plasma frío, en ondas longitudinales que se propagan en una red unidimensional de masas iguales acopladas por resortes no lineales (el problema de Fermi, Pasta y Ullam), en el flujo rotatorio en un tubo, en ondas longitudinales dispersivas en barras elásticas, etc. Para más aplicaciones véase [12].

El término lineal de primer orden que aparece en la ecuación en derivadas parciales (1.1) desaparece si se introduce una nueva variable  $X = x + \epsilon \sqrt{\frac{g}{l}} t$ , y la nueva función  $\xi(X, t) = \eta \left( X - \epsilon \sqrt{\frac{g}{l}} t, t \right)$ , pues entonces la ecuación que satisface la función  $\xi$  es

$$\xi_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left( \xi \xi_X + \frac{1}{3} \sigma \xi_{XXX} \right).$$

Así pues, la expresión más general de la ecuación KdV que se considera en esta memoria será:

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (1.2)$$

para ciertas constantes  $\alpha$  y  $\beta$  que dependen del fenómeno físico que se describe. Por ejemplo, los valores más habituales que se utilizan en la literatura son  $\beta = 1$  y  $\alpha = \pm 1, \pm 6$ . Para la formación de soluciones de tipo onda solitaria debe haber entonces un equilibrio entre la dispersión (término  $\beta u_{xxx}$ ) y la no linealidad (término  $\alpha u u_x$ ).

Por otra parte, se considerará como expresión canónica de la ecuación KdV, la que se obtiene al eliminar las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  haciendo que valgan ambas 1, es

decir,

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.3)$$

A esta expresión se llega desde la expresión general notando que si  $u$  es solución de (1.2), entonces la función  $v(x, t) = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} u\left(\sqrt[3]{\beta}x, t\right)$ , es solución de (1.3).

## 1.2. Otras ecuaciones, otras soluciones

Como alternativa a la ecuación KdV, T.B. Benjamin, V.L. Bona y J.J. Mahony [2] estudiaron la ecuación de onda larga regularizada (ecuación RLW). Esta ecuación, que fue introducida anteriormente por D.H. Peregrine, podemos expresarla como

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

y describe el movimiento de ondas con el mismo orden de aproximación a la ecuación KdV y puede ser preferible a esta en ciertos aspectos (por ejemplo, resulta ser un modelo más adecuado para ondas con gran longitud de onda y pequeña amplitud). Esta se obtiene al sustituir el término  $u_{xxx}$  de la ecuación KdV por  $u_x - u_{xxt}$  (lo que no afectaría al orden de aproximación del fenómeno). Sin embargo, esta ecuación proporciona un sistema que, a diferencia de lo que ocurre con la ecuación KdV (como veremos en la Sección 2.3), sólo posee un número finito de cantidades conservadas y aunque posee soluciones en forma de onda solitaria, estas no interactúan elásticamente.

La ecuación KdV ha sido generalizada incorporando al término no lineal diferentes potencias de la solución. La ecuación KdV generalizada (gKdV) es a menudo expresada como

$$u_t + u^n u_x + u_{xxx} = 0,$$

con  $n > 0$ . El caso  $n = 1$  corresponde a la ecuación KdV original y  $n = 2$  es la llamada ecuación KdV modificada (mKdV). Cabe destacar que R.M. Miura introdujo una transformación que permite relacionar las soluciones de estas dos ecuaciones (como veremos en la Subsección 2.2.4). Es importante señalar que tanto la ecuación KdV como la ecuación mKdV poseen un número infinito de leyes de conservación, hecho que no es cierto para  $n \geq 3$ .

Existe otro tipo de soluciones de estos modelos que también son relevantes. Así, para la ecuación KdV, además de los solitones, podemos distinguir las soluciones llamadas cnoidales, ondas viajeras periódicas descritas explícitamente por funciones elípticas de Jacobi [11].

Con el fin de entender mejor el papel de la dispersión no lineal en la formación de estructuras, P. Rosenau y J.M. Hyman [19], introdujeron una nueva familia de ecuaciones del tipo a la de KdV:

$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad m, n > 1,$$

que denotaron como  $K(m, n)$ . Como se verá en la Sección 2.1, para la ecuación KdV (que puede considerarse de esta familia si  $m = 2$  y  $n = 1$ ), los solitones

aparecen gracias al equilibrio entre la dispersión y la no linealidad. Sin embargo, cuando la dispersión es puramente no lineal, nuevas características pueden aparecer. Por ejemplo, para la ecuación  $K(2, 2)$ , es importante la existencia de soluciones en forma de onda solitaria con soporte compacto: los llamados *compactones*.

Por último, cabe señalar que nuevas ecuaciones con soluciones en forma de onda viajera con características singulares se están proponiendo y analizando. Por ejemplo, los *picones*, soluciones en forma de onda solitaria que presentan una discontinuidad en la primera derivada en su pico, y que fueron encontradas por R. Camassa y D.D. Holm [4] para la ecuación que lleva su nombre.

Elegida la ecuación KdV como modelo base para el estudio, en el Capítulo 2 se presentarán algunas de sus propiedades más interesantes como es la existencia de los solitones. También se destacarán la presencia de algunas simetrías elementales y de infinitas cantidades conservadas a lo largo de sus soluciones. En el Capítulo 3 se realizará un estudio que valida la existencia de soluciones solitónicas y se obtendrá la expresión analítica de las mismas. En el Capítulo 4 se introducirá un método numérico adecuado para aproximar las soluciones del problema en simulaciones a tiempos largos. Consistirá en discretizar la variable espacial mediante un método pseudoespectral y, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes de Fourier resultante será resuelto numéricamente usando la regla del punto medio implícita. La importancia de este método numérico reside en su propiedad de preservar cantidades conservadas del problema, lo que implicará un buen comportamiento de la aproximación numérica para simular las soluciones solitónicas en integraciones a tiempos largos. El Capítulo 5 está dedicado a la experimentación numérica llevada a cabo con el integrador propuesto: en primer lugar se simulará la evolución de un único solitón y, a continuación, el fenómeno de interacción entre dos solitones de diferente velocidad. Se finalizará con un capítulo dedicado a las conclusiones.

# Capítulo 2

## La ecuación de Korteweg-de Vries y alguna de sus propiedades

### 2.1. Dispersión y no linealidad

La estructura específica que posee la ecuación KdV

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (2.1)$$

es la responsable de la existencia de solitones, a partir de un equilibrio entre los términos lineal  $u_{xxx}$  y no lineal  $uu_x$ . Pondremos de manifiesto la influencia de cada uno de ellos y su interpretación física.

Nos planteamos primero el efecto del término lineal, para ello, tomamos en (2.1)  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$ , resultando

$$u_t + \beta u_{xxx} = 0. \quad (2.2)$$

Un problema interesante al estudiar ecuaciones de evolución es comprobar si existen soluciones en forma de onda plana, es decir, soluciones de la forma:

$$u(x, t) = Ae^{i(kx + \omega t)}, \quad (2.3)$$

donde la constante  $A$  representa la amplitud de onda,  $k$  se conoce como el número de onda, y  $\omega$  es la frecuencia. En general, al sustituir esta expresión en la ecuación en derivadas parciales se obtiene un vínculo de la forma  $\omega = \omega(k)$ , llamado *relación de dispersión*. Como consecuencia, la solución  $u(x, t) = Ae^{ik(x + \frac{\omega(k)}{k}t)}$  es una onda plana que viaja a velocidad  $c = \frac{\omega(k)}{k}$ , denominada *velocidad de fase* de la onda.

Para la ecuación KdV, si sustituimos (2.3) en (2.2) obtenemos

$$u_t + \beta u_{xxx} = Ae^{i(kx + \omega t)}(i\omega) + \beta Ae^{i(kx + \omega t)}(ik)^3 = Ae^{i(kx + \omega t)}i(\omega - \beta k^3) = 0.$$

Como conclusión la ecuación (2.2) admite soluciones en forma de onda plana si, y sólo si,  $\omega - \beta k^3 = 0$ , relación entre la frecuencia y el número de onda. Así pues, tenemos la relación de dispersión  $\omega = \omega(k) = \beta k^3$ , con lo que la velocidad de fase de onda es  $c = \beta k^2$ .

Nótese entonces que soluciones (2.3) con diferentes número de onda  $k$  se propagan a velocidades diferentes: esta es la característica propia de la *dispersión*.

Cuando esto sucede, un perfil representado por una superposición de estas soluciones con diferente número de onda, evolucionará cambiando su forma con el tiempo, por la existencia de diferentes velocidades: para cada onda  $u(x, t) = Ae^{ikx} e^{i\beta k^3 t}$ , los términos que dependen del tiempo incorporan oscilaciones que son mayores cuanto mayor es el número de onda  $k$ .

En la Figura 2.1, se presenta, para  $\beta = 1$ , la solución de (2.2), en el instante inicial  $t = 0$ , y su evolución en  $t = 1.7$  cuando se parte inicialmente del perfil solitónico

$$u_0(x) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right). \tag{2.4}$$

La solución se ha obtenido mediante integración numérica, utilizando el método pseudoespectral que hemos diseñado y que aparece en el Apéndice A. Puede apreciarse cómo el perfil inicial se descompone con el tiempo en sus diferentes componentes, que viajan a velocidades distintas.

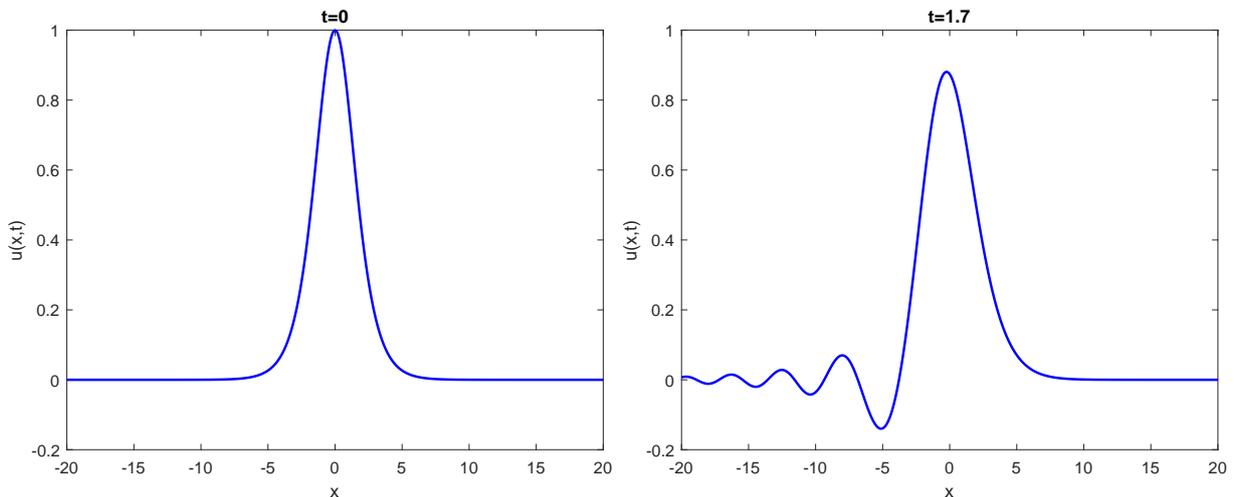


Figura 2.1: Evolución temporal de una solución de la ecuación (2.2) para  $\beta = 1$ .

Consideramos ahora el efecto de la no linealidad en la ecuación KdV. De nuevo, partimos de (2.1), pero en este caso eliminamos el término dispersivo ( $\beta = 0$ ) apareciendo la ecuación:

$$u_t + \alpha uu_x = 0, \tag{2.5}$$

que es una ecuación en derivadas parciales cuasilineal de primer orden (conocida como ecuación de Burgers sin viscosidad). Para resolverla, vamos a utilizar el método de las curvas características. El objetivo es estudiar el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + \alpha uu_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

donde  $u_0(x)$  es una función arbitraria, suficientemente regular, que describe la condición inicial.

El método de las curvas características consiste en reducir la ecuación en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a lo largo de unas curvas especiales, conocidas como *características*. Estas curvas satisfacen que

$$\frac{dx}{dt} = \alpha u, \tag{2.6}$$

y a lo largo de estas curvas  $x = x(t)$ ,  $u$  verifica

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u_t + \alpha u u_x = 0.$$

Esto implica que la solución  $u(x, t)$  es constante a lo largo de las rectas características, es decir, tendrá siempre el mismo valor que en la posición inicial. Denotando por  $x_0 = x(0)$ , el punto del que parte la curva característica  $x(t)$  que vamos a considerar, se tiene que  $u(x(t), t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$ . Así, si una curva característica parte de la posición inicial  $x_0$ , la función  $u$  conserva el valor  $u_0(x_0)$  en toda la trayectoria de dicha curva.

Para obtener una expresión de las curvas características, resolvemos (2.6) obteniendo

$$x(t) = \alpha u(x(t), t)t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como  $x(0) = x_0$ , entonces  $C = x_0$ , y

$$x(t) = \alpha u(x(t), t)t + x_0 = \alpha u_0(x_0)t + x_0. \tag{2.7}$$

Con esta última expresión observamos que las curvas características son rectas, no paralelas, (excepto si  $u_0$  es constante), ya que su pendiente depende de la posición inicial  $x_0$ . Esto hace que algunas de las características puedan llegar a cortarse, por lo que en dicho punto de intersección, la función  $u$  toma dos valores distintos en un mismo punto y, a partir de ese instante, la solución no estaría bien definida. Así pues, la pendiente  $u_x(x, t)$  en la dirección de  $x$  tiende a ser infinito a medida que  $t$  se aproxima al tiempo correspondiente a la intersección de las rectas (fenómeno conocido como *catástrofe del gradiente* [13]). Se denomina *tiempo de ruptura*  $t^*$ , al primer instante en el que ocurre una catástrofe del gradiente en una solución de una ley de conservación. Para encontrar dicho tiempo, calcularemos  $u_x(x, t)$  y encontraremos el primer instante para el cual  $u_x$  tiende a ser infinito.

En el punto  $(x, t)$  sabemos que  $u(x, t) = u_0(x_0)$  donde  $x_0 = x_0(x, t)$  determina el punto de partida  $(x_0, 0)$  de la característica que pasa por el punto  $(x, t)$ , es decir  $u(x, t) = u_0(x_0(x, t))$ .

Por la regla de la cadena

$$u_x(x, t) = u'_0(x_0(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} x_0(x, t). \tag{2.8}$$

Ahora bien, el valor  $x_0$  que determina el punto de salida de la característica que pasa por  $(x, t)$  está definido implícitamente por

$$x(t) = \alpha u_0(x_0(x, t))t + x_0(x, t). \tag{2.9}$$

Así pues, la derivada de  $x_0$  con respecto a  $x$  que aparece en (2.8) puede ser encontrada derivando implícitamente en (2.9) respecto a  $x$

$$1 = \alpha u'_0(x_0(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} x_0(x, t) t + \frac{\partial}{\partial x} x_0(x, t).$$

Despejando, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} x_0(x, t) = \frac{1}{1 + \alpha t u'_0(x_0(x, t))}.$$

Sustituyendo en (2.8), concluimos

$$u_x(x, t) = \frac{u'_0(x_0(x, t))}{1 + \alpha t u'_0(x_0(x, t))}.$$

El problema de determinar cuándo  $u_x(x, t)$  tiende hacia infinito, se reduce a determinar cuándo el denominador de la expresión anterior se acerca a cero.

Calculando el instante de tiempo  $t^*(x_0) > 0$  para el que dicho denominador es nulo obtenemos que

$$t^*(x_0) = \frac{-1}{\alpha u'_0(x_0)}.$$

Por lo tanto, el tiempo de ruptura se obtiene como el menor valor positivo de los tiempos anteriores, es decir,

$$t^* = \min_{x_0 \in \mathbb{R}} \{t^*(x_0) : t^*(x_0) > 0\} = \min_{x_0 \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{-1}{\alpha u'_0(x_0)} : \alpha u'_0(x_0) < 0 \right\}.$$

Hasta el tiempo de ruptura  $t^*$ , podemos escribir la solución del problema de valor inicial:

$$u(x(t), t) = u_0(x(t) - \alpha u_0(x_0)t).$$

La Figura 2.2 presenta, para  $\alpha = 1$ , la solución de (2.5) en el instante  $t = 0$ , y su evolución hasta el instante  $t = 1.7$ . El valor de la solución en un punto  $x$  es el mismo que el valor del dato inicial en el punto  $x_0$  que comparte con él recta característica. Se puede observar la inclinación que sufre el perfil inicial dado por (2.4).

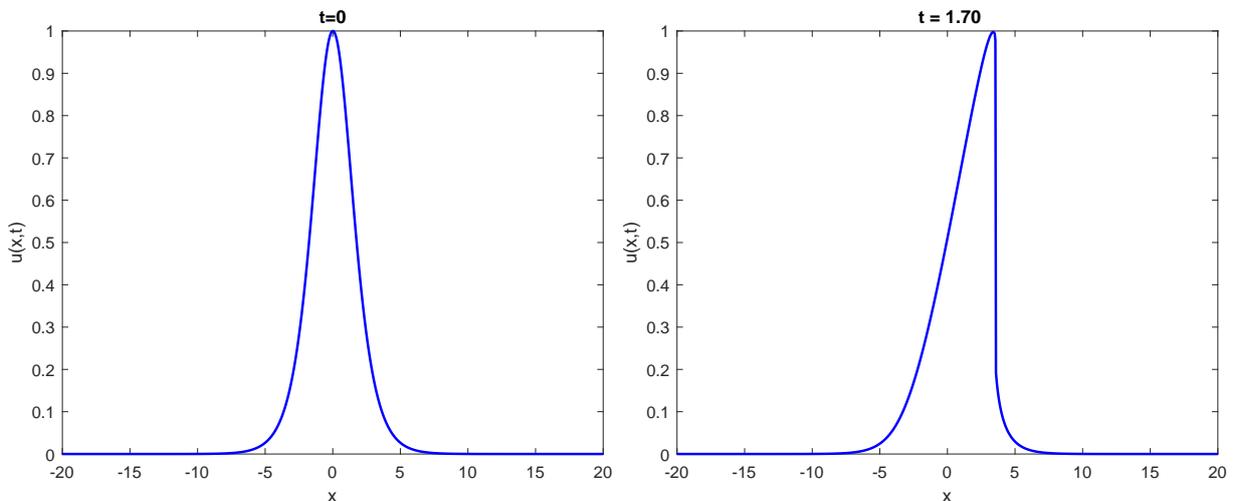


Figura 2.2: Evolución temporal de una solución de la ecuación (2.5) para  $\alpha = 1$ .

En el caso de la ecuación KdV, estos dos efectos están en equilibrio, lo que permite que sus soluciones sean ondas que se desplazan a una velocidad constante y sin deformarse. Esta es una de las principales propiedades de los solitones.

La Figura 2.3 muestra, para  $\alpha = \beta = 1$ , la solución de (2.1) en el instante  $t = 0$ , en el que vale como  $u_0$  en (2.4), y en  $t = 1.7$ . Debe notarse que, para construir el dato inicial (2.4), hemos utilizado la expresión del solitón que obtendremos en la Sección 3.2.

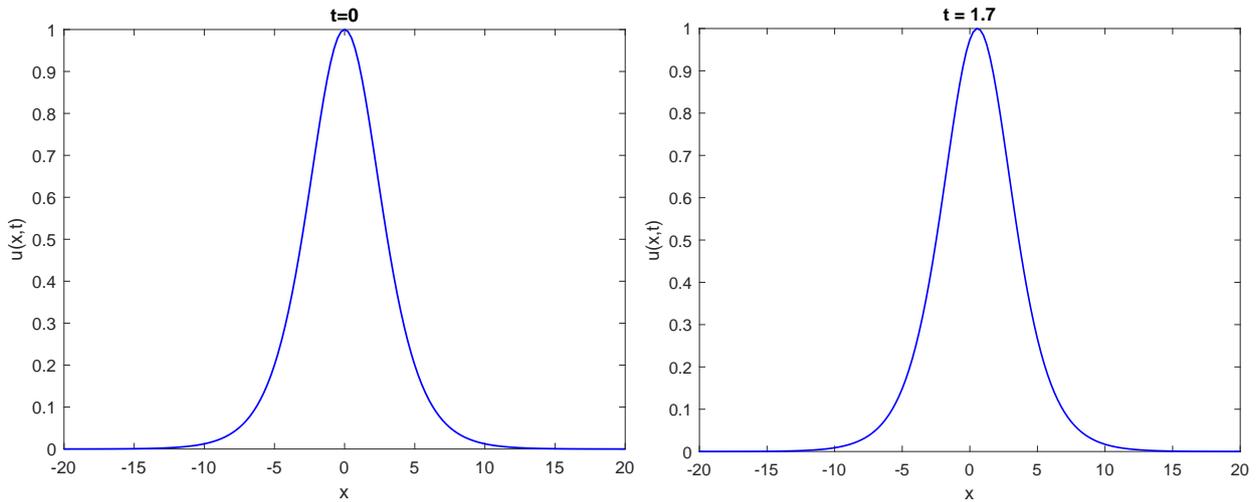


Figura 2.3: Evolución temporal de una solución de la ecuación (2.1) para  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$ .

## 2.2. Simetrías y transformaciones

En esta sección se presentan una serie de transformaciones bajo las cuales la ecuación KdV permanece invariante. Esta propiedad es de gran importancia ya que permite generar nuevas soluciones a partir de soluciones ya conocidas. Por otra parte, las simetrías que aparecen en el sistema son importantes porque permiten establecer, gracias al Teorema de Noether [18], la existencia de leyes de conservación asociadas.

De nuevo, usaremos la expresión general de la ecuación KdV

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{2.10}$$

para ciertas constantes  $\alpha, \beta$  arbitrarias.

### 2.2.1. Traslaciones

Algunas de las transformaciones más sencillas, que dejan invariante la ecuación (2.10), son las traslaciones en las variables independientes.

Empezamos con el efecto de trasladar la variable espacial  $x$ , una cantidad fija  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 2.1.** *Si  $u(x, t)$  es solución de la ecuación (2.10) entonces, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la función  $U(x, t) = u(x - x_0, t)$  también es solución de la misma ecuación KdV.*

*Demostración.* Trivialmente, usando la regla de la cadena, se tiene que  $U_t = u_t$ ,  $U_x = u_x$  y  $U_{xxx} = u_{xxx}$ . Así pues, sustituyendo en (2.10) obtenemos que

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = U_t + \alpha UU_x + \beta U_{xxx} = 0.$$

□

Análogamente, se puede obtener una nueva solución de la ecuación KdV, si se realiza una traslación de la variable temporal en una solución dada, es decir,

**Proposición 2.2.** *Si  $u(x, t)$  es solución de la ecuación (2.10) entonces, para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , la función  $U(x, t) = u(x, t - t_0)$  también es solución de la misma ecuación KdV.*

La demostración es completamente similar a la presentada para la traslación en la variable espacial.

## 2.2.2. Cambios de escala

Se plantea a continuación, el cambio que supone el escalado de las variables en la ecuación KdV.

Comencemos con el escalado de las variables independientes, es decir, dada una solución  $u$  de (2.10), consideremos la nueva función  $U(x, t) = u(Ax, Bt)$ , siendo  $A$  y  $B$  constantes reales arbitrarias no nulas. La regla de la cadena permite relacionar las derivadas parciales de esta nueva función en términos de las derivadas parciales de la solución original. Así, se puede concluir que  $U_t = Bu_t$ ,  $U_x = Au_x$ ,  $U_{xxx} = A^3u_{xxx}$ . Sustituyendo en la ecuación (2.10) se obtiene

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = \frac{1}{B}U_t + \frac{\alpha}{A}UU_x + \frac{\beta}{A^3}U_{xxx} = 0,$$

y que multiplicandola por  $B$  se reescribe

$$U_t + \frac{\alpha B}{A}UU_x + \frac{\beta B}{A^3}U_{xxx} = 0.$$

Es decir,  $U$  es la solución de una nueva ecuación KdV:  $U_t + \tilde{\alpha}UU_x + \tilde{\beta}U_{xxx} = 0$ , pero con unos valores de los parámetros que dependen de los parámetros originales y de los factores de escala:  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha B}{A}$  y  $\tilde{\beta} = \frac{\beta B}{A^3}$ . Como consecuencia, se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.3.** *Si  $u(x, t)$  es solución de la ecuación (3.1) entonces la función  $U(x, t) = u(-x, -t)$ , también es solución de la misma ecuación KdV.*

*Demostración.* Para que la nueva ecuación KdV que se obtiene tras el escalado de las variables independientes coincida con la original, debe ocurrir que  $\frac{B}{A} = 1$  y  $\frac{B}{A^3} = 1$ , es decir,  $B = A$  y  $A^2 = 1$ . El caso  $A = 1$  no produce ningún escalado en las variables y el caso  $A = -1$  proporciona el resultado. □

Nos planteamos ahora, un escalado también en la variable dependiente. Es decir, consideremos una solución  $u$  de la ecuación (2.10) y definamos  $U(x, t) = Cu(Ax, Bt)$ , con  $A, B, C$  constantes cualesquiera no nulas. En este caso, gracias a la regla de la cadena, obtenemos

$$U_t = CBu_t, \quad U_x = CAu_x, \quad U_{xxx} = CA^3u_{xxx},$$

y, sustituyendo en (2.10), llegamos a

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = \frac{1}{BC}U_t + \frac{\alpha}{AC^2}UU_x + \frac{\beta}{A^3C}U_{xxx} = 0.$$

Multiplicando por  $BC$ , escribimos

$$U_t + \frac{\alpha B}{AC}UU_x + \frac{\beta B}{A^3}U_{xxx} = 0,$$

que es de nuevo una ecuación del tipo KdV con unos nuevos parámetros. Ahora podemos demostrar el siguiente resultado:

**Proposición 2.4.** *Si  $u$  es solución de la ecuación (2.10) entonces, para todo  $\lambda \neq 0$ , la función  $U(x, t) = \lambda^2 u(\lambda x, \lambda^3 t)$  también es solución de la misma ecuación KdV.*

*Demostración.* Como hemos visto anteriormente, la función  $U(x, t) = Cu(Ax, Bt)$  es solución de la ecuación

$$U_t + \tilde{\alpha}UU_x + \tilde{\beta}U_{xxx} = 0,$$

con  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha B}{AC}$  y  $\tilde{\beta} = \frac{\beta B}{A^3}$ . Así pues, para que sea solución de (2.10), debe ocurrir que  $\frac{B}{AC} = 1$  y  $\frac{B}{A^3} = 1$ .

Nos encontramos tres parámetros pero solo dos ecuaciones. Si elegimos  $A$  como un parámetro libre: es decir,  $A = \lambda$  arbitrario no nulo, obtenemos como solución del sistema

$$A = \lambda, \quad B = \lambda^3, \quad C = \lambda^2.$$

□

Conseguimos así una familia uniparamétrica de transformaciones llamada *Grupo de simetrías de soluciones por cambio de escala*, que mantiene la ecuación pero modifica la expresión de la solución. Nótese que tomando  $\lambda = -1$ , se obtiene el resultado planteado en la Proposición 2.3.

### 2.2.3. Transformación Galileana

Abordamos ahora una simetría con una interpretación importante, *la transformación Galileana*. La transformación elegida consiste en considerar un marco de referencia móvil que se desplaza a una velocidad constante  $c$ , respecto de un marco inicial fijo.

Así pues, si  $u$  es solución de (2.10) consideramos la función  $U(x, t) = u(x - ct, t)$ . Seguimos el mismo procedimiento que antes, aplicamos la regla de la cadena para poder obtener la expresión de la ecuación que satisface la nueva función

$$U_x = u_x, \quad U_{xxx} = u_{xxx}, \quad U_t = -cu_x + u_t,$$

es decir,

$$u_x = U_x, \quad u_{xxx} = U_{xxx}, \quad u_t = cU_x + U_t.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.10) obtenemos:

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = U_t + cU_x + \alpha UU_x + \beta U_{xxx} = 0.$$

Observamos que la ecuación resultante no tiene la misma estructura que la ecuación inicial, ya que incorpora un término adicional lineal de primer orden, pero los términos no lineales y dispersivos aparecen multiplicados por los mismos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación original (2.10). Podemos eliminar el término de primer orden mediante una traslación de la función.

**Proposición 2.5.** *Si  $u(x, t)$  es solución de la ecuación (2.10) entonces, para todo  $c \in \mathbb{R}$ , la función  $U(x, t) = u(x - ct, t) + \frac{c}{\alpha}$  es también solución de la misma ecuación KdV.*

*Demostración.* Como antes,  $u_x = U_x$ ,  $u_{xxx} = U_{xxx}$ ,  $u_t = U_t + cU_x$ . Por lo tanto,

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = U_t + cU_x + \alpha \left( U - \frac{c}{\alpha} \right) U_x + \beta U_{xxx} = U_t + \alpha UU_x + \beta U_{xxx} = 0.$$

□

Esta familia de transformaciones recibe el nombre de *Grupo de simetrías Galileanas*.

### 2.2.4. Transformación de Miura

Hasta ahora se han establecido algunas transformaciones que mantienen invariante la expresión de la ecuación KdV. Sin embargo, existen otro tipo de transformaciones que la conectan con otras ecuaciones diferentes, pero que comparten con ella ciertas propiedades.

La transformación de Miura relaciona las soluciones de la ecuación KdV (2.10) con las de la ecuación mKdV:

$$v_t + \alpha' v^2 v_x + \beta v_{xxx} = 0. \tag{2.11}$$

Originalmente [15], y en trabajos posteriores, esta transformación fue introducida para unos valores concretos de  $\alpha$  y  $\beta$  en la ecuación KdV. Aquí hemos generalizado la transformación para valores cualesquiera de estos parámetros.

**Proposición 2.6.** *Si  $v$  es solución de la ecuación mKdV (2.11) con  $\alpha' = -\frac{\alpha^2}{6\beta}$ , entonces la función*

$$u = v_x - \lambda v^2, \tag{2.12}$$

con  $\lambda = \frac{-\alpha}{6\beta}$ , lo es de la ecuación KdV (2.10).

*Demostración.* Calculamos las derivadas parciales de la función  $u$  (2.12) en términos de las de  $v$ :

$$\begin{aligned} u_t &= v_{xt} + 2\lambda v v_t = \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda v \right) v_t, \\ u_x &= v_{xx} + 2\lambda v v_x, \\ u_{xx} &= v_{xxx} + 2\lambda v_x^2 + 2\lambda v v_{xx}, \\ u_{xxx} &= v_{xxxx} + 6\lambda v_x v_{xx} + 2\lambda v v_{xxx} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda v \right) v_{xxx} + 6\lambda v_x v_{xx}, \\ uu_x &= (v_x + \lambda v^2)(v_{xx} + 2\lambda v v_x) = v_x v_{xx} + 2\lambda v v_x^2 + \lambda v^2 v_{xx} + 2\lambda^2 v^3 v_x \\ &= v_x v_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda v^2 v_x) + 2\lambda^2 v^3 v_x = \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda v \right) (\lambda v^2 v_x) + v_x v_{xx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas nuevas expresiones en la ecuación KdV obtenemos :

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda v \right) (v_t + \lambda \alpha v^2 v_x + \beta u_{xxx}) + (\alpha + 6\lambda \beta) v_x v_{xx}.$$

Tomando  $\lambda = \frac{-\alpha}{6\beta}$  conseguimos

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha}{3\beta} v \right) \left( v_t - \frac{\alpha^2}{6\beta} v^2 v_x + \beta u_{xxx} \right) = 0,$$

por ser  $v$  solución de (2.11) con  $\alpha' = \frac{-\alpha}{6\beta}$ . □

Nótese que en la literatura [8, 16] se suele trabajar con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_t - 6u u_x + u_{xxx} &= 0, \\ v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

En este caso, la transformación de Miura que relaciona sus soluciones es

$$u = v_x + v^2.$$

### 2.2.5. Transformación de Gardner

Al igual que la transformación de Miura, la transformación de Gardner permite obtener soluciones de la ecuación KdV a partir de las de otra ecuación distinta, en este caso, la llamada ecuación de Gardner

$$w_t + \alpha w w_x + \alpha' w^2 w_x + \beta w_{xxx} = 0, \quad (2.13)$$

que es una combinación de las ecuaciones KdV y mKdV.

La transformación que se introduce será esencial para demostrar que la ecuación KdV tiene infinitas cantidades conservadas.

De nuevo, hemos generalizado la transformación original de Gardner [9], para que sirva para valores cualesquiera de los parámetros en la ecuación (2.13).

**Proposición 2.7.** Si  $w$  es solución de la ecuación de Gardner (2.13), entonces la función

$$u = w + \lambda w_x + \mu w^2, \tag{2.14}$$

con  $\lambda = \sqrt{\frac{-6\beta\alpha'}{\alpha^2}}$  y  $\mu = \frac{\alpha'}{\alpha}$  lo es de la ecuación KdV (2.10).

*Demostración.* Calculamos las derivadas parciales de la función  $u$  en (2.14) en términos de los de  $w$ .

$$\begin{aligned} u_t &= w_t + \lambda w_{xt} + 2\mu w w_t = \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} + 2\mu w\right) w_t, \\ u_x &= w_x + \lambda w_{xx} + 2\mu w w_x, \\ u_{xx} &= w_{xx} + \lambda w_{xxx} + 2\mu w_x^2 + 2\mu w w_{xx}, \\ u_{xxx} &= w_{xxx} + \lambda w_{xxxx} + 6\mu w_x w_{xx} + 2\mu w w_{xxx} \\ &= \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} + 2\mu w\right) w_{xxx} + 6\mu w_x w_{xx}, \\ uu_x &= (w + \lambda w_x + \mu w^2)(w_x + \lambda w_{xx} + 2\mu w w_x) \\ &= w w_x + \lambda w w_{xx} + 2\mu w^2 w_x + \lambda w_x^2 \\ &\quad + \lambda^2 w_x w_{xx} + 2\lambda \mu w w_x^2 + \mu w^2 w_x + \lambda \mu w^2 w_{xx} + 2\mu^2 w^3 w_x \\ &= w w_x + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(w w_x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(\mu w^2 w_x) + 2\mu w^2 w_x \\ &\quad + \lambda^2 w_x w_{xx} + \mu w^2 w_x + 2\mu^2 w^3 w_x \\ &= \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} + 2\mu w\right) (w w_x + \mu w^2 w_x) + \lambda^2 w_x w_{xx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación KdV

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} &= \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} + 2\mu w\right) (w_t + \alpha w w_x + \alpha \mu w^2 w_x + \beta w_{xxx}) \\ &\quad + (\alpha \lambda^2 + 6\beta \mu) w_x w_{xx}. \end{aligned}$$

Tomando  $\lambda = \sqrt{\frac{-6\beta\alpha'}{\alpha^2}}$  y  $\mu = \frac{\alpha'}{\alpha}$  conseguimos

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} &= \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{-6\beta\alpha'}{\alpha^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2\alpha'}{\alpha} w\right) (w_t + \alpha w w_x + \alpha' w^2 w_x + \beta w_{xxx}) = 0, \end{aligned}$$

por ser  $w$  es solución de (2.14) con  $\lambda = \sqrt{\frac{-6\beta\alpha'}{\alpha^2}}$  y  $\mu = \frac{\alpha'}{\alpha}$ . □

## 2.3. Leyes de conservación

De nuevo, usaremos la expresión general

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (2.15)$$

Una *ley de conservación* en una variable  $x$  es una ecuación en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad (2.16)$$

donde  $T$  y  $X$  se denominan densidad y flujo, respectivamente, y que pueden depender de las variables independientes  $x$  y  $t$ , de la variable dependiente  $u$  y de las derivadas parciales de ella con respecto a  $x$ . Si tanto  $T$  como  $X$  son funciones integrables en todo  $\mathbb{R}$ , y por tanto,  $X$  tiende hacia cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , entonces integrando (2.16) llegamos a que la ley de conservación implica que la cantidad descrita por:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T dx$$

se conserva en el tiempo a lo largo de sus soluciones, es decir,  $Q(t)$  es constante, pues

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial X}{\partial x} dx = -X|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

La ecuación KdV podemos expresarla en la forma conservativa (2.16) utilizando diferentes pares densidad/flujo, suponiendo que estamos interesados en soluciones  $u$  que decaen, tanto ellas como un número de sus derivadas respecto a  $x$ , hacia 0 cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Obtenemos así las siguientes cantidades conservadas.

**Proposición 2.8.** (*Conservación de la masa*). La masa definida como  $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ , es una cantidad conservada de la ecuación KdV (2.15).

*Demostración.* Notemos que

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{2}u^2 + \beta u_{xx}\right),$$

por lo tanto, la ecuación KdV se puede escribir en la forma conservativa (2.16) para  $T_1 = u$  y  $X_1 = \frac{\alpha}{2}u^2 + \beta u_{xx}$ . Concluimos entonces que la masa es una cantidad conservada pues  $X_1$  tiende a 0 cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . □

**Proposición 2.9.** (*Conservación del momento*) El momento definido como  $P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t) dx$ , es una cantidad conservada de la ecuación KdV (2.15).

*Demostración.* Para probar que  $P(t)$  es una cantidad conservada, seguiremos un procedimiento análogo al del resultado anterior, pero ahora identificando la densidad como  $T_2 = u^2$ . Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} T_2 = \frac{\partial}{\partial t}(u^2) = 2uu_t,$$

y usando la hipótesis de que  $u$  es solución de la ecuación (2.15), tenemos que

$$uu_t = u(-\alpha uu_x - \beta u_{xxx}) = -\alpha u^2 u_x - \beta uu_{xxx}. \quad (2.17)$$

Cada sumando del lado derecho de la expresión anterior se puede escribir como una derivada espacial pues

$$\begin{aligned} u^2 u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} u^3 \right), \\ uu_{xxx} &= \frac{\partial}{\partial x} (uu_{xx}) - u_x u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right). \end{aligned}$$

Así pues, sustituyendo en (2.17)

$$uu_t = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} u^3 \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right).$$

Como conclusión, la ecuación KdV es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2\alpha}{3} u^3 + 2\beta uu_{xx} - \beta u_x^2 \right) = 0,$$

y notemos que  $X_2 = \frac{2\alpha}{3} u^3 + 2\beta uu_{xx} - \beta u_x^2 \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . □

**Proposición 2.10.** (Conservación de la energía) *La energía definida como*

$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( u^3(x, t) - \frac{3\beta}{\alpha} u_x^2(x, t) \right) dx$ , *es una cantidad conservada de la ecuación KdV (2.15).*

*Demostración.* Procederemos como en los casos anteriores, consideramos la densidad  $T_3 = u^3 - \frac{3\beta}{\alpha} u_x^2$ . Derivando respecto a  $t$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} T_3 = \frac{\partial}{\partial t} \left( u^3 - \frac{3\beta}{\alpha} u_x^2 \right) = 3u^2 u_t - \frac{6\beta}{\alpha} u_x u_{xt} = \left( 3u^2 - \frac{6\beta}{\alpha} u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_t.$$

Teniendo en cuenta que  $u$  es solución de la ecuación (2.15), podemos escribir

$$\begin{aligned} \left( 3u^2 - \frac{6\beta}{\alpha} u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_t &= \left( 3u^2 - \frac{6\beta}{\alpha} u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) (-\alpha uu_x - \beta u_{xxx}) \\ &= -3\alpha u^3 u_x - 3\beta u^2 u_{xxx} + 6\beta u_x^3 + 6\beta uu_x u_{xx} + \frac{6\beta^2}{\alpha} u_x u_{xxx} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nos interesa ahora expresar el segundo miembro como una derivada espacial. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned} u^3 u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4} u^4 \right), \\ uu_x u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} uu_x^2 \right) - \frac{1}{2} u_x^3, \\ u^2 u_{xxx} &= \frac{\partial}{\partial x} (u^2 u_{xx}) - 2uu_x u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u^2 u_{xx} - uu_x^2) + u_x^3, \\ u_x u_{xxxx} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_{xxx}) - u_{xx} u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x u_{xxx} - \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo cada una de estas desigualdades en (2.18), obtenemos

$$\begin{aligned} \left(3u^2 - \frac{6\beta}{\alpha}u_x \frac{\partial}{\partial x}\right) u_t &= -3\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4}u^4\right) - 3\beta \frac{\partial}{\partial x} (u^2 u_{xx} - uu_x^2) - 3\beta u_x^3 + 6\beta u_x^3 \\ &\quad + 6\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}uu_x^2\right) - 3\beta u_x^3 + \frac{6\beta^2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x u_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2\right). \end{aligned}$$

Como conclusión, la ecuación KdV es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u^3 - \frac{3\beta}{\alpha}u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3\alpha}{4}u^4 + 3\beta u^2 u_{xx} - 6\beta uu_x^2 - \frac{6\beta^2}{\alpha}u_x u_{xxx} + \frac{3\beta^2}{\alpha}u_{xx}^2\right) = 0,$$

y notemos que  $X_3 = \frac{3\alpha}{4}u^4 + 3\beta u^2 u_{xx} - 6\beta uu_x^2 - \frac{6\beta^2}{\alpha}u_x u_{xxx} + \frac{3\beta^2}{\alpha}u_{xx}^2 \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . □

Cabe destacar que en el caso de soluciones periódicas en  $x$  de la ecuación KdV, las integrales definidas en todo  $\mathbb{R}$  no son apropiadas. En tal situación, las cantidades conservadas se obtienen integrando sobre un periodo  $L$ , es decir,  $\int_0^L T dx$ , obteniéndose las mismas cantidades conservadas que antes gracias a la periodicidad.

Una vez estas tres típicas leyes de conservación fueron demostradas, R.M. Miura, C.S. Gardner y M.D. Kruskal [17] lograron encontrar otras ocho más no triviales. Esto les llevó a conjeturar la posible existencia de infinitas leyes de conservación.

Para demostrar este resultado, la transformación de Gardner previamente presentada en la Sección 2.2.5 juega un papel fundamental. En particular, vamos a utilizar la transformación en el caso particular en que la ecuación de Gardner (2.13) tiene el valor de  $\alpha' = -\frac{\alpha^2}{6\beta}\varepsilon^2$ , es decir,

$$w_t + \alpha \left(w - \frac{\alpha}{6\beta}\varepsilon^2 w^2\right) w_x + \beta w_{xxx} = 0, \quad (2.19)$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro real tan pequeño como se quiera (de nuevo hemos generalizado el resultado para que sea válido para valores cualesquiera de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en la ecuación KdV).

Aplicamos la Proposición 2.7 donde para el valor de  $\alpha'$  elegido, tomamos  $\lambda = \varepsilon$  y  $\mu = -\frac{\alpha}{6\beta}\varepsilon^2$ . Así pues (2.14) se convierte en

$$u = w + \varepsilon w_x - \frac{\alpha}{6\beta}\varepsilon^2 w^2. \quad (2.20)$$

Por lo tanto, si  $w$  es solución de (2.19) entonces la función  $u$  lo es de la KdV (2.15).

Nótese que en el caso  $\varepsilon = 0$  en (2.19) se recae en la ecuación KdV (realmente (2.20) no ofrece un cambio de variable pues  $u = w$ ).

Un hecho interesante es que la ecuación (2.19) se puede expresar como una ley de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial t} (w) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha}{2}w^2 - \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{18\beta}w^3 + \beta w_{xx}\right) = 0,$$

y como consecuencia, suponiendo que  $w, w_{xx} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ , entonces tenemos la siguiente cantidad conservada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dx = C, \quad (2.21)$$

con  $C$  constante.

Para obtener un número infinito de leyes de conservación de la ecuación KdV aprovecharemos el papel del parámetro arbitrario  $\varepsilon$ . Puesto que por (2.20),  $w \rightarrow u$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vamos a expresar la solución  $w$  de (2.19), como una serie de potencias de  $\varepsilon$ , es decir,

$$w(x, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(x, t), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.22)$$

(este desarrollo es formal, no es necesario que sea convergente para ningún valor de  $\varepsilon$ ).

Tratando la constante en (2.21) de forma similar, como una serie de potencias en  $\varepsilon$ , y sustituyendo  $w$  como su desarrollo asintótico (2.22), concluimos que, para cada  $n = 0, 1, \dots$ , la cantidad  $\int_{-\infty}^{\infty} w_n dx$  es constante.

Finalmente se utiliza la transformación de Gardner (2.20), para encontrar los diferentes términos  $w_n$  del desarrollo (2.22) en términos de  $u$  y sus derivadas respecto de  $x$ . El procedimiento sigue un proceso recursivo.

De (2.20) podemos escribir

$$w = u - \varepsilon w_x + \frac{\alpha}{6\beta} \varepsilon^2 w^2,$$

que en términos de los desarrollos de sus términos escribiríamos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n &= u - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (w_n)_x + \frac{\alpha \varepsilon^2}{6\beta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n \right)^2 \\ &= u - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} (w_n)_x + \frac{\alpha}{6\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+2} \left( \sum_{k=0}^n w_k w_{n-k} \right). \end{aligned}$$

Igualando todos los coeficientes de  $\varepsilon^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  de ambos desarrollos, llegamos a que

$$\begin{aligned} \text{Términos en } \varepsilon^0 : & \quad w_0 = u, \\ \text{Términos en } \varepsilon^1 : & \quad w_1 = -(w_0)_x, \\ \text{Términos en } \varepsilon^n, n \geq 2 : & \quad w_n = -(w_{n-1})_x + \frac{\alpha}{6\beta} \sum_{k=0}^{n-2} w_k w_{n-2-k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Es decir,  $w_0 = u$ ,  $w_1 = -u_x$ , y para  $n \geq 2$  se puede escribir  $w_n$  a partir de sus valores anteriores ya en términos de  $u$  y de sus derivadas respecto a  $x$ .

Así, por ejemplo, tenemos los siguientes términos

$$\begin{aligned}
 w_2 &= -(w_1)_x + \frac{\alpha}{6\beta} w_0^2 = u_{xx} + \frac{\alpha}{6\beta} u^2, \\
 w_3 &= -(w_2)_x + \frac{\alpha}{6\beta} (2w_0 w_1) = -u_{xxx} - \frac{2\alpha}{6\beta} u u_x - \frac{2\alpha}{6\beta} u u_x \\
 &= -u_{xxx} - \frac{2\alpha}{3\beta} u u_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( u_{xxx} + \frac{\alpha}{3\beta} u^2 \right), \\
 w_4 &= -(w_3)_x + \frac{\alpha}{6\beta} (2w_0 w_2 + w_1^2) \\
 &= u_{xxxx} + \frac{2\alpha}{3\beta} (u_x^2 + u u_{xx}) + \frac{\alpha}{6\beta} \left[ 2u \left( u_{xx} + \frac{\alpha}{6\beta} u^2 \right) + u_x^2 \right] \\
 &= u_{xxxx} + \frac{2\alpha}{3\beta} u_x^2 + \frac{2\alpha}{3\beta} u u_x + \frac{2\alpha}{6\beta} u u_{xx} + \frac{2\alpha^2}{36\beta^2} u^3 + \frac{\alpha}{6\beta} u_x^2 \\
 &= u_{xxxx} + \frac{5\alpha}{6\beta} u_x^2 + \frac{\alpha}{\beta} u u_{xx} + \frac{\alpha^2}{18\beta^2} u^3,
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

En particular, las integrales de  $w_0$ ,  $w_2$  y  $w_4$  producen las tres cantidades conservadas generadas anteriormente en las Proposiciones 2.8, 2.9 y 2.10 (masa, momento y energía respectivamente), pues:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} w_0 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx = M(t), \\
 \int_{-\infty}^{\infty} w_2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_{xx} + \frac{\alpha}{6\beta} u^2 \right) dx = u_x \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\alpha}{6\beta} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = \frac{\alpha}{6\beta} P(t), \\
 \int_{-\infty}^{\infty} w_4 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_{xxxx} + \frac{5\alpha}{6\beta} u_x^2 + \frac{\alpha}{\beta} u u_{xx} + \frac{\alpha^2}{18\beta^2} u^3 \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_{xxxx} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha}{\beta} u u_x \right) - \frac{\alpha}{6\beta} u_x^2 + \frac{\alpha^2}{18\beta^2} u^3 \right) dx \\
 &= \left( u_{xxx} + \frac{\alpha}{\beta} u u_x \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\alpha^2}{18\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u^3 - \frac{3\beta}{\alpha} u_x^2 \right) dx = \frac{\alpha^2}{18\beta^2} E(t).
 \end{aligned}$$

Por otra parte, como se ha visto, tanto  $w_1$  como  $w_3$  se pueden escribir como derivadas con respecto a  $x$ , por lo tanto su integral no produce leyes de conservación significativas

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} w_1 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} -u_x dx = -u \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} w_3 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial x} \left( u_{xx} + \frac{\alpha}{3\beta} u^2 \right) = - \left( u_{xx} + \frac{\alpha}{3\beta} u^2 \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.
 \end{aligned}$$

Puede demostrarse (ver [8] para más detalles) que si  $n$  es par entonces  $\int_{-\infty}^{\infty} w_n dx$  produce una constante de movimiento no trivial, mientras que si  $n$  es impar  $w_n$  se puede escribir como la derivada de una expresión respecto de  $x$  y, por lo tanto,  $\int_{-\infty}^{\infty} w_n dx = 0$ .



# Capítulo 3

## Soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries en forma de solitón

Una de las propiedades más destacadas de la ecuación KdV es la existencia de soluciones solitónicas. Mostraremos su existencia analizando el mapa de fases asociado al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden equivalente a la ecuación diferencial ordinaria que caracteriza la existencia de ondas solitarias.

Para la obtención de su expresión explícita pueden encontrarse numerosas técnicas, aquí optamos por la resolución de la ecuación diferencial ordinaria anterior utilizando técnicas elementales de integración.

### 3.1. Existencia de soluciones en forma de solitón

Demostraremos la existencia de soluciones solitónicas para la ecuación de KdV en su forma genérica:

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (3.1)$$

Para ello, en primer lugar, planteamos la posibilidad de soluciones en forma de onda viajera, es decir, supongamos que

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

es solución de (3.1), siendo  $c$  la velocidad a la que se desplaza el perfil, dado por la función  $f$ , a lo largo del tiempo. Así pues, si introducimos la expresión

$$\xi = x - ct, \quad (3.2)$$

a la que llamaremos *variable de fase*, sustituiremos en la ecuación KdV la expresión propuesta para  $u$ . Utilizando la regla de la cadena concluimos

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -cf', \\ u_x &= \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = f', \\ u_{xx} &= \frac{df'}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'', \\ u_{xxx} &= \frac{df''}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'''. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al sustituir en (3.1) obtenemos

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = -cf' + \alpha f f' + \beta f''' = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden para la función  $f(\xi)$ , que podemos reescribir como

$$\frac{d}{d\xi} \left( -cf + \frac{\alpha}{2} f^2 + \beta f'' \right) = 0.$$

Integrando tenemos

$$-cf + \frac{\alpha}{2} f^2 + \beta f'' = A,$$

siendo  $A$  una constante cualquiera. Si tratamos de encontrar funciones  $f$  que representen un perfil solitónico, supondremos que tanto  $f$  como sus derivadas (al menos hasta el segundo orden) tienden hacia cero cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Esto implica que debemos tomar  $A = 0$  y, así pues,  $f$  será solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$f'' = \frac{c}{\beta} f - \frac{\alpha}{2\beta} f^2. \quad (3.3)$$

Para el estudio de sus soluciones, planteamos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente que se obtiene al introducir las nuevas variables  $f_1 = f$ ,  $f_2 = f'$ :

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2, \\ f_2' &= \frac{c}{\beta} f_1 - \frac{\alpha}{2\beta} f_1^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los equilibrios de este sistema vienen dados por los puntos  $(f_1, f_2)$  que satisfacen que  $f_1' = 0$  y  $f_2' = 0$ , esto es

$$\begin{aligned} f_1' = 0 &\iff f_2 = 0, \\ f_2' = 0 &\iff \frac{c}{\beta} f_1 - \frac{\alpha}{2\beta} f_1^2 = \frac{f_1}{\beta} \left( c - \frac{\alpha}{2} f_1 \right) = 0 \\ &\iff f_1 = 0, \quad \text{ó} \quad f_1 = \frac{2c}{\alpha}. \end{aligned}$$

Como conclusión, el sistema (3.4) tiene dos puntos de equilibrio:  $(0, 0)$  y  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$ .

Para el estudio, supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos pues el resto de casos se razonan de forma análoga y se obtienen resultados similares.

Para abordar el análisis mediante linealización calculamos la matriz jacobiana del sistema

$$J(f_1, f_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(c - \alpha f_1)}{\beta} & 0 \end{bmatrix}.$$

- Equilibrio  $(0, 0)$  : en este caso la matriz jacobiana es

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c}{\beta} & 0 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{c}{\beta}$ . Por lo tanto, sus autovalores

$$\text{son } \lambda = \pm \sqrt{\frac{c}{\beta}}.$$

- Equilibrio  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$  : en este caso la matriz jacobiana es:

$$J\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-c}{\beta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores son ahora:  $\lambda = \pm \sqrt{\frac{-c}{\beta}}$ .

Como consecuencia, dependiendo del signo de la velocidad  $c$  (pues se está considerando  $\beta > 0$ ), uno de los dos puntos de equilibrio es un punto de silla puesto que el sistema linealizado posee dos autovalores reales de signo opuesto.

Por ejemplo, si  $c > 0$ , el equilibrio  $(0, 0)$  es un punto de silla del sistema original (3.4). Además, la pendiente de las órbitas que salen del equilibrio, que son las asociadas al autovalor positivo  $\lambda = \sqrt{\frac{c}{\beta}}$ , se obtiene a partir de un autovector asociado.

En este caso, resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{c}{\beta}} & 1 \\ \frac{c}{\beta} & -\sqrt{\frac{c}{\beta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

llegamos a que  $\text{Ker} \left( Jf(0, 0) - \sqrt{\frac{c}{\beta}} I \right)$  está generado por el vector  $\left( 1, \sqrt{\frac{c}{\beta}} \right)^T$ , que tiene pendiente  $\sqrt{\frac{c}{\beta}}$ .

Análogamente, la pendiente de las órbitas que entran al equilibrio, se obtiene a partir de un autovector asociado al autovalor negativo  $\lambda = -\sqrt{\frac{c}{\beta}}$ , y que tiene pendiente  $-\sqrt{\frac{c}{\beta}}$ .

Con respecto al otro punto de equilibrio (el  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$  si seguimos suponiendo que  $c > 0$ ), el correspondiente sistema linealizado tiene asociados dos autovalores imaginarios puros conjugados. Por lo tanto, para dicho sistema lineal, el origen es un centro. Así pues, para el sistema no lineal (3.4), el equilibrio podría ser un centro, un foco (estable o inestable) o un centro-foco. Para estudiar exactamente su naturaleza debemos hacer un análisis más profundo.

Nótese que el sistema (3.1) es conservativo: la función

$$H(f_1, f_2) = \frac{1}{2}f_2^2 + \frac{\alpha}{6\beta}f_1^3 - \frac{c}{2\beta}f_1^2, \quad (3.5)$$

es una cantidad conservada a lo largo de las soluciones del sistema pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} H(f_1(\xi), f_2(\xi)) &= \frac{\partial H}{\partial f_1} f_1' + \frac{\partial H}{\partial f_2} f_2' \\ &= \left(\frac{\alpha}{2\beta}f_1^2 - \frac{c}{\beta}f_1\right) f_2 + f_2 \left(\frac{c}{\beta}f_1 - \frac{\alpha}{2\beta}f_1^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Como consecuencia, todas las órbitas del plano de fases del sistema original (3.4) están contenidas en las curvas de nivel de  $H$ , es decir, en las curvas  $H(f_1, f_2) = k$ , con  $k$  una constante.

Notemos que estas curvas

$$\frac{1}{2}f_2^2 + \frac{\alpha}{6\beta}f_1^3 - \frac{c}{2\beta}f_1^2 = k, \quad (3.6)$$

son simétricas con respecto al eje de abscisas ( $f_2 = 0$ ) en el plano de fases: si el punto  $(f_1, f_2)$  está en una de esas curvas, entonces también lo está  $(f_1, -f_2)$ . Esta propiedad de simetría obliga a que el equilibrio  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$  sea un centro del sistema: las órbitas del sistema, en un entorno del punto de equilibrio, son curvas cerradas.

El caso  $c < 0$  se puede analizar de forma equivalente, obteniéndose ahora que el punto  $(0, 0)$  es un centro y que  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$  es un punto de silla.

Así pues, podemos caracterizar completamente el tipo de órbitas que aparecen en el plano de fases del sistema (3.4):

**Proposición 3.1.** *El espacio de fases del sistema (3.4) consta de las siguientes órbitas:*

- *Dos puntos de equilibrio: uno es un punto de silla y el otro es un centro.*
- *Existe una órbita que une el punto de silla con él mismo (órbita homoclínica). Esta órbita rodea al centro.*

- La órbita que pasa por un punto que se encuentra encerrado por la órbita homoclínica, y que no sea el centro, es una órbita cerrada.
- La órbita que pasa por un punto que no está encerrado por la órbita homoclínica, y que no sea el punto de silla, es una órbita no acotada.

*Demostración.* Ya se ha probado anteriormente, que el sistema posee dos puntos de equilibrio:  $(0, 0)$ ,  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$ , siendo uno de ellos un punto de silla y el otro un centro, dependiendo del signo de la velocidad  $c$ .

Estudiemos el plano de fases para el caso  $c > 0$  (téngase en cuenta que estamos suponiendo también que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos).

En ese caso  $(0, 0)$  es el punto de silla y  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$  es el centro. Como hemos mostrado anteriormente, las órbitas del sistema están contenidas en las curvas (3.6) siendo  $k$  constante. Por ejemplo, el equilibrio  $(0, 0)$  está incluido en la curva que corresponde al valor de  $k = 0$ , y el equilibrio  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$  al valor  $k = -\frac{2c^3}{3\alpha^2\beta}$ .

Dada la simetría de la curva (3.6) con respecto al eje  $f_2 = 0$ , para un valor de  $k$  fijo, estudiaremos sólo la rama positiva de la curva:

$$f_2 = \sqrt{2k + \frac{c}{\beta}f_1^2 - \frac{\alpha}{3\beta}f_1^3}. \quad (3.7)$$

Para ello, denotaremos por  $\psi$  a la expresión polinómica dentro de la raíz cuadrada,

$$\psi(f_1) = 2k + \frac{c}{\beta}f_1^2 - \frac{\alpha}{3\beta}f_1^3,$$

y, por tanto, la expresión (3.7) sólo tendrá sentido para los valores de  $f_1$  para los que  $\psi \geq 0$ .

Estudiemos el comportamiento del polinomio de tercer grado descrito por  $\psi$ . Sabemos que, existe al menos una raíz real del polinomio. Analizaremos si hay más.

En primer lugar, se tiene que, como  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos,

$$\lim_{f_1 \rightarrow -\infty} \psi(f_1) = \infty, \quad \text{y} \quad \lim_{f_1 \rightarrow \infty} \psi(f_1) = -\infty.$$

Por otro lado, la derivada

$$\psi'(f_1) = \frac{2c}{\beta}f_1 - \frac{\alpha}{\beta}f_1^2 = \frac{1}{\beta}f_1(2c - \alpha f_1),$$

sólo se anula en  $f_1 = 0$  y en  $f_1 = \frac{2c}{\alpha}$ , y concluimos que  $\psi$  es creciente si  $0 < f_1 < \frac{2c}{\alpha}$

y es decreciente si  $f_1 < 0$  ó  $f_1 > \frac{2c}{\alpha}$ . Por tanto,  $\psi$  alcanza un mínimo relativo en 0,

donde vale  $m = \psi(0) = 2k$ , y un máximo relativo en  $\frac{2c}{\alpha}$ , donde vale

$$M = \psi\left(\frac{2c}{\alpha}\right) = 2k + \frac{4c^3}{3\alpha^2\beta}.$$

Nótese también que  $\psi\left(\frac{3c}{\alpha}\right) = \psi(0) = m$ , y que  $\psi\left(\frac{-c}{\alpha}\right) = \psi\left(\frac{2c}{\alpha}\right) = M$ .

Distinguiamos distintos casos, dependiendo del valor de la constante  $k$ . (para cada uno de estos casos se presentarán figuras representativas, usando para todas ellas  $\alpha = 1, \beta = 1, c = 1$ ).

- Si  $k > 0$  : en ese caso  $0 < m < M$ . Por lo tanto, sólo existe una raíz real. Dicha raíz es mayor que el punto donde se alcanza  $M$ , es decir, mayor que  $\frac{2c}{\alpha}$ . Además, como  $\psi\left(\frac{3c}{\alpha}\right) = m > 0$  concluimos que existe  $f_1^* > \frac{3c}{\alpha}$ , con  $\psi(f_1^*) = 0$ , y por lo tanto la rama (3.7) sólo está definida para valores de  $f_1 < f_1^*$ .

La Figura 3.1 es representativa de esta situación tomando  $k = 1$ . La gráfica de la izquierda describe la gráfica de  $\psi$ . A la derecha se presenta la correspondiente curva de nivel del plano de fases. El comportamiento de la rama positiva es similar al de  $\psi$ , y el de la rama negativa se obtiene por reflexión con respecto del eje de abscisas de  $H$  asociada a dicho valor de  $k$ . Nótese que esta curva corresponde a una sola órbita del plano de fases de (3.4) y que no está acotada.

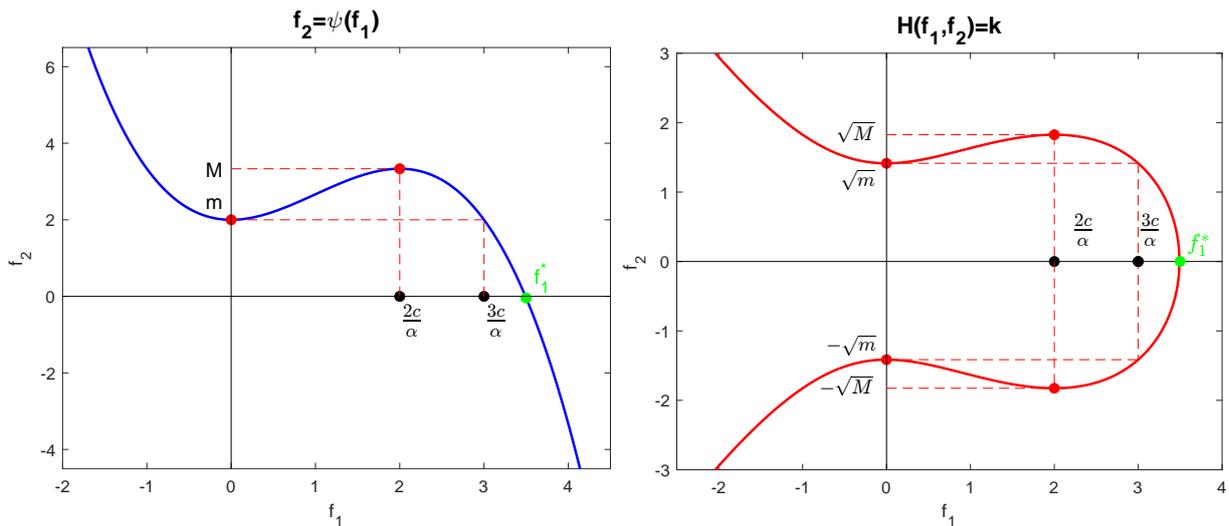


Figura 3.1: Caso  $k > 0$  ( $k = 1$ ).

- Si  $k = 0$  : en este caso  $0 = m < M$ . Por lo tanto, tenemos que 0 es una raíz doble y  $\frac{3c}{\alpha}$  es una raíz simple. En este caso, la rama (3.7), sólo está definida para valores de  $f_1 < \frac{3c}{\alpha}$ . En la Figura 3.2 queda representada esta situación, de nuevo a la izquierda la gráfica de  $\psi$  y a la derecha la curva de nivel de  $H(f_1, f_2) = 0$ . Como ya vimos, el punto de silla  $(0, 0)$  está en esta curva de nivel, por lo tanto, podemos distinguir 4 órbitas distintas: el equilibrio correspondiente al punto de silla; dos órbitas no acotadas (una que entra hacia el equilibrio y otra que sale) y una órbita que une el punto de silla consigo mismo (órbita homoclínica). Esta última órbita corresponde a valores de  $f_1$  tales que  $0 < f_1 \leq \frac{3c}{\alpha}$ .

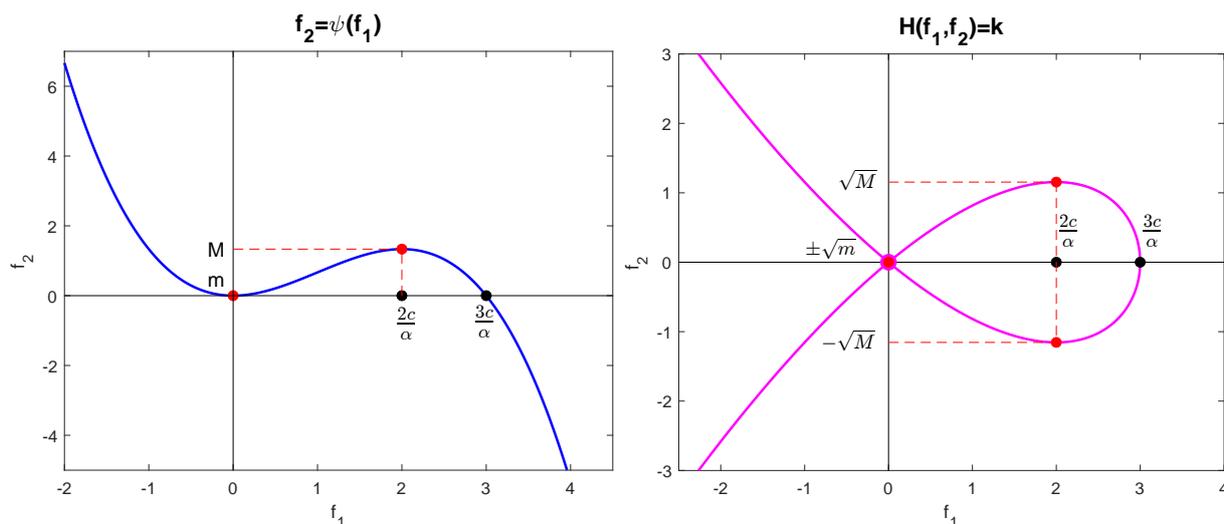


Figura 3.2: Caso  $k = 0$ .

- Si  $k < 0$  : en este caso  $m < 0$ , y hay que distinguir tres situaciones dependiendo de cómo sea  $M = 2k + \frac{4c^3}{3\beta\alpha^2}$ .

  - Si  $k < \frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2}$  : en esta situación  $m < M < 0$ . Por lo tanto, sólo existe una raíz real. Dicha raíz es menor que el punto donde se alcanza  $m$ , es decir, menor que 0. Además como  $\psi\left(-\frac{c}{\alpha}\right) = M < 0$ , concluimos que existe  $f_1^{**} < -\frac{c}{\alpha}$  con  $\psi(f_1^{**}) = 0$ . Por lo tanto, la rama (3.7) sólo está definida para valores  $f_1 < f_1^{**}$ . En el plano de fases, la curva corresponde a una sólo órbita que no está acotada. La Figura 3.3 es representativa de este caso tomando  $k = -2$ .

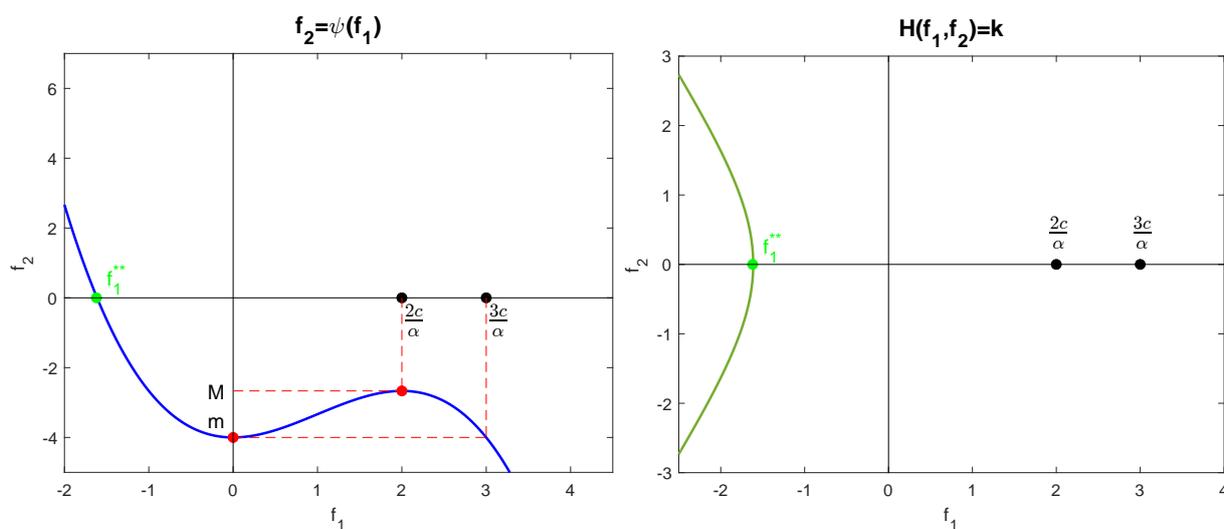


Figura 3.3: Caso  $k < \frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2}$  ( $k = -2$ ).

- Si  $k = \frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2}$  : ahora  $m < M = 0$  y concluimos que  $\frac{2c}{\alpha}$  es una raíz doble y que existe otra raíz real simple, negativa:  $-\frac{c}{\alpha}$ . La rama (3.7) está sólo definida para valores  $f_1 < -\frac{c}{\alpha}$  ó  $f_1 = \frac{2c}{\alpha}$ . La Figura 3.4 describe esta situación:  $H(f_1, f_2) = k$ , incluye 2 órbitas: el punto correspondiente al centro y una órbita no acotada.

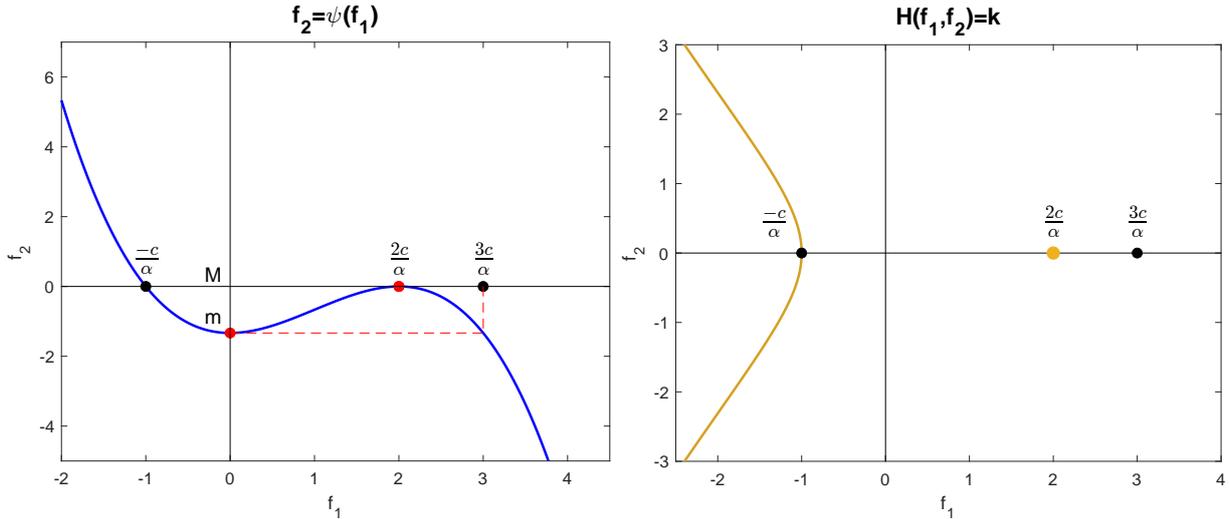


Figura 3.4: Caso  $k = \frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2}$  ( $k = -\frac{2}{3}$ ).

- Si  $\frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2} < k < 0$  : en este caso  $m < 0 < M$ , y por lo tanto, existen tres raíces reales simples. Como consecuencia de que  $\psi\left(\frac{3c}{\alpha}\right) < 0$ , existe un valor  $f_1^*$ , con  $\frac{2c}{\alpha} < f_1^* < \frac{3c}{\alpha}$ , para el que  $\psi(f_1^*) = 0$ . Como  $\psi\left(-\frac{c}{\alpha}\right) = M > 0$ , existe un valor  $f_1^{**}$ , con  $-\frac{c}{\alpha} < f_1^{**} < 0$ , para el que  $\psi(f_1^{**}) = 0$ . Como  $f(0) < 0 < f\left(\frac{2c}{\alpha}\right)$  existe un valor  $f_1^{***}$ , con  $0 < f_1^{***} < \frac{2c}{\alpha}$ , para el que  $\psi(f_1^{***}) = 0$ . La rama (3.7) sólo está definida para valores  $f_1 \leq f_1^{**}$  ó  $f_1^{***} \leq f_1 \leq f_1^*$ . En la Figura 3.5 se presenta esta situación. En el plano de fases,  $H(f_1, f_2) = k$  incluye dos órbitas, una que no está acotada y otra que es cerrada (corresponde a una solución periódica) que rodea el centro pero no el punto de silla.

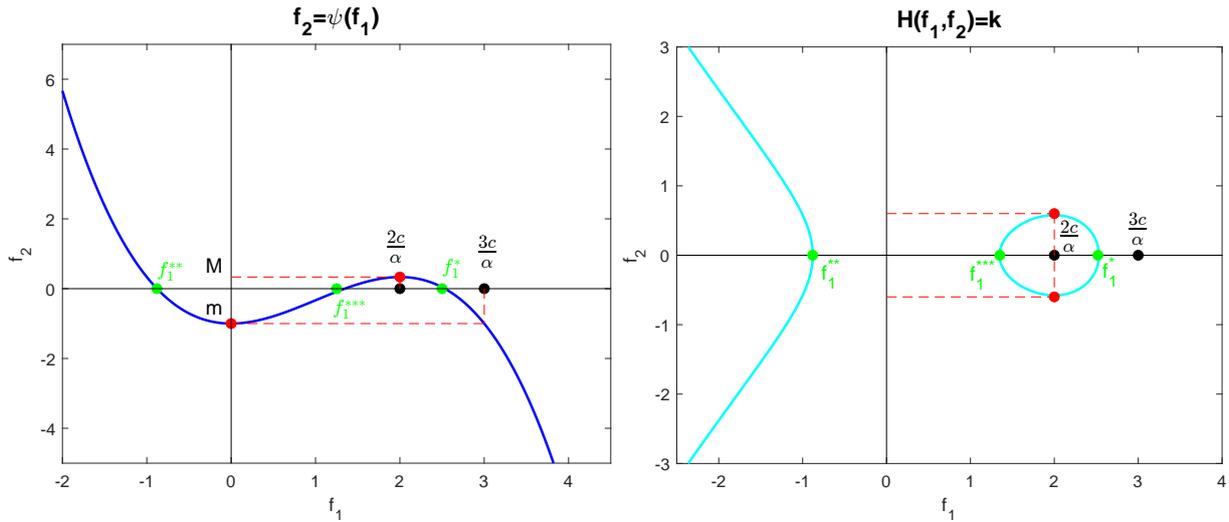


Figura 3.5: Caso  $\frac{-2c^3}{3\beta\alpha^2} < k < 0$  ( $k = -\frac{1}{2}$ ).

Recolectando todas las órbitas representativas que hemos obtenido, podemos representar el diagrama de fases del sistema (3.4). Por otra parte, el campo vectorial proporciona las direcciones en las que se recorren las órbitas en el mapa de fases. Por ejemplo, para un punto del eje de abscisas ( $f_2 = 0$ ) la dirección es en la que se recorre la órbita que pasa por ese punto, según (3.4) está dada por el vector  $\left(0, \frac{f_1}{\beta} \left(c - \frac{\alpha}{2} f_1\right)\right)^T$  que siempre es vertical y apunta hacia arriba si  $f_1$  toma valores tales que  $0 < f_1 < \frac{2c}{\alpha}$ , y hacia abajo si  $f_1 < 0$  ó  $f_1 > \frac{2c}{\alpha}$ .

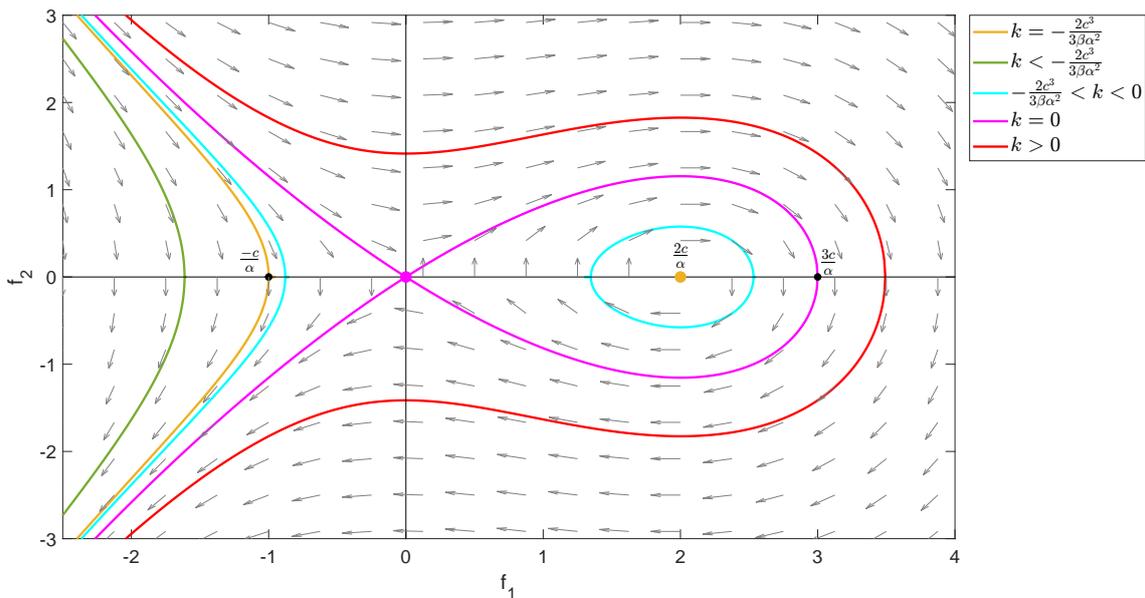


Figura 3.6: Diagrama de fases para el sistema (3.4).

La Figura 3.6 presenta este diagrama para  $\alpha = \beta = c = 1$ , y refleja las diferentes órbitas que se declaran en la proposición.

□

A la vista de las órbitas del sistema (3.4), nos planteamos la existencia de funciones  $f = f_1$  que sean soluciones de (3.3) y que produzcan soluciones solitónicas de la ecuación KdV. Como dicho perfil debe ser una función acotada hay que rechazar las correspondientes a las órbitas que no lo sean. Los puntos fijos tampoco son de utilidad ya que dan lugar a soluciones constantes. Las órbitas cerradas corresponden a soluciones periódicas que tampoco pueden producir solitones.

Finalmente, la órbita homoclínica es la que produce el perfil solitónico. Esta órbita une el  $(0, 0)$  con él mismo, y pasa por el punto  $\left(\frac{3c}{\alpha}, 0\right)$ . Denotemos por  $(f_1(\xi), f_2(\xi))$  la solución del problema de valor inicial asociado al sistema (3.4) con dato inicial  $f_1(0) = \frac{3c}{\alpha}$ ,  $f_2(0) = 0$ . Por tanto, la función  $f(\xi) = f_1(\xi)$  es una función par, que toma valores positivos, que decrece si  $\xi > 0$  (crece cuando  $\xi < 0$ ) que en 0 alcanza su valor máximo  $\frac{3c}{\alpha}$  (la amplitud del solitón) y tal que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} f(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} f'(\xi) = 0$$

Como el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4) es autónomo, si  $(f_1(\xi), f_2(\xi))$  es solución entonces  $(f_1(\xi - x_0), f_2(\xi - x_0))$  también lo es para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}$ . El perfil que ofrece  $f_1(\xi)$  es el mismo que el de  $f_1(\xi - x_0)$  pero trasladado  $x_0$  unidades. Como consecuencia, si  $f_1(\xi)$ , primera componente de la órbita homoclínica descrita anteriormente, ofrece un perfil solitónico, también lo hace  $f_1(\xi - x_0)$ , que sería una función simétrica respecto de la recta  $\xi = x_0$ , que toma valores positivos, que decrece si  $\xi > x_0$  (crece cuando  $\xi < x_0$ ) que en  $x_0$  alcanza su valor máximo  $\frac{3c}{\alpha}$  (la amplitud del solitón) y tal que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} f(\xi - x_0) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} f'(\xi - x_0) = 0.$$

Por tanto, queda demostrada la existencia del solitón, que es solución de la ecuación KdV, dada por

$$u(x, t) = f_1(x - ct - x_0).$$

Para valores generales de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  tendremos que la órbita homoclínica dará lugar a un perfil solitónico sólo cuando el punto de silla sea el  $(0, 0)$ , pues en caso de que el punto de silla sea  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$ , la función  $f_1$  tenderá a ese valor no nulo cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Por tanto, por lo estudiado en el sistema linealizado en  $(0, 0)$ , sólo obtendremos perfiles solitónicos cuando  $c$  y  $\beta$  tengan el mismo signo. Ahora bien, la órbita homoclínica rodea el centro  $\left(\frac{2c}{\alpha}, 0\right)$ , y para los puntos de esa órbita  $f_1$  tiene el mismo signo que  $\frac{2c}{\alpha}$ . Así pues, podemos concluir el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.** *La ecuación KdV (3.1) posee solitones  $u(x, t)$  con las siguientes características:*

- Si  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ , entonces  $c > 0$  y  $u(x, t) > 0$  (es decir, los solitones toman valores positivos y se mueven hacia la derecha).
- Si  $\alpha < 0$  y  $\beta > 0$ , entonces  $c > 0$  y  $u(x, t) < 0$  (es decir, los solitones toman valores negativos y se mueven hacia la derecha).
- Si  $\alpha > 0$  y  $\beta < 0$ , entonces  $c < 0$  y  $u(x, t) < 0$  (es decir, los solitones toman valores negativos y se mueven hacia la izquierda).
- Si  $\alpha < 0$  y  $\beta < 0$ , entonces  $c < 0$  y  $u(x, t) > 0$  (es decir, los solitones toman valores positivos y se mueven hacia la izquierda).

## 3.2. Expresión analítica de los solitones

Una vez demostrada la existencia de soluciones en forma de solitón para la ecuación KdV (3.1), (a partir del estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden (3.3)), veamos que es posible obtener, explícitamente, su expresión analítica, integrando la ecuación que proporciona su perfil.

Si multiplicamos (3.3) por  $f'$  obtenemos

$$f' f'' = \frac{c}{\beta} f' f - \frac{\alpha}{2\beta} f' f^2,$$

que es equivalente a escribir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (f')^2 = \frac{c}{2\beta} \frac{d}{d\xi} f^2 - \frac{\alpha}{6\beta} \frac{d}{d\xi} f^3.$$

Integrando en ambos lados, se llega a que

$$\frac{1}{2} \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 = \frac{c}{2\beta} f^2 - \frac{\alpha}{6\beta} f^3 + B,$$

con  $B$  una constante de integración. Ahora bien, recordemos que para conseguir funciones  $f(\xi)$  que representen un perfil solitónico, tanto  $f$  como sus derivadas deben tender hacia 0 si  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Por lo tanto  $B = 0$ , y la función  $f$  debe satisfacer la ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$\left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 = \frac{f^2}{\beta} \left( c - \frac{\alpha}{3} f \right).$$

Esta ecuación sólo tiene sentido para funciones reales cuando el miembro de la derecha es no negativo. Así, por ejemplo, si  $\alpha > 0, \beta > 0$  y  $c > 0$  necesariamente  $f \leq \frac{3c}{\alpha}$  (como vimos, el valor de su amplitud).

Escribiendo la ecuación en forma normal, separando las variables e integrando, se llega a que

$$\pm \int d\xi = \int \frac{df}{\sqrt{\frac{f^2}{\beta} \left( c - \frac{\alpha}{3} f \right)}}. \quad (3.8)$$

Para resolver la integral de la derecha se plantea el cambio

$$f = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2(\theta), \quad (3.9)$$

que requiere que  $f$  tenga un signo definido dependiente de  $\frac{c}{\alpha}$ . Si nos restringimos a perfiles de  $f$  positivos,  $\alpha$  y  $c$  deben tener el mismo signo (si se buscan perfiles negativos,  $\alpha$  y  $c$  tendrán signos opuestos y se razonaría de forma similar).

Como

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{-6c}{\alpha} \operatorname{sech}^2(\theta) \tanh(\theta),$$

sustituyendo en la integral del miembro derecho de (3.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} \pm\xi + k &= \int \frac{\frac{-6c}{\alpha} \operatorname{sech}^2(\theta) \tanh(\theta)}{\sqrt{\frac{9c^2}{\beta\alpha^2} \operatorname{sech}^4(\theta) \left(c - \frac{\alpha}{3} \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2(\theta)\right)}} \\ &= -2\sqrt{\frac{\beta}{c}} \int \frac{\tanh(\theta)}{\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(\theta)}} d\theta = -2\sqrt{\frac{\beta}{c}} \int \frac{\tanh(\theta)}{\sqrt{\tanh^2(\theta)}} d\theta \\ &= \pm 2\sqrt{\frac{\beta}{c}} \theta, \end{aligned}$$

con  $k$  una constante real cualquiera y, despejando,

$$\theta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} (\xi + k).$$

Deshaciendo el cambio de variable (3.9), obtenemos el perfil

$$f(\xi) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} (\xi + k) \right), \quad (3.10)$$

donde se ha tenido en cuenta que la función secante hiperbólica es impar y por tanto, su cuadrado es par. Notemos que la raíz cuadrada presente en (3.10) tiene sentido si  $\beta$  y  $c$  tienen el mismo signo.

El perfil solitónico definido por (3.10) es simétrico respecto de la recta  $\xi = -k$  y, por tanto, escribiremos

$$f(\xi) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} (\xi - x_0) \right),$$

para indicar el perfil centrado en  $x_0$ , donde alcanza su máximo (la amplitud) que vale  $\frac{3c}{\alpha}$ .

Como consecuencia, la expresión del solitón, solución de la ecuación KdV (3.1), es

$$u(x, t) = \frac{3c}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} (x - ct - x_0) \right), \quad (3.11)$$

donde  $c$  es la velocidad y  $\frac{3c}{\alpha}$  su amplitud, que son proporcionales (coincidiendo con la observación de Russell).

Un caso particular de este solitón, con  $\alpha = \beta = 1$  y  $c = \frac{1}{3}$  y  $x_0 = 0$ , para los instantes de tiempo entre  $t = 0$  y  $t = 20$  aparece representado en la Figura 3.7

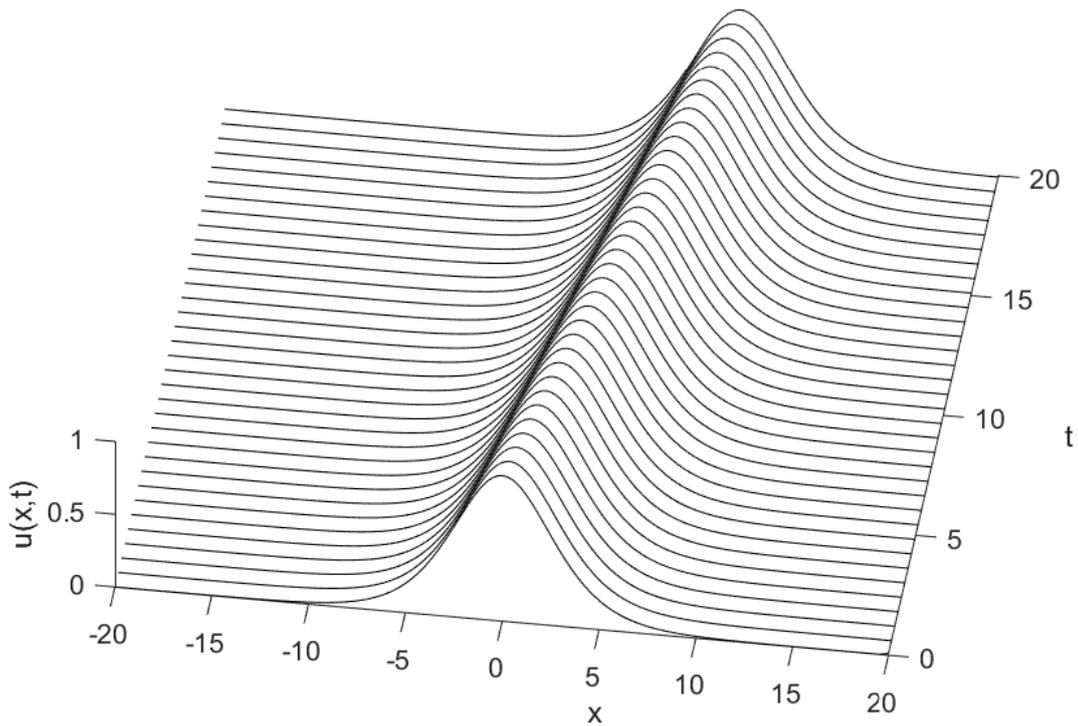


Figura 3.7: Evolución de un solitón entre  $t = 0$  y  $t = 20$  ( $\alpha = \beta = 1$ ,  $c = \frac{1}{3}$ ,  $x_0 = 0$ ).



# Capítulo 4

## Integración numérica de la ecuación de Korteweg-de Vries

Para muchos modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales, encontrar la expresión exacta de su solución es difícil o imposible de conseguir. En esos casos, existen técnicas numéricas de gran utilidad para aproximar sus soluciones. Hay diferentes métodos como los de diferencias finitas, de elementos finitos, de volumen finito, etc., cada uno con diferentes fortalezas y debilidades, que los pueden hacer más o menos adecuados para un problema en particular.

La ecuación KdV ha sido abordada numéricamente de forma amplia (ver por ejemplo [1, 3]). Aquí se utilizará la técnica que discretiza la variable espacial mediante un método pseudoespectral, que asegura que los errores cometidos en espacio son despreciables, y, para discretizar la variable temporal, la bien conocida regla del punto medio implícita, por sus buenas propiedades de estabilidad y de conservación de invariantes. Esta técnica ya fue utilizada en [7] para esta ecuación.

### 4.1. Discretización espacial

Consideramos, en primer lugar, la discretización espacial del problema de valor inicial asociado a la ecuación KdV

$$\begin{cases} u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Para ello, es habitual utilizar la versión equivalente que trata el término no lineal de la ecuación como la derivada de la función al cuadrado, esto es,

$$\begin{cases} u_t + \frac{\alpha}{2}(u^2)_x + \beta u_{xxx} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Como inicialmente, trataremos el problema de la evolución de soluciones solitónicas del problema puro de valores iniciales. Aunque su soporte espacial es toda la recta real, al decaer sus valores exponencialmente podemos suponer que, la solución se encuentra localizada en un intervalo  $[x_L, x_R]$  suficientemente grande para que

el solitón, a lo largo del tiempo de simulación  $[0, T]$ , se encuentre bien representado sobre dicho intervalo y que, fuera de él, la solución sea nula a efectos prácticos.

Por otro lado, al tener que trabajar en un intervalo acotado de la variable espacial suficientemente representativo, debemos incorporar condiciones en la frontera que sean adecuadas al problema. En este sentido serían de interés diferentes opciones. Una podría ser el considerar condiciones Dirichlet homogéneas. Otra sería asumir la propiedad de periodicidad respecto al intervalo  $[x_L, x_R]$ . Esta última permitiría continuar la evolución del solitón después de salir de la ventana espacial considerada, lo que es de especial interés cuando se desea realizar una simulación durante un tiempo muy grande.

Así pues, el problema de valor inicial con condición frontera periódica a tratar es:

$$\begin{cases} u_t + \frac{\alpha}{2}(u^2)_x + \beta u_{xxx} = 0, & x_L < x < x_R, \quad t > 0, \\ u(x_L, t) = u(x_R, t), & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [x_L, x_R]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Para problemas con condiciones periódicas con soluciones regulares, los métodos pseudoespectrales resultan ser muy adecuados [5]. Además, utilizar la técnica de la transformada rápida de Fourier permite que sean implementados de forma eficiente y competitiva.

Por sencillez trabajaremos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , aunque se podría realizar el estudio directamente en un intervalo cualquiera. Por lo tanto, lo primero que haremos será un cambio en la variable espacial para encajar el problema en dicho intervalo. Denotando por  $L = \frac{x_R - x_L}{2\pi}$ , realizamos el cambio de variable que incorpora una traslación espacial (Sección 2.2.1) y un escalado (Sección 2.2.2). Así pues, si  $u$  es la solución del problema (4.1), entonces, la función  $v(x, t) = u(x_L + Lx, t)$ , que proporciona los mismos valores que  $u$  pero en  $x \in [0, 2\pi]$ , es solución del problema

$$\begin{cases} v_t + \frac{\tilde{\alpha}}{2}(v^2)_x + \tilde{\beta}v_{xxx} = 0, & 0 < x < 2\pi, \quad t > 0, \\ v(0, t) = v(2\pi, t), & t \in [0, T], \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (4.2)$$

con  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{L}$  y  $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{L^3}$ , y donde  $v_0(x) = u_0(x_L + Lx)$ . Así pues, trataremos de aproximar la solución  $v(x, t)$  de este problema (4.2), lo que proporcionará una aproximación del problema inicial (4.1) deshaciendo el cambio, es decir, teniendo en cuenta que  $u(x, t) = v\left(\frac{x - x_L}{L}, t\right)$ .

Para la semidiscretización en espacio del problema (discreto en  $x$ , continuo en  $t$ ) introducimos una red equiespaciada en el intervalo  $[0, 2\pi]$ : dado un entero positivo  $J$ , y definiendo el espaciado de los puntos de la red  $h = \frac{2\pi}{J}$ , consideramos los puntos  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, J - 1$ , a los que nos vamos a referir como nodos o puntos de la red espacial.

La solución del problema (4.2) será aproximada por medio de una función que, para cada  $t \in [0, T]$ , sea un polinomio trigonométrico (que verifica entonces las condiciones frontera del problema) y que se pedirá que verifique la ecuación diferencial en los puntos de la red considerada (método de colocación).

Por sencillez, en lo que sigue consideraremos que  $J$  es un número par, y buscamos una aproximación en el espacio de polinomios trigonométricos generado por las funciones  $e^{ipx}$ ,  $p = \frac{-J}{2}, \dots, \frac{J}{2}$ , con coeficientes que son funciones de  $t$ . Denotando por  $V(x, t)$  a dicha aproximación, debe verificar (4.2) en los puntos de la red, es decir,

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \frac{\partial(V^2)}{\partial x} + \tilde{\beta} \frac{\partial V}{\partial x^3} \right) (x_j, t) = 0, & j = 0, 1, \dots, J-1, \quad 0 < t < T, \\ V(0, x_j) = v^0(x_j), & j = 0, 1, \dots, J-1. \end{cases}$$

Para caracterizar esta función trigonométrica, utilizaremos los valores que toma en los puntos de la red. Denotaremos por  $V(t) = [V_0(t), V_1(t), \dots, V_{J-1}(t)]$  el vector con los valores de la función trigonométrica  $V(x, t)$  en los puntos de la red, esto es,  $V_j(t) = V(x_j, t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, J-1$  y que describirá la aproximación a la solución del problema (4.2):  $v(x_j, t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Nótese que por la periodicidad podemos definir  $V_J(t) = V_0(t)$ , como aproximación a  $v(x_J, t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Para cada instante de tiempo  $t \in [0, T]$ , a partir del vector de valores nodales  $\mathbf{V}(t)$ , construimos el siguiente polinomio trigonométrico interpolador (más adelante justificaremos esta elección)

$$\mathcal{I}_J V(x, t) = \sum_{p=\frac{-J}{2}}^{\frac{J}{2}} {}''\hat{V}_p(t) e^{ipx}, \quad x \in [0, 2\pi], \quad (4.3)$$

donde la doble prima en la suma significa que el primer y el último término están multiplicados por  $\frac{1}{2}$ . Los coeficientes de este polinomio son, precisamente, los coeficientes discretos de Fourier asociados al vector  $\mathbf{V}(t)$  definidos como

$$\hat{V}_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''h V_j(t) e^{-ipjh}, \quad p = \frac{-J}{2}, \dots, \frac{J}{2}. \quad (4.4)$$

**Proposición 4.1.** *El polinomio trigonométrico  $\mathcal{I}_J V(x, t)$  definido por (4.3) y cuyos coeficientes están descritos por (4.4), interpola a la función  $V(x, t)$   $2\pi$ -periódica en los puntos de la red.*

*Demostración.* Si evaluamos el polinomio  $\mathcal{I}_J V(x, t)$  en el nodo  $x_l$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_J V(x, t) \Big|_{x=x_l} &= \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} \hat{V}_p(t) e^{iplh} \\ &= \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J h V_j(t) e^{-ipjh} \right) e^{iplh} \\ &= \sum_{j=0}^J \frac{h}{2\pi} V_j(t) \left( \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} e^{-ip(j-l)h} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Calculemos la suma geométrica de razón  $r = e^{-i(j-l)h}$  que aparece en (4.5), es decir

$$S = \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} r^p.$$

En primer lugar consideremos  $l = 1, 2, \dots, J-1$ . Si  $j \neq l$  entonces

$$S = r^{-\frac{J}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^J + \frac{r - r^J}{1 - r} \right),$$

pero como  $r^J = 1$  entonces  $S = 0$ . Si  $j = l$  entonces  $r = 1$  y  $S = J$ . Como consecuencia, sustituyendo en (4.5), obtenemos

$$\mathcal{I}_J V(x, t) \Big|_{x=x_l} = \frac{h}{2\pi} J V_l(t) = V_l(t).$$

Consideremos ahora el caso  $l = 0$ : la razón ahora es  $e^{-ijh}$ . Si  $j = 1, 2, \dots, J-1$ , como antes  $r^J = 1$  y  $S = 0$ . Sin embargo, si  $j = 0$  ó  $j = J$ , entonces  $r = 1$  y  $S = J$ . Por lo tanto, sustituyendo este caso en (4.5)

$$\mathcal{I}_J V(x, t) \Big|_{x=x_0} = \frac{h}{2\pi} J \left( \frac{1}{2} V_0(t) + \frac{1}{2} V_J(t) \right) = V_0(t).$$

□

Por tanto, podemos obtener los valores de la función en los nodos de la red a partir de sus coeficientes como

$$V_j = \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} \hat{V}_p(t) e^{ipjh}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1. \quad (4.6)$$

A continuación presentamos algunas propiedades de los coeficientes de Fourier que serán de interés.

**Proposición 4.2.** Sean  $\mathbf{V}(t) = [V_0(t), \dots, V_{J-1}(t)]$  y  $V_J(t) = V_0(t)$ . Sus coeficientes discretos de Fourier, definidos por (4.4), satisfacen que  $\hat{V}_{-\frac{J}{2}}(t) = \hat{V}_{\frac{J}{2}}(t)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\frac{-J}{2}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''hV_j(t)e^{-i(\frac{-J}{2})jh} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''hV_j(t)e^{ij\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''hV_j(t)e^{-ij\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''hV_j(t)e^{-i(\frac{J}{2})jh} = \hat{V}_{\frac{J}{2}}.\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.3.** Sea  $\mathbf{V}(t) = [V_0(t), \dots, V_{J-1}(t)]$  y  $V_J(t) = V_0(t)$  funciones reales. Sus coeficientes discretos de Fourier, definidos por (4.4), satisfacen que  $\overline{\hat{V}_p} = \hat{V}_{-p}$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\overline{\hat{V}_p(t)} &= \overline{\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''hV_j(t)e^{-ipjh}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''hV_j(t)e^{ipjh} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J {}''hV_j(t)e^{(-i)(-p)jh} = \hat{V}_{-p}(t), \quad p = \frac{-J}{2}, \dots, \frac{J}{2}.\end{aligned}$$

□

**Corolario 4.4.** Sea  $\mathbf{V}(t) = [V_0(t), \dots, V_{J-1}(t)]$  y  $V_0(t) = V(t)$  funciones reales. Sus coeficientes  $\hat{V}_0$  y  $\hat{V}_{\pm \frac{J}{2}}$  son reales.

Para aproximar la derivada respecto a  $x$  de la función  $V(x, t)$  tomaremos la derivada del polinomio trigonométrico interpolador (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) \approx \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{I}_J V(x, t) = \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} {}''ip\hat{V}_p(t)e^{ipx}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Así pues, en los puntos de la red espacial  $x_j, j = 0, 1, \dots, J-1$ , tenemos la siguiente aproximación de la derivada primera

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) \right|_{x=x_j} &\approx \left. \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{I}_J V(x, t) \right|_{x=x_j} = \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} {}''ip\hat{V}_p(t)e^{ipjh} \\ &= \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t)e^{ipjh} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ i \left( \frac{J}{2} \right) \hat{V}_{\frac{J}{2}}(t)e^{i\frac{J}{2}jh} + i \left( -\frac{J}{2} \right) \hat{V}_{-\frac{J}{2}}(t)e^{i(-\frac{J}{2})jh} \right] \\ &= \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t)e^{ipjh} + \frac{1}{2} i \frac{J}{2} \hat{V}_{\frac{J}{2}}(t) (e^{ij\pi} - e^{-ij\pi}) \\ &= \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t)e^{ipjh} - \frac{J}{2} \hat{V}_{\frac{J}{2}}(t) \text{sen}(j\pi) = \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t)e^{ipjh}. \quad (4.7)\end{aligned}$$

Como consecuencia, la evaluación de la derivada del polinomio trigonométrico sobre los puntos de la red, proporciona el siguiente operador de diferenciación pseudoespectral,  $D$  que proporciona una aproximación a la derivada espacial de la función periódica  $V(x, t)$  a partir del vector con sus valores nodales  $\mathbf{V}(t)$ , que denotaremos  $D\mathbf{V}(t)$ , que está definido por componentes como

$$(D\mathbf{V})_j(t) = \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}} \widehat{(D\mathbf{V})}_p(t) e^{ipjh}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1,$$

y donde sus coeficientes de Fourier, gracias a (4.7), se pueden construir a partir de los de  $\mathbf{V}(t)$  como

$$\begin{cases} \widehat{(D\mathbf{V})}_p(t) = ip\hat{V}_p(t), & p = -\frac{J}{2} + 1, \dots, \frac{J}{2} - 1, \\ \widehat{(D\mathbf{V})}_{\pm\frac{J}{2}}(t) = 0, \end{cases}$$

es decir

$$(D\mathbf{V})_j(t) = \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t) e^{ipjh}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1.$$

Nótese también la periodicidad  $(D\mathbf{V})_J(t) = (D\mathbf{V})_0(t)$ . Cabe destacar que, con esta definición de operador de diferenciación pseudoespectral que utiliza el polinomio interpolador (4.3), si los valores de  $\mathbf{V}(t)$  son reales también lo son los de  $D\mathbf{V}(t)$  pues

$$\begin{aligned} \overline{(D\mathbf{V})_j(t)} &= \overline{\sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t) e^{ipjh}} \\ &= \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} (-i)p\overline{\hat{V}_p(t)} e^{-ipjh} \\ &= \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} i(-p)\hat{V}_{-p}(t) e^{i(-p)jh} = (D\mathbf{V})_j(t) \quad j = 0, 1, \dots, J-1. \end{aligned}$$

Sin embargo, si hubiéramos utilizado el polinomio interpolador trigonométrico no simétrico que suele ser habitual

$$\mathcal{I}_J V(x, t) = \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}-1} \hat{V}_p(t) e^{ipx},$$

con

$$\hat{V}_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{J-1} hV_j(t) e^{-ipjh}, \quad p = \frac{-J}{2}, \dots, \frac{J}{2} - 1,$$

el operador de derivación pseudoespectral  $(D\mathbf{V})_j(t) = \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t)e^{ipjh}$ , proporcionará valores complejos en general, aunque sean reales los valores de  $\mathbf{V}(t)$ , porque

$$\begin{aligned}
 \overline{(D\mathbf{V})_j(t)} &= \overline{\sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}-1} ip\hat{V}_p(t)e^{ipjh}} \\
 &= \sum_{p=-\frac{J}{2}}^{\frac{J}{2}-1} (-i)p\overline{\hat{V}_p(t)}e^{-ipjh} \\
 &= -i\left(-\frac{J}{2}\right)\overline{\hat{V}_{-\frac{J}{2}}(t)}e^{-i\left(\frac{-J}{2}\right)jh} + \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} i(-p)\overline{\hat{V}_{-p}(t)}e^{i(-p)jh} \\
 &= i\frac{J}{2}\overline{\hat{V}_{-\frac{J}{2}}(t)}e^{i\frac{J}{2}jh} + \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} ip\overline{\hat{V}_p(t)}e^{ipjh} \\
 &= i\frac{J}{2}\overline{\hat{V}_{-\frac{J}{2}}(t)}e^{i\frac{J}{2}jh} + (D\mathbf{V})_j(t) - i\left(\frac{-J}{2}\right)\overline{\hat{V}_{-\frac{J}{2}}(t)}e^{i\left(-\frac{J}{2}\right)jh} \\
 &= (D\mathbf{V})_j(t) + iJ\overline{\hat{V}_{-\frac{J}{2}}(t)}\cos(j\pi).
 \end{aligned}$$

El operador  $D^3$  para aproximar la derivada tercera será la composición de tres veces el operador  $D$  y, por tanto, tendrá coeficientes de Fourier

$$\begin{cases} \left(\widehat{D^3\mathbf{V}}\right)_p(t) = -ip^3\hat{V}_p(t), & p = -\frac{J}{2} + 1, \dots, \frac{J}{2} - 1, \\ \left(\widehat{D^3\mathbf{V}}\right)_{\pm\frac{J}{2}}(t) = 0. \end{cases}$$

La definición por componentes es

$$(D^3\mathbf{V})_j(t) = \sum_{p=-\frac{J}{2}+1}^{\frac{J}{2}-1} -ip^3\hat{V}_p(t)e^{ipjh}, \quad j = 0, \dots, J-1.$$

Por otro lado, la expresión  $\mathbf{V}^2(t)$  debe entenderse como el vector producto componente a componente, esto es,  $(\mathbf{V}^2)_j(t) = V_j^2(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, J-1$ . La semidiscretización en espacio que usamos está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para el vector  $\mathbf{V}(t)$  siguiente:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V} + \frac{\tilde{\alpha}}{2}D\mathbf{V}^2 + \tilde{\beta}D^3\mathbf{V} = \mathbf{0}.$$

Sin embargo, para la implementación, es mejor trabajar en el espacio de Fourier y así obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para los coeficientes de

Fourier asociados a  $\mathbf{V}(t)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{V}_p = -\frac{\tilde{\alpha}}{2} ip(\hat{V}^2)_p + \tilde{\beta} ip^3 \hat{V}_p & p = -\frac{J}{2} + 1, \dots, \frac{J}{2} - 1, \\ \frac{d}{dt} \hat{V}_{\pm \frac{J}{2}} = 0. \end{cases}$$

Denotando por  $\hat{\mathbf{V}}(t)$  el vector de coeficientes de Fourier en el instante  $t$ , el sistema anterior toma la forma

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{V}}). \quad (4.8)$$

Para evaluar el miembro de la derecha de (4.8) se necesitan no sólo los coeficientes de Fourier de  $\mathbf{V}(t)$ , sino también los de  $\mathbf{V}^2(t)$ . Para calcular estos últimos se realiza el siguiente procedimiento

- A partir de  $\hat{\mathbf{V}}$  se recupera  $\mathbf{V}(t) = [V_0(t), \dots, V_{J-1}(t)]$  usando (4.6), y se toma  $V_J(t) = V_0(t)$ .
- A partir de este vector  $\mathbf{V}(t)$ , se construye  $\mathbf{V}^2(t) = [V_0^2(t), \dots, V_{J-1}^2(t)]$  y se toma  $V_J^2(t) = V_0^2(t)$ .
- A partir de  $\mathbf{V}^2(t)$  se obtienen sus coeficientes de Fourier aplicando la fórmula (4.4) a este vector.

Para la implementación práctica, el cálculo de coeficientes de Fourier a partir de los valores nodales (proceso denominado transformada de Fourier discreta), y de los valores nodales a partir de los coeficientes de Fourier (proceso denominado transformada inversa de Fourier discreta), pueden ser llevados a cabo de manera muy eficiente utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) que reduce considerablemente su coste computacional, y que será particularmente sencillo y económico cuando  $J$  es una potencia de 2.

En este trabajo se ha utilizado MATLAB para implementar el método numérico para el que están las funciones *fft* e *ifft* que llevan a cabo estas transformaciones.

La gran ventaja de la técnica pseudoespectral utilizada, frente a otros métodos (por ejemplo, métodos en diferencias finitas), es que el orden de convergencia de las aproximaciones a la solución sólo está restringida por la regularidad de la solución del problema. Para soluciones muy regulares los errores cometidos son exponencialmente pequeños a medida que el espaciado  $h$  tiende hacia cero (para los métodos en diferencias, el error nunca es mejor que una cierta potencia de  $h$  que depende del método específico que se utilice).

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes de Fourier (4.8) debe ser resuelto, para lo cual utilizaremos un integrador numérico. Previamente hay que añadir al sistema un dato inicial.

Como aproximación  $\mathbf{V}(0)$  podemos tomar la restricción a los puntos de la red espacial de la función  $v_0(x)$ , es decir,

$$V_j(0) = v_0(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, J - 1.$$

Claramente, por la periodicidad de  $v_0$ , se tiene que  $V_J(0) = V_0(0)$ . Ahora  $\hat{\mathbf{V}}(0)$  incluirá los coeficientes de Fourier obtenidos a partir de  $\mathbf{V}(0)$  usando (4.4).

## 4.2. Discretización temporal

La semidiscretización espacial de la ecuación KdV anteriormente presentada, proporciona un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y por lo tanto, la variable temporal permanece aun siendo una variable continua. Queremos utilizar un método totalmente discreto, por lo que la variable  $t$  también aparecerá de forma discreta. Fijado el tiempo final para la simulación  $T > 0$ , dado un entero positivo  $N$ , definimos el tamaño de paso en tiempo como  $k = \frac{T}{N}$ , y los niveles de tiempo donde vamos a obtener la aproximación numérica como  $t^n = kn, n = 0, 1, \dots, N$ .

Existe una gran variedad de métodos numéricos para aproximar la solución del sistema (4.8) utilizando esta red temporal [10]. Sin embargo, para la elección del integrador utilizado, además de sus propiedades (por ejemplo de consistencia, estabilidad y convergencia) hay que tener en cuenta las propiedades del sistema del que se quiere aproximar la solución (por ejemplo, rigidez).

En nuestro caso, recordemos que la ecuación KdV posee una infinidad de cantidades conservadas, y diferentes estudios (como [7]) avalan el uso de integradores numéricos que conservan algunas de estas cantidades invariantes. Esto se debe no sólo a que la solución numérica compartirá esta característica cualitativa de la solución exacta del problema, sino también a que el método numérico exhibirá una propagación del error favorable, que lo hacen superior a otros métodos desde un punto de vista cuantitativo también. Aquí, como en [7], utilizaremos la regla del punto medio implícito para aproximar las soluciones de (4.8)

$$\frac{\hat{\mathbf{V}}^{n+1} - \hat{\mathbf{V}}^n}{k} = \mathbf{f} \left( \frac{\hat{\mathbf{V}}^n + \hat{\mathbf{V}}^{n+1}}{2} \right). \quad (4.9)$$

Este es un método de un paso (sólo involucra dos niveles de tiempo:  $t^n$  y  $t^{n+1}$ ), de segundo orden (proporciona aproximaciones cuyo error decrece como el cuadrado del paso  $k$ ), A-estable (de particular interés para problemas rígidos) y conserva los invariantes cuadráticos como el momento  $P(t)$  definido en la Proposición 2.9. Así pues, partiendo de la aproximación del dato inicial  $\hat{\mathbf{V}}^0 = \hat{\mathbf{V}}(0)$  (vector de coeficientes de Fourier de la restricción a los puntos de la red espacial de la función  $v_0(x)$ ), obtendremos  $\hat{\mathbf{V}}^{n+1}$  a partir de  $\hat{\mathbf{V}}^n$  gracias a (4.9). Sin embargo, es un método implícito pues la aproximación en el nivel superior  $t^{n+1}$  requiere la solución de un sistema no lineal, lo que conlleva una complejidad computacional mayor que la de un método explícito.

Una forma alternativa de implementar este método es definir una nueva variable (ver, [6])

$$\hat{\mathbf{Z}} = \frac{\hat{\mathbf{V}}^n + \hat{\mathbf{V}}^{n+1}}{2}.$$

Con esta nueva variable, el sistema (4.9) se escribe

$$\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{V}}^n + \frac{k}{2} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{Z}}). \quad (4.10)$$

Una vez resolvamos este sistema para  $\hat{\mathbf{Z}}$ , la aproximación a la solución en el nuevo nivel de tiempo  $t^{n+1}$  se obtiene como

$$\hat{\mathbf{V}}^{n+1} = 2\hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{V}}^n.$$

Para resolver el sistema (4.10) propondremos una iteración de punto fijo que estará influenciada por la expresión particular de la función  $\mathbf{f}$ . En nuestro caso tenemos que resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\hat{Z}_p = \hat{V}_p^n + \frac{k}{2} \left( -\frac{ip\tilde{\alpha}}{2} (\widehat{\mathbf{Z}^2})_p + ip^3\tilde{\beta}\hat{Z}_p \right), \quad p = -\frac{J}{2} + 1, \dots, \frac{J}{2} - 1,$$

$$\hat{Z}_{\pm\frac{J}{2}} = \hat{V}_{\pm\frac{J}{2}}^n.$$

y proponemos una iteración de punto fijo que va a tratar de forma implícita la parte lineal y de forma explícita la no lineal. Denotando por  $\hat{\mathbf{Z}}^{[v]}$ ,  $v = 0, 1, \dots$ , el iterante  $v$ -ésimo, construimos  $\hat{\mathbf{Z}}^{[v+1]}$  a partir de  $\hat{\mathbf{Z}}^{[v]}$  usando

$$\hat{Z}_p^{[v+1]} = \hat{V}_p^n - \frac{k}{4} ip\tilde{\alpha} (\widehat{\mathbf{Z}^{[v]}})_p^2 + \frac{k}{2} ip^3\tilde{\beta}\hat{Z}_p^{[v+1]}, \quad p = -\frac{J}{2} + 1, \dots, \frac{J}{2} - 1,$$

es decir, explícitamente

$$\hat{Z}_p^{[v+1]} = \frac{\hat{V}_p^n - \frac{k}{4} ip\tilde{\alpha} (\widehat{\mathbf{Z}^{[v]}})_p^2}{1 - \frac{k}{2} ip^3\tilde{\beta}}, \quad p = -\frac{J}{2} + 1, \dots, \frac{J}{2} - 1.$$

Como valor inicial para la iteración de punto fijo en [6] se plantean diferentes posibilidades. Aquí consideraremos la aproximación de segundo orden que ofrece el método de Euler cuando se da un sólo paso

$$\hat{Z}_p^{[0]} = \hat{V}_p^n - \frac{k}{4} ip\tilde{\alpha} (\widehat{\mathbf{V}^n})_p^2 + \frac{k}{2} ip^3\tilde{\beta}\hat{V}_p^n, \quad p = -\frac{J}{2} + 1, \dots, \frac{J}{2} - 1.$$

A efectos prácticos la iteración se detendrá cuando la diferencia entre dos iterantes consecutivos sea suficientemente pequeña, o bien cuando se sobrepase un número máximo de iteraciones.

# Capítulo 5

## Experimentos numéricos

En este capítulo se presentan diferentes experimentos, realizados con el método numérico totalmente discreto diseñado en el capítulo anterior, para mostrar su validez a la hora de calcular aproximaciones a la solución de la ecuación KdV.

El programa escrito en MATLAB se encuentra en el Apéndice A.

En primer lugar consideramos el problema de evolución de un único solitón, y a continuación presentamos el problema de interacción entre dos solitones de distinta velocidad.

Notemos que en el problema de evolución de un único solitón conocemos la expresión de la solución en cualquier instante de tiempo dada por (3.11). Así pues, utilizaremos este dato para comprobar que el método numérico proporciona una aproximación adecuada en esta situación.

Cuando realicemos una simulación a tiempos muy largos, teniendo en cuenta que estamos considerando el problema con condición frontera periódica, si su velocidad es positiva el solitón se moverá hacia la derecha, y a medida que vaya saliendo por el extremo derecho del intervalo  $x_R$  se verá apareciendo de nuevo por el extremo izquierdo  $x_L$ .

Fijaremos valores de  $J$  y  $N$  que representan, respectivamente, los parámetros de la discretización espacial y temporal, que definen los correspondientes pasos  $h = \frac{x_R - x_L}{J}$ ,  $k = \frac{T}{N}$ .

### 5.1. Experimento con un único solitón

Se presenta el experimento que simula la evolución de un único solitón. En este caso, se eligen los parámetros de la ecuación  $\alpha = \beta = 1$ . Para la expresión del solitón (3.11) elegimos la velocidad  $c = 1$  (con lo que su amplitud es  $A = 3$ ), y que inicialmente,  $t = 0$ , su máximo esté localizado en  $x_0 = 0$ .

Para representarlo adecuadamente, vamos a elegir un intervalo simétrico respecto del origen y, teniendo en cuenta el decaimiento exponencial de los valores del solitón, nos bastará tomar  $x_L = -64$  y  $x_R = 64$ . Llevaremos a cabo una experimentación hasta el tiempo final  $T = 10000$ .

Fijados los valores de  $J$  y  $N$  compararemos la solución numérica obtenida  $\mathbf{U}^n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , con la solución teórica  $u(x, t)$ , evaluada en cada instante de tiempo  $t^n$

en la red espacial, es decir

$$\mathbf{u}^n = [u(x_0, t^n), u(x_1, t^n), \dots, u(x_J, t^n)],$$

(notemos que ambas soluciones discretas  $\mathbf{U}^n$  y  $\mathbf{u}^n$  dependen de  $J$ , aunque la notación no incluye esta dependencia). Así pues,

$$e_{J,N}^n = \|\mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq J-1} |U_j^n - u_j^n|,$$

representará el error, en la norma del supremo, cometido por la aproximación numérica en el nivel de tiempo  $t^n$ .

En la Tabla 5.1 presentamos este error en el tiempo final  $t^N = T$ , para diferentes valores de  $J$  y  $N$ .

$J \setminus N$	250000	500000	1000000	2000000	4000000	8000000
256	1.0832e+00	2.8272e-01 (1.94)	7.0192e-02 (2.01)	1.7490e-02 (2.01)	4.3674e-03 (2.00)	1.0945e-03 (2.00)
512	1.0853e+00	2.8279e-01 (1.94)	7.0918e-02 (2.00)	1.7712e-02 (2.00)	4.4255e-03 (2.00)	1.1093e-03 (2.00)
1024	1.0913e+00	2.8279e-01 (1.95)	7.0937e-02 (2.00)	1.7722e-02 (2.00)	4.4282e-03 (2.00)	1.1099e-03 (2.00)

Tabla 5.1: Errores en la solución ( $e_{J,N}$ ) para distintos valores de  $J$  y  $N$

De la tabla observamos que, para  $J$  fijo, el efecto de disminuir el paso en tiempo hace que el error vaya disminuyendo (propio de un método convergente). Sin embargo, para un valor fijo de  $N$ , no se aprecia una disminución significativa en el error al disminuir el paso en espacio  $h$ : los errores cometidos para distintos valores de  $J$  son prácticamente iguales (esto es, el método pseudoespectral proporciona una alta precisión incluso para valores pequeños de  $J$ ). Esta disparidad en el error al considerar el refinamiento de los parámetros, induce a pensar que el error que predomina es el de la discretización temporal, siendo el error cometido por la discretización espacial despreciable frente a este. Esto está en consonancia con el orden exponencial de aproximación que produce el método pseudoespectral (el error producido por la discretización con el valor de  $J$  más grosero ya se encuentra saturado).

Por otra parte, nos planteamos el efecto de refinar el paso en tiempo en el error. Para ello, la Tabla 5.1 también incorpora, entre paréntesis, el orden efectivo  $r$  asociado a los errores descritos con dos valores del parámetro de la discretización temporal consecutivos:  $N$  y  $2N$ . Utilizaremos la fórmula habitual

$$r = \frac{\log(e_{J,N}/e_{J,2N})}{\log 2}.$$

Observamos que la tabla ratifica el orden de convergencia 2 de la discretización temporal dada por la regla del punto medio implícita.

Por lo tanto, queda de manifiesto el buen comportamiento del método numérico para aproximar la evolución de una solución solitónica de la ecuación KdV para largos tiempos de integración.

Por otro lado, también nos interesará valorar el comportamiento del error con el tiempo, para unos valores fijos de la discretización. Es bien conocido que los métodos que preservan invariantes del movimiento (para la ecuación KdV, en concreto, fue demostrado en [7]) puede presentar una propagación del error más favorable en la integración numérica de la evolución de un solitón, que la que se observa en métodos no conservativos, conduciendo a una mayor precisión de la que uno podría haber esperado inicialmente.

En la Figura 5.1 presentamos, para  $J = 1024$  y dos valores diferentes de la discretización temporal ( $N = 4000000$  en rojo y  $N = 8000000$  en azul) la evolución del error  $e_{J,N}^n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Esta figura, que utiliza escala logarítmica en ambos ejes, muestra dos rectas paralelas con pendiente 1 (ver el segmento en negro en la esquina inferior derecha que representa un comportamiento lineal). Esto certifica el crecimiento lineal del error del método conservativo en ambos casos y, por supuesto, un error menor para un valor menor del paso  $k$ . (En [7] puede comprobarse un crecimiento cuadrático del error cuando se utiliza uno no conservativo).

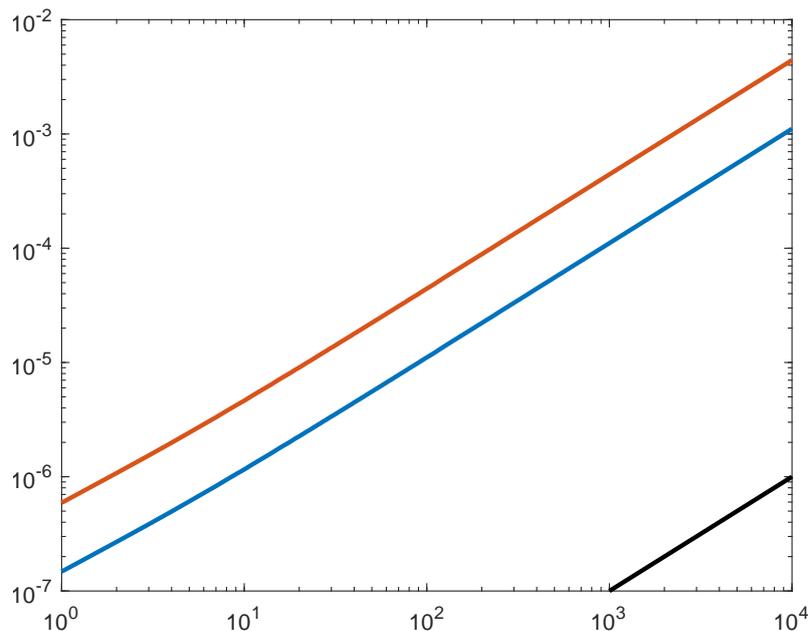


Figura 5.1: Evolución del error en la solución hasta  $T = 10000$ , para  $J = 1024$ ,  $N = 4000000$  (rojo) y  $J = 8000000$  (azul).

Es más, en [7] se demuestra que la amplitud del solitón numérico presenta un error, con respecto a la del solitón teórico, que permanece acotado a lo largo del tiempo y, que el punto donde se localiza la amplitud del solitón numérico sufre un desfase con respecto al teórico que crece linealmente con el tiempo. Este comportamiento lo observamos claramente en las siguientes figuras. La Figura 5.2 muestra la evolución del error cometido en la amplitud del solitón con el integrador para  $J = 1024$  y los valores del parámetro de la discretización temporal  $N = 4000000$

(en rojo) y  $N = 8000000$  (en azul). Claramente, en ambos casos, dicho error está acotado sin mostrar un crecimiento con el tiempo.

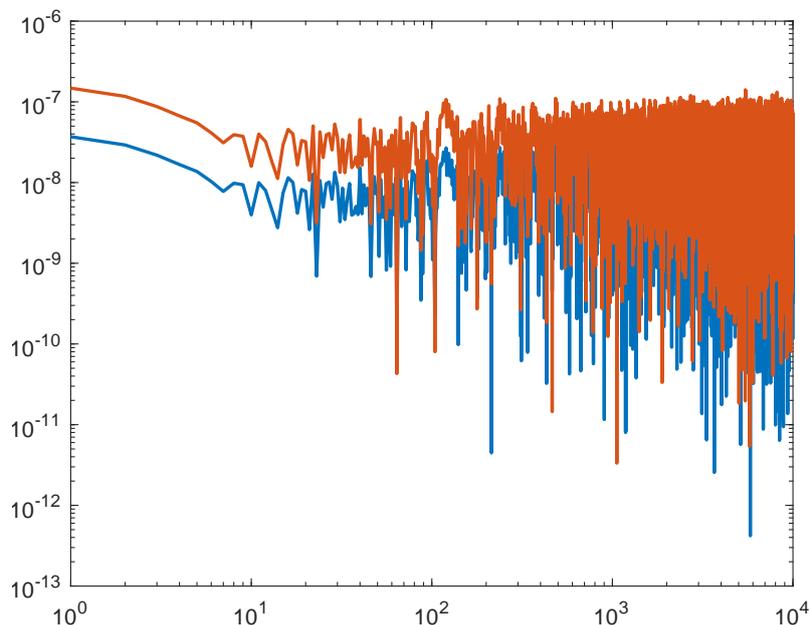


Figura 5.2: Evolución del error en la amplitud hasta  $T = 10000$ , para  $J = 1024$ ,  $N = 4000000$  (rojo) y  $N = 8000000$  (azul).

La Figura 5.3 muestra, para los mismos valores de los parámetros que antes, la evolución del error cometido en el punto donde se alcanza la amplitud. Como muestra el segmento que aparece en la esquina inferior derecha, este error crece linealmente.

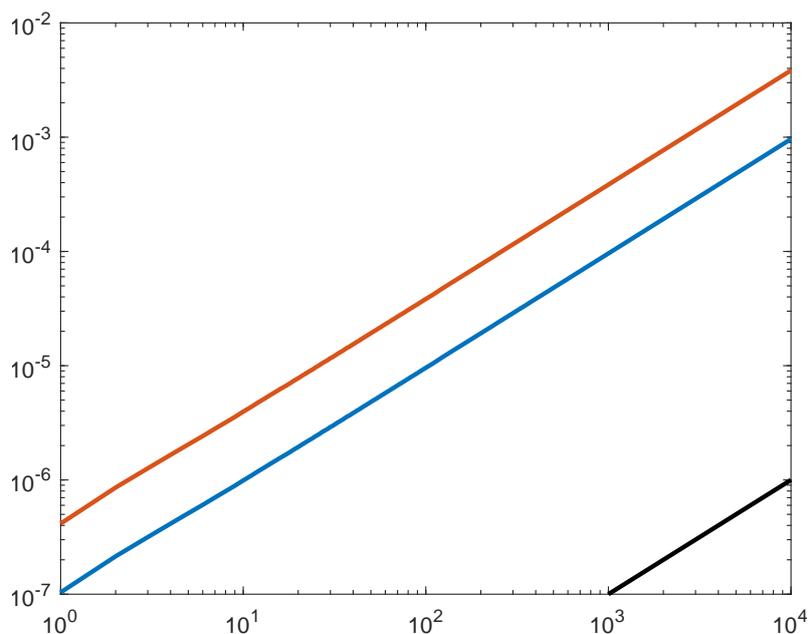


Figura 5.3: Evolución del error en la fase hasta  $T = 10000$ , para  $J = 1024$  y  $N = 4000000$  (rojo) y  $N = 8000000$  (azul).

Como consecuencia de estas buenas propiedades, el método numérico será de utilidad para estimar los parámetros básicos de la solución. Por ejemplo, cuando surge un nuevo solitón durante la integración, como es el caso de interacción que trataremos a continuación.

## 5.2. Interacción entre solitones

Nos planteamos a continuación el interés del método numérico para tratar el fenómeno de interacción entre solitones.

Como ya planteamos en el capítulo introductorio, este problema ya fue analizado numéricamente por N.J. Zabusky y M.D. Kruskal [21], percatándose del choque elástico que se producía entre dos solitones de distinta velocidad. A diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones lineales, donde la combinación lineal de soluciones es también solución, la ecuación KdV no satisface este principio de superposición. Sin embargo, se presenta un escenario muy similar para los solitones. La ecuación KdV posee una solución bisolitónica que permite representar, en un instante dado, dos ondas (básicamente dos solitones separados) donde el más alto (inicialmente a la izquierda) alcanza al más bajo (a la derecha) fusionándose durante un tiempo, para reaparecer a continuación, el más alto a la derecha del más bajo y, separarse después [8]. Cabe destacar que después del choque ambas ondas conservan sus propiedades previas (forma, amplitud y velocidad). Eso sí, con un pequeño desfase en el punto donde se alcanza su máximo con respecto al que tendrían si no hubiera ocurrido la interacción: el más alto aparece desplazado hacia la derecha y el más bajo hacia la izquierda.

Nos proponemos analizar este comportamiento numéricamente utilizando el método numérico propuesto. Para la experimentación, de nuevo, fijamos los parámetros de la ecuación como  $\alpha = \beta = 1$ . Como aproximación al problema en el instante inicial, consideramos la superposición de dos solitones, suficientemente separados, y representados en una ventana suficientemente amplia para observar el fenómeno de interacción. En particular, consideramos como dato inicial la función

$$u_0(x) = 3 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2}(x + 30) \right) + 12 \operatorname{sech}^2 (x + 50), \quad (5.1)$$

que describe la superposición de dos solitones a partir de la expresión (3.11). Uno tiene amplitud  $A_1 = 3$  (que corresponde a la velocidad  $c_1 = 1$ ) y cuya amplitud máxima se encuentra en el punto  $x_0^{(1)} = -30$ . El otro tiene amplitud  $A_2 = 12$  (que corresponde a la velocidad  $c_2 = 4$ ), encontrándose su amplitud máxima en el punto  $x_0^{(2)} = -50$ . Como ventana para su representación consideramos adecuados  $x_L = -64$  y  $x_R = 64$ .

La Figura 5.4 representa la evolución de la solución numérica hasta el tiempo final  $T = 20$  (suficientemente largo para que se aprecie su estado inicial, la colisión y su evolución tras el choque) que refleja en gran medida, lo descrito para las soluciones bisolitónicas.

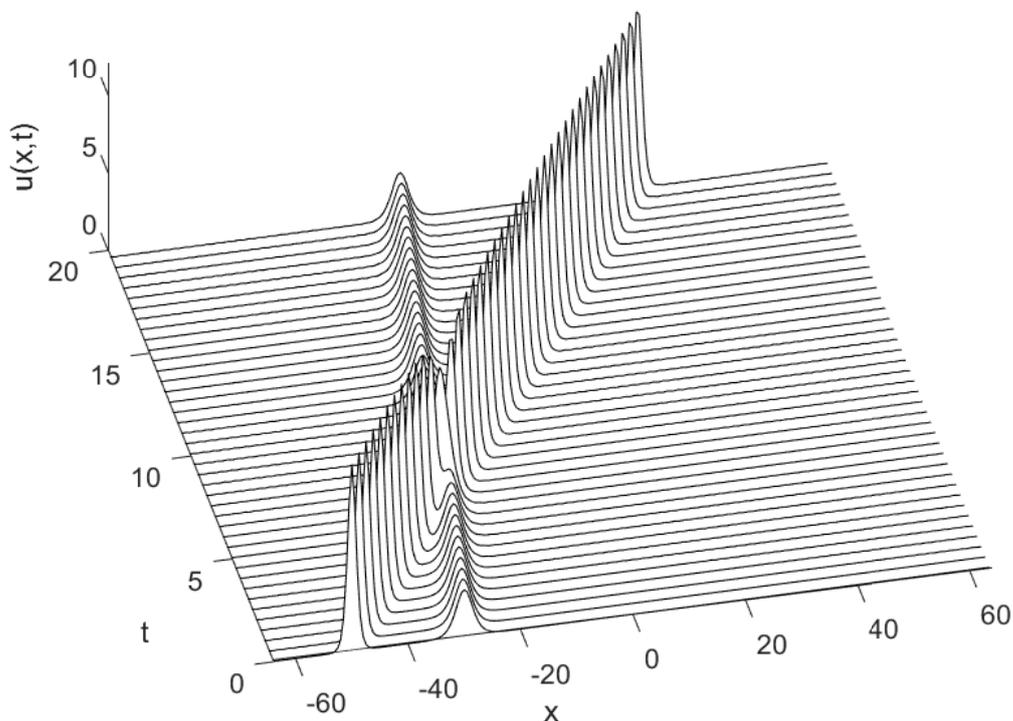


Figura 5.4: Simulación del choque de dos solitones:  $c_1 = 1$  ( $A_1 = 3$ ),  $x_0^{(1)} = -30$ ,  $c_2 = 4$  ( $A_2 = 12$ ),  $x_0^{(2)} = -50$ .

En un principio, el choque entre ambas ondas puede parecer una superposición lineal, sin embargo, esto no es así. Un análisis más detallado de esta interacción revela la aparición de un desfase en ambas ondas. Mientras que la más rápida aparece más a la derecha de donde quedaría si no hubiera habido choque, la más lenta aparece más hacia la izquierda. Para resaltar el desfase en ambas ondas, realizaremos simulaciones tomando como dato inicial cada uno de los solitones individuales (posicionados inicialmente en los mismos puntos) y comprobando dónde se encontrarían en  $T = 10$ . La Figura 5.5 muestra en rojo la solución que proporciona el método numérico, partiendo del dato inicial (5.1), tras el choque, y en azul la superposición de la que se obtendría para cada solitón.

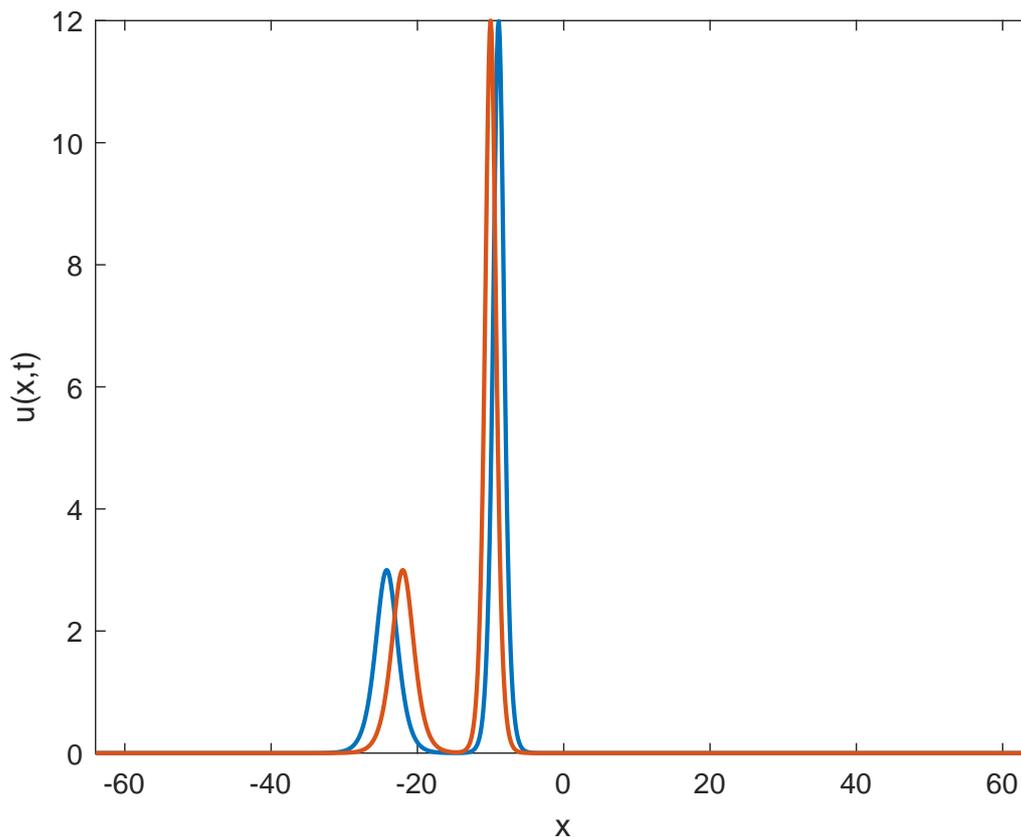


Figura 5.5: Desfase de los solitones tras la interacción

El método numérico también puede ser de interés para revelar otros fenómenos: por ejemplo, la apariencia del choque de los solitones, que como veremos dependerá de las velocidades de las ondas que interactúan. Así, podemos distinguir dos casos diferentes:

- Interacción “fusión-separación”

Este caso se produce cuando la onda más veloz se mueve notablemente más rápido que la lenta. Entonces se produce una interacción en la que durante un instante de tiempo, ambas ondas se fusionan en una sola onda que alcanza una altura menor que la amplitud de la onda más rápida. La Figura 5.6 muestra esta situación donde se ha tomado inicialmente la superposición de dos soluciones. Se observa claramente la fusión de ambas ondas, en un instante intermedio.

- Interacción “rebote-intercambio”

Este caso se produce cuando la proporción entre las velocidades del solitón rápido y del lento es pequeña. En este caso, en la interacción siempre se aprecian 2 amplitudes máximas. La Figura 5.7 es representativa de esta situación donde se considera la superposición de dos solitones como en (5.1), pero ahora con velocidades  $c_1 = 2$  ( $A_1 = 6$ ) y  $c_2 = 4$  ( $A_2 = 12$ ) y posición inicial  $x_0^{(1)} = -30$  y  $x_0^{(2)} = -45$ , respectivamente.

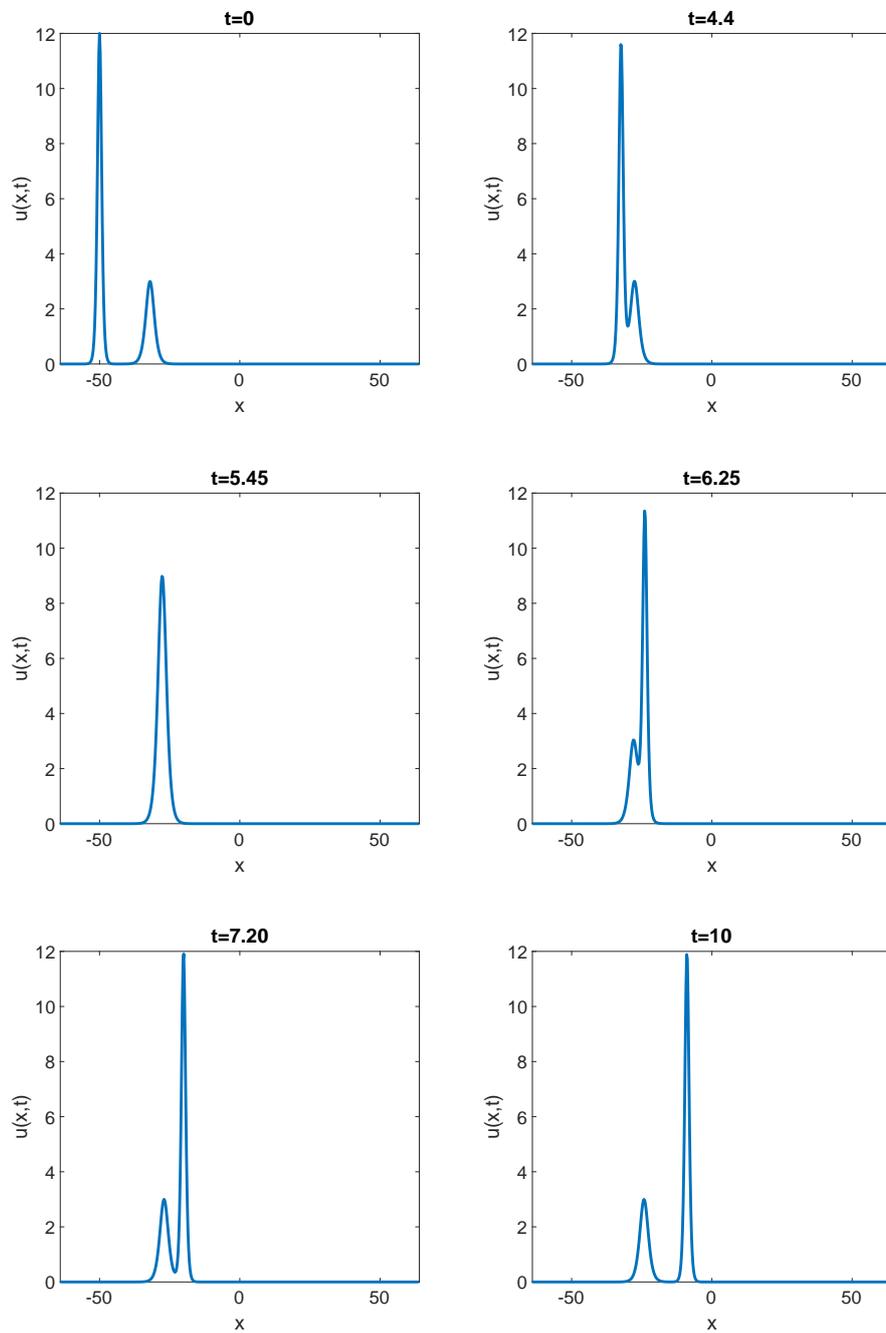


Figura 5.6: Interacción “fusión-separación” entre solitones  $c_1 = 1$  ( $A_1 = 3$ ),  $x_0^{(1)} = -30$ ,  $c_2 = 4$  ( $A_2 = 12$ ),  $x_0^{(2)} = -50$ .

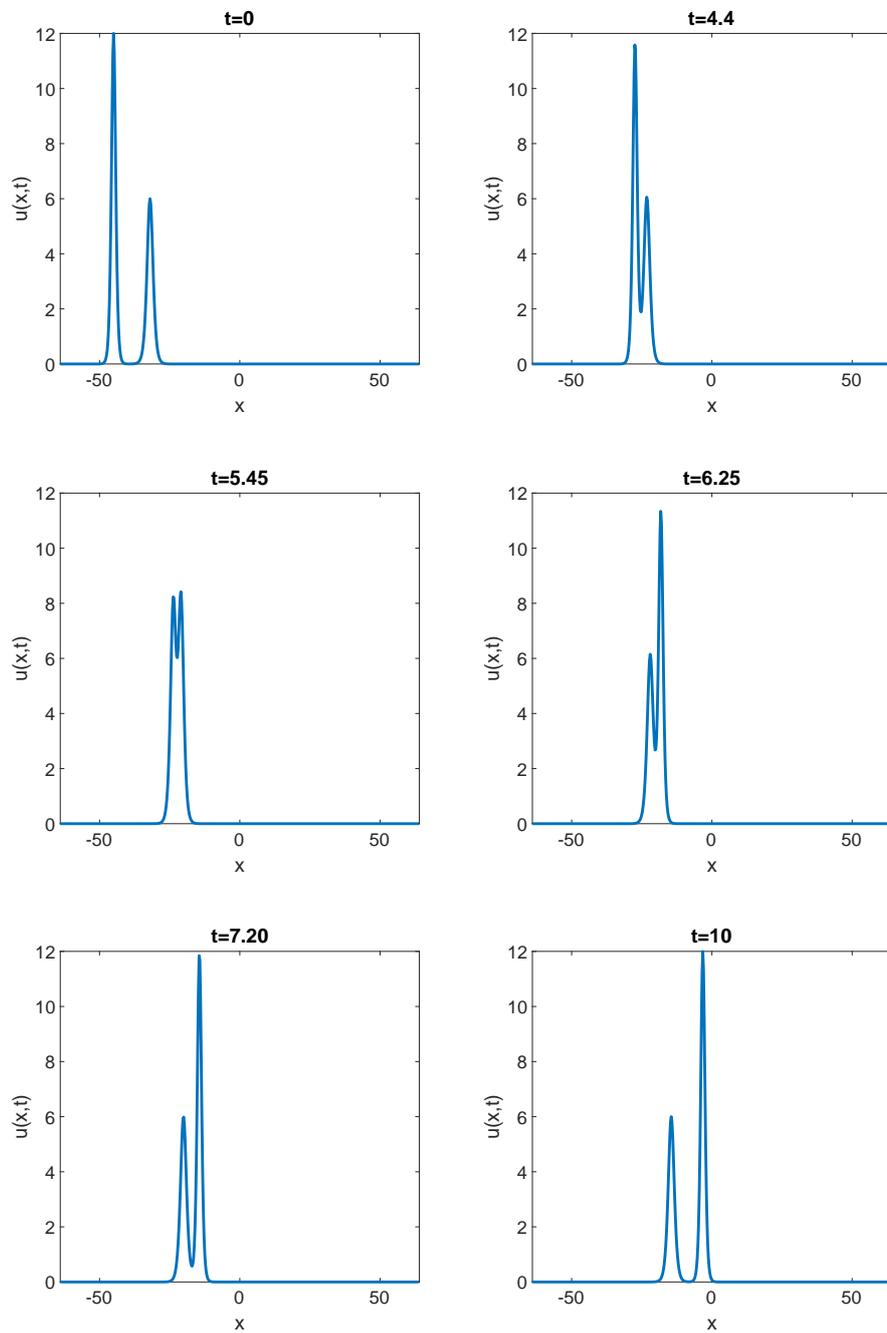


Figura 5.7: Interacción “rebote-intercambio” entre solitones  $c_1 = 2$  ( $A_1 = 6$ ),  $x_0^{(1)} = -30$ ,  $c_2 = 4$  ( $A_2 = 12$ ),  $x_0^{(2)} = -45$ .



# Capítulo 6

## Conclusiones

La ecuación KdV es una ecuación en derivadas parciales no lineal que se ha convertido en un prototipo para describir el comportamiento de ondas solitarias en aguas poco profundas. El balance de los distintos términos de la ecuación hace posible la existencia de soluciones en forma de onda solitaria.

En este trabajo hemos puesto de manifiesto algunas de sus propiedades y hemos hecho un estudio que permite justificar la existencia de estas soluciones tan destacadas: los solitones.

Para realizar un estudio más detallado de la dinámica de sus soluciones (y como posible trabajo futuro, del de otras ecuaciones que comparten con la KdV soluciones similares) queda justificado el uso de un método numérico eficiente y preciso para su integración.

Aquí hemos utilizado un método numérico que discretiza la variable espacial con una técnica pseudoespectral, y la variable temporal mediante la regla del punto medio implícita. El interés de esta técnica queda justificada con la experimentación numérica realizada que muestra la importancia de obtener aproximaciones no sólo convergentes, sino que también preserven propiedades del problema (en este caso, de cantidades conservadas por la ecuación).

El método numérico se muestra tan robusto que nos permite llevar a cabo simulaciones que ahondan en fenómenos interesantes del problema, como es la interacción de solitones.



# Apéndice A

## Código en Matlab

Se presenta el código del programa descrito en el Capítulo 4 para la evolución de un solitón.

```
1 clear
2
3 alpha=0;
4 beta=1;
5 x_min=-64;
6 x_max=64;
7 L=x_max-x_min;
8
9 % parametros discretizacion espacial
10 J=1024;
11 h=L/J;
12 xx=linspace(x_min,x_max-h,J);
13 % parametros discretizacion temporal
14 T=1000;
15 N=4000000;
16 k=T/N;
17 tt=linspace(0,T,N+1)';
18
19 % escalamos la ecuacion  $u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0$  al
    intervalo  $[0, 2\pi]$ 
20 lambda=2*pi/L;
21 alpha1=alpha*lambda;
22 beta1=beta*lambda^3;
23
24 % vectores asociados a la transformada de Fourier
25 p=[0,-J/2+1:J/2-1];
26 ip=fftshift(1i*p);
27 ip3=fftshift(-1i*p.^3);
28 ipalpha1=0.5*alpha1*ip;
29 ip3beta1=beta1*ip3;
30
31 % condicion inicial
32 c=1;
```

```
33 x0=(x_min+x_max)*0.5;
34 u_aprox=3*c/alpha*sech(0.5*sqrt(c/beta)*(xx-x0)).^2;
35 uf= fft(u_aprox);
36 khalf=k/2;
37
38 % integracion temporal
39 for n=1:N
40     uf=paso(uf, khalf, ipalphal, ip3betal);
41     u_aprox=real(ifft(uf));
42 end
43
44 % grafica solucion final
45 plot(xx, u_aprox)
46
47
48 %Funcion paso en tiempo
49 function uf=paso(uf, khalf, ipalphal, ip3betal)
50 Maxiter=12;
51 Tol=1e-12;
52 iter=0;
53 difference=1;
54 Z_old=uf+khalf.*(-ipalphal.*fft(ifft(uf).^2)-ip3betal.*uf);
55 while difference>Tol
56     iter=iter+1;
57     Z_new=(uf-khalf*ipalphal.*fft(ifft(Z_old).^2))./(1+khalf*
58         ip3betal);
59     difference=norm(Z_new-Z_old, "Inf");
60     Z_old=Z_new;
61     if iter>Maxiter
62         disp('Maximo de iteraciones')
63     end
64 end
65 uf=2*Z_new-uf;
66 end
```

# Bibliografía

- [1] G.A. Baker, V.A. Dougalis and O.A. Karakashian. Convergence of Garlekin approximations for the Korteweg-de Vries equation. *Mathematics of Computation*, 40:419–433, 1983.
- [2] T.B. Benjamin, J.L. Bona and J.J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philosophical Transactions B*, 272:47–78, 1972.
- [3] J.L. Bona, V.A. Dougalis, O.A. Karakashian and W.R. McKinney. Conservative, high-order numerical schemes for the generalized Korteweg-de Vries equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, 351:107–164, 1995.
- [4] R. Camassa and D.D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Physical Review Letters*, 71:1661–1664, 1993.
- [5] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang. *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*. Springer, 2006.
- [6] J. de Frutos and J.M. Sanz-Serna. An easily implementable fourth-order method for the time integration of wave problems. *Journal of Computational Physics*, 103:160–168, 1992.
- [7] J. de Frutos and J.M. Sanz-Serna. Accuracy and conservation properties in numerical integration: The case of the Korteweg-de Vries equation. *Numerische Mathematik*, 75:421–445, 1997.
- [8] P.G. Drazin and R.S. Johnson. *Solitons: An introduction*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1989.
- [9] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Letters*, 19:1095–1097, 1967.
- [10] E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer, 1987.
- [11] C.G.J. Jacobi. *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Bornträger, Königsberg, 1829.
- [12] A. Jeffrey and T. Kakutani. Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg-de Vries equation. *SIAM Review*, 14:582–643, 1972.

- 
- [13] R. Knobel. *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*. American Mathematical Society: Institute for Advanced Study, 2000.
- [14] D.J. Korteweg and G. de Vries. XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, 39:422–443, 1895.
- [15] R.M. Miura. Korteweg-de Vries equation and generalizations. I: A remarkable explicit nonlinear transformation. *Journal of Mathematical Physics*, 9:1202–1204, 1968.
- [16] R.M. Miura. The Korteweg–de Vries equation: A survey of results. *SIAM Review*, 18:412–459, 1976.
- [17] R.M. Miura, C.S. Gardner and M.D. Kruskal. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 9:1204–1209, 1968.
- [18] E. Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1:183–207, 1971.
- [19] P. Rosenau and J.M. Hyman. Compactons: Solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, 70:564–567, 1993.
- [20] J.S. Russell. Report on waves. *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pages 161–174, 1844.
- [21] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15:240–243, 1965.