



---

**Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**ASPECTOS GEOMÉTRICOS DEL  
MOVIMIENTO DE UN ROBOT**

Autor: Marcos Moreda Blanco

Tutor: José Ignacio Farrán Martín

2025



# Resumen

Uno de los objetivos de la visión artificial consiste en planificar el movimiento de un robot para evitar la colisión con ciertos objetos. En este trabajo se estudia una extensión del concepto de diagrama de Voronoi, el eje medial, sustituyendo puntos aislados por curvas que delimitan los objetos que hay que evitar, así como las sumas de Minkowski para planificar el movimiento de un robot, y los espacios de configuraciones para objetos articulados simples.

**Palabras claves:** movimiento, robot, diagrama de Voronoi, sumas de Minkowski, eje medial, espacios de configuraciones.



# Abstract

One of the goals of computer vision is to plan a robot's motion to avoid collisions with certain objects. This paper studies an extension of the Voronoi diagram concept, the medial axis, replacing isolated points with curves that delimit the objects to be avoided, as well as Minkowski sums for planning a robot's motion, and configuration spaces for simple articulated objects.

**Keywords:** movement, robot, Voronoi diagram, Minkowski sums, configuration spaces.



# Índice general

|  |            |
|--|------------|
| <b>Resumen</b>   | <b>III</b> |
| <b>Abstract</b>  | <b>V</b>   |
| <b>Lista de figuras</b>                                  | <b>IX</b>  |
| <b>1. Introducción</b>                                   | <b>1</b>   |
| <b>2. Conceptos Previos</b>                              | <b>3</b>   |
| 2.1. Grafos . . . . .                                    | 3          |
| 2.2. Polígonos . . . . .                                 | 5          |
| 2.3. Triangulaciones de Delaunay . . . . .               | 7          |
| 2.4. Diagramas de Voronoi . . . . .                      | 9          |
| <b>3. Herramientas</b>                                   | <b>11</b>  |
| 3.1. Eje Medial . . . . .                                | 11         |
| 3.1.1. Polígonos Convexos . . . . .                      | 12         |
| 3.1.2. Polígonos No Convexos . . . . .                   | 18         |
| 3.2. Esqueleto Recto . . . . .                           | 25         |
| 3.2.1. Construcción . . . . .                            | 26         |
| 3.3. Sumas de Minkowski . . . . .                        | 27         |
| 3.3.1. Aplicación: Planificación de Movimiento . . . . . | 30         |
| 3.3.2. Complejidad básica . . . . .                      | 33         |
| 3.3.3. Construcción . . . . .                            | 34         |
| 3.4. Convolución de Curvas . . . . .                     | 37         |
| 3.4.1. Construcción . . . . .                            | 40         |
| <b>4. Reconocimiento de Obstáculos</b>                   | <b>43</b>  |
| 4.1. Reconstrucción de Curvas . . . . .                  | 44         |
| 4.1.1. Algoritmo CRUST . . . . .                         | 46         |
| 4.1.2. Algoritmo NN-CRUST . . . . .                      | 51         |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5. Aplicaciones</b>                              | <b>55</b> |
| 5.1. Planificación de Movimiento . . . . .          | 55        |
| 5.1.1. Planificación de Ruta Sin Rotación . . . . . | 56        |
| 5.1.2. Planificación de Ruta Con Rotación . . . . . | 57        |
| 5.1.3. Descomposición Celular . . . . .             | 60        |
| 5.1.4. Retracción . . . . .                         | 64        |
| 5.1.5. Complejidad . . . . .                        | 66        |
| 5.2. Movimiento de Brazos Robóticos . . . . .       | 69        |
| 5.2.1. Planificación de Movimiento . . . . .        | 70        |
| 5.2.2. Alcanzabilidad . . . . .                     | 72        |
| <b>Bibliografía</b>                                 | <b>83</b> |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 2.1. Ejemplo de diagrama de Voronoi sobre un conjunto de puntos. . . . .  | 9  |
| 3.1. Un polígono convexo y su eje medial. . . . .   | 12 |
| 3.2. Los discos máximos asociados a (a) aristas interiores de $M(P)$ y (b) un vértice de grado 3 de $M(P)$ . . . . .  | 13 |
| 3.3. Eje medial de un octógono, con un vértice de grado 8. . . . .  | 14 |
| 3.4. Secuencia de construcción para el eje medial en la Figura 3.1 (b). . . . .   | 17 |
| 3.5. El arco central se encuentra en la parábola determinada por el vértice $v$ y la arista $e$ , donde los discos máximos centrados en ese arco tocan $e$ y $v$ . . . . .  | 18 |
| 3.6. Ejemplo de polígono con un árbol del eje medial de 3 aristas. . . . .  | 19 |
| 3.7. Diagrama de Voronoi de un polígono simple. . . . .   | 20 |
| 3.8. Eje medial de un polígono simple. . . . .  | 21 |
| 3.9. Ilustración de los Lemas 3.1 y 3.2. . . . .  | 21 |
| 3.10. Diagramas de Voronoi de dos listas de elementos. . . . .  | 23 |
| 3.11. Fusión de dos diagramas de Voronoi. . . . .   | 25 |
| 3.12. El esqueleto recto del polígono no convexo de la Figura 3.5 . . . . .   | 26 |
| 3.13. (a) Trazos de las uniones (en azul) entre segmentos y arcos, que constituyen un superconjunto del eje medial, y (b) el esqueleto recto. Las líneas discontinuas rojas muestran las curvas desplazadas con uniones circulares y en inglete, respectivamente. . . . . | 29 |
| 3.14. El polígono $P$ y el disco $R$ junto con su suma de Minkowski a la derecha. . . . .   | 30 |
| 3.15. (a) ¿Puede el robot $R$ pasar por el espacio entre $P_1$ y $P_2$ ? (b) Las sumas de Minkowski $P_1 \oplus R$ y $P_2 \oplus R$ se superponen, lo que demuestra que $R$ no puede pasar por el espacio. . . . .  | 31 |
| 3.16. Aumentar $P$ mediante $R$ produce $P^+$ . Se muestran las ubicaciones críticas de $R$ cerca de los vértices de $P$ . . . . .  | 32 |
| 3.17. (a) ¿Puede el polígono $R$ pasar por el hueco entre $P_1$ y $P_2$ ? El punto de referencia de $R$ está marcado. (b) Las sumas de Minkowski no se intersecan, lo que demuestra que $R$ puede pasar por los polígonos. . . . .  | 33 |
| 3.18. (a) Diagrama de estrella de los vectores de aristas. (b) Aristas de convolución etiquetadas con $P$ o $-R$ . . . . .  | 36 |
| 3.19. Dos curvas $\alpha$ y $\beta$ y su convolución $\alpha * \beta$ . El origen está en el centro de ambas elipses. . . . .   | 38 |

|   |    |
|---|----|
| 3.20. (a) Curvas poligonales obtenidas a partir de los límites de $P_1$ y $-R$ de la Figura 3.17. (b) La curva de convolución $\partial P_1 * \partial(-R)$ se muestra en verde.  | 38 |
| 3.21. Número de vueltas en regiones determinadas por curvas autointersecantes en sentido antihorario. . . . .   | 40 |
| 3.22. (a) Curvas poligonales $\alpha$ y $\beta$ y su (b) diagrama en estrella de vectores de arista. . . . .  | 41 |
| 3.23. (a) La curva de convolución $\alpha * \beta$ de las curvas de la Figura 3.22, con (b) bordes coloreados según su origen. . . . .  | 42 |
| 4.1. (a) Una muestra de un maniquí (b) una reconstrucción y (c) un modelo de maniquí renderizado. . . . .   | 44 |
| 4.2. Las partes (a) y (c) muestran dos muestras de la misma curva; la primera es un subconjunto de la segunda. Las reconstrucciones (b) y (d) muestran que (a) estaba submuestreada. . . . .  | 45 |
| 4.3. (a) Una curva cerrada $C$ a lo largo de su eje medial (aproximado) $M(C)$ . (b) Algunos de los discos cuyos centros definen el eje medial y determinan el tamaño de la característica local. . . . .   | 45 |
| 4.4. (a) Un conjunto de muestra de la curva de la Figura 4.3, junto con (b) una reconstrucción poligonal correcta de la curva a partir de la muestra. . . . .   | 46 |
| 4.5. (a) La triangulación de Delaunay y (b) el diagrama de Voronoi de la muestra $S$ de la Figura 4.4 (a). Los vértices de Voronoi $V$ se muestran en negro. (c) La triangulación de Delaunay de $S \cup V$ y (d) sus aristas con ambos extremos en $S$ , marcadas en rojo. . . . .   | 47 |
| 4.6. Un disco circunscrito a un borde correcto $e$ no alcanzará $M(C)$ . . . . .  | 48 |
| 4.7. (a) Solo las aristas vecinas más cercanas no pueden reconstruir una curva y (b) la mitad de las aristas vecinas, como $pr$ , rellenan los huecos. . . . .  | 51 |
| 4.8. La esfera diametral de $pq$ interseca $C$ en (a) dos componentes y (b) uno solo.   | 52 |
| 4.9. La esfera diametral de $pq$ interseca $C$ en (a) más de un componente y (b) en uno solo. . . . .   | 53 |
| 5.1. Robot $R$ con punto de referencia y origen mostrados en la esquina inferior izquierda. Los polígonos oscuros son obstáculos. Los obstáculos crecidos, cada uno la suma de Minkowski con $-R$ , se muestran sombreados. . . . .   | 57 |
| 5.2. Al girar la escalera, esta puede pasar entre $A$ y $B$ y ascender, siguiendo la trayectoria indicada en (a). (b)-(d) muestran los obstáculos crecidos para $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ , con la escalera referenciada a su extremo izquierdo. . . . .                 | 59 |
| 5.3. (a) Vista desde abajo de las pilas de obstáculos crecidos, con la parte inferior correspondiente a $\theta = 0^\circ$ , Figura 5.2 (b) Vista frontal de las mismas pilas; $\theta$ varía de $0^\circ$ en la parte inferior de la caja a $75^\circ$ en la parte superior. . . . . | 59 |
| 5.4. Un entorno poligonal para una escalera $R$ , con bordes de obstáculos etiquetados. . . . .   | 61 |

|  |    |
|--|----|
| 5.5. (a) El espacio de configuración (regiones blancas) para una escalera horizontal junto con su descomposición en celdas etiquetadas. (b) El grafo de conectividad $G_0$ correspondiente a la parte (a).   | 61 |
| 5.6. (a) El espacio de configuración (región blanca) para una escalera rotada $\theta = 13^\circ$ , junto con su descomposición en celdas etiquetadas. (b) El grafo de conectividad $G_\theta$ correspondiente a (a).  | 63 |
| 5.7. El gráfico $G$ abarca todas las rotaciones de la escalera de la Figura 5.4 dentro del rango $[0^\circ, 90^\circ]$ .   | 64 |
| 5.8. Diagrama de Voronoi (parcial) para una escalera. $A$ , $B$ y $C$ marcan posiciones particulares de la escalera.   | 65 |
| 5.9. Un conjunto de obstáculos que definen $n^2$ posiciones mutuamente inaccesibles.   | 67 |
| 5.10. Un diseño que requiere $n^2$ movimientos para reposicionar una escalera de longitud $L$ .  | 68 |
| 5.11. Un brazo robótico.   | 70 |
| 5.12. (a) Un brazo de 2 enlaces y (b) su espacio de configuración.   | 71 |
| 5.13. (a) Un brazo de 2 enlaces con obstáculos y (b) su espacio de configuración.  | 72 |
| 5.14. Región de alcanzabilidad para un brazo de 2 enlaces: (a) $\ell_1 > \ell_2$ ; (b) $\ell_1 < \ell_2$ .   | 73 |
| 5.15. Los paralelogramos para (a) dos eslabones y (b) tres eslabones muestran que el orden de los eslabones no afecta la alcanzabilidad.   | 74 |
| 5.16. $r_i = \ell_1 - (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)$ .  | 75 |
| 5.17. (a) El anillo $R'$ centrado en $v_0$ y (b) el anillo $R$ formado por la suma de Minkowski de $R'$ y el círculo de radio $\ell_n$ .   | 76 |
| 5.18. Cuando $L > M$ , el radio interior es $r_i = L - M$ .  | 76 |
| 5.19. Alcance de 2 enlaces: número de soluciones mostradas.  | 77 |
| 5.20. Alcance de 3 enlaces. El anillo sombreado es $R$ ; el otro círculo es $C$ .  | 78 |
| 5.21. Alineación de los enlaces $L_2$ y $L_3$ cuando $C \cap I \neq \emptyset$   | 79 |
| 5.22. Teorema de los dos pliegues, con los enlaces mostrados escalonados para mayor claridad: (a) $\ell/2 = 5\frac{1}{2}$ , $r_i = 1 > 0$ , el enlace más largo es el enlace mediano; (b) $\ell/2 = 8\frac{1}{2}$ , $r_i = 0$ , el enlace mediano no es el enlace más largo. | 81 |



# Capítulo 1

## Introducción

El estudio del movimiento de los robots es una disciplina fundamental en la robótica, con aplicaciones que abarcan desde la automatización industrial hasta la navegación autónoma en entornos complejos. Una de las tareas más desafiantes en este campo consiste en planificar trayectorias que permitan a un robot desplazarse eficientemente evitando colisiones con los objetos que lo rodean. Esta necesidad ha dado lugar al desarrollo de múltiples herramientas teóricas y computacionales, muchas de las cuales se apoyan en conceptos profundos de la geometría.

Este trabajo se enmarca dentro del estudio de los aspectos geométricos del movimiento robótico, una rama que se sitúa en la intersección entre la geometría computacional, la teoría de configuraciones y la planificación de trayectorias. El objetivo principal es analizar modelos matemáticos y estructuras geométricas que permiten representar y resolver de forma precisa y eficiente el problema de navegación de un robot en un entorno que contiene obstáculos.

En particular, este estudio se centra en dos pilares geométricos fundamentales: el eje medial y las sumas de Minkowski, así como en el concepto más avanzado de espacios de configuraciones para robots articulados.

El eje medial puede considerarse una extensión natural del diagrama de Voronoi clásico, donde en lugar de considerar puntos como generadores, se emplean curvas que delimitan obstáculos en el entorno. Esta generalización permite capturar de forma más realista la geometría de objetos extendidos, como paredes o muebles, y proporciona una base sólida para construir caminos equidistantes a los obstáculos, lo que resulta útil para maximizar la seguridad en la trayectoria del robot.

Por otro lado, las sumas de Minkowski proporcionan una herramienta geométrica elegante y potente para modelar la expansión de los obstáculos en función de la forma del robot. Esta técnica permite transformar el problema de planificación de un robot de forma compleja moviéndose entre obstáculos estáticos, en un problema equivalente más sencillo: el movimiento de un punto entre obstáculos “engrosados”. De este modo, la suma de Minkowski convierte un problema con múltiples grados de libertad en uno más accesible desde el punto de vista computacional.

Finalmente, en este trabajo también se aborda el concepto de espacio de configura-

ciones, que permite representar todas las posibles posiciones y orientaciones de un robot, incluyendo aquellos con articulaciones. Este enfoque es fundamental cuando se consideran robots no rígidos, como brazos robóticos o cadenas de segmentos, en cuyo caso el espacio de estados deja de ser euclidiano y adquiere una estructura más compleja, pero igualmente analizable mediante herramientas topológicas y geométricas.

Todos estos conceptos se exploran con una fuerte base teórica, pero también con vistas a sus aplicaciones computacionales. La geometría computacional proporciona algoritmos eficientes para la construcción de diagramas de Voronoi, el cálculo del eje medial, la obtención de sumas de Minkowski y la exploración de espacios de configuraciones, lo que convierte a estas herramientas en elementos centrales dentro de los sistemas de planificación de movimiento en la robótica moderna.

A lo largo de este trabajo se estudiarán estas estructuras desde una perspectiva matemática rigurosa, describiendo sus fundamentos, sus propiedades, y su aplicabilidad en la resolución de problemas de movimiento y navegación. El enfoque adoptado pretende combinar el rigor teórico con la aplicabilidad práctica, ilustrando cada concepto con ejemplos geométricos y demostrando su relevancia en problemas reales de visión artificial y planificación robótica.

Este análisis no solo pone de manifiesto la importancia de la geometría en el diseño de algoritmos para robots autónomos, sino que también muestra cómo problemas aparentemente aplicados pueden abordarse eficazmente desde una perspectiva matemática, en particular desde el campo de la geometría discreta y computacional.

Para cerrar esta introducción, presentamos a continuación la estructura general de la memoria. El documento se organiza en cuatro capítulos. El Capítulo 1 corresponde a esta introducción, donde se expone el contexto y los objetivos del trabajo. En el Capítulo 2 se desarrollan los conceptos previos necesarios para abordar los temas centrales del estudio, proporcionando el marco teórico y geométrico sobre el que se construye el resto del trabajo. El Capítulo 3 está dedicado al estudio del eje medial y el esqueleto recto, herramientas fundamentales que conducen de forma natural a la introducción de las sumas de Minkowski, esenciales para la planificación del movimiento en entornos con obstáculos. Finalmente, en el Capítulo 5 se amplía el análisis hacia espacios de configuración más complejos, comenzando con objetos rígidos y continuando con cadenas poligonales abiertas.

Como base para este documento, se ha trabajado con el libro *Discrete and Computational Geometry* [4].

# Capítulo 2

## Conceptos Previos

El presente capítulo recoge los conceptos fundamentales que sustentan el desarrollo teórico y práctico de este trabajo. Dado que el enfoque del TFG combina herramientas de geometría computacional, topología y análisis geométrico, se hace necesario establecer con claridad las nociones que se utilizarán de forma recurrente en los capítulos posteriores.

En primer lugar, se introducen los grafos junto con algunas de sus propiedades fundamentales, así como los polígonos, de los cuales también se presentan resultados clásicos relacionados con su triangulación.

Después se introducen estructuras centrales de la geometría discreta como las triangulaciones de Delaunay o los diagramas de Voronoi.

El objetivo de este capítulo es, por tanto, proporcionar al lector las herramientas conceptuales necesarias para seguir con fluidez el desarrollo del trabajo, sin profundizar en exceso en demostraciones formales, pero conservando el rigor matemático necesario para sustentar las ideas presentadas.

### 2.1. Grafos

En esta sección introduciremos la noción de grafo, junto con algunas de sus propiedades básicas, que serán útiles en el desarrollo posterior del trabajo.

**Definición 2.1.** *Llamamos grafo  $G$  a un par de conjuntos finitos  $V$ ,  $A$ , donde  $V$  es no vacío y  $A$  es un conjunto de pares de  $V$ . Denominamos al conjunto  $V$  como el conjunto de vértices o nodos de  $G$  y a  $A$  como el conjunto de aristas.*

**Definición 2.2.** *Sea  $G$  un grafo. Decimos que dos nodos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes, si existe la arista  $\{v_1, v_2\}$  en  $A$ .*

**Definición 2.3.** *Sea  $G$  un grafo. Un nodo  $v$  de  $G$  tiene grado  $n$  si existen  $n$  aristas conectadas a  $v$ .*

**Definición 2.4.** *Sea  $G$  un grafo. Un camino de  $G$  es una sucesión de nodos adyacentes,  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ . A los nodos  $v_1$  y  $v_n$  se los denomina extremos del camino.*

**Definición 2.5.** Sea  $G$  un grafo y  $c$  un camino de  $G$  decimos que el camino tiene longitud  $n$  si la sucesión que lo define tiene  $n + 1$  nodos.

**Definición 2.6.** Sea  $G$  un grafo. Decimos que  $G$  es conexo si para cualquier par de vértices  $v_1, v_2$  existe un camino en el cual  $v_1$  y  $v_2$  son extremos.

**Definición 2.7.** Sea  $G$  un grafo. Decimos que  $G$  es dirigido si los pares de aristas,  $(v_1, v_2)$ , son ordenados. Decimos que es no dirigido en caso contrario.

Finalizaremos esta sección con un resultado clásico que relaciona los grados de los vértices de un grafo con el número total de aristas, y a continuación enunciaremos y demostraremos la fórmula de Euler, fundamental para grafos planos y conexos.

**Proposición 2.1** (Teorema del apretón de manos). Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices y  $a$  aristas. Si denotamos a los vértices por  $v_i, i = 1, 2, \dots, n$ , se verifica la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 2a$$

*Demostración.* Por un lado, el grado de un vértice es el número de aristas incidentes al mismo. Por otro lado, cada arista está definida por dos vértices simultáneamente, por lo que si determinamos el número de aristas en función del grado de los vértices estaremos contando dos veces cada una de las aristas. De esta observación se deduce el resultado.  $\square$

**Teorema 2.1** (Fórmula de Euler). Sea  $P$  un grafo plano y conexo con  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras. Se cumple que  $V - A + C = 2$ .

*Demostración.* Probaremos el resultado por inducción sobre el número de aristas.

Si  $A = 0$ , entonces tendremos un único punto y  $V = 1$ . Además, tendremos una única cara y  $C = 1$ . Por tanto,  $V - A + C = 1 - 0 + 1 = 2$ .

Supongamos el resultado cierto para  $A < n$  y veamos si se cumple para  $A = n$ . La idea es realizar una contracción sobre una arista  $a$  para poder utilizar la hipótesis de inducción. Pueden ocurrir dos cosas:

- Que  $a$  conecte dos vértices, en cuyo caso la contracción supondrá la reducción en una unidad del número de aristas y del número de vértices pero no del número de caras (porque el grafo es conexo). Se obtendría entonces  $V_n - A_n + C_n = (V_n - 1 + 1) - (A_n - 1 + 1) + C_n - 1 = 2$ .
- Que  $a$  solo conecte con un vértice por ser una curva cerrada sobre sí misma. En este caso es importante notar que el teorema de la curva de Jordan afirma que  $a$  divide el plano en dos componentes conexas, una interior a la curva y otra exterior. Por tanto, en este caso la contracción supondrá la reducción en una unidad del número de aristas, pero también de una cara. Por otro lado, el número de vértices se mantiene constante. En este caso  $V_n - A_n + C_n = V_n - 1 - (A_n - 1 + 1) + (C_n - 1 + 1) = 2$ .

$\square$

## 2.2. Polígonos

En esta sección se introducen los conceptos fundamentales relacionados con los polígonos, sus propiedades geométricas y combinatorias, así como algunos resultados clásicos sobre su triangulación.

**Definición 2.8.** *Un polígono  $P$  es una región acotada del plano delimitada por un número finito de segmentos que forman una curva simple y cerrada.*

Denominaremos aristas a los segmentos que definen el polígono, y vértices a los puntos en los que intersecan aristas adyacentes. Por otro lado, denominaremos frontera del polígono  $P$ , denotada por  $\partial P$ , al conjunto de vértices y aristas.

Además, denominaremos diagonal de un polígono a un segmento que une dos vértices no consecutivos y que, a excepción de esos dos vértices, está contenido en su interior. Se dice que dos diagonales no se cruzan si no comparten puntos en el interior del polígono.

**Definición 2.9.** *Sea  $P$  un polígono. Decimos que un vértice  $v$  de  $P$  es convexo si el ángulo que forman sus aristas es menor o igual que  $\pi$ . En caso contrario, se denomina vértice reflejo.*

**Definición 2.10.** *Un polígono  $P$  es convexo cuando todos sus vértices lo son.*

A continuación se presenta un resultado fundamental que caracteriza la convexidad de un polígono mediante distintas propiedades equivalentes.

**Proposición 2.2.** *Sea  $P$  un polígono. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- $P$  es convexo.
- Sea  $R$  la recta obtenida por la prolongación de una arista de  $P$ . Entonces  $P$  está contenido en uno y solo uno de los lados de  $R$ .
- $\forall x, y \in P$  el segmento que une  $x$  e  $y$  está totalmente contenido en el interior de  $P$ .

*Demostración.*  $1 \Leftrightarrow 2$

$1 \Rightarrow 2$  Probaremos el resultado por un razonamiento de inducción sobre el número de vértices  $n$  del polígono.

Si  $n = 3$  el polígono es un triángulo y el resultado trivial.

Suponemos la propiedad cierta para polígonos con  $n - 1$  vértices. Sea  $P$  un polígono con  $n$  vértices y  $a$  una arista de  $P$  definida por los vértices  $v_1$  y  $v_2$ . Denotamos por  $R$  a su prolongación. Sea  $x$  el vértice adyacente a  $v_1$  ( $x \neq v_2$ ). Realizamos la contracción de la arista que une  $x$  con  $v_1$ , obteniendo un polígono de  $n - 1$  vértices sobre el que podemos aplicar la hipótesis de inducción. El resultado queda probado puesto que, además, el vértice  $v_1$  es convexo y, por tanto, la arista que lo une con  $x$  no puede situarse al otro lado de  $R$ .

$2 \Rightarrow 1$  En este caso, probaremos el enunciado por contrarrecíproco. Supongamos que un vértice  $v$  de  $P$  es reflejo. Entonces es claro que la prolongación de cualquiera de sus

aristas intersecará con el interior del polígono, dividiéndolo de forma que existan regiones de  $P$  a ambos lados de la recta.

$2 \Leftrightarrow 3$

$2 \Rightarrow 3$  Razonamos el recíproco. Supongamos que existe una arista  $a$  cuya prolongación  $R$  divide a  $P$ . Existirá entonces, al menos, un vértice a cada lado de  $R$ . Elegimos uno de cada lado, en concreto, aquellos con mayor distancia a  $R$ , denotados por  $x_1$  y  $x_2$ . Veamos que al menos una de las uniones de estos vértices con los vértices de  $a$  debe ser parcialmente exterior a  $P$ . Si no fuera así, formaríamos un cuadrilátero contenido en  $P$  del cuál  $a$  sería diagonal. Esto es absurdo porque se había supuesto que  $a$  era una arista.

$3 \Rightarrow 2$  Trabajaremos nuevamente con el resultado recíproco pero, en este caso, diferenciaremos casos. Supongamos que existe un segmento  $s$  parcialmente exterior a  $P$  que une dos puntos del mismo,  $x_1$  y  $x_2$ .

1. Si  $x_1$  y  $x_2$  son interiores a  $P$ , el segmento que los une intersecará con la frontera del polígono en dos puntos  $y_1$  e  $y_2$ , de forma que el segmento que une  $y_1$  e  $y_2$  será también parcialmente exterior a  $P$ . Razonar según caso 3, 4 o 5.
2. Si solo uno de los puntos es interior a  $P$ , supongamos  $x_1$  sin pérdida de generalidad, el segmento que los une intersecará con la frontera del polígono en un punto  $y$ . De esta forma, el segmento que une  $y$  con  $x_2$  será también parcialmente exterior a  $P$ . Razonar según caso 3, 4 o 5.
3. Si  $x_1$  y  $x_2$  están ambos contenidos en una arista de  $P$ ,  $a_1$  y  $a_2$ , entonces es claro que cualquiera de ellas separa a  $P$  puesto que las aristas forman parte de la frontera del conjunto.
4. Si uno de los puntos, supongamos  $x_1$ , está contenido en una arista y el otro en un vértice, entonces por un razonamiento análogo se obtiene que la arista a la que pertenece  $x_1$  dividirá el polígono.
5. Finalmente, si los dos extremos del segmento parcialmente exterior son vértices de  $P$ , realicemos una rotación del plano que sitúe a  $s$  paralelo al eje de las abscisas. Denotemos por  $x_1$  al extremo con un mayor valor en el eje de las abscisas (es único por cómo se sitúa el segmento). Entonces la arista de  $x_1$  que posea valores menores en el eje de las abscisas, denotada por  $a_1$ , separará puntos de  $P$  porque, por un lado, el punto  $x_2$  se situará a la izquierda de  $a_1$  y, por otro, la otra arista de  $x_1$  se mantendrá a la derecha.

□

**Observación 2.1.** *En concreto, de este resultado puede extraerse que dado un polígono  $P$ , existirá siempre la diagonal entre dos vértices no consecutivos de  $P$  si y solo si  $P$  es convexo.*

A continuación se introduce el concepto de triangulación, fundamental en geometría computacional.

**Definición 2.11.** *Denominamos triangulación de un polígono  $P$  a la división de  $P$  en triángulos mediante un conjunto maximal de diagonales que no se cruzan.*

Presentamos ahora algunos resultados clásicos sobre la existencia y unicidad estructural de las triangulaciones.

**Lema 2.1.** *Todo polígono  $P$  con más de tres vértices tiene, al menos, una diagonal.*

**Teorema 2.2.** *Todo polígono  $P$  admite una triangulación.*

**Teorema 2.3.** *Sea un polígono  $P$  con  $n$  vértices. Toda triangulación de  $P$  tendrá  $n - 2$  triángulos y  $n - 3$  diagonales.*

Las demostraciones de estos resultados pueden consultarse en [16].

Por último, incluimos una observación sobre la noción de género en superficies cerradas, concepto que retomaremos en la parte final del trabajo.

**Observación 2.2.** *Aunque los polígonos son, por definición, objetos planos del plano euclídeo, es útil en algunos contextos topológicos interpretarlos como superficies, especialmente cuando se consideran identificaciones o se estudian espacios de configuración asociados. En este sentido, resulta relevante introducir la noción de género.*

*El género  $g$  de una superficie cerrada orientable se define como el número de “asas” o “agujeros” que posee. Por ejemplo, una esfera tiene género 0, un toro tiene género 1, y así sucesivamente. Esta característica permite clasificar topológicamente las superficies.*

*En el caso de los polígonos simples del plano, considerados como regiones sin identificaciones, se corresponden con superficies de género 0. Sin embargo, al estudiar estructuras como los espacios de configuración de brazos articulados o cadenas poligonales, pueden aparecer superficies de género mayor, como se verá más adelante.*

## 2.3. Triangulaciones de Delaunay

Entre las distintas posibles triangulaciones de un conjunto de puntos en el plano, algunas presentan propiedades especialmente favorables para ciertas aplicaciones geométricas y computacionales. En particular, las triangulaciones de Delaunay destacan por sus características óptimas relacionadas con la forma de los triángulos y su estabilidad geométrica. Aunque no profundizaremos en detalle en este apartado (para una exposición más completa puede consultarse [16]), se introducen a continuación los conceptos necesarios para comprender su definición y propiedades fundamentales.

Introducimos algunos conceptos previos antes de definir que es una triangulación de Delaunay.

Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos triangulaciones distintas de  $S$ , un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Denotamos por  $L_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$  y  $L_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{3t})$  a las listas de ángulos ordenados de menor a mayor de  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente. Utilizaremos para compararlas el orden lexicográfico definido a continuación.

**Definición 2.12.** Sean  $L_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$  y  $L_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{3t})$  listas con el mismo número de elementos. Decimos que  $L_2$  es mayor que  $L_1$  según el orden lexicográfico si existe un valor  $k$ ,  $1 \leq k \leq 3n$  que cumpla  $\beta_k > \alpha_k$  y que  $\alpha_i = \beta_i$  para todo  $i < k$ . Se denota  $L_2 > L_1$ .

Utilizamos este concepto para relacionar triangulaciones.

**Definición 2.13.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$  y  $T_1$  y  $T_2$  dos triangulaciones distintas de  $S$ . Denotamos por  $L_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$  y  $L_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{3t})$  a las listas de ángulos ordenados de menor a mayor de  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente. Decimos que  $T_2$  es más gruesa que  $T_1$  si  $L_2 > L_1$  según el orden lexicográfico. Se denota  $T_2 > T_1$ .

La noción de *arista legal* se basa en la posibilidad de mejorar una triangulación mediante la rotación de una arista común a dos triángulos adyacentes.

**Definición 2.14.** Sea  $S$  un conjunto de puntos y  $T_1$  una triangulación de  $S$ . Sea  $a$  una arista interior de  $T_1$  y  $Q$  el cuadrilátero de  $T_1$  resultante de la unión de los triángulos que comparten a  $a$  como arista. Si  $Q$  es convexo, definiremos una nueva triangulación,  $T_2$ , resultante de rotar la arista  $a$  en  $Q$ . Diremos que  $a$  es una arista legal si  $T_1 \geq T_2$ . En caso contrario se dirá que  $a$  es una arista ilegal. Por otro lado, consideraremos que las aristas exteriores son siempre legales.

Una vez introducidos estos conceptos básicos, definiremos el concepto de triangulación de Delaunay.

**Definición 2.15.** Sea  $S$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$ . Definimos como triangulación de Delaunay de  $S$  a una triangulación que cumple que todas sus aristas son legales. Se denota por  $Del(S)$ .

Esta definición puede reformularse mediante una propiedad geométrica clásica, relacionada con circunferencias vacías, que constituye el criterio más habitual para caracterizar una triangulación de Delaunay.

**Teorema 2.4.** Sea  $S$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$ , de forma que no existan 4 o más puntos cocirculares. Una triangulación  $T$  de  $S$  es de Delaunay si y solo si dada una circunferencia cualquiera definida por los vértices de un triángulo de  $T$ , ningún punto del conjunto  $S$  es interior a la misma.

**Corolario 2.1.** Sea  $S$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$  que no contenga cuatro puntos cocirculares. Entonces la triangulación de Delaunay de  $S$  es única.

Para detalles sobre las demostraciones de estos resultados y los algoritmos de construcción de la triangulación de Delaunay, puede consultarse nuevamente [16].

## 2.4. Diagramas de Voronoi

Los diagramas de Voronoi constituyen una herramienta fundamental en geometría computacional y en el análisis de proximidad entre conjuntos de puntos en el plano. En esta sección se presentan sus definiciones básicas y algunas propiedades relevantes que serán utilizadas posteriormente en el desarrollo del trabajo.

**Definición 2.16.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Dado un punto cualquiera  $p \in S$ , definimos como región de Voronoi de  $p$ ,  $Vor(p)$ , al conjunto de puntos del plano que están más próximos a  $p$  que a ningún otro punto de  $S$ , es decir,

$$Vor(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| \leq \|x - q\| \quad \forall q \in S, q \neq p\}$$

considerando la distancia euclídea entre dos puntos.

**Observación 2.3.** Existirán puntos del plano que no tendrán un único punto cumpliendo la condición anterior. Es decir, estarán igual de próximos a más de un punto de  $S$ . Estos puntos serán precisamente aquellos que formen la frontera entre las diferentes regiones de Voronoi.

**Definición 2.17.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Definimos como diagrama de Voronoi de  $S$ ,  $Vor(S)$ , al conjunto de puntos del plano que pertenezcan a dos o más regiones de Voronoi distintas, es decir,

$$Vor(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists p, q \in S, p \neq q : x \in Vor(p), x \in Vor(q)\}$$

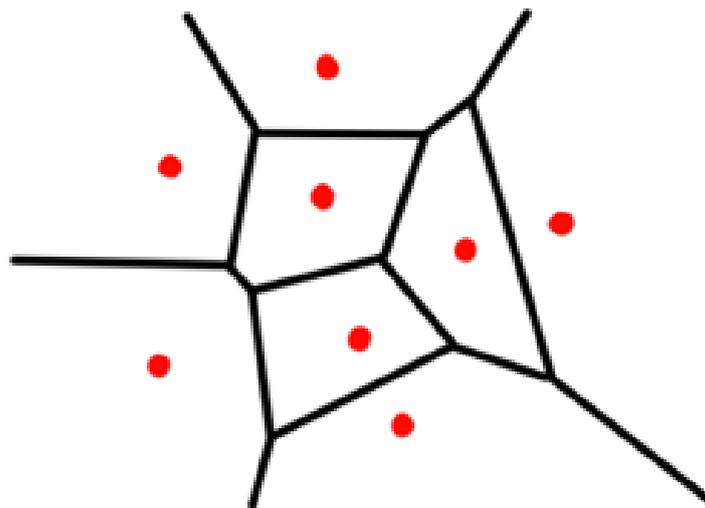


Figura 2.1: Ejemplo de diagrama de Voronoi sobre un conjunto de puntos.

**Definición 2.18.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Definimos como *aristas de Voronoi* al conjunto de puntos de  $Vor(S)$  que pertenezcan a exactamente dos regiones de Voronoi distintas, es decir,

$$Aristas(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists p, q \in S, p \neq q : x \in Vor(p), x \in Vor(q), \forall r \in S, p \neq r \neq q, x \notin Vor(r)\}$$

Por otro lado, definimos como *vértices de Voronoi* al conjunto de puntos de  $Vor(S)$  que pertenezcan al menos a tres regiones de Voronoi distintas, es decir,

$$Vertices(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists p, q, r \in S, p \neq q \neq r : x \in Vor(p), x \in Vor(q), x \in Vor(r)\}$$

Alternativamente, los vértices se podrían definir como las intersecciones de las adherencias de las aristas de Voronoi de  $S$ .

A continuación se presentan algunos resultados fundamentales que caracterizan las regiones, aristas y vértices del diagrama de Voronoi.

**Teorema 2.5.** Sea  $S$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $Vor(S)$  su diagrama de Voronoi. Sea  $a$  un subconjunto de las mediatrices que separan dos puntos cualquiera  $p$  y  $q$ . Entonces  $a$  es una arista de Voronoi de  $Vor(S)$  si y solo si para cada punto  $x$  de  $a$  la circunferencia de centro  $x$  que pasa por  $p$  y por  $q$  no contiene ningún otro punto de  $S$  (ni sobre la circunferencia ni en su interior).

**Proposición 2.3.** Sea  $S$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $p \in S$ . La región de Voronoi de  $p$ ,  $Vor(p)$ , es la intersección de todos los semiplanos  $H(p, q)$ , para todos los puntos  $q \in S$  diferentes de  $p$ .

**Corolario 2.2.** Las regiones de Voronoi son conjuntos convexos.

**Teorema 2.6.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos de  $\mathbb{R}^2$  y  $Vor(S)$  su diagrama de Voronoi. Un punto  $p$  del plano es un vértice de Voronoi de  $Vor(S)$  si y solo si podemos encontrar una circunferencia centrada en  $p$  que contenga tres o más puntos de  $S$  y tal que no exista ningún punto de  $S$  en su interior.

Como en apartados anteriores, las demostraciones de estos resultados y los detalles de los algoritmos constructivos del diagrama de Voronoi pueden consultarse en [16].

# Capítulo 3

## Herramientas

En este capítulo ampliamos el concepto de diagrama de Voronoi para aplicarlo no solo a conjuntos de puntos, sino también a curvas. Esto nos lleva a dos generalizaciones importantes: el eje medial (Sección 3.1) y el esqueleto recto (Sección 3.2). Ambos pueden interpretarse como el resultado de “desplazar” el contorno de un polígono, lo que nos conecta con operaciones como la suma de Minkowski (Sección 3.3) y la convolución (Sección 3.4).

Estos conceptos y herramientas matemáticas no se presentan de manera aislada, sino que constituyen la base para aplicaciones en el movimiento de robots. En particular, la comprensión del eje medial y del esqueleto recto permitirá representar de forma compacta el espacio libre de un entorno, lo que facilita la planificación de trayectorias seguras. Del mismo modo, la suma de Minkowski y la convolución resultan esenciales para modelar correctamente el tamaño y la forma de un robot al calcular regiones de accesibilidad y evitar colisiones. A lo largo de este capítulo, estas ideas se desarrollan con el objetivo de preparar el terreno para su uso en algoritmos de navegación y planificación de movimiento en robótica móvil.

### 3.1. Eje Medial

Antes de profundizar en el eje medial, recordemos primero la definición del diagrama de Voronoi  $Vor(S)$  para un conjunto de  $n$  puntos  $S$  en el plano.

**Definición 3.1.**  $Vor(S)$  es el lugar geométrico de los puntos para los cuales existen dos o más sitios más cercanos.

Podríamos decir que  $Vor(S)$  es el conjunto de “puntos de extinción” si el plano se quema de forma uniforme y simultánea desde cada punto de  $S$ . Recordemos un resultado importante del diagrama de Voronoi:

**Proposición 3.1.**  $Vor(S)$  es el lugar geométrico de los centros de los discos vacíos máximos, discos cuyo interior no contiene puntos de  $S$ .

Para ver la demostración consultar [16].

En lugar de partir de un conjunto discreto de puntos  $S$ , consideremos ahora el contorno  $\partial P$  de un polígono convexo  $P$  como el conjunto generador del diagrama. Queremos encontrar un objeto que cumpla propiedades análogas a las de  $Vor(S)$ ; este objeto es conocido en informática como eje medial de  $P$ , y en matemáticas como el lugar de corte de  $\partial P$ . La Figura 3.1 muestra un ejemplo.

**Definición 3.2.** *El eje medial  $M(P)$  de un polígono  $P$  (también conocido como el lugar geométrico de corte de  $\partial P$ ) es la adherencia del conjunto de puntos en  $P$  que tienen dos o más puntos más cercanos entre los puntos de  $\partial P$ .*

### 3.1.1. Polígonos Convexos

Aunque esta definición puede extenderse a formas mucho más generales, nos centraremos por ahora en polígonos convexos. A partir de la Figura 3.1, podemos intuir que el eje medial de un polígono convexo es un árbol geométrico formado por segmentos rectos, cuyas hojas coinciden con los vértices de  $P$ . Para que los vértices estén incluidos en el eje medial, es necesario tomar la adherencia del conjunto de puntos definidos originalmente, ya que, de lo contrario, los vértices quedarían fuera al ser su propio punto más cercano.

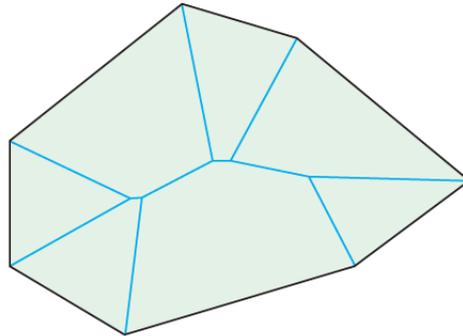


Figura 3.1: Un polígono convexo y su eje medial.

Podemos interpretar el eje medial como el conjunto de centros de discos máximos (discos vacíos que tocan el borde en dos o más puntos distintos). Los resultados formales se resumen en las proposiciones siguientes:

**Proposición 3.2.** *Cualquier disco que contenga al menos dos puntos de una curva suave en  $\mathbb{R}^2$  interseca la curva en un segmento de curva o contiene un punto del eje medial (o ambos).*

*Demostración.* Sea  $B$  un disco y  $F$  la curva en cuestión. Si  $B \cap F$  es un segmento de curva, no hay nada que demostrar, así que supongamos que  $B \cap F$  no es un segmento de curva. Si algún componente conexo  $C$  de  $B \cap F$  es un bucle cerrado que forma una curva de Jordan en el interior de  $B$ , entonces hay un componente conexo del eje medial interior a  $C$  que está completamente contenido en  $B$  y listo.

De lo contrario,  $B \cap F$  consta de dos o más componentes conexos de  $F$ . Sea  $c$  el centro de  $B$  y sea  $p$  el punto más cercano en  $F$  a  $c$ . Si  $p$  no es único, entonces  $c$  es un punto del eje medial y hemos terminado. De lo contrario,  $p$  se encuentra en un único componente conexo  $f_p$  de  $B \cap F$ . Considere el punto  $q$  más cercano a  $c$  en algún otro componente conexo  $f_q$ . Cualquier punto  $x$  en el segmento de línea  $cq$  está más cerca de  $q$  que de cualquier punto fuera de  $B$ , por lo que el punto más cercano de  $F$  a  $x$  siempre es algún punto en uno de los componentes conexos de  $B \cap F$ . Dado que en un extremo del segmento el componente conexo más cercano es  $f_p$  y en el otro es  $f_q$ , en algún punto  $x$  el componente conexo más cercano debe cambiar. El punto  $x$  tiene dos puntos más cercanos en dos componentes conexos distintos y, por lo tanto, es un punto del eje medial.  $\square$

Esto se representa en la Figura 3.2, que reexamina en detalle el polígono de la Figura 3.1. Los discos máximos están sombreados, teniendo dos o más puntos de tangencia distintos con  $\partial P$ . Para los puntos en el interior de un segmento de  $M(P)$ , como en la Figura 3.2 (a), hay dos puntos que tocan  $\partial P$ . Y hay  $k$  puntos que tocan  $\partial P$  en un vértice de grado  $k$  de  $M(P)$ , como en la Figura 3.2 (b). Por esta razón, los radios desde el centro  $m$  de los discos hasta los puntos de contacto representan los dos o más caminos más cortos distintos hacia  $\partial P$ .

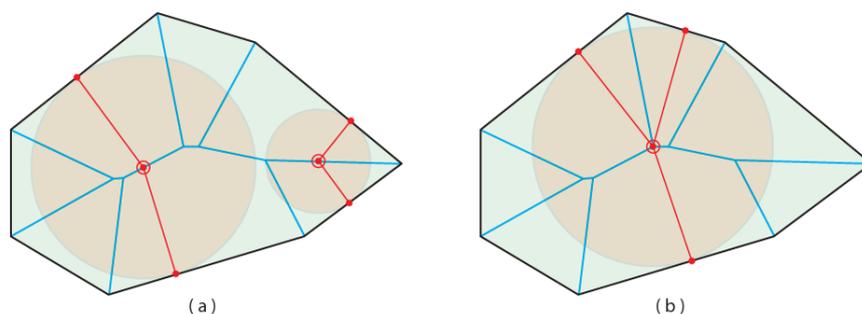


Figura 3.2: Los discos máximos asociados a (a) aristas interiores de  $M(P)$  y (b) un vértice de grado 3 de  $M(P)$ .

Los siguientes resultados están relacionados con el grado de los vértices y el número de aristas del eje medial.

**Proposición 3.3.** *Sea  $P$  un polígono convexo con  $n \geq 3$  vértices. Entonces, el eje medial  $M(P)$  puede contener un vértice de grado  $n$ .*

*Demostración.* Considerar un  $n$ -ágono regular. (Un ejemplo que ilustra esta demostración es el de la Figura 3.3.)  $\square$

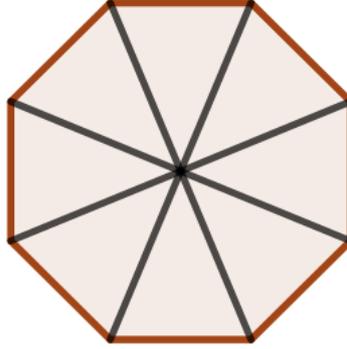


Figura 3.3: Eje medial de un octógono, con un vértice de grado 8.

**Proposición 3.4.** *Sea  $P$  un polígono convexo con  $n$  vértices. Entonces, el número de aristas del eje medial  $M(P)$  satisface:*

$$n \leq E(M(P)) \leq 2n - 3$$

donde  $E(M(P))$  denota el número de aristas del grafo correspondiente al eje medial.

*Demostración.* La cota inferior  $n$  se alcanza cuando  $P$  es un  $n$ -ágono regular. Demostraremos a continuación la cota superior, la inferior se demuestra de manera similar considerando la proposición anterior.

La cota superior proviene de propiedades del grafo del eje medial como un árbol embebido en el plano. Para cualquier árbol embebido en el plano (sin ciclos), se cumple:

$$\sum_{v \in \text{nodos internos}} (\deg(v) - 2) = L - 2 \quad (3.1)$$

donde  $L$  es el número de hojas (nodos de grado 1). En el eje medial de un polígono convexo:

- Cada hoja está asociada a un vértice del polígono  $\Rightarrow$  hay  $L = n$  hojas.
- Entonces, el número total de nodos en el árbol es:

$$V = I + L$$

donde  $I$  es el número de nodos internos.

- El número total de aristas es:

$$E = V - 1 = (I + n) - 1 = I + n - 1$$

De 3.1 se tiene que

$$\sum_{v \in \text{nodos internos}} (\deg(v) - 2) = V - I - 2,$$

luego

$$I = V - \sum_{v \in \text{nodos internos}} (\deg(v) - 2) - 2.$$

Dado que el grado mínimo de los nodos internos es 3, para maximizar el número de nodos internos tenemos que minimizar el sumatorio, por lo que sustituimos el grado de los nodos internos por 3 y tenemos lo siguiente;

$$I_{max} = V - \sum_{v \in \text{nodos internos}} (3 - 2) - 2,$$

es decir,

$$I_{max} = V - I - 2$$

y por lo tanto tenemos

$$I_{max} = L - 2$$

Tenemos, por tanto, que el número máximo de nodos internos es  $n - 2$  y entonces:

$$E_{max} = (n - 2) + n - 1 = 2n - 3$$

□

Si el polígono encerrase hierba seca, iniciar un incendio en la hierba a lo largo del borde avanza en paralelo desde dicho borde, con los “puntos de extinción” (donde el fuego se encuentra consigo mismo) ubicados a lo largo de las bisectrices de los ángulos. Cada punto de extinción  $m \in M(P)$  puede asociarse con el momento en que el fuego alcanza  $m$ , lo cual corresponde simplemente al radio del disco máximo centrado en ese punto. De hecho, el mapeo de  $P$  a  $M(P)$  se conoce a veces como la “transformación del incendio en la hierba” (*grassfire transformation*).

El siguiente resultado nos permite relacionar el eje medial con el resultado 2.6 para los diagramas de Voronoi.

**Definición 3.3.** *Un disco de Voronoi de un conjunto finito  $S$  de puntos es un disco vacío máximo centrado en un vértice de Voronoi de  $S$ . Cada disco de Voronoi tiene al menos tres puntos de  $S$  en su límite y ninguno en su interior.*

**Proposición 3.5.** *En  $\mathbb{R}^2$ , cualquier disco de Voronoi de un conjunto finito  $S \subset F$  donde  $F$  es una curva suave debe contener un punto del eje medial de  $F$ .*

*Demostración.* Supóngase primero que en la vecindad de una de las muestras  $s \in S$  en el límite de  $B$ ,  $F - s$  está contenido completamente en  $B$ . Entonces o  $B \cap F$  está completamente contenido en el límite de  $B$  y el centro de  $B$  es un punto del eje medial, o

encoger  $B$  alrededor de  $s$  producirá un disco más pequeño  $B_p$  contenido en  $B$ , con  $B_p \cap F$  consistente en al menos dos componentes conexos. Por la proposición 3.2,  $B_p$  contiene un punto del eje medial. Si no hay tal  $s$ , entonces la intersección de  $F$  con  $B$  ya consiste en al menos dos componentes conexos y  $B$  contiene un punto del eje medial por la proposición 3.2.  $\square$

### Construcción

Analícemos ahora cómo construir el eje medial de polígonos convexos. Si  $v_1, \dots, v_n$  son los vértices y  $e_i = v_i v_{i+1}$  las aristas de  $P$ , es fácil ver que el segmento del eje medial asociado a cada vértice  $v_i$  corresponde a la bisectriz del ángulo en  $v_i$ : su conjunto de puntos son los centros de discos que tocan las aristas  $e_{i-1}$  y  $e_i$ .

Lo interesante ocurre cuando estas bisectrices se intersecan, definiendo así el interior del árbol  $M(P)$ . Existe un algoritmo recursivo muy elegante para calcular  $M(P)$ , ilustrado en la Figura 3.4. Para explicarlo, tomaremos como ejemplo el polígono de la figura 3.1.

Imaginemos que las bisectrices de cada ángulo del vértice crecen hacia dentro durante la transformación de la hierba. En un instante  $t$ , el primer par se interseca. Quizás no sea sorprendente que el primer par en intersectarse siempre constituya vértices adyacentes.

En la Figura 3.4 (a), las bisectrices de  $v_2$  y  $v_3$  del polígono  $P_7$  son las primeras en encontrarse, por ejemplo, en el punto  $x$ . Este encuentro constituye (en general) un nodo de grado 3 de  $M(P)$ , donde el disco máximo toca tres aristas incidentes a los dos vértices, en este caso  $e_1, e_2, e_3$ .

A medida que el fuego continúa ardiendo, es la bisectriz de  $e_1$  y  $e_3$  la que emerge de  $x$ ; la arista  $e_2$  ya no contribuirá a la construcción del diagrama, al haberse agotado su función. Por lo tanto, podemos extender  $e_1$  y  $e_3$  para que se encuentren en un nuevo vértice  $v_{1,3}$  de un polígono con un vértice menos,  $P_6$ , como se muestra en la Figura 3.4 (b). El eje medial que buscamos,  $M(P_7)$ , es una versión ligeramente modificada de  $M(P_6)$ , que aún desconocemos. El eje medial  $M(P_6)$  se puede derivar identificando  $v_6$  y  $v_7$  como las siguientes bisectrices en encontrarse, y extendiendo las dos aristas  $e_5$  y  $e_7$  para “absorber”  $e_6$ , como en la Figura 3.4 (c).

Continuando de esta manera, finalmente llegamos a  $P_3$ , un triángulo, cuyo eje medial son simplemente las tres bisectrices de los ángulos, que se encuentran en el centro de la circunferencia inscrita. Esto es exactamente lo que vemos en la Figura 3.4 (e). Este algoritmo puede considerarse como una construcción de  $M(P)$  en partes de arriba a abajo desde  $P = P_7$ , como se ilustra en la Figura 3.4, o como un algoritmo recursivo que construye  $M(P)$  de abajo a arriba desde  $P_3$ , como se describe a continuación.

---

#### Algoritmo 1 Eje Medial

Sea  $P_n$  un polígono convexo de  $n$  vértices. Identifique los dos vértices adyacentes  $v_i$  y  $v_{i+1}$  cuyas bisectrices se intersecan primero en el punto  $x$ . Extienda las aristas  $e_{i-1}$  y  $e_{i+1}$  sobre  $e_i$  para que se intersequen en un nuevo vértice  $v$  y denomine al polígono resultante  $P_{n-1}$ . Calcule  $M(P_{n-1})$  recursivamente y elimine  $xv$  de  $M(P_{n-1})$  y sume  $xv_i$  y  $xv_{i+1}$  para formar  $M(P_n)$ .

---

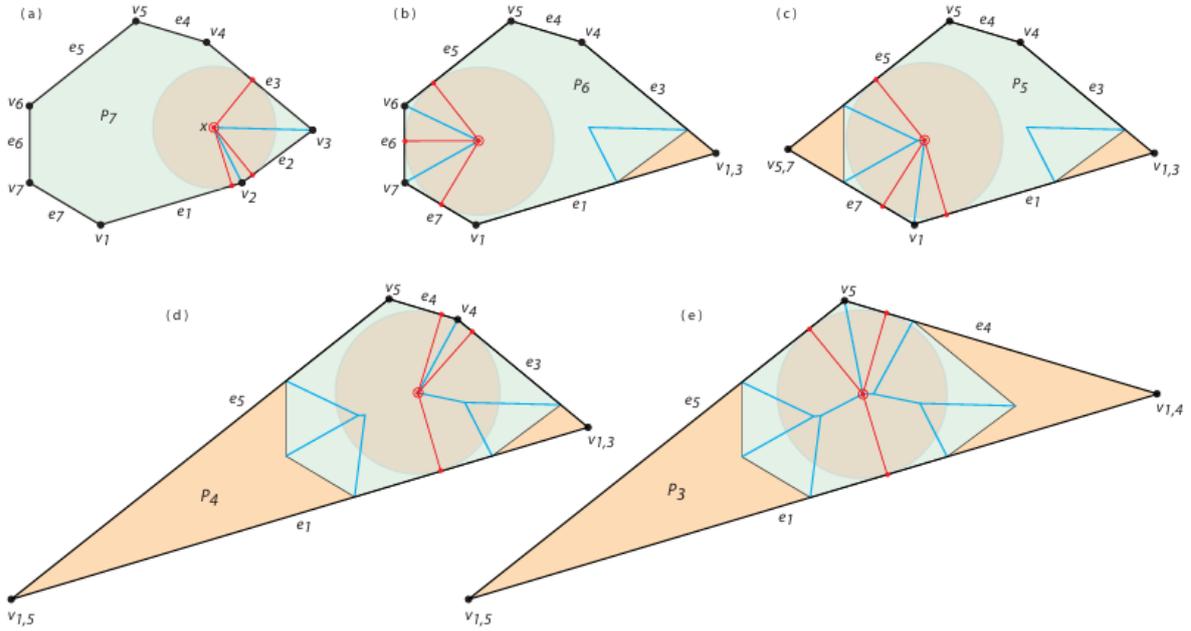


Figura 3.4: Secuencia de construcción para el eje medial en la Figura 3.1 (b).

---

**Algoritmo 2** Pseudocódigo Eje Medial
 

---

- 1: **Input:** Polígono convexo  $P_n$  con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
  - 2: **Output:** Eje medial  $M(P_n)$  de  $P_n$ .
  - 3: **if**  $n = 3$  **then**
  - 4:     **return** Las tres bisectrices de los ángulos, que se intersecan en el incentro.
  - 5: **end if**
  - 6: **for** cada par consecutivo  $(v_i, v_{i+1})$  **do**
  - 7:     Calcular punto de intersección  $x$  de sus bisectrices de ángulo.
  - 8:     Calcular radio  $r$  del círculo máximo tangente a  $e_{i-1}, e_i, e_{i+1}$ .
  - 9: **end for**
  - 10: Seleccionar el par  $(v_i, v_{i+1})$  cuyo radio  $r$  sea mínimo.
  - 11: Eliminar arista  $e_i$  y extender  $e_{i-1}$  y  $e_{i+1}$  para que se intersequen en nuevo vértice  $v$ .
  - 12: Construir polígono reducido  $P_{n-1}$  reemplazando  $v_i, v_{i+1}$  por  $v$ .
  - 13: Llamar recursivamente a  $M(P_{n-1})$ .
  - 14: En  $M(P_{n-1})$ , reemplazar arista  $xv$  por  $xv_i$  y  $xv_{i+1}$ .
  - 15: **return**  $M(P_n)$ .
- 

Sobre la complejidad temporal de este algoritmo, recordemos que las dos primeras bisectrices de  $P$  que se intersecan necesariamente provienen de vértices adyacentes. Por lo tanto, solo es necesario comparar  $O(n)$  pares de bisectrices adyacentes.

Para identificar cuál es el primer par que se interseca, consideremos que el tiempo asociado a un punto  $m \in M(P)$  se define como el radio del disco máximo centrado en  $m$ .

Además, conocemos las aristas más cercanas a  $m$ : para las bisectrices correspondientes a  $v_i$  y  $v_{i+1}$ , las tres aristas tangentes al disco máximo centrado en su punto de intersección  $m$  son las aristas consecutivas  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  y  $e_{i+1}$ .

De este modo, para cada par de bisectrices adyacentes podemos calcular el instante de intersección en tiempo constante, evaluando el radio del círculo centrado en  $m$  tangente a esas tres aristas. Esto permite construir el polígono reducido  $P_{n-1}$  al intersecar las rectas soporte de  $e_{i-1}$  y  $e_{i+1}$ .

Repitiendo este proceso de forma recursiva, se obtiene  $M(P_{n-1})$  y, a partir de este,  $M(P_n)$ , con un tiempo total de  $O(n)$  por nivel de recursión. Dado que el algoritmo realiza  $n$  pasos, el tiempo global es  $O(n^2)$ .

### 3.1.2. Polígonos No Convexos

Las concavidades en el polígono  $P$  introducen un nuevo elemento en su eje medial: aunque  $M(P)$  sigue siendo un árbol cuyas hojas corresponden a los vértices del polígono, las aristas asociadas a los vértices reflejos se transforman en arcos parabólicos.

Recordemos que una parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto (llamado foco) y de una recta (llamada directriz). Consideremos, por ejemplo, el pentágono  $P$  mostrado a la izquierda en la Figura 3.5. Las bisectrices que emergen de los cuatro vértices convexos se encuentran en un nodo de grado 3 de  $M(P)$  y continúan como segmentos rectos, pero al llegar a un vértice reflejo se unen suavemente en un arco de parábola cuyo foco es  $v$  y cuya directriz es la recta que contiene la arista  $e$ , como se ilustra a la derecha de la Figura 3.5. Este arco contiene exactamente los puntos equidistantes de  $v$  y de la arista  $e$ .

La aparición de arcos parabólicos en el eje medial complica notablemente el cálculo del mismo en polígonos arbitrarios. No obstante, con algoritmos adecuados, es posible mantener una complejidad asintótica lineal para este problema.

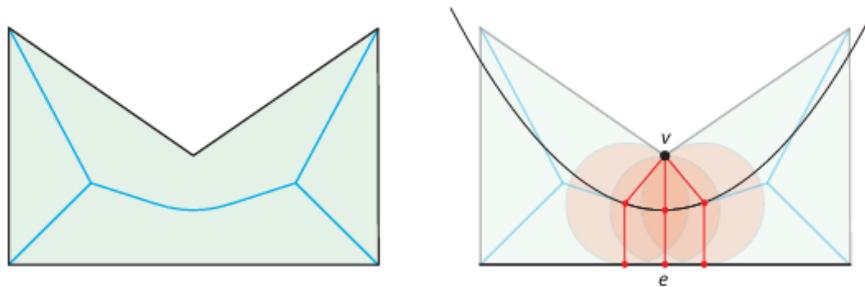


Figura 3.5: El arco central se encuentra en la parábola determinada por el vértice  $v$  y la arista  $e$ , donde los discos máximos centrados en ese arco tocan  $e$  y  $v$ .

A pesar de que los polígonos no convexos suelen generar arcos parabólicos en su eje medial, existen casos en los que este está compuesto únicamente por segmentos rectos. Un ejemplo es el polígono estrellado regular de cinco puntas  $P$ , cuyo eje medial  $M(P)$  está

formado exclusivamente por cinco segmentos rectos que concurren en el centro del círculo inscrito.

**Proposición 3.6.** *Sea  $P$  un polígono arbitrario de  $n$  vértices. Entonces, el número mínimo de aristas que puede tener el árbol del eje medial  $M(P)$  es 3.*

No daremos la demostración pero podemos poner un ejemplo en el que se cumpla esto. Este ejemplo usa muchos vértices reflejos:

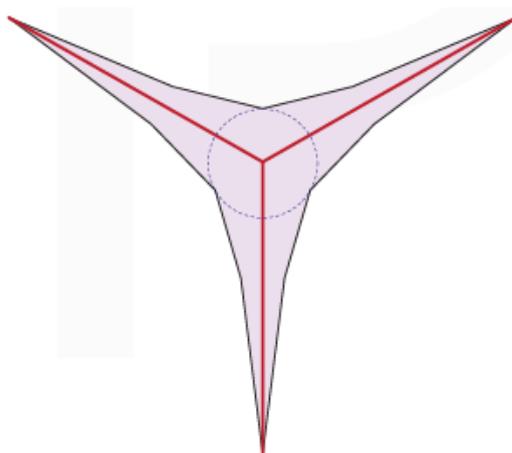


Figura 3.6: Ejemplo de polígono con un árbol del eje medial de 3 aristas.

### Construcción

Incluimos ahora un algoritmo para calcular el eje medial de cualquier polígono, convexo o no. Para ello vamos a introducir unas definiciones previas.

**Definición 3.4.** *Dados dos elementos  $e_i$  y  $e_j$ , el semiplano asociado con  $e_i$ , denotado  $h(e_i, e_j)$ , es el lugar geométrico de los puntos más cercanos a  $e_i$  que a  $e_j$ , es decir,  $h(e_i, e_j) = \{x | d(x, e_i) \leq d(x, e_j)\}$ .*

**Definición 3.5.** *Dados  $n$  elementos,  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , el polígono de Voronoi asociado con  $e_i$ , denotado  $V(e_i)$ , es el lugar geométrico de los puntos más cercanos a  $e_i$  que a cualquier otro elemento, es decir,  $V(e_i) = \bigcap_{j \neq i} h(e_i, e_j)$ . Las aristas de  $V(e_i)$  no son necesariamente segmentos de línea recta y se denominan aristas de Voronoi, y los vértices de  $V(e_i)$  se denominan puntos de Voronoi. El conjunto de polígonos de Voronoi asociados a cada uno de los  $n$  elementos se denomina diagrama de Voronoi  $Vor(S)$  de  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .*

**Definición 3.6.** *Dado un polígono simple  $G = (q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$ , sea  $e_i$  el segmento  $(q_i, q_{i+1})$ , para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Una cadena de  $G$  es una secuencia de elementos  $e_j, q_{j+1}, e_{j+2}, \dots, q_{k-1}, e_{k-1}$  tales que los vértices  $q_j$  y  $q_k$  son convexos y  $q_{j+1}, \dots, q_{k-1}$  son reflejos.*

Nótese que si  $G$  es un polígono convexo, es decir, cada vértice de  $G$  es convexo, entonces cada segmento  $e_i$  por sí solo forma una cadena. Supongamos ahora que  $G$  tiene  $m$  vértices reflejos,  $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_m}$ . A continuación, representaremos  $G$  como  $(e_{i_1-1}, q_{i_1}, e_{i_1}, \dots, e_{i_2-1}, q_{i_2}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m-1}, q_{i_m}, e_{i_m}, \dots, e_{i_1-2})$ , que es una secuencia de  $n$  segmentos intercalados con  $m$  vértices reflejos. Por conveniencia, asumimos además que  $q_0$  es convexo y  $q_1$  es reflejo si existe alguno, de modo que  $G$  puede escribirse como  $G = (e_0, q_1, e_1, \dots, e_{n-1})$ .

Dado que en el caso de polígonos convexos, los ejes mediales pueden obtenerse en tiempo  $O(n \log n)$ , consideraremos el caso en el que el polígono dado no es convexo. El algoritmo presentado aquí es ciertamente aplicable a polígonos convexos. Consideremos ahora el conjunto de  $m$  vértices reflejos y  $n$  aristas  $S = \{e_{i_1-1}, q_{i_1}, e_{i_1}, \dots, e_{i_2-1}, q_{i_2}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m-1}, q_{i_m}, e_{i_m}, \dots, e_{n-1}\}$ . El diagrama de Voronoi  $Vor(S)$  dividirá el interior (y el exterior) de  $G$  en  $m + n$  polígonos de Voronoi, cada uno asociado con un elemento en  $S$ .

La Figura 3.7 muestra el diagrama de Voronoi de un polígono simple (de aquí en adelante, restringido únicamente al interior del polígono). Curiosamente, el eje medial de un polígono está completamente contenido en el conjunto de aristas de Voronoi del polígono. Dado que la definición del eje medial requiere que las circunferencias centradas en los puntos del eje con radios especificados por la función radio sean tangentes a al menos dos puntos límite de  $G$ , podemos obtener el eje medial eliminando las dos aristas de Voronoi incidentes con cada vértice reflejo. La Figura 3.8 muestra el eje medial del polígono mostrado en la Figura 3.7.

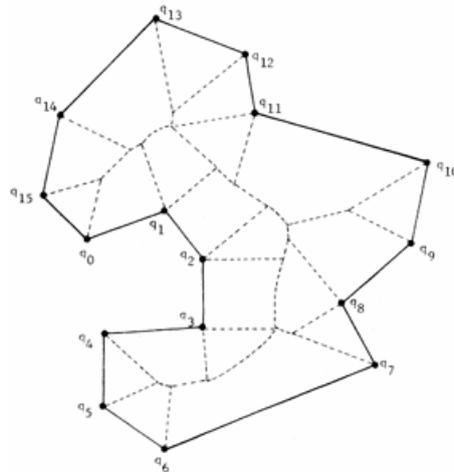


Figura 3.7: Diagrama de Voronoi de un polígono simple.

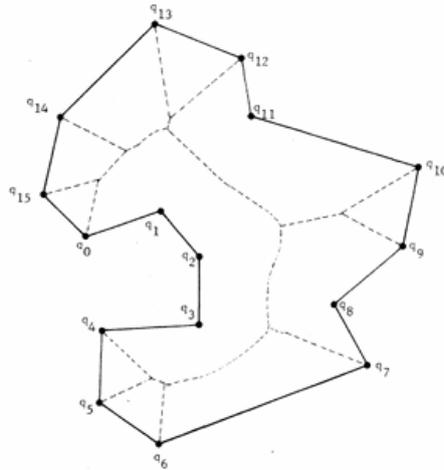


Figura 3.8: Eje medial de un polígono simple.

A continuación, presentamos algunas propiedades del diagrama de Voronoi de un polígono  $G$ .

**Lema 3.1.** *Sea  $e_i$  un segmento o vértice reflejo de  $G$ . Para cualquier punto  $z$  en  $V(e_i)$ , el segmento de recta  $\overline{z, \bar{t}}$ , donde  $t$  es la imagen de  $z$  en  $e_i$ , está completamente contenido en  $V(e_i)$  [véase la Figura 3.9 (a)].*

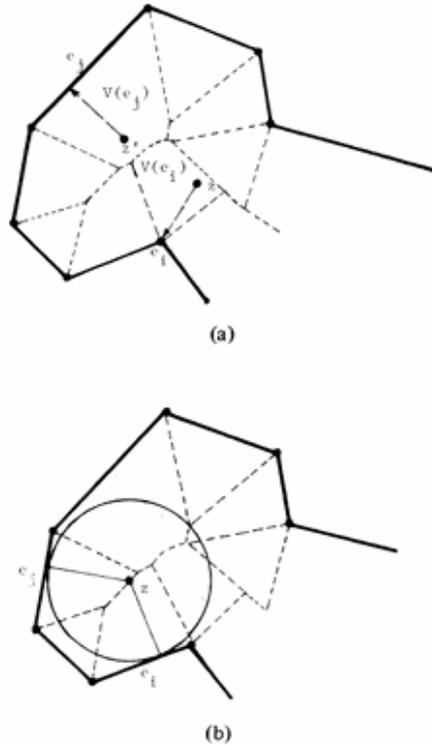


Figura 3.9: Ilustración de los Lemmas 3.1 y 3.2.

**Corolario 3.1.** *Cada polígono de Voronoi  $V(e_i)$  es conexo por caminos, es decir, para cualesquiera dos puntos  $u$  y  $v$  en  $V(e_i)$ , existe un camino que conecta  $u$  y  $v$  que está totalmente contenida en  $V(e_i)$ .*

*Demostración.* Sean  $u'$  y  $v'$  las imágenes de  $u$  y  $v$  en  $e_i$ , respectivamente. Como  $\overline{uu'}$  y  $\overline{vv'}$  se encuentran completamente en  $V(e_i)$ , el camino  $u, u', v', v$ , que conecta  $u$  y  $v$  se encuentra en  $V(e_i)$ . Nótese que si  $e_i$  es un vértice reflejo,  $u' = v' = e_i$  y que si  $e_i$  es una arista, entonces el segmento de recta  $\overline{u', v'}$  está contenido en  $e_i$ .  $\square$

El lema implica que si movemos un punto  $z$  a lo largo de las aristas de Voronoi de  $V(e_i)$  en sentido antihorario (horario), la imagen  $I(z, e_i)$  también se mueve en la misma dirección a lo largo de  $e_i$ . Si  $e_i$  es un vértice, entonces  $e_i$  es la imagen  $I(z, e_i)$  para todo  $z \in V(e_i)$ .

**Lema 3.2.** *Los polígonos de Voronoi  $V(e_i)$  y  $V(e_j)$  comparten una arista si y solo si existe un punto  $z$  tal que el círculo centrado en  $z$  con radio  $d(z, e_i) = d(z, e_j)$  no incluye ningún punto límite de  $G$  en su interior [véase la Figura 3.9 (b)].*

**Corolario 3.2.** *Sea  $z$  cualquier punto de una arista de Voronoi  $\overline{B}(e_i, e_j)$  de  $V(e_i)$ . La circunferencia centrada en  $z$  con radio  $d(z, I(z, e_i))$  es tangente a los elementos  $e_i$  y  $e_j$  en los puntos  $I(z, e_i)$  e  $I(z, e_j)$ .*

Dado que para  $z \in \overline{B}(e_i, e_j)$ ,  $I(z, e_i)$  e  $I(z, e_j)$  son idénticos solo cuando  $e_i$  es un extremo de  $e_j$  o viceversa, podemos obtener el eje medial de  $G$  eliminando las aristas de Voronoi  $\overline{B}(e_i, e_j)$  donde  $e_i$  es un extremo de  $e_j$  o viceversa. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

**Corolario 3.3.** *El eje medial de  $G$  es el conjunto de aristas de Voronoi menos las aristas incidentes con los vértices reflejos.*

**Lema 3.3.** *El diagrama de Voronoi de un polígono simple con  $n$  aristas y  $m$  vértices reflejos es plano y tiene como máximo  $2(n + m) - 3$  aristas de Voronoi y  $n + m - 2$  puntos de Voronoi.*

*Demostración.* La planaridad se deriva del hecho de que cada polígono de Voronoi está conexo por trayectorias y el número de aristas y puntos de Voronoi se puede obtener mediante la fórmula de Euler.  $\square$

A continuación, describiremos el algoritmo para construir el diagrama de Voronoi de un polígono simple. Como antes, asumimos que  $G$  está representado por una lista de  $N = n + m$  elementos  $e_1, e_2, \dots, e_N$ , donde  $n$  es el número de aristas y  $m$  el número de vértices reflejos. El algoritmo que se describirá se basa en la técnica de divide y vencerás. Es decir, dividiremos  $G$  en dos listas:  $G_1 = (e_1, e_2, \dots, e_{\lfloor N/2 \rfloor})$  y  $G_2 = (e_{\lfloor N/2 \rfloor + 1}, \dots, e_N)$  y construiremos recursivamente los diagramas de Voronoi  $Vor(G_1)$  y  $Vor(G_2)$ . A continuación, fusionaremos  $Vor(G_1)$  y  $Vor(G_2)$  para formar el diagrama  $Vor(G)$ . Como veremos más adelante, dado que el proceso de fusión toma  $O(N)$  tiempo, el tiempo total de ejecución es  $O(N \log N)$ .

Dado que solo nos interesa la parte del diagrama interna de  $G$ , limitaremos nuestra discusión al interior de  $G$ . Para distinguir el interior de  $G$  del exterior, asumiremos que  $G$  se recorre en sentido antihorario, de modo que el interior de  $G$  siempre se encuentra a la izquierda. Además, cuando hablamos del diagrama de Voronoi de una lista de elementos, nos referimos a la parte que está a la izquierda de la lista de elementos. Las Figuras 3.10 (a) y (b) ilustran los diagramas de Voronoi de  $G_1 = (e_1, e_2, \dots, e_{10})$  y de  $G_2 = (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{21})$  donde  $(e_1, e_2, \dots, e_{21}) = G$  es un polígono que se muestra en la Figura 3.7. Para fines de implementación, dividimos la lista de elementos de  $G$  en las cadenas  $C_1, C_2, \dots, C_h$  y aplicamos la técnica de divide y vencerás a  $S = \{C_1, C_2, \dots, C_h\}$ .

La razón es que el diagrama de Voronoi de una cadena se puede calcular directamente en un tiempo proporcional al número de elementos de la cadena, y aun así, el tiempo de ejecución del algoritmo modificado permanece constante, es decir,  $O(N \log N)$ . En referencia a la Figura 3.10 (a), podemos dividir  $G_1$  en 4 cadenas, es decir,  $C_1 = e_1, C_2 = e_2, C_3 = e_3$  y  $C_4 = e_4, e_5, \dots, e_{10}$ . El diagrama de Voronoi de  $C_4$  consta de seis aristas de Voronoi:  $\overline{B}(e_4, e_5), \overline{B}(e_5, e_6), \overline{B}(e_6, e_7), \overline{B}(e_7, e_8), \overline{B}(e_8, e_9)$  y  $\overline{B}(e_9, e_{10})$ . Nótese que estas aristas de Voronoi involucran dos elementos, uno de los cuales es un extremo del otro. Para ser coherentes con la implementación, describiremos el algoritmo utilizando este último enfoque. Es decir, primero dividimos  $G$  en un conjunto  $S = C_1, C_2, \dots, C_h$  de cadenas, construimos recursivamente  $Vor(S_1)$  y  $Vor(S_2)$ , donde  $S_1 = \{C_1, C_2, \dots, C_{\lfloor h/2 \rfloor}\}$  y  $S_2 = \{C_{\lfloor h/2 \rfloor + 1}, \dots, C_h\}$  y luego fusionamos  $Vor(S_1)$  y  $Vor(S_2)$  para formar  $Vor(S)$ .

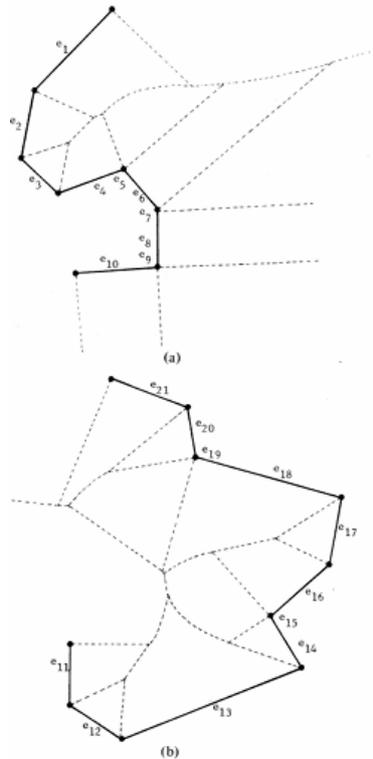


Figura 3.10: Diagramas de Voronoi de dos listas de elementos.

Supongamos ahora que  $Vor(S_1)$  y  $Vor(S_2)$  están disponibles y describamos cómo estos dos diagramas pueden fusionarse en tiempo  $O(N)$ . Supongamos que  $S_1$  contiene los elementos  $e_1, e_2, \dots, e_j$ , y  $S_2$  contiene  $e_{j+1}, e_{j+2}, \dots, e_N$ , donde  $e_1$  y  $e_j$  son, respectivamente, el primer y el último elemento de  $C_1$  y  $C_{\lfloor h/2 \rfloor}$  y  $e_{j+1}$ , y  $e_N$  son, respectivamente, el primer y el último elemento de  $C_{\lfloor h/2 \rfloor + 1}$  y  $C_h$ . Para fusionar  $Vor(S_1)$  y  $Vor(S_2)$  necesitamos construir la curva de fusión  $M$ , que es la bisectriz  $B(S_1, S_2)$  de dos conjuntos de elementos  $S_1$  y  $S_2$ . Dado que  $e_j$  y  $e_{j+1}$  comparten un vértice  $q$  que es convexo, la bisectriz  $B(e_j, e_{j+1})$  que es una bisectriz angular es una bisectriz componente de  $M$  y será nuestra bisectriz inicial. De manera similar, el vértice compartido por  $e_1$  y  $e_N$  es convexo y la bisectriz angular  $B(e_1, e_N)$  que también es una bisectriz componente de  $M$  será nuestra bisectriz terminal, es decir, cuando se construye  $B(e_1, e_N)$  durante el proceso de fusión, sabemos que la fusión se ha completado.

La bisectriz terminal es fácil de identificar en la última fase de la fusión. Durante la recursión, la bisectriz terminal será una, digamos  $B(e_s, e_t)$  tal que tanto  $e_s$  como  $e_t$  sean vértices de  $G$  y la recta  $l$  determinada por  $e_s$  y  $e_t$  tenga la propiedad de que todos los elementos involucrados en el proceso de fusión actual se encuentren en un lado de  $l$ . El proceso de fusión terminará una vez que se cumpla la condición de parada. Con la bisectriz inicial (orientada)  $B(e_j, e_{j+1})$ , escanearemos las aristas del polígono de Voronoi  $V(e_j)$  en sentido antihorario para encontrar la arista  $\overline{B}(e_j, e_s)$  que interseca a  $B(e_j, e_{j+1})$  y, de forma similar, escanearemos las aristas del polígono de Voronoi  $V(e_{j+1})$  en sentido horario para encontrar la arista  $\overline{B}(e_{j+1}, e_t)$  que interseca a  $B(e_j, e_{j+1})$ . Con una comparación adicional, podemos determinar, entre las dos aristas  $\overline{B}(e_j, e_s)$  y  $\overline{B}(e_{j+1}, e_t)$ , cuál interseca primero a  $B(e_j, e_{j+1})$ . Si  $\overline{B}(e_j, e_s)$  interseca a  $B(e_j, e_{j+1})$  antes que a  $\overline{B}(e_{j+1}, e_t)$ , entonces la siguiente bisectriz a considerar es  $B(e_s, e_{j+1})$ ; de lo contrario, será  $B(e_j, e_t)$ . Los empates se resuelven arbitrariamente.

En general, en cada paso hay un triplete  $(B(e_u, e_v), V(e_u), V(e_v))$ , es decir, una bisectriz actual y dos polígonos de Voronoi cuyas aristas se comprobarán para detectar su intersección con la bisectriz actual. El esquema de escaneo consiste en que, para la bisectriz  $B(e_u, e_v)$  orientada actualmente, escaneamos las aristas del polígono asociado al elemento  $e_u$ , a la izquierda de  $B(e_u, e_v)$ , en dirección contraria a la derecha, comenzando por la última arista examinada, y escaneamos las aristas del polígono asociado al elemento  $e_v$ , a la derecha de  $B(e_u, e_v)$ , en dirección contraria a la derecha, comenzando por la última arista examinada. Si  $B(e_u, e_v)$  interseca la arista  $\overline{B}(e_u, e_s)$  de  $V(e_u)$  antes de la arista  $\overline{B}(e_v, e_t)$  de  $V(e_v)$ , entonces el siguiente triplete a considerar es  $(B(e_s, e_v), V(e_s), V(e_v))$ ; de lo contrario, el triplete es  $(B(e_u, e_t), V(e_u), V(e_t))$ . Si durante el escaneo ninguna de las aristas de  $V(e_u)$  y de  $V(e_v)$  interseca a  $B(e_u, e_v)$ , entonces  $B(e_u, e_v)$  será la última bisectriz de  $M$ . Se puede demostrar que, en ese momento,  $B(e_u, e_v)$  satisface la condición de parada. Ilustremos esta idea con un ejemplo. Considere el ejemplo que se muestra en la Figura 3.11, donde  $S_1 = \{C_1 = (1), C_2 = (2), C_3 = (3, 4, 11), C_4 = (12)\}$  y  $S_2 = \{C_5 = (13), C_6 = (14), C_7 = (15), C_8 = (16, 17, 18), C_9 = (19, 20, 21)\}$ .  $Vor(S_1)$  y  $Vor(S_2)$  se muestran en líneas punteadas y discontinuas, respectivamente.

$B(12, 13)$  es nuestra bisectriz inicial. Escanear las aristas de  $V(12)$  en sentido antihorario y encontramos que  $B(12, 13)$  interseca a  $B(10, 12)$ . De forma similar, escanear

las aristas de  $V(13)$  en sentido horario y encontramos que  $B(12, 13)$  interseca a  $B(13, 17)$ . Dado que  $B(10, 12)$  interseca a  $B(12, 13)$  antes que  $B(13, 17)$ , la siguiente bisectriz es  $B(10, 13)$ . Ahora escaneamos las aristas de  $V(10)$  en sentido antihorario comenzando por la última arista examinada,  $B(10, 12)$ , y escaneamos las aristas de  $V(13)$  en sentido horario comenzando por la última arista examinada,  $B(13, 17)$ , para encontrar las aristas que intersecan a  $B(10, 13)$ . Dado que  $B(9, 10)$  interseca a  $B(10, 13)$  antes que  $B(13, 14)$ , la siguiente bisectriz es  $B(9, 13)$ . El mismo proceso se repite hasta llegar a la bisectriz  $B(6, 20)$ . Nótese que, al construir la bisectriz actual  $B(6, 20)$ , escanearemos, como antes, las aristas de  $V(6)$  y  $V(20)$  para encontrar cuáles intersecan a  $B(6, 20)$ .

Dado que ninguna otra arista, excepto  $B(17, 20)$  de  $V(20)$ , interseca a  $B(6, 20)$ , finalizamos el procedimiento de fusión. Se descartan todas las aristas de  $Vor(S_1)$  que se encuentren a la derecha de la bisectriz orientada  $B(S_1, S_2)$ . De igual forma, se descartan las aristas de  $Vor(S_2)$  que se encuentren a la izquierda de  $B(S_1, S_2)$ . De hecho, estos bordes se pueden eliminar al aplicar el esquema de escaneo para construir la curva de fusión.

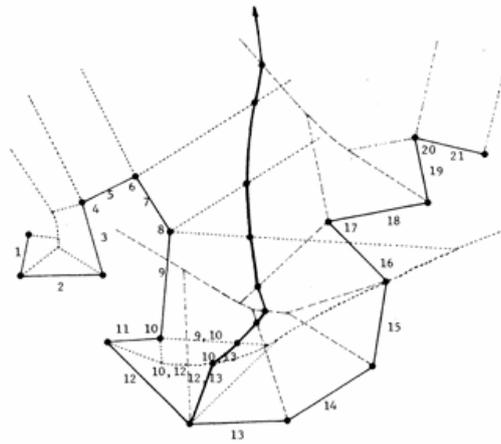


Figura 3.11: Fusión de dos diagramas de Voronoi.

El análisis del algoritmo muestra que la fusión de dos diagramas de Voronoi,  $Vor(S_1)$  y  $Vor(S_2)$ , requiere un tiempo proporcional al número total de elementos en  $S_1$  y  $S_2$ . Por lo tanto, el algoritmo completo se ejecuta en un tiempo  $O(N \log N)$ , donde  $N = n + m$ . La prueba de la corrección del algoritmo y su tiempo de ejecución se puede encontrar en [13].

## 3.2. Esqueleto Recto

Aunque el eje medial es una estructura matemáticamente elegante y de gran relevancia práctica, la presencia de arcos parabólicos complica su uso en determinadas aplicaciones. Esto hizo que se presentara una estructura alternativa relacionada, denominada esqueleto recto  $S(P)$  de un polígono  $P$ , la cual ha encontrado desde entonces numerosas aplicaciones.

En polígonos convexos, el esqueleto recto coincide exactamente con el eje medial; sin embargo, en polígonos no convexos elimina la presencia de arcos parabólicos.

En la Figura 3.12 (a) se muestra un ejemplo de esqueleto recto, que puede compararse con el eje medial correspondiente en la Figura 3.5. Esta estructura se interpreta de manera más intuitiva mediante una variante de la *transformación grassfire*.

### 3.2.1. Construcción

Imaginemos que el contorno  $\partial P$  se contrae mediante una traslación paralela de todas sus aristas hacia el interior, manteniendo la misma velocidad, mientras que cada vértice sigue la bisectriz del ángulo correspondiente. Los vértices reflejos también se desplazan a lo largo de sus bisectrices, lo que provoca que la longitud de las aristas incidentes aumente en dichos extremos. Este proceso de contracción continúa hasta que se presenta uno de los dos eventos descritos a continuación:

1. **Reducción de una arista a longitud cero:** Este evento coincide con el observado en el cálculo del eje medial de polígonos convexos. Al igual que en dicho caso, el proceso prosigue reemplazando la arista eliminada por un nuevo vértice, que se desplaza siguiendo la bisectriz de las aristas adyacentes.
2. **Colisión de un vértice reflejo con una arista:** En este escenario, el polígono original se “acorta”, dividiéndose en dos nuevos polígonos (triángulos en la figura). El proceso de contracción continúa de manera independiente en cada uno de los polígonos resultantes.

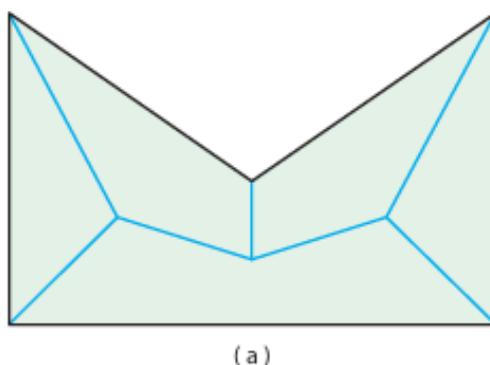


Figura 3.12: El esqueleto recto del polígono no convexo de la Figura 3.5

El proceso de contracción de cada subpolígono finaliza en el momento en que su área se reduce completamente a cero.

**Algoritmo 3** Esqueleto Recto

---

```

1: Input: Polígono  $P$  con aristas  $e_1, e_2, \dots, e_n$  y vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
2: Output: Esqueleto recto  $S(P)$ .
3: while Área( $P$ ) > 0 do
4:   Trasladar todas las aristas de  $P$  hacia adentro a velocidad constante.
5:   Mover cada vértice  $v_i$  siguiendo la bisectriz del ángulo correspondiente.
6:   Actualizar posiciones de vértices reflejos; alargar aristas incidentes si es necesario.
7:   if alguna arista  $e_i$  se reduce a longitud cero then
8:     Reemplazar  $e_i$  por un nuevo vértice en la intersección de sus aristas vecinas.
9:     Continuar la contracción en el polígono actualizado.
10:  else if algún vértice reflejo  $v_r$  colisiona con una arista  $e_j$  then
11:    Dividir  $P$  en dos subpolígonos en el punto de colisión.
12:    Llamar recursivamente a CONTRACCIÓN para cada subpolígono.
13:  end if
14: end while
15: return  $S(P)$ .

```

---

Al igual que el eje medial,  $S(P)$  forma un árbol compuesto por segmentos rectos, cuyas hojas coinciden con los vértices de  $P$ . Los segmentos son rectos porque corresponden siempre a fragmentos de bisectrices. A diferencia del eje medial,  $S(P)$  divide el interior del polígono en  $n$  regiones, exactamente una por cada arista.

A pesar de la simplicidad conceptual del esqueleto recto, definido mediante un proceso geométrico sencillo, no parece existir una definición directa análoga a la de Voronoi que no dependa de un procedimiento constructivo. Por ello, desarrollar un algoritmo eficiente para un polígono con  $n$  vértices ha sido un desafío: hasta la fecha, el algoritmo más rápido conocido tiene un tiempo aproximado de  $O(n^{17/11})$ .

**Proposición 3.7.** *Sea  $P$  un polígono arbitrario de  $n$  vértices. Entonces, el número máximo de aristas del árbol  $S(P)$  es  $2n - 3$ .*

*Demostración.* Igual que la demostración de la Proposición 3.4. □

### 3.3. Sumas de Minkowski

En los apartados anteriores hemos visto cómo el desplazamiento de curvas y polígonos conduce de manera natural a construcciones como el eje medial y el esqueleto recto. Sin embargo, la operación de “desplazar” un conjunto puede formalizarse de manera más general mediante un concepto fundamental en geometría computacional: la *suma de Minkowski*.

La suma de Minkowski permite describir de forma algebraica cómo se modifica un conjunto cuando se “engrosa” o “expande” siguiendo una forma determinada, como por

ejemplo un disco. Esta herramienta resulta especialmente poderosa en aplicaciones prácticas, ya que proporciona un marco unificado para calcular regiones de influencia, expandir obstáculos y modelar el espacio ocupado por un robot de tamaño no puntual.

En esta sección introduciremos la definición formal de suma de Minkowski, exploraremos su interpretación geométrica y mostraremos su relación directa con el concepto de curva desplazada. Este formalismo nos permitirá, más adelante, utilizar la suma de Minkowski para resolver problemas de planificación de movimiento: por ejemplo, transformando un problema con un robot de tamaño finito en un problema equivalente donde el robot es puntual pero los obstáculos han sido “inflados” para garantizar trayectorias libres de colisiones.

Comenzamos definiendo la curva desplazada:

**Definición 3.7.** *Dada una curva suave  $C$ , se denomina curva desplazada (o curva paralela) al lugar geométrico de los puntos situados a una distancia constante  $r$  sobre la normal de cada punto de la curva.*

En otras palabras, esta nueva curva es una traslación ortogonal de  $C$  a lo largo de toda su longitud. Esta definición se apoya en la suavidad de  $C$ , que garantiza la existencia de una derivada en cada punto y, por tanto, de un vector normal bien definido.

Otra forma de definir la curva desplazada, especialmente útil en geometría discreta, es describirla como la envolvente (o el límite exterior) de una familia de discos de radio  $r$  cuyos centros se encuentran sobre  $C$ .

Las curvas desplazadas están estrechamente relacionadas con el eje medial. En el caso de un polígono, su curva desplazada está compuesta por segmentos rectos paralelos a cada lado y arcos circulares con centro en cada vértice reflejo, como se muestra en la Figura 3.13 (a).

Las intersecciones entre pares de segmentos rectos, así como entre segmentos y arcos, señaladas en la parte (a), forman un superconjunto del eje medial. Las trazas asociadas a los vértices reflejos no forman parte del eje medial. (El conjunto completo de estas trazas se conoce en ocasiones como el diagrama de Voronoi del polígono.)

Si los arcos circulares se reemplazan por uniones en inglete, se obtiene el esqueleto recto, ilustrado en la Figura 3.13 (b).

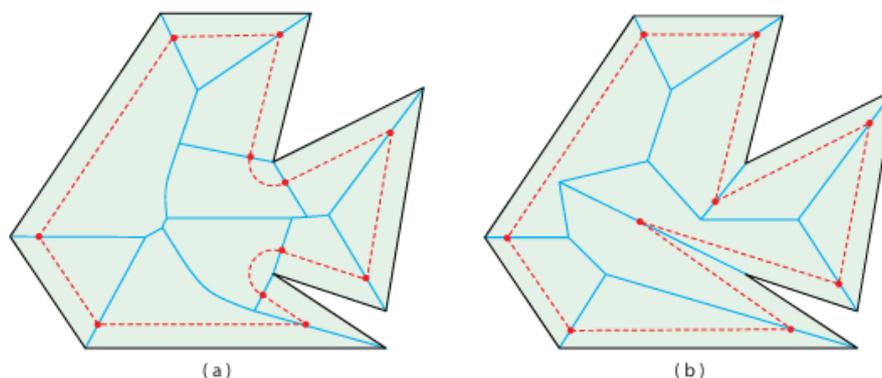


Figura 3.13: (a) Trazos de las uniones (en azul) entre segmentos y arcos, que constituyen un superconjunto del eje medial, y (b) el esqueleto recto. Las líneas discontinuas rojas muestran las curvas desplazadas con uniones circulares y en inglete, respectivamente.

La definición de una curva desplazada puede interpretarse como un caso particular de un concepto más general: la *suma de Minkowski* de dos conjuntos, que se tratará a continuación. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de puntos en el plano. Si fijamos un sistema de coordenadas, los puntos de dichos conjuntos pueden considerarse vectores en ese sistema.

**Definición 3.8.** La suma de Minkowski de los conjuntos  $A$  y  $B$  es

$$A \oplus B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\},$$

donde  $x + y$  es la suma vectorial de los dos puntos.

Para comprender mejor esta idea abstracta, consideremos la suma de Minkowski de un único punto  $x$  y un conjunto  $B$ , definida como

$$x \oplus B = \{x + y \mid y \in B\}.$$

Esta operación no es más que una copia de  $B$  trasladada por el vector  $x$ , ya que cada punto  $y$  de  $B$  se desplaza en  $x$ . De este modo,  $A \oplus B$  puede interpretarse como la unión de copias de  $B$ , una para cada punto  $x \in A$ .

Supongamos ahora que  $A$  es un polígono  $P$  y que  $R$  es un disco centrado en el origen. Entonces,  $P \oplus R$  puede verse como el conjunto formado por múltiples copias de  $R$ , cada una trasladada por un punto  $x \in P$ . Dado que  $R$  está centrado en el origen, el conjunto  $x \oplus R$  estará centrado en  $x$ . Así,  $P \oplus R$  equivale a ubicar una copia de  $R$  centrada en cada punto de  $P$ .

La Figura 3.14 (a) ilustra este concepto para un polígono  $P$  y un disco  $R$ , junto con su suma de Minkowski mostrada en la parte (b). En dicha figura, la suma de Minkowski corresponde a toda la región sombreada a la derecha; se incluye  $P$  en su interior, así como copias seleccionadas de  $R$  colocadas sobre el contorno de  $P$ , para visualizar mejor el proceso de suma.

En efecto,  $P \oplus R$  produce una versión expandida del polígono  $P$ , que denotaremos como  $P^+$ . Es evidente que el borde  $\partial P^+$  de este conjunto expandido coincide con el desplazamiento exterior de  $\partial P$ , con la normal orientada hacia fuera del polígono.

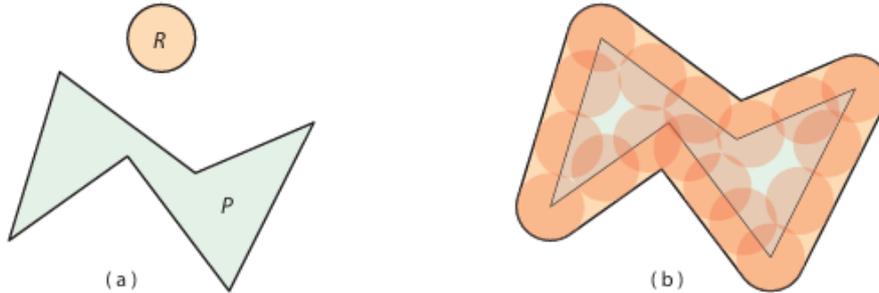


Figura 3.14: El polígono  $P$  y el disco  $R$  junto con su suma de Minkowski a la derecha.

### 3.3.1. Aplicación: Planificación de Movimiento

Presentamos ahora una de las aplicaciones más importantes de la suma de Minkowski en geometría computacional: la planificación del movimiento. Esta consiste en diseñar una trayectoria para que un objeto se desplace a través de un entorno sin colisionar con los obstáculos fijos presentes en él. En un escenario típico, el objeto en cuestión es un robot, mientras que el entorno está compuesto por obstáculos poligonales en 2D o poliédricos en 3D.

Comencemos con el caso bidimensional, en el que el robot se modela como un disco  $R$  y el entorno contiene obstáculos poligonales que debe evitar. (Este modelo es razonable, ya que muchos robots móviles, como los utilizados para el reparto de correo en oficinas, tienen forma circular).

Consideremos la situación en la que el robot  $R$  debe pasar entre dos polígonos  $P_1$  y  $P_2$ , como se ilustra en la Figura 3.15 (a). Sea  $r$  un punto de referencia en el disco  $R$ , por ejemplo, su centro. El punto  $r$  no puede acercarse a menos de una distancia igual al radio  $\rho$  del disco a ninguno de los polígonos  $P_1$  o  $P_2$ . Esto sugiere considerar los obstáculos expandidos  $P_1^+$  y  $P_2^+$ , obtenidos aumentando cada polígono en  $\rho$ , de modo que podamos reducir el problema a mover un punto ( $r$ ) entre estos obstáculos agrandados.

El límite de estos obstáculos expandidos se obtiene siguiendo el movimiento de  $r$  cuando el disco  $R$  recorre el contorno de  $P_1$  y  $P_2$ , es decir, cuando sigue  $\partial P_1$  y  $\partial P_2$ . Resulta evidente que, si  $r$  permanece fuera de  $P_1^+$  y  $P_2^+$ , el robot  $R$  no colisionará con los polígonos; por el contrario, si  $r$  se encuentra dentro de alguna de estas regiones expandidas,  $R$  necesariamente intersecará el obstáculo correspondiente.

Formalmente, aplicando el concepto de suma de Minkowski, el robot puede pasar entre los dos obstáculos si, y solo si, las regiones  $P_1 \oplus R$  y  $P_2 \oplus R$  no se solapan, es decir, si  $\partial P_1^+$  y  $\partial P_2^+$  no se intersecan. En el ejemplo mostrado en la Figura 3.15 (b), las sumas de Minkowski de ambos polígonos sí se superponen, lo que implica que el robot no puede atravesar el pasaje entre los obstáculos.

Cabe destacar que, en este análisis, se asume que  $R$  está definido en un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con su centro, al que denominaremos *punto de referencia* del robot.

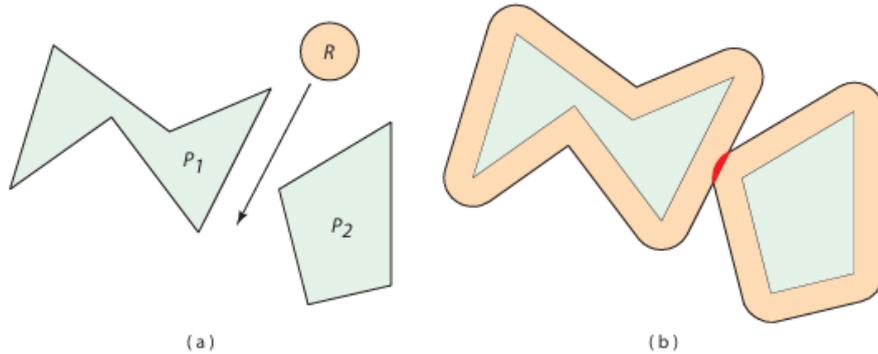


Figura 3.15: (a) ¿Puede el robot  $R$  pasar por el espacio entre  $P_1$  y  $P_2$ ? (b) Las sumas de Minkowski  $P_1 \oplus R$  y  $P_2 \oplus R$  se superponen, lo que demuestra que  $R$  no puede pasar por el espacio.

Después de analizar el caso en que el robot  $R$  es un disco centrado en el origen, pasamos a estudiar la situación en la que  $R$  es un polígono convexo. Aunque en este escenario las rotaciones de  $R$  adquieren relevancia, nos centraremos en planificar únicamente un *movimiento de traslación* para el robot. (En la Sección 5.1 abordaremos el movimiento de rotación y el caso tridimensional).

Sea el robot  $R$  un cuadrado y elegimos el punto de referencia  $r$  como su esquina inferior izquierda. Consideremos un polígono  $P$  como el pentágono que se muestra en la Figura 3.16. A medida que  $R$  se mueve alrededor de  $\partial P$ ,  $r$  traza el límite de  $P^+$ , un obstáculo expandido que define la región del plano donde  $r$  no puede penetrar. Nótese que la situación es algo diferente a la de un disco, ya que elegimos el punto de referencia en una esquina de  $R$ :  $P$  crece en una cantidad diferente a lo largo de cada arista. Por ejemplo, a lo largo de la arista  $e_o$ ,  $P$  y  $P^+$  coinciden, ya que es posible que  $r$  toque  $e_o$ . Y el desplazamiento de  $P^+$  con respecto a las aristas  $e_1$  y  $e_4$  de  $P$  es diferente: la anchura de  $R$  horizontalmente desde  $e_1$ , y la altura de  $R$  verticalmente desde  $e_4$ . Observe también lo que sucede cerca del vértice reflejo: si trazamos las longitudes completas de las dos aristas incidentes a él,  $r$  traza una trayectoria que se cruza a sí misma, cuyo exterior, sin embargo, representa con precisión los límites físicos de la aproximación de  $R$  a  $P$ .

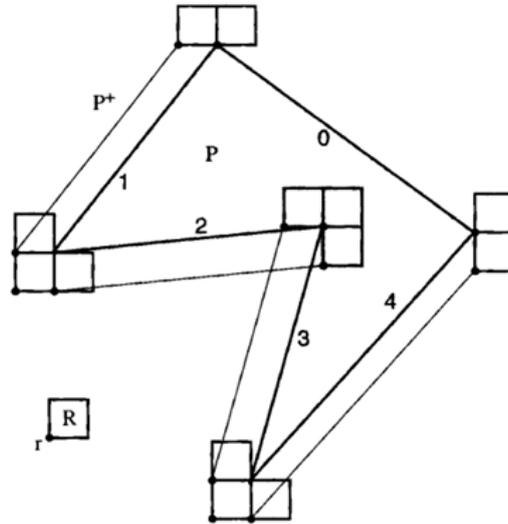


Figura 3.16: Aumentar  $P$  mediante  $R$  produce  $P^+$ . Se muestran las ubicaciones críticas de  $R$  cerca de los vértices de  $P$ .

Con  $R$  como un disco, argumentamos que  $P^+ = P \oplus R$ . Pero eso claramente no funcionará en la Figura 3.16: Por ejemplo,  $P \oplus R$  “sobresaldrá” más allá de la arista  $e_o$  de  $P$ , pero  $P^+$  no. El cálculo apropiado es más bien tomar la suma de Minkowski de  $P$  con una reflexión de  $R$  a través del punto de referencia  $r$ . Dado que  $r$  es el origen para los propósitos de la formulación de la suma de Minkowski esta versión reflejada de  $R$  es simplemente  $-R$ , donde cada punto de  $R$  es negado. La razón intuitiva para la necesidad de la reflexión es que cada punto  $p \in R$  (digamos la esquina superior derecha de  $R$ ) tiene el efecto de mantener  $r$  alejado de  $\partial P$  por  $-p$ . Ahora podemos ver que  $P^+$  en la Figura 3.16 es  $P \oplus -R$ . Nótese que debido a que un disco es centralmente simétrico respecto a su centro,  $R = -R$ , por lo que esta nueva formulación es consistente con nuestra presentación en la sección anterior.

Formalizamos nuestra discusión con una afirmación ligeramente más general.

**Teorema 3.1.** *Sea  $R$  una región (el robot) y  $r \in R$  un punto de referencia. Sea  $P$  un obstáculo. Entonces, la región  $P^+ = P \oplus -R$  es el conjunto de puntos prohibidos para  $r$  en el sentido de que:*

- Si  $R$  se traslada de modo que  $r$  sea estrictamente interior a  $P^+$ , entonces  $R$  penetra en  $P$ .
- Si  $R$  se traslada de modo que  $r$  se encuentre en  $\partial P^+$ , entonces  $\partial R$  toca a  $\partial P$ .
- Si  $R$  se traslada de modo que  $r$  sea estrictamente exterior a  $P^+$ , entonces  $R \cap P = \emptyset$ .

Esto es un poco más general, ya que ni  $R$  ni  $P$  necesitan ser convexos, ni siquiera deben ser polígonos. Pero continuamos asumiendo en esta sección que ambos son polígonos y que  $R$  es convexo. Por conveniencia, tomaremos  $r$  como el origen.

La Figura 3.17 (a) presenta el mismo ejemplo que la Figura 3.15, pero con el robot  $R$  modelado como un cuadrilátero irregular. El procedimiento es análogo al anterior, salvo que en esta ocasión debemos calcular las sumas de Minkowski utilizando  $-R$  en lugar de  $R$ . Las regiones resultantes,  $P_1 \oplus -R$  y  $P_2 \oplus -R$ , se muestran en la parte (b) de la figura, junto con algunas posiciones seleccionadas de  $-R$ . Dado que los bordes  $\partial P_1^+$  y  $\partial P_2^+$  no se intersecan, el robot puede desplazarse evitando los obstáculos.

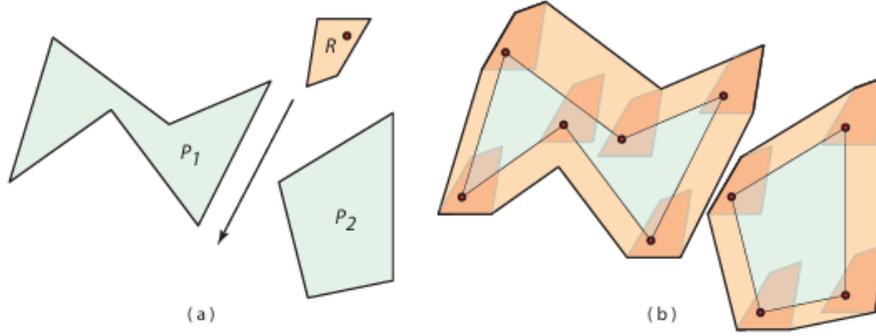


Figura 3.17: (a) ¿Puede el polígono  $R$  pasar por el hueco entre  $P_1$  y  $P_2$ ? El punto de referencia de  $R$  está marcado. (b) Las sumas de Minkowski no se intersecan, lo que demuestra que  $R$  puede pasar por los polígonos.

Hemos visto que la planificación del movimiento traslacional en 2D se puede reducir al cálculo de la suma de Minkowski entre cada polígono de obstáculo  $P$  y el robot en movimiento  $R$ . Aunque existen otros desafíos importantes para implementar una planificación de movimiento completa utilizando este enfoque, los dejaremos para la Sección 5.1 y, por ahora, nos centraremos en el cálculo efectivo de  $P \oplus R$ .

### 3.3.2. Complejidad básica

A continuación, abordamos la complejidad del cálculo de la suma de Minkowski. Para ello, comenzaremos presentando algunos resultados que nos ayudarán a comprenderla.

**Proposición 3.8.** *Sea  $p$  un punto en el contorno de la suma de Minkowski de dos conjuntos cerrados  $A$  y  $B$ . Para cada punto  $a \in A$  y cada punto  $b \in B$  tales que  $a + b = p$ ,  $a$  está en el contorno de  $A$  y  $b$  está en el contorno de  $B$ .*

*Demostración.* Supongamos por contradicción que (sin pérdida de generalidad)  $a$  no está en el límite de  $A$ .

Entonces podemos encontrar un entorno  $\varepsilon > 0$  alrededor de  $a$ ,  $N_a$ , donde todo el entorno está dentro de  $A$ . Por lo tanto, todo el disco  $N_a + b$  está dentro de la suma, lo que contradice  $a + b = p \in \partial(A \oplus B)$ .  $\square$

De la proposición se sigue inmediatamente que:

**Corolario 3.4.** *Cada punto en el límite de la suma de Minkowski de dos polígonos  $P$  y  $Q$  es la suma de un punto en el límite de  $P$  con un punto en el límite de  $Q$ .*

**Proposición 3.9.** *Sean  $P$  y  $Q$  dos polígonos convexos con  $m$  y  $n$  vértices respectivamente. Su suma de Minkowski es un polígono convexo con como máximo  $m + n$  vértices.*

*Demostración.* Probamos primero la convexidad del polígono resultante de la suma de Minkowski. Sea  $x_1, x_2 \in P \oplus Q$ . Entonces  $x_1 = p_1 + q_1$  y  $x_2 = p_2 + q_2$  para  $p_1, p_2 \in P$  y  $q_1, q_2 \in Q$ . Consideremos un punto  $x_t = (1 - t)x_1 + tx_2$  para  $t \in [0, 1]$ .  $x_t = (1 - t)(p_1 + q_1) + t(p_2 + q_2) = ((1 - t)p_1 + tp_2) + ((1 - t)q_1 + tq_2)$ . Como  $P$  y  $Q$  son convexos,  $(1 - t)p_1 + tp_2 \in P$  y  $(1 - t)q_1 + tq_2 \in Q$ . Por lo tanto,  $x_t \in P \oplus Q$ , lo que demuestra que  $P \oplus Q$  es convexo.

Por otro lado, para ver que el polígono resultante tiene como máximo  $m + n$  vértices observamos lo siguiente. Los vértices de  $P \oplus Q$  se forman sumando un vértice de  $P$  y un vértice de  $Q$ . Las aristas de  $P \oplus Q$  se forman sumando una arista de  $P$  con un vértice de  $Q$ , o una arista de  $Q$  con un vértice de  $P$ . Las aristas de  $P \oplus Q$  son paralelas a las aristas de  $P$  y  $Q$ . Al fusionar las secuencias ordenadas de aristas dirigidas desde  $P$  y  $Q$  por un ángulo polar, cada arista de  $P$  o  $Q$  contribuye como máximo con una arista a  $P \oplus Q$ . Por lo tanto, el número de aristas en  $P \oplus Q$  es como máximo  $m + n$ . Dado que el número de vértices en un polígono es igual a su número de aristas,  $P \oplus Q$  tiene como máximo  $m + n$  vértices.  $\square$

El límite de la suma de Minkowski se forma a partir de la suma de pares de aristas y vértices, donde cada sumando proviene de un polígono diferente. Dado que existen  $O(mn)$  pares de aristas, la suma induce una disposición de  $O(m^2n^2)$  aristas. Si tanto  $P$  como  $Q$  son convexos, la suma de Minkowski tiene como máximo  $m + n$  vértices, como hemos visto, y puede calcularse eficientemente en tiempo  $O(m + n)$ . Si solo uno de los polígonos es convexo, la suma tiene  $O(mn)$  vértices y puede calcularse en tiempo  $O(mn \log(mn))$ .

### 3.3.3. Construcción

La mayoría de los métodos exactos se pueden dividir en dos categorías principales: descomposición y convolución. A continuación, profundizaremos en la convolución, sin embargo, comenzaremos con una breve descripción del enfoque de descomposición.

#### Descomposición

El enfoque de descomposición implica, para empezar, la descomposición de las entidades geométricas de entrada complejas en unidades más simples. Posteriormente, se calculan las sumas de Minkowski por pares entre ellas y se unifican (unen) para obtener la suma completa. Este enfoque fue propuesto inicialmente por Lozano-Pérez. Flato ha implementado la primera versión exacta y robusta del método de descomposición, que maneja características degeneradas (de baja dimensión). Los polígonos no convexos se descomponen en polígonos convexos. Posteriormente, se calculan las sumas de Minkowski por pares. Finalmente, se unifican las sumas de Minkowski por pares intermedias.

Cada paso de este proceso puede generar diversos efectos en la eficiencia del tiempo de ejecución. La elección del método de descomposición determina cuántos polígonos intermedios y la complejidad de los polígonos descompuestos. La simplicidad de este método

implica el cálculo de la descomposición en sí. Naturalmente, el número de polígonos convexos intermedios influye considerablemente en la cantidad de trabajo necesario durante el paso de unión. Flato probó diferentes métodos de descomposición y heurísticas, así como un método incremental para calcular la unión.

## Convolución

En 1983, Guibas presentó un marco de operaciones sobre el trazado poligonal (que amplía el concepto de polígono). En este marco, los autores definieron una operación sobre dos trazados llamada convolución. Enunciaron un teorema, el Teorema de Convolución, que implica que el límite de la suma de Minkowski es un subconjunto de esta convolución.

Los métodos de convolución se basan en el cálculo de un superconjunto del límite de la suma de Minkowski y en la eliminación de las características que no se encuentran en él. Wein implementó el método de convolución para sumas planares de dos polígonos simples. Para extraer el límite de la suma de Minkowski, calcula la disposición de los segmentos de convolución y calcula el número de vueltas para cada cara de la disposición. Según el teorema establecido, las regiones interiores de la suma de Minkowski son celdas con números de vueltas positivos. Este método supera a los mejores métodos de descomposición en la mayoría de los casos donde los polígonos de entrada no se pueden descomponer fácilmente. La implementación de Wein también es exacta y robusta, y es capaz de calcular todas las características de baja dimensión.

A continuación, esbozamos un método para construir la suma de Minkowski de dos polígonos.

Continuamos usando el ejemplo iniciado en la Figura 3.16. La Figura 3.18 (b) muestra  $P^+ = P \oplus -R$ , con aristas de  $P$  etiquetadas como  $0, \dots, 4$ , aristas de  $-R$  etiquetadas como  $a, \dots, d$ , ambas según recorridos en sentido antihorario, y aristas de  $P^+$  etiquetadas entre  $0, 1, 2, 3, 4, a, b, c, d$  según qué arista de  $P$  o  $-R$  lo genere. Así, cuando  $R$  roza a lo largo de la arista 2 de  $P$ , el punto de referencia  $r$  traza una arista paralela de  $P^+$  que etiquetamos como 2; y cuando  $R$  roza a lo largo de  $c$  verticalmente en el vértice en la intersección de las aristas 1 y 2 de  $P$ , etiquetamos esa arista de  $P^+$  también como  $c$ .

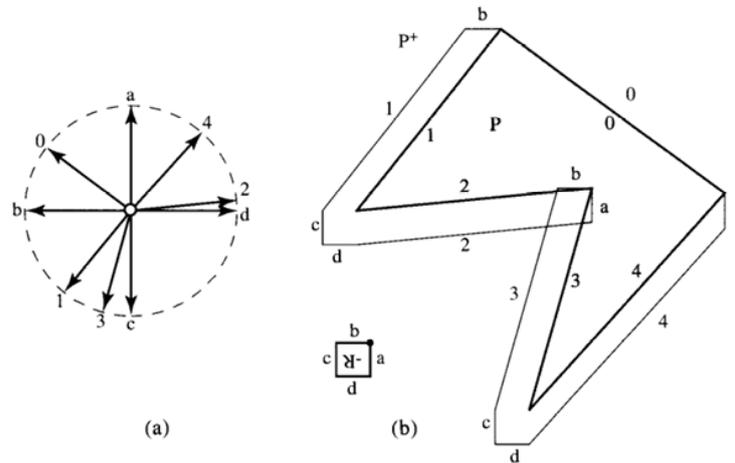


Figura 3.18: (a) Diagrama de estrella de los vectores de aristas. (b) Aristas de convolución etiquetadas con  $P$  o  $-R$ .

Nótese que hemos etiquetado toda la trayectoria poligonal autointersecante  $\tau$  que limita  $P^+$ , incluyendo las aristas en la proximidad del vértice reflejo que están dentro de  $P^+$ . Es más fácil aproximarse a  $P^+$  construyendo primero  $\tau$ , lo que a veces se denomina convolución de  $P$  y  $-R$ .

El patrón de etiquetas de las aristas de  $\tau$  se puede entender claramente a partir de un diagrama en estrella de los vectores de aristas de  $P$  y  $-R$ , que se muestra en la Figura 3.18 (a). Si pensamos en  $P$  como grande y  $R$  como pequeño, como en nuestro ejemplo de ejecución, entonces, a grandes rasgos,  $\tau$  tiene aristas que corresponden a las de  $P$ , intercaladas con algunas aristas de  $-R$ . De hecho, se puede ver que la secuencia de etiquetas para  $\tau$ ,  $(0, b, 1, c, d, 2, a, b, 3, c, d, 4, a)$ , incluye  $(0, 1, 2, 3, 4)$  como una subsecuencia. El diagrama de estrella proporciona un mecanismo para predecir las etiquetas intercaladas de  $-R$ .

Considere cada arista como un vector dirigido según un recorrido en sentido antihorario y muévalas todas a un origen común, como se muestra (normalizado a la longitud unitaria) en la Figura 3.18 (a).

A esta disposición de vectores de aristas la llamamos diagrama de estrella. Comenzando con 0, se traza un círculo alrededor de la estrella en sentido antihorario. Entre los índices  $i$  e  $i + 1$  de las aristas de  $P$ , se anotan todos los índices de  $-R$  encontrados. Así, entre 0 y 1, se encuentra  $b$ , lo que da la subsucesión  $(0, b, 1)$ . Entre 1 y 2, se encuentran  $c$  y  $d$ , lo que da la subsucesión  $(1, c, d, 2)$ . Continuando de esta manera, generamos la secuencia completa para  $\tau$  al llegar de nuevo a 0.

Para obtener la suma de Minkowski  $P^+$  a partir de  $\tau$ , queda trabajo por hacer para encontrar las autointersecciones de la convolución. Aunque los detalles no están claros, al menos debería estar claro que existe un procedimiento determinante para construir  $P^+$  a partir de  $P$  y  $R$ . En la siguiente sección lo exploramos con más detalle.

### 3.4. Convolución de Curvas

En la sección anterior vimos cómo la suma de Minkowski permite describir de manera algebraica la expansión de un conjunto en el plano. Sin embargo, en la práctica, lo que suele interesar en planificación de movimiento no es el conjunto expandido completo, sino únicamente su frontera, ya que es allí donde se producen las colisiones potenciales y donde deben definirse las trayectorias seguras.

Calcular primero el conjunto  $A \oplus B$  y luego extraer su borde  $\partial(A \oplus B)$  es un enfoque posible, pero computacionalmente costoso. Existe, no obstante, un método más directo y elegante: la convolución de curvas, que permite obtener el límite de la suma de Minkowski a partir de las fronteras de los conjuntos originales, sin necesidad de construir toda la región intermedia.

Esta técnica tiene importantes aplicaciones en geometría computacional y en robótica, ya que permite representar de manera eficiente el “espacio libre” de un entorno tras inflar los obstáculos según la forma del robot. Además, la convolución de curvas está estrechamente ligada a conceptos de topología, como el número de vueltas, que proporciona un criterio formal para determinar qué puntos del plano pertenecen al conjunto resultante.

En esta sección introduciremos la definición formal de convolución de curvas, estudiaremos su interpretación geométrica y veremos cómo se relaciona con la suma de Minkowski. Estos resultados sentarán las bases para algoritmos que, en etapas posteriores, permitirán planificar trayectorias óptimas y seguras para robots móviles en entornos complejos. Comenzaremos presentando una definición general.

**Definición 3.9.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos curvas planas cerradas y suaves (orientadas en sentido antihorario) cuyos puntos se interpretan como vectores en un sistema de coordenadas común. La convolución de las curvas  $\alpha$  y  $\beta$  es la curva

$$\alpha * \beta = \{x + y \mid x \in A, y \in B, T_x = T_y\},$$

donde  $T_p$  es el vector tangente unitario en el punto  $p$ . Orientamos la curva  $\alpha * \beta$  para que  $T_{x+y} = T_x = T_y$ .

Se puede interpretar  $\alpha * \beta$  como el conjunto obtenido al rotar tangentes paralelas a lo largo de  $\alpha$  y  $\beta$  y sumar sus puntos de contacto  $x + y$ . La Figura 3.19 muestra un ejemplo de dos curvas suaves junto con algunas tangentes seleccionadas.

Esta idea se generaliza de manera natural a curvas poligonales cerradas  $\alpha$  y  $\beta$ : la rotación continua de las tangentes produce un avance de los puntos de contacto “a ráfagas” debido a los cambios discontinuos en las tangentes. La Figura 3.20 ilustra la curva de convolución para  $\alpha = \partial P_1$  y  $\beta = \partial(-R)$ , como en la Figura 3.17.

Dicha figura sugiere la relación precisa entre los operadores  $\oplus$  y  $*$ . Para clarificar esta relación, introducimos el concepto de *número de vueltas* de una curva, una herramienta de gran utilidad en topología.

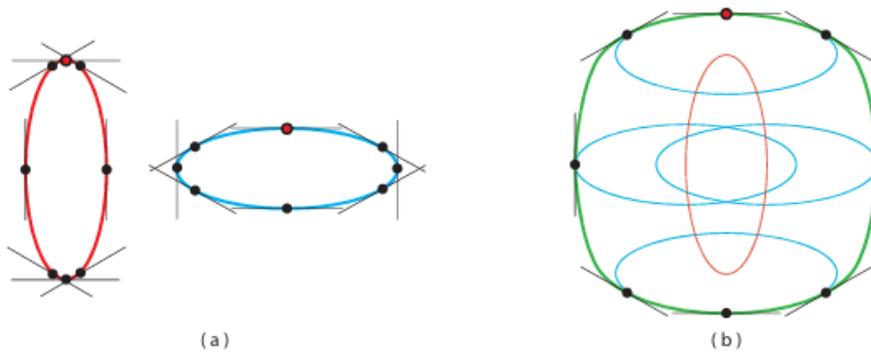


Figura 3.19: Dos curvas  $\alpha$  y  $\beta$  y su convolución  $\alpha * \beta$ . El origen está en el centro de ambas elipses.

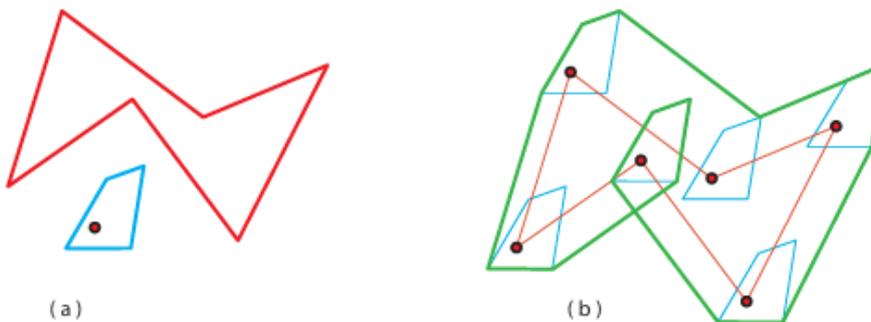


Figura 3.20: (a) Curvas poligonales obtenidas a partir de los límites de  $P_1$  y  $-R$  de la Figura 3.17. (b) La curva de convolución  $\partial P_1 * \partial(-R)$  se muestra en verde.

Una curva  $\gamma$  en el plano se puede definir mediante ecuaciones paramétricas:  $x = X(t), y = Y(t), t \in [0, 1]$ . Exigimos que  $X(t)$  e  $Y(t)$  sean continuas en  $t$ . Dado que se trata de curvas cerradas (ciclos),  $X(0) = X(1)$   $Y(0) = Y(1)$ . Podemos convertir la curva al sistema de coordenadas polares trasladando el punto de observación  $x$ , que no está en la curva, al origen. La parametrización se convierte en  $R(t), \theta(t)$ .

**Definición 3.10.** *El número de vueltas para  $x$  será:*

$$\Phi_\gamma(x) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$$

Una definición menos formal es la siguiente:

**Definición 3.11.** *Sea  $\gamma$  una curva plana cerrada, orientada en sentido antihorario y posiblemente autointersecante, y sea  $x$  cualquier punto del plano que no esté en  $\gamma$ . El número de vueltas  $\Phi_\gamma(x)$  de  $\gamma$  con respecto a  $x$  cuenta el número de vueltas completas de  $\gamma$  alrededor de  $x$ .*

Consideremos un enfoque intuitivo para esta definición: imagina que tu amiga María recorre la curva  $\gamma$  siguiendo su orientación, comenzando en un punto de  $\gamma$  y regresando

al mismo punto tras completar el recorrido. Tú estás situado en un punto  $x$  y giras continuamente para mantenerla en tu campo de visión durante todo el trayecto. El *número de vueltas* se define como el giro angular neto total que realizas durante este recorrido; “neto” significa que los giros negativos (en sentido horario) se compensan con los giros positivos (en sentido antihorario).

Es importante notar que, para una curva convexa simple (sin autointersecciones)  $\gamma$ , el número de vueltas es  $\gamma(x) = +1$  si  $x$  se encuentra dentro de  $\gamma$ , y  $\gamma(x) = 0$  si  $x$  está fuera. Aquí,  $+1$  corresponde a una vuelta completa en sentido antihorario, es decir, una suma de ángulos de  $2\pi$ . Menos evidente, pero igualmente cierto, es que este resultado se mantiene para todas las curvas simples, de acuerdo con el teorema de la curva de Jordan. Recordémoslo:

**Teorema 3.2** (Curva de Jordan Poligonal). *El límite  $\partial P$  de un polígono  $P$  divide el plano en dos partes. En particular, los dos componentes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \partial P$  son el interior acotado y el exterior no acotado.*

*Demostración.* Sea  $P$  un polígono en el plano. Primero elegimos una dirección fija en el plano que no sea paralela a ninguna arista de  $P$ . Esto siempre es posible porque  $P$  tiene un número finito de aristas. Entonces, cualquier punto  $x$  en el plano que no esté en  $\partial P$  pertenece a uno de dos conjuntos:

1. La semirrecta con origen en  $x$  y dirección fija corta a  $\partial P$  un número par de veces:  $x$  es exterior. En este caso, una semirrecta que pasa por un vértice no se considera que corta a  $\partial P$ .
2. La semirrecta con origen en  $x$  y dirección fija corta a  $\partial P$  un número impar de veces:  $x$  es interior.

Nótese que todos los puntos de un segmento de recta que no intersecan a  $\partial P$  deben estar en el mismo conjunto. Por lo tanto, los conjuntos pares e impares son conexos.

Además, si existe un camino entre puntos de diferentes conjuntos, entonces este camino debe cortar a  $\partial P$ . □

Cuando la curva presenta autointersecciones, el plano se divide en regiones, cada una con un número de vueltas entero. La Figura 3.21 muestra dos ejemplos: la parte (a) corresponde a una curva suave y la parte (b) a la curva poligonal de la Figura 3.20 (b). Puede observarse que el número de vueltas, en cierto sentido, generaliza el teorema de la curva de Jordan.

Con esta base, la relación entre la suma de Minkowski y la convolución puede enunciarse mediante el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.** *La suma de Minkowski de dos polígonos planos  $A$  y  $B$  es el conjunto de puntos en el plano con un número de vueltas positivo con respecto a la convolución de  $\partial A$  con  $\partial B$ . En otras palabras,*

$$A \oplus B = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi_{\partial A * \partial B}(p) > 0\}$$

.

Sin embargo, hasta donde sabemos, no se ha publicado ninguna prueba de este teorema. Algunos resultados que pueden ayudar a demostrarlo se encuentran en [19] y [23].

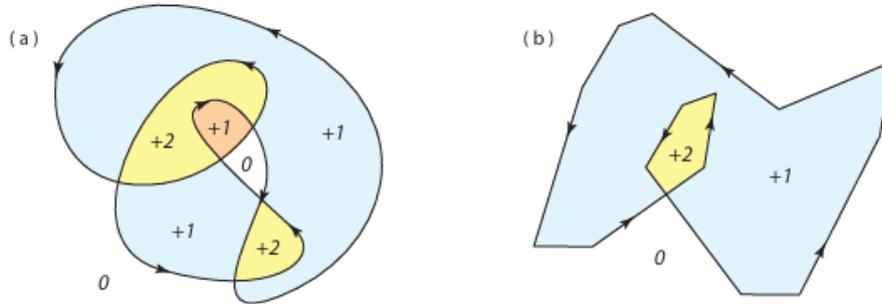


Figura 3.21: Número de vueltas en regiones determinadas por curvas autointersecantes en sentido antihorario.

Compare la suma de Minkowski de los dos polígonos  $P_1 \oplus (-R)$  mostrada en la Figura 3.17 (b), la curva de convolución  $\partial P_1 * \partial(-R)$  de la Figura 3.20 (b) y la partición según el número de vueltas de esta curva en la Figura 3.21 (b). Los valores positivos del número de vueltas de la curva de convolución delimitan con precisión la región correspondiente a la suma de Minkowski.

### 3.4.1. Construcción

Después de establecer las relaciones fundamentales entre la suma de Minkowski, la curva de convolución y el número de vueltas, podemos centrarnos ahora en los aspectos de cálculo. Supongamos nuevamente que  $A$  y  $B$  son polígonos involucrados en la planificación del movimiento. Recordemos que es la frontera  $\partial(A \oplus B)$  de la suma de Minkowski la que resulta esencial para esta tarea. El Teorema 3.3 proporciona los mecanismos necesarios para determinar esta frontera. Los pasos a seguir son los siguientes:

---

**Algoritmo 4** Cálculo de  $\partial(A \oplus B)$  mediante convolución

---

**Require:** Polígonos  $A$  y  $B$

**Ensure:** Frontera  $\partial(A \oplus B)$

- 1: Calcular  $\partial A * \partial B$
  - 2: Identificar los *ciclos de convolución*
  - 3: Conservar los ciclos con número de vueltas positivo
  - 4: Fusionar los ciclos para construir  $\partial(A \oplus B)$
- 

A pesar de la complejidad aparente de estos pasos, implementaciones recientes han demostrado que este enfoque es, en la práctica, considerablemente más eficiente que el método alternativo más conocido.

A continuación, esbozamos la idea principal del primer paso: calcular  $\partial A * \partial B$ . Para simplificar la notación, denotemos  $\alpha = \partial A$ ,  $\beta = \partial B$  y  $\gamma = \alpha * \beta$ .

Consideremos nuevamente las tangentes paralelas que rotan a lo largo de  $\alpha$  y  $\beta$  (como en la Figura 3.19), tocando los vértices  $a_i$  y  $b_j$  de los polígonos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Cada evento de rotación se produce cuando las tangentes alcanzan la siguiente arista de cualquiera de los polígonos:  $a_i a_{i+1}$  o  $b_j b_{j+1}$ , dependiendo de cuál se encuentre primero. En ese momento, el siguiente punto generado en  $\gamma$  será  $a_{i+1} b_j$  si se alcanza primero la arista  $a_i a_{i+1}$ , o  $a_i b_{j+1}$  si la arista  $b_j b_{j+1}$  se alcanza primero.

Una manera de implementar este procedimiento es mediante un *diagrama en estrella* de los vectores de arista, que coloca todos los vectores de  $\alpha$  y  $\beta$  con un origen común y los etiqueta según sus índices. La Figura 3.22 (a) muestra las dos curvas,  $\alpha$  (roja) y  $\beta$  (azul), mientras que la parte (b) presenta su diagrama en estrella correspondiente a los 8 vectores de  $\alpha$  y los 22 vectores de  $\beta$ .

Comenzamos fijando una semirrecta con base en el origen del diagrama, apuntando horizontalmente hacia la izquierda. Esta semirrecta representa el par de tangentes a  $\alpha$  y  $\beta$ , partiendo de los puntos superiores marcados de ambas curvas. Giramos la semirrecta en sentido antihorario alrededor del origen, registrando los momentos en que coincide con algún vector del diagrama en estrella. Cada vez que se encuentra un vector de arista sucesivo, se genera  $a_{i+1} b_j$  o  $a_i b_{j+1}$ , según se describió previamente.

El giro continúa hasta que todas las aristas de  $\alpha$  y  $\beta$  hayan sido recorridas en el orden etiquetado. La Figura 3.23 (a) muestra la curva de convolución  $\alpha * \beta$  correspondiente a las curvas, mientras que la parte (b) presenta la misma curva con los bordes coloreados según su origen. La coloración revela que  $\alpha$  ya ha completado un ciclo al encontrarse con el tercer borde de  $\beta$ , y que  $\alpha$  efectúa diez ciclos antes de que  $\beta$  complete uno solo.

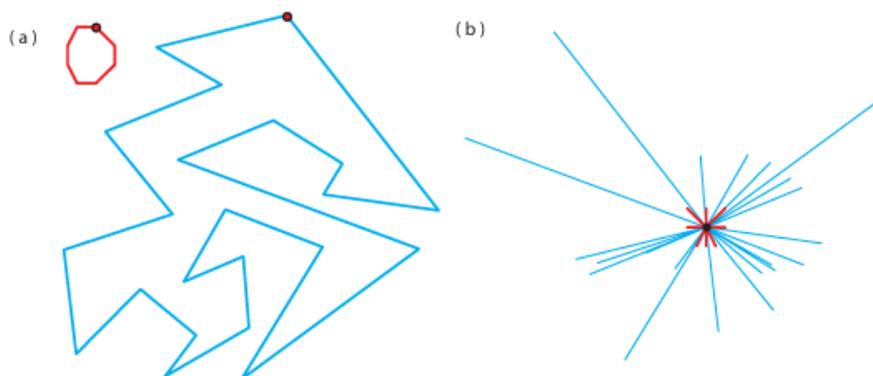


Figura 3.22: (a) Curvas poligonales  $\alpha$  y  $\beta$  y su (b) diagrama en estrella de vectores de arista.

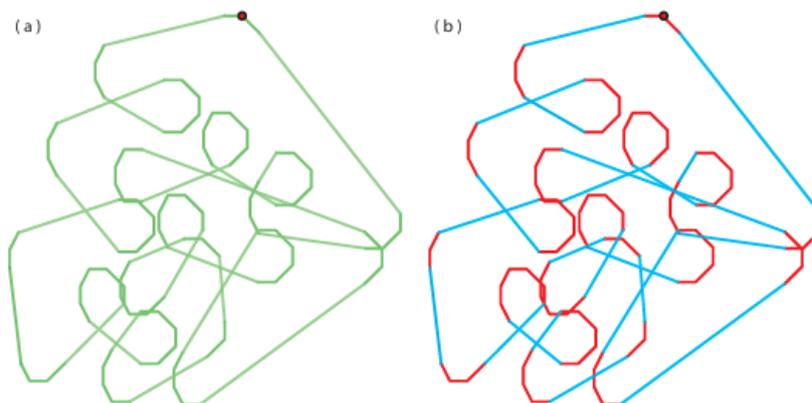


Figura 3.23: (a) La curva de convolución  $\alpha * \beta$  de las curvas de la Figura 3.22, con (b) bordes coloreados según su origen.

Los numerosos ciclos de convolución de la Figura 3.23 indican que la complejidad de la convolución de dos curvas, y por lo tanto la suma de Minkowski, es potencialmente cuadrática.

## Capítulo 4

# Reconocimiento de Obstáculos

Hoy en día, existen numerosos dispositivos de escaneo que recopilan con rapidez y precisión una muestra densa de puntos de la superficie de un objeto 3D, como los telémetros láser, la fotografía estereoscópica y los escáneres láser. Los datos brutos recopilados por estos dispositivos se representan generalmente mediante coordenadas 3D de puntos de la superficie. La “reconstrucción” de la superficie consiste en desarrollar una representación de la misma conectando puntos cercanos en una especie de “malla”, una superficie de triángulos.

Esta capacidad de reconstrucción es fundamental para el reconocimiento de obstáculos en robótica, ya que permite transformar datos dispersos en modelos tridimensionales del entorno. Mediante esta representación, los robots pueden identificar con precisión la forma y la ubicación de objetos circundantes, anticipar colisiones y planificar trayectorias seguras. Así, la reconstrucción de superficies a partir de datos de escaneo no solo proporciona una descripción geométrica detallada del entorno, sino que también habilita una percepción espacial esencial para la navegación autónoma y la toma de decisiones en tiempo real.

El ejemplo de la Figura 4.1 demuestra el gran avance de la tecnología en este ámbito.

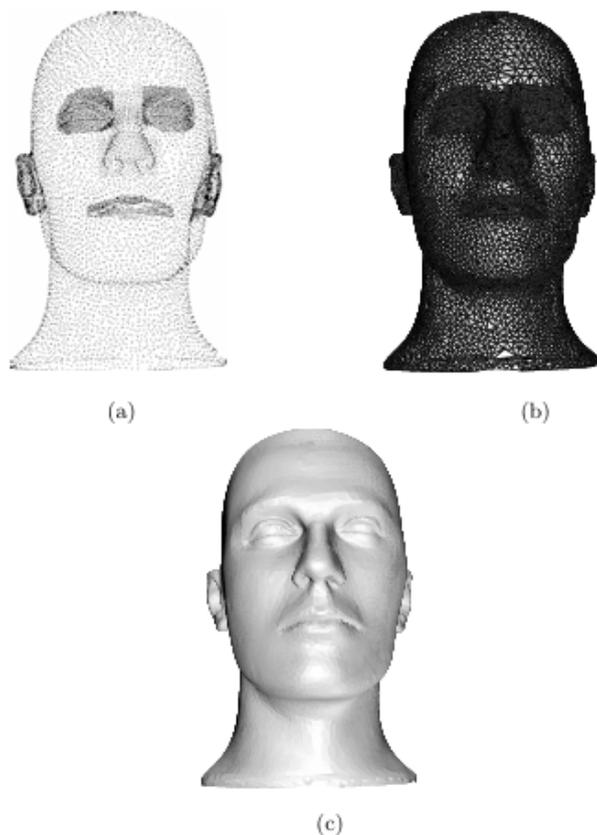


Figura 4.1: (a) Una muestra de un maniquí (b) una reconstrucción y (c) un modelo de maniquí renderizado.

## 4.1. Reconstrucción de Curvas

Una versión más sencilla del problema es la *reconstrucción de curvas*: dado un conjunto de coordenadas de puntos muestreados de una curva  $C$ , se conectan los puntos adyacentes a lo largo de  $C$  para formar una curva poligonal  $P$  que aproxima  $C$ . Presentaremos el algoritmo CRUST, que se fundamenta en gran medida en las propiedades del eje medial, el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay. Este algoritmo ha servido de inspiración para casi todos los métodos desarrollados posteriormente en la última década, tanto para la reconstrucción de curvas como de superficies.

Es evidente que una reconstrucción precisa requiere que la muestra sea suficientemente densa. Las Figuras 4.2 (a) y (c) muestran dos muestreos de la misma curva, siendo el primero un subconjunto del segundo. Las reconstrucciones correspondientes, mostradas en las partes (b) y (d), revelan que la muestra de la parte (a) no es lo suficientemente densa. Asimismo, queda claro que lo que se considera “suficientemente denso” depende de la complejidad de las distintas secciones de la curva. Uno de los avances clave consistió en definir de manera precisa este concepto mediante el eje medial, introduciendo lo que se denomina *tamaño de la característica local*.

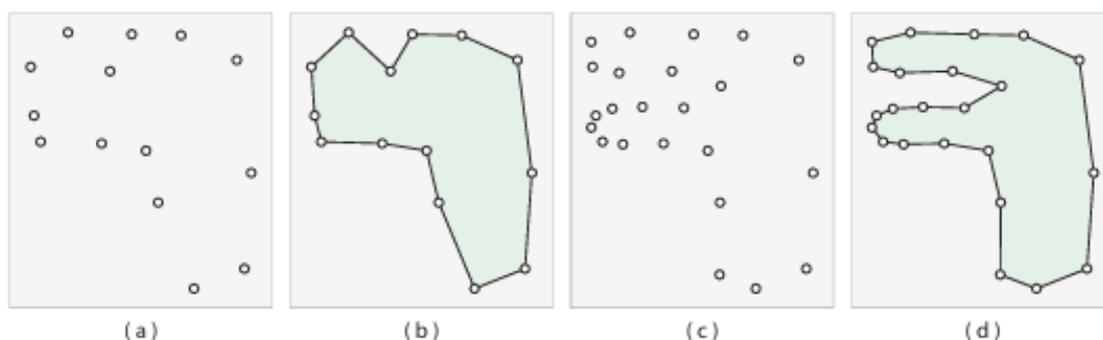


Figura 4.2: Las partes (a) y (c) muestran dos muestras de la misma curva; la primera es un subconjunto de la segunda. Las reconstrucciones (b) y (d) muestran que (a) estaba submuestreada.

**Definición 4.1.** Sea  $C$  una curva suave y cerrada en el plano, y sea  $x$  un punto de  $C$ . El tamaño de la característica local  $\rho(x)$  de  $x$  es la distancia más corta desde  $x$  hasta el eje medial de  $C$ .

En la Sección 3.1 definimos el eje medial  $M(C)$  de una curva cerrada y suave  $C$  como el lugar geométrico de los centros de los discos que tocan  $C$  en dos o más puntos distintos. Aunque hacemos énfasis en la porción medial interior a  $C$ , en el caso de una curva no convexa,  $M(C)$  posee ramas tanto dentro como fuera de  $C$ , y ambas son relevantes para definir el tamaño de la característica local.

La Figura 4.3 (a) muestra una curva cerrada junto con una aproximación de su eje medial, presente tanto en el interior como en el exterior de la curva. La parte (b) de la figura ilustra algunos de los discos cuyos centros determinan el eje medial. Nótese que  $\rho(x)$  es pequeño en los puntos correspondientes a secciones de alta curvatura de  $C$  y puede ser mayor en regiones de baja curvatura.

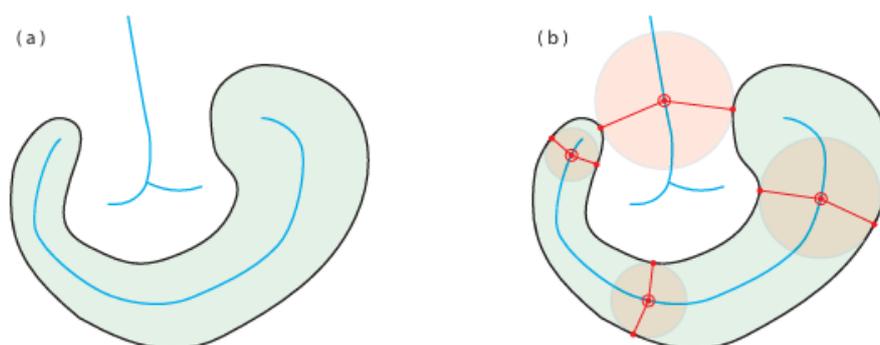


Figura 4.3: (a) Una curva cerrada  $C$  a lo largo de su eje medial (aproximado)  $M(C)$ . (b) Algunos de los discos cuyos centros definen el eje medial y determinan el tamaño de la característica local.

Ahora podemos definir la noción adecuada de densidad para nuestro muestreo:

**Definición 4.2.** Sea  $0 < \varepsilon < 1$ . Un conjunto  $S$  de puntos muestreados de  $C$  es una  $\varepsilon$ -muestra si cada punto  $x$  en  $C$  tiene un punto  $p$  en la muestra  $S$ , donde  $|x - p| \leq \varepsilon \rho(x)$ .

Cabe destacar que esta definición requiere que la muestra sea densa en las regiones de  $C$  que presentan mayor complejidad, es decir, donde  $M(C)$  se encuentra próximo. Una definición adicional nos permitirá, a continuación, presentar el algoritmo CRUST.

**Definición 4.3.** Una reconstrucción poligonal correcta  $P$  de una curva  $C$  a partir de una muestra  $S$  conecta los puntos  $p$  y  $q$  en  $P$  si y solo si  $p$  y  $q$  son puntos de muestra consecutivos a lo largo de  $C$ .

**Definición 4.4.** Se dice que los puntos  $p$  y  $q$  son consecutivos si el segmento de la curva comprendido entre ellos no contiene otros puntos de  $S$ .

La Figura 4.4 (a) muestra un conjunto de puntos muestreados de la curva de la Figura 4.3, mientras que la Figura 4.4 (b) presenta una reconstrucción poligonal correcta a partir de dicha muestra.

El objetivo de la reconstrucción de curvas es diseñar un algoritmo que garantice una reconstrucción poligonal correcta a partir de una  $\varepsilon$ -muestra, para un valor dado de  $\varepsilon > 0$ . El algoritmo CRUST, que analizaremos a continuación, asegura esta corrección demostrable siempre que  $\varepsilon < 1/5$ .



Figura 4.4: (a) Un conjunto de muestra de la curva de la Figura 4.3, junto con (b) una reconstrucción poligonal correcta de la curva a partir de la muestra.

#### 4.1.1. Algoritmo CRUST

Recordemos que una arista  $e$  pertenece a la triangulación de Delaunay  $Del(S)$  de un conjunto de puntos  $S$  si y solo si  $e$  admite un disco circunscrito vacío de otros puntos de  $S$ . De este modo, si el muestreo es suficientemente denso, toda arista  $e$  de la reconstrucción poligonal correcta forma parte de  $Del(S)$ . Por lo tanto, la triangulación de Delaunay contiene las aristas deseadas, y el desafío consiste en descartar aquellas aristas de  $Del(S)$  que no son correctas.

La Figura 4.5 (a) muestra  $Del(S)$  para el conjunto de puntos  $S$  de la Figura 4.4 (a). Obsérvese que las aristas necesarias para obtener la reconstrucción correcta de  $S$ , representada en la Figura 4.4 (b), constituyen un subconjunto de  $Del(S)$ . El algoritmo CRUST está diseñado precisamente para identificar estas aristas correctas dentro del conjunto de aristas de Delaunay.

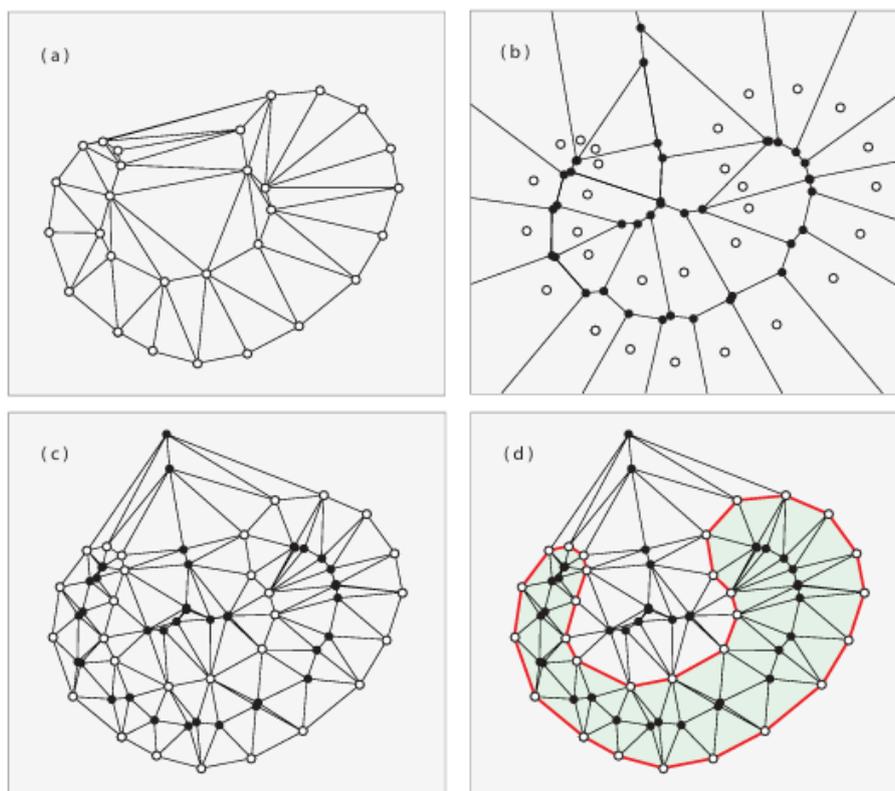


Figura 4.5: (a) La triangulación de Delaunay y (b) el diagrama de Voronoi de la muestra  $S$  de la Figura 4.4 (a). Los vértices de Voronoi  $V$  se muestran en negro. (c) La triangulación de Delaunay de  $S \cup V$  y (d) sus aristas con ambos extremos en  $S$ , marcadas en rojo.

Varias ideas fundamentales dan lugar al algoritmo CRUST. A continuación, las presentamos de manera intuitiva para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$ , ilustradas en la Figura 4.5:

1. Los vértices de Voronoi  $V$  de  $Vor(S)$  se localizan en las proximidades del eje medial  $M(C)$ .
2. Todo disco circunscrito asociado a una arista incorrecta de  $Del(S)$  interseca el eje medial  $M(C)$  de  $C$ .
3. Ninguna arista incorrecta  $e$  de  $Del(S)$  puede pertenecer también a  $Del(S \cup V)$ , ya que su disco circunscrito contiene necesariamente algún vértice de  $V$ .
4. Toda arista correcta de  $Del(S)$  aparece también en  $Del(S \cup V)$ .

La Afirmación 1 se evidencia al comparar los vértices de Voronoi negros  $V$  en la Figura 4.5 (b) con el eje medial mostrado en la Figura 4.3. Un vértice de Voronoi es, por definición, el centro de un disco que pasa por al menos tres puntos de  $S$ , por lo que resulta natural que los puntos de  $V$  se ubiquen próximos a  $M(C)$ . La Afirmación 2 es particularmente

clara al observar las diagonales internas de  $Del(S)$ , que cruzan de manera evidente el eje medial  $M(C)$ . Esto justifica, como establece la Afirmación 3, que el disco circunscrito de una arista incorrecta debe contener necesariamente un vértice de  $V$ , dado que este conjunto aproxima a  $M(C)$ .

Finalmente, la Afirmación 4 puede comprenderse considerando un disco circunscrito asociado a una arista correcta  $e = ab$ , cuyo centro se ubica en el punto  $x \in C$  donde la bisectriz perpendicular de  $ab$  interseca la curva. La Figura 4.6 ilustra este razonamiento. La distancia de  $x$  al eje medial es precisamente el tamaño de la característica local  $\rho(x)$ . Dado que  $S$  es una  $\varepsilon$ -muestra, se cumple que  $|a - x| \leq \varepsilon\rho(x)$ . Por tanto, el radio  $|a - x|$  de este disco circunscrito no alcanza a interceptar  $M(C)$  cuando  $\varepsilon < 1$ , y para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$ , dicho disco no contendrá puntos de  $V$ . Esta condición de vacío garantiza que  $e$  forme parte de  $Del(S \cup V)$ .

Este razonamiento intuitivo fundamenta el algoritmo CRUST, notable por su simplicidad.

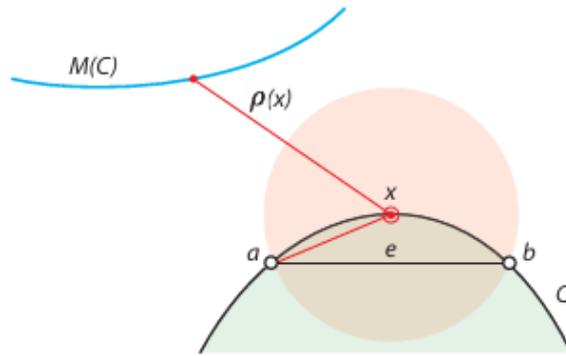


Figura 4.6: Un disco circunscrito a un borde correcto  $e$  no alcanzará  $M(C)$ .

---

**Algoritmo 5** Algoritmo de Reconstrucción de Curvas CRUST

---

- 1: **Input:** Un conjunto de puntos de muestra  $S$ .
  - 2: **Output:** Una curva poligonal  $P$  que aproxima la curva original.
  - 3: Calcular el diagrama de Voronoi  $Vor(S)$  correspondiente a  $S$ .
  - 4: Sea  $V$  el conjunto de vértices de  $Vor(S)$ .
  - 5: Construir la triangulación de Delaunay  $Del(S \cup V)$ .
  - 6: Formar la curva poligonal  $P$  tomando las aristas de  $Del(S \cup V)$  cuyos extremos pertenecan ambos a  $S$ .
- 

**Exactitud**

La “corrección demostrable” de este algoritmo puede enunciarse mediante el siguiente teorema. Su demostración formal exige un análisis detallado que fundamente rigurosamente las afirmaciones expuestas de manera intuitiva anteriormente.

**Teorema 4.1.** *El algoritmo CRUST genera la reconstrucción poligonal correcta siempre que  $S$  sea una  $\varepsilon$ -muestra con  $\varepsilon < 1/5$ .*

*Demostración.* Probamos primero que cada borde correcto es generado por CRUST cuando  $\varepsilon < \frac{1}{5}$ .

Sea  $pq$  una arista correcta. Sea  $z$  el punto donde la bisectriz perpendicular de  $pq$  interseca el segmento vacío  $\gamma(p, q)$ . Considere la bola  $B = B_{z, \|p-z\|}$ . Esta bola no contiene ningún punto desde  $S$  cuando  $\varepsilon < 1$ . Demostramos que esta bola tampoco contiene ningún vértice de Voronoi de  $Vor(S)$ .

Supongamos que  $B$  contiene un vértice de Voronoi, digamos  $v$ , de  $V$ . Entonces, por geometría circular simple, la distancia máxima de  $v$  desde  $p$  es  $2\|p-z\|$ . Por lo tanto,  $\|p-v\| \leq 2\|p-z\|$ . Como  $\|p-z\| \leq \varepsilon f(z)$ , tenemos

$$\|p-v\| \leq 2\varepsilon f(z) \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} f(p).$$

La bola de Delaunay  $B'$ , centrada en  $v$ , contiene tres puntos de  $S$  en su frontera. Esto significa que  $bdB \cap C$  no es una 0-esfera. Por lo tanto,  $B'$  contiene un punto de eje medial. Como la bola de Delaunay  $B'$  está vacía,  $p$  no puede estar en  $\text{Int}(B')$ . Por lo tanto, el punto de eje medial en  $B'$  se encuentra a una distancia de  $2\|p-v\|$  desde  $p$ . Por lo tanto,  $2\|p-v\| \geq f(p)$ . Pero,  $\|p-v\| \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} f(p)$ , lo que nos permite llegar a una contradicción cuando  $\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{1}{2}$ , es decir, cuando  $\varepsilon < \frac{1}{5}$ .

Probamos ahora que CRUST no genera ningún borde incorrecto cuando  $\varepsilon < \frac{1}{5}$ .

Necesitamos demostrar que no existe una esfera vacía de puntos muestrales y vértices de Voronoi, que circunscriba una arista incorrecta entre dos puntos muestrales, digamos  $p$  y  $q$ . Por razones de contradicción, supongamos que  $D$  es una esfera de este tipo.

Sean  $v$  y  $v'$  los dos puntos donde la mediatriz de  $pq$  interseca el límite de  $D$ . Consideremos las dos bolas  $B = B_{v,r}$  y  $B' = B_{v',r'}$  que circunscriben  $pq$ .

Afirmamos que tanto  $B$  como  $B'$  están vacíos de cualquier punto muestral. Supongamos, por el contrario, que cualquiera de ellos, digamos  $B$ , contiene un punto muestral. Entonces, se puede empujar  $D$  continuamente hacia  $B$  moviendo su centro en la mediatriz de  $pq$  y manteniendo  $p, q$  en su frontera. Durante este movimiento, la  $D$  deformada chocaría con un punto muestral  $s$  por primera vez antes de que su centro alcance  $v$ . En ese momento,  $p, q$  y  $s$  definen una esfera vacía de cualquier otro punto muestral. El centro de esta esfera es un vértice de Voronoi en  $Vor(S)$  que reside dentro de  $D$ . Esto es una contradicción, ya que  $D$  está vacía de cualquier vértice de Voronoi de  $V$ .

El ángulo  $\angle vpv'$  es  $\pi/2$ , ya que  $vv'$  es un diámetro de  $D$ . Las tangentes a las circunferencias límite de  $B$  y  $B'$  en  $p$  son perpendiculares a  $vp$  y  $v'p$ , respectivamente. Por lo tanto, las tangentes forman un ángulo de  $\pi/2$ . Esto implica que  $C$  no puede ser tangente a  $B$  y  $B'$  en  $p$ .

Primero, considere el caso donde  $C$  no es tangente ni a  $B$  ni a  $B'$  en  $p$ . Sean  $p_1$  y  $p_2$  los puntos de intersección de  $C$  con los límites de  $B$  y  $B'$ , respectivamente, que son consecutivos a  $p$  entre todas estas intersecciones. Nuestro objetivo será demostrar que el segmento de curva  $pp_1$  o el segmento de curva  $pp_2$  interseca  $B$  o  $B'$  con bastante

profundidad, contribuyendo así a un segmento vacío largo, lo cual está prohibido por la condición de muestreo.

El segmento de curva entre  $p$  y  $p_1$  y el segmento de curva entre  $p$  y  $p_2$  no tienen ningún punto muestral distinto de  $p$ . Tanto  $\|p - p_1\|$  como  $\|p - p_2\|$  no son mayores que  $\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}f(p)$  para  $\varepsilon < \frac{1}{5}$ . Por lo tanto,  $\angle p_1pp_2 \leq \pi - 2 \arcsin \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$ .

Sin pérdida de generalidad, sea el ángulo entre  $pp_1$  y la tangente a  $B$  en  $p$  mayor que el ángulo entre  $pp_2$  y la tangente a  $B'$  en  $p$ . Entonces,  $pp_1$  forma un ángulo  $\alpha$  con la tangente a  $B$  en  $p$ , donde

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \frac{1}{2} \left( \left( \pi - 2 \arcsin \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Consideremos el otro caso donde  $C$  es tangente a una de las dos bolas  $B$  y  $B'$  en  $p$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que es tangente a  $B$  en  $p$ . Nuevamente, se cumple el límite inferior del ángulo  $\alpha$  indicado anteriormente.

Sea  $x$  el punto donde la mediatriz de  $pp_1$  interseca el segmento de curva entre  $p$  y  $p_1$ . Claramente,  $x$  está en  $B$ . Dado que  $B$  interseca en  $p$  y  $q$ , que no son puntos muestrales consecutivos, no puede contener  $\gamma(p, q)$  ni  $\gamma'(p, q)$  completamente dentro. Esto significa que  $B \cap C$  no puede ser una 1-bola. Por lo tanto,  $B$  tiene un punto de eje medial y, por lo tanto, su radio  $r$  es al menos  $f(x)/2$ . Por geometría simple, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|p - x\| &\geq \frac{1}{2} \|p - p_1\| \\ &= r \sin \alpha \\ &\geq \frac{1}{2} f(x) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que  $\|p - x\| \leq \varepsilon f(x)$ . Llegamos a una contradicción si

$$2\varepsilon < \sin \left( \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right).$$

Para  $\varepsilon < \frac{1}{5}$ , se cumple esta desigualdad.

Combinando esto con lo anterior obtenemos la prueba del teorema.  $\square$

Un objetivo de investigaciones posteriores ha sido incrementar el valor de  $\varepsilon$  manteniendo la corrección demostrable. Tamal Dey logró esto para  $\varepsilon < 1/3$  mediante el algoritmo NN-CRUST (que analizamos en la sección siguiente), con la ventaja adicional de requerir únicamente una triangulación de Delaunay, en lugar de las dos necesarias en el algoritmo CRUST.

Desarrollos posteriores han permitido alcanzar  $\varepsilon < 1/2$ . Finalmente, como se mencionó anteriormente, el algoritmo CRUST y varias de sus variantes se han generalizado también para la reconstrucción de superficies.

### 4.1.2. Algoritmo NN-CRUST

El siguiente algoritmo para la reconstrucción de curvas se basa en el concepto de vecinos más próximos. Un punto  $p \in S$  es vecino más próximo de  $q \in S$  si no existe otro punto  $s \in S \setminus \{p, q\}$  con  $\|q - s\| < \|q - p\|$ . Nótese que que  $p$  sea vecino más próximo de  $q$  no significa necesariamente que  $q$  sea vecino más próximo de  $p$ . Primero observamos que las aristas que conectan vecinos más próximos en  $P$  deben ser correctas si  $S$  es suficientemente denso. Sin embargo, no todas las aristas correctas conectan vecinos más próximos. La Figura 4.7 muestra todas las aristas que conectan vecinos más próximos. Las aristas correctas que faltan en este ejemplo conectan puntos que no son vecinos más próximos. Sin embargo, estas aristas correctas conectan puntos que no están muy lejos de ser vecinos más próximos. Las capturamos en NN-Crust utilizando el concepto de semivecinos.

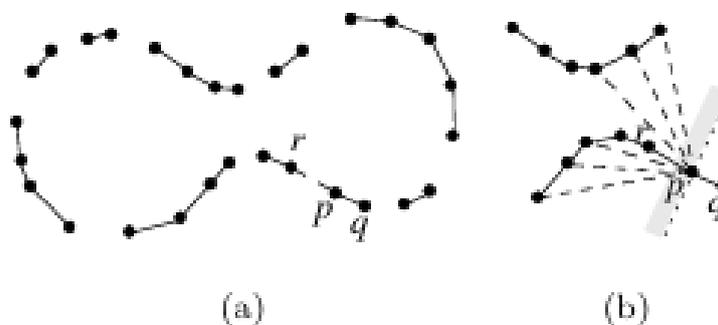


Figura 4.7: (a) Solo las aristas vecinas más cercanas no pueden reconstruir una curva y (b) la mitad de las aristas vecinas, como  $pr$ , rellenan los huecos.

Sea  $pq$  una arista que conecta  $p$  con su vecino más cercano  $q$  y  $\vec{pq}$  el vector de  $p$  a  $q$ . Considérese el semiplano cerrado  $H$ , acotado por la recta que pasa por  $p$  con  $\vec{pq}$  como normal externa. Claramente,  $q \notin H$ . El vecino más cercano a  $p$  en el conjunto  $H \cap S$  se denomina su semivecino. En la Figura 4.7 (b),  $r$  es el semivecino de  $p$ . Se puede demostrar que dos aristas correctas incidentes en un punto muestral lo conectan con sus vecinos más cercanos y semivecinos.

La discusión anterior sugiere inmediatamente un algoritmo para la reconstrucción de curvas. Sin embargo, necesitamos algoritmos eficientes para calcular el vecino más cercano y el semivecino para cada punto muestral. La triangulación de Delaunay  $Del(S)$  resulta útil para este cálculo, ya que todas las aristas correctas son de Delaunay si  $S$  es suficientemente denso. El Lema de la Arista Pequeña (el cuál no demostramos) implica que, para cada punto muestral  $p$ , basta con comprobar solo las aristas de Delaunay para determinar las aristas correctas. Comprobamos todas las aristas incidentes a  $p$  en  $Del(S)$  y determinamos la arista más corta que la conecta con su vecino más cercano, por ejemplo,  $q$ . A continuación, comprobamos todas las demás aristas incidentes a  $p$  que formen al menos un ángulo  $\frac{\pi}{2}$  con  $pq$  en  $p$  y elegimos la más corta entre ellas. Esta segunda arista conecta  $p$  con su semivecino. El cálculo completo puede realizarse en un tiempo proporcional al número de aristas incidentes a  $p$ . Dado que la suma del número de aristas incidentes sobre

todos los vértices en la triangulación de Delaunay es  $O(n)$ , donde  $|S| = n$ , el cálculo de la arista corregida solo toma  $O(n)$  tiempo una vez calculado  $Del(S)$ . La triangulación de Delaunay de un conjunto de  $n$  puntos en el plano puede calcularse en un tiempo  $O(n \log(n))$ , lo que implica que NN-Crust toma  $O(n \log(n))$ .

---

**Algoritmo 6** Algoritmo de Reconstrucción de Curvas NN-CRUST

---

Sea  $S$  el conjunto de puntos de muestra. Calcule la triangulación de Delaunay  $Del(S)$  de  $S$ . Para cada  $p \in S$  calculamos el borde más corto  $pq$  en  $Del(S)$  y calculamos el borde más corto  $ps$  de modo que  $\angle pqs \geq \frac{\pi}{2}$ . La curva  $P$  esta compuesta por los bordes  $pq$  y  $ps$  para cada  $p \in S$ .

---

**Exactitud**

Como ya comentamos, NN-Crust calcula las aristas que conectan cada punto de muestra con sus vecinos más cercanos y sus semivecinos. La exactitud de NN-Crust se deriva de las pruebas de que estas aristas son correctas.

**Lema 4.1.** *Sea  $p \in S$  cualquier punto muestral y  $q$  su vecino más cercano. La arista  $pq$  es correcta para  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ .*

*Demostración.* Considere la bola  $B$  con  $pq$  como diámetro. Si  $B$  no interseca en un intervalo, contiene un punto de eje medial (véase la Figura 4.8 (a)). Esto significa que  $\|p - q\| > f(p)$ . Una arista correcta  $ps$  satisface  $\|p - s\| \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} f(p)$  según el Lema de la Arista Pequeña. Por lo tanto, para  $\varepsilon < \frac{1}{3}$  tenemos que  $\|p - s\| < \|p - q\|$ , lo cual contradice el hecho de que  $q$  es el vecino más cercano a  $p$ .

Entonces,  $B$  interseca  $C$  en un intervalo, llamémosla  $\gamma = \gamma(p, q)$ , como se muestra en la Figura 4.8 (b). Si  $pq$  no es correcto,  $\gamma$  contiene un punto de muestra, digamos  $s$ , entre  $p$  y  $q$  dentro de  $B$ . Nuevamente, llegamos a una contradicción, ya que  $\|p - s\| < \|p - q\|$ .  $\square$

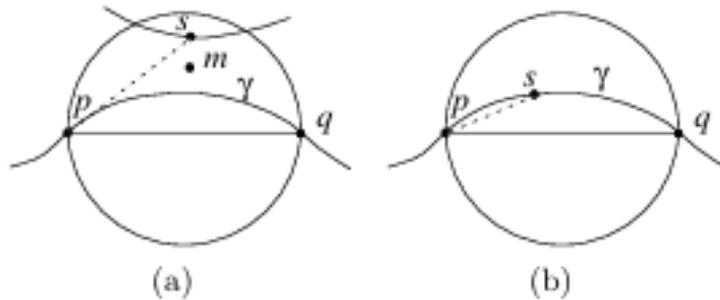


Figura 4.8: La esfera diametral de  $pq$  interseca  $C$  en (a) dos componentes y (b) uno solo.

A continuación, demostramos que las aristas que conectan un punto de muestra con sus semivecinos también son correctas.

**Lema 4.2.** *Una arista  $pq$  donde  $q$  es semivecino de  $p$  es correcta cuando  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ .*

*Demostración.* Sea  $r$  el vecino más cercano de  $p$ . Según la definición  $\vec{pq}$  hace al menos un ángulo  $\frac{\pi}{2}$  con  $\vec{pr}$ .

Si  $pq$  no es correcto, considérese la arista correcta  $ps$  incidente a  $p$  distinta de  $pr$ . Según el Lema del Ángulo de Arista,  $\vec{ps}$  también forma al menos  $\frac{\pi}{2}$  con  $\vec{pr}$  para  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ . Demostramos que  $s$  está más cerca de  $p$  que  $q$ . Esto contradice que  $q$  sea el semivecino de  $p$ , ya que tanto  $\vec{ps}$  como  $\vec{pq}$  forman un ángulo al menos  $\frac{\pi}{2}$  con  $\vec{pr}$ .

Consideremos la bola  $B$  con  $pq$  como diámetro. Si  $B$  no interseca  $C$  en un intervalo (Figura 4.9 (a)), contendría un punto del eje medial y, por lo tanto,  $\|p - q\| \geq f(p)$ . Por otro lado, para  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ ,  $\|p - s\| \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}f(p)$  según el Lema de la Arista Pequeña. Obtenemos  $\|p - s\| < \|p - q\|$  para  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ , como se requiere para la contradicción. A continuación, supongamos que  $B$  interseca  $C$  en un intervalo, llamémoslo  $\gamma(p, q)$ , como se muestra en la Figura 4.9 (b). Dado que  $pq$  no es una arista correcta,  $s$  debe estar en este segmento de curva. Esto implica que  $\|p - s\| < \|p - q\|$ , como se requiere para la contradicción.  $\square$

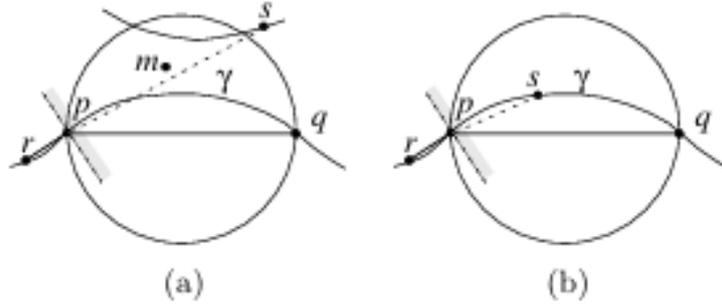


Figura 4.9: La esfera diametral de  $pq$  interseca  $C$  en (a) más de un componente y (b) en uno solo.

**Teorema 4.2.** *NN-Crust calcula todos los bordes y solo los correctos cuando  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ .*

*Demostración.* Según el Lema de la Arista Pequeña, todas las aristas corregidas son de Delaunay. Calcular el borde más corto  $pq$  en  $Del(S)$  y calcular el borde más corto  $ps$  de modo que  $\angle pqs \geq \frac{\pi}{2}$  garantiza que todas las aristas que unen los puntos de muestra con sus vecinos más cercanos y semivecinos se calculen como salida. Dichas aristas son correctas según el Lema 4.1 y el Lema 4.2 cuando  $\varepsilon < \frac{1}{3}$ . Además, no existen otras aristas correctas, ya que cada punto de muestra solo puede incidir en exactamente dos aristas correctas.  $\square$



# Capítulo 5

## Aplicaciones

Este capítulo comienza con un repaso de la planificación del movimiento para objetos rígidos en 2D (Sección 5.1), iniciando con los casos más simples de traslación sin rotación, utilizando la suma de Minkowski, como se desarrolló en la Sección 3.3. A partir de ahí, se introduce la planificación de movimiento que incluye rotación, lo que incrementa la complejidad del espacio de configuraciones. Posteriormente, se presentan dos técnicas fundamentales de planificación: la descomposición celular, que divide el espacio libre en regiones manejables para facilitar el trazado de trayectorias, y la técnica de retracción, que permite reducir el problema a mover un punto a lo largo de un esqueleto del espacio libre.

En la segunda parte, nos centramos en objetos articulados más complejos, como brazos robóticos y cadenas poligonales abiertas (Sección 5.2). Se aborda la planificación de movimiento en estos sistemas, considerando las restricciones de sus articulaciones. Además, se analiza la alcanzabilidad, es decir, el conjunto de posiciones que el extremo del brazo puede alcanzar, y se discuten problemas de plegado, donde el objetivo es reconfigurar la cadena o el brazo sin colisiones. Este enfoque gradual, desde traslaciones simples hasta movimientos complejos de sistemas articulados, proporciona una visión completa de los desafíos y técnicas en planificación de movimiento dentro de geometría computacional y robótica.

### 5.1. Planificación de Movimiento

El desplazamiento de objetos en un entorno potencialmente complejo puede analizarse considerando el espacio de todas sus posibles posiciones y orientaciones, es decir, su *espacio de configuraciones*.

**Definición 5.1.** *Un espacio de configuración  $C$  es un conjunto cuyos elementos consisten en todas las posibles configuraciones o disposiciones de un conjunto de objetos.*

Un ejemplo de espacio de configuración es el conjunto de todas las posiciones posibles de las piezas de ajedrez en un tablero que pueden alcanzarse mediante movimientos válidos durante una partida. Los elementos de este espacio (*o puntos*) corresponden a

las formaciones individuales de las piezas, y cada movimiento de ajedrez establece una conexión entre dos puntos del espacio de configuración: la formación antes del movimiento y la formación después del mismo. En este caso, el espacio de configuración es *discreto*.

Un ejemplo clásico más relacionado con la robótica considera la planificación del movimiento de robots: el conjunto de todas las configuraciones posibles de los robots dentro de una fábrica define un espacio de configuración *continuo*, donde cada punto representa una configuración particular y distinta de los robots.

La estructura del capítulo avanza desde cuestiones algorítmicas—como determinar si existe un camino en el espacio de configuración entre dos posiciones dadas y, en caso afirmativo, cómo construirlo—hacia un enfoque más centrado en la topología y la estructura combinatoria de espacios de configuración específicos.

### 5.1.1. Planificación de Ruta Sin Rotación

Iniciamos nuestro estudio de los espacios de configuración con un problema de *planificación de movimiento* particularmente sencillo: encontrar, si existe, una trayectoria para trasladar un único objeto poligonal  $R$ , sin rotación, a través del plano  $\mathbb{R}^2$  lleno de obstáculos poligonales  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Podemos imaginar  $R$  como un robot con ruedas que debe moverse evitando sillas, mesas y paredes (más adelante incorporaremos la rotación tras analizar primero el movimiento de traslación). Este caso es representativo de una amplia variedad de problemas de planificación de movimiento, que solo presentamos parcialmente. A medida que avanzamos en el capítulo, aumentaremos la complejidad de los ejemplos, sin pretender cubrir todas las posibilidades.

Tal como se describió en la Sección 3.3 sobre sumas de Minkowski, y en particular en el ejemplo de la Figura 3.17, el problema de planificación del movimiento traslacional puede resolverse utilizando estas técnicas. A modo de resumen: sea  $s$  el punto de referencia inicial del robot  $R$  y  $t$  su posición objetivo, también especificada por el punto de referencia. De forma general, el algoritmo puede describirse como sigue:

---

**Algoritmo 7** Algoritmo basado en el diagrama de Voronoi

---

**Require:** Obstáculos poligonales  $P_1, P_2, \dots, P_m$  y un robot poligonal  $R$  con punto de referencia  $s$  (inicio) y  $t$  (objetivo).

**Ensure:** Una trayectoria libre de colisiones para  $R$ , si existe.

- 1: Expandir cada obstáculo mediante la suma de Minkowski:  $P_i^+ = P_i \oplus (-R)$ .
  - 2: Formar la región ocupada total:  $P^+ = \bigcup_i P_i^+$ .
  - 3: Considerar el complemento libre de obstáculos en el plano:  $\mathbb{R}^2 \setminus P^+$ .
  - 4: Buscar un camino desde  $s$  hasta  $t$  dentro de esta región libre.
- 

La Figura 5.1 ilustra la aplicación de este algoritmo para un robot cuadrilátero  $R$  y ocho obstáculos poligonales. El complemento de la suma de Minkowski,  $\mathbb{R}^2 \setminus P^+$ , se representa en blanco y constituye el espacio de configuración de traslaciones del robot  $R$  en el plano. Cada punto de este espacio de configuración corresponde a una posición posible de  $R$ .

Se observa que este espacio está formado por tres componentes conexos, denominados  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Por lo tanto, determinar si una posición objetivo  $t$  es alcanzable desde la posición inicial  $s$  (marcada en la figura) equivale a verificar si ambos puntos pertenecen al mismo componente conexo del espacio de configuración. Planificar una trayectoria para el robot, en consecuencia, se reduce a encontrar un camino continuo para el punto de referencia dentro de dicho componente.

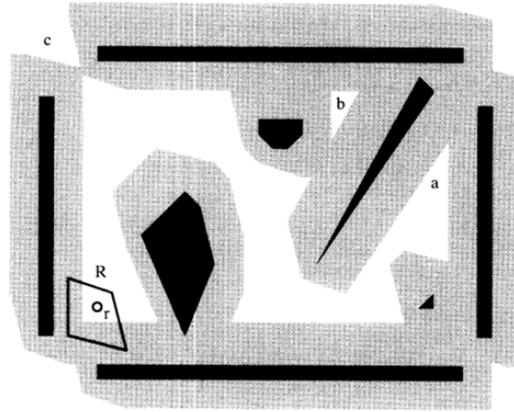


Figura 5.1: Robot  $R$  con punto de referencia y origen mostrados en la esquina inferior izquierda. Los polígonos oscuros son obstáculos. Los obstáculos crecidos, cada uno la suma de Minkowski con  $-R$ , se muestran sombreados.

Hemos descrito con cierto detalle en la Sección 3.3 el primer paso de este algoritmo: el cálculo de la suma de Minkowski. Los pasos posteriores (formación de uniones, identificación de componentes conexos y búsqueda de rutas) plantean desafíos algorítmicos interesantes, los cuales no abordaremos aquí. En su lugar, nos centramos en los aspectos relacionados con el espacio de configuración.

Cabe señalar que, si  $R$  tiene  $k$  vértices y los obstáculos en conjunto suman  $n$  vértices, es posible encontrar una trayectoria en un tiempo ligeramente superior a  $O(kn \log^2 n)$ , lo que representa una eficiencia notable. Para más detalles, véase [12].

### 5.1.2. Planificación de Ruta Con Rotación

Pasemos ahora a analizar los problemas que combinan traslación y rotación de objetos. Para el movimiento puramente traslacional de un objeto rígido en el plano, el espacio de configuración  $C$  es bidimensional: cada punto de  $C$  corresponde a una ubicación específica de  $R$ , determinada por su punto de referencia. Sin embargo, al permitir tanto traslación como rotación (manteniéndonos en el plano),  $C$  se convierte en un espacio tridimensional, con tres grados de libertad: traslación en  $x$ , traslación en  $y$  y rotación por un ángulo  $\theta$  alrededor del punto de referencia de  $R$ . Así, cada punto  $(x, y, \theta)$  de  $C$  describe una posición y orientación única de  $R$  en el plano. El algoritmo de planificación del movimiento conserva la misma estructura general, pero el problema se complica debido al incremento en la complejidad de  $C$ .

Una manera intuitiva de entender este escenario es fijar valores discretos para  $\theta$  y, para cada uno, calcular la suma de Minkowski de los obstáculos en dos dimensiones. La Figura 5.2 ilustra esta idea con el caso más sencillo de objeto extendido,  $R$ : un segmento de línea, comúnmente llamado *escalera* en la literatura, lo que evoca el desafío de trasladar una escalera por un espacio estrecho.

En el ejemplo, la escalera  $L$  comienza en posición horizontal y debe seguir la trayectoria indicada en (a). Sin embargo, esto solo es posible mediante rotación. La Figura 5.2 (b) muestra los obstáculos expandidos con la suma de Minkowski cuando la escalera está horizontal. Allí se aprecia que  $C$  se superpone a  $A$  y  $B$ , lo que evidencia que  $L$  no puede atravesar el pasillo sin rotarse.

En la Figura 5.2 (c), la escalera se rota  $30^\circ$ , y en la Figura 5.2 (d),  $60^\circ$ . Con esta última rotación, el canal vertical entre  $A$  y  $C$  se abre, mientras que el canal horizontal entre estos mismos obstáculos se cierra. Estas imágenes demuestran que  $L$  puede seguir la trayectoria indicada en (a): avanzar entre  $A$  y  $B$  con mínima rotación inicial, para luego girar al menos  $60^\circ$  en sentido antihorario antes de desplazarse verticalmente.

Imaginemos ahora superponer todos los obstáculos aumentados correspondientes a cada valor posible de rotación  $\theta$ , organizándolos en planos paralelos, como se ilustra en la Figura 5.3. En este modelo, cada punto  $(x, y, \theta)$  del espacio tridimensional representa una posición específica del punto de referencia de la escalera, mientras que el plano en el que dicho punto se ubica corresponde al ángulo de rotación  $\theta$ .

De este modo, logramos exactamente lo mencionado anteriormente: el problema de mover una escalera en el plano bidimensional se convierte en un problema equivalente de mover un punto en un espacio tridimensional. Este espacio se conoce como *espacio de configuración* del robot o escalera. Aunque la Figura 5.3 muestra un apilamiento discreto de configuraciones para distintos valores de  $\theta$ , en realidad, este espacio varía de forma continua conforme cambia el ángulo de rotación.

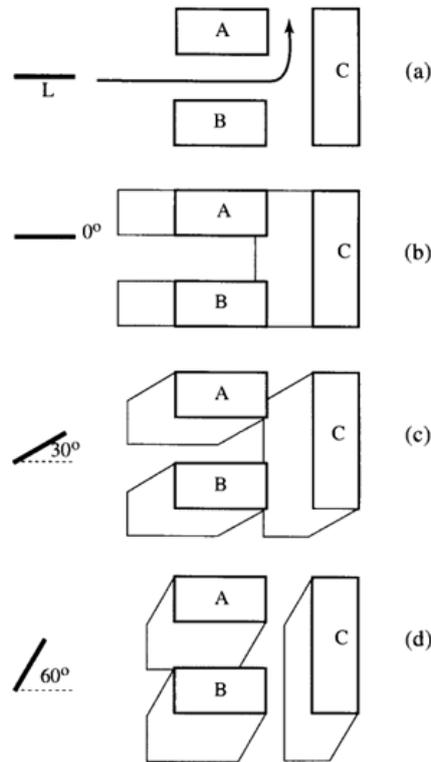


Figura 5.2: Al girar la escalera, esta puede pasar entre  $A$  y  $B$  y ascender, siguiendo la trayectoria indicada en (a). (b)-(d) muestran los obstáculos crecidos para  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ , con la escalera referenciada a su extremo izquierdo.

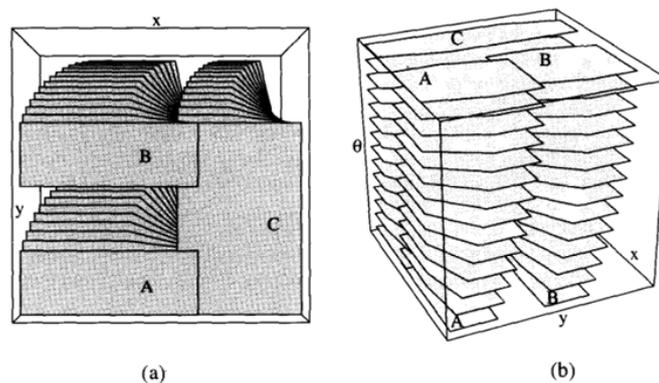


Figura 5.3: (a) Vista desde abajo de las pilas de obstáculos crecidos, con la parte inferior correspondiente a  $\theta = 0^\circ$ , Figura 5.2 (b) Vista frontal de las mismas pilas;  $\theta$  varía de  $0^\circ$  en la parte inferior de la caja a  $75^\circ$  en la parte superior.

Como era de esperar, cada etapa de este problema de planificación del movimiento resulta más compleja que en el caso puramente traslacional. En particular, los obstáculos generados dejan de ser poliédricos: aunque en cada plano fijo  $\theta$  tienen forma poligonal, al

variar  $\theta$  se “retuercen” a lo largo de esta tercera dimensión, formando superficies delimitadas por aristas curvas, como se observa en la Figura 5.3. El conjunto de configuraciones en las que el punto de referencia puede moverse sin colisiones se conoce como *espacio libre*. Si nos situáramos en la posición inicial  $s$  dentro de este espacio, tendríamos la impresión de estar en una cámara cavernosa, con paredes retorcidas y complejas. Existe un camino factible para la escalera si y solo si la posición objetivo  $t$  pertenece al mismo componente conexo del espacio libre que  $s$ .

Es importante notar que no hay nada exclusivo en el ejemplo de la escalera: el mismo enfoque puede aplicarse para construir espacios de configuración de robots poligonales arbitrarios moviéndose entre obstáculos poligonales. Más aún, esta idea se generaliza fácilmente a robots tridimensionales y, con técnicas más avanzadas, incluso a robots articulados con múltiples grados de libertad.

En el caso bidimensional, donde  $C$  es un espacio plano y los obstáculos son simples polígonos, podía confiarse en la intuición para justificar que los pasos del algoritmo —cálculo de sumas de Minkowski, formación de uniones y búsqueda de trayectorias— son viables de implementar. Sin embargo, al pasar a un espacio de configuración tridimensional, esta claridad desaparece: cada uno de estos pasos se vuelve significativamente más complicado de formalizar y ejecutar computacionalmente.

A continuación, presentaremos dos métodos generales para abordar problemas de planificación de movimiento, consistentes en encontrar trayectorias libres a través del espacio de configuración. Si bien ambos métodos tienen un alcance amplio, en este capítulo nos centraremos en ilustrarlos con el ejemplo concreto de mover una escalera.

### 5.1.3. Descomposición Celular

Presentamos ahora un método general denominado *descomposición celular*, destacado por su aplicabilidad a prácticamente cualquier problema de planificación de movimiento, incluso a aquellos considerablemente más complejos que los tratados en este capítulo. Este enfoque no solo es completamente general, sino que también fue el primero en desarrollarse formalmente. A lo largo de esta sección, lo explicaremos aplicado al caso concreto del movimiento de una escalera; únicamente al final abordaremos sus generalizaciones.

La idea central de la descomposición celular consiste en dividir el espacio de configuración, de forma inicialmente irregular, en un número finito de *celdas* bien definidas y con propiedades estructuradas. Una vez realizada esta división, el problema de encontrar una trayectoria factible se reduce a determinar una ruta que conecte las celdas correspondientes a la configuración inicial y a la final.

Consideremos el entorno poligonal representado en la Figura 5.4, compuesto por dos obstáculos triangulares y una pared delimitadora poligonal abierta. La escalera  $R$  puede trasladarse y rotar dentro de esta región, donde, como antes, su punto de referencia es el extremo izquierdo. Para definir rigurosamente el concepto de celda, asignamos etiquetas a cada arista de los obstáculos tal como se muestra en la figura; utilizamos la etiqueta  $\infty$  para denotar una arista “externa” que se extiende indefinidamente hacia la derecha, lo que permite simplificar el número de etiquetas requeridas en este ejemplo.

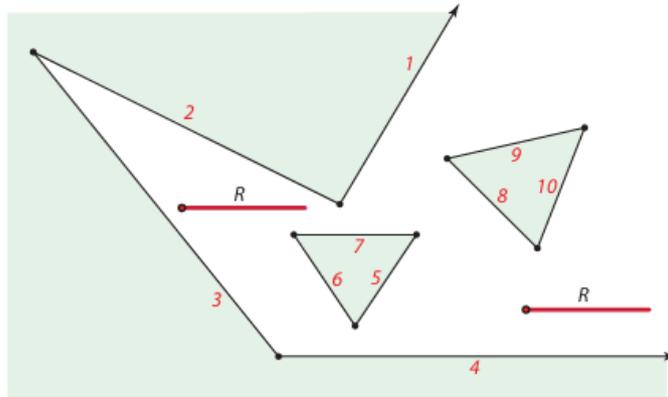


Figura 5.4: Un entorno poligonal para una escalera  $R$ , con bordes de obstáculos etiquetados.

Comenzamos fijando temporalmente la rotación de  $R$  en  $\theta = 0$ . Como es habitual, el espacio de configuración se obtiene tomando el complemento de los obstáculos aumentados mediante la suma de Minkowski con  $-R$ . Supongamos ahora que colocamos el punto de referencia de la escalera en un punto  $x$  que no comparte coordenada horizontal con ningún vértice del entorno poligonal. Si desplazamos  $R$  horizontalmente hacia la izquierda, eventualmente colisionará con un obstáculo en la arista  $e_1$ ; de forma análoga, al moverlo horizontalmente hacia la derecha, chocará con la arista  $e_2$ . Asociamos al punto  $x$  la pareja de etiquetas  $(e_1, e_2)$  correspondiente a estas aristas.

Definimos entonces una *celda* como una región conexa del espacio de configuración cuyos puntos comparten el mismo par de etiquetas. La Figura 5.5 (a) ilustra este espacio de configuración —representado por las zonas blancas— para una escalera colocada horizontalmente, junto con su partición en ocho celdas etiquetadas. Obsérvese que ninguna celda recibe la etiqueta  $(3, 6)$ , ya que no existen puntos en el espacio de configuración que puedan adoptar dicho par; en otras palabras, la escalera no puede situarse entre esas dos aristas.

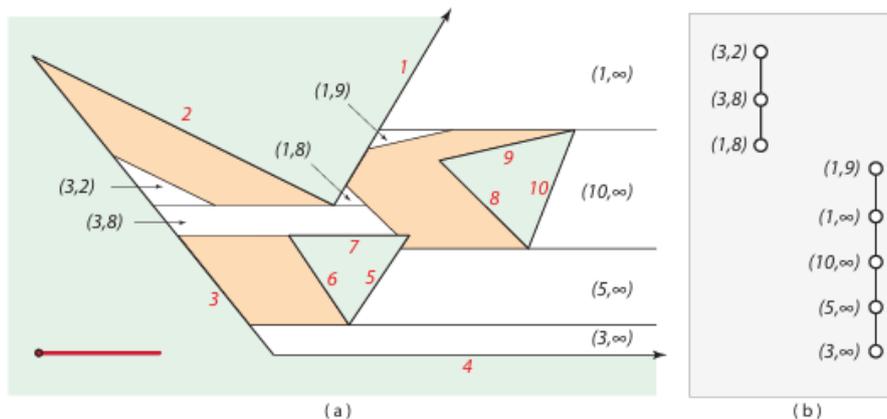


Figura 5.5: (a) El espacio de configuración (regiones blancas) para una escalera horizontal junto con su descomposición en celdas etiquetadas. (b) El grafo de conectividad  $G_0$  correspondiente a la parte (a).

En el método de descomposición celular, la estructura del espacio de configuración se representa mediante un grafo denominado *grafo de conectividad*  $G_\theta$ , donde el subíndice  $\theta$  indica que el grafo describe la configuración para una rotación específica de la escalera. Los nodos de  $G_\theta$  corresponden a las celdas, y dos nodos están unidos por una arista si las celdas son adyacentes; es decir, si sus fronteras comparten un segmento de longitud no nula. En esencia,  $G_\theta$  es un grafo dual que refleja la partición del espacio de configuración en celdas.

La utilidad de este grafo radica en que planificar el movimiento dentro de una celda es sencillo, de modo que una trayectoria en el grafo puede convertirse directamente en una trayectoria para la escalera. Además, la escalera solo puede pasar de una celda a otra si existe una conexión correspondiente en el grafo. La Figura 5.5 (b) ilustra el grafo  $G_0$  asociado a la partición mostrada en la parte (a). Obsérvese que  $G_0$  es desconexo: no existe un camino en  $G_0$  que conecte las celdas etiquetadas (1, 8) y (1, 9). En la práctica, esto significa que una de las posiciones de la escalera representadas en la Figura 5.4 no puede transformarse en la otra empleando únicamente movimientos horizontales.

Para incorporar la rotación, adoptamos una estrategia análoga a la utilizada anteriormente al apilar planos para distintos valores de  $\theta$ . Si giramos ligeramente la escalera, el grafo de conectividad de los obstáculos generalmente se mantiene: las celdas se deforman, pero persisten junto con sus relaciones de adyacencia. Sin embargo, al superar una *rotación crítica*  $\theta^*$ , la estructura combinatoria de  $G_{\theta^*}$  difiere de la de  $G_0$ .

La rotación inicial  $\theta = 0$  mostrada en la Figura 5.5 (a) se considera crítica porque existen aristas de los obstáculos paralelas a la escalera  $R$  (en particular, las aristas 4 y 7). Como resultado, una pequeña rotación antihoraria de  $R$  alrededor de su punto de referencia genera nuevas celdas etiquetadas (7, 8) y (4,  $\infty$ ). Al aumentar la rotación hasta  $\theta = 13^\circ$  —correspondiente al ángulo de la arista de obstáculo 9— la celda (1, 9) deja de existir.

La Figura 5.6 (a) muestra el espacio de configuración para  $\theta = 13^\circ$  junto con su descomposición en celdas, mientras que la parte (b) de la misma figura presenta el grafo de conectividad correspondiente.

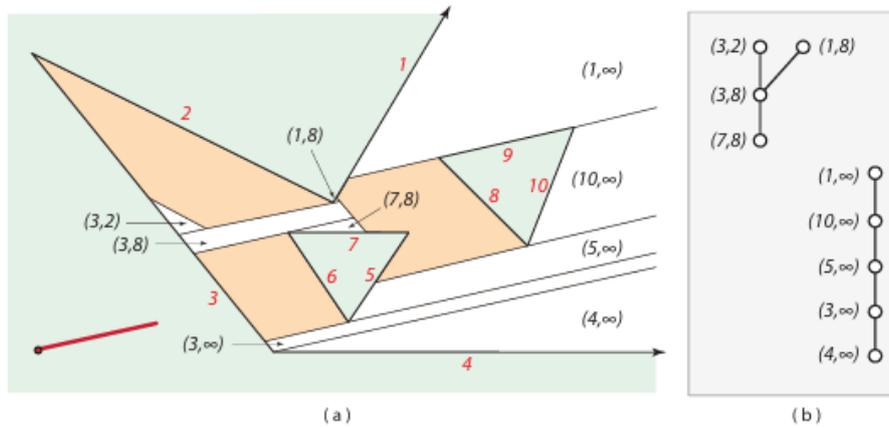


Figura 5.6: (a) El espacio de configuración (región blanca) para una escalera rotada  $\theta = 13^\circ$ , junto con su descomposición en celdas etiquetadas. (b) El grafo de conectividad  $G_\theta$  correspondiente a (a).

Como debería quedar claro, todos los ángulos críticos de rotación ocurren cuando la escalera se alinea con aristas de los obstáculos o con pares de vértices de estos. Por lo tanto, el número total de ángulos críticos es, como máximo, del orden de  $O(n^2)$ .

El siguiente paso consiste en construir un grafo de conectividad global  $G$  que integre la información de todos los grafos  $G_\theta$ . Para ello, extendemos la definición de celda para abarcar regiones del espacio de configuración tridimensional cuyos puntos compartan los mismos pares de etiquetas hacia adelante y hacia atrás. Conceptualmente, esto equivale a apilar las celdas correspondientes a rotaciones fijas una sobre otra a lo largo del eje  $\theta$ . Por ejemplo, los puntos de la celda  $(3, 2)$  en la Figura 5.5 (a) pertenecen a la misma celda tridimensional que los puntos de la celda  $(3, 2)$  en la Figura 5.6 (a).

Cada celda tridimensional distinta se representa como un nodo en  $G$ , y dos nodos se conectan mediante un arco si sus celdas son adyacentes, es decir, si comparten un límite de área distinto de cero. La Figura 5.7 muestra el grafo  $G$  considerando todas las rotaciones  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  para nuestro ejemplo. Obsérvese que las dos posiciones de la escalera representadas en la Figura 5.4 están efectivamente conectadas en  $G$ : la celda  $(3, 2)$  está enlazada con la celda  $(5, \infty)$ .

La clave para construir  $G$  radica en comprender que no es necesario considerar todas las rotaciones de  $\theta$ , sino únicamente las *críticas*. De este modo, las infinitas capas de rotación se reducen a un conjunto finito, transformando un espacio continuo (como el de la Figura 5.3) en un grafo discreto (como el de la Figura 5.7).

El grafo  $G$  puede construirse iniciando con  $G_0$  y recorriendo todas las rotaciones críticas en orden, actualizando  $G_\theta$  en cada paso e incorporando los cambios en  $G$ . No entraremos en los detalles de implementación, pero al menos ahora la construcción de  $G$  resulta más comprensible.

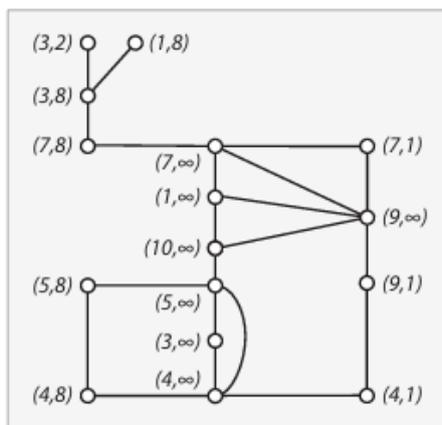


Figura 5.7: El gráfico  $G$  abarca todas las rotaciones de la escalera de la Figura 5.4 dentro del rango  $[0^\circ, 90^\circ]$ .

Planificar el movimiento dentro de una celda representada por un nodo de  $G$  es trivial, y moverse entre celdas adyacentes también lo es. Por ejemplo, se puede desplazar la escalera hasta el límite de la celda, avanzar a lo largo de este límite hasta la sección compartida con la celda vecina y continuar hacia el interior de la siguiente celda. Así, el problema de la planificación del movimiento se reduce a un problema de grafos: encontrar un camino entre el nodo que representa la celda que contiene  $s$  y el nodo que representa la celda que contiene  $t$ . Si no existe tal camino en  $G$ , entonces no hay ruta para la escalera; si existe, puede utilizarse como guía para planificar su movimiento.

## Complejidad

Una implementación cuidadosa del algoritmo de descomposición celular para traslación y rotación permite mover una escalera en tiempo  $O(n^2)$ , y un polígono con  $k$  vértices en un tiempo ligeramente superior a  $O(k^2n^2)$ , siendo  $n$  el número total de vértices de los obstáculos. Como se señaló, esta técnica es completamente general y puede aplicarse en cualquier dimensión, aunque su complejidad crece de manera doblemente exponencial, aproximadamente  $O(n^{3^d})$ , donde  $d$  es la dimensión del espacio de configuración.

### 5.1.4. Retracción

Una técnica bastante diferente, pero no menos general, para resolver problemas de planificación de movimiento es el método de retracción. Aquí esbozamos la idea aplicada al movimiento de una escalera.

La esencia de la retracción es construir un diagrama de Voronoi para la escalera, y luego “retraerse” desde  $s$  y  $t$  hasta este diagrama, y realizar la planificación de la trayectoria dentro de la red del diagrama. Primero explicamos qué significa un diagrama de Voronoi en este contexto.

Recuerde que los puntos en los bordes de un diagrama de Voronoi son equidistantes de al menos dos sitios (los vértices del diagrama son equidistantes de al menos tres sitios).

Para una orientación fija de la escalera  $L$ , definimos el diagrama de Voronoi de los obstáculos con respecto a  $L$  como el conjunto de puntos libres  $x$  tales que, cuando el punto de referencia de la escalera se coloca en  $x$ ,  $L$  es equidistante de al menos dos puntos de obstáculo.

Primero debemos definir la distancia a  $L$ . La distancia de un punto  $p$  a  $L$  es la longitud mínima de cualquier segmento de línea desde  $p$  hasta un punto en  $L$ . Así como los puntos a una distancia  $r$  de un punto forman un círculo, los puntos a una distancia  $r$  de  $L$  forman una “pista de carreras”: un óvalo formado por dos aristas paralelas a  $L$  conectadas por semicírculos. En la Figura 5.8 se muestran pistas de carreras anidadas que rodean a  $L$ . La misma figura muestra el diagrama de Voronoi como líneas sombreadas, junto con varias posiciones de escalera de ejemplo. Por ejemplo, en la posición  $A$ ,  $L$  es equidistante de  $e_3$  y  $e_2$ ; en la posición  $B$  es equidistante de  $e_1$  y  $e_9$ ; en la posición  $C$  es equidistante de  $e_5$  y del vértice común a  $e_8$  y  $e_{10}$ . Podemos ver que el diagrama está desconectado, por lo que no hay camino de  $A$  a  $B$ .

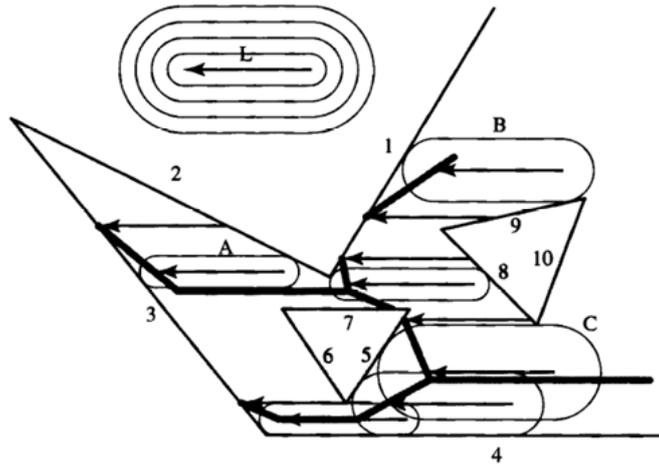


Figura 5.8: Diagrama de Voronoi (parcial) para una escalera.  $A$ ,  $B$  y  $C$  marcan posiciones particulares de la escalera.

Este diagrama tiene la agradable propiedad de que mover  $L$  de modo que su punto de referencia permanezca en los bordes del diagrama coloca prudentemente a  $L$  lo más lejos posible de los obstáculos cercanos, ya que todas estas posiciones son equidistantes de dos o más puntos de obstáculos. Esta es una característica muy útil para un robot que intenta evitar colisiones con obstáculos.

A partir de aquí, la estrategia debería resultar familiar. Imaginamos apilar diagramas de Voronoi para cada valor de ortogonal al eje  $\theta$ , formando así un diagrama de Voronoi para todo el espacio de configuración. Se puede ver que el diagrama consta de “láminas” retorcidas, formadas por el apilamiento de aristas, y “costillas” donde se unen dos láminas, formadas por el apilamiento de vértices.

De nuevo, el problema se reducirá a una búsqueda de grafos, pero de una manera bastante diferente al enfoque de descomposición de celdas. Las costillas entre las láminas

de Voronoi forman una red de curvas en el diagrama de Voronoi en el espacio de configuración. Estas curvas forman un grafo  $N$  de la manera natural: interprete cada curva como un arco y el punto donde dos o más curvas se encuentran como un nodo.

El paso final implica dos retracciones de los puntos de inicio y fin  $s$  y  $t$ : la primera retracción asigna estos puntos a la superficie de Voronoi, y la segunda asigna desde allí a la red. Sean  $s'$  y  $t'$  estos puntos retraídos en la red. Entonces hay una ruta para la escalera de  $s$  a  $t$  si y solo si hay una ruta en la red de  $s'$  a  $t'$ , que se puede determinar buscando en el grafo  $N$ . La ruta resultante de “alto espacio libre” es apropiada en muchos contextos, por ejemplo, para controlar el movimiento de una herramienta de corte.

### 5.1.5. Complejidad

Tras el trabajo pionero de Schwartz y Sharir, que estableció que el problema general puede resolverse en tiempo polinomial  $O(n^5)$ , se desarrollaron varios algoritmos casi cuadráticos, al menos uno de los cuales probablemente pueda reducirse a un algoritmo exactamente cuadrático,  $O(n^2)$ , para obstáculos poligonales con un total de  $n$  vértices. Sharir planteó en 1985 el problema de establecer un límite inferior para el número de movimientos necesarios, ya que no se conocía ningún ejemplo que requiriera más de un número lineal de movimientos. Vamos a construir un conjunto de obstáculos que fuerzan  $\Omega(n^2)$  movimientos entre una posición inicial y una final determinadas, resolviendo así la complejidad temporal en el peor de los casos de cualquier algoritmo que enumere los movimientos.

Como ya se ha explicado, para el problema bidimensional, la posición de la escalera puede considerarse un punto en un espacio de configuración tridimensional de posiciones libres: dos dimensiones para representar la traslación de un extremo de la escalera y una dimensión para representar su orientación.

Sea  $S$  el espacio de configuración para el problema. Un movimiento continuo de la escalera es entonces una trayectoria en  $S$ .

**Definición 5.2.** *Decimos que un movimiento es simple si puede representarse mediante una curva algebraica en  $S$  de grado constante  $r$ .*

La razón por la que elegimos esta definición de lo que constituye un movimiento simple es que los algoritmos propuestos para resolver los problemas de planificación del movimiento de la escalera generan naturalmente este tipo de movimientos. El valor real de  $r$  no es importante siempre que sea una constante independiente de  $n$ . Para fines intuitivos, es conveniente pensar en  $r = 1$ , cuando un simple movimiento no puede invertir la dirección en ninguna dimensión. Valores más altos de  $r$  permiten la inversión, pero el número de inversiones está limitado por  $r$ , porque el número de raíces de una ecuación algebraica está limitado por el grado de las ecuaciones.

Tenga en cuenta que la definición de “simple” depende del sistema de coordenadas elegido para  $S$ . Esto parece inevitable. Nuestros límites se cumplen para cualquier sistema de coordenadas que represente los componentes de traslación del movimiento de la escalera en el sistema de coordenadas cartesianas natural.

El ejemplo descrito establecerá un límite inferior para el número de movimientos simples.

Leven y Sharir observaron [15] que el número de componentes conexos del espacio de configuración puede ser  $\Omega(n^2)$ . Su construcción se muestra en la Figura 5.9: se observa fácilmente que dos filas de polos  $A$  y  $B$  entre las barreras superior e inferior crean posiciones  $\Omega(n^2)$  mutuamente inaccesibles para una escalera larga. Este ejemplo establece un límite inferior para cualquier algoritmo que construya todos los componentes conexos del espacio de configuración; pero solo es necesario construir el componente que contiene la posición inicial. Todos los algoritmos que siguen los paradigmas de descomposición o retracción de celdas que conocemos construyen todos los componentes conexos, pero es concebible que las técnicas de barrido o de “expansión de frente de onda” solo construyan el componente necesario. Por lo tanto, la Figura 5.9 es insuficiente para establecer un límite inferior para todos los algoritmos concebibles.

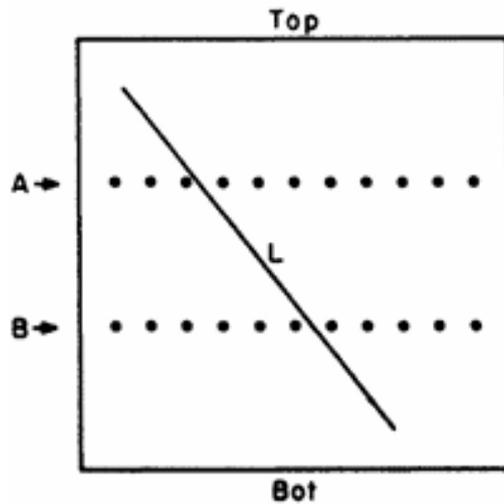


Figura 5.9: Un conjunto de obstáculos que definen  $n^2$  posiciones mutuamente inaccesibles.

El ejemplo es una generalización directa de la Figura 5.9, excepto que (a) las posiciones  $\Omega(n^2)$  de la escalera, mutuamente inaccesibles, se hacen accesibles entre sí, y (b) de tal manera que el grafo de accesibilidad entre posiciones es una cadena: la última posición es accesible desde la primera solo pasando por cada posición intermedia. Un ejemplo del diseño se muestra en la Figura 5.10. Consta de seis componentes: tres filas de postes,  $A$ ,  $B$  y  $C$ ,  $n + 1$  postes por fila, barreras inferior y superior (Bot y Top), y “picos” que emanan de Top. Los postes  $A$  y  $B$  corresponden funcionalmente a los postes  $A$  y  $B$  de la Figura 5.9. Sea  $L$  la escalera e  $|L|$  su longitud. Tanto la distancia vertical entre los postes  $C$  y Top, como entre Bot y los postes  $A$  es  $|L| + \varepsilon$ . Así, cuando la escalera se apoya en la parte superior, está libre de los postes  $C$ , y cuando se apoya en la inferior, está libre de los postes  $A$ . Pero, salvo breves incursiones en los picos, siempre está confinada entre dos postes  $B$ .

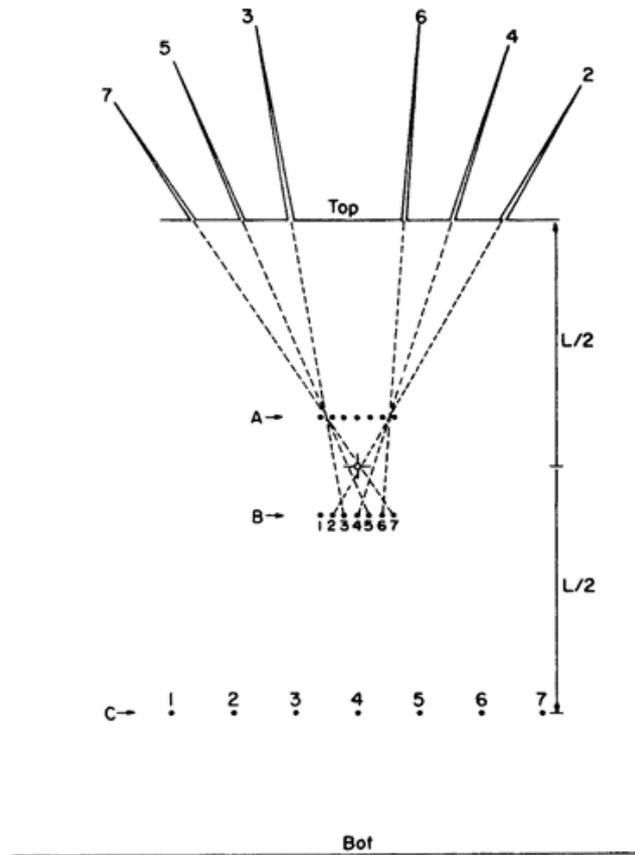


Figura 5.10: Un diseño que requiere  $n^2$  movimientos para reubicar una escalera de longitud  $L$ .

Sean  $A_i$  y  $B_i$  segmentos abiertos entre los polos  $i$ -ésimo y  $(i + 1)$ -ésimo de las filas  $A$  y  $B$ , respectivamente. Supongamos que  $L$  está en la posición  $(A_i, B_j)$  si interseca  $A_i$  y  $B_j$ . La posición inicial de la escalera es  $(A_1, B_1)$  y la posición final es  $(A_n, B_n)$ . Por lo tanto, la escalera debe saltar sobre cada polo  $B$  desde 1 hasta  $n$ . Dado que las barreras  $Top$  y  $Bot$  restringen la escalera dentro de la fila  $B$ , la única manera de saltar un polo  $B$  es mover la escalera hacia un pico. Cada pico es extremadamente delgado y solo permite la entrada a una escalera con una posición específica  $(A_i, B_j)$ . Para saltar de  $B_1$  a  $B_2$ , la escalera debe tener la posición  $(A_n, B_1)$ ; entonces puede deslizarse hacia el pico, girar ligeramente y salir en la posición  $(A_n, B_2)$ . Para saltar de  $B_2$  a  $B_3$ , la escalera debe estar en la posición  $(A_1, B_2)$ ; entonces puede moverse a  $(A_1, B_3)$ . Para saltar de  $B_3$  a  $B_4$ , debe estar en  $(A_n, B_3)$ . Y así sucesivamente. Nótese que los saltos de los polos pares  $B$  requieren que la escalera esté en  $A_1$ , y los saltos de los polos impares  $B$  requieren que esté en  $A_n$ . Por lo tanto, para cada transición  $B$ , la escalera debe recorrer toda la fila  $A$ . Aquí es precisamente donde se fuerzan los movimientos  $\Omega(n^2)$ .

Con la escalera fijada en  $B_j$ , se puede avanzar por la fila  $A$  moviéndola hacia abajo hasta tocar  $Bot$  y luego girando hasta donde lo permitan los postes  $B$  y  $C$ . La separación de los postes está diseñada para que este movimiento no salte más que un número constante de postes  $A$ ; para el diseño de la Figura 5.10, esta constante es 4. Para avanzar más en

la fila  $A$ , se debe saltar el poste  $C$  restrictivo. Esto se logra moviendo la escalera hacia arriba hasta tocar Top y luego girando hasta donde lo permitan los postes  $A$  y  $B$ . Los postes  $C$  están espaciados de tal manera que solo se puede saltar uno con esta maniobra.

Supongamos que  $r = 1$ , de modo que cada inversión de dirección inicia un movimiento simple distinto. Entonces, cada avance de cuatro postes en la fila  $A$  requiere dos inversiones en el componente de traslación de la posición de la escalera y, por lo tanto, dos movimientos simples. Cada avance de un poste en la fila  $B$  requiere recorrer toda la fila  $A$ , además de un movimiento hacia la punta. Por lo tanto, el número total de movimientos simples necesarios desde la posición inicial  $(A_1, B_1)$  hasta la posición final  $(A_n, B_n)$  es al menos  $n(2\lfloor n/4 \rfloor + 1) = \Omega(n^2)$ . Dado que solo hay  $O(n)$  vértices en todo el diseño, esto establece el límite inferior propuesto para  $r = 1$ . Es evidente que valores mayores de  $r$  simplemente dividen el número de movimientos entre una constante, por lo que el límite inferior se cumple independientemente de  $r$ .

Posteriormente, John Canny en 1987 introdujo un algoritmo alternativo, denominado *algoritmo de hoja de ruta*, que redujo la complejidad a un tiempo exponencial simple  $O(n^{d+1})$  (ignorando ciertos detalles). Este algoritmo simplifica las celdas multidimensionales del espacio de configuración a una red de conexiones —la “hoja de ruta”— que es suficiente para moverse entre dos puntos cualesquiera dentro del mismo componente de  $C$ .

Basta con decir que el algoritmo de hoja de ruta, tal como fue desarrollado, constituye el mejor enfoque de propósito general para la planificación de movimiento. Aunque su complejidad exponencial pueda parecer prohibitiva, en la práctica la dimensión  $d$  (el número de grados de libertad) suele ser pequeña.

## 5.2. Movimiento de Brazos Robóticos

En la sección anterior examinamos la planificación del movimiento de un objeto rígido. Ahora nos centramos en un caso distinto: la planificación del movimiento de un objeto *articulado* sencillo, concretamente un *brazo robótico*, que puede modelarse como una cadena poligonal abierta. Además de planificar trayectorias específicas en un entorno, también abordaremos el concepto de *alcanzabilidad*, un problema relacionado con el movimiento que, si bien no consiste en planificar rutas, puede analizarse desde la perspectiva del espacio de configuración.

La Figura 5.11 ilustra un brazo robótico típico. Este brazo tiene una base fija (el *hombro*), de la que parten tres eslabones rígidos conectados mediante articulaciones motorizadas. Se trata de un brazo con *6 grados de libertad* (6-GDL), es decir, cuenta con seis parámetros independientes que determinan su posición y orientación. Modelaremos formalmente el brazo como una cadena

$$C = (v_0, v_1, \dots, v_n),$$

compuesta por  $n$  eslabones, cada uno representado por un segmento recto rígido, unidos en vértices  $v_i$ . Cada vértice corresponde a una *articulación universal*, que permite libertad

total de movimiento. De este modo, consideraremos al brazo robótico como una cadena poligonal abierta, donde el vértice  $v_0$  (el hombro) está fijo en el origen, mientras que  $v_n$  representa la *mano*.



Figura 5.11: Un brazo robótico.

### 5.2.1. Planificación de Movimiento

La planificación del movimiento de un objeto articulado sigue principios similares a los utilizados para un objeto rígido. Nuevamente, el objetivo es representar el objeto como un punto que se desplaza dentro de un espacio de configuración, posiblemente de alta dimensión. La idea general se ejemplifica en la Figura 5.12 (a), donde se muestra un brazo de dos eslabones en el plano, con su hombro  $v_0$  *fijo* en una posición determinada.

En el caso de los objetos *rígidos*, el principal desafío consistía en evitar colisiones entre el objeto y los obstáculos. Sin embargo, cuando trabajamos con objetos articulados surge una dificultad adicional: la posibilidad de que los propios eslabones colisionen entre sí, convirtiéndose así el objeto en su propio obstáculo. Para simplificar nuestro modelo inicial, permitiremos que los eslabones de un brazo robótico se crucen libremente. Cabe señalar que esta simplificación es razonable en brazos bidimensionales, ya que es posible disponer los eslabones en capas separadas, paralelas a un plano base, evitando así las colisiones físicas reales.

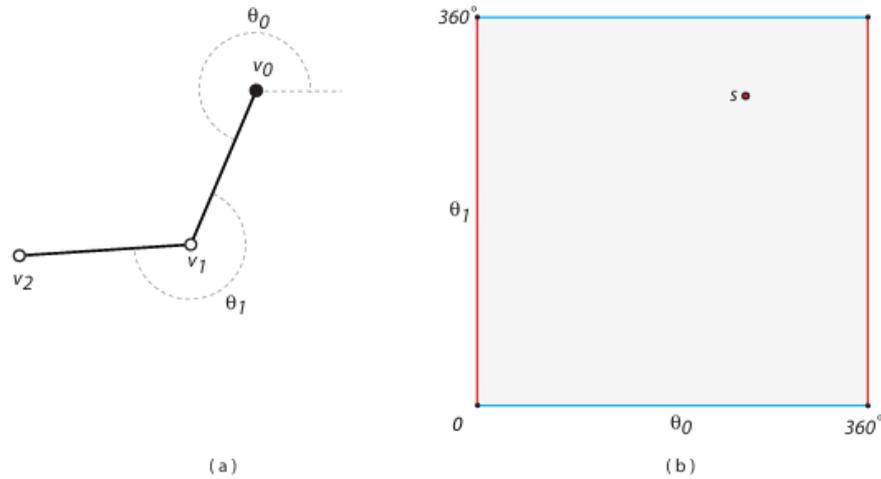


Figura 5.12: (a) Un brazo de 2 enlaces y (b) su espacio de configuración.

Podemos describir la configuración del brazo de distintas maneras; por ejemplo, utilizando las coordenadas de  $v_1$  y  $v_2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Sin embargo, estos cuatro valores no son independientes. Una representación más adecuada del espacio de configuración se obtiene mediante *ángulos* en lugar de coordenadas.

Basta con dos ángulos para determinar por completo la posición del brazo:  $\theta_0$ , que indica el ángulo del segmento  $v_0v_1$  con respecto al eje  $x$ , y  $\theta_1$ , que representa el ángulo  $v_2v_1v_0$  (como se muestra en la figura). Así, cada punto  $(\theta_0, \theta_1)$  describe una configuración del brazo en un espacio de configuración bidimensional  $C$ . En la Figura 5.12 (b), este espacio se representa como un cuadrado, donde el eje horizontal corresponde a  $\theta_0$  y el vertical a  $\theta_1$ , ambos con un rango de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . La configuración específica del brazo de dos eslabones ilustrada en la parte (a) se asocia al punto  $s = (250^\circ, 290^\circ)$  en este espacio.

Sin embargo, este cuadrado no refleja toda la estructura del espacio  $C$ . Una rotación completa de  $360^\circ$  de cualquiera de los eslabones devuelve al brazo a su configuración inicial. Por ello, los lados izquierdo y derecho del cuadrado (sombreados en rojo en la Figura 5.12 (b), correspondientes a  $\theta_0 = 0^\circ$  y  $\theta_0 = 360^\circ$ ) deben identificarse entre sí. Del mismo modo, los lados superior e inferior (sombreados en azul, correspondientes a  $\theta_1 = 0^\circ$  y  $\theta_1 = 360^\circ$ ) también deben identificarse.

El resultado de estas identificaciones es el verdadero espacio de configuración de un brazo de dos eslabones. Topológicamente, este espacio es un toro (la superficie de una rosquilla). Cada punto del toro representa una configuración única del brazo en el plano.

Consideremos ahora el caso de un brazo de dos eslabones en presencia de obstáculos. La Figura 5.13 (a) muestra el mismo brazo que antes, con su hombro  $v_0$  articulado y fijo en el plano, pero situado en un entorno con tres obstáculos poligonales. El espacio de configuración sigue teniendo la estructura topológica de un toro (definido por los dos ángulos  $\theta_0$  y  $\theta_1$ ). Sin embargo, la presencia de obstáculos implica que no todos los pares  $(\theta_0, \theta_1)$  son válidos: debemos excluir aquellos que corresponden a configuraciones en las que el brazo colisiona con algún obstáculo.

La Figura 5.13 (b) ilustra este espacio de configuración modificado, en el que las

regiones sombreadas representan configuraciones inválidas y deben eliminarse del toro. De este modo, el problema de planificación del movimiento del brazo se reduce a encontrar una trayectoria continua que conecte los puntos inicial y final dentro de este espacio de configuración toroidal. Los algoritmos generales de planificación del movimiento discutidos anteriormente son igualmente aplicables a este escenario.

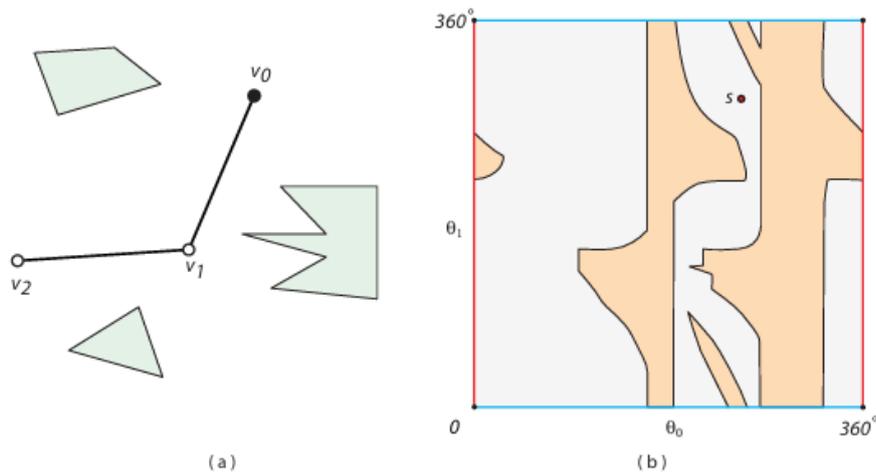


Figura 5.13: (a) Un brazo de 2 enlaces con obstáculos y (b) su espacio de configuración.

¿Qué ocurre si asumimos que los dos eslabones del brazo no pueden cruzarse libremente, de modo que el propio objeto articulado actúa como un obstáculo para su movimiento? En el caso de un brazo de dos eslabones, esta restricción se traduce simplemente en prohibir que el segundo eslabón atravesase al primero, lo que excluye las configuraciones con  $\theta_1 = 0^\circ = 360^\circ$  en nuestra parametrización. Para un brazo con  $n$  eslabones, existen  $\binom{n}{2}$  posibles colisiones entre pares de eslabones que deben evitarse, y la aplicación directa del algoritmo general de la hoja de ruta conduce a una complejidad de  $2^{O(n^2)}$ . Aunque este crecimiento es considerable, en la práctica los brazos robóticos cuentan con pocos grados de libertad, típicamente  $n \leq 10$ , lo que permite planificar trayectorias en los espacios de configuración  $n$ -dimensionales resultantes y aplicarlas en implementaciones reales.

### 5.2.2. Alcanzabilidad

En lo que sigue, consideraremos brazos robóticos planos sin obstáculos, permitiendo nuevamente que los eslabones de un mismo brazo puedan cruzarse libremente. Una de las preguntas más básicas que podemos plantear sobre este tipo de sistemas se refiere a su alcanzabilidad: dado un punto  $p$  en el plano y un brazo robótico  $A$ , definido por las longitudes de sus eslabones  $[\ell_1, \dots, \ell_n]$ , con su articulación base  $v_0$  fijada en el origen, ¿es posible configurar el brazo de manera que el extremo  $v_n$  coincida con  $p$ ? Dicho de otro modo, ¿puede el brazo  $A$  alcanzar el punto  $p$ ?

Es importante notar que esta no es una pregunta de planificación de movimiento en sentido estricto. En primer lugar, buscamos una respuesta binaria (SÍ/NO) en lugar

de una trayectoria específica. En segundo lugar, la configuración final del brazo no está completamente determinada, ya que solo nos interesa la posición del extremo  $v_n$ , sin considerar la ubicación exacta de las demás articulaciones.

A primera vista, podría parecer que  $p$  es alcanzable si y solo si su distancia al origen no supera la suma de las longitudes de los eslabones:

$$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n.$$

Sin embargo, esto no siempre es cierto: dependiendo de las longitudes relativas de los eslabones, algunos puntos cercanos a la base pueden resultar inalcanzables.

Sea la *región de alcanzabilidad* de un brazo el conjunto de todos los puntos que  $v_n$  puede alcanzar y  $A = (\ell_1, \ell_2)$  un brazo de 2 enlaces. Si  $\ell_1 \geq \ell_2$ , entonces la región de alcanzabilidad es claramente un anillo con un radio exterior de  $r_o = \ell_1 + \ell_2$  y un radio interior  $r_i = \ell_1 - \ell_2$ . Véase la Figura 5.14 (a). Si  $\ell_1 = \ell_2$  entonces  $r_i = 0$  y el anillo es un disco de radio  $r_o$ . Cuando  $\ell_1 < \ell_2$ , la situación quizás no sea tan clara. Pero, como muestra la Figura 5.14 (b), el resultado es de nuevo un anillo con  $r_o = \ell_1 + \ell_2$ , pero con  $r_i = \ell_2 - \ell_1$  (o, como a veces será conveniente escribirlo,  $r_i = |\ell_1 - \ell_2|$ ).

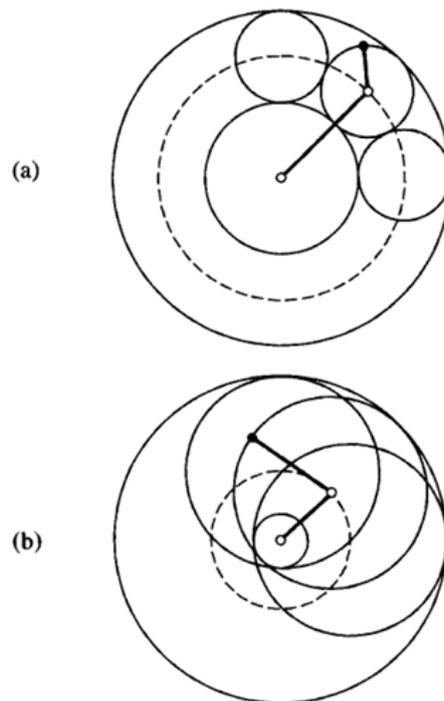


Figura 5.14: Región de alcanzabilidad para un brazo de 2 enlaces: (a)  $\ell_1 > \ell_2$ ; (b)  $\ell_1 < \ell_2$ .

Es revelador ver la región de alcanzabilidad de 2 enlaces como la suma de Minkowski de dos círculos. En cada punto del círculo  $C_1$ , de radio  $\ell_1$ , centre un círculo de radio  $\ell_2$ . Por lo tanto, la suma de dos círculos centrados en el origen es un anillo centrado en el origen. Además, la suma de un anillo y un círculo, ambos centrados en el origen, es de nuevo un anillo centrado en el origen. Por lo tanto tenemos:

**Lema 5.1.** *La región de alcanzabilidad para un brazo de  $n$  eslabones es un anillo centrado en el origen (hombro).*

*Demostración.* La demostración es por inducción. Un brazo de un eslabón  $n = 1$  puede alcanzar los puntos de un círculo de radio  $\ell_1$  centrado en  $v_0$ , que es un anillo según nuestra definición. Supongamos ahora que el lema se cumple para todos los brazos de hasta  $n - 1$  eslabones. Sea  $C' = [\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-1}]$  el brazo  $C$  con el último eslabón eliminado. Por la hipótesis de inducción, la región de alcanzabilidad de  $C'$ ,  $R_{n-1}$  para  $v_{n-1}$ , es un anillo centrado en  $v_0$ . Sea  $S(r)$  el círculo de radio  $r$  centrado en el origen. Entonces, la región de alcanzabilidad para  $C$  es el conjunto

$$\{p + S(\ell_n) \mid p \in R_{n-1}\},$$

Es decir, la unión de círculos de radio  $\ell_n$  centrados en cada punto de  $R_{n-1}$ . Esto es, de nuevo, un anillo: sin un radio mayor en  $\ell_n$ , ni un radio interior reducido en  $\ell_n$  a cero (si el origen se alcanza en  $v_n$ ).  $\square$

Aunque está claro que el radio exterior del anillo en el Lema 5.1 se obtiene estirando todos los eslabones en línea recta,  $r_o = \sum_{i=1}^n \ell_i$ , el radio interior no es tan obvio. Ahora pasamos a calcular  $r_i$ .

Que  $r_i > 0$  o no depende de la relación entre la longitud del eslabón más largo y las longitudes de los demás eslabones. En particular,  $r_i > 0$  si y solo si el eslabón más largo es más largo que todas las longitudes de los demás eslabones combinadas. Esto es quizás más fácil de ver si el eslabón más largo es el primer eslabón del brazo. Ahora demostraremos cómo ver las cosas de esta manera sin pérdida de generalidad.

**Lema 5.2.** *La región de alcanzabilidad de un brazo es independiente del orden en que se disponen los eslabones.*

*Demostración.* Esto se deduce de la conmutatividad de la suma vectorial. Considérese, por ejemplo, una configuración de un brazo particular de 2 eslabones, como se muestra en la Figura 5.15 (a). Siguiendo los otros dos lados del paralelogramo se llega claramente al mismo punto final. Lo mismo se aplica a un brazo de 3 eslabones, como se muestra en (b), y de hecho a un brazo de  $n$  eslabones.  $\square$

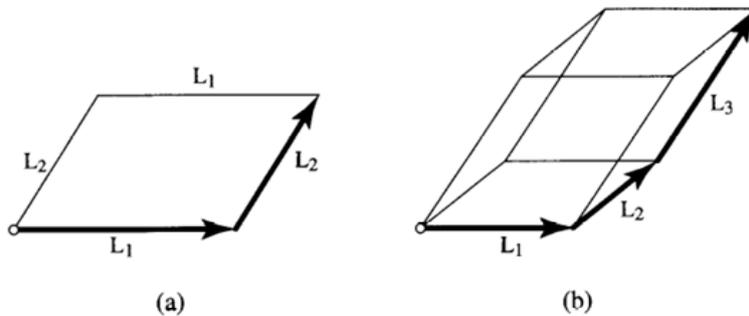


Figura 5.15: Los paralelogramos para (a) dos eslabones y (b) tres eslabones muestran que el orden de los eslabones no afecta la a la alcanzabilidad.

Por lo tanto, nos concentramos, sin pérdida de generalidad, en los brazos cuyo primer eslabón  $L_1$  es el más largo. Para estos brazos, debería quedar claro en la Figura 5.16 que  $r_i = \ell_1 - \sum_{i=2}^n \ell_i$ , siempre que esta suma sea positiva, y  $r_i = 0$  en caso contrario. Podemos resumir esto mediante el siguiente teorema:

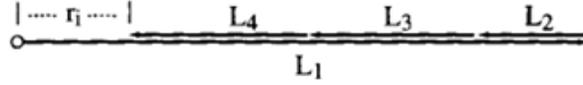


Figura 5.16:  $r_i = \ell_1 - (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)$ .

**Teorema 5.1.** *La región de alcanzabilidad  $R$  para un brazo  $A$  con longitudes de enlace  $[\ell_1, \dots, \ell_n]$  es un anillo centrado en  $v_0$ , la región entre dos círculos concéntricos en  $\mathbb{R}^2$ . El radio exterior del anillo es*

$$r_o = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n,$$

y el radio interior es

$$r_i = \begin{cases} L - M & \text{si } L > M, \\ 0 & \text{si } L \leq M, \end{cases}$$

donde  $L$  es la longitud del eslabón más largo del brazo y  $M$  la suma de las longitudes de todos los demás eslabones.

*Demostración.* Primero demostramos que  $R$  es un anillo y luego calculamos los radios. La demostración del anillo se realiza por inducción. Un brazo de  $n = 1$  eslabón puede alcanzar los puntos de un círculo de radio  $\ell_1$  centrado en  $v_0$ , que es un anillo según nuestra definición. Supongamos ahora que el lema se cumple para todos los brazos de hasta  $n - 1$  eslabones. Sea  $A' = [\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-1}]$  el brazo  $A$  con el último eslabón eliminado. Por la hipótesis de inducción, la región de alcanzabilidad  $A$  es un anillo centrado en  $v_0$ . Sea  $S(r)$  el círculo de radio  $r$  centrado en el origen. Entonces, la región de alcanzabilidad para  $A$  es la suma de Minkowski  $R' \oplus S(\ell_n)$ , la unión de círculos de radio  $\ell_n$  centrados en cada punto de  $R'$ . Esto es nuevamente un anillo: con un radio exterior mayor en  $\ell_n$  y un radio interior reducido en  $\ell_n$  o a cero (si el origen se puede alcanzar en  $v_n$ ). Véase la Figura 5.17 para un diagrama de (a) el anillo  $R'$  y (b) el anillo recién formado  $R$ .

Ahora pasamos a calcular los radios. El radio exterior es sencillo: el alcance máximo del brazo se logra enderezando cada articulación, extendiendo el brazo completamente. Por lo tanto,  $r_o$  es la suma de las longitudes de los eslabones en  $A$ , como se afirma. Para calcular  $r_i$ , primero observe que la región de alcance  $R$  de un brazo  $A$  es independiente del orden de los eslabones en el brazo. Esto se debe a que  $v_n$  se puede alcanzar sumando vectores sucesivos,

$$v_n = v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots + (v_n - v_{n-1}),$$

y la suma de vectores es conmutativa. Por lo tanto, al reorganizar los eslabones,  $R$  permanece inalterado.

Sea  $L = \ell_k$  el eslabón más largo del brazo  $A$ . Reordene los eslabones de  $A$  moviendo el eslabón  $k$  al frente, incidente con el hombro. Esto no altera la región de alcance, pero facilita la intuición. Sea  $M$  la suma de las longitudes más allá de este nuevo primer eslabón. La reorganización deja claro que si  $M < L$ , la mano no puede alcanzar el hombro. Lo más cerca que  $v_n$  puede llegar a  $v_0$  es  $L - M$ , y este es  $r_i$ . La Figura 5.18 muestra esta situación donde el eslabón más largo (en rojo) tiene una longitud  $L$ , y las longitudes de los demás eslabones (en azul) suman  $M$ . Cuando  $M \geq L$ ,  $v_n$  puede alcanzar  $v_0$ , y entonces el anillo se convierte en un disco, y  $r_i = 0$ .  $\square$

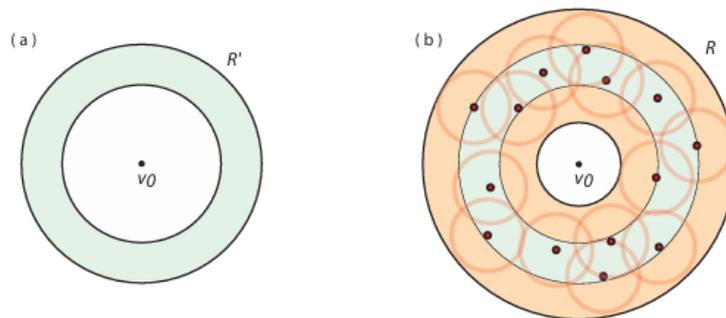


Figura 5.17: (a) El anillo  $R'$  centrado en  $v_0$  y (b) el anillo  $R$  formado por la suma de Minkowski de  $R'$  y el círculo de radio  $\ell_n$ .

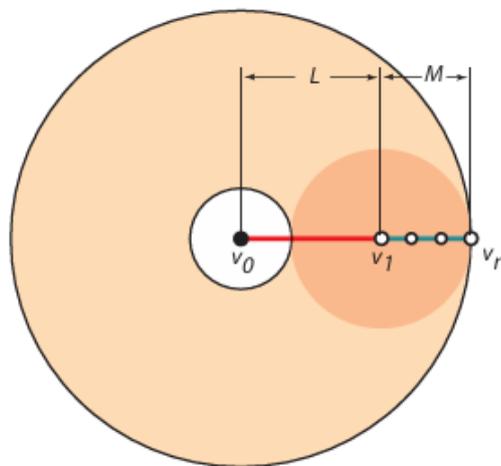


Figura 5.18: Cuando  $L > M$ , el radio interior es  $r_i = L - M$ .

Por lo tanto, la pregunta de decisión planteada al inicio de esta sección puede resolverse de manera sencilla en tiempo  $O(n)$ : basta con calcular los valores  $r_i$  y  $r_o$  y comprobar si se cumple la condición

$$r_i \leq |p| \leq r_o.$$

Es importante señalar que conocer que la respuesta es afirmativa no nos indica de forma inmediata cómo configurar el brazo para alcanzar el punto  $p$ . Sin embargo, también es

posible determinar una configuración adecuada en tiempo  $O(n)$ . A continuación, abordaremos esta cuestión en detalle.

### Construcción

A primera vista, no es evidente cómo encontrar una configuración para que un brazo de  $n$  enlaces alcance un punto dentro de su región de alcance. En cierto sentido, hay demasiadas soluciones, y los métodos que intentan explorar metódicamente todas las soluciones potenciales pueden verse atrapados en un número exponencial de posibilidades. Por ejemplo, intentar delimitar los rangos de ángulos en cada articulación dentro de los cuales se encuentran las soluciones se fractura rápidamente en un número exponencial de rangos.

Afortunadamente, se pueden lograr algoritmos mucho más eficientes explotando el requisito débil de que solo se desea una solución. Examinamos los problemas de 2 y 3 enlaces antes de pasar al caso de  $n$  enlaces.

### Alcance de 2 enlaces

Determinar el ángulo del hombro  $j_0$  para que un brazo de 1 eslabón alcance un punto en su círculo es trivial. Resolver un problema de 2 eslabones no es mucho más difícil. Sea  $p$  el punto a alcanzar. Simplemente interseca el círculo  $C_1$  de radio  $\ell_1$  centrado en el origen ( $J_0$ ) con el círculo  $C_2$  de radio  $\ell_2$  centrado en  $p$ . En general, habrá dos soluciones, pero podría haber cero, una, dos o un número infinito, dependiendo de cómo se intersequen los círculos, como se muestra en la Figura 5.19.

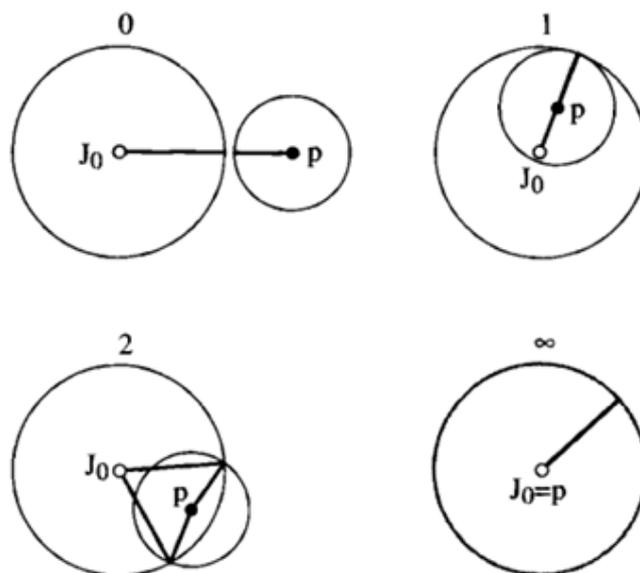


Figura 5.19: Alcance de 2 enlaces: número de soluciones mostradas.

### Alcance de 3 enlaces

Nuestro enfoque general será reducir los problemas de enlaces múltiples a problemas de 2 enlaces. Sea  $A_3 = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ . Sabemos que la región de alcanzabilidad para  $A_2 = (\ell_1, \ell_2)$  es un anillo; llamémoslo  $R$ . Nótese que todos los puntos del límite  $\partial R$  de  $R$  representan configuraciones de  $A_2$  que son extremas en el sentido de que los brazos están alineados o antialineados:  $j_1 = 0$  o  $j_1 = \pi$ . En estas posiciones,  $A_2$  actúa como un solo enlace de longitud  $\ell_1 + \ell_2$  o  $|\ell_1 - \ell_2|$  respectivamente.

Ahora examine cómo el círculo  $C$  de radio  $\ell_3$ , centrado en  $p = J_3$ , interseca a  $R$ . Nuestro objetivo es reducir las soluciones de 3 enlaces a alineaciones de dos enlaces, para que puedan verse como soluciones de 2 enlaces. Distinguiamos dos casos, dependiendo de si  $\partial R \cap C = \emptyset$  o no.

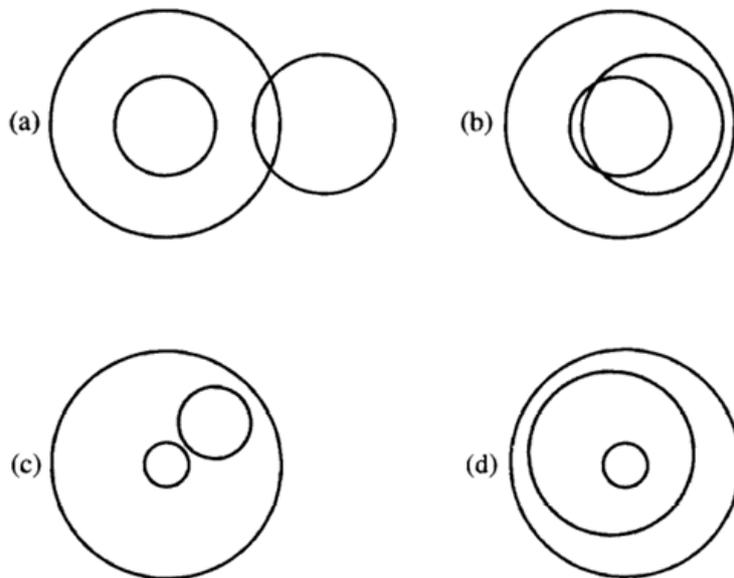


Figura 5.20: Alcance de 3 enlaces. El anillo sombreado es  $R$ ; el otro círculo es  $C$ .

1. Caso 1:  $\partial R \cap C \neq \emptyset$  (Figura 5.20 (a, b)).

En este caso, el problema se puede reducir a un problema de 2 enlaces alineando (a) o antialineando (b)  $L_1$  y  $L_2$ . Por supuesto, en general hay infinitas otras soluciones, pero nos limitamos a buscar solo una. Será conveniente evitar la antialineación de los enlaces, por lo que analizamos la Figura 5.20 (b) un poco más de cerca.

Sea  $\partial R = I \cup O$ , donde  $I$  es el límite interno y  $O$  el externo del anillo.

Si  $O \cap C = \emptyset$  e  $I \cap C \neq \emptyset$  como en la Figura 5.20 (b), podemos elegir un círculo  $C_2$  de radio  $\ell_2$  tangente a  $C$ , lo que permite alcanzar  $p$  mediante la alineación de  $L_2$  y  $L_3$  en lugar de la antialineación de  $L_1$  y  $L_2$ . Véase la Figura 8.23.

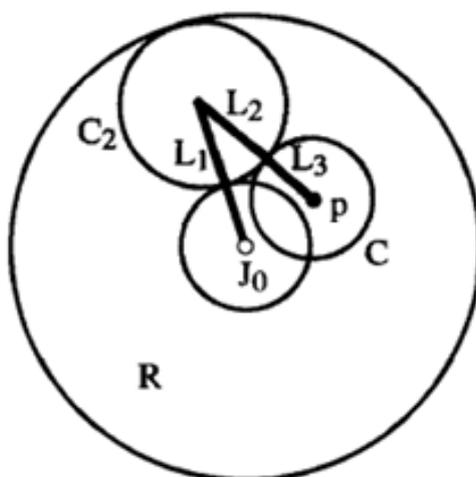


Figura 5.21: Alineación de los enlaces  $L_2$  y  $L_3$  cuando  $C \cap I \neq \emptyset$

2. Caso 2:  $\partial R \cap C = \emptyset$ .

Se pueden distinguir dos casos más aquí, dependiendo de si  $C$  encierra o no el origen  $J_0$ .

a)  $C$  no encierra a  $J_0$  (Figura 5.20 (c)).

Afirmamos que, de nuevo, es posible encontrar una solución con dos enlaces alineados. Sea  $C_2$  una circunferencia de radio  $\ell_2$  en el anillo  $R$  y tangente a  $C$ . Entonces  $L_2$  y  $L_3$  pueden alinearse (de forma similar a la Figura 5.21), lo que de nuevo reduce el problema a dos enlaces.

b)  $C$  sí encierra a  $J_0$  (Figura 5.20 (d)).

Aquí no hay una solución en la que dos enlaces se alineen (o se antialineen), frustrando las esperanzas de que cada problema de 3 enlaces pueda resolverse mediante tales alineaciones. Sin embargo, hay otra característica de esta situación que la hace fácil de resolver: ¡Hay una solución para cada valor de  $j_0$ ! Para ver esto, elija  $j_0$  arbitrariamente y dibuje un círculo  $C_2$  centrado en  $J_1$ . Como  $C$  está en el anillo  $R$  y encierra el origen, debe encerrar a  $I$ , el límite interno de  $R$ . Como  $C_2$  conecta el límite interno con el externo de  $R$ , debe cruzar a  $C$  en algún lugar. Ese cruce proporciona una solución para un  $j_0$  arbitrario.

Por lo tanto, podemos reducir este caso a 2 enlaces después de todo: elija  $j_0$  arbitrariamente, digamos  $j_0 = 0$ , y luego resuelva el problema de 2 enlaces resultante.

Resumimos en un lema:

**Lema 5.3.** *Todo problema de 3 enlaces puede resolverse mediante uno de los siguientes problemas de 2 enlaces:*

1.  $(\ell_1 + \ell_2, \ell_3)$ .
2.  $(\ell_1, \ell_2 + \ell_3)$ .
3.  $j_0 = 0$  y  $(\ell_2, \ell_3)$ .

*Demostración.* La Figura 5.20 (a) corresponde a 1, la Figura 5.20 (b) (y la Figura 5.21) y la Figura 5.20 (c) corresponden a 2, y la Figura 5.20 (d) corresponde a 3.  $\square$

### Alcance de $n$ enlaces

*Algoritmo lineal para alcanzabilidad de  $n$  enlaces.* Reexamine la Figura 5.20, pero ahora imagine el anillo  $R$  que representa  $n - 1$  enlaces de un brazo de  $n$  enlaces  $A$ , con el círculo  $C$  de radio  $\ell_n$ , centrado en  $p$ . Dado que asumimos que  $A$  puede alcanzar el punto objetivo, sabemos que la  $R \cap C$  no está vacía. De hecho, las posibilidades de intersección son solo las ilustradas en la Figura 5.20. Esto sugiere el siguiente procedimiento recursivo para determinar una configuración para que un brazo de  $n$  enlaces alcance un punto alcanzable dado  $p$ :

1. Caso 1:  $\partial R \cap C \neq \emptyset$  (Figura 5.20 (a, b)). Elija uno de los dos puntos de intersección (en general)  $t$ .
2. Caso 2:  $R \supseteq C$  (Figura 5.20 (c, d)). Elija cualquier punto en  $C$ , por ejemplo, el punto más alejado de  $J_0$ .

En cualquier caso, encuentre recursivamente una configuración para que  $A_{n-1} = (\ell_1, \dots, \ell_{n-1})$  alcance  $t$ . Añada el último enlace  $L_n$  a esta solución para conectar  $t$  con  $p$  (recuerde que  $C$  está centrado en  $p$ ). La base de la recursión puede ser nuestra solución previamente descrita para el problema de 3 enlaces. Debido a que los casos en la Figura 5.20 son exhaustivos, se garantiza que este procedimiento encontrará una solución (si existe una). Que solo requiere  $O(n)$  tiempo se deduce del hecho de que la reducción de  $n$  en 1 se logra en tiempo constante, al intersectar  $C$  con  $O$  y con  $I$ , donde  $\partial R = I \cup O$ .

Esto entonces logra nuestro objetivo: Dado un punto  $p$  que alcanzar, y una lista de longitudes de enlace que especifica el brazo, primero determine si  $p$  es alcanzable con el Teorema 5.1, y si lo es, encuentre una configuración mediante este procedimiento recursivo.

*Dos dobleces.* Aunque no es posible mejorar la complejidad temporal asintótica de  $O(n)$ , ya que se tarda ese tiempo simplemente en sumar las longitudes de los eslabones, sí es posible una simplificación conceptual significativa. La simplicidad de la solución obtenida en el Caso 1 del algoritmo anterior ofrece una pista: los primeros  $n - 1$  eslabones se enderezan si  $p \in O$ , y se “doblan” solo en las articulaciones de cada extremo del eslabón más largo si  $p \in I$ . Esta última afirmación se deriva de la fórmula para  $r_i$ : todos los eslabones se “oponen” a  $L_M$  (el eslabón más largo) para alcanzar un punto en el radio del anillo interior. Por lo tanto, el brazo no necesita tener muchos dobleces en el Caso 1. Y en el Caso 2,  $p$  podría estar en cualquier punto de  $C$ , lo que sugiere que esta libertad podría aprovecharse para evitar dobleces.

De hecho, es un teorema notable que si un brazo de  $n$  enlaces puede alcanzar un punto, ¡puede hacerlo con solo dos articulaciones dobladas! Además, estas dos articulaciones se pueden determinar fácilmente. La implicación de esto es que cualquier problema de  $n$  enlaces se puede reducir directamente a un problema de 3 enlaces. Ahora procedemos a demostrar esto.

**Teorema 5.2** (Dos pliegues). *Si un brazo de  $n$  enlaces  $A$  puede alcanzar un punto, puede alcanzarlo con un máximo de dos articulaciones “plegadas”: solo dos articulaciones entre  $J_1, \dots, J_{n-1}$  tienen ángulos distintos de cero. Las dos articulaciones pueden elegirse para que sean las de cada extremo del “enlace mediano”: el enlace  $L_m$  tal que  $\sum_{i=1}^{m-1} \ell_i$  es menor o igual que la mitad de la longitud total de los enlaces, pero  $\sum_{i=1}^m \ell_i$  es mayor que la mitad.*

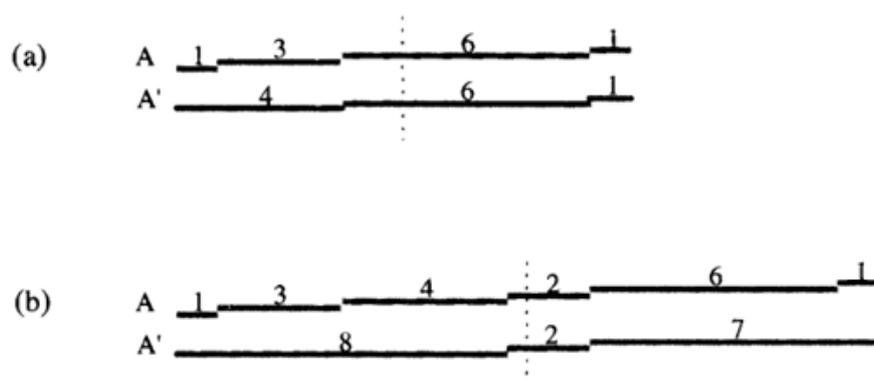


Figura 5.22: Teorema de los dos pliegues, con los enlaces mostrados escalonados para mayor claridad: (a)  $\ell/2 = 5\frac{1}{2}$ ,  $r_i = 1 > 0$ , el enlace más largo es el enlace mediano; (b)  $\ell/2 = 8\frac{1}{2}$ ,  $r_i = 0$ , el enlace mediano no es el enlace más largo.

*Demostración.* La estrategia de la demostración es modificar el brazo  $A$  “congelando” todas las articulaciones excepto las dos indicadas, y demostrando que el nuevo brazo resultante  $A'$  tiene la misma región de alcanzabilidad. Una articulación se “congela” fijando su ángulo en 0. Nótese que, dado que  $r_0$  depende solo de la suma de las longitudes de los eslabones (Teorema 5.1), dicha congelación deja  $r_0$  fijo. Por lo tanto, la responsabilidad de la demostración es demostrar que  $r_i$  también permanece inalterado.

Sea  $\ell$  la longitud total de los eslabones. Dividimos el trabajo en dos casos, dependiendo de si  $r_i = 0$  o no.

1. Caso  $r_i > 0$  (Figura 5.22 (a)).

Recuerde del Teorema 5.1 que  $r_i$  es distinto de cero solo cuando el eslabón más largo,  $L_M$ , excede la longitud de los eslabones restantes. Entonces, debe ser que  $\ell_m > \ell/2$ . Por lo tanto,  $L_M = L_m$  independientemente de dónde aparezca en la secuencia de eslabones: debido a que  $L_M$  es tan largo, cubre el punto medio de las longitudes bajo cualquier desplazamiento en la secuencia. Ahora bien, como  $L_m = L_M$  y  $\ell_m > \sum_{i \neq M} \ell_i$ , si congelamos todas las articulaciones excepto aquellas

en los puntos finales de  $L_M$  para formar un nuevo brazo  $A'$ , no cambiamos el hecho de que  $L_M$  es el eslabón más largo. (En la Figura 5.22 (a), la longitud del eslabón más largo es 6 tanto en  $A$  como en  $A'$ ). Dado que  $r_i$  depende solo de  $\ell$  y  $\ell_M$  por el Teorema 5.1 de nuevo,  $A'$  tiene la misma región de alcanzabilidad que  $A$ .

2. Caso  $r_i = 0$  (Figura 5.22 (b)).

En este caso, sabemos por el Teorema 5.1 que el enlace más largo  $L_M$  es  $\leq \ell/2$ , ya que  $L_m = L_M$  y  $\ell_M \leq \sum_{i \neq M} \ell_i$ . Sea  $L_m$  el enlace mediano y congele todas las articulaciones antes y después de  $L_m$ , formando el brazo  $A'$ . Esto podría cambiar qué enlace es el más largo; en la Figura 5.22 (b), la longitud del enlace más largo es 6 en  $A$  y 8 en  $A'$ . Pero tenga en cuenta que el nuevo enlace más largo  $L'_M$  no puede exceder  $\ell/2$  de longitud: dado que  $L_m$  se extiende a ambos lados del punto medio de las longitudes, tanto lo que lo precede como lo que lo sigue debe ser  $\leq \ell/2$ . Dado que  $r_i$  solo es distinto de cero cuando el enlace más largo excede  $\ell/2$ , estamos seguros de que  $r_i$  sigue siendo cero. Por lo tanto, la región de alcanzabilidad de  $A'$  es la misma que la de  $A$ .

□

El teorema de los dos pliegues nos ofrece un algoritmo alternativo de  $O(n)$ , donde la única parte que depende de  $n$  es la suma de las longitudes de los  $n$  enlaces. Después de esto, el algoritmo es de tiempo constante. Por lo tanto, si contamos el número de pruebas de intersección de círculos realizadas, el algoritmo recursivo requiere  $O(n)$  de estas, mientras que el algoritmo de los dos pliegues solo necesita  $O(1)$ . Después de identificar  $L_m$ , el problema se reduce a un solo problema de 3 enlaces, que se reduce por el Lema 5.3 a tres problemas de 2 enlaces, cada uno de los cuales realiza una prueba de intersección de círculos. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.3.** *Se puede calcular una configuración para que un brazo de enlace  $n$  alcance un punto determinado en tiempo  $O(n)$ .*

El argumento anterior no solo funciona para enlaces en el plano, sino para enlaces en cualquier dimensión: la generalización natural de un anillo en el plano (la región atrapada entre dos círculos) se extiende a la región atrapada entre dos esferas de mayor dimensión. Se podría pensar que la razón por la que estas preguntas de alcanzabilidad son tan fáciles en comparación con la planificación del movimiento es que excluimos los obstáculos. La siguiente sección muestra que incluso algunas preguntas de configuración de brazos, en ausencia de obstáculos, son muy difíciles.

# Bibliografía

- [1] Nina Amenta, Marshall Bern y David Eppstein. “The crust and the  $\beta$ -skeleton: Combinatorial curve reconstruction”. En: *Graphical Models and Image Processing* 60 (1998), págs. 125-135.
- [2] Bennett Chow y David Glickenstein. “Semidiscrete Geometric Flows of Polygons”. En: *The American Mathematical Monthly* 114.4 (2007), págs. 316-328.
- [3] Erik D. Demaine y Joseph O’Rourke. *Geometry Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2006.
- [4] Satyan L. Devadoss y Joseph O’Rourke. *Discrete and Computational Geometry*. Princeton University Press, 2011.
- [5] Tamal K. Dey. *Curve and Surface Reconstruction: Algorithms with Mathematical Analysis*. Cambridge University Press, 2006.
- [6] Rida T. Faroukia y Thomas W. Sederberg. “Analysis of the offset to a parabola”. En: *Computer Aided Geometric Design* 12.6 (1995), págs. 639-645.
- [7] Michael Gage y Richard Hamilton. “The heat equation shrinking convex plane curves”. En: *Journal of Differential Geometry* 23.1 (1986), págs. 69-96.
- [8] Matthew A. Grayson. “The heat equation shrinks embedded plane curves to round points”. En: *Journal of Differential Geometry* 26.2 (1987), págs. 285-314.
- [9] F. Gómez-Martín, P. Taslakian y G.T. Toussaint. “Convergence of the shadow sequence of inscribed polygons”. En: *Proc. of the 18th Fall Workshop Comput. Geom.* (2008), págs. 10-11.
- [10] L.R. Hitt y X.M. Zhang. “Dynamic geometry of polygons”. En: *Elemente der Mathematik* 56.1 (2001), págs. 21-37.
- [11] Yan Ke y Joseph O’Rourke. “Lower bounds on moving a ladder in two and three dimensions”. En: *Discrete Comput. Geom.* 3 (1988), págs. 197-217.
- [12] K. Kedem y M. Sharir. “An Efficient Motion-Planning Algorithm for a Convex Polygonal Object in Two-Dimensional Polygonal Space”. En: *Discrete Comput. Geom.* 5 (1990), págs. 43-75.
- [13] D. T. Lee y R. L. Drysdale. “Generalization of Voronoi diagrams in the plane”. En: *SIAM J. Comput.* 10 (1981), págs. 73-87.

- [14] William J. Lenhart y Sue Whitesides. “Turning a polygon inside-out”. En: *Proc. 3rd Canad. Conf. Comput. Geom.* (1991), págs. 66-69.
- [15] D. Leven y M. Sharir. “An efficient and simple motion-planning algorithm for a ladder moving in two-dimensional space amidst polygonal barriers”. En: *Proceedings of the First Symposium on Computational Geometry* (1985), págs. 221-227.
- [16] Paula Mielgo Martín. *Triangulaciones y Diagramas de Voronoi*. UVaDOC, 2022.
- [17] Joseph O’Rourke. “A lower bound on moving a ladder”. En: *Report JHU/EECS-85/20, Dept. Comput. Sci.* (1985).
- [18] Joseph O’Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1998.
- [19] G. D. Rankumar. “An algorithm to compute the Minkowski sum outerface of two simple polygons”. En: *Proc. 12th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.* (1996), págs. 234-241.
- [20] Don Shimamoto y Catherine Vanderwaart. “Spaces of polygons in the plane and Morse theory”. En: *Amer. Math. Monthly* 112.4 (2005), págs. 289-310.
- [21] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics*. Cambridge University Press, 2001.
- [22] G. Strang. “The width of a chair”. En: *Amer. Math. Monthly* 89 (1982), págs. 529-535.
- [23] Ron Wein. “Exact and efficient construction of planar Minkowski sums using the convolution method”. En: *Proceedings of the 14th conference on Annual European Symposium* 14 (2006), págs. 829-840.