



Universidad de Valladolid
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

CONTRAEJEMPLOS EN ANÁLISIS

Autor: Jaime Pérez Hernández

Tutor: Félix Galindo Soto

Curso 2024/2025

Resumen

La búsqueda de ejemplos y contraejemplos es una tarea fundamental en el estudio y comprensión de las matemáticas. Inspirado en el libro de G.R. Gelbaum y J.M.H. Olmsted, “Counterexamples in Analysis”, el objetivo de este trabajo es seleccionar y exponer algunos contraejemplos de relevancia en Análisis Matemático y que no se desarrollan en el Grado en Matemáticas.

Abstract

The search for examples and counterexamples is a fundamental task in the study and understanding of mathematics. Inspired by the book “Counterexamples in Analysis” by G.R. Gelbaum and J.M.H. Olmsted, the aim of this work is to select and present a number of relevant counterexamples in Mathematical Analysis that are not typically covered in undergraduate Mathematics degree.



Índice general

Introducción	5
1. Continuidad y derivabilidad	9
1.1. Función de Weierstrass	9
1.2. Funciones continuas y no monótonas	14
1.3. Otras funciones curiosas	20
2. Topología y medida	27
2.1. Curva de Lebesgue	27
2.2. Curva de Peano	33
2.3. Función de Cantor	38
2.3.1. Definición y propiedades	38
2.3.2. Otras funciones relacionadas	45
3. Integración	57
3.1. Teorema de derivación bajo el signo integral	57
3.2. Función de Thomae	60
3.2.1. Composición de funciones integrables no integrable	62
3.2.2. Otras funciones relacionadas	63
4. Análisis de Fourier	67
4.1. Una serie trigonométrica convergente que no es serie de Fourier	67
4.2. Una función que no es transformada de Fourier	73
Conclusiones	77
Bibliografía	79
Índice de figuras	81

Introducción

Los matemáticos constantemente nos planteamos preguntas de todo tipo, aunque la más común es, “¿es este resultado cierto?” o “¿se cumple siempre esta propiedad?”. Para demostrar una declaración así, deberíamos realizar una prueba formal considerando todos los casos, en cambio, para probar que es falsa, bastaría con encontrar un caso en el que no se cumpla. A ese caso es lo que denominamos *contraejemplo*.

En términos generales, los ejemplos en matemáticas son de dos tipos: ejemplos ilustrativos y contraejemplos; es decir, ejemplos que muestran por qué algo tiene sentido, y ejemplos que muestran por qué algo no tiene sentido. Podría afirmarse que todo ejemplo es un contraejemplo de algo, ya que contradice la afirmación de que tal ejemplo es imposible.

Aunque no nos demos cuenta, vivimos rodeados de contraejemplos. A todo el mundo le han dicho alguna vez la frase: “si estudias mucho, sacarás buenas notas”, cosa que en la mayoría de casos se debería de cumplir, pero siempre hay una excepción: el que se queda dormido el día del examen y llega tarde, el que se estudia todo menos una cosa y justo entra lo que no se ha estudiado, el que se equivoca en las cuentas.... Estos casos excepcionales son todos contraejemplos. Dejando lo cotidiano de lado, nuestro objetivo será centrarnos en los matemáticos. Todas las personas tienen en su cabeza, por ejemplo, que los números irracionales constituyen un conjunto inusual, en el que todas las operaciones son internas, es decir, la suma de irracionales produce un número irracional, o el producto de dos de ellos vuelve a serlo. No obstante, podemos comprobar que no es así poniendo varios contraejemplos:

$$\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2, \quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

De manera más formal, trabajaremos con una hipótesis de la forma “Todo elemento de un conjunto A está en el conjunto B ”, es decir, “ $A \subset B$ ”. Para demostrar que es falsa, tratamos de buscar un elemento de A que no esté en B , un contraejemplo.

Un caso conocido e ilustrador de contraejemplo es el de la función de Weierstrass. Este resultado que estudiaremos en el trabajo sirve para probar que es falso que toda función continua es diferenciable en algún punto de su dominio. Además de este, se tratará de dar una lista de contraejemplos significativos que no se ven, o son nombrados pero sin mayor desarrollo, en el Grado en Matemáticas. Recorreremos diversas áreas del análisis matemático exponiendo ejemplos y nos guiaremos entre ellos viendo que están relacionados, ya que alguna función definida en el transcurso de esta memoria, puede ser útil para construir otras que servirán como contraejemplos para más resultados.

Se dividirá el trabajo en cuatro capítulos, los cuales se ha intentado que abarquen la mayor parte del análisis matemático. En la primera parte definiremos una colección de funciones, las cuales analizaremos con detalle para ver que verifican ciertas propiedades. Estas pueden ser desde de que no son derivables en ningún punto, pasando por funciones que no son monótonas en ningún subintervalo de la recta real, hasta que llegemos a casos que ponen en duda el Teorema de Weierstrass.

Seguiremos con la construcción de curvas que llenan el espacio, como son la de Peano y la de Lebesgue, lo que nos conducirá a definir la famosa función de Cantor, que es continua pero no absolutamente continua, entre otras propiedades. Esta función nos será de gran utilidad a la hora de definir una función que es no creciente, pero en cambio, tiene derivada positiva en casi todo punto de su dominio.

En un tercer bloque se estudiarán diversos contraejemplos en el área de la integración. Se expone una función que parece no cumplir el teorema de derivación bajo el signo integral, y la función de Thomae. Esta última es muy famosa debido a que es discontinua en un conjunto denso, pero es una función integrable. Con dicha función construiremos varias más, las cuales sirven como contraejemplos de más hipótesis. Una de ellas, por ejemplo, probaremos que está acotada y no tiene extremos relativos, lo cual parece muy contradictorio.

En el cuarto y último apartado de esta memoria trabajaremos con el análisis de Fourier, mostrando contraejemplos sobre series y transformadas de Fourier. Veremos dos ejemplos de series trigonométricas que no pueden ser serie de Fourier de ninguna función integrable. Tal resultado nos servirá para definir una función que no es la transformada de Fourier de ninguna función.

Capítulo 1

Continuidad y derivabilidad

Durante el estudio del análisis matemático, casi siempre trabajamos con los conceptos de continuidad y derivabilidad en mente. A lo largo del Grado en Matemáticas, se suelen presentar ejemplos típicos en los que las funciones, a parte de ser continuas y derivables, cumplen otro tipo de propiedades intuitivas y deseables, como la monotonía o la existencia de derivadas en casi todos los puntos de su dominio. En este capítulo nos centraremos en exponer contraejemplos sobre este tipo de ideas e intentaremos relacionar las funciones que vamos obteniendo de forma que recorramos todos los puntos importantes sobre las propiedades de las funciones reales. Casos como el de la función de Weierstrass, que es continua en todo su dominio pero no derivable en ningún punto o funciones que no son monótonas en ningún intervalo, entre otras, son los que estudiaremos a continuación.

1.1. Función de Weierstrass

La función $|x|$ es continua en todo su dominio, pero no es derivable en un punto, en $x = 0$. Esto se debe, como es conocido, a que la función presenta un “pico” en el origen. También se puede ver comprobando el valor de las derivadas laterales cuando nos aproximamos a 0 por la izquierda y por la derecha, las cuales son -1 y 1 respectivamente, y como son distintos, no existe la derivada en el 0. Esta idea es la clave, y es la que vamos a usar para poder construir una función continua pero no derivable en ningún punto, ya que trataremos de que en cualquier punto que tomemos haya un “pico”.

El primer ejemplo de una función continua y no derivable en ningún punto es el que introdujo K. W. T. Weierstrass. El matemático alemán mostró en 1854 que era falsa la conjetura que circulaba en aquella época que afirmaba que las funciones continuas eran diferenciables salvo en puntos aislados. Salió a luz en el artículo *Zur Theorie der Abelschen Functionen* (“Sobre la teoría de las funciones abelianas”) en el Journal de Crelle, donde presentaba una descripción de su método para la representación de las funciones mediante series de potencias convergentes. La función se define sobre la recta real. Se puede encontrar en [8] y es la siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

donde a es un entero impar y b cumple que $0 < b < 1$ y $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

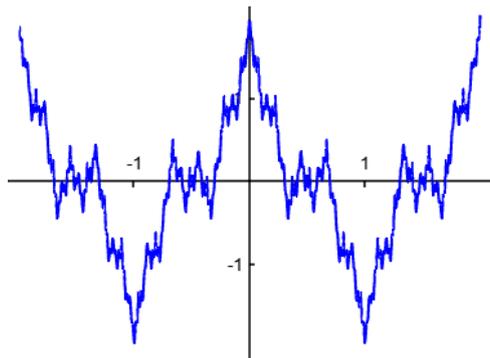


Figura 1.1: Función de Weierstrass

A continuación, para comprobar las hipótesis, enunciamos el siguiente resultado (ver [9]).

Teorema 1.1. *La función f , definida en (1.1), es continua y no derivable en ningún punto de \mathbb{R} .*

Demostración.

Para probar la continuidad de la función, comenzaremos por darnos cuenta de que los términos de la serie son

$$S_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x),$$

los cuales son continuos. Ahora, queremos mostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

es uniformemente convergente en \mathbb{R} . Para esto, vamos a usar el criterio M de Weierstrass sabiendo que

$$|b^n \cos(a^n \pi x)| \leq b^n,$$

en donde usamos la propiedad $|\cos(a^n \pi x)| \leq 1$ para todos los $x \in \mathbb{R}$. Como $0 < b < 1$, sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ es una serie geométrica convergente. Entonces, aplicando dicho criterio se llega a que la suma original converge uniformemente en \mathbb{R} , luego la función es continua.

Con la continuidad ya probada, falta la no diferenciabilidad. Para ello, tomamos un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y veamos que f no es derivable en x_0 . La idea es construir una sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que se aproxime a x_0 , de manera que no exista el límite del cociente incremental en x_0 . En otras palabras, para probar que la función es diferenciable en el punto x_0 tengo que ver si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Reescribiendo este límite para nuestro caso llegamos a que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n (\cos(a^n \pi (x_0 + h)) - \cos(a^n \pi x_0))}{h}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, construyo una partición de la recta real en intervalos de longitud $\frac{1}{a^m}$, de la forma $\left(\frac{k}{a^m} - \frac{1}{2a^m}, \frac{k}{a^m} + \frac{1}{2a^m} \right]$ con $k \in \mathbb{Z}$. De esta manera, existe un único número $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\alpha_m - \frac{1}{2} < a^m x_0 \leq \alpha_m + \frac{1}{2}.$$

Definimos ahora la sucesión $x_m := \frac{\alpha_m + 1}{a^m}$ y también $t_m := a^m x_0 - \alpha_m$. Notamos que claramente $-\frac{1}{2} < t_m \leq \frac{1}{2}$ y es fácil ver con la elección de α_m que se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$x_0 \leq \frac{\alpha_m + \frac{1}{2}}{a^m} < \frac{\alpha_m + 1}{a^m} = x_m.$$

Esto muestra que la sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ está siempre por encima de x_0 (se podría hacer también con una sucesión de la misma forma pero que quede por debajo siempre). Calculamos la diferencia:

$$0 \leq x_m - x_0 = \frac{\alpha_m + 1}{a^m} - \frac{\alpha_m + t_m}{a^m} = \frac{(\alpha_m + 1) - (\alpha_m + t_m)}{a^m} = \frac{1 - t_m}{a^m} \leq \frac{3}{2a^m}.$$

Dado que $a > 1$, el término $\frac{3}{2a^m} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Esto implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0$. Por lo tanto, la sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 . Ahora, usando el mismo m , para la sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n (\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0))}{x_m - x_0} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{b^n (\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0))}{x_m - x_0} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n (\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0))}{x_m - x_0} \\ &= \text{(I)} + \text{(II)}. \end{aligned}$$

Se ha dividido la suma anterior en dos términos; desde 0 hasta $m - 1$ y desde el término m hasta infinito. Para acotar el numerador, podemos aplicar el teorema del valor medio, que asegura la existencia de un c en el intervalo (x_0, x_m) tal que

$$\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0) = -\sin(a^n \pi c) a^n \pi (x_m - x_0).$$

Tomando el valor absoluto y como $|\sin(\cdot)| \leq 1$, se obtiene la cota

$$|\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0)| \leq a^n \pi |x_m - x_0|.$$

Usando la desigualdad triangular junto a este resultado, estamos ya en condiciones de proporcionar una acotación adecuada para (I). Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} |\text{(I)}| &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} \frac{b^n (\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0))}{x_m - x_0} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \frac{b^n |\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0)|}{|x_m - x_0|} \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\pi b^n a^n |x_m - x_0|}{|x_m - x_0|} = \sum_{n=0}^{m-1} \pi (ba)^n. \end{aligned}$$

Esta es una suma geométrica de la forma $\sum_{n=0}^{m-1} r^n = \frac{r^m - 1}{r - 1}$. Sustituyendo $r = ab$, obtenemos que

$$|(I)| \leq \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} < \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1}.$$

Por otro lado, para poder acotar (II) intentamos reescribir adecuadamente los términos que intervienen en dicha suma. En primer lugar, notamos que podemos hacer un cambio de índice en el sumatorio y escribirlo como

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{b^n (\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0))}{x_m - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+m} (\cos(a^{n+m} \pi x_m) - \cos(a^{n+m} \pi x_0))}{x_m - x_0}. \quad (1.2)$$

Si nos fijamos en el numerador, nos damos cuenta, tras sustituir el valor de x_m , de que

$$\begin{aligned} \cos(a^{m+n} \pi x_m) &= \cos\left(a^{m+n} \pi \frac{\alpha_m + 1}{a^m}\right) = \cos(a^n \pi (\alpha_m + 1)) = (-1)^{a^n (\alpha_m + 1)} \\ &= [(-1)^{a^n}]^{\alpha_m + 1} = (-1)^{\alpha_m + 1} = -(-1)^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

debido a que a es un entero impar, lo que implica que cualquier potencia suya también lo es. También se ha usado que $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ y se cumple que $\cos(N\pi) = (-1)^N$ para cada $N \in \mathbb{Z}$. Se repite ahora el razonamiento de manera análoga para el otro término del numerador, teniendo en cuenta la definición $x_0 = \frac{t_m + \alpha_m}{a^m}$ y se tiene que

$$\begin{aligned} \cos(a^{m+n} \pi x_0) &= \cos\left(a^{m+n} \pi \frac{t_m + \alpha_m}{a^m}\right) = \cos(a^n \pi (\alpha_m + t_m)) = \cos(a^n \pi \alpha_m + a^n \pi t_m) \\ &= \cos(a^n \pi \alpha_m) \cos(a^n \pi t_m) - \sin(a^n \pi \alpha_m) \sin(a^n \pi t_m) \\ &= ((-1)^{a^n})^{\alpha_m} \cos(a^n \pi t_m) - 0 = (-1)^{\alpha_m} \cos(a^n \pi t_m), \end{aligned}$$

en donde se ha aplicado la propiedad del coseno de la suma de dos ángulos y que $\sin(a^n \pi \alpha_m) = 0$ porque $\sin(N\pi) = 0$ para todo N entero y $a^n \alpha_m \in \mathbb{Z}$. Luego, sustituyendo estas expresiones en la suma de (1.2), obtenemos que

$$\begin{aligned} (II) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+m} (-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m} \cos(a^n \pi t_m))}{x_m - x_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+m} (-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m} \cos(a^n \pi t_m))}{\frac{1-t_m}{a^m}} \\ &= \frac{-(-1)^{\alpha_m} (ab)^m}{1-t_m} \sum_{n=0}^{\infty} b^n (1 + \cos(a^n \pi t_m)). \end{aligned}$$

Notamos que hemos podido sacar como factor común de la suma a los términos que no dependen de n . Ahora, para poder acotar este valor inferiormente como es nuestro objetivo, notamos que $\cos(a^n \pi t_m) \geq -1$, así que la serie es de términos no negativos, luego

será mayor o igual que cualquier término (tomaremos el primero para ahorrar cálculos):

$$\begin{aligned} |(\text{II})| &= \left| \frac{-(-1)^{\alpha_m} (ab)^m}{1 - t_m} \sum_{n=0}^{\infty} b^n (1 + \cos(a^n \pi t_m)) \right| \\ &= \frac{(ab)^m}{1 - t_m} \sum_{n=0}^{\infty} b^n (1 + \cos(a^n \pi t_m)) \\ &\geq \frac{1 + \cos(\pi t_m)}{1 - t_m} (ab)^m > \frac{1 + 0}{1 - (-1/2)} (ab)^m = \frac{2}{3} (ab)^m. \end{aligned}$$

En la última desigualdad se ha hecho lo más pequeño posible el numerador y el denominador lo más grande posible, y se ha usado el hecho de que $\cos(\pi t_m) \geq 0$ si $-\frac{1}{2} < t_m \leq \frac{1}{2}$. Volviendo a la expresión de partida del cociente incremental para el cálculo de la derivada, usando en este caso la segunda desigualdad triangular, tenemos que en módulo es

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n (\cos(a^n \pi x_m) - \cos(a^n \pi x_0))}{x_m - x_0} \right| = |(\text{I}) + (\text{II})| \\ &\geq |(\text{II})| - |(\text{I})| \geq \frac{2}{3} (ab)^m - \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} \right) (ab)^m. \end{aligned}$$

Como $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ (lo que hace al término que aparece en la cota positivo), haciendo tender $m \rightarrow \infty$, ya que es conocido que $x_m \rightarrow x_0$, y el factor $(ab)^m$ también tenderá a infinito, luego concluimos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} \right| = +\infty,$$

y por lo tanto, el límite del cociente incremental cuando x tiende hacia x_0 no es finito. De este hecho, y de que el punto x_0 se tomo de manera arbitraria, se deduce que la función f no es derivable en ningún punto de su dominio, lo que finaliza la demostración. \square

Observación 1.2.

La demostración original que propuso Weierstrass necesitaba la condición $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ya que su idea se basaba en construir dos sucesiones cuyos cocientes incrementales asociados estuviesen acotados inferiormente por $\frac{2}{3}$ para una de ellas, y para la otra superiormente por $-\frac{2}{3}$.

El matemático británico G. H. Hardy (1877-1947) demostró que, tomando $ab > 1$, la función de Weierstrass f , definida en (1.1), mantiene las propiedades de continuidad y no diferenciabilidad en ningún punto. También probó que tomando la función seno en vez de coseno en la definición de f no pierde las propiedades que tiene. No se incluirá dicha demostración en esta memoria debido a su complejidad técnica y a que no aporta un valor significativo adicional al estudio de la función de Weierstrass, no obstante, es posible encontrarla en [10].

1.2. Funciones continuas y no monótonas

Siempre que en matemáticas nos encontramos con una función continua, tenemos en nuestra cabeza, además de las funciones constantes, curvas que crecen y decrecen en su dominio.

En esta sección, daremos un ejemplo de una función que es continua en toda la recta real, pero no es monótona en ningún subintervalo de \mathbb{R} . Un caso así se da en la función de Weierstrass del apartado anterior, pero trataremos de construir otro contraejemplo interesante de este tipo de funciones. Hecho este comentario, pasamos a la definición de la función siguiendo los pasos que podemos encontrar en [8, pág. 29]. Sea la función g_1 definida como

$$g_1(x) = |x| \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}, \quad (1.3)$$

y se extiende por periodicidad sobre la recta real con periodo 1 de tal forma que

$$g_1(x + n) = g_1(x) \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

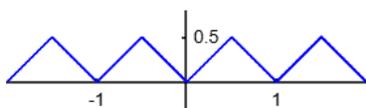


Figura 1.2: Función g_1

Esta función g_1 , definida en (1.3), realmente es la que mide la distancia de un punto $x \in \mathbb{R}$ al entero más cercano.

Lema 1.3. *La función g_1 , definida en (1.3), cumple que*

$$|g_1(x) - g_1(y)| \leq |x - y|,$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dividiremos la demostración en varios casos:

- Si $|x - y| \geq \frac{1}{2}$, como el rango de la función g_1 es justamente el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $g_1(t) \in [0, \frac{1}{2}]$, luego $|g_1(x) - g_1(y)| \leq \frac{1}{2}$. Entonces se tiene que

$$|g_1(x) - g_1(y)| \leq \frac{1}{2} \leq |x - y|.$$

- Si $|x - y| < \frac{1}{2}$, definimos el intervalo $I_k = [\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}]$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Volvemos ahora a distinguir casos en función de si ambos puntos pertenecen a un mismo intervalo I_k o a intervalos consecutivos:

- Si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x, y \in I_k$, trato de trasladar ambos puntos cerca del origen distinguiendo en dos casos según la paridad de k . Si k es par, escribo

$$x = x_0 + \frac{k}{2}, \quad y = y_0 + \frac{k}{2}, \quad \text{con } x_0, y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

De esta manera, por la periodicidad de g_1 y haciendo uso de la segunda desigualdad triangular, podemos calcular la diferencia de las imágenes en valor absoluto como

$$\begin{aligned} |g_1(x) - g_1(y)| &= \left| g_1\left(x_0 + \frac{k}{2}\right) - g_1\left(y_0 + \frac{k}{2}\right) \right| = |g_1(x_0) - g_1(y_0)| \\ &= ||x_0| - |y_0|| \leq |x_0 - y_0| = \left| x - \frac{k}{2} - y + \frac{k}{2} \right| = |x - y|. \end{aligned}$$

En cambio, si k es impar, desarrollo x e y como

$$x = x'_0 + \frac{k+1}{2}, \quad y = y'_0 + \frac{k+1}{2}, \quad \text{con } x'_0, y'_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Por un razonamiento análogo al del caso par, se deduce que también

$$|g_1(x) - g_1(y)| \leq |x - y|.$$

- Si no existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x, y \in I_k$ y $|x - y| < \frac{1}{2}$, entonces x e y están en intervalos consecutivos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $y \in I_k$ y $x \in I_{k+1}$. Por lo tanto, por el caso anterior, deducimos que

$$\begin{aligned} |g_1(x) - g_1(y)| &\leq \left| g_1(x) - g_1\left(\frac{k+1}{2}\right) \right| + \left| g_1\left(\frac{k+1}{2}\right) - g_1(y) \right| \\ &\leq \left| x - \frac{k+1}{2} \right| + \left| y - \frac{k+1}{2} \right| = \left(x - \frac{k+1}{2} \right) - \left(y - \frac{k+1}{2} \right) \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

Entonces, tras estudiar todas las posibilidades, hemos comprobado que siempre se cumple que $|g_1(x) - g_1(y)| \leq |x - y|$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$, en otras palabras, la función g_1 es Lipschitz continua con constante igual a 1, hecho que finaliza la demostración. \square

Teniendo en cuenta la función g_1 , vista en (1.3), se define para cada $n > 1$,

$$g_n(x) = 4^{-n+1} g_1(4^{n-1}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observamos que estas funciones son periódicas de periodo 4^{-n+1} , ya que dado $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned} g_n(x + 4^{-n+1}k) &= 4^{-n+1} g_1(4^{n-1}(x + 4^{-n+1}k)) = 4^{-n+1} g_1(4^{n-1}x + k) \\ &= 4^{-n+1} g_1(4^{n-1}x) = g_n(x). \end{aligned}$$

Notamos que se utiliza el hecho de que g_1 es 1–periódica en la penúltima igualdad. Es fácil ver, con la definición de g_1 , que las funciones g_n alcanzan su máximo valor en $\frac{1}{2}4^{-n+1}$. Entonces, ya podemos definir nuestra función objetivo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}. \quad (1.4)$$

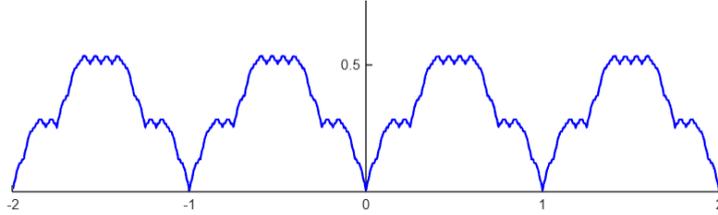


Figura 1.3: Función g

Teorema 1.4. *La función g , definida en (1.4), es continua en \mathbb{R} y no es monótona en ningún subintervalo de \mathbb{R} .*

Demostración.

Para probar la continuidad, se razona de la misma manera que en el caso de la función de Weierstrass. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función g_n es continua en \mathbb{R} y la cota $|g_n(x)| \leq \frac{1}{2} 4^{-n+1}$. Además, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

es de tipo geométrico con razón $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, luego convergente. Aplicando el criterio M de Weierstrass concluimos que la serie es uniformemente convergente en \mathbb{R} , luego continua en todo punto. Ahora, para cada par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$, aplicando el lema 1.3 se tiene que

$$|g_n(x) - g_n(y)| = 4^{-n+1} |g_1(4^{n-1}x) - g_1(4^{n-1}y)| \leq 4^{-n+1} \cdot 4^{n-1} |x - y| = |x - y|. \quad (1.5)$$

Como $g_1(x) = |x|$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y se extiende periódicamente con periodo 1, se tiene que $g_1(x) = 0$ si y solo si $x \in \mathbb{Z}$. Consideramos ahora el conjunto

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a = k4^{-m}, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Es sencillo probar que A es denso en \mathbb{R} . Tomamos un intervalo I de la recta real. Por la densidad de A , existen $m \in \mathbb{Z}_+$ y $k \in \mathbb{Z}$ de forma que si $a = k4^{-m}$, el intervalo $[a - h_m, a + h_m]$ está contenido en I , siendo $h_m = 4^{-2m-1}$. Así, para $n > m$ se tiene que $4^{n-1}a = k \cdot 4^{n-m-1} \in \mathbb{Z}$, y como g_1 es nula en los enteros, concluimos que $g_n(a) = 4^{-n+1}g_1(4^{n-1}a) = 0$ si $n > m$. Por lo tanto, la serie en a se reduce a la suma finita

$$g(a) = g_1(a) + \cdots + g_m(a).$$

Tratamos de evaluar ahora $g(a + h_m)$. Si $n > 2m + 1$, entonces tenemos que

$$4^{n-1}(a + h_m) = 4^{n-1}k4^{-m} + 4^{n-1} \cdot 4^{-2m-1} = k \cdot 4^{n-m-1} + 4^{n-2m-2},$$

que es un número entero. Esto implica que $g_1(4^{n-1}(a + h_m)) = 0$ para $n > 2m + 1$. Entonces

$$g_n(a + h_m) = 0 = g_n(a) \quad \text{para todo } n > 2m + 1.$$

De este modo, estamos en condiciones para calcular la diferencia

$$\begin{aligned} g(a + h_m) - g(a) &= \sum_{n=1}^{2m+1} [g_n(a + h_m) - g_n(a)] \\ &= [g_1(a + h_m) - g_1(a)] + \cdots + [g_m(a + h_m) - g_m(a)] \\ &\quad + g_{m+1}(a + h_m) + \cdots + g_{2m+1}(a + h_m), \end{aligned}$$

la cual dividimos en dos partes:

- Para $1 \leq n \leq m$ se tiene por (1.5) que

$$|g_n(a + h_m) - g_n(a)| \leq |a + h_m - a| = h_m,$$

lo que implica que $-h_m \leq g_n(a + h_m) - g_n(a)$. Entonces, la suma de estos términos la podemos acotar como

$$[g_1(a + h_m) - g_1(a)] + \cdots + [g_m(a + h_m) - g_m(a)] \geq -h_m - \cdots - h_m = -mh_m.$$

- Para $m + 1 \leq n \leq 2m + 1$, el valor 4^{n-m-1} es entero, luego por la periodicidad de g_1 tenemos que

$$g_1(4^{n-1}(a + h_m)) = g_1(k4^{n-m-1} + 4^{n-2m-2}) = g_1(4^{n-2m-2}).$$

Como $n \leq 2m + 1$, sabemos que $n - 2m - 2 \leq -1$, lo que implica que $0 \leq 4^{n-2m-2} \leq \frac{1}{4}$. La función en estos puntos se reduce a la identidad, por lo que

$$g_1(4^{n-2m-2}) = 4^{n-2m-2} = 4^{n-1}h_m.$$

Para calcular $g_n(a + h_m)$, basta con multiplicar este valor por 4^{-n+1} , y el resultado nos queda únicamente h_m . Así se obtiene la igualdad

$$\sum_{n=m+1}^{2m+1} g_n(a + h_m) = (m + 1)h_m.$$

Finalmente, llegamos a que

$$g(a + h_m) - g(a) \geq -mh_m + (m + 1)h_m = h_m > 0.$$

Análogamente, se obtiene que $g(a - h_m) - g(a) > 0$. Observamos que, tanto en $a + h_m$ como en $a - h_m$, la función toma valores estrictamente mayores que en a , es decir,

$$g(a + h_m) > g(a) \quad \text{y} \quad g(a - h_m) > g(a).$$

Este comportamiento muestra que la función no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente en I , ya que una función monótona solo podría aumentar o disminuir, pero no hacer ambas cosas de manera local por lo que g no es monótona en ningún intervalo de \mathbb{R} . \square

Para concluir este apartado, probaremos la no diferenciabilidad de la función g , definida en (1.4), cuya demostración la adaptaremos para nuestro caso de la que se puede seguir de [1].

Teorema 1.5. *La función g , definida en (1.4), no es derivable en ningún punto de \mathbb{R} .*

Demostración.

Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Para $n \in \mathbb{N}$, $j_0 \in \mathbb{Z}$ defino los valores

$$u_n := \frac{j_0 - 1}{4^n}, \quad v_n := \frac{j_0}{4^n}.$$

de forma que $u_n \leq x \leq v_n$, $u_n < v_n$. Notamos también que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = 0$. Para probar que g no es derivable en x , analizamos el cociente incremental

$$\frac{g(v_n) - g(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(v_n) - g_k(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_1(4^{k-1}v_n) - g_1(4^{k-1}u_n)}{4^{k-1}(v_n - u_n)}, \quad (1.6)$$

y mostraremos que el límite cuando n tiende a infinito no existe. Si $k \geq n + 1$, los valores $4^{k-1}u_n$ y $4^{k-1}v_n$ son enteros, por lo tanto al evaluar la función g_1 en estos puntos se anula. Luego la serie definida en (1.6) se reduce a una suma finita hasta el término n . Si $k \leq n$, es claro que g_k es lineal en los intervalos de la forma $[\frac{j-1}{4^k}, \frac{j}{4^k}]$, con $j \in \mathbb{Z}$. De esta manera, existe un $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{j-1}{4^k} < v_n = \frac{j_0}{4^n} \leq \frac{j}{4^k}.$$

Multiplicando por 4^n en la desigualdad anterior llegamos a

$$(j-1)4^{n-k} < j_0 \leq j4^{n-k}.$$

Como $n-k \geq 0$, $(j-1)4^{n-k}, j4^{n-k} \in \mathbb{Z}$, por lo que $4^{n-k}(j-1) \leq j_0 - 1$. Así se tiene que

$$\frac{j-1}{4^k} \leq \frac{j_0 - 1}{4^n} = u_n \leq v_n \leq \frac{j}{4^k}.$$

Entonces g_k es lineal en el intervalo $[u_n, v_n]$, y con pendiente ± 1 , denotémoslo por

$$\alpha_{n,k} = \frac{g_k(v_n) - g_k(u_n)}{v_n - u_n} = \pm 1.$$

Por lo tanto, el límite de la serie de (1.6) cuando n tiende a infinito se traduce en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{g_k(v_n) - g_k(u_n)}{v_n - u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}. \quad (1.7)$$

Veamos que este límite no converge. Denotamos por

$$b_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}, \quad \alpha_{n,k} \in \{+1, -1\}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir b_n como

$$b_n = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{p \text{ veces}} + \underbrace{(+1) + \cdots + (+1)}_{q \text{ veces}} = -p + q,$$

donde p es el número de términos que valen -1 y q es el de unos. Claramente $p + q = n$, y como $q = n - p$, llegamos a que

$$b_n = -p + (n - p) = n - 2p.$$

Deducimos por tanto que si n es par, entonces b_n ha de ser par, y si n es impar, b_n es impar. Por reducción al absurdo, suponemos que existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M,$$

y busquemos dos subsucesiones que nos lleven a una contradicción. Por definición de límite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $b_n = M$. Si consideramos la sucesión de índices pares $\{n_{2j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, entonces $b_{n_{2j}}$ siempre es un número par. Por lo tanto, en este caso, M necesariamente tiene que ser par. Si tomamos la sucesión de los índices impares, $\{n_{2j+1}\}_{j \in \mathbb{N}}$, obtenemos de forma análoga que M tiene que ser impar, lo que es absurdo pues no se verificaría la condición de Cauchy.

Luego no existe el límite en (1.7), lo cual nos lleva a la ecuación imposible

$$g'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}.$$

Concluimos por tanto que g no es derivable en x . □

Observación 1.6. *A las funciones de tipo similar al de g (definida en (1.4)), se las conoce como funciones de Takagi-van der Waerden. En 1903, el matemático japonés Teiji Takagi (1875–1960), uno de los pioneros del análisis matemático en Japón, introdujo la función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_1(2^n x),$$

la cual probó que es continua en su dominio pero no derivable en ningún punto. Más adelante, el matemático holandés van der Waerden (1903–1996), famoso por sus contribuciones al álgebra moderna, teoría de números y combinatoria, estudió y generalizó la función de Takagi, proponiendo una familia de funciones que dependen de un parámetro:

$$f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} g_1(r^n x),$$

donde $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, y g_1 es la función que mide la distancia desde x al entero más cercano, definida en (1.3) (ver [6]).

1.3. Otras funciones curiosas

En esta sección se estudian funciones con características particulares relacionadas con la derivabilidad y la existencia de extremos. Se analiza una función cuya derivada existe y está acotada en un intervalo cerrado, pero que no tiene extremos absolutos en dicho intervalo. También se presenta el ejemplo de una función derivable que tiene un extremo en un punto donde la derivada no cambia de signo de manera clara, es decir, en cualquier entorno del punto en el cual se alcanza un extremo, es posible encontrar valores con derivada positiva y negativa. Por último, se definirá una función que es continua e inyectiva, pero cuya inversa no es continua. Este hecho puede parecer contraintuitivo, ya que en el caso de funciones continuas definidas sobre intervalos de la recta real, esto no ocurre. Sin embargo, veremos que es posible construir un ejemplo así al aumentar la dimensión del espacio.

Estos contraejemplos muestran aspectos específicos del comportamiento de funciones diferenciables y la relevancia de las hipótesis en los teoremas importantes de análisis que relacionan la continuidad, la existencia de extremos o la de derivadas entre sí.

Una función cuya derivada existe y está acotada pero no tiene extremos absolutos en un intervalo cerrado

Este ejemplo lo podemos encontrar en [8, pág. 37]. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{-\frac{1}{4}x^2} \sin\left(\frac{8}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

La derivada de esta función es

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}x^2} \left[\left(4x^3 - \frac{1}{2}x^5\right) \sin\left(\frac{8}{x^3}\right) - 24 \cos\left(\frac{8}{x^3}\right) \right] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

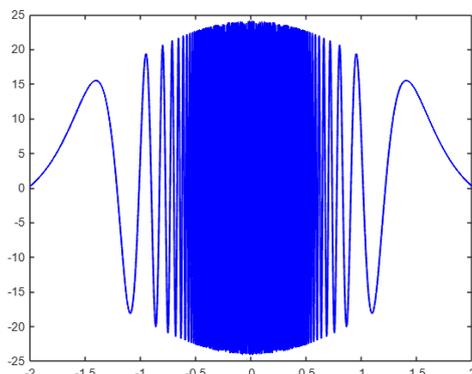


Figura 1.4: Función f' , definida en (1.9)

Veremos que esta función f' , definida en (1.9), está acotada en $[-1, 1]$ pero en cambio, no tiene extremos absolutos en dicho intervalo compacto. De esta manera, podría parecer

un contraejemplo al teorema de Weierstrass, que afirma que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y mínimo absoluto, pero no es así, debido a que f' tiene una discontinuidad en el origen. Antes de comenzar con la demostración de que no alcanza sus extremos absolutos, nos es necesario probar una desigualdad previa.

Lema 1.7. *Sea $a > 0$, entonces para cada $x > 0$ se cumple que*

$$ae^{-ax} < \frac{1 - e^{-ax}}{x} < a.$$

Demostración.

Veamos que $ae^{-ax} < \frac{1 - e^{-ax}}{x}$. Multiplicando los dos términos de la desigualdad por $x > 0$, se tiene que $axe^{-ax} < 1 - e^{-ax}$. Operando en esta nueva expresión deducimos que

$$ax + 1 < e^{ax}.$$

Consideramos la función $g(t) = e^{at} - at - 1$, con $t \in \mathbb{R}$. Notamos que $g(0) = 1 - 1 = 0$, luego si vemos que g es estrictamente creciente en $(0, \infty)$ tendríamos el resultado. La derivada de g es

$$g'(t) = ae^{at} - a = a(e^{at} - 1),$$

que se anula cuando $e^{at} = 1$, es decir, $t = 0$. Este punto no lo estamos considerando, en cambio, si tomamos un valor positivo y evaluamos la derivada en ese punto obtenemos que $g'(t) > 0$ si $t > 0$. Luego g es estrictamente creciente si $t > 0$.

Para comprobar que $\frac{1 - e^{-ax}}{x} < a$, basta con evaluar la función g en valores negativos de t . Se deduce por tanto que $g'(t) < 0$ si $t < 0$. Como $g(0) = 0$, g es estrictamente decreciente en $(\infty, 0)$ y continua en \mathbb{R} , se concluye que $g(t) > 0$ si $t < 0$. Luego, si evaluamos dicha función en el punto $-x < 0$, se obtiene que

$$g(-x) = e^{-ax} + ax - 1 > 0,$$

de donde se deduce la desigualdad restante. □

Teorema 1.8. *La función f' , definida en (1.9), está acotada y no tiene extremos absolutos en $[-1, 1]$.*

Demostración.

Dado $x \in [-1, 1]$, consideramos $0 < h = |x| \leq 1$. Por el lema 1.7, tomando $a = \frac{1}{4}$ y $x = h^2$ en dicha desigualdad, tenemos que

$$\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}h^2} < \frac{1 - e^{-\frac{1}{4}h^2}}{h^2} < \frac{1}{4}.$$

Multiplicando ambos lados por $-h^2 < 0$, se invierte el sentido de las desigualdades, y si posteriormente sumamos 1 obtenemos que

$$1 - \frac{1}{4}h^2e^{-\frac{1}{4}h^2} > e^{-\frac{1}{4}h^2} > 1 - \frac{1}{4}h^2.$$

Además, como $h > 0$, se deduce que $e^{-\frac{1}{4}h^2} < 1$, por lo que $0 < e^{-\frac{1}{4}h^2} < 1$. Por lo tanto, combinando las desigualdades se llega a que

$$0 < e^{-\frac{1}{4}h^2} < 1 - \frac{1}{4}h^2 e^{-\frac{1}{4}h^2}.$$

Para obtener una cota superior más explícita, acotamos $e^{-\frac{1}{4}h^2}$ por abajo. Consideremos la función $g(h) = e^{-\frac{1}{4}h^2}$ para $h \in [0, 1]$. Notamos que

$$g(1) = e^{-1/4} \approx 0,7788 > \frac{3}{4}$$

y $g(h)$ es decreciente en h , por lo que para todo $h \in [0, 1]$ se obtiene que

$$e^{-\frac{1}{4}h^2} \geq e^{-1/4} > \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$1 - \frac{1}{4}h^2 e^{-\frac{1}{4}h^2} < 1 - \frac{1}{4}h^2 \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{16}h^2.$$

Finalmente recopilando todo, para cada $h \in (0, 1]$ se cumple que

$$0 < e^{-\frac{1}{4}h^2} < 1 - \frac{1}{4}h^2 e^{-\frac{1}{4}h^2} < 1 - \frac{3}{16}h^2.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left| \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^5 \right) \sin \left(\frac{8}{x^3} \right) - 24 \cos \left(\frac{8}{x^3} \right) \right| &\leq \left| \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^5 \right) \sin \left(\frac{8}{x^3} \right) \right| + \left| 24 \cos \left(\frac{8}{x^3} \right) \right| \\ &\leq \left| 4x^3 - \frac{1}{2}x^5 \right| + 24 \leq 4|x|^3 + \frac{1}{2}|x|^5 + 24 \\ &= 4h^3 + \frac{1}{2}h^5 + 24 \leq 4h^3 + \frac{1}{2}h^3 + 24 \\ &= \frac{9}{2}h^3 + 24, \end{aligned}$$

donde se ha usado que $0 < h \leq 1$ implica $h^5 \leq h^3$. Luego si $0 < h \leq 1$, llego a que

$$\begin{aligned} |f'(x)| &< \left(1 - \frac{3}{16}h^2 \right) \left(24 + \frac{9}{2}h^3 \right) = 24 + \frac{9}{2}h^3 - \frac{9}{2}h^2 - \frac{27}{32}h^5 \\ &< 24 + \frac{9}{2}h^3 - \frac{9}{2}h^2 = 24 - \frac{9}{2}h^2(1 - h) \leq 24. \end{aligned}$$

Como acabamos de ver, la función f' no alcanza los valores $+24$ y -24 , en cambio, comprobemos que $\sup_{x \in [-1, 1]} f'(x) = 24$ y $\inf_{x \in [-1, 1]} f'(x) = -24$. Consideramos la sucesión

$$x_n := \left(\frac{8}{2n\pi} \right)^{1/3}.$$

Entonces, al evaluar el coseno y el seno en estos valores, tenemos que

$$\cos \left(\frac{8}{x_n^3} \right) = \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{y} \quad \sin \left(\frac{8}{x_n^3} \right) = \sin(2n\pi) = 0 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

luego la función f' en tales puntos vale

$$f'(x_n) = e^{-\frac{1}{4}x_n^2} (0 - 24 \cdot 1) = -24e^{-\frac{1}{4}x_n^2},$$

así que $f'(x_n) \rightarrow -24$ cuando n tiene a infinito. Análogamente, tomando la sucesión $y_n := \left(\frac{8}{2n\pi + \pi}\right)^{1/3}$, se cumple que $f'(y_n) \rightarrow 24$ cuando n tiene a infinito. Entonces se llega a que $\sup_{x \in [-1,1]} f'(x) = 24$ y $\inf_{x \in [-1,1]} f'(x) = -24$. Por lo tanto, en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, el recorrido de la función f tiene supremo igual a 24 e ínfimo igual a -24 , pero ninguno de estos números se admite como valor de f' . \square

Una función derivable que tiene un extremo en un punto donde la derivada no presenta un cambio de signo

Consideramos la función (ver [8, pág. 36])

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

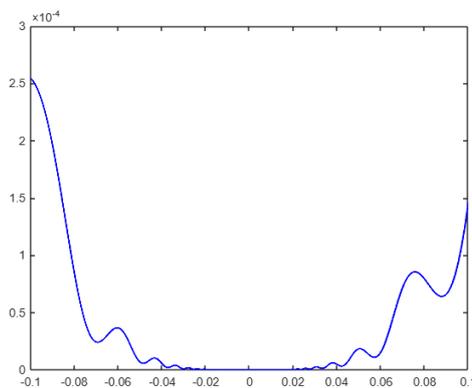


Figura 1.5: Función f , definida en (1.10)

Su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 \left[4x \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Esta definición es correcta, pues

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 0.$$

Además, dicha función presenta un mínimo absoluto en $x = 0$. Esto se debe a que $f(0) = 0$ y dado $x \in \mathbb{R}$, como $\sin(t) \leq 1$ para cada $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $\left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ es un valor

positivo, que multiplicado por x^4 , mantiene el mismo signo. Entonces llegamos a que $f(0) = 0 \leq f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que $x = 0$ se alcanza el mínimo absoluto.

Analicemos el signo de f' para puntos cerca del origen. Nuestro objetivo será encontrar dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que tiendan a cero y tal que $f'(x_n) > 0$ y $f'(y_n) < 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomemos en primera instancia $x_n := \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Como para un n suficientemente grande se cumple que $8x_n < 1$, y al evaluar la derivada en estos valores obtenemos que

$$f'(x_n) = 4x_n^3(2+0) - x_n^2 \cdot 1 = 8x_n^3 - x_n^2 = x_n^2(8x_n - 1) < 0.$$

Por otro lado, si escogemos $y_n := \frac{1}{\pi + 2\pi n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por un razonamiento similar llegamos a que

$$f'(y_n) = 4y_n^3(2+0) - y_n^2 \cdot (-1) = 8y_n^3 + y_n^2 > 0$$

para un n suficientemente grande. Esto significa que la función f , definida en (1.10), no es decreciente en $(-\delta, 0)$ y creciente en $(0, \delta)$ para ningún $\delta > 0$, que es lo que la intuición parece que nos dicta de un mínimo relativo, pese a tener un extremo absoluto en el origen.

Una función continua e inyectiva cuya inversa no es continua

Para ver este ejemplo nos fijaremos en [8, pág. 27]. Sabemos que una función real definida en un intervalo, inyectiva y continua, tiene inversa continua siempre, por lo que para tratar de encontrar un contraejemplo nos hace falta pensar en dimensiones superiores.

Nuestro ejemplo en este caso es una función s de variable real x , con valores complejos $z = s(x)$, donde la continuidad se define exactamente como en el caso de una función real de variable real, y donde el módulo del número complejo $z = (a, b)$ se define por $|z| = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sea por tanto la función s definida por

$$z = s(x) = (\cos x, \sin x), \quad 0 \leq x < 2\pi. \quad (1.12)$$

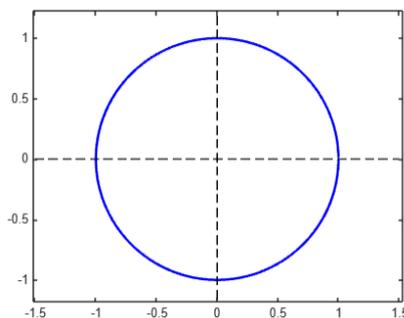


Figura 1.6: Función s

Esta función es simplemente la parametrización de la circunferencia \mathbb{S}^1 usando coordenadas polares. A cada valor x en el intervalo $[0, 2\pi)$ se le asocia un punto en la circunferencia unitaria. El intervalo $[0, 2\pi)$ es semiabierto, ya que incluye el 0 pero no el

2π . Esto es esencial para mantener la inyectividad porque si fuese cerrado se tendría que $s(0) = s(2\pi)$ y s no sería inyectiva. Es también claro que s es continua en $[0, 2\pi)$, por lo que nos faltaría comprobar que la inversa de s no es continua.

Teorema 1.9. *La inversa de la función s , definida en (1.12), no es continua en \mathbb{S}^1 .*

Demostración.

Tenemos que la inversa es $s^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 2\pi)$. Veamos que no es continua en el punto $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Por reducción al absurdo, supongamos que s^{-1} es continua en $(1, 0)$. Entonces, por el criterio secuencial, para cualquier sucesión $(x_n, y_n) \in \mathbb{S}^1$ tal que $(x_n, y_n) \rightarrow (1, 0)$ se debe cumplir que

$$s^{-1}(x_n, y_n) \rightarrow s^{-1}(1, 0) = 0.$$

Consideremos ahora la siguiente sucesión en \mathbb{S}^1 :

$$(x_n, y_n) = s(2\pi - \frac{1}{n}) = (\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n})).$$

Entonces se tiene que $(x_n, y_n) \rightarrow (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$, no obstante, $s^{-1}(x_n, y_n) = 2\pi - \frac{1}{n} \rightarrow 2\pi$. El valor $2\pi \notin [0, 2\pi)$, por lo que recopilando todo llegamos a que

$$s^{-1}(x_n, y_n) \rightarrow 2\pi \neq 0 = s^{-1}(1, 0).$$

Por lo tanto, la sucesión $s^{-1}(x_n, y_n)$ no converge a $s^{-1}(1, 0)$, a pesar de que $(x_n, y_n) \rightarrow (1, 0)$, por lo que la función inversa s^{-1} no es continua en $(1, 0)$. \square

Capítulo 2

Topología y medida

En el contexto de la topología y la teoría de la medida, existen funciones y construcciones que ponen en duda nuestros conocimientos sobre continuidad, derivabilidad o incluso la percepción de la dimensión. Estos contraejemplos no solo son curiosidades matemáticas, sino que también sirven como herramientas clave para entender los límites de muchos teoremas y la necesidad de condiciones precisas en sus hipótesis.

Esta sección se centra en el estudio de algunas de estas funciones, comenzando por la curva de Peano y la curva de Lebesgue, que muestran como una función continua puede recorrer cada punto de una región bidimensional, a pesar de tener como dominio un intervalo real. También se analiza la función de Cantor, continua pero no absolutamente continua, entre otras propiedades, cuya construcción se apoya en un conjunto peculiar y de medida nula como es el conjunto de Cantor. A partir de esta última seremos capaces de definir otras dos funciones con propiedades muy interesantes, una de ellas con derivada positiva en casi todo punto pero no creciente.

2.1. Curva de Lebesgue

A pesar de que pueda parecer una tarea complicada o incluso imposible, existen diversas maneras de construir una curva continua que recorra y cubra todo el cuadrado unidad. En esta sección daremos un ejemplo de una de ellas, la cual podemos encontrar en [12], la curva de Lebesgue. A comienzos del siglo XX, Henri Lebesgue, conocido por su teoría de la medida, introdujo una curva continua que llena el plano, siguiendo el trabajo de Peano (1890) y Hilbert (1891). Para poder definir esta curva, nos hace falta recordar, aunque ya es conocida del Grado en Matemáticas, la construcción del conjunto triádico de Cantor, como mostramos a continuación.

El objetivo es obtener un cerrado no vacío y sin puntos aislados de $[0, 1]$ que sea de medida nula. Para ello, se suprimen de $[0, 1]$ el tercio central y los tercios centrales sucesivos de los intervalos restantes. En el primer paso, consideramos $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Para el segundo, repetimos el razonamiento previo con los dos intervalos con los que nos quedamos, esto es, $\mathcal{C}_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Por recurrencia, podemos construir $\mathcal{C}_n = [0, \frac{1}{3^n}] \cup \dots \cup [\frac{3^n - 1}{3^n}, 1]$ de la misma manera. En otras palabras, \mathcal{C}_n es la unión de los 2^n intervalos compactos obtenidos al eliminar de los subintervalos que forman \mathcal{C}_{n-1} los tercios intermedios.

Definición 2.1. El conjunto de Cantor es $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$.



Figura 2.1: Tercera iteración de la construcción del conjunto de Cantor

Este proceso se puede encontrar en [3, pág. 68]. El conjunto \mathcal{C} tiene medida nula, y su complementario en $[0, 1]$ tiene medida 1. Además, es conocido del Grado en Matemáticas que todos sus puntos son de acumulación. Para obtener una manera de escribir el conjunto de Cantor, se pueden considerar las representaciones en base 3 de los números reales, con las que trabajaremos en varios apartados durante la redacción. Dado $x \in [0, 1]$, podemos escribirlo como

$$x = 0.x_1x_2x_3\dots_{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \quad \text{donde } x_n = 0, 1, 2.$$

Ejemplo 2.2. Dado el número decimal $0,4 \in [0, 1]$, para pasarlo a base 3, primero se multiplica por 3, obteniendo $0,4 \cdot 3 = 1,2$. La parte entera de este número resultante será el primer dígito del desarrollo en base 3. Ahora repetimos el razonamiento con $0,2$ y obtenemos $0,6$, así que el siguiente dígito será el 0. Razonando de la misma manera se llega a que la expresión en base 3 de $0,4$ es $0.\overline{1012}_{(3)}$.

Representando los elementos de $[0, 1]$ de esta manera, podemos comprobar que el conjunto de Cantor se puede expresar como

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0, 2\} \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición y propiedades

Teniendo esto en cuenta, Lebesgue definió primero la siguiente aplicación auxiliar (ver [12]):

$$\ell : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]^2$$

$$\ell(0.(2x_1)(2x_2)(2x_3)\dots_{(3)}) = (0.x_1x_3x_4\dots_{(2)}, 0.x_2x_4x_6\dots_{(2)}), \quad x_n \in \{0, 1\}. \quad (2.1)$$

Denotaremos por $_{(2)}$ y $_{(3)}$ a la expresión decimal en base dos y tres, respectivamente, de un número. La representación de los elementos del conjunto de Cantor de forma ternaria es única, lo que permite garantizar que esta función ℓ está bien definida.

Ejemplo 2.3. Calculemos la imagen de un punto de \mathcal{C} por esta aplicación. Si tomamos $x = \frac{2}{9} = 0,02_{(3)}$, entonces llegamos a que

$$\ell(x) = \ell(0,02_{(3)}) = (0_{(2)}, 0,1_{(2)}) = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Vamos a estudiar una serie de propiedades de esta función que acabamos de definir. Posteriormente extenderemos esta aplicación para que recorra todo el cuadrado unidad y este definida en $[0, 1]$, como es nuestro objetivo.

Lema 2.4. *La función ℓ , definida en (2.1), es sobreyectiva.*

Demostración.

Para demostrar que $\ell : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]^2$ es sobreyectiva, tomemos un punto arbitrario $(x, y) \in [0, 1]^2$. Escribimos sus expansiones binarias, las cuales denotamos como

$$x = 0.x_1x_3x_5 \dots_{(2)}, \quad y = 0.x_2x_4x_6 \dots_{(2)}.$$

Definimos $c \in \mathcal{C}$ con su expresión ternaria tal que $c = 0.(2x_1)(2x_2)(2x_3)(2x_4) \dots_{(3)}$. Por construcción, se satisface que $\ell(c) = (x, y)$. Así, todo (x, y) tiene una contraimagen en \mathcal{C} , lo que demuestra que ℓ es sobreyectiva. \square

Con la sobreyectividad ya probada, continuamos el estudio de sus propiedades y pasamos a la continuidad.

Lema 2.5. *La función ℓ , definida en (2.1), es continua en \mathcal{C} .*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y consideramos $\delta = \frac{1}{3^{2n}}$. Tomemos dos puntos $x, y \in \mathcal{C}$ con $|x - y| < \delta$. De esta forma, los primeros $2n$ dígitos de las descomposiciones ternarias de x e y deben de coincidir. Si no lo hiciesen, de la manera que hemos definido la descomposición ternaria de un punto, deducimos que existiría un $n_0 < 2n$ tal que $x_k = y_k$ si $k < n_0$ y $|x_{n_0} - y_{n_0}| = 2$. Luego

$$|x - y| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k - y_k}{3^k} \right| \geq \frac{|x_{n_0} - y_{n_0}|}{3^{n_0}} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{3^k} \geq \frac{2}{3^{n_0}} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

La suma geométrica la calculamos como sabemos y es

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 2 \cdot \frac{1}{3^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{3^{n_0+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^{n_0}}.$$

Por lo tanto, $|x - y| \geq \frac{2}{3^{n_0}} - \frac{1}{3^{n_0}} = \frac{1}{3^{n_0}}$, lo que es absurdo pues se tendría que

$$|x - y| \geq \frac{1}{3^{n_0}} > \delta,$$

pero habíamos supuesto que $|x - y| < \delta$.

Denotamos ahora $\ell(x) = (x_1, x_2)$ y $\ell(y) = (y_1, y_2)$. Por la construcción de ℓ y sabiendo que x e y coinciden en los primeros $2n$ dígitos de las descomposiciones ternarias, se deduce que los primeros n dígitos binarios de las coordenadas de $\ell(x)$ y $\ell(y)$ también son iguales.

Ahora si calculamos la diferencia en módulo entre las primeras coordenadas de $\ell(x)$ y $\ell(y)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |x_1 - y_1| &= \left| 0.x_{1,1}x_{1,2} \dots x_{1,n}x_{1,n+1} \dots_{(2)} - 0.y_{1,1}y_{1,2} \dots y_{1,n}y_{1,n+1} \dots_{(2)} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{1,k}}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{1,k}}{2^k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{1,k} - y_{1,k}}{2^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_{1,k} - y_{1,k}|}{2^k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x_{1,k} - y_{1,k}|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Podemos repetir el procedimiento para la segunda coordenada y obtenemos que también $|x_2 - y_2| \leq \frac{1}{2^n}$. Luego la distancia entre $\ell(x)$ y $\ell(y)$ se puede acotar por

$$\begin{aligned} \|\ell(x) - \ell(y)\| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ahora, se extiende linealmente la función ℓ , definida en (2.1), sobre las componentes conexas del conjunto $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$. Notamos que podemos denotar a cada una por (a_n, b_n) , con $a_n, b_n \in \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, por lo que estamos en condiciones de definir la siguiente aplicación (ver [12]):

$$\begin{aligned} \tilde{\ell} : [0, 1] &\rightarrow [0, 1]^2 \\ \tilde{\ell}(x) &= \begin{cases} \ell(x), & \text{si } x \in \mathcal{C}, \\ (\ell(b_n) - \ell(a_n)) \frac{x - a_n}{b_n - a_n} + \ell(a_n), & \text{si } x \in (a_n, b_n) \subset ([0, 1] \setminus \mathcal{C}). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esta función es la que genera la curva de Lebesgue, y nuestro objetivo será probar que es continua, no diferenciable en los puntos de \mathcal{C} y que la curva que proporciona recorre todo el cuadrado unidad.

Teorema 2.6. *La función $\tilde{\ell}$, definida en (2.2), es continua en $[0, 1]$.*

Demostración.

Es claro que es continua en los intervalos $(a_n, b_n) \subset ([0, 1] \setminus \mathcal{C})$ ya que es una función que une los puntos $\ell(a_n)$ y $\ell(b_n)$ con una línea recta en esas regiones. Por otro lado, gracias a la continuidad de ℓ probada anteriormente y a la definición de la función también podremos demostrar la continuidad en los puntos de \mathcal{C} .

Tomamos $x \in \mathcal{C}$ y sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 2.5, existe un $\delta > 0$ tal que $\|\ell(x) - \ell(y)\| < \varepsilon$ para cada $y \in \mathcal{C}$ cumpliendo que $|x - y| < \delta$. Si $y \notin \mathcal{C}$ y $|x - y| < \delta$, entonces existe un intervalo de los extraídos de la construcción del conjunto de Cantor (a_k, b_k) , $a_k, b_k \in \mathcal{C}$, tal que $y \in (a_k, b_k)$. Como todos los puntos de \mathcal{C} son de acumulación, podemos elegir a_k y b_k tan cercanos a x como queramos. Diferenciamos en dos casos según la naturaleza de x :

- Suponemos que x es un extremo de una componente conexa de $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$. Sin pérdida de generalidad pongamos $x = a_k$ (se razona análogamente si $x = b_k$). Por la definición de $\tilde{\ell}$, se obtiene que

$$\|\tilde{\ell}(y) - \tilde{\ell}(a_k)\| = \|\ell(b_k) - \ell(a_k)\| \left| \frac{y - a_k}{b_k - a_k} \right| \leq \|\ell(b_k) - \ell(a_k)\|.$$

Por la continuidad de ℓ en los puntos de \mathcal{C} , existe $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta$, tal que si $|b_k - a_k| < \delta_1$, entonces $\|\ell(b_k) - \ell(a_k)\| < \varepsilon$. Tomando $\delta' = \min\{\delta, \delta_1\}$, si $|x - y| < \delta' < \delta$, se cumple que $\|\tilde{\ell}(x) - \tilde{\ell}(y)\| < \varepsilon$.

- Veamos que ocurre si x no es extremo de ninguna componente conexa de $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$. En este caso, como $a_k < x < b_k$ y $a_k, b_k \in \mathcal{C}$, se tiene por la continuidad de ℓ que existe $\delta_2 > 0$, con $\delta_2 < \delta$, tal que si $|a_k - x| < \delta_2$ y $|b_k - x| < \delta_2$, entonces

$$\|\ell(a_k) - \ell(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\ell(b_k) - \ell(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De nuevo por la definición de $\tilde{\ell}$, se concluye que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\ell}(x) - \tilde{\ell}(y)\| &= \left\| \left(\ell(b_k) - \ell(a_k) \right) \frac{y - a_k}{b_k - a_k} + \ell(a_k) - \ell(x) \right\| \\ &= \left\| \ell(b_k) \frac{y - a_k}{b_k - a_k} + \ell(a_k) \left(1 - \frac{y - a_k}{b_k - a_k} \right) - \ell(x) \frac{y - a_k}{b_k - a_k} - \ell(x) \frac{b_k - y}{b_k - a_k} \right\| \\ &= \|\ell(b_k) - \ell(x)\| \left| \frac{y - a_k}{b_k - a_k} \right| + \|\ell(a_k) - \ell(x)\| \left| \frac{b_k - y}{b_k - a_k} \right| \\ &\leq \|\ell(b_k) - \ell(x)\| + \|\ell(a_k) - \ell(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Basta con tomar $\delta' = \min\{\delta, \delta_2\} \leq \delta$ para terminar este caso.

En ambos casos, $\tilde{\ell}$ es continua en x , por lo que finalizaría la prueba. \square

Teorema 2.7. *La función $\tilde{\ell}$, definida en (2.2), no es diferenciable en ningún punto de \mathcal{C} .*

Demostración.

Tomamos un punto x del conjunto de Cantor y consideramos otro que tenga todos los términos de la descomposición ternaria iguales pero el término $2N + 1$ distinto. Escribiéndolos en su expresión ternaria se tiene que

$$\begin{aligned} x &= 0.(2x_1)(2x_2) \dots (2x_{2N})(2x_{2N+1})(2x_{2N+2}) \dots_{(3)} \text{ con } x_n = 0, 1 \\ a_N &= 0.(2x_1)(2x_2) \dots (2x_{2N})(2y_{2N+1})(2x_{2N+2}) \dots_{(3)} \text{ con } x_n = 0, 1; y_{2N+1} = 0, 1. \end{aligned}$$

donde $x_{2N+1} = y_{2N+1} + 1 \pmod{2}$. Luego deducimos que $|x - a_N| = \frac{2}{3^{2N+1}}$. Si denotamos por $\tilde{\ell}_1$ la primera componente de $\tilde{\ell}$, entonces es claro que

$$|\tilde{\ell}_1(x) - \tilde{\ell}_1(a_N)| = \frac{|x_{2N+1} - y_{2N+1}|}{2^{N+1}} = \frac{1}{2^{N+1}}.$$

Por lo tanto, si consideramos el cociente incremental llegamos a

$$\left| \frac{\tilde{\ell}_1(x) - \tilde{\ell}_1(a_N)}{x - a_N} \right| = \frac{\frac{1}{2^{N+1}}}{\frac{2}{3^{2N+1}}} = \frac{3 \cdot 3^{2N}}{4 \cdot 2^N} = \frac{3}{4} \left(\frac{9}{2} \right)^N \rightarrow \infty.$$

Esto demuestra que $\tilde{\ell}_1$ no es diferenciable en ningún punto de la curva. Se podría razonar también de la misma manera con la segunda componente de $\tilde{\ell}$ y se concluye el resultado. \square

Hemos conseguido demostrar por tanto que la aplicación $\tilde{\ell}$, definida en (2.2), genera una curva continua y no diferenciable en los puntos del conjunto de Cantor. Además, debido a su sobreyectividad, podemos concluir que la imagen del intervalo $[0, 1]$ por $\tilde{\ell}$ recorre todos los puntos del cuadrado unidad $[0, 1]^2$. Veamos ahora cómo se puede visualizar ese recorrido mediante dos procedimientos.

Observación 2.8.

Es posible realizar una construcción geométrica de la curva de Lebesgue de forma recursiva dividiendo el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en 2^{n+1} partes iguales en la iteración n . En la primera iteración se divide el cuadrado unidad en 4 más pequeños, y se define una curva que recorre los cuatro centros de los cuadrados pequeños en forma de “N”, tal y como se muestra en la figura a continuación:

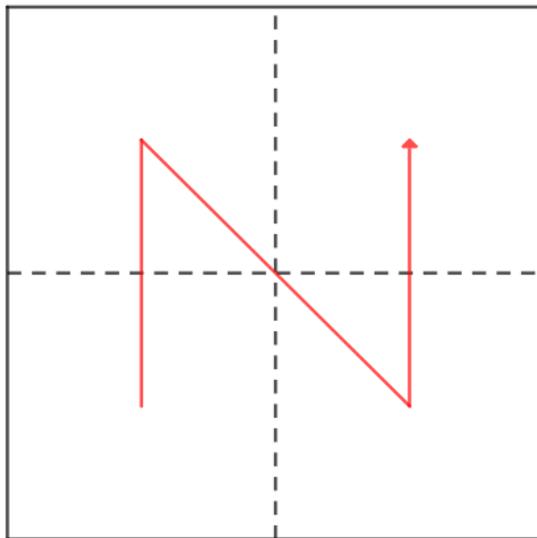


Figura 2.2: Primera iteración de la construcción geométrica de la curva de Lebesgue

Este proceso se puede encontrar en [17, pág. 79]. En el límite, esta construcción iterativa define la curva de Lebesgue $\tilde{\ell}$, definida en (2.2), que es continua y recorre todos los puntos del cuadrado unitario, llenándolo completamente. También es posible realizar una construcción por poligonales que converge justamente a $\tilde{\ell}$, la cual podemos encontrar en [17, pág. 81], pero no se tratarán estos aspectos en el trabajo por su complejidad técnica.

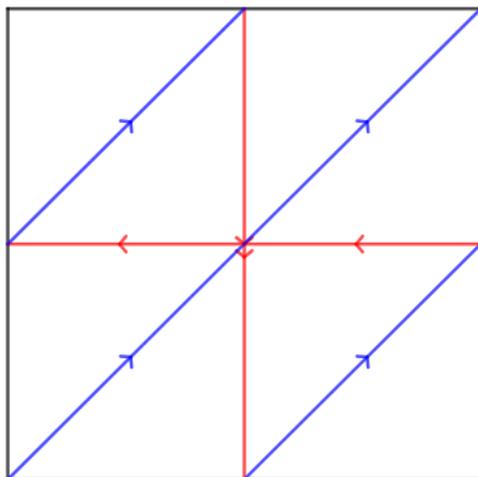


Figura 2.3: Primera iteración de la construcción por curvas poligonales de la curva de Lebesgue

2.2. Curva de Peano

Giuseppe Peano (1858–1932) fue un matemático italiano famoso por sus aportaciones a la lógica simbólica, el análisis matemático y su estudio sobre la axiomática de los números naturales. Entre sus trabajos más notables se encuentra la conocida formulación de los axiomas que llevan su nombre, los axiomas de Peano, fundamentales para la aritmética de la era moderna. También fue pionero en la construcción de una curva continua que llena el plano, conocida como la curva de Peano, desafiando las nociones tradicionales que se divulgaban en aquella época de dimensión y continuidad, y abriendo paso al estudio de objetos con estructura fractal. Nos centraremos en esta sección en el estudio de esta última por su importancia y curioso diseño (ver [17, pág. 31]).

Definición y propiedades

A continuación, comenzaremos con la definición de la función (ver [17, pág.32]). Sea x un elemento de $[0, 1]$ expresado en base 3 como $x = 0.x_1x_2x_3 \dots_{(3)}$. Definimos un operador k sobre los dígitos ternarios $x_j \in \{0, 1, 2\}$ de x como

$$k(x_j) = 2 - x_j, \quad \text{para } x_j = 0, 1, 2. \quad (2.3)$$

Este operador invierte el 0 y el 2, es decir, $k(0) = 2$, $k(1) = 1$, y $k(2) = 0$. Más generalmente, denotamos por k^n la iteración n -ésima del operador k , por tanto se tiene que $k^n(x) = \underbrace{k \circ k \circ \dots \circ k}_{n \text{ veces}}(x)$. Si consideramos como id al operador identidad, observamos que

$$k^n = \begin{cases} id & \text{si } n \text{ es par,} \\ k & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Peano definió por tanto la aplicación $p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ como

$$\begin{aligned} p(x) &= p(0.x_1x_2x_3 \dots_{(3)}) \\ &= (0.x_1(k^{x_2}x_3)(k^{x_2+x_4}x_5) \dots_{(3)}, 0.(k^{x_1}x_2)(k^{x_1+x_3}x_4)(k^{x_1+x_3+x_5}x_6) \dots_{(3)}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cada coordenada se obtiene mediante transformaciones sucesivas de los dígitos x_j , usando composiciones del operador k . La primera coordenada utiliza los dígitos de las posiciones impares x_1, x_3, x_5, \dots y la segunda coordenada las posiciones pares x_2, x_4, x_6, \dots modificados según una combinación de los anteriores.

Sabemos que la representación ternaria de un número puede no ser única, pues todo número cuya expresión ternaria sea finita puede escribirse también de manera infinita con una cantidad infinita de doses al final. Así, se tiene que

$$x = 0.x_1x_2x_3 \dots x_n t_{(3)} = 0, x_1x_2x_3 \dots x_n (t-1) 22 \dots_{(3)}, \quad x_n = 0, 1 \text{ o } 2; t = 1 \text{ o } 2,$$

donde denoto por t al último elemento no nulo de la descomposición ternaria finita. Veamos por tanto que la función p (definida en (2.4)) está bien definida asegurándonos de que el valor de $p(x)$ es independiente de la representación en base 3 de x . Sea $x = 0.x_1x_2x_3 \dots x_n t_{(3)}$ y suponemos primero que $n = 2m$. Definimos para abreviar en la primera componente p_1 , la suma $\tau = x_2 + x_4 + \dots + x_{2m}$. Entonces descomponiendo en casos según la paridad de τ , podemos escribir que

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 0.x_1(k^{x_2}x_3)(k^{x_2+x_4}x_5) \dots (k^\tau t)(k^\tau 0)(k^\tau 0) \dots_{(3)} \\ &= \begin{cases} 0.x_1(k^{x_2}x_3)(k^{x_2+x_4}x_5) \dots t_{(3)} & \text{si } \tau \text{ es par,} \\ 0.x_1(k^{x_2}x_3) \dots (k^{\tau-x_n}x_{2n-1})(3-t)_{(3)} & \text{si } \tau \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Para la forma infinita equivalente se llega a

$$\begin{aligned} p_1(0.x_1x_2x_3 \dots x_{2m}(t-1)22 \dots_{(3)}) &= 0.x_1(k^{x_2}x_3) \dots (k^\tau(t-1))(k^{\tau+2}2)(k^{\tau+4}2) \dots_{(3)} \\ &= \begin{cases} 0.x_1(k^{x_2}x_3)(k^{x_2+x_4}x_5) \dots (t-1)22 \dots_{(3)} & \text{si } \tau \text{ es par,} \\ 0.x_1(k^{x_2}x_3)(k^{x_2+x_4}x_5) \dots (2-(t-1))_{(3)} & \text{si } \tau \text{ es impar,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.x_1(k^{x_2}x_3) \dots t_{(3)} & \text{si } \tau \text{ es par,} \\ 0.x_1(k^{x_2}x_3)(k^{x_2+x_4}x_5) \dots (3-t)_{(3)} & \text{si } \tau \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora consideramos el caso impar $n = 2m+1$. Consideramos ahora $\tau' = x_2 + x_4 + \dots + x_{2m}$ y se tiene que

$$p_1(x) = 0.x_1(k^{x_2}x_3)(k^{x_2+x_4}x_5) \dots (k^{\tau'}x_{2m+1})_{(3)}.$$

La extensión infinita $x = 0.x_1x_2 \dots x_{2m+1}(t-1)22 \dots_{(3)}$ produce el mismo valor para $p_1(x)$, como en el caso par. La segunda componente $p_2(x)$ se define usando los dígitos alternos

$$p_2(x) = 0.(k^{x_1}x_2)(k^{x_1+x_3}x_4)(k^{x_1+x_3+x_5}x_6) \dots_{(3)},$$

y si n es impar, se tiene de la misma manera que

$$p_2(x) = 0.(k^{x_1}x_2)(k^{x_1+x_3}x_4) \dots (k^{x_1+x_3+\dots+x_{2m-1}}x_{2m+1})_{(3)}.$$

Esto asegura que la función p está bien definida y es independiente de la representación elegida de x en base 3.

Vamos a estudiar ahora una serie de propiedades de esta curva, las cuales englobaremos en los siguientes resultados.

Proposición 2.9. *La aplicación p , definida en (2.4), es sobreyectiva.*

Demostración.

Sea (x, y) un punto del cuadrado unidad arbitrario representado en base ternaria como

$$(x, y) = (0.x_1x_2x_3 \dots_{(3)}, 0.y_1y_2y_3 \dots_{(3)}) \in [0, 1]^2.$$

Queremos demostrar que existe un punto $t = 0.t_1t_2t_3 \dots_{(3)} \in [0, 1]$ tal que $p(t) = (x, y)$. Dado $n \geq 1$ se cumple que

$$x_n = k^{t_0+t_2+t_4+\dots+t_{2n-2}}(t_{2n-1}), \quad y_n = k^{t_1+t_3+t_5+\dots+t_{2n-1}}(t_{2n}),$$

donde $k(t_j) = 2 - t_j$ es el operador definido en (2.3). Entonces, a partir de las secuencias x_n e y_n , podemos recuperar por un proceso de inducción los dígitos de t . Para t_1 , comparando los dígitos de x, y con los valores de la imagen de t obtenemos que $t_1 = x_1$. De la misma manera, como ya es conocido el valor de t_1 , nos es posible calcular $t_2 = k^{t_1}y_1$. Razonando por inducción, si sabemos los valores desde t_1 hasta t_{2n-2} tenemos que

$$t_{2n-1} = k^{t_2+\dots+t_{2n-2}}(x_n), \quad t_{2n} = k^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}(y_n).$$

Esto determina completamente el punto t , con lo cual se concluye que p es sobreyectiva. \square

Proposición 2.10. *Si denotamos por p_1 y p_2 las componentes de la aplicación p , definida en (2.4), se cumple que*

$$p_2(x) = 3p_1\left(\frac{x}{3}\right)$$

para cada $x \in [0, 1]$.

Demostración.

Sea $x = 0.x_1x_2x_3 \dots_{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in [0, 1]$, con $x_n \in \{0, 1, 2\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si dividimos este número entre 3 tenemos que

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x_{m-1}}{3^m},$$

donde $m = n + 1$, lo que implica que $\frac{x}{3} = 0,0x_1x_2x_3 \dots_{(3)}$. Aplicando p_1 llegamos a que

$$p_1\left(\frac{x}{3}\right) = 0,0(3^{x_1}x_2) (3^{x_1+x_3}x_4) (3^{x_1+x_3+x_5}x_6) \dots_{(3)}.$$

Por el mismo razonamiento de antes, si multiplicamos un número en expresión ternaria por 3, realmente lo que estamos haciendo es mover sus componentes hacia la izquierda una unidad, luego

$$\begin{aligned} 3p_1\left(\frac{x}{3}\right) &= 3 \cdot (0,0(3^{x_1}x_2) (3^{x_1+x_3}x_4) (3^{x_1+x_3+x_5}x_6) \dots_{(3)}) \\ &= 0.(3^{x_1}x_2) (3^{x_1+x_3}x_4) (3^{x_1+x_3+x_5}x_6) \dots_{(3)} = p_2(x), \end{aligned}$$

con lo que finalizaríamos la prueba. \square

Teorema 2.11. *La aplicación p , definida en (2.4), es continua en $[0, 1]$.*

Demostración.

Para probar que p es continua hace falta ver que son continuas sus componentes. Primero demostraremos que p_1 es continua por la derecha en todo $x \in [0, 1)$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Tomamos $x_0 = 0.x_1x_2x_3 \dots x_{2n}x_{2n+1} \dots_{(3)}$, donde se elige la representación ternaria de x_0 que no tiene infinitos doses a partir de un término en adelante. Definimos $\delta = \frac{1}{3^{2n}} - 0,00 \dots 0x_{2n+1}x_{2n+2} \dots_{(3)} > 0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} x_0 + \delta &= 0.x_1x_2x_3 \dots x_{2n}x_{2n+1} \dots_{(3)} + \frac{1}{3^{2n}} - 0,00 \dots x_{2n+1}x_{2n+2} \dots_{(3)} \\ &= 0.x_1x_2x_3 \dots x_{2n}22 \dots_{(3)}. \end{aligned}$$

Así, cualquier $x \in [x_0, x_0 + \delta)$ tiene los mismos primeros $2n$ dígitos que x_0 en la expansión ternaria, por lo que podemos escribir $x = 0.x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_{2n}t_{2n+1} \dots_{(3)}$ con $t_i \in \{0, 1, 2\}$ para cada $i \geq 2n + 1$. De esta forma, notamos que también se cumple que los n primeros dígitos de $p_1(x)$ y $p_1(x_0)$ han de coincidir. Si denotamos $\tau = x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{2n}$ y calculamos la diferencia de las imágenes en módulo obtenemos que

$$\begin{aligned} |p_1(x) - p_1(x_0)| &= |0.x_1(k^{x_2}x_3) \dots (k^\tau t_{2n+1}) \dots_{(3)} - 0.x_1(k^{x_2}x_3) \dots (k^\tau x_{2n+1}) \dots_{(3)}| \\ &\leq \frac{|k^\tau t_{2n+1} - k^\tau x_{2n+1}|}{3^{n+1}} + \frac{|k^{\tau+t_{2n+2}}t_{2n+3} - k^{\tau+x_{2n+2}}x_{2n+3}|}{3^{n+2}} + \dots \\ &\leq \left(\frac{2}{3^{n+1}}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \frac{1}{3^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Para mostrar que p_1 es continua por la izquierda en $(0, 1]$, consideramos la representación ternaria de x_0 que no es finita, y sea $\delta = 0,00 \dots 0x_{2n+1}x_{2n+2} \dots_{(3)} > 0$.

$$\begin{aligned} x_0 - \delta &= 0.x_1x_2x_3 \dots x_{2n}x_{2n+1} \dots_{(3)} - 0,00 \dots 0x_{2n+1}x_{2n+2} \dots_{(3)} \\ &= 0.x_1x_2x_3 \dots x_{2n}(3). \end{aligned}$$

Vemos al igual que antes que para que x esté en $(x_0 - \delta, x_0]$, su representación ternaria debe coincidir con la de x en los primeros $2n$ dígitos, luego se repite de manera similar el razonamiento para el caso de la continuidad por la derecha y se demuestra que p_1 es continua por la izquierda en $(0, 1]$. Ya que p_1 es continua por la derecha en $[0, 1)$ y continua por la izquierda en $(0, 1]$, es continua en $[0, 1]$. La continuidad de p_2 sigue de la proposición 2.10, ya que $p_2(x) = 3p_1\left(\frac{x}{3}\right)$. Luego concluimos que p es continua. \square

Teorema 2.12. *La aplicación p , definida en (2.4), no es diferenciable en ningún punto de $[0, 1]$.*

Demostración.

Sea $x = 0.x_1x_2x_3 \dots x_{2n}x_{2n+1}x_{2n+2} \dots_{(3)} \in [0, 1]$, y definimos

$$a_n = 0.x_1x_2x_3 \dots x_{2n}y_{2n+1}x_{2n+2} \dots_{(3)},$$

donde $y_{2n+1} = x_{2n+1} + 1 \pmod{2}$. Por un razonamiento similar al del lema 2.5, sabemos que $|x - a_n| = \frac{1}{3^{2n+1}}$. De la definición de p , deducimos que $p_1(x)$ y $p_1(a_n)$ solo difieren en la posición del desarrollo ternario $n + 1$, por tanto,

$$|p_1(x) - p_1(a_n)| = \frac{|k^{x_2+\dots+x_{2n}}x_{2n+1} - k^{x_2+\dots+x_{2n}}y_{2n+1}|}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Luego, si calculamos el cociente incremental obtenemos que

$$\left| \frac{p_1(x) - p_1(a_n)}{x - a_n} \right| = \frac{|p_1(x) - p_1(a_n)|}{|x - a_n|} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^{2n+1}}} = 3^n \rightarrow \infty,$$

lo que garantiza que p_1 no es diferenciable en ningún punto de $[0, 1]$. La no diferenciabilidad de p_2 se deduce recordando que, por la proposición 2.10, $p_2(x) = 3p_1\left(\frac{x}{3}\right)$. \square

Nota 2.13. Comparándola con la curva de Lebesgue, nos damos cuenta de que la función \tilde{l} (definida en (2.2)) era solamente no diferenciable en los puntos del conjunto de Cantor, mientras que la curva de Peano ahora construida no es diferenciable en ningún punto de $[0, 1]$. Las propiedades de continuidad y el hecho de recorrer todo el cuadrado unidad se cumplen en ambas curvas.

Construcción geométrica

Como aparece en los apéndices de la asignatura de Análisis Matemático del Grado, la curva de Peano se obtiene como límite uniforme de curvas continuas $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, las cuales mostramos como se construyen a continuación.

El primer paso consiste en imaginar un camino recto que comienza en la esquina inferior izquierda del cuadrado unidad, el punto $(0, 0)$, y termina en el punto $(1, 1)$. Para seguir, se divide el cuadrado unidad en 9 cuadrados pequeños iguales, formando una cuadrícula 3×3 . De nuevo comenzando en el $(0, 0)$, se van recorriendo estos cuadrados pequeños uniendo el vértice al que se ha llegado con el vértice opuesto del cuadrado adyacente encima o debajo, o a la derecha en caso de que el vértice de partida se encuentre el borde del cuadrado inicial, acabando como en la primera iteración en $(1, 1)$. Cada uno de los 9 tramos de esta trayectoria se parametriza utilizando una función afín en un intervalo de la forma $\left[\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}\right]$, con $k = 0, \dots, 8$.

Este proceso se repite recursivamente y, de forma general, en el paso n -ésimo, la curva γ_n consta de 9^n segmentos, que son diagonales de otros cuadrados semejantes al inicial, y con longitud $\frac{1}{3^n}$. Para construir el paso n -ésimo a partir de γ_n , se vuelve dividir cada cuadrado que obteníamos en el paso n en 9 cuadrados mas pequeños. Así, se construye la poligonal de 9 lados cuyos puntos inicial y final son los mismos que los del paso n -ésimo (ver figura 2.4).

De la misma manera que para la primera iteración de la curva, se parametriza γ_n por una función afín en un intervalo de la forma $\left[\frac{k}{9^n}, \frac{k+1}{9^n}\right]$, con $k = 0, \dots, 9^n - 1$. Si t está un intervalo de esta forma, $\gamma_n(t)$ y $\gamma_{n+1}(t)$ se encuentran en el mismo cuadrado.

Sabemos que el lado de tal cuadrado mide $\frac{1}{3^n}$, luego

$$\|\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{3^n} \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

Este hecho implica la convergencia uniforme. La función límite γ es continua, por lo que su imagen $\gamma([0, 1])$ es compacta, luego cerrada en el plano. Al mismo tiempo, también deducimos que $\gamma([0, 1])$ es denso en el cuadrado unidad, luego han de coincidir.

Para ver que esta construcción iterativa converge a la función p , definida en (2.4), haría falta una comprobación tediosa, la cual se sale de los contenidos de este trabajo (ver [17, pág. 36]).

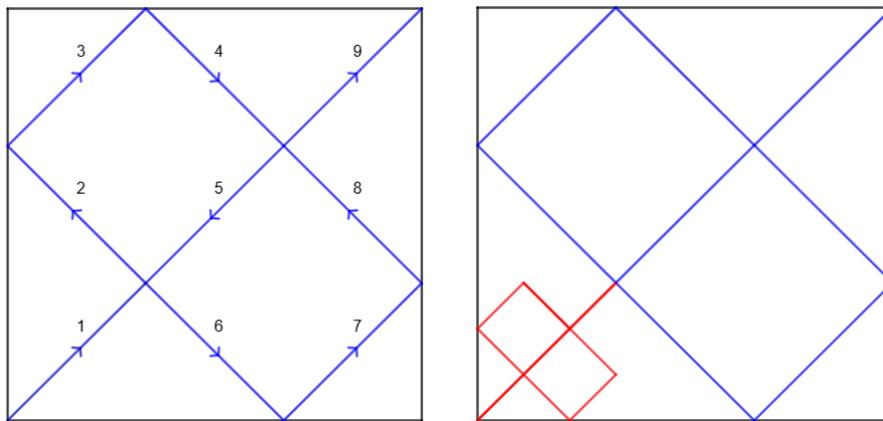


Figura 2.4: Primera y segunda iteración de la construcción de la curva de Peano

2.3. Función de Cantor

Introducida por Georg Cantor (1845–1918), la función de Cantor, también conocida como “*la escalera del diablo*”, se convirtió en un contraejemplo a la idea de que toda función continua y monótona es absolutamente continua o derivable en todos los puntos. Su estudio impulsó el desarrollo de la teoría de la medida y la integración de Lebesgue en el siglo XX. Más adelante, su estructura la vinculó con la teoría de fractales y los sistemas dinámicos, consolidándola como un objeto clave en análisis matemático y topología (ver [19]).

2.3.1. Definición y propiedades

La construcción de esta función, como su propio nombre indica, se basa en el conjunto de Cantor, ya visto en anteriores secciones. Para dar una expresión de la curva, necesitamos recordar la definición de dicho conjunto basada en la idea de escribir sus elementos en base 3.

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0, 2\} \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Teniendo esto en cuenta, y con la estructura del conjunto de Cantor en mente, comenzamos con la definición de la función primero sobre \mathcal{C} (ver [14] o [8]). Sea

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{C} &\rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}, \\ \phi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}, \text{ con } y_n = \frac{x_n}{2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Notamos que es muy semejante a la que dimos para la curva de Lebesgue, aunque en este caso con llegada en una dimensión. Es decir, si x es un elemento de \mathcal{C} con su expresión en base 3 de la forma $0.x_1x_2x_3\dots_{(3)}$, entonces su imagen será $y = \phi(x)$ cuya expresión en base 2 es $0.y_1y_2y_3\dots_{(2)}$, siendo $y_n = \frac{x_n}{2}$.

Ejemplo 2.14. Si $x = \frac{8}{9} \in \mathcal{C}$, se reescribe en base 3 como $0,22_{(3)}$. Así,

$$\phi(x) = \phi(0,22_{(3)}) = 0,11_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Lema 2.15. La función ϕ , definida en (2.5), es monótona creciente en los puntos de \mathcal{C} .

Demostración.

Sean x y $x' \in \mathcal{C}$, con $x < x'$. Veamos que $\phi(x) \leq \phi(x')$. Podemos expresar ambos números en base 3 como

$$\begin{aligned} x &= 0.x_1x_2x_3\dots_{(3)} \quad x_i \in \{0, 2\}, \\ x' &= 0.x'_1x'_2x'_3\dots_{(3)} \quad x'_i \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

Como $x < x'$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x'_n$ si $n < n_0$ y $x_{n_0} = 0 < 2 = x'_{n_0}$. Calculando sus imágenes se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{y_n}{2^n} + \frac{0}{2^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} \quad \text{con } y_n = \frac{x_n}{2} \in \{0, 1\}, \\ \phi(x') &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{y'_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{y'_n}{2^n} \quad \text{con } y'_n = \frac{x'_n}{2} \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Si consideramos ahora la diferencia entre estos dos valores llegamos a

$$\phi(x') - \phi(x) = \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{y'_n - y_n}{2^n}.$$

Sabemos que $y_n, y'_n \in \{0, 1\}$, luego $y'_n - y_n \in \{-1, 0, 1\}$. Teniendo esto en cuenta, podemos acotar la suma anterior por

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{y'_n - y_n}{2^n} \geq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{-1}{2^n} = \frac{-1}{2^{n_0}}.$$

Así que concluimos que $\phi(x') - \phi(x) \geq \frac{1}{2^{n_0}} - \frac{1}{2^{n_0}} = 0$, lo que implica que $\phi(x) \leq \phi(x')$, como queríamos probar. □

Seguiremos con el estudio de esta función probando un lema que nos garantiza cómo se define la función de Cantor ϕ (definida en (2.5)) en los intervalos extraídos del conjunto de Cantor y resultara útil para los resultados que veremos más adelante.

Lema 2.16. *Dado (x, y) , uno de los intervalos abiertos extraídos en el n -ésimo paso de la construcción geométrica del conjunto de Cantor, se cumple que $\phi(x) = \phi(y)$.*

Demostración.

En el primer paso de la construcción, nos quedamos con los intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$, por lo que extraemos el conjunto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. De la misma manera, en el segundo paso se extraen los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, los cuales se pueden expresar como

$$\left(\frac{1}{3^2} + \frac{c_1}{3}, \frac{2}{3^2} + \frac{c_1}{3} \right) \quad \text{con } c_1 = 0 \text{ o } 2.$$

Los de la tercera iteración, teniendo en cuenta cómo se han descrito estos últimos, serán

$$\left(\frac{1}{3^2} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2}, \frac{2}{3^2} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} \right) \quad \text{con } c_1 = 0 \text{ o } 2 \text{ y } c_2 = 0 \text{ o } 2.$$

Razonando por inducción, se puede deducir que en el paso n -ésimo extraemos 2^{n-1} intervalos, ya que hay 2^{n-1} posibilidades para las c_i , los cuales podemos escribir como

$$\left(\frac{1}{3^n} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{3^{n-1}}, \frac{2}{3^n} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{3^{n-1}} \right) \quad \text{con } c_i = 0 \text{ o } 2.$$

Es decir, si x e y son puntos de \mathcal{C} , extremos de un intervalo extraído, se tiene que

$$(x, y) = \left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{3^i} \right) \quad \text{con } c_i = 0 \text{ o } 2.$$

Por lo que, el resultado se traduce en probar que

$$\phi(x) = \phi \left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{3^i} \right) = \phi \left(\frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{3^i} \right) = \phi(y) \quad \text{con } c_i = 0 \text{ o } 2.$$

Para ello, vamos a estudiar y desarrollar cada uno de los términos de la imagen por la función de Cantor, y veremos que coinciden. Entonces, comenzando por la y y escribiendo los números en su desarrollo decimal en base 3 tenemos que

$$y = \frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{3^i} = 0.c_1c_2\dots c_{n-1}200\dots(3).$$

Por lo que tomando su imagen llegamos a

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \phi \left(\frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{3^i} \right) = 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2}100\dots(2) \\ &= 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2} \underset{(2)}{\underbrace{0\dots0}_{n-1}}10\dots(2) = 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2} \underset{(2)}{} + \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

De igual manera, realizamos los mismos cálculos para el valor y y tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi\left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{3^i}\right) = 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2}011\dots_{(2)} \\ &= 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2}_{(2)} + 0.\underbrace{0\dots0}_n11\dots_{(2)} = 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2}_{(2)} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots \\ &= 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2}_{(2)} + \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\dots\frac{c_{n-1}}{2}_{(2)} + \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el resultado conocido de que la suma dentro del paréntesis vale 1. Por lo tanto, se obtiene el mismo valor de la imagen para los dos puntos distintos y se concluye la prueba. \square

Este resultado nos garantiza que la función de Cantor ϕ , para poder extenderla a todo el intervalo $[0, 1]$ y seguir manteniendo la monotonía creciente, tiene que estar definida en los intervalos extraídos de manera constante y de valor igual al de sus extremos. Teniendo esto en cuenta, podemos dar una definición equivalente extendida a todo el intervalo $[0, 1]$.

Definición 2.17.

La función de Cantor extendida $\tilde{\phi} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) &= \sup\{\phi(y) : y \in \mathcal{C}, y \leq x\} \\ &= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \leq x, y_n = \frac{x_n}{2}, x_n \in \{0, 2\}\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

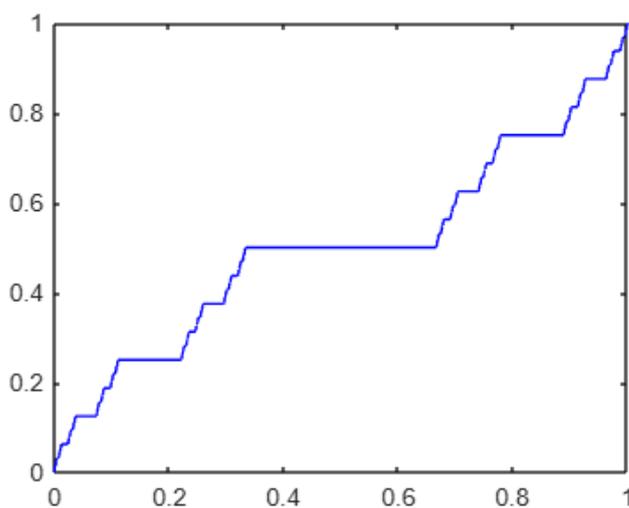


Figura 2.5: Función de Cantor $\tilde{\phi}$

Vamos a comprobar que esta aplicación concuerda con la definida sobre el conjunto de Cantor, y demostraremos que es continua en $[0, 1]$, aunque no es diferenciable en ningún punto de su dominio.

Lema 2.18. *La función $\tilde{\phi}$, definida en (2.6), es una extensión de ϕ .*

Demostración.

Tengo que demostrar que, dado $x \in \mathcal{C}$, se cumple que $\phi(x) = \sup\{\phi(y) : y \in \mathcal{C}, y \leq x\}$. Por el lema 2.15, como ϕ es monótona creciente en \mathcal{C} , se tiene que para todo $y \in \mathcal{C}$ tal que $y \leq x$, se verifica que $\phi(y) \leq \phi(x)$. Por lo tanto,

$$\sup\{\phi(y) : y \in \mathcal{C}, y \leq x\} \leq \phi(x).$$

La otra desigualdad se deduce de forma trivial de la definición de superior, ya que $\phi(x) \in \{\phi(y) : y \in \mathcal{C}, y \leq x\}$, entonces se cumple la igualdad y $\tilde{\phi}$ es una extensión de ϕ . \square

Lema 2.19. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Si f es sobreyectiva sobre el intervalo $[f(a), f(b)]$, entonces es continua en $[a, b]$.*

Demostración.

Sea $x_0 \in [a, b]$ y probemos que f es continua en x_0 . Si $x_0 \in (a, b)$, como f es creciente, existen los límites laterales en x_0 , luego se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Supongamos por reducción al absurdo que f no es continua en x_0 por la izquierda. Defino

$$\eta := f(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) > 0.$$

Sea $L := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Por definición de límite lateral, existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces

$$f(x) < L + \frac{\eta}{2} < f(x_0).$$

Ahora, consideremos cualquier $x \in [a, x_0)$ y distinguiamos en dos casos:

- Si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, entonces $f(x) < L + \frac{\eta}{2}$.
- Si $x \leq x_0 - \delta$, por la monotonía de f , se tiene $f(x) \leq f(x_0 - \delta) \leq L$.

Por lo tanto, para todo $x \in [a, x_0)$,

$$f(x) \leq L + \frac{\eta}{2} < f(x_0).$$

Por otro lado, para $x \geq x_0$, por la monotonía de f , se tiene $f(x) \geq f(x_0)$. Así, no existe $x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) \in \left(L + \frac{\eta}{2}, f(x_0)\right) \subset [f(a), f(b)],$$

lo cual contradice la sobreyectividad de f sobre $[f(a), f(b)]$. El caso de la continuidad por la derecha en x_0 se razona de forma análoga. Para la continuidad en los extremos del intervalo $[a, b]$ basta con considerar el límite lateral correspondiente y repetir el procedimiento. \square

Ahora, probaremos una serie de propiedades de la aplicación $\tilde{\phi}$ (definida en (2.6)) que agrupamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.20. *Sea $\tilde{\phi}$ la función de Cantor, definida en (2.6). Entonces:*

- I. $\tilde{\phi}$ es sobreyectiva.
- II. $\tilde{\phi}$ es monótona creciente.
- III. $\tilde{\phi}$ es continua en $[0, 1]$.
- IV. $\tilde{\phi}$ no es diferenciable en ningún punto de \mathcal{C} .
- V. $\tilde{\phi}$ es diferenciable en cada punto x que no está en \mathcal{C} y, para tales x , se cumple que $\tilde{\phi}'(x) = 0$.

Demostración.

- I. Sea $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$ un elemento de $[0, 1]$ con $y_n \in \{0, 1\}$ para cada $n \geq 1$. Sea entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad \text{donde } x_n = 2y_n.$$

Entonces $x_n \in \{0, 2\}$, por lo tanto, $x \in \mathcal{C}$ y $\tilde{\phi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = y$, lo cual prueba la sobreyectividad de $\tilde{\phi}$.

- II. Tomemos x e y puntos de $[0, 1]$, supongamos que $x < y$ y comprobemos que $\tilde{\phi}(x) \leq \tilde{\phi}(y)$. Esto es claro de la definición de superior ya que

$$\{\phi(z) : z \in \mathcal{C}, z \leq x\} \subseteq \{\phi(z) : z \in \mathcal{C}, z \leq y\}.$$

- III. Como acabamos de probar, la función $\tilde{\phi}$ es creciente y sobreyectiva en $[\tilde{\phi}(0), \tilde{\phi}(1)] = [0, 1]$, por lo que el lema 2.19 nos asegura la continuidad en $[0, 1]$.
- IV. Procederemos como en el teorema 2.7. Sea x un punto de \mathcal{C} cuya expresión ternaria es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$, con $x_n \in \{0, 2\}$. Consideramos ahora otro elemento de \mathcal{C} cuya expresión en base 3 coincida con la de x excepto en el término N -ésimo. Esto es,

$$\begin{aligned} x &= 0.x_1x_2 \dots x_{N-1}x_Nx_{N+1} \dots_{(3)} \quad \text{con } x_n = 0, 2; \\ a_N &= 0.x_1x_2 \dots x_{N-1}y_Nx_{N+1} \dots_{(3)} \quad \text{con } x_n = 0, 2, ; y_N = 0, 2. \end{aligned}$$

Como deben de ser distintos, es claro que $|x_N - y_N| = 2$. De esta manera, si hacemos la diferencia entre x y a_N obtenemos que $|x - a_N| = \frac{|x_N - y_N|}{3^N} = \frac{2}{3^N}$. Calculando la diferencia entre sus imágenes llegamos a que

$$|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(a_N)| = \left| \frac{\frac{x_N}{2} - \frac{y_N}{2}}{2^N} \right| = \frac{1}{2^N}.$$

Por último, tenemos lo necesario para calcular el cociente incremental y su límite cuando x_N se aproxima a x , esto es, cuando N tiende a infinito.

$$\left| \frac{\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(a_N)}{x - a_N} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3^N}} = \left(\frac{3}{2} \right)^N \rightarrow \infty.$$

Como este límite es infinito, concluimos que la derivada no existe.

- v. Por definición de la función $\tilde{\phi}$, si $x \notin \mathcal{C}$, entonces x está en un intervalo extraído de la construcción del conjunto de Cantor, pongamos (a, b) con $a, b \in \mathcal{C}$. Como vimos en el lema 2.16, tendríamos que

$$\tilde{\phi}(a) = \phi(a) = \phi(b) = \tilde{\phi}(b).$$

Como $\tilde{\phi}$ es creciente, se tiene que $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(a) = \tilde{\phi}(b)$, los cuales son valores constantes, luego implica que $\tilde{\phi}$ es diferenciable y $\tilde{\phi}'(x) = 0$.

□

Recordemos ahora un resultado conocido para probar una última observación de este apartado.

Teorema 2.21. (segundo teorema fundamental del cálculo) *Sea f una función integrable en $[a, b]$ que admite una primitiva F en dicho intervalo. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ se verifica que*

$$\int_a^x f = F(x) - F(a).$$

Observación 2.22. *Sea $\tilde{\phi}$ la función de Cantor, definida en (2.6). Entonces $\tilde{\phi}$ no es absolutamente continua, y no se verifica el teorema fundamental del cálculo integral en su segunda versión aunque $\tilde{\phi}'$ es una función integrable en $[0, 1]$, es decir,*

$$\int_0^1 \tilde{\phi}'(x) dx \neq \tilde{\phi}(1) - \tilde{\phi}(0).$$

Demostración.

La función $\tilde{\phi}$ es integrable en $[0, 1]$ por ser continua en un intervalo cerrado. Por el teorema 2.20, $\tilde{\phi}'(x) = 0$ para casi todo $x \in [0, 1]$. Por lo tanto, se tiene que

$$\int_0^1 \tilde{\phi}'(x) dx = 0.$$

Por la definición de $\tilde{\phi}$, sabemos que $\tilde{\phi}(1) - \tilde{\phi}(0) = 1 - 0 = 1$. Luego llegaríamos a que

$$1 = \tilde{\phi}(1) - \tilde{\phi}(0) \neq \int_0^1 \tilde{\phi}'(x) dx = 0,$$

lo que implica que $\tilde{\phi}$ no es absolutamente continua y no verifica el teorema fundamental del cálculo integral.

□

Nota 2.23. (ver [5, pág. 301]) *La función de Cantor $\tilde{\phi}$, definida en (2.6) es derivable y su derivada es cero en los intervalos extraídos. La longitud de dichos intervalos en el paso n -ésimo de su construcción es $\frac{1}{3^n}$ y hay 2^n intervalos, luego la unión mide $(\frac{2}{3})^n$. Si ahora sumamos todas las longitudes, tenemos que la medida total de este conjunto donde la derivada es cero es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Es decir, $\tilde{\phi}'$ se anula en un conjunto de la misma medida que $[0, 1]$, ¡a pesar de que $\tilde{\phi}$ sea creciente, continua y sobreyectiva!

2.3.2. Otras funciones relacionadas

A continuación estudiaremos dos funciones (ver [3, pág. 74] y [18, pág. 266]), definidas a partir de la función de Cantor, que nos sirven como contraejemplos de otros resultados. Para ello, es necesario fijar varias definiciones previas.

Definición 2.24. *La σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R} , denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es la σ -álgebra más pequeña que contiene todos los abiertos de \mathbb{R} . Coincide con la σ -álgebra engendrada por los intervalos abiertos (y por los cerrados) de \mathbb{R} . Diremos que un conjunto es medible Borel si pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Llamamos a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible Borel si se cumple que $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo U abierto de \mathbb{R} .

Definición 2.25. *La σ -álgebra de Lebesgue sobre \mathbb{R} , denotada por $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, es la σ -álgebra completa asociada a la medida de Lebesgue. En otras palabras, $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ contiene todos los conjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y además todos los conjuntos de medida de Lebesgue cero. Al igual que antes, diremos que un conjunto es medible Lebesgue si pertenece a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.*

Llamamos a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible Lebesgue si se cumple que $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ para todo U abierto de \mathbb{R} .

Por último, denoto por $|\cdot|$ a la medida de Lebesgue de un conjunto.

Nota 2.26. *De estas definiciones podemos deducir fácilmente que toda función medible Borel es también medible Lebesgue.*

Teniendo esto en cuenta, enunciaremos el siguiente resultado (ver [3, pág. 74]).

Teorema 2.27. *Sea $\tilde{\phi}$ la función de Cantor, definida en (2.6), y $f(x) = \tilde{\phi}(x) + x$. Si $\mathcal{M}([0, 1])$ y $\mathcal{M}([0, 2])$ denotan las σ -álgebras de los conjuntos medibles Lebesgue de $[0, 1]$ y $[0, 2]$ respectivamente, se cumple que*

- (a) *f es biyectiva y continua de $[0, 1]$ en $[0, 2]$.*
- (b) *Si \mathcal{C} es el conjunto triádico de Cantor, entonces $|f(\mathcal{C})| = 1$.*
- (c) *f^{-1} no es medible de $([0, 2], \mathcal{M}([0, 2]))$ en $([0, 1], \mathcal{M}([0, 1]))$ y en cambio es función medible Borel, luego medible Lebesgue.*
- (d) *La contraimagen de un conjunto de medida nula por una aplicación continua no tiene por qué ser de medida nula.*
- (e) *La composición de dos funciones medibles Lebesgue no siempre es medible Lebesgue.*

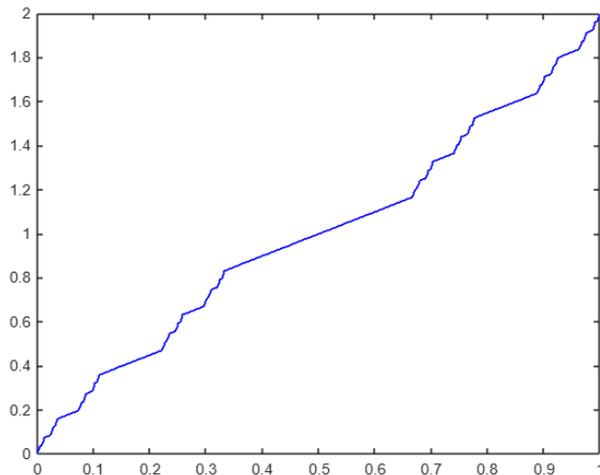


Figura 2.6: Función f

Demostración.

- (a) La función $\tilde{\phi}$ es continua y la identidad también, luego f es continua al ser suma de funciones continuas. También f es estrictamente creciente porque es suma de funciones crecientes, una de ellas estrictamente creciente, lo que garantiza la inyectividad. Para la sobreyectividad, notamos que la función en los extremos vale

$$f(0) = \tilde{\phi}(0) + 0 = 0 + 0 = 0 \quad ; \quad f(1) = \tilde{\phi}(1) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Dado que f es continua y estrictamente creciente en $[0, 1]$, su imagen es el intervalo $[0, 2]$, lo que garantiza que f es sobreyectiva, por lo que queda probado que f es biyectiva.

- (b) Si denotamos por $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a una enumeración de los intervalos extraídos de la construcción del conjunto de Cantor, tenemos que

$$[0, 1] \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Como \mathcal{C} tiene medida nula, sabemos que $\sum_{k \in \mathbb{N}} |I_k| = 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\phi}$ es constante en I_k , pongamos $\tilde{\phi}(x) = c_k$ para todo $x \in I_k$. Por lo tanto, si $x \in I_k$,

$$f(x) = \tilde{\phi}(x) + x = c_k + x,$$

que representa una traslación del intervalo I_k a otro intervalo $J_k = c_k + I_k \subset [0, 2]$ con $|J_k| = |I_k|$. Los intervalos J_k son disjuntos entre sí por serlo los I_k , y también lo son por tanto de $f(\mathcal{C})$. Por construcción, tenemos que $[0, 1] = \mathcal{C} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$, y f es biyectiva, luego

$$[0, 2] = f([0, 1]) = f\left(\mathcal{C} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k\right) = f(\mathcal{C}) \cup f\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k\right) = f(\mathcal{C}) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k.$$

Dado que los J_k son disjuntos, por definición de la medida de Lebesgue se tiene que

$$\left| \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \right| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |I_k| = 1,$$

luego $|[0, 2] \setminus f(\mathcal{C})| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k| = 1$. Como $|[0, 2]| = 2$, concluimos que

$$|f(\mathcal{C})| = |[0, 2]| - |[0, 2] \setminus f(\mathcal{C})| = 2 - 1 = 1.$$

- (c) La función f^{-1} es continua, por lo que es medible respecto a la σ -álgebra de Borel. Sin embargo, veamos que no necesariamente es medible respecto a la σ -álgebra de Lebesgue de $[0, 2]$ en $[0, 1]$. Como $f(\mathcal{C})$ tiene medida de Lebesgue 1 (en particular positiva), el teorema de Vitali afirma que existe un subconjunto $A \subset f(\mathcal{C})$ que no es medible respecto a $\mathcal{M}([0, 2])$. De esta forma, la contraimagen $f^{-1}(A)$ está contenida en \mathcal{C} , por lo que $f^{-1}(A)$ es de medida nula, y en particular pertenece a $\mathcal{M}([0, 1])$. Entonces f^{-1} no es medible respecto a la σ -álgebra de Lebesgue de $[0, 2]$. No obstante, como f^{-1} es medible Borel, también es medible Lebesgue en $[0, 1]$.
- (d) Si consideramos $f^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ y \mathcal{C} el conjunto de Cantor, tenemos que $|\mathcal{C}| = 0$, en cambio,

$$(f^{-1})^{-1}(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C}).$$

Pero por el apartado (c), probamos que $|f(\mathcal{C})| = 1 \neq 0$, lo que concluiría la demostración.

- (e) Sea l medible Lebesgue pero tal que, para algún $A \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue, $l^{-1}(A)$ no sea medible (sabemos que es posible esta elección por los apartados anteriores). Tomando por tanto $g = \chi_A$, se deduce que $g \circ l$ no es medible Lebesgue.

□

Una función con derivada positiva pero no creciente

Ahora daremos paso a una construcción muy interesante, la cual nos muestra que existen funciones continuas con derivada positiva (de hecho mayor que 1) en casi en todos los puntos pero no crecientes en ningún intervalo de su dominio.

Antes de pasar al ejemplo de esta sección, enunciaremos unos resultados previos que se pueden encontrar en [15, pág. 112 y 116].

Teorema 2.28. (teorema de Lebesgue) *Sea f una función monótona en el intervalo abierto (a, b) , entonces es diferenciable en casi todo punto de (a, b) .*

La demostración se puede encontrar en [15, pág. 112], pero se omitirá en este trabajo debido a su complejidad. Este resultado se puede extender de manera trivial considerando un intervalo cerrado $[a, b]$, ya que se estaría añadiendo un conjunto de medida nula. Nuestro objetivo será adaptar este teorema a funciones de variación acotada, por lo que seguiremos estudiando cómo se comportan este tipo de funciones hasta llegar a nuestra meta. Continuamos con unas definiciones previas (ver [15, pág. 116]).

Definición 2.29. Dada una función de variable real f en un intervalo cerrado $[a, b]$, y $P = \{x_0, \dots, x_k\}$ una partición de $[a, b]$. Se define la variación total de f con respecto a P como

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

y la variación total de f en $[a, b]$ por

$$VT(f) = \sup\{V(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}.$$

Definición 2.30. En la situación anterior, diremos que f es de variación acotada en $[a, b]$ si

$$VT(f) < \infty.$$

Lema 2.31. Una función f creciente en $[a, b]$ es de variación acotada en $[a, b]$, y además se cumple que

$$VT(f) = f(b) - f(a).$$

Demostración.

Para cada partición $P = \{x_0, \dots, x_k\}$ de $[a, b]$, se tiene que

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

Por lo tanto, se deduce que $VT(f) < \infty$. □

Nota 2.32.

El resultado anterior se puede adaptar al caso de una función decreciente en un intervalo cerrado $[a, b]$ de una manera análoga. En ese caso se tendría que $VT(f) = f(a) - f(b)$.

Vamos a seguir estudiando propiedades antes de pasar al teorema importante que necesitaremos. Tomamos un c en (a, b) y una partición $P = \{x_0, \dots, x_k\}$ de $[a, b]$. Definamos P' , una partición mas fina de P , como $P' = P \cup \{c\}$. De esta forma, se tiene que existe un $i \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $x_i \leq c < x_{i+1}$, y por la desigualdad triangular se llega a que

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - c| + |c - f(x_i)|,$$

luego $V(f, P) \leq V(f, P')$. Así, en la definición de variación total de la función $[a, b]$, el supremo se puede tomar sobre las particiones de $[a, b]$ que contengan al punto c . Ahora, si consideramos una partición P de esta forma, es claro que induce otras dos particiones P_1 y P_2 , de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente, tal que

$$V(f, P) = V(f\chi_{[a,c]}, P_1) + V(f\chi_{[c,b]}, P_2).$$

Tomando el supremo en ambas particiones se tiene la igualdad

$$VT(f, P) = VT(f\chi_{[a,c]}) + VT(f\chi_{[c,b]}).$$

Luego obtenemos que si f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces se cumple que

$$VT(f\chi_{[a,v]}) - VT(f\chi_{[a,u]}) = VT(f\chi_{[u,v]}) \geq 0 \text{ para cada } a \leq u < v \leq b. \quad (2.7)$$

Dada una función f en $[a, b]$, la función $x \mapsto VT(f\chi_{[a,x]})$ se denomina función de variación total de f . Por la desigualdad en (2.7), es claro que la función de variación total de f es creciente en $[a, b]$. Por otro lado, si tomamos la partición $P = \{u, v\}$ de $[u, v]$, tenemos que

$$f(u) - f(v) \leq |f(v) - f(u)| = V(f\chi_{[u,v]}, P) \leq VT(f\chi_{[u,v]}) = VT(f\chi_{[a,v]}) - VT(f\chi_{[a,u]}).$$

Entonces concluimos que

$$f(v) + VT(f\chi_{[a,v]}) \geq f(u) + VT(f\chi_{[a,u]})$$

para cada $a \leq u < v \leq b$. Enunciamos por tanto el siguiente lema:

Lema 2.33. *Sea f una función de variación acotada en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Entonces f tiene la siguiente expresión como diferencia de dos funciones crecientes en $[a, b]$:*

$$f(x) = [f(x) + VT(f\chi_{[a,x]})] - VT(f\chi_{[a,x]}), \quad x \in [a, b].$$

Demostración.

La igualdad es trivial, por lo que comprobemos que ambas funciones son crecientes. Como ya sabemos $x \mapsto VT(f\chi_{[a,x]})$ es creciente en $[a, b]$. Sea $g(x) = f(x) + VT(f\chi_{[a,x]})$ y tomamos $a \leq u < v \leq b$. Consideramos la desigualdad obtenida anteriormente:

$$f(v) + VT(f\chi_{[a,v]}) \geq f(u) + VT(f\chi_{[a,u]}).$$

Esto implica que $g(v) \geq g(u)$, es decir, g también es una función creciente en $[a, b]$. \square

A esta expresión la denominamos descomposición de Jordan de f . Expondremos ahora el teorema de Jordan, resultado que nos permitirá estudiar un corolario muy interesante a continuación, el cual necesitaremos en pruebas posteriores (ver [15, pág. 117]).

Teorema 2.34. *(teorema de Jordan) Una función f es de variación acotada en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ si y solo si es diferencia de dos funciones crecientes en $[a, b]$.*

Demostración.

Si f es de variación acotada, el lema anterior nos garantiza el resultado. para probar la otra implicación, sea $f = g - h$ en $[a, b]$ con g y h funciones crecientes en $[a, b]$. Si tomamos una partición $P = \{x_0, \dots, x_k\}$ en $[a, b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} V(f, P) &= \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k |[g(x_i) - g(x_{i-1})] + [h(x_{i-1}) - h(x_i)]| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^k |h(x_{i-1}) - h(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^k [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^k [h(x_i) - h(x_{i-1})] \\ &= [g(b) - g(a)] + [h(b) - h(a)] < \infty. \end{aligned}$$

Así, concluimos que f es de variación acotada en $[a, b]$. \square

Corolario 2.35. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$, entonces es diferenciable casi siempre en $[a, b]$.*

Demostración.

Por el teorema de Jordan (teorema 2.34), sabemos que f es la diferencia de dos funciones crecientes en $[a, b]$. Ahora aplicamos el teorema de Lebesgue (teorema 2.28) a ambas funciones y deducimos que f es diferenciable casi siempre en $[a, b]$. \square

Ahora pasamos a un lema que nos será de gran utilidad más adelante en el momento de demostrar las propiedades de la función del ejemplo que expondremos (ver [2, proposición 5.2.8.]).

Lema 2.36. *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones monótonas crecientes en $[a, b]$, tales que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para todo $x \in [a, b]$. Entonces,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \text{para casi todo } x \in [a, b].$$

Demostración.

Cada f_n , $n \in \mathbb{N}$, es creciente, luego f también lo es por ser suma de funciones crecientes. Por el teorema 2.28, sabemos que toda función monótona es derivable en casi todo punto. Así, $f'(x)$ existe para casi todo $x \in [a, b]$. Para $h > 0$, como f_n es creciente, tenemos que

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \geq 0.$$

Considerando la suma finita hasta un índice fijo $k \in \mathbb{N}$, llegamos a

$$\sum_{n=1}^k \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \frac{\sum_{n=1}^k f_n(x+h) - \sum_{n=1}^k f_n(x)}{h} = \frac{S_k(x+h) - S_k(x)}{h},$$

donde $S_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$. Como S_k es monótona, su derivada existe casi en todo punto y

$$S'_k(x) = \sum_{n=1}^k f'_n(x).$$

Además, como f es una suma infinita, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^k f'_n(x) = S'_k(x) \leq f'(x)$$

para casi todo $x \in [a, b]$, debido a que la derivada de la suma parcial no puede exceder la derivada de la suma total. Como $\sum_{n=1}^k f'_n(x) \leq f'(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge para casi todo punto a una función $g(x) \leq f'(x)$. Veamos que se da la igualdad.

Suponemos sin pérdida de generalidad que $f_n(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ converge, existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n>n_k} f_n(b) < 2^{-k}.$$

Por la monotonía, para todo $x \in [a, b]$, se tiene que

$$\sum_{n>n_k} f_n(x) \leq \sum_{n>n_k} f_n(b) < 2^{-k}.$$

Defino ahora la función

$$\varphi_k(x) := f(x) - \sum_{n=1}^{n_k} f_n(x) = \sum_{n>n_k} f_n(x), \quad \text{con } x \in [a, b].$$

Cada φ_k , $k \in \mathbb{N}$, es monótona creciente y, por el paso anterior, sabemos que $\varphi_k(x) < 2^{-k}$. Como cada φ_k es suma de funciones monótonas, el teorema 2.28 nos garantiza que su derivada existe casi en todo punto y es

$$\varphi'_k(x) = f'(x) - \left(\sum_{n=1}^{n_k} f_n(x) \right)'$$

Con esto, deducimos que $\varphi'_k(x) \rightarrow 0$ casi en todo x cuando k tiende a infinito. Por lo que para casi todo $x \in [a, b]$, se tiene que

$$f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{n_k} f'_n(x) + \varphi'_k(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) + 0 = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x).$$

Esto se debe a que si fuese $g(x) < f'(x)$, entonces $\varphi'_k(x)$ no tendería a cero, contradiciendo el paso anterior. Por lo tanto concluimos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \text{casi en todo } x \in [a, b].$$

□

Tenemos ya los conocimientos por tanto de pasar a enunciar el teorema central de este apartado (ver [18, pág. 266]).

Teorema 2.37. *Existen funciones continuas con derivada mayor que 1 casi en todos los puntos pero no crecientes en ningún intervalo de su dominio.*

Demostración.

Para esta demostración, mostraremos un contraejemplo relacionado con la función de Cantor (ver [18, pág 266]). Si $\tilde{\phi}$ es dicha función, mostrada en (2.6), definimos en primer lugar $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{\phi}(x) & \text{si } x \in [0, 1), \\ \tilde{\phi}(2-x) & \text{si } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (2.8)$$

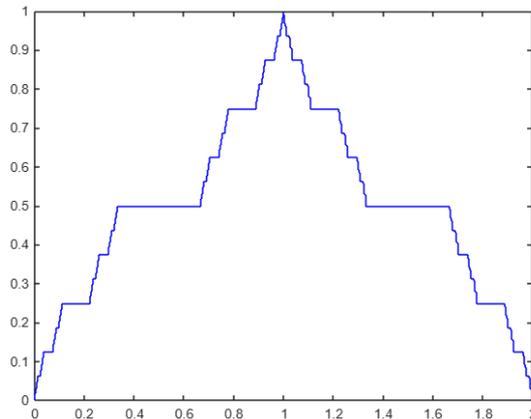


Figura 2.7: Función h

Por el teorema 2.20, sabemos que $\tilde{\phi}$ es continua en $[0, 1]$, entonces h también lo es en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Para probar la continuidad en toda la recta real estudiemos los límites laterales en el 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(1) = 1 = h(1) = \tilde{\phi}(2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \tilde{\phi}(2 - x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x).$$

Luego la función h , definida en (2.8), es continua en \mathbb{R} . Además, de la herencia de las propiedades de la función $\tilde{\phi}$, podemos afirmar que h es derivable casi siempre en su dominio con derivada 0. Sea ahora $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ una enumeración de los intervalos con extremos racionales contenidos en $[0, 1]$. Definimos las funciones

$$g_k(x) := \frac{1}{3^k} h\left(\frac{x - x_k}{y_k - x_k}\right) \quad \text{y} \quad f_n(x) := 2x - \sum_{k=0}^n g_k(x), \quad x \in [0, 1].$$

Cada g_k es continua en $[0, 1]$ por serlo h y $\|g_k\|_\infty \leq \frac{1}{3^k}$. Las funciones f_n son continuas ya que las g_k lo son y la construcción de ambas se realiza recursivamente de la siguiente manera: para $k = 0$, elegimos x_0 y y_0 en I_0 con $x_0 \neq y_0$. Si $k \geq 1$, distinguimos dos casos:

- Si $f_{k-1}|_{I_k}$ no es creciente, entonces es posible encontrar $x_k, y_k \in I_k$ con $x_k < y_k$ y cumpliendo que $f_{k-1}(x_k) > f_{k-1}(y_k)$.
- Si $f_{k-1}|_{I_k}$ es creciente, por la continuidad de f_{k-1} , elegimos estos puntos de tal forma que $x_k < y_k$ y verifiquen que $f_{k-1}(y_k) \leq f_{k-1}(x_k) + \frac{1}{3^{k+1}}$.

Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, g_k trata de escalar h al intervalo $[x_k, y_k]$. Teniendo esto en cuenta, nos encontramos ya con las herramientas necesarias para definir nuestra función que servirá como contraejemplo. Sea f la función dada por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 2x - \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

Comprobemos que cumple las propiedades nombradas en el enunciado del teorema para concluir que realmente es la función que buscábamos. Lo primero de todo, notamos que como $\|g_k\|_\infty \leq \frac{1}{3^k}$, la serie que aparece en la definición (2.9) la podemos acotar por la

serie cuyo término principal es $\frac{1}{3^k}$, que sabemos que es convergente, por lo que f está bien definida. Además, por el criterio M de Weierstrass podemos asegurar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ converge uniformemente en $[0, 1]$, y como cada g_k es continua en $[0, 1]$, se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ es continua en $[0, 1]$, luego f es continua por ser diferencia de funciones continuas.

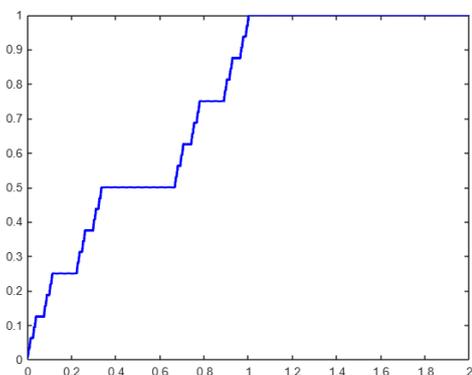
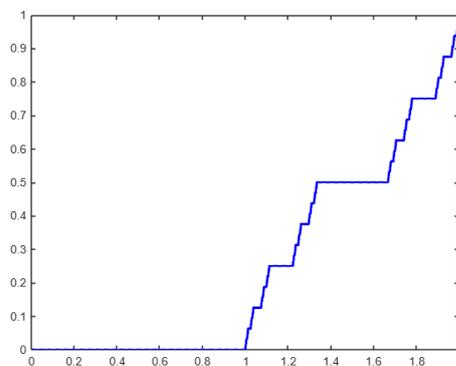
Veamos que su derivada es mayor o igual que 1 casi en todo punto de $[0, 1]$. Nos damos cuenta de que $h \geq 0$, lo que implica que para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $g_k \geq 0$. Como acabamos de probar, la serie $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ converge uniformemente, luego puntualmente. Como $\tilde{\phi}$ es creciente en un intervalo cerrado, por el lema 2.31, es de variación acotada, luego h es de variación acotada en $[0, 1]$. En el intervalo $[1, 2]$, la función h está definida como $\tilde{\phi}(2-x)$, la cual es decreciente en ese intervalo. La nota posterior a dicho lema nos garantiza que h es de variación acotada en $[1, 2]$. Por el teorema 2.34 se puede escribir su descomposición de Jordan como

$$h = u - v,$$

con u y v funciones acotadas y crecientes en $[0, 2]$. En este caso, tenemos que dado $x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{\phi}(x) & \text{si } x \in [0, 1), \\ \tilde{\phi}(1) = 1 & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1), \\ \tilde{\phi}(1) - \tilde{\phi}(2-x) = 1 - \tilde{\phi}(2-x) & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$


 Figura 2.8: Función u

 Figura 2.9: Función v

Veamos que se cumple la igualdad $h = u - v$. Para $x \in [0, 1)$, tenemos que

$$u(x) - v(x) = \tilde{\phi}(x) - 0 = \tilde{\phi}(x) = h(x),$$

y si $x \in [1, 2]$,

$$u(x) - v(x) = \tilde{\phi}(1) - [\tilde{\phi}(1) - \tilde{\phi}(2-x)] = \tilde{\phi}(2-x) = h(x).$$

Ya sabíamos que la función de Cantor $\tilde{\phi}$ era creciente, luego u también lo es en $[0, 1)$, y como es constante en el intervalo $[1, 2]$, entonces es creciente en $[0, 2]$. Probemos que v

también lo es en $[1, 2]$, ya que de nuevo es constante en el intervalo $[0, 1]$. Sean $x, y \in [1, 2]$, con $x < y$. Se tiene por tanto que $2 - x > 2 - y$, lo que implica que $\tilde{\phi}(2 - x) \geq \tilde{\phi}(2 - y)$. Multiplicando por -1 a ambos lados de la desigualdad se comprueba que $-\tilde{\phi}(2 - x) \leq -\tilde{\phi}(2 - y)$, por lo que v es creciente.

Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que g_k es de variación acotada, por lo que defino las funciones u_k y v_k a partir de u y v de la siguiente manera:

$$u_k = \frac{1}{3^k} u \left(\frac{x - x_k}{y_k - x_k} \right) \quad \text{y} \quad v_k(x) = \frac{1}{3^k} v \left(\frac{x - x_k}{y_k - x_k} \right).$$

Por lo tanto, aplicando el lema 2.36 a las sucesiones de funciones $\{u_k\}_k$ y $\{v_k\}_k$ se llega a que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right)' - \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) \right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u'_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} v'_k(x) \end{aligned}$$

para casi todo $x \in [0, 1]$. Calculemos ahora la derivada de u_k para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Teniendo en cuenta su definición, esto es,

$$u'_k(x) = \frac{1}{y_k - x_k} \cdot \frac{1}{3^k} u' \left(\frac{x - x_k}{y_k - x_k} \right) = 0 \text{ casi siempre en } [0, 1],$$

porque la función u tiene derivada 0 casi siempre al heredar esa propiedad de la función de Cantor $\tilde{\phi}$ en $[0, 1)$, y es constante en $[1, 2]$. De forma análoga se comprueba que $v'_k(x) = 0$ casi siempre en $[0, 1]$. Entonces, si calculamos la derivada de f , tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - g'(x) = 2 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} u'_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} v'_k(x) \right) \\ &= 2 - (0 + 0) = 2 > 1 \quad \text{casi siempre en } [0, 1]. \end{aligned}$$

Veamos por último que no es creciente en ningún subintervalo de $[0, 1]$. Sea I un intervalo no vacío, con $I \subset [0, 1]$, y tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n \subseteq I$. Denotamos por x_n e y_n los puntos elegidos en I_n para la construcción de f . Como $g_n(y_n) = 3^{-n}h(1) = 3^{-n}$ y $g_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(y_n) &= 2y_n - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_n) \leq 2y_n - \sum_{k=1}^n g_k(y_n) = f_n(y_n) \\ &= f_{n-1}(y_n) - g_n(y_n) = f_{n-1}(y_n) - \frac{1}{3^n}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por otro lado, debido a que $g_n(x_n) = 0$ y $\|g_k\|_{\infty} \leq 3^{-k}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 2x_n - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x_n) = f_{n-1}(x_n) - \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x_n) \\ &\geq f_{n-1}(x_n) - \sum_{k=n+1}^{\infty} 3^{-k} = f_{n-1}(x_n) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Debido a la elección de los puntos x_n e y_n , se tiene que o bien $f_{n-1}(x_n) > f_{n-1}(y_n)$, o bien $f_{n-1}(y_n) \leq f_{n-1}(x_n) + 3^{-(n+1)}$. Veamos que en ambos casos se cumple que $f(y_n) < f(x_n)$:

- Si $f_{n-1}(x_n) > f_{n-1}(y_n)$, usando (2.10) y (2.11) se llega a

$$\begin{aligned} f(x_n) &\geq f_{n-1}(x_n) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} > f_{n-1}(y_n) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \\ &> f_{n-1}(y_n) - \frac{1}{3^n} \geq f(y_n). \end{aligned}$$

- Si $f_{n-1}(y_n) \leq f_{n-1}(x_n) + 3^{-(n+1)}$, se repite un razonamiento similar y se comprueba que

$$\begin{aligned} f(y_n) &\leq f_{n-1}(y_n) - \frac{1}{3^n} \leq f_{n-1}(x_n) + \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^n} \\ &= f_{n-1}(x_n) + \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = f_{n-1}(x_n) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} < f_{n-1}(x_n) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \\ &\leq f(x_n). \end{aligned}$$

Esto implica que la función f no es creciente en I , con lo que terminamos la prueba. \square

Capítulo 3

Integración

La teoría de la integración, dentro del análisis matemático, se distingue principalmente entre la formulación de Riemann o la de Lebesgue. Teniendo en cuenta cualquiera de las dos, tenemos claro que es una rama de mucha importancia por su interés en el cálculo de áreas, volúmenes o flujos, entre otras utilidades. Sin embargo, ciertos ejemplos muestran que muchas propiedades comúnmente asociadas con la integración (como la continuidad, el hecho de que la composición siga siendo integrable o la validez de resultados asociados al intercambio del signo integral por una operación como puede ser la derivación, un límite o una serie) no siempre se cumplen sin condiciones adicionales.

En esta sección se estudian varios contraejemplos ilustrativos, como la función de Thomae, que pese a su discontinuidad en un conjunto denso, es integrable en el sentido de Riemann; casos donde la derivación bajo el signo integral falla por ausencia de hipótesis adecuadas; y ejemplos donde la composición de funciones integrables no resulta ser integrable. Estos casos muestran la necesidad de un tratamiento riguroso y cuidadoso de los teoremas de integración, más allá de la intuición desarrollada en contextos elementales.

3.1. Teorema de derivación bajo el signo integral

Comenzamos recordando el teorema principal sobre el que expondremos un contraejemplo más adelante.

Teorema 3.1. Sean A un abierto de \mathbb{R}^n , B un subconjunto medible de \mathbb{R}^m y F una función real definida en $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Supongamos que:

- i) Para cada $x \in A$ la función F_x , definida por $F_x(y) = F(x, y)$, es integrable en B .
- ii) Para cada $y \in B$ la función F_y , definida por $F_y(x) = F(x, y)$, admite derivada parcial continua respecto de x_j en A .
- iii) La función $y \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y)$ es medible en B y existe una función g_j integrable en B tal que

$$|D_j F_y(x)| = \left| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq g_j(y) \text{ para todo } x \in A, y \in B.$$

Entonces la función f definida en A por $f(x) = \int_B F(x, y) dy$ admite derivada parcial

continua respecto de x_j en A , y se tiene que

$$D_j f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_B F(x, y) dy = \int_B \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y) dy, \quad x \in A.$$

A continuación, veremos un caso que ilustra cómo las hipótesis mencionadas en el teorema 3.1 son necesarias. En particular, pondremos un ejemplo de una función que no cumple *iii*), por lo que si aplicamos el teorema obtenemos distintos valores al calcular la integral de ambas formas. Sea

$$F(x, y) = \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y} \text{ si } x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1). \quad (3.1)$$

La función F está definida en el conjunto $\mathbb{R} \times (0, 1)$ y cumple que para cada valor fijo de y , $F(x, y)$ es continua en \mathbb{R} como función de x . También tenemos que para un $x \in \mathbb{R}$ fijo, $F(x, y)$ es continua en $(0, 1)$. En este caso, los conjuntos A y B del teorema de derivación bajo el signo integral son \mathbb{R} y el intervalo abierto $(0, 1)$ respectivamente. Notamos que fijado $x \in \mathbb{R}$, la función $y \in (0, 1) \rightarrow F(x, y)$ es integrable en $(0, 1)$. Esto se debe a que tras hacer el cambio de variable $u = \frac{x^2}{y}$ obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dy = \int_{x^2}^{\infty} x e^{-t} dt,$$

la cual sabemos que es una función integrable para cada x prefijado. Luego, la función f del teorema 3.1 está dada por $f(x) = \int_0^1 F(x, y) dy$. Calculando esta integral obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 F(x, y) dy = \int_0^1 \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dy = x \int_0^1 \frac{x^2}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dy \\ &= x \left[e^{-\frac{x^2}{y}} \right]_{y \rightarrow 0^+}^{y=1} = x(e^{-x^2} - 0) = x e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Notamos que entonces su derivada es $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ para todo número real x (incluyendo $x = 0$). El teorema de derivación bajo el signo integral me permitiría entonces intercambiar el orden de derivación e integración. En este caso, si calculamos la derivada parcial e integramos en el caso de $x \neq 0$ llegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) dy &= \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} - \frac{2x^4}{y^3} e^{-\frac{x^2}{y}} \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{3x^2}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} dy - \int_0^1 \frac{2x^4}{y^3} e^{-\frac{x^2}{y}} dy = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

La primera integral es como la calculada anteriormente y vale $3e^{-x^2}$. Para la segunda, como $x \neq 0$, realizamos de nuevo el cambio de variable $t = \frac{x^2}{y}$ de donde $y = \frac{x^2}{t}$ y

$dy = -\frac{x^2}{t^2}dt$, y aplicamos integración por partes. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x^2}^{\infty} \frac{2x^4}{(x^2/t)^3} e^{-t} \left| \frac{x^2}{t^2} dt \right| = 2 \int_{x^2}^{\infty} t e^{-t} dt \\ &= 2 \left([-te^{-t}]_{t=x^2}^{t=\infty} + \int_{x^2}^{\infty} e^{-t} dt \right) = 2 \left(x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} \right) \\ &= 2(x^2 + 1)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) dy &= I_1 - I_2 = 3e^{-x^2} - 2(x^2 + 1)e^{-x^2} \\ &= (1 - 2x^2)e^{-x^2} = f'(x). \end{aligned}$$

Ahora, para el caso $x = 0$, es claro que la función $\frac{\partial F}{\partial x}$ vale 0 en los puntos de la forma $(0, y)$, luego se tiene que

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} F(0, y) dy = \int_0^1 0 dy = 0 \neq 1 = f'(0).$$

Esto demuestra que no se cumple el teorema de derivación bajo el signo integral debido a que la hipótesis *iii*) falla. Veremos que no podemos acotar $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right|$ por una función $g(y)$ integrable en $(0, 1)$ para cada valor de x . Si para cada $y \in (0, 1)$ consideramos el superior

$$s(y) := \sup \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| : x \in A \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{3x^2}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} - \frac{2x^4}{y^3} e^{-\frac{x^2}{y}} \right| : x \in \mathbb{R} \right\},$$

notamos que cualquier función que acote superiormente a la derivada parcial va a ser más grande que esta función, por lo que si vemos que este superior coincide con una función no integrable habríamos terminado. Al igual que antes, para trabajar mejor, consideramos el cambio de variable $t = \frac{x^2}{y}$ donde $t \in [0, \infty)$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} - \frac{2x^4}{y^3} e^{-\frac{x^2}{y}} &= \frac{3}{y} \frac{x^2}{y} e^{-\frac{x^2}{y}} - 2 \left(\frac{x^2}{y} \right)^2 \frac{1}{y} e^{-\frac{x^2}{y}} \\ &= \frac{3}{y} t e^{-t} - 2(t)^2 \frac{1}{y} e^{-t} = \frac{1}{y} (3te^{-t} - 2t^2 e^{-t}). \end{aligned}$$

Si estudiamos $g(t) = 3te^{-t} - 2t^2 e^{-t}$ y encontramos el máximo de su valor absoluto tendremos una cota común. Derivando esta función obtenemos $g'(t) = (3 - 7t + 2t^2)e^{-t}$, que igualado a 0 las únicas posibles soluciones son las raíces del polinomio $3 - 7t + 2t^2$, que corresponden a los valores $t_1 = \frac{1}{2}$ y $t_2 = 3$. Si evaluamos la función g en estos puntos tenemos que

$$\begin{aligned} g(t_1) &= g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \\ g(t_2) &= g(3) = (3 \cdot 3 - 2(3)^2) e^{-3} = -\frac{9}{e^3}. \end{aligned}$$

Comparando los resultados en valor absoluto es claro que $|g(t_1)| = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{9}{e^3} = |g(t_2)|$, ya que $e^{\frac{5}{2}} > 9$. Como la función g es continua en $[0, \infty)$, en $t = 0$ vale 0 y tiende a 0 cuando t tiende a infinito, es posible afirmar que $\sup \{|g(t)| : t \in [0, \infty)\} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. De esta manera podemos concluir que

$$\begin{aligned} s(y) &= \sup \left\{ \left| \frac{3x^2}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} - \frac{2x^4}{y^3} e^{-\frac{x^2}{y}} \right| : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \frac{1}{y} \sup \{|g(t)| : t \in [0, \infty)\} = \frac{1}{y\sqrt{e}}, \end{aligned}$$

donde comprobamos que el superior resulta ser una función no integrable en $(0, 1)$, luego no verifica *iii*).

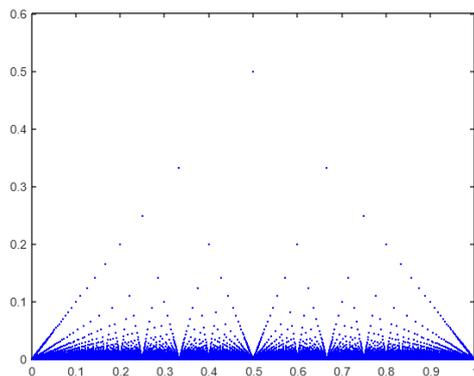
3.2. Función de Thomae

El matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) introdujo un primer ejemplo de una función que tiene la peculiaridad de no ser continua en ningún punto de su dominio:

$$D(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ d & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad (3.2)$$

con $c, d \in \mathbb{R}$ y $c \neq d$, aunque es más conocida con los valores $c = 1$ y $d = 0$. Esta función está acotada pero no es integrable en el sentido de Riemann en ningún intervalo. Este hecho, obligó al matemático alemán Carl Johannes Thomae (1840-1921) a preguntarse si era posible construir una función del estilo a la definida en (3.2) pero que sí sea integrable. En 1875, publicó el libro titulado *“Einleitung In Die Theorie Der Bestimmten Integrale”*, en el cual presenta un ejemplo muy simple, pero provocativo, de una función continua en todos los números irracionales y discontinua en los racionales. También es conocida como *la función de las palomitas* o *la función gotas de lluvia* por el aspecto que tiene su gráfica, y la podemos encontrar definida en [18] como vemos a continuación. Dado $x \in [0, 1]$, la función de Thomae T viene dada por

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \text{ con } \text{mcd}(p, q) = 1 \text{ y } q > 0, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$


 Figura 3.1: Función de Thomae T

En el gráfico falta mostrar la imagen del 0 y del 1 por la aplicación, pero se suprimen por su poca relevancia. Antes de iniciar el estudio de la función T , recordemos un resultado sobre la caracterización de integrabilidad en el sentido de Riemann, previamente estudiado en el grado, cuya demostración omitiremos (vista en la asignatura de Análisis Matemático del segundo curso). Esto nos será de gran utilidad a la hora de demostrar el teorema central de esta sección.

Teorema 3.2. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. La función f es continua en casi todo punto de $[a, b]$ en el sentido de Lebesgue, es decir, el conjunto de puntos donde T no es continua tiene medida de Lebesgue cero, si y sólo si f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$.*

Teorema 3.3. *La función T , definida en (3.3), es integrable en el sentido de Riemann en $[0, 1]$.*

Demostración.

De la definición, sabemos que T está acotada por 1, luego por el teorema 3.2 es suficiente con probar que es continua en casi todo punto en el sentido de Lebesgue. Veremos que T es continua en cualquier $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Para $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ tal que $x_n \rightarrow x$. Dado que $T(x) = T(y)$ para $y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, podemos suponer que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Escribimos $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ donde asumimos que $\text{mcd}(p_n, q_n) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $q_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto se debe a que, si $q_n \not\rightarrow \infty$, existiría una subsucesión $\{q_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ acotada. Como $x_n \leq 1$, se tiene que $p_n \leq q_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y se cumple también que $\{p_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ está acotada. Así, podemos deducir que existen subsucesiones de estas, $\{q_{n_{l_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{p_{n_{l_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ respectivamente, tales que $q_{n_{l_k}} \rightarrow q$ y $p_{n_{l_k}} \rightarrow p$ cuando $k \rightarrow \infty$ para ciertos $p, q \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, si se considera $x_{n_{l_k}} = \frac{p_{n_{l_k}}}{q_{n_{l_k}}}$, se tiene que $x_{n_{l_k}} \rightarrow \frac{p}{q}$, pero también $x_{n_{l_k}} \rightarrow x$.

Por la unicidad del límite se deduce que $x = \frac{p}{q}$, lo que contradice nuestra suposición de que $x \notin \mathbb{Q}$. Así, concluimos que $q_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0 = T(x).$$

Esto termina la prueba de que f es continua en casi todo punto según el sentido de Lebesgue, y por lo tanto, es integrable en el sentido de Riemann. \square

Nota 3.4. En consecuencia, la integral en el sentido de Riemann $\int_0^1 T(x) dx$ existe, y coincide con la integral en el sentido de Lebesgue $\int_{[0,1]} T d\lambda$. La integral en el sentido de Lebesgue es igual a cero, ya que el conjunto $\{T(x) \neq 0\}$ es un conjunto de medida de Lebesgue nula. Además, T es discontinua en cada $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, lo que implica que el conjunto de puntos de discontinuidad de T es denso en $[0, 1]$.

Teorema 3.5. La función T , definida en (3.3), es continua en los irracionales de $[0, 1]$ y es discontinua en los racionales de $[0, 1]$.

Demostración.

Comenzaremos probando la discontinuidad sobre \mathbb{Q} . Tomamos un punto $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, con $\text{mcd}(p, q) = 1$. Por la densidad de los irracionales en \mathbb{R} , escogemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de irracionales de forma que $x_n \rightarrow y$ cuando n tiende a infinito. Ahora, por la forma en que está definida T , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \neq \frac{1}{q} = T(x_0),$$

luego T es discontinua en x_0 . La continuidad en los irracionales queda probada por el teorema 3.3. \square

Teorema 3.6. La función T , definida en (3.3), no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$.

Demostración.

Hemos probado en el teorema 3.5 que T no es continua en los racionales, luego basta con probar que T no es diferenciable en los irracionales. Para cada $z \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un entero r_n tal que $|\frac{r_n}{n} - z| \leq \frac{1}{n}$. Por definición de la función de Thomae, se tiene que $T(\frac{r_n}{n}) \geq \frac{1}{n}$, luego considerando el cociente incremental tenemos que

$$\left| \frac{T(\frac{r_n}{n}) - T(z)}{\frac{r_n}{n} - z} \right| = \frac{T(\frac{r_n}{n})}{|\frac{r_n}{n} - z|} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Como $\frac{r_n}{n} \rightarrow z$ cuando n tiende a infinito, acercándonos a z por racionales vemos que la derivada no puede ser nula, en cambio si realizamos una aproximación por irracionales, como la función es idénticamente 0, se tendría que su derivada también lo sería, lo que es un absurdo. \square

3.2.1. Composición de funciones integrables no integrable

En análisis real, las funciones integrables en el sentido de Riemann mantienen ser estables bajo operaciones como suma o producto. Sin embargo, la composición de funciones integrables puede no ser integrable. A continuación se presenta un ejemplo concreto que ilustra este fenómeno (ver [13]).

Ejemplo 3.7.

Sea T la función de Thomae, definida en (3.3). Sabemos que es una función continua en todos los números irracionales e integrable Riemann en $[0, 1]$. Si definimos ahora la

función g por $g(t) = 1$ si $t \neq 0$ y $g(0) = 0$, que es claramente integrable en el sentido de Riemann en $[0, 1]$, notamos que la composición $g \circ T$ es

$$(g \circ T)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$$

la cual es justamente la función D , definida en (3.2), y ya sabemos que no es integrable en el sentido de Riemann en $[0, 1]$.

3.2.2. Otras funciones relacionadas

Continuando con estas ideas, expondremos otros dos ejemplos con características peculiares en la misma línea de la función de Thomae T , definida en (3.3), que nos sirven como contraejemplos para otros resultados (ver [8, pág. 23-24]).

Ejemplo 3.8.

Sea $U : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$U(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \text{ con } \text{mcd}(p, q) = 1, q > 0, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

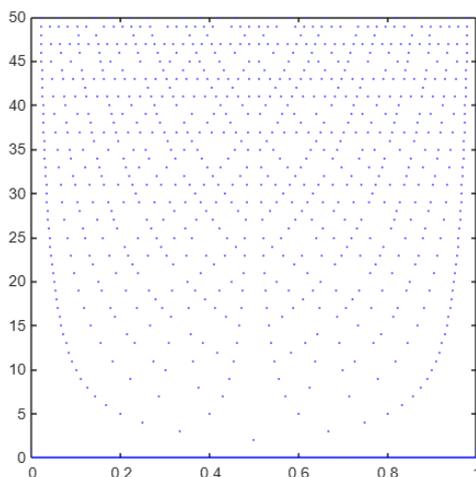


Figura 3.2: Función U

Notamos que tiene una estructura similar a la de Thomae, pero ahora en lugar de tomar por imagen para cada racional $\frac{p}{q}$ el valor $\frac{1}{q}$, se toma su inverso, es decir, q .

Teorema 3.9. *La función U , definida en (3.4), no está acotada en ningún entorno de ningún punto.*

Demostración.

Fijamos $x_0 \in [0, 1]$ y un entorno de $I_{x_0, \varepsilon} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$ de x_0 para $\varepsilon > 0$. Dado $q \in \mathbb{N}$, si $\frac{p}{q} \in I_{x, \varepsilon} \subset [0, 1]$, se tiene que $p \leq q$. Por reducción al absurdo, si U fuese

acotada en $I_{x,\varepsilon}$, se tendría por la definición de la función que para cada racional de la forma $\frac{p}{q} \in I_{x_0,\varepsilon}$, su denominador estaría acotado, es decir, existe $N > 0$ tal que $q \leq N$.

Luego el cardinal de los racionales de $I_{x_0,\varepsilon}$ será menor o igual que $N \cdot \max_{q \leq N} \{q\} < \infty$, en particular finito, lo cual nos lleva a una contradicción con la cardinalidad de \mathbb{Q} y concluimos que U no puede estar acotada en $I_{x_0,\varepsilon}$. \square

Nota 3.10. *Es posible una extensión de la función U (definida en (3.4)) a todo \mathbb{R} , manteniendo su característica principal enunciada en el teorema 3.9, y la demostración se repetiría de forma análoga.*

Ejemplo 3.11.

Sea $V : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^q q}{q+1} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \text{ con } \text{mcd}(p, q) = 1, q > 0, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

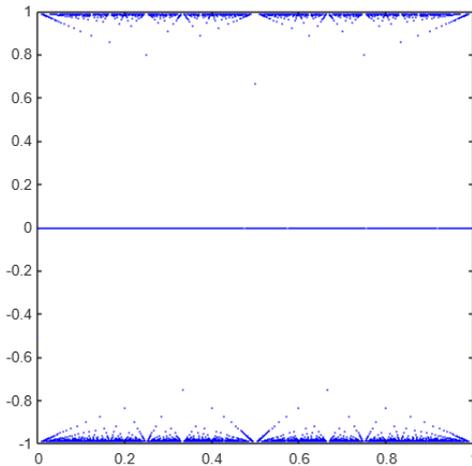


Figura 3.3: Función V

En este caso, notamos que la función V (definida en (3.5)) tiene un aspecto parecido a las anteriores (T (3.3) y U (3.4)), aunque ahora se toman también valores negativos como imagen, factor que resulta exclusivo de este ejemplo.

Teorema 3.12. *La función V , definida en (3.5), está acotada y no tiene extremos relativos en $[0, 1]$.*

Demostración.

La acotación se prueba fácilmente, ya que dado $x \in [0, 1]$, distinguimos dos casos: si $x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, entonces $|V(x)| = 0$, y si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ se tiene que

$$|V(x)| \leq \left| \frac{(-1)^q q}{q+1} \right| = \frac{q}{q+1} \leq 1.$$

Para demostrar que no tiene extremos relativos, razonamos por reducción al absurdo y suponemos que en un punto $x_0 \in [0, 1]$ se alcanza un máximo local (análogo para un mínimo). Por definición de máximo relativo, existe $\delta > 0$ tal que $V(x) \leq V(x_0)$ para cada $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0, 1]$. Distinguiamos ahora varios casos:

- Si $x_0 \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, entonces $V(x_0) = 0$. Por la densidad de los racionales con denominador par, existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ irreducible con b par. De esta manera se tiene que

$$V\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-1)^b b}{b+1} = \frac{b}{b+1} > 0 = V(x_0),$$

lo que nos lleva a contradicción.

- Si $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ con $\text{mcd}(p, q) = 1$ y $q > 0$ estudiemos las dos posibilidades que tenemos según la paridad de q .
 - Si q es impar, se tendría ahora por la densidad de \mathbb{I} en la recta real la existencia de un $y \in \mathbb{I} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Comparando las imágenes de ambos puntos llegamos a que

$$V(y) = 0 > \frac{-q}{q+1} = \frac{(-1)^q q}{q+1} = V(x_0).$$

- Si q es par, como la función $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ es creciente en el intervalo $[0, \infty)$, podemos elegir un $b \in \mathbb{N}$ par tal que $\frac{b}{b+1} > \frac{q}{q+1}$ y $a \in \mathbb{Z}$ impar como ajuste para que la fracción $\frac{a}{b}$ esté en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$. Realizando estos pasos concluimos que

$$V\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{b+1} > \frac{q}{q+1} = V\left(\frac{p}{q}\right) = V(x_0).$$

En ambas situaciones se finaliza con un absurdo, luego la función V no tiene extremos relativos en ningún entorno de ningún punto, por lo tanto no tiene extremos relativos en $[0, 1]$. □

Nota 3.13. Como en el ejemplo anterior, se puede extender la función V (definida en (3.5)) sobre toda la recta real y se seguiría cumpliendo que no tiene extremos relativos de forma análoga.

Capítulo 4

Análisis de Fourier

Aunque las series y transformadas de Fourier son herramientas fundamentales en análisis, ciertos contraejemplos muestran que su comportamiento puede ser muy distinto al esperado según lo que nos dicen los teoremas sobre análisis de Fourier.

En esta sección se presenta una serie trigonométrica convergente que, sin embargo, no puede ser la serie de Fourier de ninguna función integrable (en el sentido de Riemann y de Lebesgue), lo que contradice el hecho intuitivo de que toda serie trigonométrica convergente ha de ser la serie de Fourier de alguna función. También se incluye una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, que tiende a cero en el infinito, pero no es la transformada de Fourier de ninguna función de $L^1(\mathbb{R})$, mostrando que ni la pertenencia a la clase de funciones derivables infinitamente, ni la tendencia a 0 en el infinito, garantizan dicha representabilidad.

Estos contraejemplos exponen la importancia de distinguir con precisión entre la convergencia formal y puntual de una serie, su representabilidad como serie de Fourier, y la pertenencia de una función a determinados espacios de funciones, como es el caso de L^2 . Asimismo, destacan el papel fundamental que desempeñan las condiciones de integrabilidad y regularidad en los resultados clásicos de la teoría de Fourier.

4.1. Una serie trigonométrica convergente que no es serie de Fourier

Definición 4.1. Una serie trigonométrica es una serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

donde $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dada una función $f \in L^1([-\pi, \pi])$, la serie de Fourier asociada a f es la serie trigonométrica cuyos coeficientes se definen como

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

A estos valores se les da el nombre de coeficientes de Fourier. Es conocido del Grado en Matemáticas que toda $f \in L^2([-\pi, \pi])$ es el límite en L^2 de las sumas parciales de su serie

de Fourier, es decir, la serie de Fourier de f converge a f en la norma de L^2 . Sabemos que la serie de Fourier de cualquier función es serie trigonométrica. Ahora bien, el recíproco no es cierto, por lo que mostraremos dos ejemplos que exponen series trigonométricas convergentes que no son serie de Fourier de ninguna función (véase [8, pág. 70]).

Ejemplo 4.2.

Dado $x \in \mathbb{R}$, consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}, \quad \text{donde } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

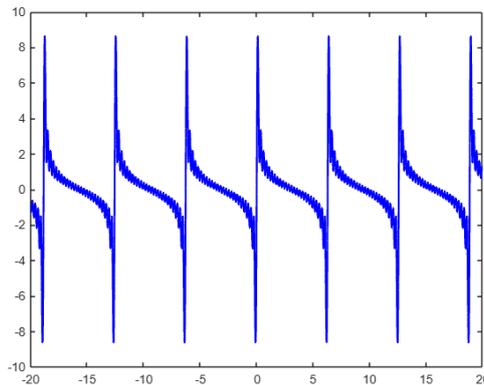


Figura 4.1: Serie definida en (4.1) con $\alpha = 0,3$

Lema 4.3. *La serie definida en (4.1) es una serie trigonométrica convergente para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración.

De acuerdo con la definición 4.1, es claro que la serie es de esa misma forma, donde $a_0 = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n = 0$ y $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Fijamos $x \in \mathbb{R}$. Para probar la convergencia escribimos la serie definida en (4.1) como $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$, con $c_n = \frac{1}{n^\alpha}$ y $d_n = \sin(nx)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por un lado tenemos que $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente que tiende hacia cero. Si probamos que la sucesión de sumas parciales de la serie con término principal d_n es acotada, aplicando el criterio de Dirichlet tendríamos el resultado.

Sea $\{S_N(x)\}_{N=1}^{\infty} := \left\{ \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right\}_{N=1}^{\infty}$ dicha sucesión de sumas parciales. Dado $x \in \mathbb{R}$, distinguimos dos casos:

- Si $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, para cada $N \in \mathbb{N}$, la suma parcial hasta N sería nula, por lo que no interfiere en la cota.
- Si $x \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ y veamos que podemos encontrar una cota común que no dependa de N para cada suma parcial. En la asignatura de Cálculo Infinitesimal se probó que

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Escribiendo la suma de esta manera y tomando valores absolutos, podemos acotarla por

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|},$$

ya que $|\sin(\theta)| \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

En cualquiera de los dos casos se tiene que $|S_N(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$. Notamos que la cota coincide para cada $N \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $\{S_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ está acotada, resultado que finaliza la demostración. □

Nota 4.4. Como la serie definida en (4.1) converge puntualmente podemos expresarla como una función real. De esta manera, es fácil ver que es periódica de periodo 2π , pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(x + 2\pi))}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx + 2n\pi)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha},$$

donde $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ y $x \in \mathbb{R}$. Este proceso es válido para cualquier serie trigonométrica convergente.

Teorema 4.5. La serie definida en (4.1) no puede ser la serie de Fourier de ninguna función integrable en el sentido de Riemann en $[-\pi, \pi]$.

Demostración.

Suponemos que existe tal función f cumpliendo las hipótesis del enunciado, cuya serie de Fourier sea $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, donde $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Como f es integrable en el sentido de Riemann en $[-\pi, \pi]$, entonces está acotada en dicho intervalo y pertenece a $L^2([-\pi, \pi])$ debido a que $|f(x)|^2$ también es integrable en el sentido de Riemann para este caso. $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert, por lo tanto aplicando la desigualdad de Bessel tenemos que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

De hecho la última desigualdad en este caso es una igualdad. El lado izquierdo de la desigualdad corresponde a una serie divergente, pues $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, tenemos que $0 < 2\alpha \leq 1$, y es conocido que las series armónicas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergen si y sólo si $p > 1$. En cambio, el lado derecho de la desigualdad es finito porque hemos supuesto que f es integrable Riemann, por lo tanto llegamos a una contradicción con la existencia de la función f . Entonces queda probado que la serie definida en (4.1) no es la serie de Fourier de ninguna función de $L^2([-\pi, \pi])$. □

Pasamos ahora a un segundo ejemplo de una serie trigonométrica que no es serie de Fourier de ninguna función integrable, este quizás más conocido.

Ejemplo 4.6.

Dado $x \in \mathbb{R}$, consideramos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}. \quad (4.2)$$

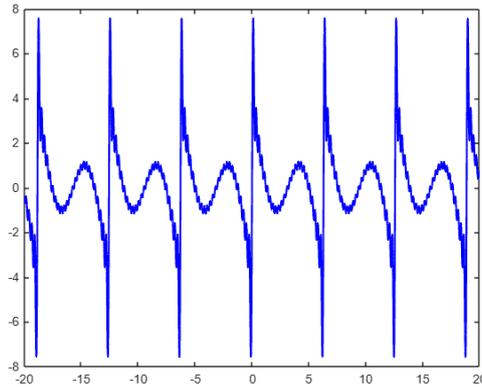


Figura 4.2: Serie definida en (4.2)

Lema 4.7. *La serie definida en (4.2) es una serie trigonométrica convergente para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración.

Al igual que en el ejemplo anterior, fijándonos en la definición 4.1 podemos identificar fácilmente que $a_0 = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n = 0$ y $b_n = \frac{1}{\ln(n)}$, luego esta serie es trigonométrica.

Tomemos $x \in \mathbb{R}$. Para probar la convergencia, repetimos el mismo razonamiento del lema 4.3. En este caso tenemos que la sucesión $\left\{ \frac{1}{\ln(n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y converge a cero. Por otro lado probábamos en dicho lema que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ estaba acotada, luego también lo estará si comenzamos en $n = 2$, por lo que aplicando el criterio de Dirichlet tendríamos el resultado. \square

Nota 4.8. *Al probar la convergencia puntual de la serie definida en (4.2), tenemos garantizada su igualdad a una función real para cada $x \in \mathbb{R}$. De nuevo, esta serie es periódica de periodo 2π y la prueba es análoga a la de la nota 4.4. En esta caso, nos interesa comprobar también que es impar, hecho que se debe a que la función seno lo es ($\sin(x) = -\sin(-x)$, $x \in \mathbb{R}$).*

Teorema 4.9. (Féjer) *Si una función f de $L^1([-\pi, \pi])$ tiene límites laterales en un punto x_0 , denotados por $f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$, respectivamente, entonces la serie de Fourier de f en x_0 converge al valor*

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

En particular, esto se cumple para las funciones de variación acotada.

La demostración de este resultado se puede encontrar en [7, teorema 3.3.1.]. Antes de enunciar el teorema principal del ejemplo, enunciamos un teorema que se ve en [20, pág. 12] y recordaremos la primera versión del teorema fundamental del cálculo integral.

Teorema 4.10. *Si una serie trigonométrica es serie de Fourier de una función integrable Lebesgue g y converge casi siempre a una función f , entonces $f = g$ casi en todos los puntos, por lo tanto f es integrable en el sentido de Lebesgue, y la serie trigonométrica dada es la serie de Fourier de f .*

Teorema 4.11. *(primera versión del teorema fundamental del cálculo integral)*
 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Definamos

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } x \in [a, b].$$

Entonces se cumple que

- La función F es continua en $[a, b]$.
- Si f es continua en un punto $x_0 \in (a, b)$, entonces F es derivable en x_0 y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Con estos resultados previos, estamos ya con las herramientas necesarias para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.12. *La serie definida en (4.2) no puede ser la serie de Fourier de ninguna función integrable en el sentido de Lebesgue en $[-\pi, \pi]$.*

Demostración.

Al igual que en el teorema 4.5, comenzamos suponiendo que existe una función f integrable en el sentido de Lebesgue cuya serie de Fourier sea (4.2), esto es $f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f es integrable Lebesgue, consideramos ahora la función

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Esta aplicación F es absolutamente continua por ser integral de una función integrable. Como vimos en la nota previa, f era impar, luego tratemos de estudiar la paridad de la función F . Realizando el cambio de variable $u = -t$ en la integral que define F se llega a

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x f(-u) (-du) = \int_0^x f(u) du = F(x),$$

lo que implica que F es par. Por tener esta propiedad, es conocido que su serie de Fourier será de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

donde es claro que $a_0 = a_1 = 0$, y para $n \geq 2$ como F es par, los coeficientes se calculan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} F(x) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F'(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\ln(k)} \cdot \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= -\frac{2}{\pi n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)} \int_0^\pi \sin(kx) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

En la resolución se ha aplicado la regla de integración por partes y se han sacado las constantes de la integral en el último paso. Se ha intercambiado serie e integral en el último paso debido al teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. También ha sido posible sustituir $F'(x)$ por $f(x)$ por consecuencia directa del teorema fundamental del cálculo integral en su primera versión (teorema 4.11), ya que nos dice que F' existe y es igual a f en casi todo punto. Ahora, si resolvemos la integral restante usando la ortogonalidad de las funciones seno en $[0, 1]$, resulta que

$$a_n = -\frac{2}{\pi n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)} \int_0^\pi \sin(kx) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{1}{\ln(n)} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{n \ln(n)}.$$

Como F es absolutamente continua, es de variación acotada. Según el teorema 4.9, la serie de Fourier de una función de variación acotada converge para todo punto, en particular, para $x = 0$. Si analizamos F en dicho valor tenemos que

$$F(0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)},$$

donde la serie es de Bertrand $\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta}\right)$ con $\alpha = \beta = 1$, la cual es conocido que es divergente, por lo que llegamos a contradicción con la convergencia puntual. Entonces la función f no es integrable Lebesgue. El lema 4.10 concluye con el resultado y queda probado que no puede ser serie de Fourier de ninguna función integrable Lebesgue. \square

Ejemplo de Kolmogorov

Observación 4.13.

A comienzos del siglo XX, el estudio de la convergencia de las series de Fourier era una de las cuestiones fundamentales del análisis. Si bien se conocía que las series de Fourier convergen en norma para funciones cuyo cuadrado es integrable, la situación era mucho más delicada para funciones simplemente integrables. En 1923, el joven Andréi Kolmogórov sorprendió a la comunidad matemática al construir una función integrable en $[-\pi, \pi]$, en el sentido de Lebesgue, cuya serie de Fourier diverge en todos los puntos. Este resultado, profundamente contraintuitivo, mostró que la integrabilidad no basta para garantizar convergencia puntual de la serie de Fourier, y marcó un hito en la teoría del análisis armónico. La construcción de Kolmogórov resulta complicada y tediosa, por lo que me restringiré a comentar solamente dicho ejemplo por su gran importancia, y su construcción puede encontrarse en [11].

4.2. Una función que no es transformada de Fourier

Este ejemplo se puede encontrar en [8, pág. 73]. Sea $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión doblemente infinita tal que la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pero la cual no define una función integrable en el sentido de Lebesgue en el intervalo $[-\pi, \pi]$. La existencia de tal sucesión es posible, como se muestra en los ejemplos de la sección anterior. Sabemos que se puede elegir de forma que $c_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y se cumpla que $c_n \rightarrow 0$ cuando $|n|$ tiende a infinito. Consideramos ahora una función auxiliar h , indefinidamente derivable, de forma que valga 0 fuera del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $h(0) = 2\pi$. Estamos en condiciones por tanto de definir la función principal del contraejemplo f como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h(x - n), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Lema 4.14. *La función f , definida en (4.3), está bien definida.*

Demostración.

Como h se anula fuera de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, tenemos que $h(y) = 0$ si $y < -\frac{1}{2}$ o $y > \frac{1}{2}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, para que el término $h(x - n)$ no sea cero, debe cumplirse que $x - n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, o lo que es lo mismo, $-\frac{1}{2} \leq x - n \leq \frac{1}{2}$. Despejando n tenemos que

$$x - \frac{1}{2} \leq n \leq x + \frac{1}{2}.$$

Si $x = k + \frac{1}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, existen dos posibles valores de n , y si x no es de esta forma, únicamente uno. Por lo tanto, la suma es finita para cada $x \in \mathbb{R}$, y f está bien definida. \square

Además, la serie definida en (4.3) es infinitamente derivable ya que, como es una suma finita en un entorno de cada punto, podemos realizar una diferenciación término a término. Entonces, dado $k = 1, 2, \dots$, su derivada de orden k es

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h^{(k)}(x - n).$$

Lema 4.15. *Si f es la función definida en (4.3), se tiene que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.*

Demostración.

Por la demostración del lema previo, sabemos que para cada $x \in \mathbb{R}$, la suma que define f tiene a lo sumo uno o dos términos no nulos. Dado $N > 0$, si $|x| \geq N$, la función se reduce a

$$f(x) = \sum_{|x| > N} c_n h(x - n),$$

la cual tiende a cero cuando N tiende a infinito por ser las colas de una serie convergente, luego $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$. \square

Definición 4.16. ([16, pág. 201]) Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$, es decir, g es una función integrable en el sentido de Lebesgue en \mathbb{R} . La transformada de Fourier de g se define como la función $\widehat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Previo al enunciado del teorema que nos garantiza la existencia de funciones que no son la transformada de Fourier de ninguna función integrable, es necesario para su demostración estudiar la fórmula de sumación de Poisson (ver [4]).

Teorema 4.17. (fórmula de sumación de Poisson)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función cumpliendo las hipótesis de la definición anterior. Entonces se cumple que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n),$$

donde $\widehat{f}(\xi)$ es la transformada de Fourier de f .

Demostración.

Consideramos la función F definida como

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k),$$

la cual es 1-periódica. Por lo tanto, admite una expresión en serie de Fourier como

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi i n x},$$

donde los coeficientes de Fourier d_n vienen dados por

$$\begin{aligned} d_n &= \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) \right) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi i n x} dx. \end{aligned}$$

Hemos podido intercambiar la serie con la integral debido a que $\sum_k f(x+k)$ converge absolutamente ya que f es integrable. Realizamos el cambio de variable $s = x+k$, de modo que cuando x recorre $[0, 1]$, t recorre $[k, k+1]$. Así,

$$d_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(s) e^{-2\pi i n (s-k)} ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(s) e^{-2\pi i n s} e^{2\pi i n k} ds.$$

Como $e^{2\pi i n k} = 1$ para $n, k \in \mathbb{Z}$, se obtiene que

$$d_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(s) e^{-2\pi i n s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i n s} ds.$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de F es

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-2\pi ins} ds \right) e^{2\pi inx}.$$

En particular, evaluando en $x = 0$ se obtiene que

$$F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-2\pi ins} ds.$$

Finalmente, usando la definición de la transformada de Fourier se llega a que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-2\pi ins} ds = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(2\pi n).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n),$$

lo que concluye la demostración de la fórmula de sumación de Poisson. \square

Teniendo esto en cuenta, pasamos al enunciado del teorema principal de esta última sección.

Teorema 4.18. *La función f , definida en (4.3), no es la transformada de Fourier de ninguna función integrable Lebesgue.*

Demostración.

Suponemos que F es una función integrable en el sentido de Lebesgue que cumple que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

El factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ lo consideraremos dentro de F para agilizar los cálculos. Definimos ahora la siguiente función:

$$g(t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(t + 2\pi m), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como F es integrable Lebesgue, g está bien definida para casi todo t , pues la suma $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |F(t + 2\pi m)|$ es finita para casi todo t , porque sino fuese así, la integral de F sería infinita. Además, g es periódica de periodo 2π , ya que tras hacer un cambio de variable $l = m + 1$ y por la fórmula de sumación de Poisson (teorema 4.17), se sigue que

$$\begin{aligned} g(t + 2\pi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(t + 2\pi + 2\pi m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(t + (m + 1)2\pi) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} F(t + 2\pi l) = g(t). \end{aligned}$$

También de la integrabilidad de F , obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(t + 2\pi m) \right| dt \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t + 2\pi m)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

por lo que g pertenece a $L^1([-\pi, \pi])$. Ahora, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t + 2\pi m) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t + 2\pi m) e^{-in(t+2\pi m)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} f(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k h(n - k) = \frac{c_n}{2\pi} h(0) = c_n. \end{aligned}$$

En otras palabras, los valores c_n son los coeficientes de Fourier de la función g , que es integrable en el sentido de Lebesgue, lo cual es contradictorio, pues en este caso los c_n serían los coeficientes de Fourier de una función integrable en el sentido de Lebesgue. Este hecho establece que F no puede ser la transformada de Fourier de una función integrable en el sentido de Lebesgue. □

Conclusiones

Este trabajo ha sido un recorrido por algunos de los contraejemplos más sorprendentes y reveladores del análisis matemático. Lejos de ser simples rarezas, estos ejemplos nos han permitido ver con claridad que muchas afirmaciones que parecen evidentes no siempre se cumplen. Empezamos estudiando funciones como la de Weierstrass, que es continua en todos los puntos pero no derivable en ninguno, lo cual choca con la intuición que solemos tener sobre las funciones continuas y derivables. Más adelante, vimos casos como el de funciones no monótonas en ningún intervalo o funciones que, a pesar de tener derivada positiva casi en todo su dominio, no son crecientes.

Una de las ideas más interesantes que ha surgido a lo largo del trabajo es cómo ciertas funciones, como la de Cantor o la de Thomae, se reutilizan para construir otros contraejemplos que rompen con propiedades clásicas: desde funciones sin extremos relativos hasta funciones con derivada positiva en casi todo punto pero sin ser crecientes en ningún subintervalo de su dominio. También se ve un ejemplo que parece contradecir el teorema de derivación bajo el signo integral. En la última parte, al adentrarnos en las series de Fourier, vimos cómo incluso en contextos muy estructurados aparecen comportamientos inesperados. En conjunto, estos ejemplos no solo nos ayudan a entender mejor los resultados del análisis, sino que también nos enseñan a pensar con más cuidado y profundidad sobre lo que realmente significan sus hipótesis.

Bibliografía

- [1] Billingsley P. , “Van der Waerden’s Continuous Nowhere Differentiable Function”, *The American Mathematical Monthly*, 89(9), 691, 1982.
- [2] Bogachev V.I., “Measure Theory, Vol. 1”, Springer, Berlin 2007.
- [3] Cerdà J., “Análisis Real”, Edicions Universitat de Barcelona, 2000.
- [4] Chamizo Lorente F., Raboso Paniagua D., “La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos”, Universitat Autònoma de Barcelona, 2007.
- [5] Fernández Tojo F. A., “Introducción al estudio de funciones de una variable real”, Servizo de Publicacións e Intercambio Científico, 2022.
- [6] Gaitán A., Sáenz R. A., “La función de Takagi”, *Miscelánea Matemática*, 61 (43-55), 2015.
- [7] Grafakos L., “Classical Fourier Analysis”, Springer, 2008.
- [8] Gelbaum G.R., Olmsted J.M.H., “Counterexamples in Analysis”, Dover Books on Mathematics, 1962.
- [9] Grabinsky G., “La función continua no diferenciable de Weierstrass”, *Miscelánea Matemática*, 25 (29-38), 1997.
- [10] Hardy G. H., “Weierstrass’s non-differentiable function”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 17, No. 3, pp. 301–325, 1916.
- [11] Kolmogoroff A., “Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout”, *Fundamenta Mathematicae*, 4 (324–328), 1923.
- [12] Kupers A., “On Space-Filling Curves and the Hahn-Mazurkiewicz Theorem”, Universidad de Toronto, 2020.
- [13] Ortega J. M., “Introducción al análisis matemático”, Universitat Autònoma de Barcelona, 1993.
- [14] Rajwade A.R., Bhandari, A.K., “Surprises and Counterexamples in Real Function Theory”, Hindustan Book Agency, 2007.
- [15] Royden H., Fitzpatrick P., “Real Analysis”, cuarta edición, Pearson, 2010.
- [16] Rudin W., “Real and Complex Analysis”, tercera edición, McGraw-Hill, 1987.

- [17] Sagan H., “Space-filling curves”, Springer-Science + Bussines Media, LLC, 1994.
- [18] Schilling R.L., Kühn F., “Counterexamples in Measure and Integration”, Cambridge University Press, 2021.
- [19] Vallin R. W., “The elements of de Cantor sets: with aplications”, John Wiley & Sons Inc., 2013.
- [20] Zygmund A., “Trigonometric series”, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press (1-34), 2003.

Índice de figuras

1.1.	Función de Weierstrass	10
1.2.	Función g_1 distancia entera	14
1.3.	Función g de Takagi-van der Waerden	16
1.4.	Función acotada pero sin extremos absolutos	20
1.5.	Función con extremo absoluto pero sin cambio de signo en la derivada	23
1.6.	Función s círculo unitario	24
2.1.	Conjunto de Cantor	28
2.2.	Primera iteración de la construcción geométrica de la curva de Lebesgue	32
2.3.	Primera iteración de la construcción por curvas poligonales de la curva de Lebesgue	33
2.4.	Primera y segunda iteración de la construcción de la curva de Peano	38
2.5.	Función de Cantor	41
2.6.	Función $\tilde{\phi}(x) + x$	46
2.7.	Función h	52
2.8.	Función u de la descomposición de Jordan de h	53
2.9.	Función v de la descomposición de Jordan de h	53
3.1.	Función de Thomae	61
3.2.	Función U	63
3.3.	Función V	64
4.1.	Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$	68
4.2.	Serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$	70