



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

**Exponentes característicos de Lyapunov:
Teoría y Computación.**

Autor: Guillermo Muñoz Hernández

Tutores: Óscar Angulo Torga y Miguel Ángel López Marcos

2025

A mis padres y a mis hermanas, por haber estado a mi lado toda mi vida apoyándome en las decisiones que tomo, por enseñarme que, cuando se cierra una puerta, se abre una ventana, y por ser los que hacen que me levante cada día con ganas de dar lo máximo de mí.

A mis tíos y a mis abuelos, por estar también ahí siempre y por haber celebrado conmigo todos mis logros siempre que han podido.

A mis amigos, por acompañarme en este viaje y hacer que estos cinco años hayan sido inolvidables.

A Lucía, por enseñarme a ver siempre el lado bueno de todas las cosas y por ser capaz de sacarme una sonrisa en cualquier momento.

A todos los profesores que han dedicado todo su esfuerzo a enseñarnos la belleza de las matemáticas, y a afrontar la vida con una visión crítica y rigurosa.

En especial, a mis tutores, Óscar y Miguel Ángel, por sus incansables correcciones, consejos de mejora, y por los ánimos que me han dado en los momentos más bajos durante la realización de este trabajo.

RESUMEN

Los exponentes de Lyapunov miden el ritmo exponencial con el que dos trayectorias infinitesimalmente próximas se separan con el tiempo en un sistema dinámico. En este trabajo se presenta un estudio conciso de los exponentes característicos de Lyapunov, desde su definición para sistemas lineales hasta su extensión a sistemas no lineales.

Además, se describen dos métodos numéricos para calcularlos basados en las factorizaciones QR y SVD, y se implementan en MATLAB, comparándolos en términos de precisión empleando diferentes sistemas lineales. Por último, se utiliza el método QR para estudiar cómo la variación de los parámetros del atractor de Lorenz afecta a los exponentes de Lyapunov con el fin de caracterizar la presencia o ausencia de caos.

Palabras clave: Exponentes de Lyapunov, sistemas de ecuaciones diferenciales, factorización QR, descomposición SVD.

ABSTRACT

Lyapunov exponents measure the exponential rate at which two infinitesimally close trajectories diverge over time in a dynamical system. This work presents a concise study of Lyapunov characteristic exponents, from their definition for linear systems to their extension to nonlinear systems. Additionally, two numerical methods for computing them, based on QR and SVD factorizations, are described and implemented in MATLAB, comparing their accuracy across various linear systems. Finally, the QR method is employed to examine how variations in the Lorenz attractor's parameters affect the Lyapunov exponents, with the aim of characterizing the presence or absence of chaos.

Keywords: Lyapunov exponents, systems of differential equations, QR factorization, SVD decomposition.

ÍNDICE GENERAL

1	Conceptos previos	1
1.1	Ecuaciones diferenciales lineales	1
1.2	Normas matriciales inducidas	3
1.2.1	Equivalencia de normas	5
1.3	Límites superiores e inferiores	5
2	Exponentes de Lyapunov	7
2.1	Definición clásica	7
2.2	Una definición más formal	8
2.2.1	Exponentes de Lyapunov de matrices	16
2.2.2	Exponentes de Lyapunov de ecuaciones diferenciales lineales	18
2.3	Regularidad de ecuaciones diferenciales lineales	23
2.3.1	Reducción a un sistema triangular superior	27
2.3.2	Caracterizaciones de la regularidad	35
2.4	Sistemas no lineales	45
2.4.1	La ecuación variacional	45
2.4.2	Relación con los exponentes de Lyapunov	47
2.4.3	El teorema multiplicativo de Oseledec	48
3	Computación	49
3.1	Método QR continuo	49
3.1.1	Descripción del método	50
3.1.2	Implementación	53
3.1.3	Paso adaptativo	54
3.2	Método SVD continuo	57
3.2.1	Algoritmo SVD continuo	61

4	Resultados numéricos	67
4.1	Método QR	67
4.1.1	Ejemplo 1	67
4.1.2	Ejemplo 2	69
4.1.3	Ejemplo 3	70
4.1.4	Ejemplo 4	71
4.2	Método SVD	72
4.2.1	Ejemplo 1	72
4.2.2	Ejemplo 2	74
4.3	El atractor de Lorenz	76
4.3.1	Variación de los parámetros	79
4.3.2	La “ <i>mariposa</i> ” de Lorenz	84
5	Conclusiones	87
A	Tableros de Butcher	89
A.1	Pareja 5-4 Dormand-Prince: DP5	89
A.2	Esquema Runge-Kutta de orden 4: la regla 3/8 RK38	90
B	Programas del método QR	91
B.1	Método de paso fijo	91
B.2	Métodos de paso variable	93
B.2.1	Cuadratura de μ_i	93
B.2.2	Integración numérica de μ_i	96
B.2.3	Códigos para las gráficas del atractor de Lorenz	100
C	Programas del método SVD	103
C.1	Método con paso fijo	103
C.2	Método de paso variable	106

ÍNDICE DE FIGURAS

4.1	Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 3 con el método QR.	71
4.2	Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 4 con el método QR (sistema no regular).	72
4.3	Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 1 con el método SVD de paso fijo.	74
4.4	Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 2 con el método SVD de paso variable.	76
4.5	Evolución temporal de las aproximaciones para el atractor de Lorenz con métodos QR de paso variable.	78
4.6	Trayectoria del atractor de Lorenz para $\sigma = 16$, $\beta = 4.0$ y $\rho = 45.92$	79
4.7	Dependencia de las aproximaciones con el parámetro β para el atractor de Lorenz.	80
4.8	Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.133$: $\lambda_1 = -0.0002$, $\lambda_2 = -0.0396$, $\lambda_3 = -4.4247$	81
4.9	Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.139$: $\lambda_1 = -0.0014$, $\lambda_2 = -0.1055$, $\lambda_3 = -4.3785$	81
4.10	Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.143265$: $\lambda_1 = 0.0257$, $\lambda_2 = 0.0001$, $\lambda_3 = -4.5261$	82

4.11	Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.143566$: $\lambda_1 = 0.0014$, $\lambda_2 = -0.0052$, $\lambda_3 = -4.4976$	82
4.12	Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.143846$: $\lambda_1 = 0.0303$, $\lambda_2 = -0.0024$, $\lambda_3 = -4.5301$	83
4.13	Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.148$: $\lambda_1 = 0.0662$, $\lambda_2 =$ -0.0046 , $\lambda_3 = -4.5784$	83
4.14	Trayectorias para el atractor de Lorenz con diferentes condiciones iniciales: $\beta = 0.133$	83
4.15	Trayectorias para el atractor de Lorenz con diferentes condiciones iniciales: $\beta = 0.148$	84
4.16	Trayectoria para la <i>mariposa</i> Lorenz: $\lambda_1 = 0.8779$, $\lambda_2 = -0.0067$, $\lambda_3 =$ -14.5047	85

ÍNDICE DE TABLAS

4.1	Resultados del Ejemplo 1 con el método QR.	68
4.2	Resultados del Ejemplo 2 con el método QR utilizando la matriz identidad como condición inicial.	69
4.3	Resultados del Ejemplo 2 con el método QR utilizando una matriz aleatoria generada con <code>rand</code> como condición inicial.	70
4.4	Resultados del Ejemplo 3 con el método QR utilizando una matriz aleatoria generada con <code>rand</code> como condición inicial.	71
4.5	Resultados del Ejemplo 4 con el método QR (sistema no regular).	72
4.6	Resultados del Ejemplo 1 con el método SVD de paso fijo.	73
4.7	Resultados del Ejemplo 2 con el método SVD de paso variable.	75
4.8	Resultados del atractor de Lorenz: Comparación de los dos programas QR de paso variable.	78

INTRODUCCIÓN

En 1892, el matemático ruso, Aleksandr Lyapunov, estudió en su tesis doctoral el problema de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales [1]. Tras su publicación, esta obra fue traducida al francés en 1907 bajo el título *Problém Général de la Stabilité du Mouvement*; al ruso en 1949, y no fue hasta 1992 –un siglo después de su defensa– que se tradujo por primera vez al inglés.

El objetivo principal de Lyapunov era estudiar la estabilidad asintótica de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes dependientes del tiempo, frente a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales. Para ello, introdujo una nueva herramienta, a la que denominó números característicos, conocidos a día de hoy como *exponentes de Lyapunov*. Estos permiten caracterizar el ritmo de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas.

En este trabajo vamos a realizar una introducción teórica del concepto de exponentes de Lyapunov, presentando inicialmente la definición clásica y, posteriormente, dando una formalización más general, siguiendo el enfoque axiomático desarrollado por Barreira [2]. Esta formulación permite tratar de manera unificada tanto sistemas dinámicos discretos como continuos, caracterizando los exponentes de Lyapunov como funciones que verifican una serie de propiedades fundamentales.

No obstante, en la mayoría de los sistemas dinámicos de interés, calcular analíticamente los exponentes de Lyapunov resulta inviable, por lo que su aproximación numérica se vuelve indispensable. Con este objetivo, en esta memoria se desarrollan e implementan dos métodos numéricos basados, respectivamente, en la factorización QR y en la descomposición en valores singulares de matrices fundamentales de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, con el fin de aproximar dichos exponentes. Finalmente, se aplican estos métodos a distintos sistemas, tanto lineales como no lineales, para probar su validez y precisión.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS PREVIOS

Antes de comenzar, conviene revisar algunos conceptos fundamentales sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, ya que el cálculo de los exponentes de Lyapunov va a girar en torno a estos. Para ello, seguiremos los libros de Adrianova [3], Perko [4] y Fernández [5]. Introduciremos también otras herramientas básicas, como las normas matriciales inducidas y los límites superiores e inferiores de funciones, los cuales van a estar presentes tanto en la definición de los exponentes de Lyapunov asociados a ecuaciones diferenciales lineales y como en el cálculo de sus propiedades.

1.1 Ecuaciones diferenciales lineales

Sea J un intervalo de interior no vacío de \mathbb{R} , $\mathbf{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial continua de clase $\mathcal{C}^k(J)$, con $k \geq 1$, y sea $A : J \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función matricial continua, donde $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales. Denominaremos sistema homogéneo al siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

donde hemos utilizado la notación $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$.

Dados $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in J \subset \mathbb{R}$, resolver el problema de valor inicial asociado al sistema homogéneo (1.1) consiste en hallar una función vectorial $\mathbf{x}(t)$ que sea derivable en J y que satisfaga

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A(t)\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Es bien conocido el siguiente resultado de existencia y unicidad de solución del problema (1.2).

Teorema 1.1. Si $A(t)$ es una función matricial continua para todo $t \in J \subset \mathbb{R}$, el problema de valor inicial (1.2) tiene una única solución definida en todo el intervalo J .

Por otro lado, se tiene que $\mathbf{x}(t)$ es solución del problema de valor inicial (1.2) en $J \subset \mathbb{R}$, con $t_0 \in J$, si, y solamente si, $\mathbf{x}(t)$ satisface la ecuación integral

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s)\mathbf{x}(s) ds,$$

para cada $t \in J$.

Denotemos ahora por \mathcal{S} al conjunto de las soluciones del sistema homogéneo (1.1). Se tiene que \mathcal{S} es un espacio vectorial de dimensión n . Podemos entonces encontrar un conjunto de soluciones $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$ del sistema homogéneo (1.1) que formen una base de \mathcal{S} . En este caso, se tiene que $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)\}$ forman, a su vez, una base de \mathbb{R}^n . Además, la solución general del sistema homogéneo vendrá dada, para cada $t \in J$, por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t), \quad (1.3)$$

donde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2. Consideremos n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo (1.1), $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$. Diremos que estas funciones forman un sistema fundamental de soluciones, y llamaremos *matriz fundamental del sistema* a la matriz $X(t)$ que tiene por columnas a estas n soluciones independientes. Si además se verifica que $X(t_0) = I_n$, con I_n la matriz identidad de orden n , la denominaremos matriz fundamental principal en $t = t_0$, y la denotaremos por $\Psi(t, t_0)$.

Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo (1.1). Entonces, el conjunto completo de soluciones del sistema viene dado por

$$X(t) \mathbf{c},$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ es un vector de \mathbb{R}^n , pues

$$X(t) \mathbf{c} = c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t).$$

Se tiene además que $X(t)$ verifica el sistema diferencial matricial

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (1.4)$$

Veamos el siguiente resultado que nos servirá para caracterizar algunas propiedades de $X(t)$:

Teorema 1.3 (de Liouville). Sea $X(t)$ una función matricial cuyas n columnas son soluciones del sistema homogéneo (1.1). Entonces, el determinante de $X(t)$, $\det X(t)$, es solución de la ecuación diferencial escalar lineal homogénea

$$\dot{y} = \text{tr}(A(t))y.$$

donde $\text{tr}(A(t))$ denota su traza. Por lo tanto,

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \right), \quad (1.5)$$

para todo $t \in J$, y para cada $t_0 \in J$ fijo.

Dada una matriz de soluciones, es condición necesaria y suficiente para que $X(t)$ sea matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo (1.1) que exista un instante de tiempo $t_0 \in J$ tal que $\det X(t_0) \neq 0$. Además, por (1.5), $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \in J$, si,

y solamente si, $\det X(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in J$.

Por otro lado, se tiene que si $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo (1.1), y C es una matriz cuadrada invertible, entonces, $X(t)C$ es matriz de soluciones, pues sus columnas son combinaciones lineales de las columnas de $X(t)$; es decir, la columna j -ésima de $X(t)C$ es combinación lineal de $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ con coeficientes c_{1j}, \dots, c_{nj} , para cada $j = 1, \dots, n$.

Si C es invertible, entonces, $\det(X(t)C) \neq 0$, pues $\det X(t) \neq 0$. Por lo tanto, $X(t)C$ también es matriz fundamental del sistema; en otras palabras, el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial matricial (1.4) están dadas por

$$\{X(t)C : C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ y } \det C \neq 0\}.$$

En lo que sigue, consideraremos, sin pérdida de generalidad, que $J = [0, +\infty)$ y que $t_0 = 0$, ya que estaremos interesados únicamente en el comportamiento asintótico de las soluciones para el estudio de los exponentes de Lyapunov. Denotaremos a la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ por $\Psi(t)$; es decir, $\Psi(0) = I_n$. Entonces, si $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ es la única solución del problema de valor inicial (1.2) definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \Psi(t)\mathbf{x}_0.$$

Recordemos, por último, el siguiente resultado.

Lema 1.4 (Desigualdad de Gronwall). Sean $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tales que $t_0 < t_1$; $u, v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas con $v(t)$ no negativa para todo $t \in [t_0, t_1]$, y sea $c \in \mathbb{R}$ una constante que verifican

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s)v(s) ds,$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, se tiene que

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right), \quad (1.6)$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

1.2 Normas matriciales inducidas

A lo largo de este trabajo nos va a interesar caracterizar el comportamiento de las soluciones de (1.1) en términos del tamaño de la matriz de coeficientes del sistema. Para ello, vamos a considerar normas en el espacio de las matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Definición 1.5. Comencemos recordando que una norma vectorial es una aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| \geq 0$; y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si, y solo si, $\mathbf{x} = 0$.
2. Para todo \mathbf{x} vector de \mathbb{R}^n y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$.

3. Para cada par de vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbb{R}^n , se verifica la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| .$$

Algunos ejemplos de normas en \mathbb{R}^n son la norma p ,

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

definida para todo $p \in [1, \infty)$, o la norma infinito,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$

Sea entonces $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden n . Se puede extender de forma natural el concepto de norma para el espacio de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sin embargo, de especial interés serán las normas matriciales que tienen en cuenta el operador lineal asociado a la matriz.

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n , se define la norma matricial inducida por $\|\cdot\|$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} = \sup \{ \|A\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1 \} . \quad (1.7)$$

Esta norma mide la máxima expansión que A produce en cualquier vector de norma 1 bajo la norma dada. Para esta norma inducida se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 1.6. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una norma vectorial y $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la norma matricial inducida definida en (1.7). Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\|A\| \geq 0$ para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y $\|A\| = 0$ si, y sólo si, $A = 0$.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para cada $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$, para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
5. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, para cada $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$.
7. $\|I_n\| = 1$, con $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz identidad de orden n .
8. $\rho(A) \leq \|A\|$, para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donde $\rho(A)$ es el radio espectral de A , esto es, el máximo de los módulos de los autovalores de A .

Algunas de las normas matriciales más usadas en álgebra numérica son las normas p , con $p \geq 1$. Por ejemplo, para $p = 1$,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| ,$$

para $p = \infty$,

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

y para $p = 2$,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sigma(A^T A)},$$

donde $\sigma(A^T A)$ es el radio espectral de $A^T A$, es decir, el autovalor de mayor módulo [6].

1.2.1 Equivalencia de normas

En espacios de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. Esto significa que, dadas dos normas cualesquiera $\|\cdot\|_{\alpha}$ y $\|\cdot\|_{\beta}$, existen constantes positivas $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_{\alpha} \leq \|\mathbf{x}\|_{\beta} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_{\alpha}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, desde el punto de vista de la convergencia, da igual con qué normas vectoriales en \mathbb{R}^n trabajemos, aunque sus propiedades geométricas puedan diferir.

Algunas desigualdades entre las normas vectoriales más comunes son las siguientes:

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_{\infty}.$$

En particular, en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se traslada la equivalencia a las normas matriciales inducidas. Si $\|\cdot\|_{\alpha}$ y $\|\cdot\|_{\beta}$ son normas matriciales inducidas, entonces, existen constantes $c'_1, c'_2 > 0$ tales que

$$c'_1 \|A\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\beta} \leq c'_2 \|A\|_{\alpha}, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1.3 Límites superiores e inferiores

Como veremos más adelante, la definición de exponente de Lyapunov va a estar dada en términos de límites superiores, lo que nos permitirá estudiar el comportamiento asintótico aún cuando la función dada no converja. Nos limitaremos a definir los límites superior e inferior en el infinito, ya que son los que utilizaremos.

Definición 1.7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define el límite superior de f cuando t tiende a $+\infty$ de la siguiente manera:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \inf_{M > 0} \sup_{t > M} f(t).$$

De manera análoga, definimos el límite inferior de f como

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \sup_{M > 0} \inf_{t > M} f(t).$$

Se verifican las siguientes propiedades [7]:

1. $\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

2. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ otra función continua. Si existen $\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ y $\limsup_{t \rightarrow +\infty} g(t)$, entonces, el límite superior satisface la subaditividad:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (f(t) + g(t)) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} g(t)$$

3. De manera análoga, si existen $\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ y $\liminf_{t \rightarrow +\infty} g(t)$, entonces, el límite inferior satisface la superaditividad:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} (f(t) + g(t)) \geq \liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t) + \liminf_{t \rightarrow +\infty} g(t)$$

4. Si existe un cierto $t_0 \geq 0$ tal que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq t_0$, entonces,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} g(t) \text{ y } \limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} g(t)$$

5. Además, si existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, entonces,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

CAPÍTULO 2

EXPONENTES DE LYAPUNOV

Uno de los principales intereses en el estudio de los sistemas dinámicos es analizar el comportamiento de sus trayectorias a largo plazo y, en particular, analizar su estabilidad frente a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales. En este contexto, los exponentes de Lyapunov surgen como una herramienta fundamental para cuantificar la sensibilidad de un sistema a dichas perturbaciones. Los exponentes de Lyapunov cuantifican el ritmo con el que dos trayectorias infinitesimalmente cercanas inicialmente se separan, o se acercan, con el tiempo [8].

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación derivable con derivadas continuas y, por tanto, localmente lipschitziana. Para el estudio que vamos a realizar a lo largo de este trabajo, estaremos interesados en sistemas dinámicos continuos y deterministas de la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$; es decir, supondremos que su solución está definida, al menos, en $[0, +\infty)$. Denotamos por $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ a la solución del problema de valor inicial (2.1), y asumiremos que esta tiene una trayectoria acotada. Algunas herramientas que sirven para analizar el problema de valor inicial (2.1) están basadas en la información espectral, es decir, en el conjunto de exponentes de Lyapunov asociados al sistema variacional a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$:

$$\dot{Y} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))Y,$$

donde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$ es la matriz jacobiana de \mathbf{f} evaluada a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ para todo $t \geq 0$. Por ello, en lo que sigue, sin pérdida de generalidad, nos limitaremos a estudiar el sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

2.1 Definición clásica

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la única solución del sistema homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, con $A : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que verifica que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Sea $X(t)$ una matriz fundamental

del sistema. Siguiendo la definición clásica que dio Lyapunov en su tesis [1], definimos las siguientes cantidades:

$$\lambda_i = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|X(t)\mathbf{e}_i\|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

donde \mathbf{e}_i es el i -ésimo vector de la base canónica. Cuando se minimiza la suma $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ respecto a todas las matrices fundamentales posibles del sistema homogéneo (2.2), los valores λ_i se denominan números característicos, o exponentes característicos de Lyapunov del sistema (ver [9]), y se dice que la matriz fundamental en la que se alcanza dicho mínimo, $X(t)$, forma una base normal; o bien, que $X(0)$ forma una base normal. Además, se suelen ordenar los exponentes de Lyapunov como

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Naturalmente, podemos redefinir (2.3) en términos de la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ [10]; esto es, si $X(0)$ es una base normal, y denotamos por $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a sus columnas, entonces, los exponentes característicos de Lyapunov vienen dados por

$$\lambda_i = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t)\mathbf{x}_i\|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

2.2 Una definición más formal

Como hemos comentado en la introducción de este trabajo, en el libro de Luís Barreira [2] se desarrolla la teoría sobre los exponentes de Lyapunov procediendo inicialmente de manera axiomática, con la ventaja de que así se pueden aislar algunas propiedades y resultados que aparecen en diferentes problemas, pero que se pueden tratar de manera unificada. Vamos a definir los exponentes de Lyapunov como funciones que verifican una serie de propiedades y, posteriormente, daremos fórmulas concretas para diferentes casos y veremos que estas verifican las propiedades de la definición axiomática que damos a continuación, recuperando la expresión original dada por Lyapunov en el caso de sistemas homogéneos.

Definición 2.1. Sea $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una función, con $n \in \mathbb{N}$. Diremos que λ es un *exponente de Lyapunov* si verifica las siguientes propiedades:

1. $\lambda(\alpha \mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$, para cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y para cada escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$.
2. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \max\{\lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y})\}$, para cada par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\lambda(\mathbf{0}) = -\infty$.

Nótese que el concepto de “*exponente de Lyapunov*” que acabamos de definir se refiere a la función λ , y no a algún valor $\lambda(\mathbf{x})$ que pueda tomar esta. Nótese también que la función λ puede tomar el valor $-\infty$ sobre vectores no nulos.

Estableceremos más adelante la conexión entre estas dos definiciones de exponentes de Lyapunov al comprobar que las funciones construidas a partir de soluciones del sistema (como en la primera definición) verifican los axiomas de la segunda, permitiendo así recuperar la definición clásica como un caso particular dentro del marco axiomático, el cual nos permite estudiar sistemas más generales.

Proposición 2.2. Si $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es un exponente de Lyapunov, entonces,

$$\lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m) \leq \text{máx} \{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)\},$$

para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$, con $m \in \mathbb{N}$

Demostración. Vamos a probar este resultado por inducción sobre el número de vectores m . Para $m = 2$ es la propiedad 2 en la definición de exponente de Lyapunov y, si lo suponemos cierto para $m - 1$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m) &= \lambda((\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{m-1}) + \mathbf{x}_m) \\ &\leq \text{máx} \{\lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{m-1}), \lambda(\mathbf{x}_m)\} \\ &\leq \text{máx} \{\text{máx} \{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_{m-1})\}, \lambda(\mathbf{x}_m)\} \\ &= \text{máx} \{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)\}. \end{aligned}$$

□

A partir de este razonamiento y por la definición, se deduce también que el exponente de Lyapunov de cualquier combinación lineal de vectores está acotado por el mayor exponente de los vectores.

Corolario 2.3. Si $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es un exponente de Lyapunov, entonces,

$$\lambda(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m) \leq \text{máx} \{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)\},$$

para cualesquiera $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$, y para cada $m \in \mathbb{N}$.

Veamos algunas propiedades básicas que se siguen de la definición que acabamos de dar de exponente de Lyapunov.

Teorema 2.4. Sea λ un exponente de Lyapunov. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\lambda(\mathbf{x}) \neq \lambda(\mathbf{y})$, entonces, se verifica la siguiente igualdad:

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \text{máx} \{\lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y})\}.$$

2. Si existen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, tales que $\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)$ son distintos dos a dos, entonces, se verifica que

$$\lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m) = \text{máx} \{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)\}.$$

3. Si existen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, tales que $\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)$ son distintos dos a dos, entonces, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ son linealmente independientes.

4. λ puede tomar, a lo sumo, n valores distintos en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Demostración.

1. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\lambda(\mathbf{x}) \neq \lambda(\mathbf{y})$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lambda(\mathbf{x}) < \lambda(\mathbf{y})$. Entonces, por definición de exponente de Lyapunov,

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \max\{\lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y})\} = \lambda(\mathbf{y}).$$

Así pues, aplicando de nuevo la definición, podemos construir la siguiente cadena de desigualdades:

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \lambda(\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y} + \mathbf{x} + (-\mathbf{x})) \leq \max\{\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \lambda(\mathbf{x})\}, \quad (2.5)$$

pues $\lambda(-\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$, por definición de exponente de Lyapunov. Si ocurriera que

$$\max\{\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \lambda(\mathbf{x})\} = \lambda(\mathbf{x}),$$

entonces, siguiendo la cadena de desigualdades (2.5), llegaríamos a que $\lambda(\mathbf{y}) \leq \lambda(\mathbf{x})$, lo que es absurdo pues va en contra de la hipótesis de que $\lambda(\mathbf{x}) < \lambda(\mathbf{y})$. Ha de ser entonces que

$$\max\{\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \lambda(\mathbf{x})\} = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}),$$

de manera que todo son igualdades en (2.5) y queda que

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}) = \max\{\lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y})\},$$

como se quería probar.

2. Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que $\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)$ son distintos dos a dos. Veamos por inducción que

$$\lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m) = \max\{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)\}.$$

El caso $m = 2$ está probado en el apartado anterior. Supongámoslo cierto para $m - 1$. Entonces,

$$\lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{m-1}) = \max\{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_{m-1})\} \neq \lambda(\mathbf{x}_m),$$

pues hemos supuesto que $\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)$ son distintos dos a dos. Tenemos así que $\lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{m-1})$ y $\lambda(\mathbf{x}_m)$ son distintos, luego podemos aplicar el caso para dos vectores y obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m) &= \lambda((\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{m-1}) + \mathbf{x}_m) \\ &= \max\{\lambda(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{m-1}), \lambda(\mathbf{x}_m)\} \\ &= \max\{\max\{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_{m-1})\}, \lambda(\mathbf{x}_m)\} \\ &= \max\{\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)\}, \end{aligned}$$

quedando así probado lo que buscábamos.

3. Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tales que $\lambda(\mathbf{x}_1), \dots, \lambda(\mathbf{x}_m)$ son distintos dos a dos. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ son linealmente dependientes. Entonces, existen coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son no nulos, con $1 \leq k \leq m$, y que el resto sí lo son. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0},$$

y, por definición de exponente de Lyapunov, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} -\infty &= \lambda(\mathbf{0}) = \lambda\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{x}_j\right) = \lambda\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{x}_j\right) \\ &= \max_{j=1, \dots, k} \{\lambda(\alpha_j \mathbf{x}_j)\} = \max_{j=1, \dots, k} \{\lambda(\mathbf{x}_j)\} \neq -\infty, \end{aligned}$$

llegando así a una contradicción. Entonces, ha de ser que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ son linealmente independientes.

4. \mathbb{R}^n es un espacio vectorial de dimensión n , por lo que n es precisamente el máximo número de vectores linealmente independientes que podemos obtener. Por lo tanto, por el apartado anterior, λ no puede tomar más de n valores distintos en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

□

Hemos probado con este teorema que el exponente de Lyapunov $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ toma, a lo sumo, n valores distintos en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sea $r \leq n$ este número de valores distintos y los denotamos por

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_r,$$

habiéndolos ordenado de manera creciente. Nótese que, en general, puede darse que λ_1 sea $-\infty$. Además, podemos añadir $\lambda_0 = -\infty$.

Nos va a ser de utilidad definir a continuación una serie de subespacios de \mathbb{R}^n que van a estar relacionados con los valores del exponente de Lyapunov.

Definición 2.5. Consideremos, para cada $i = 1, \dots, r$, el siguiente conjunto asociado al i -ésimo valor distinto del exponente de Lyapunov, λ_i :

$$E_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_i\}. \quad (2.6)$$

Definimos $E_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Proposición 2.6. El conjunto E_i es un subespacio de \mathbb{R}^n para cada $i = 0, 1, \dots, r$, y se tiene la siguiente cadena de contenciones:

$$\{\mathbf{0}\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_r = \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Demostración. Veamos en primer lugar que estos conjuntos, así definidos, son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n . Claramente, E_0 lo es. Sea $i \in \{1, \dots, r\}$ fijo y sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_i$ de forma que

$$\lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_i \quad \text{y} \quad \lambda(\mathbf{y}) \leq \lambda_i.$$

Tomamos dos escalares cualesquiera, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por la Definición 2.1 de exponente de Lyapunov, tenemos que

$$\lambda(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \leq \max \{ \lambda(\alpha \mathbf{x}), \lambda(\beta \mathbf{y}) \} = \max \{ \lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y}) \} \leq \lambda_i.$$

Entonces, $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in E_i$.

Sean ahora $1 \leq i < j \leq r$. Entonces, $\lambda_i < \lambda_j$, así que para cada $\mathbf{x} \in E_i$,

$$\lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_i < \lambda_j,$$

luego $\mathbf{x} \in E_j$; es decir, $E_i \subset E_j$. Además, como λ toma los r valores distintos, existe un cierto $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\lambda(\mathbf{x}_j) = \lambda_j > \lambda_i$, de manera que $\mathbf{x}_j \in E_j$ y $\mathbf{x}_j \notin E_i$, luego $E_i \neq E_j$. Como i y j eran arbitrarios con la condición de que i fuese estrictamente menor que j , queda probada la cadena de contenciones del enunciado para $1 \leq i < j \leq r$. Además, claramente, $E_0 \subseteq E_1$ y, siguiendo un razonamiento similar al anterior, existe $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\lambda(\mathbf{x}_1) = \lambda_1$, luego $\mathbf{x}_1 \in E_1$ y $E_0 \neq E_1$.

Por último, se verifica que $E_r = \mathbb{R}^n$, pues λ_r es el mayor valor que toma el exponente de Lyapunov, luego $\lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_r$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y se tiene que $\mathbf{x} \in E_r$. □

Definición 2.7. Se denomina *filtración de \mathbb{R}^n* a una colección de subespacios de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{V} = \{E_i : i = 0, 1, \dots, r\},$$

que satisface la propiedad (2.7). En caso de que la filtración provenga del exponente de Lyapunov λ de la forma descrita en la Definición 2.5, la llamaremos *filtración asociada a λ* y la denotaremos por \mathcal{V}_λ .

Definición 2.8. Se denomina multiplicidad de λ_i , para cada $i = 1, \dots, r$, al siguiente valor:

$$k_i = \dim E_i - \dim E_{i-1}. \quad (2.8)$$

A continuación, vamos a caracterizar un exponente de Lyapunov en términos de una filtración mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.9. Una función $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, con $\lambda(\mathbf{0}) = -\infty$, es un exponente de Lyapunov si, y solo si, existen r números reales $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$, con $r \leq n$, y una filtración \mathcal{V} de \mathbb{R}^n , tales que para cada $i = 1, \dots, r$, y para cada $\mathbf{x} \in E_i \setminus E_{i-1}$, se tiene que $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_i$. En tal caso, escribiremos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\lambda$.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que λ es un exponente de Lyapunov. Sabemos que λ toma r valores distintos sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sean $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ estos valores y consideremos la filtración asociada al exponente de Lyapunov λ :

$$\mathcal{V}_\lambda = \{E_i : i = 0, 1, \dots, r\}.$$

Entonces, para cada $i = 1, \dots, r$, y para cada $\mathbf{x} \in E_i \setminus E_{i-1}$, se tiene que

$$\lambda_{i-1} < \lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_i.$$

Sin embargo, como λ no puede tomar un valor intermedio, ha de ser que $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_i$.

Veamos ahora la otra implicación. Sea λ una función tal que $\lambda(\mathbf{0}) = -\infty$, y sean $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ los distintos valores que toma la función λ , con $r \leq n$. Sea \mathcal{V} la filtración verificando que $\lambda(\mathbf{x}_i) = \lambda_i$ si $\mathbf{x}_i \in E_i \setminus E_{i-1}$, para cada $i = 1, \dots, r$. Veamos que λ cumple las tres propiedades de la Definición 2.1.

Nótese que podemos escribir \mathbb{R}^n como unión disjunta de los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{R}^n = E_0 \cup (E_1 \setminus E_0) \cup (E_2 \setminus E_1) \cup \dots \cup (E_r \setminus E_{r-1}), \quad (2.9)$$

y que, si $\mathbf{x} \in E_i$, entonces, $\lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_i$ para cada $i = 1, \dots, r$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

$$\lambda(\alpha\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{0}) = -\infty.$$

Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por (2.9), existe un cierto $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\mathbf{x} \in E_i \setminus E_{i-1}$, y por tanto, $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_i$. Por otro lado, como E_i es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , $\alpha\mathbf{x} \in E_i$. Sin embargo, $\alpha\mathbf{x} \notin E_{i-1}$ porque, en caso contrario, se tendría que $\mathbf{x} = \alpha^{-1}(\alpha\mathbf{x}) \in E_{i-1}$, lo cual es absurdo. Como conclusión, $\alpha\mathbf{x} \in E_i \setminus E_{i-1}$, lo que implica que

$$\lambda(\alpha\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) = \lambda_i.$$

Sean ahora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Si alguno de ellos, o los dos, es $\mathbf{0}$, entonces, trivialmente,

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \max\{\lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y})\}.$$

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, existen $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $\mathbf{x} \in E_i \setminus E_{i-1}$ e $\mathbf{y} \in E_j \setminus E_{j-1}$. Por lo tanto,

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_i \quad \text{y} \quad \lambda(\mathbf{y}) = \lambda_j.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lambda_i \leq \lambda_j$. Como consecuencia, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_j$ y, como es subespacio vectorial, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E_j$, por lo que

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \lambda_j = \max\{\lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y})\}.$$

Por último, la tercera propiedad de la definición es inmediata ya que hemos supuesto que la función λ toma el valor $-\infty$ en $\mathbf{0}$, luego queda probado que la función λ es un exponente de Lyapunov. □

Resultará útil, como veremos más adelante, establecer una relación entre las filtraciones y ciertas bases de \mathbb{R}^n .

Definición 2.10. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ una base de \mathbb{R}^n .

1. Diremos que \mathcal{B} es normal respecto a una filtración $\mathcal{V} = \{E_0, E_1, \dots, E_r\}$ si, para cada $i = 1, \dots, r$, existe una base \mathcal{B}_i del subespacio E_i formada por $n_i = \dim E_i$ vectores de la base \mathcal{B} .
2. Sea λ un exponente de Lyapunov. Si una base \mathcal{B} es normal respecto a la filtración \mathcal{V}_λ , diremos también que es normal respecto a λ .

3. Diremos que una base normal respecto a una filtración $\mathcal{V} = \{E_0, E_1, \dots, E_r\}$ está ordenada si los vectores $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ forman una base de E_i para cada $i = 1, \dots, r$.

En otras referencias, como [3] o [8], se realiza la siguiente definición alternativa:

Definición 2.11. Diremos que una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ de \mathbb{R}^n es normal respecto a un exponente de Lyapunov λ si

$$\sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{y}_i),$$

para cualquier otra base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ de \mathbb{R}^n .

Se puede observar que la primera definición de base normal implica la segunda.

Definición 2.12. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Definimos el producto escalar usual en \mathbb{R}^n como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

Denotamos por δ_{ij} a la delta de Kronecker, que nos servirá para la siguiente definición.

Definición 2.13. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ dos bases de \mathbb{R}^n . Diremos que \mathcal{B} y \mathcal{B}' son duales si $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \rangle = \delta_{ij}$, para todo par de índices $i, j = 1, \dots, n$.

Nótese que, dada una base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ de \mathbb{R}^n , el conjunto de condiciones

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

define, para cada $j = 1, \dots, n$ fijo, un sistema de n ecuaciones con n incógnitas para las componentes de \mathbf{y}_j . La matriz de coeficientes tiene por columnas a los vectores de una base, luego es invertible y el sistema tiene solución única para cada $j = 1, \dots, n$; en otras palabras, la base dual $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ de una base dada es única.

Definición 2.14. Diremos que dos exponentes de Lyapunov λ y μ son duales si para cada par de bases duales cualesquiera de \mathbb{R}^n , $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$, se verifica lo siguiente:

$$\lambda(\mathbf{x}_i) + \mu(\mathbf{y}_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definición 2.15. Se define el coeficiente de Grobman, o coeficiente de regularidad, de un par de exponentes de Lyapunov duales (λ, μ) como sigue:

$$\gamma(\lambda, \mu) = \min_{\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^n} \max \{ \lambda(\mathbf{x}_i) + \mu(\mathbf{y}_i) : \mathbf{x}_i \in \mathcal{B}, \mathbf{y}_i \in \mathcal{B}', 1 \leq i \leq n \}, \quad (2.10)$$

donde el mínimo se toma sobre cualquier par de bases duales \mathcal{B} y \mathcal{B}' de \mathbb{R}^n .

Proposición 2.16. El coeficiente de Grobman γ de un par de exponentes de Lyapunov duales (λ, μ) verifica las siguientes propiedades:

1. $\gamma(\mu, \lambda) = \gamma(\lambda, \mu)$
2. $\gamma(\lambda, \mu) \geq 0$

Demostración.

1. La propiedad de dualidad de bases es simétrica, por lo tanto, de (2.10) se obtiene que

$$\gamma(\mu, \lambda) = \gamma(\lambda, \mu).$$

2. Se sigue de la Definición 2.14 de exponentes de Lyapunov duales.

□

A partir de estas definiciones, introducimos el concepto de regularidad de Lyapunov.

Definición 2.17. Se dice que un par de exponentes de Lyapunov duales (λ, μ) es regular en el sentido de Lyapunov si su coeficiente de Grobman es nulo; es decir, si $\gamma(\lambda, \mu) = 0$.

Si bien ahora puede parecer que se trata de una definición abstracta, al final de este capítulo daremos otro enfoque a la regularidad en el sentido de Lyapunov de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Vamos a enunciar a continuación, sin demostrarlos, dos resultados que serán necesarios para probar el Teorema 2.39. El primero trata sobre la existencia de un par de bases duales normales asociadas a un par de exponentes de Lyapunov duales, (λ, μ) , y el segundo presenta algunas propiedades que presentan los pares de exponentes duales regulares. Sean entonces

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_r \quad \text{y} \quad \mu_1 > \dots > \mu_s$$

los distintos valores que toman λ y μ , respectivamente, en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, con $r, s \leq n$. Consideremos de nuevo los subespacios E_i dados por la Definición 2.5 para el exponente de Lyapunov λ , para cada $i = 1, \dots, r$, y los correspondientes F_j para el exponente μ , para cada $j = 1, \dots, s$.

Vamos a considerar también los valores que toma el exponente λ en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, contando con sus respectivas multiplicidades, a los cuales denotaremos de la siguiente manera:

$$\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_n,$$

obtenidos repitiendo cada valor distinto λ_i un número de veces igual a su multiplicidad, k_i , dada por (2.8), para cada $i = 1, \dots, r$. De manera similar, denotamos por

$$\mu'_1 \geq \dots \geq \mu'_n$$

a los valores que toma el exponente de Lyapunov dual μ en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ repetidos con sus multiplicidades.

Proposición 2.18. Siempre podemos encontrar bases duales $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ y $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ de \mathbb{R}^n que sean normales respecto a los exponentes de Lyapunov duales λ y μ , respectivamente.

Teorema 2.19. Sea (λ, μ) un par de exponentes de Lyapunov duales. Entonces, $\gamma(\lambda, \mu) = 0$ si, y solo si, para cualesquiera bases duales $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ e $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ de \mathbb{R}^n se verifica que

$$\lambda(\mathbf{x}_i) + \mu(\mathbf{y}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se tiene también que

$$\lambda'_i + \mu'_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pueden encontrarse demostraciones de estos resultados en [2, Sección 2.4].

Una vez que hemos establecido las propiedades que ha de cumplir una función para que esta sea un exponente de Lyapunov y que hemos probado algunos resultados relacionados, vamos a exponer dos ejemplos concretos de funciones que cumplen las propiedades de la Definición 2.1.

2.2.1 Exponentes de Lyapunov de matrices

Fijada $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n , para la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ consideramos la norma matricial de A inducida por la norma vectorial:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} = \sup \{ \|A\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1 \}.$$

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de matrices $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, invertibles para cada $i \in \mathbb{N}$, y definimos

$$\mathcal{A}_i = \begin{cases} A_{i-1} \dots A_1 & , \text{ si } i > 1, \\ I_n & , \text{ si } i = 1. \end{cases}$$

En lo que sigue estaremos interesados en aquellas sucesiones $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ que verifiquen que

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i\| < \infty. \quad (2.11)$$

Proposición 2.20. Si la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es tal que $\{\|\mathcal{A}_i\|\}_{i=1}^{\infty}$ está acotada, entonces se verifica la condición (2.11).

Demostración. Existe un cierto $M > 1$ tal que $\|A_i\| \leq M$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces, aplicando las propiedades de la norma matricial inducida,

$$\frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i\| = \frac{1}{i} \log \|A_{i-1} \dots A_1\| \leq \frac{1}{i} \log (\|A_{i-1}\| \dots \|A_1\|) \leq \frac{1}{i} \log (M^{i-1}) \leq \frac{i-1}{i} \log M,$$

para cada $i \in \mathbb{N}$, luego

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i\| \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{i-1}{i} \log M = \log M < \infty.$$

□

Así pues, se define ahora la siguiente función:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \lambda(\mathbf{x}) = \limsup_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i \mathbf{x}\|, \text{ si } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} &\longmapsto -\infty. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Proposición 2.21. La función λ definida en (2.12) es un exponente de Lyapunov, que llamaremos *exponente de Lyapunov asociado a la sucesión* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Demostración. En primer lugar, veamos que si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces, $\lambda(\mathbf{x}) < \infty$. Por utilizar una norma matricial inducida, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i \mathbf{x}\| \leq \frac{1}{i} \log(\|\mathcal{A}_i\| \|\mathbf{x}\|) \leq \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i\| + \frac{1}{i} \log \|\mathbf{x}\| ,$$

y, aplicando la condición (2.11),

$$\lambda(\mathbf{x}) = \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i \mathbf{x}\| \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i\| < \infty .$$

Veamos ahora que se verifican las tres propiedades de la Definición 2.1:

1. Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \neq 0$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha \mathbf{x} = \mathbf{0}$ y se cumple. Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces,

$$\lambda(\alpha \mathbf{x}) = \limsup_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i \alpha \mathbf{x}\| = \limsup_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} (\log |\alpha| + \log \|\mathcal{A}_i \mathbf{x}\|) = \lambda(\mathbf{x}) .$$

2. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Aplicando la desigualdad triangular y las propiedades de la norma matricial inducida,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \log \|\mathcal{A}_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})\| &= \frac{1}{n} \log \|\mathcal{A}_k \mathbf{x} + \mathcal{A}_k \mathbf{y}\| \\ &\leq \frac{1}{k} \log(\|\mathcal{A}_k \mathbf{x}\| + \|\mathcal{A}_k \mathbf{y}\|) \\ &\leq \frac{1}{k} \log(\max\{2\|\mathcal{A}_k \mathbf{x}\|, 2\|\mathcal{A}_k \mathbf{y}\|\}) \\ &\leq \max\left\{\frac{1}{k} \log \|\mathcal{A}_k 2\mathbf{x}\|, \frac{1}{k} \log \|\mathcal{A}_k 2\mathbf{y}\|\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i 2\mathbf{x}\|, \sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i 2\mathbf{y}\|\right\} , \end{aligned}$$

por ser el logaritmo una función estrictamente creciente y k fijo. Como k era arbitrario, esto se verifica para cada $k \in \mathbb{N}$, luego

$$\sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i(\mathbf{x} + \mathbf{y})\| \leq \max\left\{\sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i 2\mathbf{x}\|, \sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i 2\mathbf{y}\|\right\} ,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\inf_{k \geq 0} \sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i(\mathbf{x} + \mathbf{y})\| \leq \max\left\{\inf_{k \geq 0} \sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i 2\mathbf{x}\|, \inf_{k \geq 0} \sup_{i \geq k} \frac{1}{i} \log \|\mathcal{A}_i 2\mathbf{y}\|\right\} .$$

Como esto último es, precisamente, la definición de límite superior, aplicando la definición de exponente de Lyapunov, concluimos que

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \max\{\lambda(2\mathbf{x}), \lambda(2\mathbf{y})\} = \max\{\lambda(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y})\} .$$

3. Por definición, hemos puesto que $\lambda(\mathbf{0}) = -\infty$.

□

2.2.2 Exponentes de Lyapunov de ecuaciones diferenciales lineales

Pasamos ahora a considerar el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales,

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

y, para ello, supongamos que $A : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una función matricial continua tal que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|A(s)\| ds < \infty. \quad (2.14)$$

Nótese que, de nuevo, si A es acotada, esta condición se verifica, pues si

$$\sup_{t \geq 0} \|A(t)\| < +\infty,$$

entonces existe $M > 0$ tal que $\|A(t)\| \leq M$ para cada $t \geq 0$. Así pues, si $t > 0$,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|A(s)\| ds \leq \frac{M}{t} \int_0^t ds = \frac{M}{t} t = M,$$

y, por lo tanto,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|A(s)\| ds \leq M.$$

Sea ahora $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A(t)\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

el cual tiene solución única definida en $[0, +\infty)$.

Definición 2.22. Sea $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ la única solución del problema de valor inicial (2.15). Se define el exponente de Lyapunov $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ asociado al sistema de ecuaciones diferenciales lineales (2.13) como sigue:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \mathbf{x}_0 &\longmapsto \lambda(\mathbf{x}_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\|, \quad \text{si } \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} &\longmapsto -\infty. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observación 2.23. La función λ definida en (2.16) está bien definida para $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ya que la única solución del problema de valor inicial (2.15) que se anula en $t_0 = 0$ es la solución idénticamente nula para todo $t \geq 0$.

Observación 2.24. Sea $\Psi(t)$ la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ del sistema homogéneo (2.13), y $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ la única solución definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Entonces, $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \Psi(t)\mathbf{x}_0$, luego el exponente de Lyapunov asociado al sistema se puede escribir también como

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t)\mathbf{x}_0\|,$$

para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. De este modo, recuperamos la definición clásica (2.4) para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

A continuación, utilizaremos el Lema de Gronwall 1.4 para establecer una cota superior de la solución del problema de valor inicial (2.15), la cual nos será de utilidad para demostrar que la función definida en (2.16) verifica las tres propiedades de la Definición 2.1 de exponente de Lyapunov.

Proposición 2.25. Sea $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ la única solución del problema de valor inicial (2.15) definida en $[0, +\infty)$. Entonces, la siguiente desigualdad es cierta:

$$\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| \exp \left(\int_0^t \|A(s)\| ds \right).$$

Demostración. La función $\mathbf{x} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución del problema del valor inicial (2.15) si, y solo si, lo es de la ecuación integral

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t A(s)\mathbf{x}(s; \mathbf{x}_0) ds, \quad t \geq 0. \quad (2.17)$$

Tomamos la norma a ambos lados de la igualdad (2.17) y aplicamos la desigualdad triangular, que la norma matricial está inducida por una norma vectorial, y que la norma de la integral es menor o igual que la integral de la norma:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| &\leq \|\mathbf{x}_0\| + \left\| \int_0^t A(s) \mathbf{x}(s; \mathbf{x}_0) ds \right\| \\ &\leq \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t \|A(s) \mathbf{x}(s; \mathbf{x}_0)\| ds \\ &\leq \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t \|A(s)\| \|\mathbf{x}(s; \mathbf{x}_0)\| ds. \end{aligned}$$

Por último, basta aplicar la desigualdad de Gronwall (1.6) con $t_0 = 0$, $t \in [0, +\infty)$, $u(t) = \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\|$, $v(t) = \|A(t)\|$ y $c = \|\mathbf{x}_0\|$, para obtener el resultado deseado:

$$\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| \exp \left(\int_0^t \|A(s)\| ds \right).$$

□

Veamos entonces que la función λ asociada al sistema homogéneo es, en efecto, un exponente de Lyapunov según la Definición 2.1.

Proposición 2.26. La función $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ asociada al sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ definida por (2.16) es un exponente de Lyapunov.

Demostración. Sea $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ la única solución del problema de valor inicial (2.15) definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, y sea λ la función definida en (2.16). Veamos, en primer lugar, que $\lambda(\mathbf{x}_0) < \infty$. Aplicando la Proposición 2.25, si $t > 0$,

$$\frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| \leq \frac{1}{t} \left(\log \|\mathbf{x}_0\| \exp \left(\int_0^t \|A(s)\| ds \right) \right) \leq \frac{1}{t} \left(\log \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t \|A(s)\| ds \right).$$

Entonces, tomando límites superiores,

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\log \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t \|A(s)\| ds \right) < +\infty,$$

por la condición (2.14).

Veamos ahora que se verifican las tres propiedades de la Definición 2.1:

1. Sea $\alpha \neq 0$ y sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\alpha \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ y

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \lambda(\alpha \mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{0}).$$

Si $\mathbf{x}_0 \neq 0$, sea $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ la única solución del problema de valor inicial (2.15) definida para todo $t \geq 0$. Entonces, $\alpha \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ es solución del sistema lineal homogéneo, pues el conjunto de sus soluciones es un espacio vectorial, y además,

$$\alpha \mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \alpha \mathbf{x}_0.$$

Por lo tanto, por la unicidad de soluciones,

$$\mathbf{x}(t; \alpha \mathbf{x}_0) = \alpha \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha \mathbf{x}_0) &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \alpha \mathbf{x}_0)\| = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\alpha \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\log |\alpha| + \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| \right) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| \\ &= \lambda(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

2. Sean $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$ la únicas soluciones del problema de valor inicial definidas para todo $t \geq 0$ con $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}(0; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$, respectivamente. Entonces,

$$\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) + \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$$

es la única solución del problema con $\mathbf{z}(0; \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0$, luego

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) + \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)) &= \lambda(\mathbf{z}_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0)\| \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) + \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)\|. \end{aligned}$$

Además, para cada $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) + \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)\| &\leq \frac{1}{t} \log (\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| + \|\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)\|) \\ &\leq \frac{1}{t} \log \left(\max \{2 \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\|, 2 \|\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)\|\} \right) \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{t} \log \|2\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\|, \frac{1}{t} \log \|2\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)\| \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, haciendo un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición 2.21, concluimos que

$$\lambda(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0) \leq \max \{ \lambda(2\mathbf{x}_0), \lambda(2\mathbf{y}_0) \} = \max \{ \lambda(\mathbf{x}_0), \lambda(\mathbf{y}_0) \}.$$

3. Por definición, $\lambda(\mathbf{0}) = -\infty$, pues $\mathbf{x}(t; \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $t \geq 0$.

□

Veamos ahora un primer ejemplo de exponente de Lyapunov asociado a un sistema homogéneo:

Ejemplo 2.27. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= \left[\sin(\log(t+1)) + \cos(\log(t+1)) \right] x_2, \end{cases} \quad (2.18)$$

definido para cada $t \geq 0$. Como las ecuaciones están desacopladas, podemos obtener la matriz fundamental principal en $t = 0$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{(t+1)\sin(\log(t+1))} \end{pmatrix}$$

Para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, definimos como en (2.16),

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)\| = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t)\mathbf{x}_0\|,$$

donde $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ es la única solución de (2.18) definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Considerando, por ejemplo, la norma euclídea, se tiene que

$$\lambda((1, 0)) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log(e^{-t}) = -1,$$

y

$$\lambda((0, 1)) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} (t+1) |\sin \log(t+1)| = 1,$$

pues $\lim_{t \rightarrow +\infty} \log(t+1) = +\infty$ y $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sin(t) = 1$. Sean ahora $a, b \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lambda((a, b)) &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{a^2 e^{-2t} + b^2 e^{2(t+1)\sin \log(t+1)}} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t} \log(b^2 e^{2(t+1)\sin \log(t+1)}) \\ &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log b + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t} \log(e^{2(t+1)\sin \log(t+1)}) = 1. \end{aligned}$$

Como sabíamos, λ solamente toma un número finito de valores; en este caso, $-\infty$, -1 y 1 .

Tras haber analizado este ejemplo, pasamos ahora a estudiar el exponente dual μ del exponente de Lyapunov λ asociado a un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Para ello, consideremos en primer lugar el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} &= -A(t)^T \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{y} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función derivable, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A(t)^T$ es la traspuesta de $A(t)$. De nuevo, la solución de este problema existe, es única y está definida en todo $I = [0, +\infty)$. Denominaremos *sistema adjunto* al sistema (2.19), y vamos a asociarle su correspondiente exponente de Lyapunov μ :

$$\mu(\mathbf{y}_0) = \begin{cases} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)\| & , \text{ si } \mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}, \\ -\infty & , \text{ si } \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}. \end{cases}$$

donde $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$ es la única solución del problema de valor inicial definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{y}(0; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$.

Proposición 2.28. Sea $A : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función matricial continua. Entonces, los exponentes de Lyapunov λ y μ asociados a los sistemas homogéneos

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{y}} = -A(t)^T\mathbf{y},$$

respectivamente, son duales en el sentido de la Definición 2.14.

Demostración. Consideremos dos vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, con $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle = 1$. Sean $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$ las únicas soluciones de los problemas (2.15) y (2.19), respectivamente, definidas para todo $t \geq 0$. Para simplificar la notación, pondremos $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$. Entonces, para cada $t \geq 0$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle \right) = \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{y}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{y}}(t) \rangle = \langle A(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), -A(t)^T\mathbf{y}(t) \rangle.$$

Ahora, el producto escalar de dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , que los escribiremos como vectores columna, es $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$, luego

$$\langle A(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), -A(t)^T\mathbf{y}(t) \rangle = \mathbf{x}(t)^T A(t)^T \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)^T A(t)^T \mathbf{y}(t) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle \right) = 0,$$

y se tiene de este modo que

$$\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0) \rangle = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle = 1,$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$1 = |\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle| \leq \|\mathbf{x}(t)\| \|\mathbf{y}(t)\|,$$

para todo $t \geq 0$. Además, como

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}_0) + \mu(\mathbf{y}_0) &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\| + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{y}(t)\| \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left(\log \|\mathbf{x}(t)\| + \log \|\mathbf{y}(t)\| \right) \\ &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left(\log (\|\mathbf{x}(t)\| \|\mathbf{y}(t)\|) \right) \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left(\log |\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle| \right) \\ &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log 1 = 0, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\lambda(\mathbf{x}_0) + \mu(\mathbf{y}_0) \geq 0.$$

Por último, como para cada par de bases duales de \mathbb{R}^n , $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ e $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$, se tiene que $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \rangle = 1$, para cada $i = 1, \dots, n$, entonces,

$$\lambda(\mathbf{x}_i) + \mu(\mathbf{y}_i) \geq 0,$$

para cada $i = 1, \dots, n$, luego λ y μ son duales según la Definición 2.14. □

2.3 Regularidad de ecuaciones diferenciales lineales

Continuamos ahora con el estudio detallado de los exponentes de Lyapunov definidos a partir de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferencial lineales. En esta sección, nos centraremos en establecer ciertas cotas para el coeficiente de Grobman, que resultarán útiles para demostrar varios resultados relacionados con la regularidad del sistema en el sentido de Lyapunov. Conviene recordar que seguimos suponiendo que se cumple la condición de acotación (2.14), la cual se verifica si la función matricial $A(t)$ está acotada para todo $t \geq 0$.

Definición 2.29. Diremos que el sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ es regular en el sentido de Lyapunov si los exponentes λ y μ asociados al sistema homogéneo y a su sistema adjunto (2.19), respectivamente, son regulares en el sentido de Lyapunov.

Originalmente, Lyapunov [1] denominó *regulares* a aquellos sistemas en los que el límite superior que aparece en (2.16) es, en realidad, un límite. Además, en algunos textos, como en [8], se denominan exponentes de Lyapunov *exactos* a los valores obtenidos en tal caso, $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$, con $r \leq n$.

Presentamos a continuación un resultado que emplearemos en varias demostraciones a lo largo de esta sección:

Lema 2.30 (Desigualdad de Hadamard). Sea A una matriz cuadrada de orden n que tiene por columnas a los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$|\det A| \leq \prod_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea.

Demostración. Si A es singular, se verifica la desigualdad, pues $\det A = 0$. Supongamos entonces que $\det A \neq 0$, y denotemos por B a la matriz que tiene por columnas a los vectores

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

obtenida dividiendo cada columna de A por su norma. Entonces, por las propiedades de los determinantes,

$$|\det A| = \left(\prod_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\| \right) |\det B|.$$

Por lo tanto, si vemos que $|\det B| \leq 1$, habremos probado el resultado. Consideremos la matriz $C = B^T B$, y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios. Como C es simétrica, estos son reales por el Teorema Espectral. Ahora, como las columnas de B tienen norma uno, y $C = B^T B$, los elementos diagonales de C son

$$c_{ii} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle = \|\mathbf{b}_i\|^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

luego $\text{tr}(C) = n$. Entonces, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\det C = \prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^n = \left(\frac{1}{n} \text{tr}(C) \right)^n = 1^n = 1.$$

Finalmente, como $\det C = (\det B)^2$, concluimos que $|\det B| \leq 1$, y por tanto,

$$\det A = \left(\prod_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\| \right) |\det B| \leq \prod_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|.$$

□

Teorema 2.31. Sean λ y μ dos exponentes de Lyapunov duales asociados a los sistemas homogéneos $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{y}} = -A(t)^T\mathbf{y}$, respectivamente, y sea $\gamma(\lambda, \mu)$ su coeficiente de Grobman. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\gamma(\lambda, \mu) \geq \frac{1}{n} \left[\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds \right].$$

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ una base de \mathbb{R}^n . Para cada $i = 1, \dots, n$, sea $\mathbf{x}_i(t; \mathbf{x}_i^0)$ la única solución del sistema homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ definida para $t \geq 0$ que verifica que

$$\mathbf{x}_i(0; \mathbf{x}_i^0) = \mathbf{x}_i^0,$$

de manera que el superíndice 0 se utiliza para denotar el valor de la función en el instante inicial. Entonces, la matriz $X(t)$ que tiene por columnas a las funciones vectoriales

$$\mathbf{x}_1(t; \mathbf{x}_1^0), \dots, \mathbf{x}_n(t; \mathbf{x}_n^0),$$

es matriz fundamental del sistema lineal homogéneo. Por el Teorema 1.3 de Liouville, para todo $t \geq 0$,

$$\frac{\det X(t)}{\det X(0)} = \exp \left(\int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds \right).$$

Además, la desigualdad de Hadamard indica que

$$|\det X(t)| \leq \prod_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i(t; \mathbf{x}_i^0)\|,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds &= \frac{1}{t} \log \left(\frac{\det X(t)}{\det X(0)} \right) \\ &= \frac{1}{t} \left[\log |\det X(t)| - \log |\det X(0)| \right] \\ &\leq \frac{1}{t} \left[\log \left(\prod_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i(t; \mathbf{x}_i^0)\| \right) - \log |\det X(0)| \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^n \log \|\mathbf{x}_i(t; \mathbf{x}_i^0)\| - \log |\det X(0)| \right]. \end{aligned}$$

Como $|\det X(0)|$ es constante, al tomar límites superiores queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(s) \, ds &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \log \|\mathbf{x}_i(t; \mathbf{x}_i^0)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_i(t; \mathbf{x}_i^0)\| \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0), \end{aligned} \quad (2.20)$$

por la subaditividad del límite superior.

Sea ahora $\{\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_n^0\}$ otra base de \mathbb{R}^n y, de manera análoga, definamos $\mathbf{y}_i(t; \mathbf{y}_i^0)$, para cada $i = 1, \dots, n$, como la única solución del sistema adjunto $\dot{\mathbf{y}} = -A(t)^T \mathbf{y}$ definida para todo $t \geq 0$ con

$$\mathbf{y}_i(0; \mathbf{y}_i^0) = \mathbf{y}_i^0.$$

A partir de la matriz fundamental $Y(t)$ construida usando las funciones $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$, obtenemos del Teorema de Liouville que

$$\frac{\det Y(t)}{\det Y(0)} = \exp \int_0^t \operatorname{tr} (-A(s)^T) \, ds.$$

Entonces, como $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$ y $\operatorname{tr}(-A) = -\operatorname{tr}(A)$,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(-A(s)^T) \, ds = -\frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds.$$

Además, si $f(t)$ es una función escalar continua,

$$-\liminf_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} (-f(t)),$$

de modo que llegamos a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(-A(s)^T) \, ds &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds \\ &= -\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Entonces, si hacemos un razonamiento análogo al caso anterior, pero esta vez con el sistema adjunto $\dot{\mathbf{y}} = -A(t)^T \mathbf{y}$, siendo μ el exponente de Lyapunov asociado a este sistema, dual de λ , podemos acotar (2.21):

$$-\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds \leq \sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{y}_i^0). \quad (2.22)$$

De este modo, llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds \leq \sum_{i=1}^n (\lambda(\mathbf{x}_i^0) + \mu(\mathbf{y}_i^0)). \quad (2.23)$$

Ahora, por la Definición 2.15, como

$$\gamma(\lambda, \mu) = \min_{\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^n} \max \{ \lambda(\mathbf{x}_i^0) + \mu(\mathbf{y}_i^0) : \mathbf{x}_i^0 \in \mathcal{B}, \mathbf{y}_i^0 \in \mathcal{B}', 1 \leq i \leq n \},$$

donde el mínimo se toma sobre todos los pares de bases duales de \mathbb{R}^n , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dicho mínimo se alcanza, precisamente, en las bases

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_n^0\}$$

que hemos definido; esto es,

$$\gamma(\lambda, \mu) = \max \{ \lambda(\mathbf{x}_i^0) + \mu(\mathbf{y}_i^0) : 1 \leq i \leq n \},$$

así que

$$\lambda(\mathbf{x}_i^0) + \mu(\mathbf{y}_i^0) \leq \gamma(\lambda, \mu),$$

para cada $\mathbf{x}_i^0 \in \mathcal{B}$, $\mathbf{y}_i^0 \in \mathcal{B}'$, $1 \leq i \leq n$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^n (\lambda(\mathbf{x}_i^0) + \mu(\mathbf{y}_i^0)) \leq \sum_{i=1}^n \gamma(\lambda, \mu) = n \gamma(\lambda, \mu). \quad (2.24)$$

Finalmente, a partir de las desigualdades (2.23) y (2.24) llegamos a la cota inferior buscada para el coeficiente de Grobman:

$$\gamma(\lambda, \mu) \geq \frac{1}{n} \left[\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds \right].$$

□

De este modo, hemos obtenido una cota inferior explícita para el coeficiente de Grobman que habíamos definido en la Sección 2.2.

Observación 2.32. Nótese que la desigualdad

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds \leq \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i, \quad (2.25)$$

obtenida con la ecuación (2.20) en la demostración del Teorema 2.31, siempre es cierta, sea el sistema regular, o no.

Definición 2.33. Diremos que una función matricial $A(t)$ está temperada si

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_t^{t+1} \|A(s)\| \, ds = 0. \quad (2.26)$$

Nótese que la condición (2.26) no depende de la norma matricial que usemos. Veamos, por otro lado, que nos basta con pedir que la función matricial esté acotada para que esté temperada.

Proposición 2.34. Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función matricial acotada. Entonces, $A(t)$ está temperada.

Demostración. Sea $A(t)$ una función matricial acotada. Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$\|A(t)\| \leq M,$$

para todo $t > 0$. Entonces,

$$\frac{1}{t} \int_t^{t+1} \|A(s)\| \, ds \leq \frac{1}{t} \int_t^{t+1} M \, ds = \frac{M}{t},$$

para cada $t > 0$, luego

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_t^{t+1} \|A(s)\| \, ds \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{M}{t} = 0.$$

□

Denotemos ahora por $a_{ij}(t)$ a las entradas de $A(t)$, para cada $i, j = 1, \dots, n$, y definamos las siguientes cantidades:

$$\underline{\alpha}_i = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_{ii}(s) \, ds, \quad \bar{\alpha}_i = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_{ii}(s) \, ds.$$

El siguiente resultado nos da una cota superior para el coeficiente de Grobman en términos de estos valores.

Teorema 2.35. Sea $A : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función matricial continua y temperada, de manera que $A(t)$ es triangular superior para todo $t \geq 0$. Sean también γ y μ los exponentes de Lyapunov asociados al sistema lineal homogéneo (2.13) y a su sistema adjunto (2.19), respectivamente. Entonces,

$$\gamma(\lambda, \mu) \leq \sum_{i=1}^n (\bar{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i). \quad (2.27)$$

No se incluye aquí la demostración de este Teorema ya que excede el propósito de este trabajo, pero lo enunciamos porque la cota (2.27) va a ser necesaria en la demostración del Teorema 2.39. Puede encontrarse una demostración detallada en [2, pp. 73–77].

2.3.1 Reducción a un sistema triangular superior

A continuación, demostraremos que, desde la perspectiva de la teoría de la regularidad, es posible reducir siempre el sistema bajo estudio a otro cuya matriz de coeficientes sea triangular superior.

Teorema 2.36. Sea $A : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función matricial continua. Entonces, dada una base ortonormal $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ de \mathbb{R}^n , existe otra función matricial continua $B : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que verifica lo siguiente:

1. $B(t)$ es triangular superior para todo $t \geq 0$.
2. Existe una función matricial diferenciable y ortogonal $U : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que las soluciones $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}^0)$ de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A(t)\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{y}} &= B(t)\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) &= U(0)^{-1} \mathbf{x}^0, \end{cases}$$

satisfacen que $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) = U(t)\mathbf{y}(t; \mathbf{y}^0)$ para todo $t \geq 0$, con $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

3. Las columnas de $U(0)$ son, precisamente, los vectores de la base $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$.

Además, si la matriz de coeficientes $A(t)$ está temperada, entonces, la matriz ortogonal $U(t)$ puede elegirse de tal manera que $B(t)$ esté temperada también.

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n y sean

$$\{\mathbf{x}_1(t; \mathbf{x}_1^0), \dots, \mathbf{x}_n(t; \mathbf{x}_n^0)\}$$

las únicas soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ definidas para todo $t \geq 0$ que verifican que

$$\mathbf{x}_i(0; \mathbf{x}_i^0) = \mathbf{x}_i^0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Con el fin de simplificar la notación, pongamos $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t; \mathbf{x}_i^0)$, para cada $i = 1, \dots, n$, y apliquemos el algoritmo de Gram-Schmidt a estas funciones para obtener una base ortonormal del espacio de soluciones, $\{\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1(t) &= \mathbf{x}_1(t), & \mathbf{u}_1(t) &= \frac{\tilde{\mathbf{u}}_1(t)}{\|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\|}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_2(t) &= \mathbf{x}_2(t) - \langle \mathbf{x}_2(t), \mathbf{u}_1(t) \rangle \mathbf{u}_1(t), & \mathbf{u}_2(t) &= \frac{\tilde{\mathbf{u}}_2(t)}{\|\tilde{\mathbf{u}}_2(t)\|}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_n(t) &= \mathbf{x}_n(t) - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_j(t) \rangle \mathbf{u}_j(t), & \mathbf{u}_n(t) &= \frac{\tilde{\mathbf{u}}_n(t)}{\|\tilde{\mathbf{u}}_n(t)\|}. \end{aligned}$$

Entonces, para cada $k = 1, \dots, n$, $\mathbf{u}_k(t)$ es combinación lineal de las funciones vectoriales $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)$, y

$$\langle \mathbf{u}_i(t), \mathbf{u}_j(t) \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

para todo $t \geq 0$. Recíprocamente, $\mathbf{x}_k(t)$ es combinación lineal de $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_k(t)$, para cada $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \|\tilde{\mathbf{u}}_1(t)\| \mathbf{u}_1(t), \\ \mathbf{x}_2(t) &= \langle \mathbf{x}_2(t), \mathbf{u}_1(t) \rangle \mathbf{u}_1(t) + \|\tilde{\mathbf{u}}_2(t)\| \mathbf{u}_2(t), \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n(t) &= \sum_{j=1}^{n-1} \langle \mathbf{x}_n(t), \mathbf{u}_j(t) \rangle \mathbf{u}_j(t) + \|\tilde{\mathbf{u}}_n(t)\| \mathbf{u}_n(t). \end{aligned}$$

luego se tiene también que

$$\langle \mathbf{x}_i(t), \mathbf{u}_j(t) \rangle = 0, \quad i < j, \quad (2.28)$$

para todo $t \geq 0$.

Definamos ahora $U(t)$ como la matriz que tiene por columnas a los vectores de esta nueva base ortonormal, $\{\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)\}$; es decir,

$$U(t)\mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

para todo $t \geq 0$, donde \mathbf{e}_i es el i -ésimo vector de la base canónica. $U(t)$ es una matriz ortogonal para todo $t \geq 0$, y las columnas de $U(0)$ son los vectores de la base $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$, pues esta la habíamos tomado ortogonal. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} U : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto U(t), \end{aligned}$$

es diferenciable con $\dot{U}(t)\mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{u}}_i(t)$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Sea ahora $\mathbf{y}(t) = U(t)^{-1}\mathbf{x}(t)$; es decir,

$$\mathbf{x}(t) = U(t)\mathbf{y}(t). \quad (2.29)$$

Como $U(t)$ es ortogonal, $U(t)^T U(t) = I_n$ para todo $t \geq 0$, luego podemos escribir

$$\mathbf{y}(t) = U(t)^T \mathbf{x}(t).$$

Derivando en (2.29) obtenemos que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{U}(t)\mathbf{y}(t) + U(t)\dot{\mathbf{y}}(t).$$

A su vez,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) = A(t)U(t)\mathbf{y}(t),$$

luego

$$\dot{U}(t)\mathbf{y}(t) + U(t)\dot{\mathbf{y}}(t) = A(t)U(t)\mathbf{y}(t),$$

y, reordenando,

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \left(U(t)^T A(t) U(t) - U(t)^T \dot{U}(t) \right) \mathbf{y}(t).$$

De este modo, hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales lineales para la función $\mathbf{y}(t)$,

$$\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y},$$

con

$$B(t) = U(t)^T A(t) U(t) - U(t)^T \dot{U}(t). \quad (2.30)$$

Así definida, $B(t)$ es una función matricial continua por ser suma y producto de funciones continuas.

Sea ahora $X(t)$ la función matricial que tiene por columnas a las funciones $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ que hemos definido al principio; es decir,

$$X(t)\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Como

$$\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\} = \{\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)\}$$

es base de \mathbb{R}^n , las funciones $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$ son linealmente independientes. Por lo tanto, así definida, $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo (2.13). Definamos entonces, para todo $t \geq 0$,

$$Y(t) = U(t)^T X(t).$$

Como $U(t)$ es ortogonal, junto a la ecuación (2.28), si $j > i$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{x}_i(t), \mathbf{u}_j(t) \rangle = \langle X(t)\mathbf{e}_i, U(t)\mathbf{e}_j \rangle = (X(t)\mathbf{e}_i)^T U(t)\mathbf{e}_j \\ &= \mathbf{e}_i^T X(t)^T U(t)\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T X(t)^T U(t)U(t)^T U(t)\mathbf{e}_j = \langle U(t)^T X(t)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \langle Y(t)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = Y_{ji}(t), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, luego $Y(t)$ es triangular superior. Como consecuencia, $\dot{Y}(t)$ es triangular superior también.

Derivamos ahora la expresión $X(t) = U(t)Y(t)$ de manera análoga a como se ha hecho anteriormente para obtener que

$$\dot{Y}(t) = B(t)Y(t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.31)$$

Nótese que $Y(t)$ tiene por columnas a los vectores

$$\{\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)\} = \{U(t)^T \mathbf{x}_1(t), \dots, U(t)^T \mathbf{x}_n(t)\}.$$

Además,

$$\det Y(t) = \det(U(t)^T X(t)) = \det U(t) \det X(t) = \det X(t) \neq 0,$$

por ser $X(t)$ matriz fundamental y $U(t)$ ortogonal. Entonces, $Y(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de la ecuación $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$, por lo que es invertible, luego podemos despejar en (2.31) para obtener que

$$B(t) = \dot{Y}(t)Y(t)^{-1}.$$

Ahora, como $Y(t)$ es invertible y triangular superior, su inversa también lo es, luego $\dot{Y}(t)$ e $Y(t)^{-1}$ son triangulares superiores. Por lo tanto, concluimos que $B(t)$ es también triangular superior, quedando así probada la primera parte del teorema.

Veamos ahora que si $A(t)$ está temperada, $B(t)$ también lo va a estar. Supongamos entonces que la matriz de coeficientes $A(t)$ está temperada. Como $U(t)$ es ortogonal, se sigue de (2.30) que

$$\begin{aligned} B(t) + B(t)^T &= U(t)^T A(t)U(t) - U(t)^T \dot{U}(t) + U(t)^T A(t)^T U(t) - \dot{U}(t)^T U(t) \\ &= U(t)^T (A(t) + A(t)^T) U(t) - U(t)^T \dot{U}(t) - \dot{U}(t)^T U(t) \\ &= U(t)^T (A(t) + A(t)^T) U(t) - \frac{d}{dt} (U(t)^T U(t)) \\ &= U(t)^T (A(t) + A(t)^T) U(t), \end{aligned}$$

pues $U(t)^T U(t) = I_n$ y su derivada es nula. Entonces,

$$B(t) + B(t)^T = U(t)^T (A(t) + A(t)^T) U(t). \quad (2.32)$$

Ahora, para cada $i, j = 1, \dots, n$, y para cada $t \geq 0$, sean

$$b_{ij}(t) = \langle B(t)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle \quad \text{y} \quad \bar{a}_{ij}(t) = \langle A(t)\mathbf{u}_j(t), \mathbf{u}_i(t) \rangle.$$

Como $B(t)$ es triangular superior, por la ecuación (2.32) se tiene para cada $i = 1, \dots, n$ que

$$\begin{aligned} \langle (B(t) + B(t)^T)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle &= \langle B(t)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle + \langle B(t)^T\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \langle B(t)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle + \mathbf{e}_i^T B(t)\mathbf{e}_i \\ &= \langle B(t)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle + \langle \mathbf{e}_i, B(t)\mathbf{e}_i \rangle \\ &= 2b_{ii}(t). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle (B(t) + B(t)^T)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle &= \langle U(t)^T (A(t) + A(t)^T) U(t)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \langle U(t)^T (A(t) + A(t)^T)\mathbf{u}_i(t), \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \mathbf{u}_i(t)^T (A(t) + A(t)^T)^T U(t)\mathbf{e}_i \\ &= \langle (A(t) + A(t)^T)\mathbf{u}_i(t), U(t)\mathbf{e}_i \rangle \\ &= \langle (A(t) + A(t)^T)\mathbf{u}_i(t), \mathbf{u}_i(t) \rangle \\ &= \langle A(t)\mathbf{u}_i(t), \mathbf{u}_i(t) \rangle + \langle \mathbf{u}_i(t), A(t)\mathbf{u}_i(t) \rangle \\ &= 2\bar{a}_{ii}(t). \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$b_{ii}(t) = \bar{a}_{ii}(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.33)$$

para todo $t \geq 0$. Ahora bien, si $i \neq j$,

$$\langle (B(t) + B(t)^T)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle B(t)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle + \langle B(t)^T\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = b_{ij}(t) + b_{ji}(t).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle (B(t) + B(t)^T)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle &= \langle U(t)^T (A(t) + A(t)^T)^T, U(t)\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \langle (A(t) + A(t)^T)^T \mathbf{u}_j(t), U(t)\mathbf{e}_i \rangle \\ &= \langle (A(t) + A(t)^T)\mathbf{u}_j(t), \mathbf{u}_i \rangle \\ &= \langle A(t)\mathbf{u}_j(t), \mathbf{u}_i(t) \rangle + \langle \mathbf{u}_j(t), A(t)\mathbf{u}_i(t) \rangle \\ &= \bar{a}_{ij}(t) + \bar{a}_{ji}(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$b_{ij}(t) = \bar{a}_{ij}(t) + \bar{a}_{ji}(t), \quad \text{si } i > j, \quad (2.34)$$

pues, por ser $B(t)$ triangular superior, $b_{ji}(t) = 0$ si $i > j$, para todo $t \geq 0$. Ahora, si usamos la norma euclídea de \mathbb{R}^n , la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y el hecho de que las funciones $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$, son ortonormales para todo $t \geq 0$, obtenemos lo siguiente:

$$|\bar{a}_{ij}| = |\langle A(t)\mathbf{u}_i(t), \mathbf{u}_j(t) \rangle| \leq \|A(t)\mathbf{u}_i(t)\|_2 \|\mathbf{u}_j(t)\|_2 \leq \|A(t)\|_2, \quad (2.35)$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$, con $\|A(t)\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A(t)\mathbf{x}\|_2$. Entonces, tomando valores absolutos en las ecuaciones (2.33) y (2.34), y aplicando la desigualdad triangular y la cota (2.35), llegamos a que

$$|b_{ij}(t)| \leq |\bar{a}_{ij}(t)| + |\bar{a}_{ji}(t)| \leq 2\|A(t)\|_2, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

De esta desigualdad se desprende que

$$\max_{1 \leq i, j \leq n} |b_{ij}(t)| \leq 2\|A(t)\|_2,$$

luego

$$\|B(t)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |b_{ij}(t)| \leq 2n\|A(t)\|_2,$$

y, finalmente,

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_t^{t+1} \|B(s)\|_\infty ds \leq 2n \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_t^{t+1} \|A(s)\|_2 ds = 0,$$

luego todo son igualdades. Concluimos entonces que si $A(t)$ está temperada, $B(t)$ también lo está. □

Este teorema muestra que, en el estudio de la regularidad en el sentido de Lyapunov, podemos sustituir el sistema original por otro cuya matriz de coeficientes sea triangular superior, aplicando una determinada transformación mediante una matriz ortogonal. A continuación, demostraremos que dicha transformación tampoco altera ni el exponente de Lyapunov asociado al sistema original, ni su exponente dual.

Teorema 2.37. Consideramos los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos que aparecen descritos en el Teorema 2.36,

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}, \quad (2.36)$$

y sus sistemas adjuntos,

$$\dot{\mathbf{v}} = -A(t)^T \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{w}} = -B(t)^T \mathbf{w}. \quad (2.37)$$

Entonces, los exponentes de Lyapunov λ_1 y λ_2 asociados a las ecuaciones (2.36) son iguales. De la misma manera, los exponentes de Lyapunov duales de λ_1 y λ_2 , μ_1 y μ_2 , asociados a los sistemas adjuntos (2.37), respectivamente, son también iguales. Como consecuencia, los coeficientes de Grobman, $\gamma(\lambda_1, \mu_1)$ y $\gamma(\lambda_2, \mu_2)$ asociados a las ecuaciones (2.36), son también idénticos.

Demostración. Consideremos los sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales (2.36), definidos como en el Teorema 2.36; es decir, donde $B(t)$ es una matriz de coeficientes triangular superior obtenida como sigue:

$$B(t) = U(t)^T A(t) U(t) - U(t)^T \dot{U}(t), \quad (2.38)$$

con $U(t)$ ortogonal. Recordemos que teníamos las funciones $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$, tales que

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0, \quad i = 1, \dots, n,$$

con $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Además, las columnas de $U(t)$ se obtienen aplicando Gram-Schmidt a las funciones $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$, y las soluciones de ambos problemas están relacionadas por $\mathbf{x}(t) = U(t)\mathbf{y}(t)$.

De manera similar, sean $\mathbf{v}(t; \mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{w}(t; \mathbf{w}^0)$ las únicas soluciones de los sistemas adjuntos (2.37), respectivamente, que verifican que

$$\mathbf{v}(0; \mathbf{v}^0) = \mathbf{v}^0 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}(0; \mathbf{w}^0) = \mathbf{w}^0 = U(0)\mathbf{v}^0,$$

y que de nuevo, para abreviar, las denotamos por $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t; \mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t; \mathbf{w}^0)$. Veamos que estas soluciones están también relacionadas por $\mathbf{v}(t) = U(t)\mathbf{w}(t)$. Trasponiendo la ecuación (2.38) obtenemos que

$$B(t)^T = U(t)^T A(t)^T U(t) - \dot{U}(t)^T U(t),$$

y, multiplicando por la izquierda por $U(t)$ y por la derecha por $U(t)^T$,

$$U(t)B(t)^T U(t)^T = A(t)^T - U(t)\dot{U}(t)^T.$$

Derivando y aplicando esta relación, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U(t)\mathbf{w}(t)) &= \dot{U}(t)\mathbf{w}(t) + U(t)\dot{\mathbf{w}}(t) \\ &= \left[\dot{U}(t) - U(t)B(t)^T \right] \mathbf{w}(t) \\ &= \left[\dot{U}(t)U(t)^T - U(t)B(t)^T U(t)^T \right] U(t)\mathbf{w}(t) \\ &= \left[\dot{U}(t)U(t)^T - A(t)^T + U(t)\dot{U}(t)^T \right] U(t)\mathbf{w}(t) \\ &= \left[-A(t)^T + \frac{d}{dt}(U(t)U(t)^T) \right] U(t)\mathbf{w}(t) \\ &= -A(t)^T U(t)\mathbf{w}(t). \end{aligned}$$

Es decir, $U(t)\mathbf{w}(t)$ verifica la ecuación $\dot{\mathbf{v}} = -A(t)^T \mathbf{v}$ y, en $t = 0$,

$$U(0)\mathbf{w}(0) = U(0)\mathbf{w}^0 = \mathbf{v}^0,$$

luego, por la unicidad de soluciones del problema de valor inicial, se tiene que

$$\mathbf{v}(t) = U(t)\mathbf{w}(t),$$

para todo $t \geq 0$, como queríamos probar.

Veamos ahora que, como $U(t)$ es ortogonal para todo $t \geq 0$, los exponentes de Lyapunov duales, λ_2 y μ_2 , asociados a las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{w}} = -B(t)^T\mathbf{w},$$

coinciden, respectivamente, con los exponentes λ_1 y μ_1 asociados a

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{v}} = -A(t)^T\mathbf{v}.$$

Sea entonces $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Por la Definición 2.1 de exponente de Lyapunov,

$$\lambda_1(\mathbf{x}^0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)\|,$$

donde $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$ es la única solución del sistema homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ definida para todo $t \geq 0$ con $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$. Sea también $\mathbf{y}^0 = U(0)^T\mathbf{x}^0$ y sea $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}^0)$ la única solución del sistema $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$ definida en $t \geq 0$, con $\mathbf{y}(0; \mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0$.

Si ponemos, por simplificar, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; \mathbf{y}^0)$, por lo visto anteriormente, $\mathbf{y}(t) = U(t)^T\mathbf{x}(t)$ para todo $t \geq 0$. Como $U(t)$ es ortogonal,

$$\|U(t)^T\mathbf{x}(t)\|^2 = \langle U(t)^T\mathbf{x}(t), U(t)^T\mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{x}(t)^T U(t)^T U(t) \mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle = \|\mathbf{x}(t)\|^2,$$

luego, tomando raíces cuadradas,

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \|U(t)^T\mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{x}(t)\|,$$

para todo $t \geq 0$, así que

$$\lambda_2(\mathbf{y}^0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{y}(t)\| = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\| = \lambda_1(\mathbf{x}^0).$$

Entonces, como habíamos tomado una condición inicial $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraria, esto se verifica para cada $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ y para cada $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{y}^0 = U(0)^T\mathbf{x}^0$, luego

$$\lambda_1(\mathbf{x}^0) = \lambda_2(\mathbf{y}^0),$$

para cada $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ y para cada $\mathbf{y}^0 = U(0)^T\mathbf{x}^0$; es decir, los exponentes de Lyapunov asociados a los sistemas homogéneos (2.36) son iguales. Un razonamiento análogo nos lleva a que

$$\mu(\mathbf{v}^0) = \mu(\mathbf{w}^0),$$

para cada $\mathbf{v}^0 \in \mathbb{R}^n$ y para cada $\mathbf{w}^0 = U(0)^T\mathbf{v}^0$, luego los exponentes de Lyapunov asociados a los sistemas adjuntos (2.37) son también iguales.

Por último, veamos que $U(t)$ y su traspuesta llevan bases duales en bases duales por ser ortogonales. Sean entonces $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_n^0\}$ dos bases duales de \mathbb{R}^n ; esto es,

$$\langle \mathbf{x}_i^0, \mathbf{v}_j^0 \rangle = \delta_{ij},$$

para cada par de índices $i, j = 1, \dots, n$. Por otro lado,

$$\{U(0)^T \mathbf{x}_1^0, \dots, U(0)^T \mathbf{x}_n^0\} = \{\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_n^0\}$$

y

$$\{U(0)^T \mathbf{v}_1^0, \dots, U(0)^T \mathbf{v}_n^0\} = \{\mathbf{w}_1^0, \dots, \mathbf{w}_n^0\}$$

son bases de \mathbb{R}^n por ser $U(0)$ ortogonal. Además, preserva el producto escalar:

$$\langle \mathbf{y}_i^0, \mathbf{w}_j^0 \rangle = \langle U(0)\mathbf{x}_i^0, U(0)\mathbf{v}_j^0 \rangle = \langle \mathbf{x}_i^0, \mathbf{v}_j^0 \rangle = \delta_{ij},$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$, luego efectivamente, son bases duales. Además, como habíamos visto que

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad y \quad \mu_1 = \mu_2,$$

y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que el mínimo de $\gamma(\lambda_1, \mu_1)$ se alcanza precisamente en las bases duales $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_n^0\}$, al igual que hicimos en la demostración del Teorema 2.31, podemos concluir que $\gamma(\lambda_1, \mu_1) = \gamma(\lambda_2, \mu_2)$; es decir, que los coeficientes de Grobman asociados a estas parejas de exponentes de Lyapunov son iguales. □

En conjunto, estos resultados muestran que, al estudiar la regularidad en el sentido de Lyapunov de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales, es posible –y conveniente– transformarlo en otro cuya matriz de coeficientes sea triangular superior, sin alterar ni el exponente de Lyapunov asociado ni el coeficiente de Grobman.

Además, esta reducción va a resultar fundamental de cara a la implementación de métodos numéricos. En particular, servirá de base para justificar el método de factorización QR continuo que desarrollaremos más adelante con el objetivo de aproximar numéricamente los valores que toma el exponente de Lyapunov asociado al sistema.

2.3.2 Caracterizaciones de la regularidad

En este apartado abordaremos una caracterización de los sistemas regulares, cuyo objetivo final es justificar que, en el caso regular, los valores del exponente de Lyapunov asociado pueden obtenerse directamente a partir de los elementos diagonales del sistema triangular. Para ello, presentaremos un resultado clave que describe la regularidad en términos de la tasa de crecimiento exponencial de volúmenes, sin necesidad de hacer referencia al sistema adjunto

$$\dot{\mathbf{y}} = -A(t)^T \mathbf{y}.$$

Además del libro de Barreira [2], hemos seguido también el artículo de Benettin [8]. Antes de continuar, introduzcamos la noción de volumen definido por un conjunto de vectores:

Definición 2.38. Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ vectores de \mathbb{R}^n , con $k \leq n$. Entonces, se define el k –volumen del paralelepípedo

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i : \alpha_i \in [0, 1], \forall i = 1, \dots, k \right\}$$

de la siguiente manera:

$$\text{vol}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \sqrt{\det(B^T B)},$$

donde B es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, esto es, $B \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$.

Recordemos también que un exponente de Lyapunov $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ toma $r \leq n$ valores distintos en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que denotamos por

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_r,$$

o, equivalentemente, pueden expresarse repetidos con sus respectivas multiplicidades como

$$\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_n.$$

Además, habíamos definido en (2.6) una familia de subespacios de \mathbb{R}^n asociados a cada valor λ_i de λ , dados por

$$E_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Teorema 2.39. Sea $A : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una función matricial continua y temperada. Entonces, son equivalentes las siguientes propiedades:

1. $\gamma(\lambda, \mu) = 0$, es decir, el sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ es regular en el sentido de Lyapunov.
2. La siguiente igualdad es cierta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds = \sum_{i=1}^r (\dim E_i - \dim E_{i-1}) \lambda_i = \sum_{i=1}^r k_i \lambda_i, \quad (2.39)$$

donde k_i es la multiplicidad de cada valor λ_i , para cada $i = 1, \dots, n$, definida en (2.8).

3. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ una base normal de \mathbb{R}^n , y $k \leq n$ un cierto entero. Si denotamos, para cada $i = 1, \dots, n$, por $\mathbf{x}_i(t)$ a la única solución de la ecuación diferencial lineal $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0$, entonces, el siguiente límite existe:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)). \quad (2.40)$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $\gamma(\lambda, \mu) = 0$. Entonces, por el Teorema 2.31, que nos daba una cota inferior para el coeficiente de Grobman, obtenemos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds, \quad (2.41)$$

por lo que el límite existe. Por otro lado, por la Proposición 2.18 y por el Teorema 2.19, existen bases duales $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_n^0\}$ de \mathbb{R}^n que satisfacen que

$$\lambda(\mathbf{x}_i^0) + \mu(\mathbf{y}_i^0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.42)$$

Entonces, a raíz de la demostración del Teorema 2.31, donde obtuvimos (2.20) y (2.22), y junto a la existencia del límite (2.41), obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$-\sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{y}_i^0) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds \leq \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0). \quad (2.43)$$

De (2.42) se sigue que

$$-\sum_{i=1}^n \mu(\mathbf{y}_i^0) = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0),$$

luego en (2.43) son todas igualdades:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0) = \sum_{i=1}^r (\dim E_i - \dim E_{i-1}) \lambda_i,$$

ya que la base $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ es normal, quedando así probada la propiedad 2 del enunciado.

Supongamos ahora que el segundo apartado del enunciado es cierto; esto es, que se verifica la igualdad (2.39), y sea $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Consideremos las matrices ortogonales $U(t)$ del Teorema 2.36. La solución $\mathbf{x}_i(t)$ del sistema homogéneo (2.13) definida para todo $t \geq 0$ con $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0$, para cada $i = 1, \dots, n$, puede escribirse como

$$\mathbf{x}_i(t) = U(t)\mathbf{y}_i(t),$$

donde $\mathbf{y}_i(t)$ es solución del sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y} \quad (2.44)$$

con $\mathbf{y}_i(0) = U(0)^T \mathbf{x}_i^0$, para cada $i = 1, \dots, n$, y $B(t)$ es una matriz de coeficientes triangular superior obtenida como en la demostración del Teorema 2.36.

Como $U(t)$ es ortogonal, se tiene, para cada $k \leq n$, que

$$\operatorname{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)) = \operatorname{vol}(\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_k(t)). \quad (2.45)$$

Ahora, como la matriz de coeficientes del sistema $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$ es triangular superior, la matriz $Y(t)$, que tiene por columnas a las funciones $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$, es una matriz fundamental de soluciones del sistema (2.44), luego es solución de $\dot{Y} = B(t)Y$; por lo tanto, también es triangular superior. Llamemos entonces $Y_k(t)$ a la matriz de tamaño $n \times k$ que tiene por columnas a las funciones $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_k(t)$, para cada $k = 1, \dots, n$. Esta matriz tiene todos ceros por debajo de la diagonal, pues está formada por las k primeras columnas de $Y(t)$. Entonces,

$$\operatorname{vol}(\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_k(t)) = \sqrt{\det(Y_k(t)^T Y_k(t))}, \quad (2.46)$$

Como $Y_k(t)$ tiene todos ceros por debajo de la diagonal, podemos definir, para cada $k = 1, \dots, n$, las matrices cuadradas de tamaño $k \times k$, $\tilde{Y}_k(t)$, obtenidas tras eliminar las $n - k$ últimas filas de ceros de $Y_k(t)$. De este modo, se tiene que

$$Y_k(t)^T Y_k(t) = \tilde{Y}_k(t)^T \tilde{Y}_k(t). \quad (2.47)$$

Si denotamos por $y_{ii}(t)$ a los elementos diagonales de $Y(t)$, para cada $i = 1, \dots, n$, usando que el determinante de una matriz y su traspuesta coinciden, y que el determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos diagonales, llegamos a lo siguiente:

$$\det \left(\tilde{Y}_k(t)^T \tilde{Y}_k(t) \right) = \det \left(\tilde{Y}_k(t)^T \right) \det \left(\tilde{Y}_k(t) \right) = \left(\det(\tilde{Y}_k) \right)^2 = \left(\prod_{i=1}^k y_{ii}(t) \right)^2, \quad (2.48)$$

para cada $k = 1, \dots, n$. Finalmente, juntando las expresiones (2.45), (2.46), (2.47) y (2.48), obtenemos la siguiente igualdad para los volúmenes:

$$\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)) = \prod_{i=1}^k |y_{ii}(t)|, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.49)$$

Ahora,

$$|y_{ii}(t)| \leq \|\mathbf{y}_i(t)\|, \quad i = 1, \dots, n,$$

para todo $t \geq 0$, luego

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{y}_i(t)\| = \lambda(\mathbf{y}_i^0), \quad (2.50)$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Por otro lado,

$$\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = |\det X(t)|, \quad (2.51)$$

y, como por el Teorema de Liouville, $\det X(t) = \det X(0) \exp \left(\int_0^t \text{tr}(A(s)) ds \right)$,

$$\log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \log |\det X(0)| + \int_0^t \text{tr}(A(s)) ds.$$

Como habíamos supuesto que la Propiedad 2 era cierta y que la base $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ era normal,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) ds = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0). \quad (2.52)$$

Además, como $U(t)$ es ortogonal y $\mathbf{x}_i(t) = U(t)\mathbf{y}_i(t)$,

$$\lambda(\mathbf{x}_i^0) = \lambda(\mathbf{y}_i^0), \quad i = 1, \dots, n,$$

y, usando la desigualdad (2.50), concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{y}_i^0) \geq \sum_{i=1}^n \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)|. \quad (2.53)$$

Por otro lado, por la igualdad (2.49) y por la subaditividad del límite superior, se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \log |y_{ii}(t)| \leq \sum_{i=1}^n \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)|. \quad (2.54)$$

Por lo tanto, comparando (2.53) y (2.54), concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \log |y_{ii}(t)| = \sum_{i=1}^n \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| . \quad (2.55)$$

Veamos que, para cada $i = 1, \dots, n$, el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| ,$$

existe. Denotemos primeramente

$$\beta_i = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| ,$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Sabemos, por (2.49) y (2.51), que

$$\det |X(t)| = \prod_{i=1}^n |y_{ii}(t)| ,$$

luego, para cada $i = 1, \dots, n$, y para todo $t \geq 0$,

$$\frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \frac{1}{t} \log |\det X(t)| - \sum_{j \neq i} \frac{1}{t} \log |y_{jj}(t)| . \quad (2.56)$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe un instante de tiempo $t_\varepsilon > 0$ lo suficientemente grande de manera que, para cada $j = 1, \dots, n$,

$$\frac{1}{t} \log |y_{jj}(t)| \leq \beta_j + \varepsilon ,$$

para cada $t \geq t_\varepsilon$, y, usando esta desigualdad en (2.56), se sigue que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| &\geq \frac{1}{t} \log |\det X(t)| - \sum_{j \neq i} (\beta_j + \varepsilon) \\ &= \frac{1}{t} \log |\det X(t)| - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det X(t)| + \beta_i - (n-1)\varepsilon , \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde hemos usado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det X(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \sum_{i=1}^n \beta_i ,$$

lo cual se ha obtenido juntando (2.52) y (2.55). Si tomamos límites inferiores en (2.57), podemos concluir que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| \geq \beta_i = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| ,$$

para cada $i = 1, \dots, n$, por lo que obtenemos la existencia del límite exacto:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \beta_i , \quad i = 1, \dots, n . \quad (2.58)$$

Entonces, el límite superior de cada sumando de (2.55) es, de hecho, un límite, por lo que obtenemos finalmente que el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)) = \sum_{i=1}^k \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)|$$

existe, para cada $k = 1, \dots, n$, como queríamos comprobar.

Veamos, por último, que la tercera propiedad implica la primera, viendo que se da la igualdad en la cota (2.27). Consideremos de nuevo la matriz de coeficientes $B(t)$ triangular superior de la demostración del Teorema 2.36. La matriz fundamental de soluciones $Y(t)$ es solución del sistema $\dot{Y} = B(t)Y$, y, como es triangular superior, el término diagonal i -ésimo tiene la siguiente forma:

$$y_{ii}(t) = y_{ii}(0) e^{\int_0^t b_{ii}(s) ds}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.59)$$

donde $b_{ii}(t)$ es la componente i -ésima de la diagonal de $B(t)$, e $y_{ii}(0)$ es la componente i -ésima de \mathbf{y}_i^0 .

Por otro lado, a partir de (2.49), podemos obtener las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} |y_{11}(t)| &= \text{vol}(\mathbf{x}_1(t)), \\ |y_{ii}(t)| &= \frac{\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_i(t))}{\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}(t))}, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Entonces, como hemos supuesto que, para cada $k = 1, \dots, n$, los límites de los volúmenes (2.40) existen, y usando (2.59), se tiene que, para todo $t \geq 0$,

$$\frac{1}{t} \log(\text{vol}(\mathbf{x}_1(t))) = \frac{1}{t} \log |y_{11}(t)| = \frac{1}{t} \log |y_{11}(0)| + \frac{1}{t} \int_0^t b_{11}(s) ds,$$

y

$$\frac{1}{t} \log \left(\frac{\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_i(t))}{\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}(t))} \right) = \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \frac{1}{t} \log |y_{ii}(0)| + \frac{1}{t} \int_0^t b_{ii}(s) ds,$$

para cada $i = 2, \dots, n$. Por lo tanto, de aquí se sigue que los límites

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_{11}(s) ds &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \text{vol}(\mathbf{x}_1(t)), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_{ii}(s) ds &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_i(t))}{\text{vol}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}(t))} \right), \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.60)$$

también existen. Por lo tanto, como $A(t)$ está temperada, $B(t)$ también lo está por el Teorema 2.36 y, como es triangular superior, se verifica la desigualdad (2.27) del Teorema 2.35, la cual nos daba una cota superior para el coeficiente de Grobman. Finalmente, como los límites (2.60) existen, y $\gamma(\lambda, \mu) \geq 0$, se da la igualdad en (2.27), luego $\gamma(\lambda, \mu) = 0$.

□

Ahora, para una función matricial temperada $A : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se deduce de la propiedad 3 del Teorema 2.39 que, si el sistema homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ es regular, y $\mathbf{x}(t)$ es la única solución definida para todo $t \geq 0$ que satisface la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, entonces, el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\| \quad (2.61)$$

existe para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

En el siguiente resultado, que es una consecuencia del Teorema 2.39, estableceremos no solo esta propiedad, sino también otra que será fundamental para justificar uno de los métodos numéricos que presentaremos en el siguiente capítulo para aproximar los exponentes de Lyapunov. Algunas partes de la demostración han sido obtenidas de [8].

Corolario 2.40. Los distintos valores que toma el exponente de Lyapunov λ asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales regular, $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, repetidos con sus respectivas multiplicidades, se pueden obtener de la siguiente manera:

$$\lambda'_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_{ii}(s) ds,$$

donde $b_{ii}(t)$ son, para cada $i = 1, \dots, n$, las entradas diagonales de la matriz de coeficientes triangular superior $B(t)$ obtenida en (2.30). Además, si el sistema es regular, entonces, para cada $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, el límite (2.61) existe, donde $\mathbf{x}(t)$ es la única solución del sistema definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ una base normal respecto del exponente de Lyapunov λ asociado al sistema del enunciado. Sea $X(t)$ la matriz fundamental que tiene por columnas a las únicas soluciones $\mathbf{x}_i(t)$ del sistema, definidas para todo $t \geq 0$, que verifican que $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0$, para cada $i = 1, \dots, n$. Por lo visto anteriormente, podemos obtener la factorización $X(t) = U(t)Y(t)$, donde $U(t)$ es una matriz ortogonal, e $Y(t)$ es triangular superior que es, además, matriz fundamental del sistema $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$, con $B(t)$ triangular superior y dada por (2.30). Como hemos visto en la demostración del Teorema 2.39, los elementos diagonales de $Y(t)$ vienen dados por

$$y_{ii}(t) = y_{ii}(0) e^{\int_0^t b_{ii}(s) ds}.$$

Sea entonces

$$\beta_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_{ii}(s) ds, \quad (2.62)$$

límite que existe por (2.58) si el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ es regular.

Sean $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ los vectores de la base canónica. Como $U(t)$ es ortogonal para todo $t \geq 0$,

$$\|\mathbf{x}_i(t)\| = \|X(t)\mathbf{e}_i\| = \|Y(t)\mathbf{e}_i\| = \|\mathbf{y}_i(t)\| \geq |y_{ii}(t)|, \quad (2.63)$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Como consecuencia, tomando límites superiores en (2.63),

$$\lambda(\mathbf{x}_i^0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|X(t)\mathbf{e}_i\| \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \beta_i, \quad (2.64)$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Por otro lado, de la demostración del Teorema 2.39, teníamos los siguientes resultados:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det X(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \log |y_{ii}(t)| = \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)|, \quad (2.65)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det X(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0), \quad (2.66)$$

pues el sistema es regular y la base $\{\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ es normal respecto de λ . Juntando (2.62), (2.65) y (2.66), obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{x}_i^0),$$

o equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^n (\lambda(\mathbf{x}_i^0) - \beta_i) = 0. \quad (2.67)$$

Como (2.64) asegura que $\beta_i \leq \lambda(\mathbf{x}_i^0)$, para cada $i = 1, \dots, n$, tenemos en (2.67) una suma de términos no negativos que es igual a cero, luego necesariamente, ha de verificarse que

$$\beta_i = \lambda(\mathbf{x}_i^0), \quad (2.68)$$

para cada $i = 1, \dots, n$, y, como la base es normal, $\lambda(\mathbf{x}_i^0) = \lambda'_i$, luego

$$\lambda'_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_{ii}(s) \, ds, \quad i = 1, \dots, n,$$

como queríamos comprobar.

Veamos también que, para cada $i = 1, \dots, n$, existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_i(t)\| = \lambda'_i.$$

Si tomamos límites inferiores en (2.63) y usamos la igualdad (2.68),

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_i(t)\| \geq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |y_{ii}(t)| = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_i(t)\|, \quad (2.69)$$

y, como también se verifica que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_i(t)\| \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_i(t)\|,$$

para cada $i = 1, \dots, n$, se da la igualdad en (2.69), por lo que el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_i(t)\|$$

existe para cada $i = 1, \dots, n$.

Por último, a partir de este último resultado, veamos la existencia del límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\| ,$$

con $\mathbf{x}(t)$ la única solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ definida para todo $t \geq 0$ que verifica que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, donde

$$\mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i^0 ,$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Como sabemos que el exponente de Lyapunov λ asociado al sistema toma r valores distintos en $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, con $r \leq n$, existe un cierto $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ de manera que

$$\lambda(\mathbf{x}^0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\| = \lambda_{i_0} .$$

Equivalentemente, existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ de manera que

$$\lambda(\mathbf{x}^0) = \lambda(\mathbf{x}_i^0) = \lambda'_i = \lambda_{i_0} ,$$

por lo que podemos hacer un razonamiento análogo al anterior para concluir que el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\|$$

existe.

□

Los resultados que hemos desarrollado en este apartado van a ser fundamentales para justificar uno de los métodos numéricos que vamos a emplear para aproximar los distintos valores que toma el exponente de Lyapunov asociado a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual va a estar basado en la factorización QR de una matriz fundamental del sistema, y que va a tratar de obtener estos valores a partir de los elementos diagonales de la matriz de coeficientes de un sistema triangular superior.

Para cerrar esta sección, veamos un ejemplo de un sistema no regular.

Ejemplo 2.41. Lyapunov presentó en su tesis [1] el siguiente sistema no regular:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \cos(\log(t+1)) & \sin(\log(t+1)) \\ \sin(\log(t+1)) & \cos(\log(t+1)) \end{pmatrix} \mathbf{x} . \quad (2.70)$$

La traza de la matriz de coeficientes es

$$\text{tr}(A(t)) = 2 \cos(\log(t+1)) .$$

Calculemos su integral:

$$\int_0^t \text{tr}(A(s)) \, ds = \int_0^t 2 \cos(\log(s+1)) \, ds .$$

Haciendo el cambio de variable $u = \log(s + 1)$ se tiene que

$$\begin{cases} s = e^u - 1, \\ ds = e^u du, \end{cases} \quad \begin{cases} s = 0 \Rightarrow u = \log(1) = 0, \\ s = t \Rightarrow u = \log(t + 1). \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando integración por partes tras el cambio,

$$\begin{aligned} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) ds &= 2 \int_0^{\log(t+1)} \cos(u) e^u du = e^u (\sin(u) + \cos(u)) \Big|_{u=0}^{u=\log(t+1)} \\ &= (t + 1)(\sin(\log(t + 1)) + \cos(\log(t + 1))) - 1. \end{aligned}$$

Ahora, usando la fórmula del seno de la suma,

$$\sin(u + \pi/4) = \sin(u) \cos(\pi/4) + \cos(u) \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(u) + \cos(u)),$$

podemos escribir

$$\sin(\log(t + 1)) + \cos(\log(t + 1)) = \sqrt{2} \sin(\log(t + 1) + \pi/4).$$

Por consiguiente, obtenemos que la integral de la traza es

$$\int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) ds = (t + 1)\sqrt{2} \sin(\log(t + 1) + \pi/4) - 1,$$

luego tenemos el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t + 1}{t} \sqrt{2} \sin(\log(t + 1) + \pi/4) - \frac{1}{t} \right),$$

que no existe ya que $\log(t + 1)$ tiende a infinito cuando t tiende a infinito, y el seno oscila entre 1 y -1 indefinidamente. Por lo tanto, calculando los límites superior e inferior,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) ds = \sqrt{2} \quad y \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) ds = -\sqrt{2}.$$

Ahora, las funciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{(t+1) \sin(\log(t+1))} \\ e^{(t+1) \sin(\log(t+1))} \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{(t+1) \cos(\log(t+1))} \\ -e^{(t+1) \cos(\log(t+1))} \end{pmatrix},$$

son soluciones del sistema (2.70) que verifican que

$$\mathbf{x}_1(0) = (1, 1)^T = \mathbf{x}_1 \quad y \quad \mathbf{x}_2(0) = (1, -1)^T = \mathbf{x}_2.$$

Entonces,

$$\lambda(\mathbf{x}_1) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_1(t)\|_2 = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left| (t + 1) \sin(\log(t + 1)) \right| = 1,$$

y

$$\lambda(\mathbf{x}_2) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}_2(t)\|_2 = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left| (t + 1) \sin(\log(t + 1)) \right| = 1.$$

Como dice Lyapunov en su tesis [1, p. 563], $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ forman una base normal, luego se concluye que el sistema (2.70) tiene un único exponente de Lyapunov, $\lambda_1 = 1$, de multiplicidad 2. Esto se puede ver de manera intuitiva teniendo en cuenta que $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ forman una base del espacio de soluciones, luego la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \mathbf{x}_1(t) + a_2 \mathbf{x}_2(t),$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, y

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathbf{x}(t)\| = 1,$$

para cualesquiera $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Concluimos finalmente que la desigualdad (2.25) es estricta, luego no se da la igualdad (2.39):

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds = \sqrt{2} < 2 = \sum_{i=1}^2 \lambda(\mathbf{x}_i^0),$$

luego el sistema no es regular por el Teorema 2.39.

2.4 Sistemas no lineales

Tal y como se describe en el trabajo seminal de Oseledec, los exponentes de Lyapunov ofrecen una forma significativa de caracterizar el comportamiento asintótico de un sistema dinámico no lineal [11]. Hasta ahora, hemos considerado únicamente sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, y hemos estudiado los exponentes de Lyapunov asociados a estos. En esta última sección vamos a justificar haber desarrollado la teoría en torno a estos sistemas, relacionando los exponentes de Lyapunov de un sistema no lineal con el exponente asociado a su ecuación variacional.

2.4.1 La ecuación variacional

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad , \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \quad , \end{cases} \quad (2.71)$$

con $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación derivable con derivadas continuas, y por tanto, localmente Lipschitziana. Por el teorema de existencia y unicidad de solución maximal sabemos que su solución está definida en un intervalo abierto $J(\mathbf{x}_0)$ que contiene a $t = 0$. El flujo de este sistema es la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}_0) &\longmapsto \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

con $\mathcal{D} = \{(t, \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \in \Omega, t \in J(\mathbf{x}_0)\}$, y donde $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ es la única solución de (2.71) definida en $J(\mathbf{x}_0)$ que verifica que $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Diremos que Ω es el espacio de fases, o el espacio de estados, del flujo. Se tiene que φ es continua en \mathbf{x}_0 y diferenciable en t , pues

$t \mapsto \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ no es más que la curva solución que pasa por \mathbf{x}_0 [12].

Sea entonces $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ la única solución de (2.71) definida para $t \geq 0$, y que verifica que $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Denotamos por

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)),$$

a la matriz Jacobiana de \mathbf{f} evaluada en $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $A(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$ es una familia continua de matrices de orden n .

Definición 2.42. Diremos que el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) \mathbf{y}, \quad (2.72)$$

es la ecuación variacional asociada al sistema no lineal (2.71) a lo largo de la solución $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$.

Por el teorema de existencia y unicidad de solución de sistemas lineales, la ecuación variacional tiene una única solución definida para $t \geq 0$, para cada condición inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.

La importancia de esta ecuación es que si $\mathbf{y}(t)$ es la única solución (2.72) que verifica que $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, entonces, la función

$$\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$$

es una buena aproximación de la única solución del sistema no lineal $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ que verifica que

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0,$$

siempre y cuando \mathbf{y}_0 sea lo suficientemente pequeño. Este es el contenido principal del siguiente resultado [12]:

Proposición 2.43. Consideramos el sistema no lineal (2.71), con $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que

1. $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ es la única solución de (2.71) que verifica que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
2. $\mathbf{y}(t)$ es la única solución de la ecuación variacional (2.72) a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ que verifica que $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.
3. $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ es la única solución de (2.71) que verifica que $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0$.

Entonces, el límite

$$\lim_{\mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\mathbf{y}_0\|}$$

converge uniformemente a 0 en un cierto intervalo $[0, t^*]$.

Lo que nos dice este resultado es que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, entonces,

$$\|\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon \|\mathbf{y}_0\|$$

para cada $t \in [0, t^*]$; esto es, a medida que la perturbación \mathbf{y}_0 de la condición inicial \mathbf{x}_0 tiende a cero, la curva $t \mapsto \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$ se va volviendo una mejor aproximación a la solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$.

En resumen, la ecuación variacional nos permite describir cómo pequeñas perturbaciones sobre la condición inicial evolucionan con el tiempo; es decir, si perturbamos la condición inicial por un vector $\delta \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ lo suficientemente pequeño:

$$\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0,$$

podemos aproximar la nueva solución de (2.71) hasta primer orden por

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \mapsto \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) + \delta \mathbf{x}(t),$$

donde $\delta \mathbf{x}(t)$ es la única solución de

$$\frac{d}{dt}(\delta \mathbf{x}(t)) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) \delta \mathbf{x}(t),$$

definida para $t \geq 0$, que verifica que $\delta \mathbf{x}(0) = \delta \mathbf{x}_0$.

2.4.2 Relación con los exponentes de Lyapunov

Como comentan Dieci y Elia en [13], algunas de las técnicas más potentes usadas para analizar el sistema no lineal (2.71) están basadas en la información espectral; esto es, en el exponente de Lyapunov asociado al sistema variacional a lo largo de la órbita $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ (2.72).

Sea $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ la única solución de (2.71) tal que $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Supongamos que aplicamos una perturbación $\delta \mathbf{x}_0$ a la condición inicial \mathbf{x}_0 y sean, como en la sección anterior, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ la única solución que verifica que $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0$, y $\delta \mathbf{x}(t)$ la única solución de la ecuación variacional (2.72) con $\delta \mathbf{x}(0) = \delta \mathbf{x}_0$. Si $\delta \mathbf{x}_0$ es lo suficientemente pequeño, podemos aproximar la nueva solución para tiempos largos, hasta primer orden, por:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t)$$

Ahora, si suponemos que la perturbación inicial evoluciona en el tiempo según

$$\|\delta \mathbf{x}(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\delta \mathbf{x}_0\|,$$

entonces,

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| \approx \|\delta \mathbf{x}(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\delta \mathbf{x}_0\|,$$

y, como los exponentes de Lyapunov miden la tasa exponencial a la que se separan, o acercan, dos trayectorias tras aplicar una perturbación infinitesimal a una condición inicial [14], se tiene que

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta \mathbf{x}(t)\|}{\|\delta \mathbf{x}_0\|}.$$

Ahora, si $\Psi(t)$ es la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ del sistema variacional (2.72), como $\delta \mathbf{x}_0$ es constante,

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\delta \mathbf{x}(t)\| = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t) \delta \mathbf{x}_0\| = \lambda(\delta \mathbf{x}_0).$$

Es decir, para calcular el valor que toma el exponente de Lyapunov asociado a un sistema no lineal, basta con calcular el valor del exponente asociado al correspondiente sistema lineal variacional (2.72), y todos los resultados que hemos visto a lo largo de este trabajo continúan siendo válidos.

2.4.3 El teorema multiplicativo de Oseledec

Dado que no es sencillo comprobar la condición de regularidad en el sentido de Lyapunov para un sistema dado, no estaba claro cuál era el uso práctico que se le podía dar a los exponentes de Lyapunov para estudiar la estabilidad de una trayectoria. Además, aunque el sistema fuese regular, es muy complicado hallarlos, en general, si no es a través de su aproximación numérica. Entonces, es imprescindible asegurarse de que lo que estamos tratando de aproximar es robusto; esto es, han de ser los propios exponentes de Lyapunov los que sean estables frente a perturbaciones de la matriz de coeficientes $A(t)$. Por desgracia, la regularidad no es una condición suficiente para este fin [9].

Los principales avances teóricos para resolver estos problemas tuvieron lugar a finales de 1960, gracias al trabajo de Oseledec y Millionshchikov. Oseledec estudió la estabilidad de las trayectorias en un atractor acotado, en el que se tiene una medida invariante; esto es, una medida μ definida sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{B}) de manera que para cada aplicación medible T y para todo conjunto $A \in \mathcal{B}$, se tiene que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. En este caso, el Teorema Multiplicativo Ergódico de Oseledec valida la regularidad en el sentido de Lyapunov de una gran variedad de sistemas variacionales. El enunciado preciso de este teorema es demasiado técnico como para introducirlo aquí, pero su impacto práctico es que, con respecto a una medida invariante, casi todas las trayectorias de un sistema no lineal dan lugar a un sistema lineal variacional regular en el sentido de Lyapunov. Además, para algunos casos concretos, el exponente de Lyapunov asociado al sistema variacional se vuelve independiente de \mathbf{x}_0 [10].

CAPÍTULO 3

COMPUTACIÓN

Como comentan Dieci y V. Vleck en [11], a pesar de su importancia en la ciencia, la aproximación numérica de los exponentes de Lyapunov ha recibido muy poca atención. Esto se debe, en gran parte, a las dificultades e incertidumbres presentes en la tarea, pero también puede ser porque la teoría de estabilidad de los exponentes de Lyapunov no es tan conocida como debería ser. En este capítulo se van a desarrollar diferentes técnicas para aproximar numéricamente los exponentes de Lyapunov, las cuales van a estar basadas en la factorización matricial de matrices fundamentales de soluciones, $X(t)$, del sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

buscando escribirlas en una forma en la que sea sencillo obtener los exponentes de Lyapunov.

3.1 Método QR continuo

Una de las técnicas clásicas más efectivas para la estimación numérica de exponentes de Lyapunov es el uso de factorizaciones matriciales QR. Existen dos formulaciones principales: la discreta y la continua. En esta sección nos centraremos en la formulación continua, desarrollada en profundidad en [15], y también tratada en [16] y [11]. Esta técnica se basa en encontrar un cambio de variables ortogonal que transforme el sistema (3.1) en uno que tenga una matriz triangular superior de coeficientes. De esta manera, los exponentes de Lyapunov pueden ser fácilmente extraídos de los elementos diagonales del nuevo sistema, evitando así la integración directa para obtener la matriz fundamental $X(t)$, que es una operación conocida por ser, en general, numéricamente inestable. Esta técnica es válida si suponemos que el sistema es regular en el sentido de Lyapunov.

La motivación de esta técnica reside en que, dada una matriz real, siempre podemos encontrar su factorización QR:

Teorema 3.1 (Factorización QR). Sea A una matriz real de tamaño $m \times n$. Entonces, existe una matriz ortogonal $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y una matriz triangular superior $R \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de manera que

$$A = QR.$$

donde

$$\|\mathbf{u}_i(t)\| = \left\| \mathbf{x}_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_i(t), \mathbf{q}_j(t) \rangle \mathbf{q}_j(t) \right\|,$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Esto justifica el uso de este método, pues dada una matriz fundamental de soluciones, podemos encontrar su factorización QR. No obstante, vamos a estar interesados en obtener ecuaciones diferenciales para las matrices $Q(t)$ y $R(t)$, para así poder integrarlas numéricamente.

Sea entonces $X(t)$ una matriz fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo (3.1). Supongamos que tenemos

$$X(t) = Q(t)R(t), \quad (3.2)$$

y, en particular, la factorización QR en el instante inicial:

$$X(0) = Q(0)R(0),$$

con $Q(0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal y $R(0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangular superior. Entonces, derivando la expresión

$$Q^T Q = I_n,$$

obtenemos lo siguiente:

$$\dot{Q}^T Q + Q^T \dot{Q} = 0. \quad (3.3)$$

Por lo tanto, si definimos

$$S = Q^T \dot{Q},$$

y utilizando (3.3), se tiene que

$$S^T = \left(Q^T \dot{Q} \right)^T = \dot{Q}^T Q = -Q^T \dot{Q} = -S,$$

luego S es antisimétrica. Derivando la expresión (3.2), y teniendo en cuenta que $X(t)$ satisface el sistema $\dot{X} = A(t)X$, nos queda que

$$\dot{Q}R + Q\dot{R} = AQR,$$

y multiplicando por la izquierda por Q^T , obtenemos lo siguiente:

$$Q^T AQR = \dot{R} + Q^T \dot{Q}R. \quad (3.4)$$

Como $X(t) = Q(t)R(t)$ y $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \geq 0$, por ser $X(t)$ una matriz fundamental, entonces

$$\det X(t) = \det(Q(t)R(t)) = \det Q(t) \det R(t) = \pm \det R(t),$$

para todo $t \geq 0$, ya que $\det Q(t) = \pm 1$ por ser ortogonal. Por tanto, $R(t)$ es invertible para todo $t \geq 0$, y podemos multiplicar la ecuación (3.4) por R^{-1} por la derecha para obtener

$$Q^T A Q = \dot{R}R^{-1} + Q^T \dot{Q}. \quad (3.5)$$

Definamos ahora la matriz

$$B(t) = \dot{R}R^{-1}.$$

Como $R(t)$ es triangular superior para todo $t \geq 0$, su derivada y su inversa también lo son. Entonces, $B(t)$ es triangular superior para todo $t \geq 0$ por ser producto de dos que lo son. Sustituyendo las matrices que hemos definido, S y B , en la ecuación (3.5), podemos reescribir esta igualdad como

$$Q^T A Q = B + S. \quad (3.6)$$

Ahora bien, por definición, $B(t)$ es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{R} = B(t)R$. Gracias a (3.6), llegamos al siguiente sistema diferencial para la matriz triangular superior R de la factorización:

$$\dot{R} = B(t)R, \quad \text{donde } B(t) = Q^T A(t)Q - S. \quad (3.7)$$

Por otra parte, de la expresión de B en (3.7), podemos escribir

$$S = Q^T A Q - B.$$

No obstante, como B es triangular superior, entonces,

$$S_{ij} = (Q^T A Q)_{ij}, \quad i > j,$$

es decir, para todos los términos por debajo de la diagonal, y por antisimetría de S , podemos obtener la matriz completa:

$$S_{ij} = \begin{cases} (Q^T A Q)_{ij}, & \text{si } i > j, \\ 0, & \text{si } i = j, \\ -(Q^T A Q)_{ji}, & \text{si } i < j. \end{cases} \quad (3.8)$$

Finalmente, conocida la matriz S , podemos expresar la matriz de coeficientes B de la siguiente manera:

$$b_{ij} = \begin{cases} (Q^T A Q)_{ij} + (Q^T A Q)_{ji}, & \text{si } i < j, \\ (Q^T A Q)_{ii}, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i > j. \end{cases} \quad (3.9)$$

Entonces, para obtener las funciones matriciales $Q(t)$ y $R(t)$ que dan la factorización QR continua de la matriz fundamental de soluciones $X(t)$ del sistema diferencial lineal homogéneo (3.1), basta con resolver las siguientes ecuaciones diferenciales para Q y R :

$$\dot{Q} = QS, \quad \dot{R} = BR,$$

donde S y B vienen dadas por las ecuaciones (3.8) y (3.9), respectivamente.

La construcción que hemos hecho para obtener el sistema

$$\dot{R} = B(t)R \quad (3.10)$$

es, precisamente, la realizada para reducir un sistema a uno triangular superior en la Subsección 2.3.1. Por lo tanto, por el Teorema 2.37, se tiene que el sistema (3.10) tiene el mismo exponente de Lyapunov asociado y el mismo coeficiente de Grobman que el sistema (3.1). Como consecuencia, si este último es regular Lyapunov, podremos extraer los valores finitos que toma el exponente de Lyapunov asociado al sistema lineal a partir de los elementos diagonales de la matriz triangular superior $B(t)$ gracias al Corolario 2.40 de la siguiente manera:

$$\lambda'_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_{ii}(s) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Nótese entonces que no es necesario resolver el sistema $\dot{R} = B(t)R$, ya que no necesitamos en ningún momento la matriz triangular R , por lo que solo hay que integrar numéricamente

$$\dot{Q} = QS. \quad (3.12)$$

En resumen, los pasos a seguir son los siguientes:

1. Integrar numéricamente el sistema matricial diferencial (3.12), donde S viene dada por las ecuaciones (3.8).
2. Calcular de manera simultánea los elementos diagonales de la matriz $B(t)$ a partir de (3.9).
3. Aproximar los exponentes de Lyapunov mediante la ecuación (3.11).

Por lo tanto, nuestro método QR es válido únicamente para sistemas regulares en el sentido de Lyapunov, y basta usar el Teorema 2.39 y comparar las aproximaciones obtenidas con

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) ds$$

para deducir si el sistema es regular, o no.

A continuación, vamos a explicar diferentes formas de implementar este método.

3.1.2 Implementación

Como hemos comentado, la gran ventaja de esta técnica es que permite recuperar los exponentes de Lyapunov directamente a partir de la matriz $B(t)$. Al igual que en [11], sea el sistema regular o no, es más conveniente definir las variables

$$\omega_i(t) = \int_0^t b_{ii}(s) ds, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

obteniendo así las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_i &= b_{ii}, \\ \omega_i(0) &= 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

para cada $i = 1, \dots, n$. A partir de estas, podemos aproximar los exponentes de Lyapunov tomando un tiempo T lo suficientemente grande mediante

$$\lambda'_i \approx \frac{1}{T} \omega_i(T), \quad i = 1, \dots, n.$$

Asimismo, si denotamos por $\lambda_i^c(t)$ a la aproximación obtenida para el tiempo t de los exponentes, podemos estudiar el comportamiento de las aproximaciones λ_i^c con el intervalo de integración haciendo la gráfica de

$$\lambda_i^c(t) = \frac{1}{t} \omega_i(t),$$

en función del tiempo, para cada $i = 1, \dots, n$.

Nos queda entonces resolver los sistemas diferenciales (3.12) y (3.14) para Q y ω_i , respectivamente. Como condiciones iniciales se utilizan la matriz $Q(0)$, obtenida de la factorización QR de $X(0)$. Las ecuaciones se integran numéricamente de manera simultánea con paso fijo h utilizando un esquema Runge-Kutta de orden 4; más concretamente, la pareja Dormand-Prince 5-4 [11], a la cual denotaremos por DP5, pero quedándonos únicamente con el método de orden 4. La pareja completa se implementará en la siguiente sección para introducir un control de paso adaptativo. El motivo de esta elección se debe a que es el esquema que mejores resultados numéricos nos ha dado.

Entonces, en el paso de t_j a $t_{j+1} = t_j + h$ se integran simultáneamente con este esquema las ecuaciones (3.12) y (3.14). No obstante, como Q ha de permanecer ortogonal, al final de cada paso, calculamos la factorización QR de la matriz Q obtenida con la función `qr` de MATLAB, y la sustituimos por su factor ortogonal.

El programa se muestra en el Apéndice B.1.

3.1.3 Paso adaptativo

El proceso se puede mejorar implementando un paso de integración adaptativo obtenido controlando el error local de las nuevas variables $\omega_i(t)$, para cada $i = 1, \dots, n$, con respecto a un vector de tolerancias TOL de longitud n preasignado, como se hace en [15]. En lo que sigue, denotaremos por ω_i^c a las aproximaciones numéricas de $\omega_i(t)$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Al realizar el paso del instante de tiempo t_j al instante $t_{j+1} = t_j + h_j$, necesitamos hacer lo siguiente:

1. Integrar $\dot{Q} = QS$ usando como condiciones iniciales nuestra aproximación del paso anterior $Q_j^c(t_j)$.
2. Actualizar la aproximación de las variables $\omega_i(t_{j+1})$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Nótese que, para el primer paso, necesitamos mantener la matriz Q ortogonal en cada paso. Lo haremos sustituyendo la matriz Q por su factor ortogonal de su factorización QR, obtenida con la función `qr` de MATLAB.

Ahora, nuestro objetivo principal es aproximar (3.13). Como por la aditividad de la integral,

$$\omega_i(t_{j+1}) = \int_0^{t_j} b_{ii}(s) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} b_{ii}(s) ds = \omega_i(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} b_{ii}(s) ds$$

para cada $i = 1, \dots, n$, realmente solo necesitamos aproximar las siguientes integrales:

$$\mu_i = \int_{t_j}^{t_{j+1}} b_{ii}(s) \, ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Este método alternativo es el que se sigue en [15]. Para ello, tendríamos que hacer una cuadratura numérica.

Una alternativa equivalente a (3.15) es resolver numéricamente, en el paso de t_j a t_{j+1} , las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_i &= (Q^T(t)A(t)Q(t))_{ii}, \\ \mu_i(t_j) &= 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Vamos a desarrollar dos de los tres métodos propuestos por Vleck y sus colaboradores en [15] para obtener las variables μ_i , tanto por integración numérica como por cuadratura, y para integrar (3.12). En primer lugar, para que la notación sea más cómoda, pongamos

$$\dot{Q} = QS = F(t, Q). \quad (3.17)$$

1. En [17], los autores proponen un método directo para aproximar la solución de (3.17), utilizando un esquema de Runge-Kutta explícito y ortogonalizando las soluciones obtenidas al final de cada paso. La ortogonalización se realiza sustituyendo la aproximación obtenida por el factor Q de su factorización QR, calculada con la función de MATLAB. A este procedimiento lo denominamos *esquema proyectado simple*, y el método Runge-Kutta que utilizaremos será la pareja Dormand-Prince 5-4, cuyo tablero de Butcher presentamos en el Apéndice A.1, y que denotaremos por **dp5**.

En notación estándar de Runge-Kutta, el esquema explícito de s etapas puede escribirse de la siguiente manera:

$$U_{j+1} = Q_j + h_j(b_1K_1 + \dots + b_sK_s), \quad U_{j+1} \rightarrow Q_{j+1},$$

donde la flecha denota la sustitución de la aproximación obtenida U_{j+1} por la matriz ortogonal Q de su factorización QR, y donde hemos definido, para $l = 1, \dots, s$,

$$K_l = F(t_j + c_l h_j, U_{jl}), \quad U_{jl} = Q_j + h_j(a_{l1}K_1 + \dots + a_{l,l-1}K_{l-1}). \quad (3.18)$$

En este caso, podemos aproximar (3.15) por cuadratura numérica mediante la regla del trapecio; es decir,

$$\mu_i^c = \frac{h_j}{2} \left((Q_j^T A(t_j) Q_j)_{ii} + (Q_{j+1}^T A(t_{j+1}) Q_{j+1})_{ii} \right).$$

No obstante, esta opción tiene una desventaja, y es que si se adopta, el control del error solo puede realizarse sobre el factor Q . Es decir, considerando \hat{Q}_{j+1} como la aproximación de orden inferior de la pareja **dp5**, se puede controlar el error mediante

la norma infinito columna a columna del factor Q . En concreto, su estimación viene dada por la siguiente fórmula [15]:

$$\mathbf{err} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\|(Q_{j+1} - \widehat{Q}_{j+1})_{:,i}\|_\infty}{1 + \|(Q_{j+1})_{:,i}\|_\infty \mathbf{TOL}_i} \right\}, \quad (3.19)$$

donde, para una matriz \tilde{Q} , $(\tilde{Q})_{:,i}$ representa su columna i -ésima, $i = 1, \dots, n$.

Si h es el paso actual y denotamos por h_{new} al nuevo paso, usamos la ecuación (3.19) para elegirlo, sujetos a la restricción de que $h_{\text{new}} \leq 5h$, como sigue:

$$h_{\text{new}} = \mathbf{safe} \left| h \frac{1}{\mathbf{err}^l} \right|, \quad (3.20)$$

donde \mathbf{safe} es un factor de seguridad que fijamos a 0.8, y $l = 1/5$ para `dp5`. Si $\mathbf{err} \leq 1$, aceptamos el paso; si no, lo rechazamos, pero siempre impidiendo que h_{new} sea menor que $h/5$ o mayor que $5h$. Como se comenta en [15, p. 8], aunque esto, en teoría, pueda llevar a fallos repetidos, es una manera de evitar reducciones de paso drásticas.

2. Otra alternativa es implementar el denominado *esquema proyectado completo*. Usamos también un esquema explícito de Runge-Kutta (como DP5 o RK38) para integrar (3.17), pero ortogonalizamos todas las etapas intermedias. De este modo, aplicamos la factorización QR a todos los valores intermedios y nos quedamos con el factor Q . Con esto podemos utilizar el mismo esquema para aproximar las variables μ_i .

Entonces, el esquema a seguir ahora es

$$U_{j+1} = Q_j + h_j(b_1 K_1 + \dots + b_s K_s), \quad U_{j+1} \rightarrow Q_{j+1},$$

calculando U_{jl} , $l = 1, \dots, s$, como en (3.18) pero sustituyéndolo por su factor Q :

$$K_l = F(t_j + c_l h_j, Q_{jl}), \quad U_{jl} \rightarrow Q_{jl},$$

Las variables μ_i se aproximan integrando numéricamente (3.16) de la siguiente manera:

$$\mu_i^c = h_j (b_1 f_1 + \dots + b_s f_s), \quad f_l = (Q_{jl}^T A(t_j + c_l h_j) Q_{jl})_{ii}.$$

Así, obtenemos dos aproximaciones de la matriz ortogonal Q : Q_{j+1} y \widehat{Q}_{j+1} ; y dos aproximaciones de las variables μ_i , que llamamos μ_i^c y $\widehat{\mu}_i^c$, siguiendo el esquema `dp5`. Podemos entonces controlar el error en cada paso utilizando la diferencia entre ambas:

$$\mathbf{err} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|\mu_i^c - \widehat{\mu}_i^c|}{(1 + |\mu_i^c|) \mathbf{TOL}_i} \right\},$$

y usar nuevamente (3.20) para ajustar el nuevo paso $h_{j+1} = h_{\text{new}}$.

En cualquiera de las dos situaciones, se implementa un bucle `while` inicializando $t = 0$, incrementando en el paso j -ésimo el tiempo como $t_{j+1} = t_j + h_j$, con h_j como en (3.20), y manteniendo el bucle mientras que $t \leq t_f$, para un tiempo final t_f fijado de antemano.

Estas dos estrategias de paso adaptativo se han implementado para aproximar los exponentes de Lyapunov de sistemas no lineales mediante dos programas distintos (véase Apéndice B.2). Como hemos comentado en la Subsección 2.4.3, dada una condición inicial \mathbf{x}_0 , por el Teorema Multiplicativo de Oseledec, hay que aproximar los exponentes de Lyapunov de la ecuación variacional asociada al sistema no lineal a lo largo de la órbita $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$. Entonces, la matriz de coeficientes va a ser la matriz jacobiana, $A(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$ y, por lo tanto, será necesario integrar numéricamente la ecuación no lineal de manera simultánea para poder evaluar la matriz Jacobiana a lo largo de la trayectoria.

3.2 Método SVD continuo

En esta sección vamos a considerar un segundo algoritmo basado en la descomposición en valores singulares (SVD) para aproximar el espectro de los exponentes de Lyapunov de sistemas dinámicos, siguiendo el desarrollo que hacen Dieci y Elia [10]. Nos vamos a centrar en una formulación continua en vez de una discreta, ya que en esta, la memoria necesaria es mínima, y para pasar de la SVD en un instante de tiempo al siguiente, basta con integrar una serie de ecuaciones diferenciales que veremos a continuación. Además, si estamos interesados únicamente en aproximar los exponentes de Lyapunov, no será necesario obtener uno de los factores de la descomposición, reduciendo así el costo computacional.

Los siguientes resultados motivan el uso de este método, y puede encontrarse una demostración detallada en [6, pp. 76–77]:

Teorema 3.2 (Descomposición en Valores Singulares). Si A es una matriz real de tamaño $m \times n$, entonces, existen matrices ortogonales

$$U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

tales que

$$U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

donde $p = \min\{m, n\}$, y

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0,$$

a los cuales denominaremos *valores singulares* de A .

Corolario 3.3. Si $U^T A V = \Sigma$ es la factorización SVD de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $m \geq n$, entonces, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$A \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \quad \text{y} \quad A^T \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i,$$

donde \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i son, respectivamente, las columnas i -ésimas de U y V .

De aquí se sigue que

$$A^T A \mathbf{v}_i = \sigma_i^2 \mathbf{v}_i \quad \text{y} \quad A A^T \mathbf{u}_i = \sigma_i^2 \mathbf{u}_i,$$

para cada $i = 1, \dots, n$, luego los valores singulares son, precisamente, las raíces de los valores propios de la matriz $A^T A$. Esta es simétrica y definida positiva, por lo que sus valores

propios son reales y no negativos.

Aunque podría generalizarse para una matriz de cualquier tamaño, en nuestro método SVD continuo nos centraremos en las matrices cuadradas de orden n , y vamos a buscar una descomposición lo suficientemente suave de una matriz fundamental de soluciones $X(t)$ a tiempo t :

$$X(t) = U(t)\Sigma(t)V(t)^T, \quad t \geq 0.$$

Vamos a ver a continuación que, si los valores singulares son distintos y los ordenamos como

$$\sigma_1(t) > \dots > \sigma_n(t) > 0,$$

para cada $t \geq 0$, entonces, vamos a poder encontrar ecuaciones diferenciales para las matrices de la factorización SVD; es más, si $X(t)$ es una matriz fundamental con valores singulares distintos de clase $\mathcal{C}^k([0, +\infty))$, con $k \geq 1$, entonces, va a tener una factorización SVD de clase $\mathcal{C}^k([0, +\infty))$ [18].

Sea entonces $X(t) = \Psi(t)$ la matriz fundamental principal en 0, solución de $\dot{X} = A(t)X$, con $X(0) = I$. Si derivamos la expresión

$$X(t) = U(t)\Sigma(t)V(t)^T,$$

obtenemos lo siguiente:

$$\dot{X} = \dot{U}\Sigma V^T + U\dot{\Sigma}V^T + U\Sigma\dot{V}^T = AX = AU\Sigma V^T. \quad (3.21)$$

Si multiplicamos (3.21) por U^T por la izquierda, y por V por la derecha, dado que U y V son ortogonales, se tiene lo siguiente:

$$U^T\dot{U}\Sigma V^T V + U^T U\dot{\Sigma}V^T V + U^T U\Sigma\dot{V}^T V = U^T AU\Sigma V^T V$$

luego

$$U^T\dot{U}\Sigma + \dot{\Sigma} + \Sigma\dot{V}^T V = U^T AU\Sigma. \quad (3.22)$$

Vamos a definir a continuación una serie de matrices que nos van a servir para simplificar (3.22). Sean

$$\begin{cases} C = U^T AU, \\ H = U^T \dot{U}, \\ K = V^T \dot{V}, \end{cases}$$

Se tiene que H y K son antisimétricas pues, como $U^T U = I$, derivando obtenemos

$$\dot{U}^T U + U^T \dot{U} = 0 \implies H = U^T \dot{U} = -\dot{U}^T U = -(U^T \dot{U})^T = -H^T,$$

y análogamente para K . Como conclusión, sus diagonales se anulan; es decir,

$$h_{ii} = k_{ii} = 0,$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Además,

$$\begin{cases} H = U^T \dot{U} \implies \dot{U} = UH, \\ K = V^T \dot{V} \implies \dot{V} = VK. \end{cases}$$

Finalmente, la ecuación (3.22) nos queda de la siguiente manera:

$$\dot{\Sigma} = C\Sigma - H\Sigma + \Sigma K.$$

Notemos que

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i \delta_{ij} \quad \text{y} \quad \dot{\Sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_i \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Entonces, la componente (i, j) de la matriz $\dot{\Sigma}$ puede escribirse como se muestra a continuación:

$$\dot{\sigma}_i \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} \sigma_k \delta_{kj} - \sum_{k=1}^n h_{ik} \sigma_k \delta_{kj} + \sum_{l=1}^n \sigma_i \delta_{il} k_{lj} = c_{ij} \sigma_j - h_{ij} \sigma_j + \sigma_i k_{ij}, \quad (3.23)$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$, donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{ki} a_{kl} u_{lj},$$

ya que $C = U^T A U$.

Por un lado, si $i = j$, se tiene que $h_{ii} = k_{ii} = 0$ por ser H y K antisimétricas, así que la ecuación (3.23) se puede escribir de manera más simplificada como

$$\dot{\sigma}_i = c_{ii} \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.24)$$

Denotemos ahora por $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^T \in \mathbb{R}^n$ al vector columna que tiene por componentes a los valores singulares de $X(t)$; es decir, a la diagonal de Σ . Llamemos \tilde{C} a la matriz cuadrada de orden n que tiene la misma diagonal que C , y el resto todo ceros; esto es, $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} \delta_{ij}$, para cada $i, j = 1, \dots, n$. Entonces, la ecuación (3.24) se puede reescribir así:

$$\dot{\sigma} = \tilde{C} \sigma.$$

Por otro lado, si $i \neq j$, la ecuación (3.23) queda de la siguiente manera:

$$0 = c_{ij} \sigma_j - h_{ij} \sigma_j + \sigma_i k_{ij}.$$

Entonces, por ser H y K antisimétricas,

$$h_{ji} = -h_{ij} \quad \text{y} \quad k_{ji} = -k_{ij},$$

así que llegamos a la siguiente expresión:

$$0 = c_{ji} \sigma_i - h_{ji} \sigma_i + \sigma_j k_{ji} = c_{ji} \sigma_i + h_{ij} \sigma_i - \sigma_j k_{ij}, \quad i \neq j.$$

De esta manera, podemos plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para las entradas de las matrices h_{ij} y k_{ij} , para cada $j > i$, y obtener h_{ji} y k_{ji} por antisimetría (recordemos que $h_{ii} = k_{ii} = 0$):

$$\begin{cases} \sigma_j h_{ij} - \sigma_i k_{ij} = \sigma_j c_{ij}, \\ \sigma_i h_{ij} - \sigma_j k_{ij} = -\sigma_i c_{ji}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Despejamos k_{ij} en las dos ecuaciones de (3.25) e igualamos:

$$\frac{\sigma_j h_{ij} - \sigma_j c_{ij}}{\sigma_i} = \frac{\sigma_i c_{ji} + \sigma_i h_{ij}}{\sigma_j} \implies h_{ij} \sigma_j^2 - \sigma_j^2 c_{ij} = c_{ij} \sigma_i^2 + h_{ij} \sigma_i^2$$

Llegamos entonces a una expresión para h_{ij} tras despejar en la anterior ecuación:

$$h_{ij} = \frac{c_{ij} \sigma_j^2 + c_{ji} \sigma_i^2}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2}, \quad j > i.$$

Para calcular k_{ij} , sustituimos el valor obtenido de h_{ij} en la segunda ecuación de (3.25):

$$\sigma_j \frac{c_{ij} \sigma_j^2 + c_{ji} \sigma_i^2}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2} - \sigma_i k_{ij} = \sigma_j c_{ij}.$$

Operando,

$$k_{ij} = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \left(c_{ji} + \frac{c_{ij} \sigma_j^2 + c_{ji} \sigma_i^2}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2} \right) = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \left(\frac{c_{ji} \sigma_j^2 - c_{ji} \sigma_i^2 + c_{ij} \sigma_j^2 + c_{ji} \sigma_i^2}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2} \right).$$

Nos queda finalmente la siguiente expresión para k_{ij} :

$$k_{ij} = \frac{(c_{ij} + c_{ji}) \sigma_i \sigma_j}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2}, \quad j > i.$$

Recapitulando, hemos obtenido el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \tilde{C}\sigma, \\ \dot{U} = UH, \\ \dot{V} = VK, \end{cases} \quad (3.26)$$

donde H y K se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{cases} h_{ij} = \frac{c_{ij} \sigma_j^2 + c_{ji} \sigma_i^2}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2}, & h_{ji} = -h_{ij}, \\ k_{ij} = \frac{(c_{ij} + c_{ji}) \sigma_i \sigma_j}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2}, & k_{ji} = -k_{ij}, \end{cases} \quad \text{para cada } j > i. \quad (3.27)$$

Como hemos comentado, si los valores singulares son distintos dos a dos, los denominadores de las entradas de H y K no se anulan.

Para apoyar estos modelos de ecuaciones diferenciales, están probados en [13, Teoremas 4.2 y 4.6] los siguientes resultados:

Teorema 3.4. Supongamos que el sistema lineal $\dot{X} = A(t)X$ tiene exponentes de Lyapunov distintos y estables. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1. Existe un instante de tiempo \bar{t} finito tal que los valores singulares de cualquier matriz fundamental van a ser distintos, para todo $t \geq \bar{t}$. El valor de \bar{t} va a depender de la matriz fundamental.

2. A partir de los valores singulares, podemos obtener aproximaciones a los exponentes de Lyapunov de la siguiente manera:

$$\lambda'_i = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log(\sigma_i(t)) , \quad i = 1, \dots, n .$$

En resumen, dadas las condiciones iniciales $U(0)$, $\Sigma(0)$ y $V(0)$, obtenidas de la descomposición SVD de $X(0)$, las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (3.26) nos darán la descomposición suave en valores singulares que estamos buscando. Sin embargo, este método presenta una serie de dificultades:

1. Si dos valores singulares σ_i y σ_j se acercan mucho, entonces, las matrices H y K comenzarán a variar rápidamente al acercarse los denominadores de las ecuaciones (3.27) a 0, por lo que será más complicado obtener U y V .
2. Para integraciones a tiempos largos, es altamente probable que algunos de los valores singulares se desborde, reduciendo la precisión en la integración numérica.
3. Por último, en teoría, aún cuando los exponentes de Lyapunov sean estables, los valores singulares serán distintos dos a dos solamente a partir de un cierto instante de tiempo \bar{t} lo suficientemente grande.

Procedemos ahora a comentar cómo superar estas dificultades, siguiendo el *nuevo* algoritmo desarrollado en [10].

3.2.1 Algoritmo SVD continuo

Queremos entonces aproximar todo el espectro de estabilidad del sistema $\dot{X} = A(t)X$, es decir, el conjunto de valores distintos que toma el exponente de Lyapunov asociado. Para obtener resultados factibles, asumiremos que los exponentes de Lyapunov del sistema son distintos y estables, esto es, que el sistema es robusto ante pequeñas variaciones de las condiciones iniciales. Además, como el espectro es independiente de la matriz solución que consideremos, realizaremos la descomposición SVD de la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$, a la que denotaremos por $\Psi(t)$. Para ello, tenemos que superar las tres dificultades anteriormente comentadas.

En primer lugar, las ecuaciones (3.26) requieren que todos los valores singulares de la matriz $\Psi(t)$ sean diferentes, debido al término $\sigma_j^2 - \sigma_i^2$ del denominador de las entradas de las matrices H y K , para $j > i$. Sin embargo, sabemos, por el Teorema 3.4, que esto sucede para todo $t \geq \bar{t}$, aunque no conocemos de antemano \bar{t} para un problema específico. Aún así, supongamos que nos encontramos en la situación de $t \geq \bar{t}$. Como comentan Dieci y Elia [10, p. 15], en este caso, no solamente vamos a tener que los valores singulares son distintos, sino que van a estar separados exponencialmente:

$$\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_{i+1}(t)} \geq e^{at} , \quad i = 1, \dots, n - 1$$

y para todo $t \geq \bar{t}$, donde $a \in \mathbb{R}$ es una cierta constante [13]. Por lo tanto, para cada $t \geq \bar{t}$,

$$\sigma_1(t) > \dots > \sigma_n(t) ,$$

luego en este caso, existe una factorización suave

$$X(t) = U(t)\Sigma(t)V(t)^T$$

para todo $t \geq \bar{t}$.

Aún así, no sabemos qué sucede para $0 < t < \bar{t}$. No obstante, esto no va a ser un problema pues, de la demostración de [18, Teorema 4.3], se tiene que las funciones genéricas uniparamétricas (t , en este caso) no tienen dos valores singulares iguales. Por lo tanto, en la práctica, integraremos numéricamente la ecuación $\dot{X} = A(t)X$ hasta un cierto tiempo t_ϵ , y obtendremos la factorización SVD de la matriz fundamental de soluciones obtenida en ese instante de tiempo para inicializar los factores del algoritmo continuo.

Ahora, para evitar problemas de desbordamiento, vamos a realizar el siguiente cambio de variables:

$$\nu_i(t) = \frac{\sigma_{i+1}(t)}{\sigma_i(t)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \nu_n(t) = \log(\sigma_n(t)). \quad (3.28)$$

Asumiendo que hemos ordenado los valores singulares en orden decreciente, se tiene que $0 < \nu_i(t) < 1$, para cada $i = 1, \dots, n-1$.

Recordemos que teníamos que

$$\dot{\sigma}_i = c_{ii}\sigma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces, con este cambio de variables, la ecuación diferencial para cada ν_i queda como sigue:

$$\begin{cases} \dot{\nu}_i = (c_{i+1,i+1} - c_{ii})\nu_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\nu}_n = c_{nn}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Sin embargo, nos va a ser de mayor utilidad trabajar con logaritmos ya que, dividiendo la primera igualdad de (3.29) entre ν_i ,

$$\frac{\dot{\nu}_i}{\nu_i} = \frac{d}{dt}(\log \nu_i) = c_{i+1,i+1} - c_{ii}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Es decir, en el algoritmo, integraremos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\log \nu_i) = c_{i+1,i+1} - c_{ii}, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\nu}_n = c_{nn}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Por último, tenemos que reescribir las ecuaciones (3.27) en términos de las nuevas variables. Notemos que

$$\frac{\sigma_j(t)}{\sigma_i(t)} = \frac{\sigma_{i+1}(t)}{\sigma_i(t)} \frac{\sigma_{i+2}(t)}{\sigma_{i+1}(t)} \cdots \frac{\sigma_j(t)}{\sigma_{j-1}(t)} = \prod_{k=i}^{j-1} \nu_k, \quad j > i.$$

Definimos entonces las siguientes cantidades para $j > i$:

$$\nu_{ij}(t) = \frac{\sigma_j(t)}{\sigma_i(t)} = \prod_{k=i}^{j-1} \nu_k. \quad (3.31)$$

Suponiendo $j > i$, ya que $h_{ji} = -h_{ij}$, nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{c_{ij}\sigma_j^2 + c_{ji}\sigma_i^2}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2} = \frac{c_{ij}\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2 + c_{ji}}{\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2 - 1} = \frac{c_{ij}\nu_{ij}^2 + c_{ji}}{\nu_{ij}^2 - 1}, \\ k_{ij} &= \frac{(c_{ij} + c_{ji})\sigma_i\sigma_j}{\sigma_j^2 - \sigma_i^2} = \frac{(c_{ij} + c_{ji})\frac{\sigma_j}{\sigma_i}}{\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2 - 1} = \frac{(c_{ij} + c_{ji})\nu_{ij}}{\nu_{ij}^2 - 1}. \end{aligned}$$

De este modo, las ecuaciones (3.27) quedan reescritas en términos de las nuevas variables ν_i a través de las cantidades ν_{ij} que hemos definido:

$$\begin{cases} h_{ij} = \frac{c_{ij}\nu_{ij}^2 + c_{ji}}{\nu_{ij}^2 - 1}, & h_{ji} = -h_{ij}, \quad j > i, \\ k_{ij} = \frac{(c_{ij} + c_{ji})\nu_{ij}}{\nu_{ij}^2 - 1}, & k_{ji} = -k_{ij}, \quad j > i. \end{cases} \quad (3.32)$$

Resumiendo, el esqueleto del nuevo algoritmo SVD continuo es el siguiente:

1. Integramos numéricamente la ecuación $\dot{X} = A(t)X$ entre $t = 0$ y $t = t_\epsilon$, inicializando con $X(0) = I_n$, ya que se trata de la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$.
2. Realizamos la descomposición SVD de la matriz $X(t)$ en el instante t_ϵ , e inicializamos las matrices U y V , y los valores de las variables ν_i , a partir de los valores singulares de $X(t_\epsilon)$.
3. Resolvemos numéricamente, para todo $t \geq t_\epsilon$, las ecuaciones (3.30) junto a las ecuaciones diferenciales para U y V ,

$$\dot{U} = UH, \quad \dot{V} = VK, \quad (3.33)$$

habiendo obtenido H y K a partir de (3.27).

Una vez desarrollado este algoritmo, veamos cómo podemos aproximar el conjunto de exponentes de Lyapunov del sistema. Nótese que, dado que estamos integrando las ecuaciones (3.30), disponemos de las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{1}{t}\nu_n(t), \\ b_i(t) &= \frac{1}{t}\log(\nu_i(t)), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Entonces, si el sistema es regular, podremos aproximar los exponentes usando los valores singulares:

$$\lambda_i \approx \lambda_i(T) := \frac{1}{T}\log(\sigma_i(T)),$$

para cada $i = 1, \dots, n$, y para un cierto valor de $T > 0$ lo suficientemente grande. Tratemos de expresarlo en términos de las funciones $b_i(t)$ que acabamos de definir en (3.34):

$$b_n(T) = \frac{1}{T} \nu_n(T) = \frac{1}{T} \log(\sigma_n(T)) \approx \lambda_n,$$

y

$$b_i(T) = \frac{1}{T} \log\left(\frac{\sigma_{i+1}(T)}{\sigma_i(T)}\right) = \frac{1}{T} \log(\sigma_{i+1}(T)) - \frac{1}{T} \log(\sigma_i(T)) \approx \lambda_{i+1} - \lambda_i,$$

para cada $i = n-1, \dots, 1$. Es decir, para un tiempo T lo suficientemente largo, aproximaremos los exponentes de Lyapunov del sistema dinámico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \lambda_n &\approx b_n(T), \\ \lambda_i &\approx \lambda_{i+1} - b_i(T), \quad i = n-1, \dots, 1. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Alternativamente, si el sistema no es regular en el sentido de Lyapunov, podemos aproximar los límites superiores siguiendo su propia definición: tomamos un intervalo $[T_1, T_2]$, con $0 < T_1 < T_2$ lo suficientemente grandes y separados entre sí, y calculamos el máximo de (3.35) en dicho intervalo:

$$\lambda_i^s \approx \max_{T_1 \leq t \leq T_2} \left\{ \frac{1}{t} \log(\sigma_i(t)) \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Reescribiéndolo en términos de los $b_i(t)$,

$$\begin{cases} \lambda_n^s \approx \max_{T_1 \leq t \leq T_2} \{b_n(t)\}, \\ \lambda_i^s \approx \lambda_{i+1}^s - \max_{T_1 \leq t \leq T_2} \{b_i(t)\}, \quad i = n-1, \dots, 1. \end{cases} \tag{3.36}$$

Veamos ahora cómo implementar en MATLAB este algoritmo SVD continuo para estimar los exponentes de Lyapunov de la ecuación diferencial lineal (3.1).

En primer lugar, hay que inicializar las matrices para un tiempo t_ϵ dado. Para ello, integramos numéricamente el sistema $\dot{X} = A(t)X$ desde $t = 0$ hasta $t = t_\epsilon$, y calculamos la descomposición en valores singulares de la matriz solución a tiempo t_ϵ , $X(t_\epsilon) = U_0 \Sigma_0 V_0^T$. Aunque en el artículo [10] de Dieci y Elia se usa el método Runge-Kutta de orden 4 de la regla de 3/8, nosotros usaremos la función `ode45` de MATLAB para integrar numéricamente estas ecuaciones.

Usamos U_0 y V_0 como condiciones iniciales para las ecuaciones $\dot{U} = UH$ y $\dot{V} = VK$. Las condiciones iniciales para (3.30) se obtienen tomando los valores singulares de la matriz $X(t_\epsilon)$, es decir, el valor i -ésimo de la diagonal de Σ_0 , $\sigma_i(t_\epsilon)$, y calculando $\nu_i(t_\epsilon)$ para cada $i = 1, \dots, n$, a partir de las ecuaciones (3.28).

Ahora, se integran numéricamente de manera simultánea las ecuaciones diferenciales (3.33) para U y V , y (3.30) para las variables $\nu_i(t)$, usando (3.32) para obtener las entradas de las matrices H y K , exponenciando $\log \nu_i$ para obtener los ν_i y, por tanto, los ν_{ij} . Para ello, utilizaremos un esquema Runge-Kutta de orden 4: la regla 3/8 [19], la cual denotaremos por `RK38`, cuyo tablero de Butcher puede consultarse en el Apéndice A.2. Se

trata de una pareja 4-3, con la que controlaremos el error de la manera que se explica en [19].

Nótese que, en cada paso del esquema Runge-Kutta, hay que calcular también los ν_{ij} según la ecuación (3.31), ya que los necesitamos para calcular la matriz H , la cual viene dada por (3.32).

Por otro lado, como estamos integrando dos matrices ortogonales, U y V , en cada paso reemplazamos sus aproximaciones calculadas con RK38 por los factores ortogonales obtenidos mediante la factorización QR de estas aproximaciones. Esto último lo haremos con la función `qr` de MATLAB.

Construimos entonces un bucle en el que, en el paso k -ésimo, se integran estas ecuaciones usando la función `ode45` entre los tiempos t_j y $t_{j+1} = t_j + h_j$, con h_j un paso fijo o variable. De este modo, en cada paso podemos actualizar los valores de los $b_i(t_j)$ para cada $i = 1, \dots, n$, según las ecuaciones (3.34).

En este trabajo implementaremos tanto un método de paso fijo, como uno de paso variable. En el segundo caso, controlaremos en cada iteración el error sobre las variables ν_i y sobre la matriz ortogonal U simultáneamente. Tanto el control del error como el paso variable se implementan de la manera estándar explicada en [19, pp. 167–168].

Finalmente, aproximamos los exponentes de Lyapunov como hemos explicado en la sección anterior, usando la ecuación (3.35) si el sistema es regular Lyapunov, y (3.36) en caso contrario.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se presentan distintos experimentos numéricos destinados a ilustrar la aplicabilidad y el comportamiento de los métodos basados en las factorizaciones QR y SVD continuas en el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Los algoritmos implementados se aplicarán a varios sistemas, tanto lineales como no lineales. El objetivo principal es validar los métodos mediante la comparación con resultados previamente publicados, en particular aquellos recogidos en los diferentes trabajos de Dieci y colaboradores, que constituyen un marco de referencia fundamental en la literatura sobre la computación de exponentes de Lyapunov mediante factorizaciones matriciales.

Los experimentos permitirán evaluar tanto la precisión como la estabilidad de los métodos bajo condiciones diversas. Asimismo, se explorarán las diferencias estructurales entre las aproximaciones QR y SVD, destacando las ventajas y limitaciones de cada una, así como su comportamiento frente a variaciones de los diferentes parámetros (como el tamaño del paso o el intervalo de integración temporal).

4.1 Método QR

4.1.1 Ejemplo 1

Veamos en primer lugar un ejemplo sencillo, presentado en [15, pp. 18–19], para probar la validez de nuestros programas y verificar cómo se comportan con respecto a variaciones de los parámetros. Consideramos el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \cos(t) \sin(t) \\ -1 + \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix} \mathbf{x} .$$

Este sistema es regular y sus exponentes de Lyapunov son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1.$$

Nótese que la traza de la matriz del sistema $A(t)$ es constante:

$$\operatorname{tr}A(t) = -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) - 1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr}(A(s)) \, ds = -\frac{1}{2}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^2 \lambda_k = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

luego, efectivamente, el sistema es regular.

Los autovalores de $A(t)$ son $(-1 \pm i\sqrt{7})/4$, lo que podría sugerir que la solución constante $\mathbf{x}_0(t) = (0, 0)^T$, para todo $t \geq 0$, es asintóticamente estable; es decir, que toda solución con condición inicial lo suficientemente cercana a $(0, 0)^T$ converge a $\mathbf{x}_0(t)$. No obstante, esto no es cierto puesto que si hacemos el cambio de variables

$$\mathbf{x} = Q(t)\mathbf{y}$$

con

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

En la Tabla 4.1 se presentan los resultados obtenidos con el programa `QR.DP5` de paso fijo, cuyo código se encuentra en el Apéndice B.1. Con estos resultados, observamos que basta utilizar un paso de 0.1 para obtener una buena aproximación, y que no es necesario tomar un tiempo final t_f muy grande para obtenerlas.

h	t_f	λ_1	λ_2
1	10	0.4773	-0.8755
	100	0.2330	-0.4076
0.1	10	0.500006	-1.00002
	100	0.500006	-1.00002
0.01	10	0.5000005	-1.0000002
	100	0.5000005	-1.0000002
0.001	10	0.5000000004	-1.000000001

Tabla 4.1: Resultados del Ejemplo 1 con el método QR.

4.1.2 Ejemplo 2

Consideramos ahora la siguiente matriz de coeficientes:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(t) & -1 & \frac{1}{1+t} \\ -\cos(t) & 0 & \frac{3}{1+t^2} & 5 \\ 1 & -\frac{3}{1+t^2} & 0 & -\sin(t) \\ \frac{1}{1+t} & 5 & -\sin(t) & 0 \end{pmatrix},$$

la cual aparece en [20, pp. 262–263]. En ese artículo se tratan sistemas con simetrías, y Dieci y sus colaboradores realizan el análisis utilizando condiciones iniciales aleatorias. Nosotros compararemos los resultados usando como condición inicial la matriz identidad de orden 4 con los obtenidos con una matriz aleatoria obtenida con el comando `rand` de MATLAB, el cual genera una matriz con componentes aleatorias que siguen una distribución uniforme entre 0 y 1.

Los exponentes de Lyapunov del sistema lineal que tiene a la matriz $A(t)$ como matriz de coeficientes son los siguientes:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = -5.$$

De nuevo, el sistema es regular ya que tanto la traza como la suma de los exponentes se anulan.

En [10], Dieci utiliza esquemas de Runge-Kutta explícitos de orden 2 y 4 con paso constante $h = 0.1$ para aproximar los exponentes λ_1 y λ_4 con diferentes métodos QR y SVD. En las Tablas 4.2 y 4.3 pueden observarse los resultados obtenidos con matriz identidad y aleatoria como condiciones iniciales, respectivamente, y para diferentes valores de paso fijo y de tiempo de integración. Los resultados obtenidos para estas condiciones con nuestro programa QR de paso fijo, `QR.DP5`, son bastante similares a los de Dieci. Además, incluimos el tiempo T , medido en segundos, que tarda el programa en aproximar los exponentes.

h	t_f	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	T
0.1	100	4.9699	0.0227	0.0015	-4.9941	< 1
	1000	4.9969	0.0023	0.0002	-4.9994	< 1
	10000	4.9997	0.0002	0.00003	-4.99997	7.24
0.01	100	4.9698	0.0228	0.0015	-4.9949	< 1
	1000	4.9969	0.0023	0.0001	-4.9993	7.03

Tabla 4.2: Resultados del Ejemplo 2 con el método QR utilizando la matriz identidad como condición inicial.

Asimismo, podemos observar que se obtiene mayor precisión utilizando condiciones iniciales aleatorias y que, en este caso, un mayor tiempo de integración nos da mejores resultados que una reducción del paso, pero aumentando el tiempo de ejecución del programa. De todas formas, en todos los casos, obtenemos buenas aproximaciones a los exponentes.

h	t_f	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	T
0.1	100	4.9934	0.0021	0.0008	-4.9947	< 1
	1000	4.9994	-0.0002	0.0001	-4.9994	< 1
	10000	4.99995	0.00001	-0.00004	-4.99993	6.9
0.01	100	4.9969	-0.0003	0.0170	-4.9797	< 1
	1000	4.9992	0.0001	0.0004	-4.9996	6.87
0.001	100	4.9965	-0.0053	0.00001	-4.9912	0.54

Tabla 4.3: Resultados del Ejemplo 2 con el método QR utilizando una matriz aleatoria generada con `rand` como condición inicial.

4.1.3 Ejemplo 3

Continuamos con otro sistema introducido en el artículo [20, pp. 263–264], el cual presenta una matriz de coeficientes de mayor tamaño, con el fin de comparar cómo afecta el tamaño del sistema a la precisión de nuestro programa. La matriz de coeficientes es la siguiente:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(t) & \frac{1}{1+t} & -1 & \frac{2}{1+t^2} & \cos(t) \\ -\sin(t) & 0 & \frac{1}{2+t} & 0 & 4 & \frac{1}{1+t^2} \\ -\frac{1}{1+t} & -\frac{1}{t+2} & 0 & 0 & \cos(t) & 2+\sin(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+t} & 0 \\ \frac{2}{1+t^2} & 4 & \cos(t) & \frac{1}{1+t} & 0 & -\sin(t) \\ \cos(t) & \frac{1}{1+t^2} & 2+\sin(t) & 0 & \sin(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Los exponentes de Lyapunov del sistema lineal que tiene a $A(t)$ como matriz de coeficientes son:

$$\lambda_1 = 3.85140, \quad \lambda_2 = 2.20210, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -2.20210, \quad \lambda_6 = -3.85140.$$

Los resultados se presentan en la Tabla 4.4, habiendo empleado nuevamente matrices aleatorias como condición inicial. Las aproximaciones obtenidas son satisfactorias, aunque se aprecia una ligera pérdida de precisión, especialmente en los exponentes nulos, en comparación con el ejemplo anterior, lo cual puede deberse al aumento del tamaño del sistema.

También se observa un incremento en el tiempo de computación, si bien este efecto es coherente con los resultados obtenidos por Dieci y sus colaboradores, que son comparables a los nuestros, alcanzando aproximaciones precisas hasta el tercer decimal. A pesar del aumento en la dimensión del sistema, el tiempo de ejecución del programa no se ha visto afectado de manera significativa.

h	t_f	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	T
0.1	100	3.8640	2.1854	-0.0098	-0.0205	-2.1886	-3.8305	< 1
	1000	3.8532	2.2000	-0.0001	0.0004	-2.3014	-3.8522	< 1
	10000	3.85178	2.20191	0.00002	-0.000003	-2.20197	-3.85173	10.98
0.01	100	3.8596	2.1868	0.0021	0.0067	-2.1837	-3.8580	< 1
	1000	3.8533	2.1965	-0.0008	0.0023	-2.2039	-3.8489	7
	10000	3.8516	2.2021	-0.0001	-0.0002	-2.2019	-3.8515	20

Tabla 4.4: Resultados del Ejemplo 3 con el método QR utilizando una matriz aleatoria generada con `rand` como condición inicial.

Por último, como se muestra en la Figura 4.1, las aproximaciones obtenidas convergen a los exponentes, por lo que el sistema es regular en el sentido de Lyapunov.

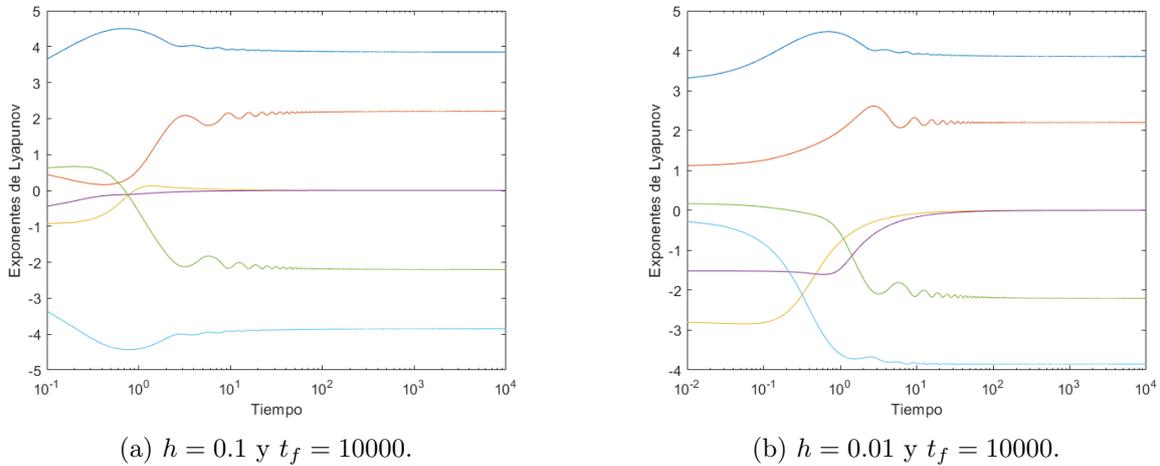


Figura 4.1: Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 3 con el método QR.

4.1.4 Ejemplo 4

El método QR presentado es solamente válido para sistemas regulares ya que, en caso contrario, no podemos recuperar los exponentes de Lyapunov a partir de los elementos diagonales de la matriz de coeficientes $B(t)$ del sistema $\dot{R} = B(t)R$. Tomando el sistema no regular (2.70) del Ejemplo 2.41, expuesto al final del Capítulo 2, vamos a probar que, efectivamente, el método no funciona. La matriz de coeficientes era

$$\begin{pmatrix} \cos(\log(t+1)) & \sin(\log(t+1)) \\ \sin(\log(t+1)) & \cos(\log(t+1)) \end{pmatrix},$$

y se tenía que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) ds = \sqrt{2} \quad y \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(A(s)) ds = -\sqrt{2}.$$

Las aproximaciones obtenidas para diferentes tiempos t_f usando un paso fijo de $h = 0.1$ se muestran en la Tabla 4.5, y vemos que los valores obtenidos oscilan entre los valores $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

t_f	λ_1	λ_2
100	-0.1301	-0.9823
500	0.9903	-0.0592
1000	0.8098	0.5868
1500	0.8086	0.5880
2000	0.2477	0.9705
5000	-0.6163	0.7883

Tabla 4.5: Resultados del Ejemplo 4 con el método QR (sistema no regular).

Esto se ve de manera más clara en la Figura 4.2, donde se muestra la evolución temporal de las aproximaciones de los exponentes de Lyapunov obtenidas con el método. Se utiliza una escala logarítmica en el eje x para representar con mayor claridad las variaciones del sistema.

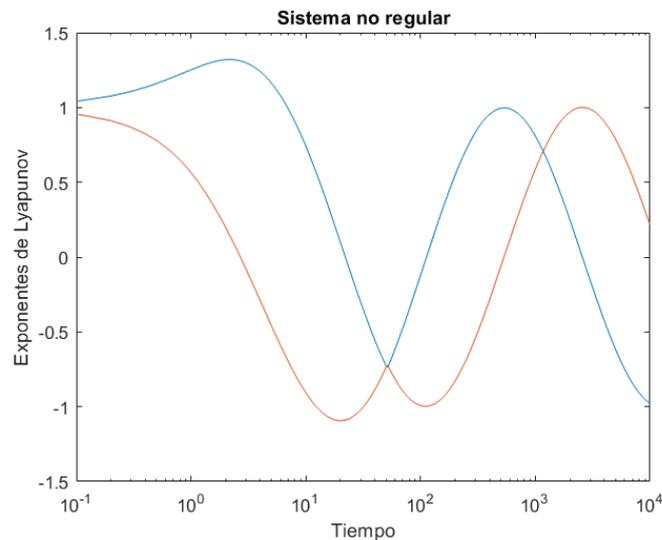


Figura 4.2: Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 4 con el método QR (sistema no regular).

4.2 Método SVD

4.2.1 Ejemplo 1

Para probar la validez del programa que aproxima los exponentes de Lyapunov mediante el método SVD con paso fijo (véase Apéndice C.1), vamos a presentar un ejemplo del artículo de Dieci y Elia [10, pp. 20–21], el cual hemos seguido para desarrollar este algoritmo. Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales regular cuyos exponentes de Lyapunov son: 1, 0, -2, -10. La matriz de coeficientes A es tal que un cambio de variables ortogonal Q la reduce a la suma de una matriz diagonal más una perturbación que tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$:

$$Q^T A Q - Q^T \dot{Q} = \text{diag}(1, 0, -2, -10) + B(t), \quad t \geq 0,$$

donde

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{t^2+2} + \frac{1}{(t+1)^2} & \frac{\log(t+0.1)}{t+0.2} & \frac{1}{t+0.1} & \frac{t}{t^2+1} \\ \frac{\log(t+0.2)}{t^2+3} & \frac{1}{t+1} + \log\left(\cos\left(\frac{\sqrt{t}}{t+1}\right)\right) & \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} & \frac{\cos t}{t+1} \\ \frac{1}{t+0.2} & \frac{\log(t+0.1)}{t+2} & \frac{\cos t}{t^2+2} + \frac{\sin t}{t+1} & \frac{t}{t^2+1} \\ \frac{t}{t^2+1} & \frac{t}{t^2+1} & \frac{\sin t}{t+1} & \frac{\log(t+0.1)}{t+1} + \frac{t}{t^2+1} \end{pmatrix}.$$

En la Tabla 4.6 se muestran las aproximaciones obtenidas con el método SVD de paso fijo (véase el Apéndice C.1), variando los parámetros de tamaño de paso, tiempo final de integración y tiempo previo de integración del sistema.

t_ϵ	h	t_f	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	T
0.01	0.01	100	1.0173	0.0271	-1.9935	-9.8606	< 1
		1000	1.0020	0.0039	-1.9994	-9.9706	8
	0.001	100	1.0153	0.0275	-1.9921	-9.8604	8
0.1	0.1	100	1.0300	0.0267	-2.0125	-9.9843	< 1
		1000	1.0125	0.0038	-2.0063	-10.1005	< 1
		10000	1.0131	0.0005	-2.0054	-10.1086	7
	0.01	100	1.0209	0.0266	-1.9966	-9.8605	< 1
		1000	1.0021	0.0038	-1.9997	-9.9705	7
0.001	100	1.0201	0.0266	-1.9960	-9.8604	< 8	
1	0.1	100	1.0326	0.0264	-2.0127	-9.9531	< 1
		1000	1.0093	0.0038	-2.0042	-10.0699	< 1
		10000	1.0093	0.0005	-2.0027	-10.0806	8
	0.01	100	1.0292	0.0259	-2.0038	-9.8608	< 1
		1000	1.0029	0.0037	-2.0004	-9.9706	23
	0.001	100	1.0290	0.0258	-2.0037	-9.8607	19
10	0.01	100	1.0343	0.0244	-1.8195	-9.0060	< 1
		1000	1.0034	0.0036	-1.9819	-9.8851	9
	0.001	100	1.0342	0.0244	-1.8188	-9.0066	7
		1000	1.0087	0.0079	-1.9540	-9.7264	192
100	0.01	1000	1.0035	0.0883	-1.7213	-8.9176	7
	0.001	100	1.0342	0.0244	-1.8188	-9.0066	7

Tabla 4.6: Resultados del Ejemplo 1 con el método SVD de paso fijo.

Vemos que un tiempo inicial de integración t_ϵ grande da peores resultados debido a que, para tiempos largos, los valores singulares crecen muy rápidamente, dando lugar a desbordamientos y errores de aproximación. Asimismo, aumentar mucho el tiempo de integración

no aumenta necesariamente la precisión, pues se comienza a trabajar con magnitudes muy grandes, dando lugar a errores de precisión y a un tiempo de computación mucho mayor.

Por otro lado, en la Figura 4.3 se muestra la evolución temporal de las aproximaciones en dos situaciones distintas, cada una para unos parámetros determinados. En ambas se ve que las aproximaciones convergen a los exponentes, confirmando así que el sistema es regular y que los exponentes existen como límites.

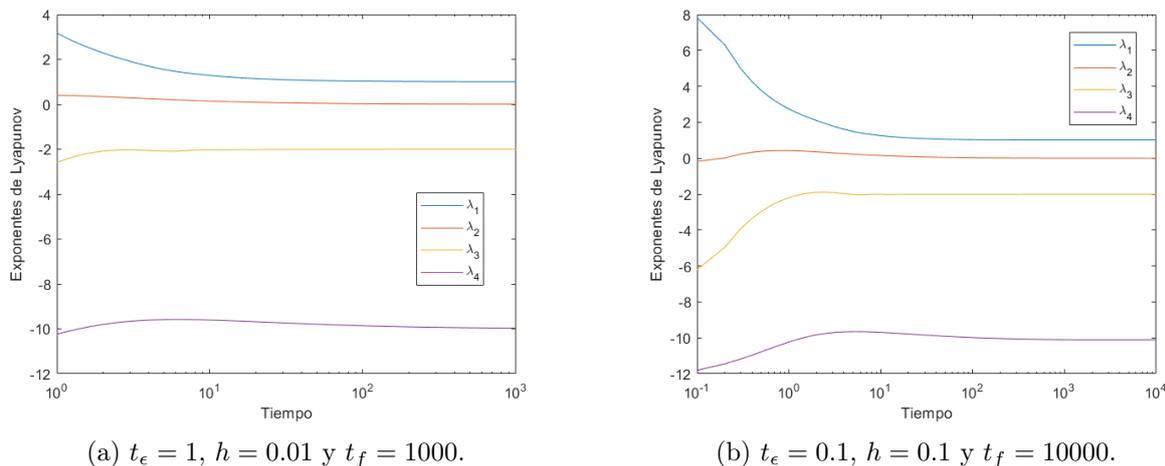


Figura 4.3: Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 1 con el método SVD de paso fijo.

4.2.2 Ejemplo 2

A continuación, vamos a estudiar un ejemplo introducido en [21, pp. 12–13]. Consideramos como matriz del sistema a

$$A(t) = \hat{C} + D(t),$$

con

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -2.5 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} & 0 & \frac{2}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ 0 & \frac{1}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} & 0 \\ \frac{2}{1+t^2} & 0 & \frac{-1}{1+t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2+t^2} & 0 & \frac{-1}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

La matriz $A(t)$ pertenece al llamado grupo simpléctico; esto es, al conjunto de matrices que verifican que

$$A(t)^T J A(t) = J,$$

para todo $t \geq 0$, con J una matriz antisimétrica específica, que en este caso es

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Los exponentes de Lyapunov son las partes reales de los autovalores de \hat{C} :

$$\lambda_1 = 7.4322699, \quad \lambda_2 = 2.237180 \quad \lambda_3 = -2.237180, \quad \lambda_4 = -7.4322699.$$

Para aproximar los valores que toma el exponente de Lyapunov asociado a este sistema mediante el método SVD, ha sido necesario implementar un paso variable, controlando únicamente el error relativo RTOL como se hace en [19]; por lo tanto, utilizamos el código C.2 en el Apéndice C. En la Tabla 4.7 se ven reflejados los resultados obtenidos, donde las columnas STEPS y REJ indican, respectivamente, el número de pasos aceptados y rechazados.. Se ha utilizado en todos ellos $t_\epsilon = 1$, pues los valores singulares estaban lo suficientemente separados.

RTOL	t_f	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	T	STEPS	REJ
10^{-4}	100	7.4603	2.2227	-2.2228	-7.4506	< 1	800	80
	1000	7.4273	2.2343	-2.2359	-7.4249	< 1	9200	790
	10000	7.3902	2.2308	-2.2444	-7.3810	6	98000	8000
10^{-6}	100	7.4611	2.2228	-2.2228	-7.4515	< 1	869	100
	1000	7.4358	2.2351	-2.2351	-7.4349	< 1	8853	876
	10000	7.4320	2.2368	-2.2370	-7.4317	6	96000	8200
10^{-8}	100	7.4612	2.2227	-2.2227	-7.4516	< 1	2289	186
	1000	7.4359	2.2351	-2.2351	-7.4349	< 1	8109	998
	10000	7.4331	2.2369	-2.2369	-7.4330	8	76000	8000

Tabla 4.7: Resultados del Ejemplo 2 con el método SVD de paso variable.

Hemos obtenido muy buenas aproximaciones a los exponentes, y vemos que la precisión aumenta a medida que disminuye la tolerancia. Como cabría esperar, el número de pasos, tanto aceptados como rechazados, también crece, pues el tamaño del paso h que se calcula de manera automática se vuelve más pequeño. Para tolerancias más pequeñas hemos encontrado que los resultados son muy similares a los del caso TOL = 10^{-8} .

Además, se muestra en la Figura 4.4 la evolución temporal de las aproximaciones para dos tolerancias fijadas. Vemos que, claramente, las aproximaciones convergen a los valores reales de los exponentes luego el sistema es, de nuevo, regular. También se aprecia que a partir de $t = 100$, las aproximaciones se vuelven prácticamente constantes; es decir, grandes incrementos del tiempo de integración conllevan una leve mejora de la precisión.

Por último, cabe destacar que el motivo de haber usado $t_\epsilon = 1$ es que, para valores superiores, como $t_\epsilon = 10$, las entradas de $X_0(t_\epsilon)$ son todas del orden de 10^{33} , por lo que hay que controlar con cuidado el tamaño de t_ϵ ; además, los valores singulares para este tiempo son

$$\sigma_1(t_\epsilon) = 2.19 \times 10^{33}, \quad \sigma_2(t_\epsilon) = 1.99 \times 10^{24}, \quad \sigma_3(t_\epsilon) = 6.00 \times 10^{22}, \quad \sigma_4(t_\epsilon) = 1.21 \times 10^{22},$$

lo que valida nuestras hipótesis de separación exponencial entre ellos. Además, para $t_\epsilon = 100$, los valores singulares se desbordan en la integración inicial.

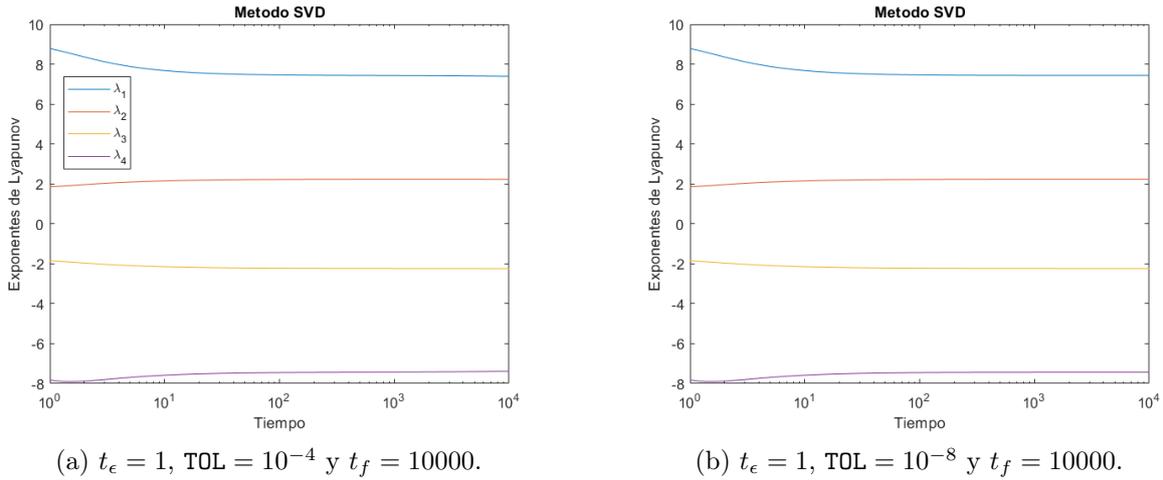


Figura 4.4: Evolución temporal de las aproximaciones para el Ejemplo 2 con el método SVD de paso variable.

4.3 El atractor de Lorenz

Para ilustrar la aplicación del método de factorización QR continuo en el cálculo de exponentes de Lyapunov en sistemas no lineales, se ha considerado el sistema de Lorenz [22], uno de los ejemplos paradigmáticos de sistemas caóticos. El sistema está definido por el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - xz - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases}$$

donde σ , ρ y β son parámetros positivos. En el estudio clásico de Lorenz, los valores considerados fueron $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$, para los cuales el sistema presenta un atractor extraño conocido como el “atractor de Lorenz”: trayectorias cercanas divergen con el tiempo, pero permanecen confinadas dentro de una región del espacio de fases, sin terminar ni en un punto de equilibrio ni en un ciclo límite, moviéndose en torno a una zona limitada del espacio.

Para sistemas no lineales como este, el cálculo de los exponentes de Lyapunov se basa en el estudio de la ecuación variacional, la cual va a ser regular por el Teorema Multiplicativo Ergódico de Oseledec. La matriz jacobiana del sistema de Lorenz es la siguiente:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

Como su traza es constante e igual a

$$\text{tr}(D\mathbf{f}(\mathbf{x})) = -\sigma - \beta - 1,$$

entonces,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} \left(D \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) \right) ds = -\sigma - \beta - 1 = \sum_{i=1}^3 \lambda'_i,$$

con $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ los 3 valores finitos que toma el exponente de Lyapunov asociado al sistema variacional, repetidos con sus respectivas multiplicidades. Además, por ser regular, podemos utilizar el método QR para aproximar los exponentes de Lyapunov. Usaremos programas que implementan un paso variable y control del error, ya que el programa de paso fijo no nos ha dado los resultados esperados.

Además, el exponente de Lyapunov más grande caracteriza el ritmo de separación de trayectorias con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas; por ello, si es positivo y el espacio de fases es compacto, esto suele ser un indicativo de que el sistema es caótico [9]. Vamos a ver que, efectivamente, un exponente de Lyapunov positivo da lugar a que el atractor de Lorenz sea caótico.

En primer lugar, vamos a utilizar los parámetros

$$\sigma = 16, \quad \beta = 4.0 \quad \text{y} \quad \rho = 45.92$$

y como condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0)^T$, para comparar con los resultados obtenidos por Dieci y Vleck en [11] utilizando los programas de paso variable B.2.1 y B.2.2. Estos programas aproximan, respectivamente, los exponentes tanto mediante cuadratura de las variables μ_i , como integrando numéricamente con un esquema Runge-Kutta las ecuaciones diferenciales para estas. Implementaremos control del error únicamente en la matriz Q en el primer caso, y en Q , en las variables μ_i y en la trayectoria \mathbf{x} en el segundo.

Los exponentes convergen a

$$\lambda_1 \approx 1.5, \quad \lambda_2 \approx 0 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -22.5,$$

luego, efectivamente,

$$-\sigma - \beta - 1 = -21 = \sum_{i=1}^3 \lambda'_i.$$

En la Tabla 4.8, se muestran las aproximaciones obtenidas utilizando los dos métodos de paso variable descritos en la Sección 3.1.3, donde las columnas STEPS y REJ indican, respectivamente, el número de pasos aceptados y rechazados. Por otro lado, en la Figura 4.5 hemos representado la evolución temporal de las aproximaciones para ambos métodos para el caso de tolerancia 0.0001. De aquí podemos sacar diversas conclusiones.

Como era de esperar, con el segundo programa, al hacer control del error sobre tres variables, aumenta significativamente el número de pasos rechazados, y por tanto, el tiempo de computación respecto al primero. Aún así, este nos da resultados mucho menos precisos en comparación con el primero, lo que nos lleva a pensar que, para este sistema, se acumula menos error integrando mediante cuadratura que resolviendo la ecuación diferencial, y que un excesivo control del error puede llevar a disminuir la precisión.

Hay que tener también en cuenta que, en el segundo programa, se realizan nueve factorizaciones QR en cada paso, frente a las dos que se realizan en el primero. Esto también

TOL	t_f	Programa	λ_1	λ_2	λ_3	T	STEPS	REJ
0.001	100	1	1.4457	0.0171	-21.4628	< 1	4800	300
		2	1.0907	0.3538	-22.4446	< 1	10200	3700
	1000	1	1.4979	0.0196	-22.5175	1.9	48000	2700
		2	1.1181	0.3828	-22.5009	9.6	102000	36000
	10000	1	1.5097	0.0197	-22.5295	359	497000	28000
		2	0.9944	0.3712	-20.3507	2300	92000	320000
0.0001	100	1	1.4158	0.0209	-22.4367	< 1	15000	190
		2	1.3836	0.0682	-22.4518	1.8	24000	4000
	1000	1	1.4996	0.0074	-22.5070	16	150000	980
		2	1.3900	0.1046	-22.4946	5	70300	5700
	10000	1	1.4962	0.0067	-22.4446	7300	1500000	10000
		2	1.3484	0.1010	-21.6972	58000	2400000	410000
0.00001	100	1	1.3970	0.0329	-22.4299	1.8	48000	53
		2	1.3984	0.0222	-22.4245	5	69000	5600
	1000	1	1.4916	0.0044	-22.4960	452	480000	360
		2	1.4528	0.0420	-22.4949	680	747000	99000

Tabla 4.8: Resultados del atractor de Lorenz: Comparación de los dos programas QR de paso variable.

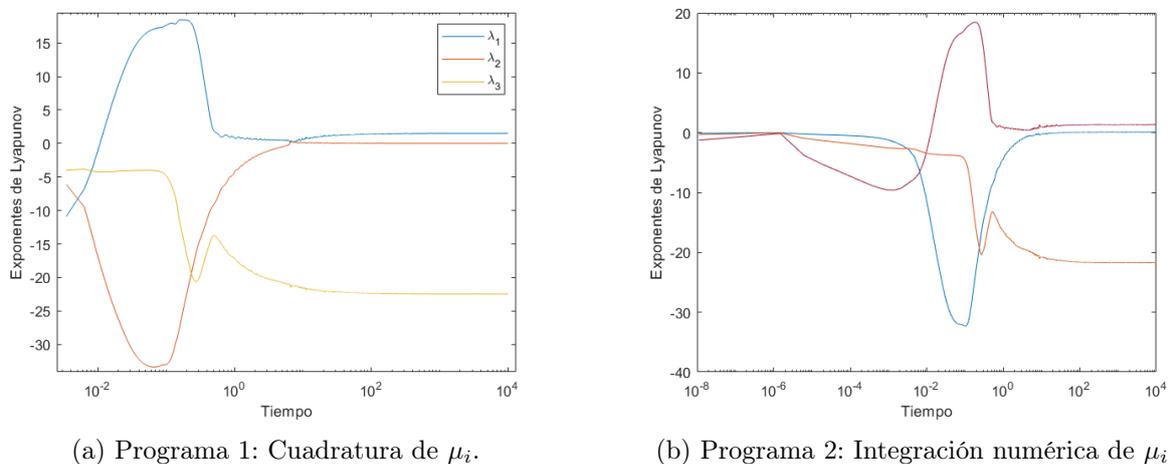
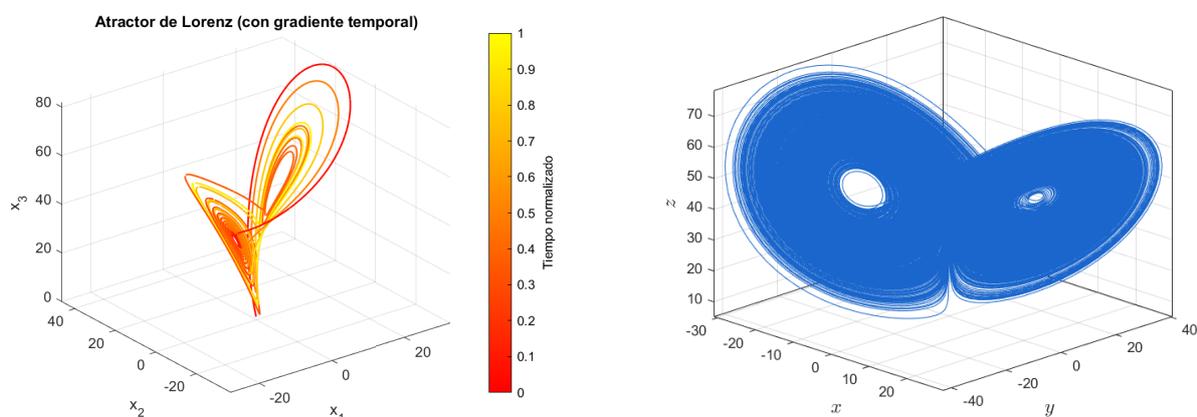


Figura 4.5: Evolución temporal de las aproximaciones para el atractor de Lorenz con métodos QR de paso variable.

explica el incremento significativo del tiempo de computación, dado que esta operación es muy costosa.

Por último, en la Figura 4.6, se muestra la evolución temporal de la trayectoria del atractor de Lorenz desde el instante inicial hasta $t_f = 1000$ (figura de la izquierda), y para tiempos largos (figura de la derecha), respectivamente. En estas se ve reflejada la presencia

de caos, lo cual habíamos anticipado al tener $\lambda_1 \approx 1.5$.



(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

(b) Trayectoria para tiempos largos.

Figura 4.6: Trayectoria del atractor de Lorenz para $\sigma = 16$, $\beta = 4.0$ y $\rho = 45.92$.

Como el primer programa es el que nos ha dado mejores resultados, sobre todo para λ_1 , utilizaremos este para el siguiente apartado, fijando la tolerancia en 0.0001 y el tiempo final del intervalo de integración en 1000, ya que estos parámetros han sido con los que hemos obtenido una mejor relación entre precisión y tiempo de ejecución.

4.3.1 Variación de los parámetros

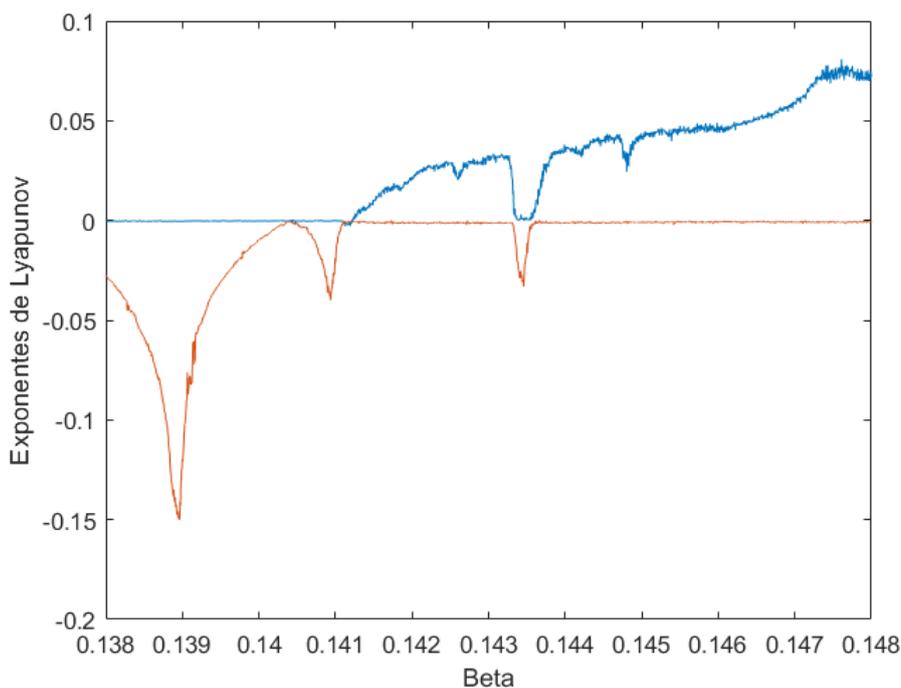
A continuación, estudiaremos un caso de gran interés: vamos a hacer depender al sistema de un único parámetro. Para ello, vamos a poner ρ y σ en función de β , como se hace en [22]; es decir, vamos a variar β y vamos a obtener σ y ρ como sigue:

$$\sigma = \beta + 1 + \sqrt{2(\beta + 1)(\beta + 2)},$$

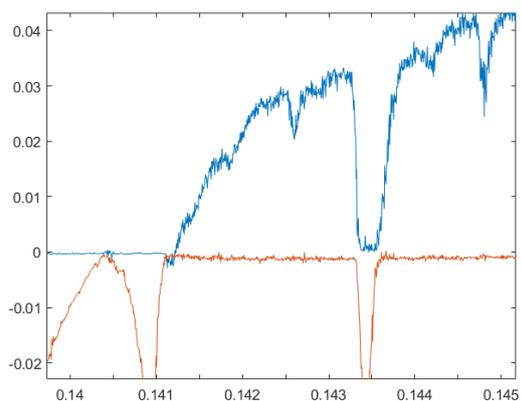
y

$$\rho = \sigma \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1}.$$

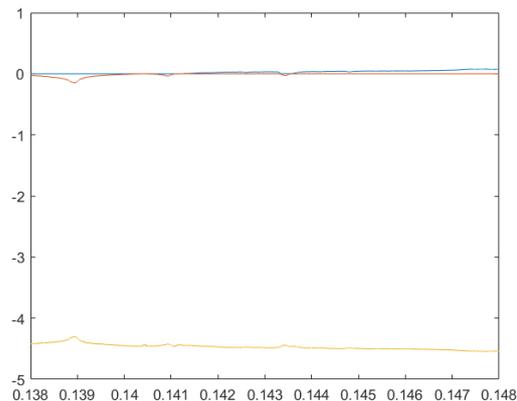
Para cada valor de β , calcularemos las aproximaciones de los exponentes de Lyapunov, lo que nos permitirá observar la transición del sistema de un régimen caótico a uno no caótico. Para ello, emplearemos el método QR de paso variable con cuadratura (véase Apéndice B.2.1), puesto que en el apartado anterior obtuvimos los mejores resultados. Fijamos el tiempo final de integración en $t_f = 1000$ y la tolerancia para el error en las matrices Q en $\text{TOL} = 0.0001$. Tomamos 2000 valores de β uniformemente espaciados en el intervalo $[0.138, 0.148]$ [23] y, mediante un bucle `for`, aproximamos los exponentes para cada uno de ellos. La dependencia de estas aproximaciones con el parámetro β se muestra en la Figura 4.7.



(a) Primer y segundo exponente.



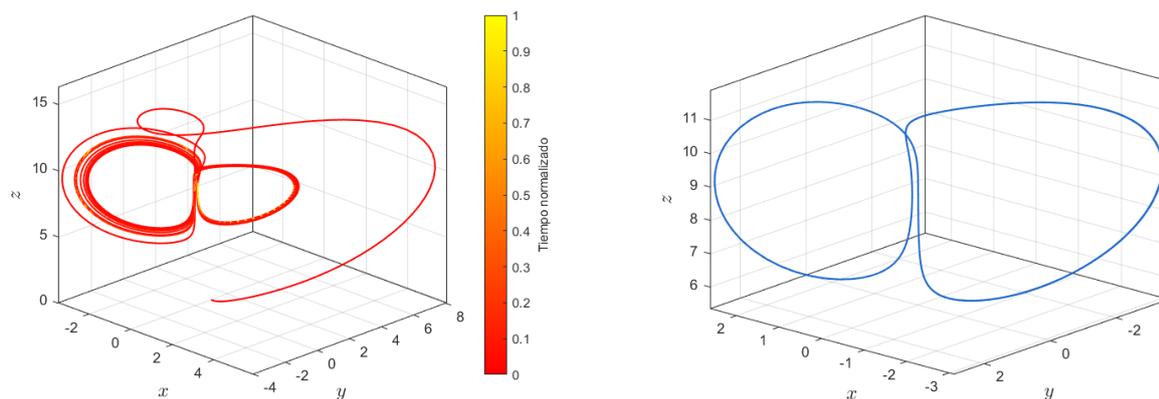
(b) Primer y segundo exponente ampliados.



(c) Los tres exponentes.

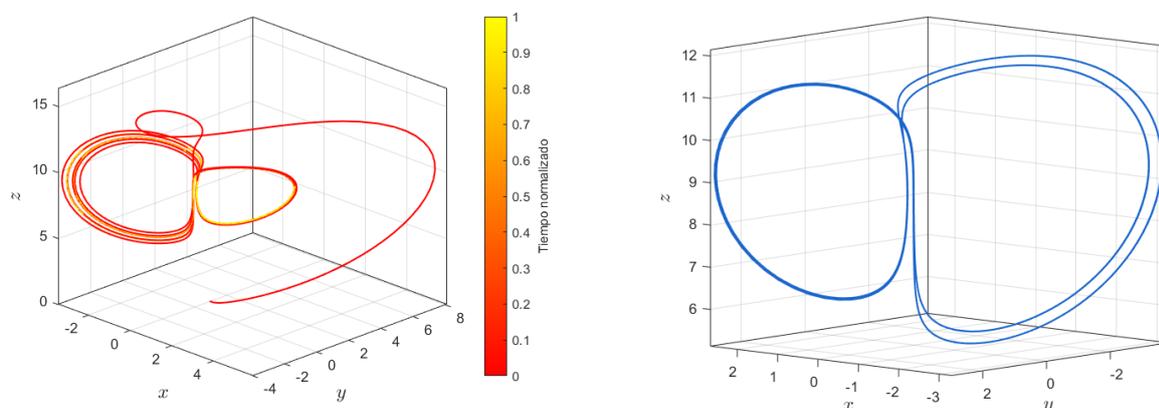
Figura 4.7: Dependencia de las aproximaciones con el parámetro β para el atractor de Lorenz.

- Para valores de β menores que, aproximadamente, 1.411, el primer exponente es aproximadamente cero, luego no deberíamos esperar tener caos ya que no hay ningún exponente positivo. En las Figuras 4.8 y 4.9 se ha representado el atractor de Lorenz para dos valores de β en los que no hay caos, uno de ellos fuera del intervalo. En ambos casos, en la figura de la izquierda podemos observar la trayectoria desde el instante inicial hasta el tiempo final t_f de integración, mientras que en la de la derecha, se ha prescindido de tiempos iniciales y únicamente se ha representado la trayectoria para tiempos largos para estudiar si existe algún tipo de convergencia. Vemos que, efectivamente, no hay caos pues la trayectoria converge a un ciclo límite.

(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

(b) Trayectoria para tiempos largos.

Figura 4.8: Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.133$: $\lambda_1 = -0.0002$, $\lambda_2 = -0.0396$, $\lambda_3 = -4.4247$.

(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

(b) Trayectoria para tiempos largos.

Figura 4.9: Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.139$: $\lambda_1 = -0.0014$, $\lambda_2 = -0.1055$, $\lambda_3 = -4.3785$.

- A partir de $\beta = 1.411$, el primer exponente se vuelve positivo, y, en la Figura 4.10, se ha representado una situación con caos. No obstante, como se puede observar en 4.7b, para $\beta \in [1.4334, 1.436]$, el primer exponente vuelve a aproximarse a cero, luego volvemos a salir del régimen caótico, como se muestra en la Figura 4.11. Aún así, aumentar ligeramente el parámetro β hace que vuelva aparecer el caos (ver Figura 4.12).
- Comprobamos además que, cuanto más grande es el primer exponente positivo (véase la Figura 4.13), más caótico es el atractor de Lorenz, y más se nota que las órbitas se juntan para tiempos largos y no hay convergencia hacia un ciclo límite. Notamos también que, en todos los casos, las órbitas están acotadas y las trayectorias no contienen un punto fijo, incluyendo el primer caso expuesto para comparar los dos métodos QR. Como consecuencia, al menos uno de los exponentes de Lyapunov es cero [24].

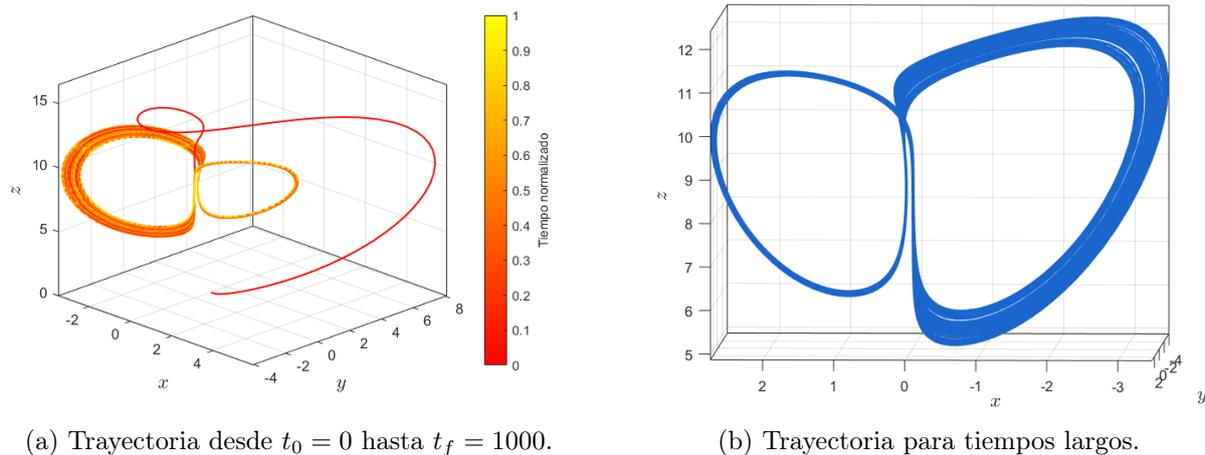


Figura 4.10: Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.143265$: $\lambda_1 = 0.0257$, $\lambda_2 = 0.0001$, $\lambda_3 = -4.5261$.

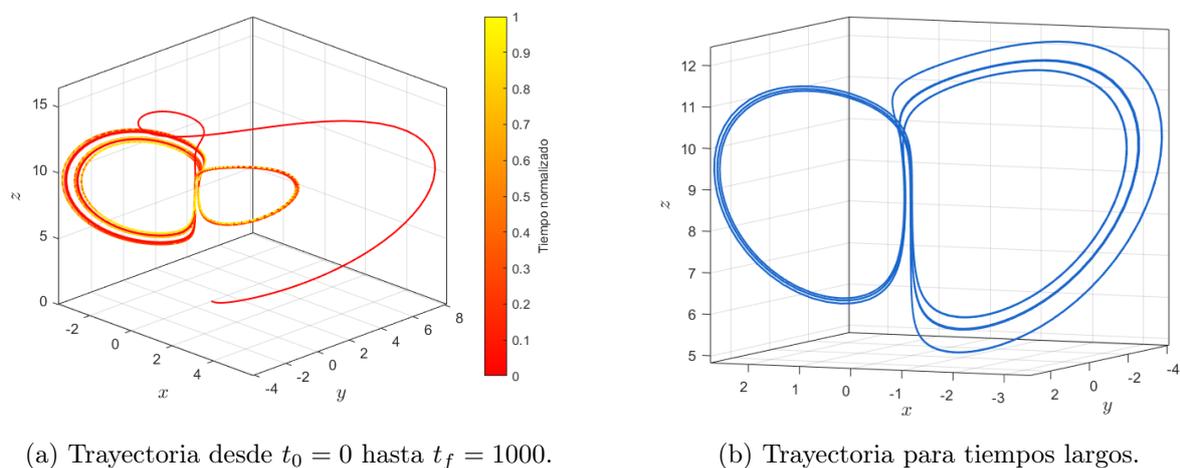
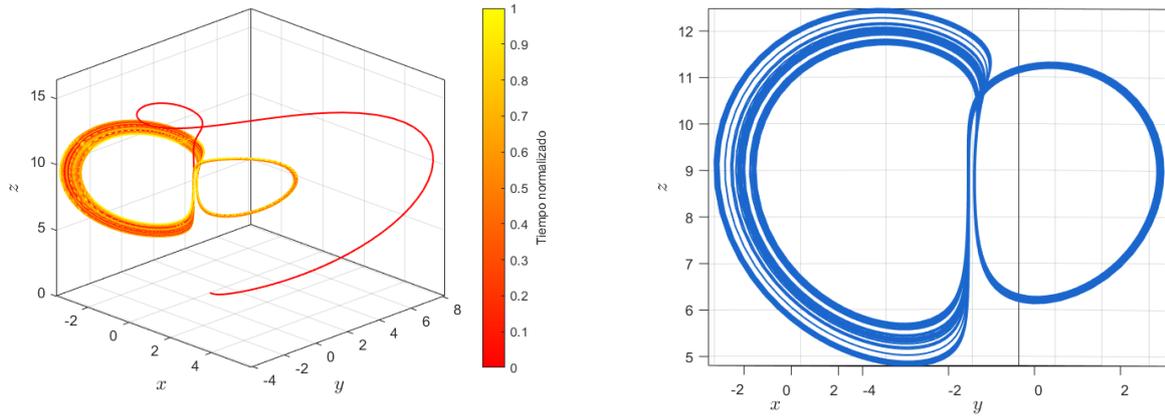


Figura 4.11: Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.143566$: $\lambda_1 = 0.0014$, $\lambda_2 = -0.0052$, $\lambda_3 = -4.4976$.

Por último, vamos a estudiar cómo se comporta la trayectoria del sistema al variar la condición inicial tanto en ausencia como en presencia de caos.

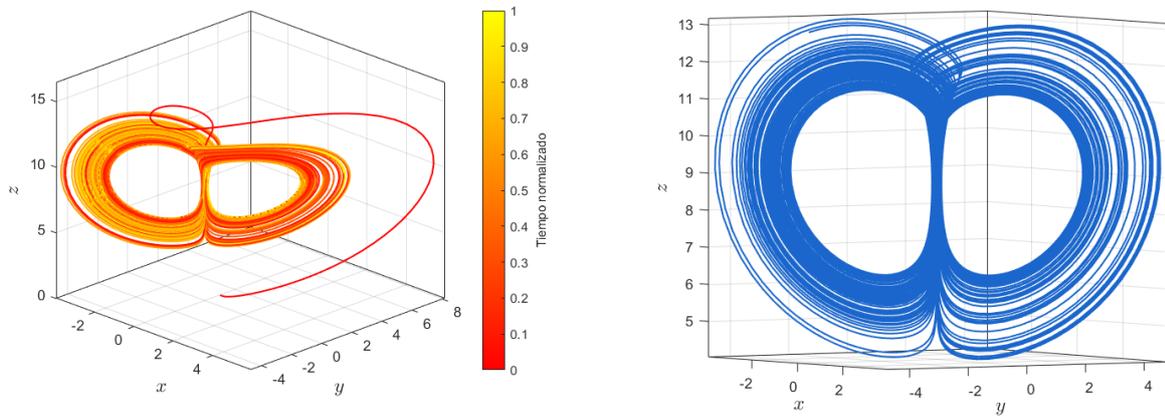
- En la Figura 4.14 hemos representado la órbita del atractor de Lorenz para tres condiciones iniciales diferentes en ausencia de caos. Vemos que, para las dos condiciones cercanas, ambas trayectorias coinciden para tiempos largos, representadas cada una por una línea discontinua marrón y otra azul. Esto era de esperar dado que no hay exponentes de Lyapunov positivos.



(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

(b) Trayectoria para tiempos largos.

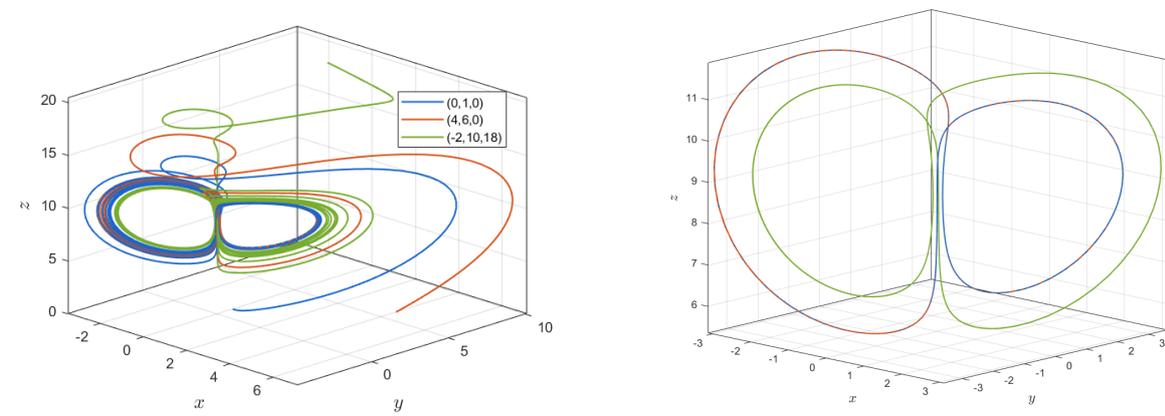
Figura 4.12: Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.143846$: $\lambda_1 = 0.0303$, $\lambda_2 = -0.0024$, $\lambda_3 = -4.5301$.



(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

(b) Trayectoria para tiempos largos.

Figura 4.13: Trayectoria para el atractor de Lorenz con $\beta = 0.148$: $\lambda_1 = 0.0662$, $\lambda_2 = -0.0046$, $\lambda_3 = -4.5784$.

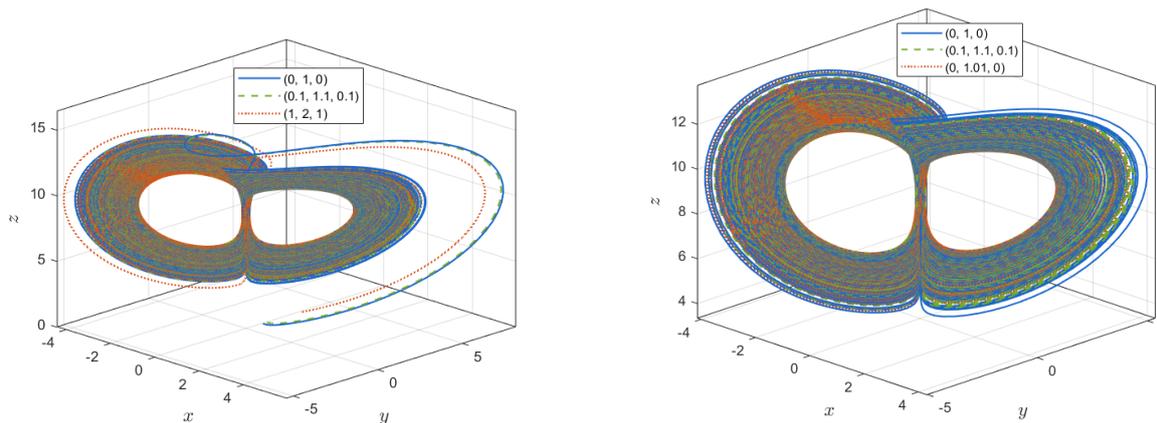


(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

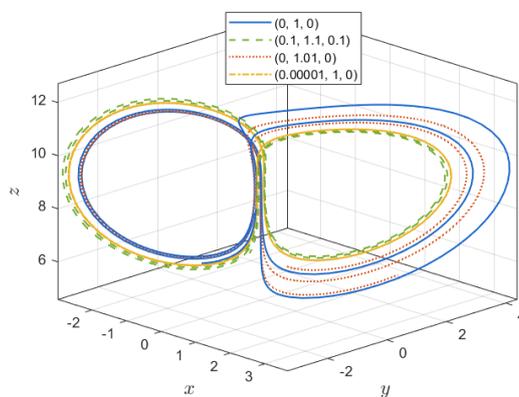
(b) Trayectoria para tiempos largos.

Figura 4.14: Trayectorias para el atractor de Lorenz con diferentes condiciones iniciales: $\beta = 0.133$.

- Por otro lado, en la Figura 4.15, se muestra la situación en la que hay caos; es decir, en la que el mayor exponente de Lyapunov es positivo. En la figura 4.15c hemos representado únicamente los últimos 500 puntos obtenidos, para tiempos del orden de 1000. Vemos que, por muy pequeña que sea la variación de la condición inicial, las órbitas para tiempos largos son completamente diferentes; es decir, el sistema es sensible a la perturbación de la condición inicial, luego es caótico.

(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

(b) Trayectoria para tiempos largos.



(c) Trayectoria para unos pocos puntos.

Figura 4.15: Trayectorias para el atractor de Lorenz con diferentes condiciones iniciales: $\beta = 0.148$.

4.3.2 La “mariposa” de Lorenz

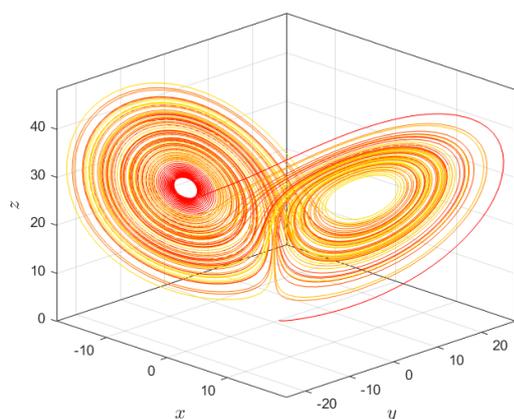
Concluimos este capítulo presentando el caso más citado en la literatura del sistema de Lorenz: el famoso ejemplo conocido como “la mariposa” [22]. Esta configuración corresponde a un régimen caótico (véase la Figura 4.16) que se obtiene al asignar al sistema los siguientes valores concretos para sus parámetros:

$$\sigma = 10, \quad \beta = 8/3 \quad \text{y} \quad \rho = 28.$$

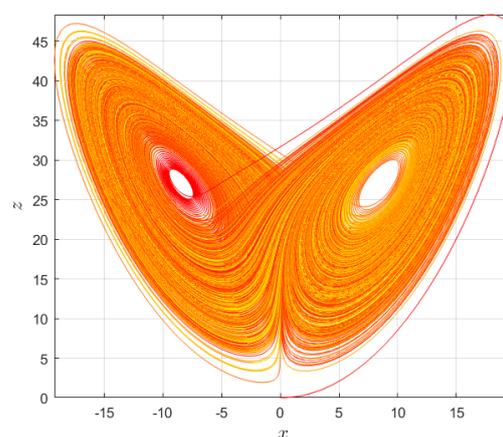
Además, las aproximaciones a los exponentes de Lyapunov son

$$\lambda_1 = 0.8965, \quad \lambda_2 = 0.0050 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -14.5681.$$

De nuevo, el mayor exponente de Lyapunov es positivo, fenómeno característico de un sistema caótico, y hay un exponente (prácticamente) nulo debido a la ausencia de un punto fijo en la trayectoria.



(a) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 100$.



(b) Trayectoria desde $t_0 = 0$ hasta $t_f = 1000$.

Figura 4.16: Trayectoria para la *mariposa* Lorenz: $\lambda_1 = 0.8779$, $\lambda_2 = -0.0067$, $\lambda_3 = -14.5047$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este capítulo final se presenta una síntesis del trabajo realizado, destacando los principales logros alcanzados, las dificultades superadas a lo largo del proceso y posibles líneas de continuación.

A lo largo de este trabajo se han estudiado los exponentes característicos de Lyapunov desde una doble perspectiva. En primer lugar, desde el punto de vista teórico, se ha presentado la definición clásica introducida por el propio Lyapunov, y posteriormente se ha formalizado el concepto siguiendo el enfoque propuesto por Barreira [2], estableciendo sus propiedades fundamentales. En particular, se han enunciado y demostrado resultados fundamentales sobre la regularidad de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en el sentido de Lyapunov. Además, se han relacionado los exponentes de Lyapunov de sistemas no lineales con los de su ecuación variacional asociada, justificando de este modo haber desarrollado la teoría en torno a los sistemas lineales.

En segundo lugar, se ha abordado el estudio desde el punto de vista computacional. Dada la dificultad del cálculo explícito de los exponentes de Lyapunov en la mayoría de los sistemas dinámicos, resulta necesario recurrir a su aproximación numérica. Con este objetivo, se han desarrollado dos métodos numéricos basados, respectivamente, en la factorización QR y en la descomposición en valores singulares de una matriz fundamental de soluciones. Ambos han sido implementados en MATLAB, y se ha comprobado su validez aplicándolos tanto a sistemas lineales como al atractor de Lorenz.

Todos los códigos correspondientes a ambos métodos numéricos han sido programados desde cero, siguiendo exclusivamente las descripciones realizadas en diversos artículos publicados por Dieci y sus colaboradores, los cuales se encuentran a la orden del día. Durante el desarrollo e implementación de estos métodos se han encontrado diversas dificultades técnicas que han requerido soluciones específicas.

- En primer lugar, se trató de integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales con la función `ode45` de MATLAB. No obstante, esto no fue posible dado que, para ambos métodos, era necesario integrar simultáneamente diferentes ecuaciones junto con la actualización continua de las aproximaciones a los exponentes. Esto motivó la implementación directa de distintos esquemas Runge-Kutta, seleccionando en cada caso aquel que ofrecía mejores resultados en términos de estabilidad y precisión.

- En segundo lugar, una vez programadas las primeras versiones de ambos métodos, observamos que obteníamos los resultados esperados solamente en ejemplos muy particulares. Para extender su aplicabilidad, fue necesario incorporar control de paso variable, lo que mejoró significativamente la precisión de los códigos, aunque incrementando, en ocasiones, el tiempo de ejecución, y permitió adaptarlos a una mayor variedad de sistemas.
- Por último, la implementación del método basado en la SVD presentó mayores complicaciones. El rápido crecimiento de los valores singulares provocaba desbordamientos numéricos durante la integración y una alta sensibilidad al tamaño del paso, lo que obligó a reformular ciertas variables y a buscar una estrategia óptima de control del error. Además, este método requería una atención especial a múltiples detalles técnicos, como hemos comentado en la Subsección 3.2, y ha resultado más limitado en cuanto al tipo de sistemas a los que puede aplicarse con éxito, en comparación con el método QR.

A pesar de estas dificultades, hemos sido capaces de programar diversos códigos en MATLAB para dos métodos distintos, que funcionan y que permiten aproximar con notable precisión los exponentes de Lyapunov en distintos sistemas lineales. Más allá de estos casos, hemos sido capaces de extender la aplicabilidad a sistemas no lineales, como el atractor de Lorenz. Para ello fue necesario integrar simultáneamente la trayectoria del sistema, proceso altamente sensible a errores numéricos, junto con la ecuación variacional. El uso de un paso variable ha sido clave para mantener la estabilidad numérica en este contexto. Este mismo enfoque ha sido probado en otros sistemas no lineales, como el atractor de Rössler, obteniendo buenos resultados, si bien se ha optado por centrar la presentación en el caso de Lorenz por su representatividad y complejidad.

En definitiva, los exponentes de Lyapunov constituyen una herramienta de gran utilidad para el estudio de sistemas dinámicos, al permitir caracterizar fenómenos tan relevantes como la estabilidad de trayectorias o la presencia de comportamiento caótico, y su cálculo numérico es indispensable en la práctica, dada la complejidad de obtener expresiones analíticas. Con este trabajo hemos logrado realizar tanto una revisión teórica como una implementación práctica efectiva, ofreciendo una base que permite comprender la naturaleza de los exponentes de Lyapunov y aplicar métodos fiables para su cálculo.

Como posibles líneas de continuación, cabe destacar que, tal y como comentan Dieci y Vleck en [9], tanto la teoría como los métodos computacionales pueden extenderse a otros sistemas, como series temporales, o sistemas dinámicos discretos. Además, los exponentes de Lyapunov han demostrado ser útiles en una amplia variedad de aplicaciones más allá del análisis de estabilidad de soluciones, como en la estimación de la dimensión de atractores, el cálculo de la entropía de sistemas dinámicos o la caracterización de variedades invariantes. Estos ámbitos abren la puerta a futuros trabajos que amplíen y profundicen las ideas desarrolladas en esta memoria.

APÉNDICE A

TABLEROS DE BUTCHER

En este Apéndice se encuentran los tableros de Butcher de los esquemas Runge-Kutta DP5 y RK38, usados, respectivamente, para programar los métodos QR y SVD. En ambos tableros, las últimas dos filas son el paso adicional y los pesos necesarios para el esquema de orden inferior usado para el control del error.

A.1 Pareja 5-4 Dormand-Prince: DP5

0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0	0	0	0	0
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$	0	0	0	0
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$	0	0	0
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$	0	0
b	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
\hat{b}	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

A.2 Esquema Runge-Kutta de orden 4: la regla 3/8 RK38

0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	0
1	1	-1	1	0	0
b	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
\hat{b}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{6}$

APÉNDICE B

PROGRAMAS DEL MÉTODO QR

B.1 Método de paso fijo

Código B.1: Función para el esquema de Runge-Kutta del método QR de paso fijo.

```
1 function [QQ, w] = fun_QR(t, AA, Q)
2
3     A_Q = AA(t);
4     n = size(A_Q,1);
5     QQ = zeros(n);
6     S = QQ; % La diagonal de la matriz antisimétrica S ya es 0
7     QAQ_Q = Q'*(A_Q)*Q;
8
9     % Construimos S
10    for i = 2:n
11        for j = 1:i-1
12            S(i,j) = QAQ_Q(i,j);
13            S(j,i) = -S(i,j); % Antisimetría
14        end
15    end
16
17    % dQ/dt = X
18    QQ = Q*S;
19
20    % d w / dt = b_i i
21    w = diag(QAQ_Q);
22
23 end
```

Código B.2: Método QR de paso fijo.

```
1 % Factorizacion QR continua: Paso fijo
2
3 tic % Inicializamos contador de tiempo
4
5 % Definimos la matriz de coeficientes A(t)
6 A = @(t) ...
7
8 %% ----- Algoritmo
9 -----
```

```

9
10 h = 0.1; % Paso fijo de integración
11 t = 0; % Tiempo inicial
12 tf = 1E3; % Tiempo final de integración
13 j = 1; % Número de pasos
14
15 % Valores
16 n = size(A(0),1); % Tamaño de la matriz
17 I = eye(n); % Condición inicial para la integración
18
19 % Condiciones iniciales para el algoritmo
20 X_0 = I; % o X_0 = rand(n);
21 [Q_0, R_0] = qr(X_0);
22
23 % Inicializamos variables
24 w = zeros(n,1);
25 lambda(1,:) = zeros(n,1);
26
27 % Bucle de integración mediante esquema Runge-Kutta
28 while t < tf
29
30     % Dormand Prince
31     U1 = Q_0;
32     [ k1_Q, k1_w] = fun_QR(t,          A,  U1  );
33
34     U2 = Q_0 + h/5 * k1_Q;
35     [ k2_Q, k2_w] = fun_QR(t + h/5,    A,  U2  );
36
37     U3 = Q_0 + h * (3/40 * k1_Q + 9/40 * k2_Q);
38     [ k3_Q, k3_w] = fun_QR(t + 3*h/10, A,  U3  );
39
40     U4 = Q_0 + h * (44/45 * k1_Q - 56/15 * k2_Q + 32/9 * k3_Q);
41     [ k4_Q, k4_w] = fun_QR(t + 4*h/5,  A,  U4  );
42
43     U5 = Q_0 + h * (19372/6561 * k1_Q - 25360/2187 * k2_Q + 64448/6561 *
44         k3_Q - 212/729 * k4_Q);
45     [ k5_Q, k5_w] = fun_QR(t + 8*h/9,  A,  U5  );
46
47     U6 = Q_0 + h * (9017/3168 * k1_Q - 355/33 * k2_Q + 46732/5247 * k3_Q
48         + 49/176 * k4_Q - 4103/18656 * k5_Q);
49     [ k6_Q, k6_w] = fun_QR(t + h,      A,  U6  );
50
51     % Cálculo de las matrices Q
52     Q = Q_0 + h*(35/384 * k1_Q + 500/1113 * k3_Q + 125/192 * k4_Q -
53         2187/6784 * k5_Q + 11/84 * k6_Q);
54
55     % Cálculo de las variables w_i
56     w = w + h*(35/384 * k1_w + 500/1113 * k3_w + 125/192 * k4_w -
57         2187/6784 * k5_w + 11/84 * k6_w);
58
59     % Q es ortogonal, luego nos quedamos con su "parte ortogonal"
60     [Q,~] = qr(Q);
61
62     % Preparamos Q_0 de cond. inicial para el siguiente paso
63     Q_0 = Q;
64
65     % Aproximación de los exponentes a tiempo t_{j+1}

```

```

62     t_QR(j+1) = t + h;
63     lambda(j+1,:) = w' / t_QR(j+1);
64
65     t = t + h;
66     j = j + 1;
67
68 end
69
70 tiempo = toc;
71 disp('Exponentes de Lyapunov calculados: ')
72 disp(lambda(end,:))
73 disp(['Tiempo de ejecución: ', num2str(tiempo), ' segundos']);
74
75 % Evolución temporal de las aproximaciones
76 figure;
77 for i = 1:n
78     semilogx(t_QR(2:end), lambda(2:end,i))
79     hold on
80 end

```

B.2 Métodos de paso variable

Código B.3: Función para el sistema de Lorenz.

```

1  % Parámetros
2  sigma = 16; beta = 4.0; rho = 45.92;
3
4  % Función del sistema no lineal de Lorenz
5  f = @(t, x) [sigma*(x(2) - x(1));
6              rho*x(1) - x(1)*x(3) - x(2);
7              x(1)*x(2) - beta*x(3)];
8
9  % Matriz jacobiana
10 A = @(t, x) [-sigma, sigma, 0;
11             rho - x(3), -1, -x(1);
12             x(2), x(1), -beta];
13
14 % Condición inicial
15 x_0 = [0;1;0];

```

B.2.1 Cuadratura de μ_i

Código B.4: Función para el esquema de Runge-Kutta del método QR de paso variable con cuadratura.

```

1 function [QQ, xx] = fun_RK_1(t, f, AA, x_0, Q)
2
3     % Integramos dx/dt = f(x)
4     xx = f(t, x_0);
5
6     % Matriz de coeficientes
7     A_Q = AA(t, x_0);
8     n = size(A_Q,1);
9     QQ = zeros(n); % Inicializamos Q

```

```

10 S = QQ; % La diagonal de la matriz antisimétrica S ya es 0
11 QAQ_Q = Q'*(A-Q)*Q;
12
13 % Construimos S
14 for i = 2:n
15     for j = 1:i-1
16         S(i,j) = QAQ_Q(i,j);
17         S(j,i) = -S(i,j); % Antisimetría
18     end
19 end
20
21 % dQ/dt = QS
22 QQ = Q*S;
23
24 end

```

Código B.5: Método QR de paso variable con cuadratura numérica de μ_i .

```

1 %% Factorización QR continua: Cuadratura numérica de  $\mu_i$ 
2
3 %% ----- Algoritmo -----
4
5 tic % Inicializamos el contador de tiempo
6 TOL = 1E-4; % Tolerancia para el error
7 tf = 1E2; % Tiempo final de integración
8 h = 0.01; % Paso inicial
9 safe = 0.8; % Factor de seguridad para el nuevo paso
10 l = 1/5; % Termino para DP5 que aparece en paso nuevo
11 n_rej = 0; % Número de rechazos
12
13 t = 0; % Tiempo inicial
14 j = 1; % Número de pasos
15
16 n = size(x_0, 1); % Tamaño de la matriz
17 I = eye(n); % Condicion inicial para la integracion
18
19 % Condiciones iniciales para el algoritmo
20 X_0 = I;
21 [Q_0, R_0] = qr(X_0);
22 x(1,1:n) = x_0'; % Aquí almacenamos los valores de la funcion integrada
23
24 w = zeros(n,1);
25 lambda(1,:) = zeros(n,1); % Aquí almacenamos las aproximaciones
26
27 % Inicio del bucle de integración
28 while t < tf
29
30     step = 0;
31     % Bucle de control del error
32     while step == 0
33
34         % Pareja Dormand-Prince 5-4
35         U1 = Q_0;
36         [ k1_Q, k1_x ] = fun_RK_1(t, f, A, x_0, U1 );
37
38         U2 = Q_0 + h/5 * k1_Q;
39         [ k2_Q, k2_x ] = fun_RK_1(t + h/5, f, A, x_0 + h/5 * k1_x,
40             U2 );

```

```

40
41     U3 = Q_0 + h * (3/40 * k1_Q + 9/40 * k2_Q);
42     [ k3_Q, k3_x ] = fun_RK_1(t + 3*h/10, f, A, x_0 + h * (3/40 *
      k1_x + 9/40 * k2_x), U3 );
43
44     U4 = Q_0 + h * (44/45 * k1_Q - 56/15 * k2_Q + 32/9 * k3_Q);
45     [ k4_Q, k4_x ] = fun_RK_1(t + 4*h/5, f, A, x_0 + h * (44/45 *
      k1_x - 56/15 * k2_x + 32/9 * k3_x) , U4 );
46
47     U5 = Q_0 + h * (19372/6561 * k1_Q - 25360/2187 * k2_Q +
      64448/6561 * k3_Q - 212/729 * k4_Q);
48     [ k5_Q, k5_x ] = fun_RK_1(t + 8*h/9, f, A, x_0 + h *
      (19372/6561 * k1_x - 25360/2187 * k2_x + 64448/6561 * k3_x -
      212/729 * k4_x), U5 );
49
50     U6 = Q_0 + h * (9017/3168 * k1_Q - 355/33 * k2_Q + 46732/5247 *
      k3_Q + 49/176 * k4_Q - 4103/18656 * k5_Q);
51     [ k6_Q, k6_x ] = fun_RK_1(t + h, f, A, x_0 + h *
      (9017/3168 * k1_x - 355/33 * k2_x + 46732/5247 * k3_x + 49/176
      * k4_x - 4103/18656 * k5_x), U6 );
52
53     % Paso "extra" para el control del error
54     U7 = Q_0 + h*(35/384 * k1_Q + 500/1113 * k3_Q + 125/192 * k4_Q -
      2187/6784 * k5_Q + 11/84 * k6_Q);
55     [ k7_Q, k7_x ] = fun_RK_1(t + h, f, A, x_0 + h*(35/384 * k1_x +
      500/1113 * k3_x + 125/192 * k4_x - 2187/6784 * k5_x + 11/84 *
      k6_x), U7 );
56
57     % Matriz Q para el siguiente paso
58     U = Q_0 + h*(35/384 * k1_Q + 500/1113 * k3_Q + 125/192 * k4_Q -
      2187/6784 * k5_Q + 11/84 * k6_Q);
59     [Q, ~] = qr(U);
60     U_1 = Q_0 + h*(5179/57600 * k1_Q + 7571/16695 * k3_Q + 393/640 *
      k4_Q - 92097/339200 * k5_Q + 187/2100 * k6_Q + 1/40 * k7_Q);
61     [Q_1, ~] = qr(U_1);
62
63     % Calculo de la trayectoria
64     x(j+1,:) = ( x_0 + h*(35/384 * k1_x + 500/1113 * k3_x + 125/192 *
      k4_x - 2187/6784 * k5_x + 11/84 * k6_x) )';
65
66
67     % Paso adaptativo
68
69     % Error de Q
70     err_Q = zeros(n,1);
71     for i = 1:n
72         err_Q(i) = norm( (Q(:,i) - Q_1(:,i)) ./ ((1 + Q(:,i)) * TOL)
      , Inf );
73     end
74     err = norm( err_Q , Inf );
75
76     % Nuevo paso
77     h_new = safe * abs(h*(1/err)^1);
78
79     % Aceptación / rechazo de paso
80     if err <= 1
81         step = 1; % Paso exitoso

```

```

82
83     elseif h_new < h / 5 || h_new > 5*h
84         % Paso rechazado, pero no permitimos que h_new sea menor que
85         % h/5 o mayor que 5h
86         h_new = h;
87         break
88     else
89         % Si no interrumpimos el bucle, repetimos con el nuevo paso
90         h = h_new;
91         n_rej = n_rej + 1; % Actualizamos número de pasos rechazados
92     end
93
94 end
95
96 % Aproximacion de mu_i mediante regla del trapecio
97 t_QR(j+1) = t + h; % h es el paso que acabamos de dar
98 mu = h/2 * diag( Q_0' * A(t, x_0) * Q_0 + Q' * A(t+h, x(j+1,:)) * Q
99     );
100 w = w + mu; % Actualizamos variables w
101
102 % Actualizamos aproximaciones
103 lambda(j+1, :) = w' / t_QR(j+1);
104
105 % Preparamos Q_0 y x_0 de cond. inicial para el siguiente paso
106 Q_0 = Q;
107 x_0 = x(j+1,:);
108 t = t + h; % Actualizamos el tiempo con el paso que acabamos de dar
109 h = h_new; % Nuevo paso para la siguiente iteración
110 j = j+1;
111 end
112
113 % Aproximaciones a los exponentes de Lyapunov por pantalla
114 fprintf('Los exponentes de Lyapunov obtenidos mediante cuadratura son: \n
115 ');
116 fprintf('%.4f, \n', lambda(end,1:n));
117 fprintf('Tiempo de ejecución: %.4f, \n Número de pasos: %.4f, \n Número
118     de pasos rechazados: %.4f, \n', tiempo, j, n_rej);

```

B.2.2 Integración numérica de μ_i

Código B.6: Función para el esquema de Runge-Kutta del método QR de paso variable con integración numérica de μ_i .

```

1 function [QQ, mu, xx] = fun_RK_2(t, f, AA, x_0, Q)
2
3 % Integramos simultáneamente Q, mu_i y la trayectoria x
4
5     % Integramos dx/dt = f(x)
6     xx = f(t, x_0);
7
8     % Matriz de coeficientes
9     A_Q = AA(t, x_0);
10    n = size(A_Q,1);
11    QQ = zeros(n);
12    S = QQ; % La diagonal de la matriz antisimétrica S ya es 0
13    QAQ_Q = Q'*(A_Q)*Q;

```

```

14
15     % Construimos S
16     for i = 2:n
17         for j = 1:i-1
18             S(i,j) = QAQ_Q(i,j);
19             S(j,i) = -S(i,j); % Antisimetría
20         end
21     end
22
23     % dQ/dt = QS
24     QQ = Q*S;
25
26     % d mu_i / dt = b_{ii}
27     mu = diag(QAQ_Q);
28
29 end

```

Código B.7: Método QR de paso variable con integración numérica mediante esquema de Runge-Kutta de μ_i .

```

1 %% ----- Algoritmo
2
3 TOL = 1E-5; % Tolerancia para el error
4 tf = 1E2; % Tiempo final del algoritmo
5 h = 0.01; % Paso inicial
6 safe = 0.8; % Factor de seguridad para el nuevo paso
7 l = 1/5; % Termino para DP5 que aparece en paso nuevo
8 n_rej = 0;
9
10 t = 0; % Tiempo inicial
11 j = 1;
12
13 % Valores iniciales
14 x_0 = [0; 1; 0];
15 n = size(x_0, 1); % Tamaño de la matriz
16 I = eye(n); % Condicion inicial para la integracion
17
18 % Condiciones iniciales para el algoritmo
19 X_0 = I;
20 [Q_0, R_0] = qr(X_0);
21 x(1,1:n) = x_0'; % Aqui almacenamos los valores de la funcion integrada
22
23 v = zeros(n,1);
24 lambda(1,:) = zeros(1,n);
25 t_QR(1) = 0;
26
27 % Inicio del bucle
28 while t < tf
29
30     step = 0;
31     while step == 0
32
33         % Pareja Dormand-Prince 5-4
34         U1 = Q_0;
35         [Q1, ~] = qr(U1);
36         [ k1_Q, k1_mu, k1_x ] = fun_RK_2(t, f, A, x_0, Q1 );
37

```

```

38 U2 = Q_0 + h/5 * k1_Q;
39 [Q2, ~] = qr(U2);
40 [ k2_Q, k2_mu, k2_x ] = fun_RK_2(t + h/5,      f, A, x_0 + h/5 *
      k1_x,      Q2 );
41
42 U3 = Q_0 + h * (3/40 * k1_Q + 9/40 * k2_Q);
43 [Q3, ~] = qr(U3);
44 [ k3_Q, k3_mu, k3_x ] = fun_RK_2(t + 3*h/10,    f, A, x_0 + h *
      (3/40 * k1_x + 9/40 * k2_x), Q3 );
45
46 U4 = Q_0 + h * (44/45 * k1_Q - 56/15 * k2_Q + 32/9 * k3_Q);
47 [Q4, ~] = qr(U4);
48 [ k4_Q, k4_mu, k4_x ] = fun_RK_2(t + 4*h/5,    f, A, x_0 + h *
      (44/45 * k1_x - 56/15 * k2_x + 32/9 * k3_x) ,    Q4 );
49
50 U5 = Q_0 + h * (19372/6561 * k1_Q - 25360/2187 * k2_Q +
      64448/6561 * k3_Q - 212/729 * k4_Q);
51 [Q5, ~] = qr(U5);
52 [ k5_Q, k5_mu, k5_x ] = fun_RK_2(t + 8*h/9,    f, A, x_0 + h *
      (19372/6561 * k1_x - 25360/2187 * k2_x + 64448/6561 * k3_x -
      212/729 * k4_x),    Q5 );
53
54 U6 = Q_0 + h * (9017/3168 * k1_Q - 355/33 * k2_Q + 46732/5247 *
      k3_Q + 49/176 * k4_Q - 4103/18656 * k5_Q);
55 [Q6, ~] = qr(U6);
56 [ k6_Q, k6_mu, k6_x ] = fun_RK_2(t + h,        f, A, x_0 + h *
      (9017/3168 * k1_x - 355/33 * k2_x + 46732/5247 * k3_x + 49/176
      * k4_x - 4103/18656 * k5_x), Q6 );
57
58
59 % Paso "extra" para el control del error
60 U7 = Q_0 + h*(35/384 * k1_Q + 500/1113 * k3_Q + 125/192 * k4_Q -
      2187/6784 * k5_Q + 11/84 * k6_Q);
61 [Q7, ~] = qr(U7);
62 [ k7_Q, k7_mu, k7_x ] = fun_RK_2(t + h,    f, A, x_0 + h*(35/384 *
      k1_x + 500/1113 * k3_x + 125/192 * k4_x - 2187/6784 * k5_x +
      11/84 * k6_x), Q7 );
63
64 % Calculo de las variables mu_i
65 mu = 0 + h*(35/384 * k1_mu + 500/1113 * k3_mu + 125/192 * k4_mu -
      2187/6784 * k5_mu + 11/84 * k6_mu);
66 mu_1 = 0 + h*(5179/57600 * k1_mu + 7571/16695 * k3_mu + 393/640 *
      k4_mu - 92097/339200 * k5_mu + 187/2100 * k6_mu + 1/40 *
      k7_mu);
67
68 % Calculo de las matrices Q
69 U = Q_0 + h*(35/384 * k1_Q + 500/1113 * k3_Q + 125/192 * k4_Q -
      2187/6784 * k5_Q + 11/84 * k6_Q);
70 [Q, ~] = qr(U);
71 U_1 = Q_0 + h*(5179/57600 * k1_Q + 7571/16695 * k3_Q + 393/640 *
      k4_Q - 92097/339200 * k5_Q + 187/2100 * k6_Q + 1/40 * k7_Q);
72 [Q_1, ~] = qr(U_1);
73
74 % Calculo de la trayectoria
75 xx = x_0 + h*(35/384 * k1_x + 500/1113 * k3_x + 125/192 * k4_x -
      2187/6784 * k5_x + 11/84 * k6_x) ;
76 x_1 = x_0 + h*(5179/57600 * k1_x + 7571/16695 * k3_x + 393/640 *

```

```

        k4_x - 92097/339200 * k5_x + 187/2100 * k6_x + 1/40 * k7_x) ;
77
78     % Paso adaptativo
79     % Error de mu
80     err_mu = norm( (mu - mu_1) ./ ((1 + mu) * TOL) , Inf );
81
82     % Error de Q
83     error_Q = zeros(n,1);
84     for i = 1:n
85         error_Q(i) = norm( (Q(:,i) - Q_1(:,i)) ./ ((1 + Q(:,i)) * TOL
86             ) , Inf );
87     end
88     err_Q = norm( error_Q , Inf );
89
90     % Error de la trayectoria
91     err_x = norm( (xx - x_1) ./ ((1 + xx) * TOL) , Inf );
92
93     % Maximo del error
94     err = max([err_Q, err_mu, err_x]);
95     % Nuevo paso
96     h_new = safe * abs(h*(1/err)^1);
97
98     % Aceptación / rechazo de paso
99     if err <= 1
100         step = 1; % Paso exitoso
101
102     elseif h_new < h / 5 || h_new > 5*h
103         % Paso rechazado, pero no permitimos que h_new sea menor que
104         % h/5 o mayor que 5h
105         h_new = h;
106         break
107     else
108         % Si no interrumpimos el bucle, repetimos con el nuevo paso
109         h = h_new;
110         n_rej = n_rej + 1; % Actualizamos número de pasos rechazados
111     end
112 end
113
114 % Aproximacion de los exponentes a tiempo t_{j+1}
115 v = v + mu;
116 t_QR(j+1) = t + h;
117 lambda(j+1, :) = v' / t_QR(j+1);
118
119 % Preparamos para el siguiente paso
120 Q_0 = Q_1;
121 x_0 = xx;
122 t = t + h;
123 h = h_new;
124 j = j+1;
125
126 end
127
128 % Aproximaciones a los exponentes de Lyapunov por pantalla
129 fprintf('Los exponentes de Lyapunov obtenidos mediante cuadratura son: \n
130 ');
131 fprintf('%.4f, \n', lambda(end,1:n));

```

```

131 fprintf('Tiempo de ejecución: %.4f, \n Número de pasos: %.4f, \n Número
      de pasos rechazados: %.4f, \n', tiempo, j, n_rej);

```

B.2.3 Códigos para las gráficas del atractor de Lorenz

Código B.8: Gráfica 3D.

```

1 % Crear la figura
2 figure('Color','w');
3
4 % Dibujar la línea 3D fina y estética
5 plot3(x1, x2, x3, '-', ...
6       'LineWidth', 0.1, ...
7       'Color', [0.1 0.4 0.8]); % Color azul elegante
8
9 % Mejoras visuales
10 xlabel('$x$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 14);
11 ylabel('$y$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 14);
12 zlabel('$z$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 14);
13 grid on;
14 axis tight;
15 view(135, 30); % Vista para el atractor de Lorenz
16 box on;

```

Código B.9: Gráfica 3D con evolución temporal.

```

1 x1 = x(:,1); x2 = x(:,2); x3 = x(:,3);
2
3 % Creamos un vector de tiempos t de la misma longitud que x1, x2, x3
4 t = linspace(0, 1, length(x1))';
5
6 % Normalizamos el tiempo para poder asignarle un gradiente de colores
   entre 0 y 1
7 t_norm = (t - min(t)) / (max(t) - min(t));
8
9 % Creamos segmentos entre pares consecutivos
10 X = [x1(1:end-1), x1(2:end)];
11 Y = [x2(1:end-1), x2(2:end)];
12 Z = [x3(1:end-1), x3(2:end)];
13 C = t_norm(1:end-1); % Color para cada segmento de línea
14
15 % Crear figura
16 figure('Color','w');
17 hold on;
18
19 % Dibujamos cada segmento con un color interpolado
20 colormap('autumn')
21 for i = 1:length(C)
22     color = interp1(linspace(0,1,size(colormap,1)), colormap, C(i));
23     line(X(i,:), Y(i,:), Z(i,:), 'Color', color, 'LineWidth', 0.1, '
      LineStyle', '-')
24 end
25
26 % Añadimos una barra de colores
27 colormap("autumn")
28 cb = colorbar;

```

```
29 cb.Label.String = 'Tiempo normalizado';
30
31 % Mejoras visuales
32 xlabel('$x$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 14);
33 ylabel('$y$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 14);
34 zlabel('$z$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 14);
35 grid on;
36 axis tight;
37 %view(0, 0);
38 view(45, 25);
39 box on;
```

APÉNDICE C

PROGRAMAS DEL MÉTODO SVD

C.1 Método con paso fijo

Código C.1: Método SVD de paso fijo.

```
1      %% Metodo SVD continuo con paso variable
2
3      % Iniciamos contador de tiempo
4      tic
5
6      % Definimos la matriz de coeficientes
7      A = @(t) ... ;
8
9      % Valores
10     n = size(A(0),1); % Tamaño de la matriz
11     I = eye(n); % Condicion inicial para la integracion
12
13
14     %% Runge-Kutta para integrar hasta tiempo t_eps
15
16     t_eps = 0.1;
17     X_0 = I;
18
19     % Integramos hasta tiempo t_eps con ode45
20     for k = 1:n
21         [T,B]= ode45(@(t,x) A(t)*x, [0 t_eps], I(:,k)); % Resolvemos la
                ecuacion diferencial para X
22         X_0(:,k)=B(end,:)'; % La ultima fila de B tiene la columna k-esima de
                X a tiempo t_eps
23     end
24
25     % Factorizacion SVD de X_0
26     [U_0,S_0,V_0] = svd(X_0);
27
28     % Valores singulares
29     s = diag(S_0);
30
31     % Nos aseguramos de que son diferentes todos los valores singulares
32     s_unico = unique(s);
33     if length(s_unico) < length(s)
```

```

34     error('Los valores singulares no son todos diferentes.');
```

```

35 else
36     disp('Los valores singulares son diferentes');
```

```

37 end
38
39
40 % Calculo de los v inicial. Los definimos segun ec. (20)
41 v = zeros(n,1); % Vector columna
42 v(n) = log(s(n));
43 for j = 1:n-1
44     v(j) = s(j+1) / s(j);
45 end
46
47 % Inicializamos variables para mayor eficiencia computacional
48 U = zeros(n);
49 H = zeros(n);
50 k1_v = zeros(n,1);
51 k2_v = k1_v; k3_v = k1_v; k4_v = k1_v;
52 k1_U = zeros(n);
53 k2_U = k1_U; k3_U = k1_U; k4_U = k1_U;
54
55 % Condiciones iniciales
56 v_0 = [log(v(1:n-1)); v(n)];
57 v_1 = v_0;
58
59 % Calculamos la primera fila de b, los bj(t_1 = t_eps)
60
61 b = [log(v(1:n-1))', v(n)] / t_eps; % Recordamos que t(1) es t_eps
62
63 % Calculamos la primera fila de lambda, la aprox. de los exponentes a
64 % tiempo t_eps
65     lambda(1,n) = b(1,n);
66     for j = n-1:-1:1
67         lambda(1,j) = lambda(1,j+1) - b(1,j);
68     end
69
70
71 %% ----- Función para el esquema Runge-Kutta
72 -----
73 function [ v, U ] = fun_SVD(t,UU,AA,vv)
74
75     C = UU'*AA(t)*UU; % Matriz C
76     n = size(C,1);
77     v = zeros(n,1);
78     c = diag(C); % Diagonal de C
79
80     % Integramos las variables v_i
81     v(1:n-1) = c(2:n) - c(1:n-1);
82     v(n) = c(n);
83
84     % Calculamos los h_ij
85     H = zeros(n);
86     for i = 1:n-1
87         for l=i+1:n
88             H(i,l) = (C(i,l)*vv(i,l)*vv(i,l) + C(l,i)) / (vv(i,l)*vv(i,l) -
1);

```

```

89         H(l,i) = -H(i,l);
90         %K(i,l) = (C(i,l) + C(l,i)) * vv(i,l) / (vv(i,l)^2 - 1);
91         %K(l,i) = -K(i,l);
92     end
93 end
94
95     % Actualizamos la matriz U
96     U = UU*H;
97
98 end
99 %%
-----
100
101 %% ----- Algoritmo
-----
102
103 j = 1; % Número de paso
104 t = t_eps; % Tiempo inicial del algoritmo
105 tf = 1E4; % Tiempo final de integración
106 h = 0.1; % Paso inicial
107 t_SVD(1) = t; % Almacenamos los tiempos
108
109 while t < tf
110
111     % Calculamos condiciones iniciales de cada paso
112     % Calculamos v_ij.
113     vv = ones(n); % Los inicializamos a 1 ya que es un productorio
114     for i = 1:n-1
115         for l=i+1:n
116             vv(i,l) = prod(v(i:l-1));
117         end
118     end
119
120     % Integrecion de log(vj) y de vn %%%%
121
122
123     % Inicializamos la matric C, que se actualizara en cada iteracion con
124     % la nueva U
125
126     C = @(t) U_0'*A(t)*U_0;
127
128     % Runge-Kutta para los v. Integramos dU/dt = UH
129     [ k1_v, k1_U ] = fun_SVD(t, U_0,
130                               A, vv);
131     [ k2_v, k2_U ] = fun_SVD(t + h/3, U_0 + (h/3)*k1_U,
132                               A, vv);
133     [ k3_v, k3_U ] = fun_SVD(t + 2*h/3, U_0 - (h/3)*k1_U + h*k2_U,
134                               A, vv);
135     [ k4_v, k4_U ] = fun_SVD(t + h, U_0 + h*k1_U - h*k2_U + h*
136                               k3_U, A, vv);
137
138     v_0 = v_0 + (h/8)*(k1_v + 3*k2_v + 3*k3_v + k4_v);
139
140     U = U_0 + (h/8)*(k1_U + 3*k2_U + 3*k3_U + k4_U);
141
142     % Obtenemos v_0 = (log(v(j)), v(n))

```

```

139 % Obtenemos los v_j para calcular v_ij en la siguiente iteracion
140 v(n) = v_0(n);
141 v(1:n-1) = exp(v_0(1:n-1));
142
143 % Para que U permanezca ortogonal y eliminar errores de aproximacion
144 % sustituimos U por su factorizacion QR
145 [Q_U, ] = qr(U);
146
147 % Valor de U_0 para la siguiente iteracion
148 U_0 = Q_U;
149
150 t = t + h;
151 t_SVD(j+1) = t;
152
153 % Calculamos los b
154 b(1:n-1) = v_0(1:n-1) / t_SVD(j+1);
155 b(n) = v_0(n) / t_SVD(j+1);
156
157 % Aproximacion de los exponentes a tiempo t_{j+1}. n columnas (n
158 % exponentes) y len_t filas
159 lambda(j+1,n) = b(n);
160 for l = n-1:-1:1
161     lambda(j+1,l) = lambda(j+1,l+1) - b(l);
162 end
163
164 j = j + 1;
165
166 end
167 % Fin del algoritmo

```

C.2 Método de paso variable

Código C.2: Función para el esquema Runge-Kutta del método SVD de paso variable.

```

1 % Integracion simultanea de v_i y U
2 function [ v, U ] = fun_SVD(AA,t,UU,v_0)
3     C = UU'*AA(t)*UU;
4     n = size(C,1);
5     v = zeros(n,1);
6     c = diag(C);
7
8     % Integramos los v_i
9     v(1:n-1) = c(2:n) - c(1:n-1);
10    v(n) = c(n);
11
12    % Calculamos v_ij
13    v_0 = [exp(v_0(1:n-1)); v_0(n)];
14    vv = ones(n); % Los inicializamos a 1 ya que es un productorio
15    for i = 1:n-1
16        for l=i+1 : n
17            vv(i,l) = prod(v_0(i:l-1));
18            if abs(vv(i,l) - 1) < 1E-6
19                % Nos aseguramos de no dividir por 0
20                disp('Peligro: v(i,j) es aproximadamente 1');

```

```

21         end
22     end
23 end
24
25     % Calculamos los h_ij
26     H = zeros(n);
27     for i = 1:n-1
28         for l=i+1:n
29             H(i,l) = (C(i,l)*vv(i,l)*vv(i,l) + C(l,i)) / (vv(i,l)*vv(i,
30                 l) - 1);
31             H(l,i) = -H(i,l);
32             %K(i,l) = (c(i,l) + c(l,i)) * vv(i,l) / (vv(i,l)^2 - 1); %
33             %K(l,i) = -K(i,l);
34         end
35     end
36
37     % Integramos la matriz U
38     U = UU*H;
39 end

```

Código C.3: Método SVD de paso variable.

```

1
2 %% Método SVD continuo con paso variable
3
4 tic
5
6 % Definimos la matriz de coeficientes
7 A = @(t) ... ;
8 n = size(A(0),1); % Número de filas de la matriz
9 I = eye(n); % Matriz identidad de orden n
10
11 % Runge-Kutta para integrar hasta t_eps
12 t_eps = 1E1;
13 X_0 = I;
14
15 % Integramos hasta tiempo t_eps con ode45
16 for k = 1:n
17     [T,B]= ode45(@(t,x) A(t)*x, [0 t_eps], X_0(:,k)); % Resolvemos la
18         ecuacion diferencial para X
19     X_0(:,k)=B(end,:)'; % La ultima fila de B tiene la columna k-esima de
20         X a tiempo t_eps
21 end
22
23 % Factorizacion SVD de X_0
24 [U_0,S_0,V_0] = svd(X_0);
25
26 % Valores singulares
27 s = diag(S_0);
28
29 % Nos aseguramos de que son diferentes todos los valores singulares
30 s_unico = unique(s);
31 if length(s_unico) < length(s)
32     error('Los valores singulares no son todos diferentes.');
```



```

88     [ k4_v, k4_U ] = fun_SVD(A, t + h,      U_0 + h*(k1_U - k2_U +
89         k3_U), v_0 + h*(k1_v - k2_v + k3_v));
90
91     % Paso extra
92     [ k5_v, k5_U ] = fun_SVD(A, t + h,      U_0 + (h/8)*(k1_U + 3*
93         k2_U + 3*k3_U + k4_U), v_0 + (h/8)*(k1_v + 3*k2_v + 3*k3_v +
94         k4_v));
95
96     % Aproximaciones de los v_i. v_1 = (log v_j, v_n)
97     v_1 = v_0 + (h/8)*(k1_v + 3*k2_v + 3*k3_v + k4_v);
98     v_2 = v_0 + (h/2)*((1/6)*k1_v + k2_v + (1/2)*k3_v + (1/3)*k5_v);
99
100    % Aproximaciones de la U
101    Q_1 = U_0 + (h/8)*(k1_U + 3*k2_U + 3*k3_U + k4_U);
102    Q_2 = U_0 + (h/2)*((1/6)*k1_U + k2_U + (1/2)*k3_U + (1/3)*k5_U);
103
104    % Para que U permanezca ortogonal, sustituimos U por su
105    % factorizacion QR
106    [U_1,~] = qr(Q_1);
107    [U_2,~] = qr(Q_2);
108
109    % Paso adaptativo
110    % Error de v
111    sc_v = ATOL + max(abs(v_1), abs(v_2))*RTOL;
112    err_v = norm( (v_1 - v_2) ./ (sc_v) , 2 ) / sqrt(n);
113    err = err_v;
114    % Nuevo paso
115    h_new = h*min(facmax, max( facmin, safe * abs((1/err)^1)));
116
117    if err <= 1
118        step = 1; % Paso exitoso
119        facmax = 2;
120    else
121        % Si no interrumpimos el bucle, repetimos con el nuevo paso
122        facmax = 1; % Conviene poner esto tras un rechazo
123        h = h_new;
124        n_rej = n_rej+1;
125    end
126
127    end
128
129    % Fin del bucle de control del error
130
131    % Actualizamos el tiempo
132    t = t + h;
133    t_SVD(j+1) = t;
134
135    % Calculamos los b
136    b = v_1 / t_SVD(j+1);
137
138    % Aproximacion de los exponentes a tiempo t_{j+1}. n columnas (n
139    % exponentes) y len_t filas
140    lambda(j+1,n) = b(n);
141    for l = n-1:-1:1
142        lambda(j+1,l) = lambda(j+1,l+1) - b(l);
143    end
144
145    % Almacenamos v_0 = (log(v(j)), v(n)) y U_0 para la siguiente

```

```
        iteracion.
141     v_0 = v_1;
142     U_0 = U_1;
143
144     % Actualizamos
145     h = h_new;
146     j = j + 1;
147
148 end
149 % Fin del algoritmo
150
151 % Resultados
152 disp('Exponentes de Lyapunov calculados: ')
153 disp(lambda(end,:))
154 tiempo = toc;
155 disp(['Tiempo de ejecucion: ', num2str(tiempo), ' segundos']);
156 disp('Número de pasos: ')
157 disp(n_rej)
158 disp('Número de rechazos: ')
159 disp(n_rej)
160
161 % Gráficas
162 figure;
163 for i = 1:n
164     semilogx(t_SVD, lambda(:,i))
165     hold on
166 end
167 xlabel('Tiempo')
168 ylabel('Exponentes de Lyapunov')
169 title('Metodo SVD')
170 hold off
```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor & Francis, 1992.
- [2] L. Barreira, *Lyapunov Exponents*. Birkhäuser, 2017.
- [3] L. Adrianova, *Introduction to Linear Systems of Differential Equations (Trans. from the Russian by Peter Zhevandrov)*. *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 146. American Mathematical Society, Providence, 1995.
- [4] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems* (Texts in Applied Mathematics, 7), eng, Thrid edition. New York, NY: New York, 2001.
- [5] C. Fernández Pérez, *Ecuaciones diferenciales. I, Ecuaciones lineales* (Ciencia y técnica), spa. Madrid: Pirámide, 1992.
- [6] G. H. Golub y C. F. Van Loan, “Matrix Computations,” en 4th. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013. dirección: <https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/books/2013%20Matrix%20Computations%204th.pdf>.
- [7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd. New York: McGraw-Hill, 1976, págs. 55-57.
- [8] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli y J.-M. Strelcyn, “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems - A method for computing all of them. I - Theory. II - Numerical application,” *Meccanica*, vol. 15, págs. 21-30, mar. de 1980. DOI: [10.1007/BF02128236](https://doi.org/10.1007/BF02128236).
- [9] L. Dieci y E. S. V. Vleck, “Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics,” en Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, cap. Lyapunov Exponents: Computation.
- [10] L. Dieci y C. Elia, “SVD algorithms to approximate spectra of dynamical systems,” *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, n.º 4, págs. 1235-1254, 2008, 5th Vienna International Conference on Mathematical Modelling/Workshop on Scientific Computing in Electronic Engineering of the 2006 International Conference on Computational Science/Structural Dynamical Systems: Computational Aspects. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.03.005>. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037847540800133X>.

- [11] L. Dieci y E. S. V. Vleck, "Lyapunov Spectral Intervals: Theory and Computation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 40, n.º 2, págs. 516-542, 2003. dirección: <http://www.jstor.org/stable/4100967>.
- [12] M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney, "7 - Nonlinear Systems," en *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos (Third Edition)*, M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney, eds., Third Edition, Boston: Academic Press, 2013, págs. 139-157. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-382010-5.00007-5>. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123820105000075>.
- [13] L. Dieci y C. Elia, "The singular value decomposition to approximate spectra of dynamical systems. Theoretical aspects," *Journal of Differential Equations*, vol. 230, n.º 2, págs. 502-531, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.08.007>. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039606003263>.
- [14] E. Ott, "Dynamical properties of chaotic systems," en *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002, págs. 115-167.
- [15] L. Dieci y E. S. V. Vleck, "LESLIS and LESLIL: Codes for Approximating Lyapunov Exponents of Linear Systems," School of Mathematics, Georgia Institute of Technology y Department of Mathematics, University of Kansas, Atlanta, GA & Lawrence, KS, Technical Report LES_Reports, 9 de dic. de 2004. dirección: https://dieci.math.gatech.edu/preps/les_reports/techreplin.pdf.
- [16] L. Dieci, R. D. Russell y E. S. V. Vleck, "On the Computation of Lyapunov Exponents for Continuous Dynamical Systems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, n.º 1, págs. 402-423, 1997. dirección: <http://www.jstor.org/stable/2952049>.
- [17] L. Dieci, R. D. Russell y E. S. Van Vleck, "Unitary Integrators and Applications to Continuous Orthonormalization Techniques," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n.º 1, págs. 261-281, 1994. DOI: [10.1137/0731014](https://doi.org/10.1137/0731014). eprint: <https://doi.org/10.1137/0731014>. dirección: <https://doi.org/10.1137/0731014>.
- [18] L. Dieci y T. Eirola, "On Smooth Decompositions of Matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 20, n.º 3, págs. 800-819, 1999. DOI: [10.1137/S0895479897330182](https://doi.org/10.1137/S0895479897330182). eprint: <https://doi.org/10.1137/S0895479897330182>. dirección: <https://doi.org/10.1137/S0895479897330182>.
- [19] E. Hairer, S. P. Nørsett y G. Wanner, "Runge-Kutta and Extrapolation Methods," en *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993, págs. 129-353. DOI: [10.1007/978-3-540-78862-1_2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1_2). dirección: https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1_2.
- [20] L. Dieci, C. Elia y L. Lopez, "Smooth SVD on the Lorentz group with application to computation of Lyapunov exponents," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 164-165, págs. 255-264, 2004, Proceedings of the 10th International Congress on Computational and Applied Mathematics. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(03\)00644-7](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(03)00644-7). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042703006447>.

- [21] L. Dieci y L. Lopez, “Smooth singular value decomposition on the symplectic group and Lyapunov exponents approximation,” *Calcolo*, vol. 43, n.º 1, págs. 1-15, 2006. DOI: [10.1007/s10092-006-0111-y](https://doi.org/10.1007/s10092-006-0111-y). dirección: <https://doi.org/10.1007/s10092-006-0111-y>.
- [22] E. N. Lorenz, “Deterministic Nonperiodic Flow,” *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 20, n.º 2, págs. 130-141, 1963. DOI: [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2). dirección: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml.
- [23] Á. Mene Hevia, “Cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov: aplicación a la detección del caos,” Trabajo de fin de grado, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, España, 2021. dirección: <https://minerva.usc.gal/rest/api/core/bitstreams/0887455f-1bf3-4405-8def-95040d5b01e0/content>.
- [24] H. Haken, “At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point,” *Physics Letters A*, vol. 94, n.º 2, págs. 71-72, 1983. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(83\)90209-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90209-8). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960183902098>.

