



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**Algunos resultados sobre
teoría cualitativa de
sistemas dinámicos planos**

Autora: Clara Pablos Cuesta

Tutor: Jorge Mozo Fernández

Año: 2024-2025

Resumen

Este trabajo aborda algunos de los resultados más relevantes sobre la teoría cualitativa de sistemas dinámicos en el plano. Comienza con una introducción a los conceptos fundamentales que, posteriormente, permiten clasificar los sistemas dinámicos bidimensionales. Se incluye además el teorema de la variedad estable e inestable y el Teorema de Hartman-Grobman.

A continuación, se presentan los conceptos de conjuntos ω -límite y α -límite, junto con la aplicación de Poincaré, los cuales son esenciales para desarrollar el teorema de rectificación de flujo y analizar los ciclos límite. También se expone el desarrollo del Teorema de Poincaré-Bendixson.

Finalmente, se ejemplifican los tres tipos de bifurcaciones más simples (la bifurcación silla-nodo, la bifurcación transcítica y la bifurcación de pitchfork), además de la bifurcación de Hopf, destacando sus características principales.

Palabras clave: teorema de la variedad estable, Teorema de Hartman-Grobman, aplicación de Poincaré, teorema de rectificación de flujo, ciclos límite, Teorema de Poincaré-Bendixson, bifurcaciones.

Abstract

This work addresses some of the most relevant results in the qualitative theory of dynamical systems in the plane. It begins with an introduction to the fundamental concepts that later allow the classification of two-dimensional dynamical systems. Additionally, the stable and unstable manifolds' theorem, as well as the Hartman-Grobman's Theorem, are included.

Subsequently, the concepts of ω -limit and α -limit sets are introduced, along with the Poincaré map, which are essential for developing the flow rectification's theorem and analyzing limit cycles. The development of the Poincaré-Bendixson's Theorem is also added.

Finally, the three simplest types of bifurcations (the saddle-node bifurcation, the transcritical bifurcation, and the pitchfork bifurcation) are exemplified, along with the Hopf's bifurcation, highlighting their main characteristics.

Keywords: Stable manifold's theorem, Hartman-Grobman's Theorem, Poincaré map, flow box's theorem, limit cycles, Poincaré-Bendixson's Theorem, bifurcations.

Índice general

0. Introducción	9
1. Sistemas dinámicos	11
1.1. Teoría cualitativa	12
2. Sistemas dinámicos planos	19
2.1. Clasificación de los sistemas planos	19
2.1.1. Sistemas lineales	19
2.1.2. Sistemas no lineales	22
2.2. Teorema de Hartman-Grobman	30
3. Comportamiento de las órbitas	43
3.1. Aplicación de Poincaré	47
3.2. Ciclos límite	50
3.3. Teorema de Poincaré-Bendixson	51
4. Bifurcaciones	59
4.1. Bifurcaciones en el caso unidimensional	60
4.2. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf	62
5. Anexo	67

0. Introducción

Este trabajo surge del interés en intentar predecir el comportamiento de sistemas físicos, químicos, sociales, biológicos e incluso económicos. A lo largo del Grado en Matemáticas se han presentado diversos modelos que han motivado el objetivo de esta memoria. La teoría de sistemas dinámicos, iniciada por matemáticos como Henri Poincaré y Aleksandr Lyapunov, ha evolucionado hasta convertirse en una herramienta fundamental en múltiples disciplinas.

Un sistema dinámico, en esencia, está formado por un espacio de estados (el conjunto de estados posibles) y una ley (que describe la evolución de dichos estados a lo largo del tiempo). Permite comprender fenómenos complejos como el movimiento de los planetas, la dinámica de poblaciones o incluso la estabilidad financiera, conociendo su estado inicial junto con las leyes que lo rigen.

Para llevar a cabo este trabajo, se irán mencionando las fuentes de referencias empleadas, presentadas con una notación común. En cuanto a las definiciones, proposiciones y teoremas, se han adaptado al enfoque específico del contenido. Las demostraciones incluidas, cuya dificultad no exceda el propósito del trabajo, serán desarrolladas siguiendo los textos mencionados incluyendo las indicaciones necesarias para su comprensión. Asimismo, las figuras presentadas han sido elaboradas personalmente utilizando los programas MATLAB e Inkscape.

En cuanto al contenido, el primer capítulo comienza con una introducción a los conceptos fundamentales de los sistemas dinámicos, proporcionando el contexto necesario para desarrollar nociones posteriormente de forma más rigurosa.

El siguiente capítulo lleva a cabo la clasificación de los sistemas dinámicos planos tanto para el caso lineal como no lineal. Además, se incluyen dos resultados clave: el teorema de la variedad estable e inestable, y el Teorema de Hartman-Grobman.

El capítulo 3 se basa principalmente en características que describen el comportamiento de las órbitas en los sistemas dinámicos. Asimismo, se incluyen herramientas de gran utilidad como la aplicación de Poincaré, que permite reducir la dimensión de un sistema, y los ciclos límites. También se presenta el Teorema de Poincaré-Bendixson, uno de los resultados más importantes dentro de este contexto, ya que predice la existencia de ciclos límites de sistemas dinámicos no lineales bidimensionales.

El capítulo final presenta algunos detalles básicos sobre bifurcaciones, junto con los tres tipos de bifurcaciones más comunes dentro del caso unidimensional (la bifurcación silla-nodo, la bifurcación transcítica y la bifurcación de pitchfork). El trabajo concluye con el estudio de la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf, que se produce cuando un punto de equilibrio genera un ciclo límite.

1. Sistemas dinámicos

A lo largo de este capítulo se introducirán los resultados más básicos de sistemas dinámicos tomando como referencia los libros [1], [2], [5], [6], [11] y [13].

Definición 1.1. Sea $T \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi : T \times E \rightarrow E : (t, x) \rightarrow \varphi^t(x)$ una aplicación de clase \mathcal{C}^1 . Un **sistema dinámico** es una tupla (T, E, φ) que cumple las siguientes propiedades:

- $\varphi^0 = id$, siendo id la aplicación identidad en E , es decir, $id(x) = x$, $\forall x \in E$.
- $\varphi^{r+s} = \varphi^r \circ \varphi^s$, es decir, $\varphi^{r+s}(x) = \varphi^r(\varphi^s(x))$, $\forall x \in E$ y $\forall r, s \in T$.

El conjunto T se llama espacio de tiempos, E es el espacio de estados (o de fase) y φ es una familia de operadores de evolución (o flujo).

Nota 1.2. La primera propiedad implica que el sistema no cambia su estado de forma espontánea, mientras que la segunda indica que no cambia con el tiempo (es decir, el sistema es autónomo).

Nota 1.3. Cabe destacar que la aplicación $\varphi^t : E \rightarrow E$ tiene como inversa φ^{-t} , ya que basta tomar $s = -r$ en la segunda propiedad de la definición.

Ejemplo 1.4. Sea $\varphi^t : E \rightarrow E$ con $\varphi^t = e^{tA}$, siendo A una matriz de tamaño $n \times n$. Claramente definen un sistema dinámico ya que $\varphi^0 = e^0 = id$ y $\varphi^{r+s} = e^{(r+s)A} = e^{rA}e^{sA}$.

Definición 1.5. Un **sistema dinámico** es **discreto** si el espacio de tiempo T es discreto, es decir, $T \subset \mathbb{Z}$. En caso contrario se dice que es **continuo**.

Sea (T, E, φ) un sistema dinámico continuo y $x \in E$, si se toma $\varphi^t(x) = x(t)$ y $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\varphi^t(x)|_{t=0} = X(x), \quad (1.1)$$

siendo $\dot{x} = x' = \frac{dx}{dt}$, entonces $x(t)$ es la curva solución de (1.1) satisfaciendo la condición inicial $x(0) = x$. Por tanto, todo sistema dinámico da lugar a una ecuación diferencial.

Asimismo, podemos obtener un sistema dinámico a partir de una ecuación diferencial siempre que sea autónoma y X de Lipschitz. Sea $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente lipschitziana. Como la ecuación $\dot{x} = X(x)$ tiene solución única (por el teorema de existencia y unicidad), se puede denotar $\varphi^t(x_0)$ a la solución, con $x_0 = x(0)$ y $t \in I_{x_0}$, siendo I_{x_0} el intervalo máximo de existencia.

En algunos libros se toma $I_{x_0} = \mathbb{R}$ y dicha solución se dice que es global. No obstante, en este trabajo se abordará el caso general, ya que esto no siempre ocurre, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.6. *La solución general de la ecuación autónoma $\dot{x} = x$ viene dada por $x(t) = x_0 e^{-t}$, que está definida en todo \mathbb{R} . Sin embargo, la solución de la ecuación autónoma $\dot{x} = x^2$ sería $x(t) = \frac{1}{x_0^{-1} - t}$, la cual está definida únicamente en $t < x_0^{-1}$ o $t > x_0^{-1}$.*

Si se asume que $X \in \mathcal{C}^r$, con $r \geq 1$, la aplicación X se dice que es un **campo vectorial**, cuyas soluciones son curvas tangentes a él en cada punto. A dichas soluciones se las denomina **curvas integrales** (o trayectorias), y se corresponden con $\varphi(t, x) = \varphi^t(x)$.

La teoría de existencia y unicidad de (1.1) fue dada en las asignaturas de Ecuaciones diferenciales en el grado, por lo que no se ahondará en ella en esta memoria. Aún así, se incluirán algunos resultados básicos que puedan ser de utilidad en un anexo como recordatorio.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales tratados serán autónomos (no dependerán de la variable tiempo), para que se correspondan con sistemas dinámicos. Por ende, se hablará de sistema dinámico o autónomo indistintamente.

1.1. Teoría cualitativa

En esta sección se desarrollará una primera parte de la teoría cualitativa basada en los conceptos más generales de sistemas dinámicos. Para ello se tomarán como

guion los libros [2], [5], [14] y [15].

En lo que sigue se supondrá que (T, E, φ) es un sistema dinámico, $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial con $\dot{x} = X(x)$ y $x(0) = x_0$. Además, se empleará la notación expuesta en la sección anterior.

Definición 1.7. Un **punto singular** (respectivamente, **regular**) es un punto $x \in E$ de forma que $X(x) = 0$ (respectivamente, $X(x) \neq 0$).

Dado un punto $x \in E$, se pretende estudiar su comportamiento en el futuro y en el pasado haciendo uso del operador φ , para ello se introduce el concepto de órbita y diagrama de fase.

Definición 1.8. La **trayectoria**, **órbita** o **curva integral (maximal)** son todos los estados que alcanza el sistema partiendo del punto inicial, es decir, dado $x \in E$

$$\gamma(x) = \{\varphi(t, x) : t \in I_x\}.$$

Definición 1.9. Dado $x \in E$, la **semiórbita positiva** y **negativa** de x son, respectivamente,

$$\gamma^+(x) = \{\varphi(t, x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^+\} \quad \text{y} \quad \gamma^-(x) = \{\varphi(t, x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^-\}.$$

Definición 1.10. La representación gráfica de las órbitas (junto con sus direcciones) se denomina **diagrama de fase**.

Ejemplo 1.11. Se considera el oscilador armónico lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

El diagrama de fase del sistema se puede observar en la Figura 1.1 y se tiene que $\gamma(x) = \gamma^+(x) = \gamma^-(x)$.

Definición 1.12. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice **positivamente invariante** respecto a (1.1) si $\varphi^t(x) \in A$ para todo $x \in A$ y $0 \leq t \in I_x$.

De manera análoga, se dice **negativamente invariante** si $\varphi^t(x) \in A$ para todo $x \in A$ y $0 \geq t \in I_x$.

Si ambas condiciones se cumplen, es decir, $\varphi^t(x) \in A$ para todo $x \in A$ y $t \in I_x$, el conjunto se denomina **invariante**.

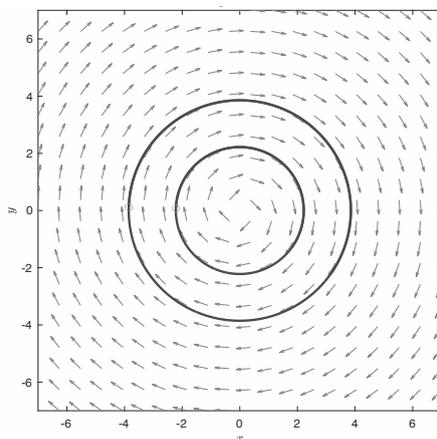


Figura 1.1: Diagrama de fase de la ecuación $(x, y)' = (y, -x)$.

Asimismo, se puede comprobar que un conjunto es invariante si es unión de órbitas, es decir,

$$A \text{ es invariante} \Leftrightarrow A = \bigcup_{x \in A} \gamma(x).$$

Ejemplo 1.13. *Continuando con el Ejemplo 1.11. El origen y cada círculo centrado en él son conjuntos invariantes, como se puede observar en el diagrama de fase de la Figura 1.1.*

Definición 1.14. *Si la órbita de un punto se compone únicamente de él mismo, es decir, $\gamma(x) = \{x\}$, entonces x se dice que es un **punto de equilibrio** (crítico o fijo). Además, a dicha la órbita se la denomina **constante**.*

Nota 1.15. *Claramente $\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \{x\} \cup \gamma^+(x)$.*

A continuación, se introduce un concepto fundamental para describir un tipo de órbitas de gran utilidad en los próximos capítulos.

Definición 1.16. *Un punto $x \in E$ es un **punto periódico** de φ si existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, x) = x$. Además, el **periodo** de x , $T(x)$, es el T más pequeño para el que se cumple que $\varphi(T, x) = x$, es decir, $T(x) = \inf\{T > 0 : \varphi(T, x) = x\}$.*

Proposición 1.17. *Un punto x es periódico si y solo si $\gamma^+(x) \cap \gamma^-(x) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Hay que ver que se cumplen ambas implicaciones:

\Rightarrow) Si x es periódica, por definición existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, x) = x$.

Por una parte, como $\varphi(T, x) = x \Rightarrow x \in \gamma^+(x)$, por definición de semiórbita positiva.

Por otra parte, como $\varphi(T, x) = x \Rightarrow \varphi(-T, x) = x \Rightarrow x \in \gamma^-(x)$, por definición de semiórbita negativa.

Por tanto, se tiene que $x \in \gamma^+(x)$ y $x \in \gamma^-(x)$, es decir, $x \in \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Entonces, $\gamma^+(x) \cap \gamma^-(x) \neq \emptyset$.

\Leftrightarrow Si $\gamma^+(x) \cap \gamma^-(x) \neq \emptyset$, entonces existe $y \in \gamma^+(x) \cap \gamma^-(x)$.

Como $y \in \gamma^+(x) \cap \gamma^-(x)$, entonces existen $t_1 > 0$ y $t_2 < 0$ tal que

$$\varphi(t_1, x) = \varphi(t_2, x) = y.$$

Sea $T = t_1 - t_2 > 0$, tenemos que

$$\varphi(T, x) = \varphi(t_1 - t_2, x) = \varphi(t_1, \varphi(-t_2, x)) = \varphi(t_1, y) = \varphi(0, x) = x$$

por las propiedades del flujo.

Por tanto, como $\varphi(T, x) = x$, x es un punto periódico de periodo T .

□

Definición 1.18. Una **órbita** se dice que es **periódica** (cerrada o ciclo) si contiene al menos un punto periódico, y todos los puntos de la órbita son periódicos con el mismo periodo.

La siguiente proposición formaliza la imagen intuitiva de que las órbitas periódicas son equivalentes al círculo unitario en términos de topología.

Proposición 1.19. Toda órbita periódica es homeomorfa a \mathcal{S}^1 .

Demostración.

Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ una función continua y periódica con periodo $T > 0$, es decir, $\gamma(t) = \gamma(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por la periodicidad, el conjunto de puntos de la órbita se puede describir identificando t con $t + T$ dando lugar al espacio cociente $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. Además, existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{S}^1$ dado por $f([t]) = e^{2\pi it/T}$.

Finalmente, se puede establecer el homeomorfismo $\Psi : \mathcal{S}^1 \rightarrow \gamma([0, T])$ tal que $\Psi(e^{2\pi it/T}) = \gamma(t)$. Esto es posible porque γ es periódica y recorre toda la órbita en el intervalo $[0, T]$. Por lo tanto, $\gamma([0, T])$ es homeomorfa a \mathcal{S}^1 .

□

En función del comportamiento de las órbitas en torno a un punto de equilibrio podemos catalogarlos en estables o inestables.

Definición 1.20. Un **punto de equilibrio** \tilde{x} se dice que es **estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de forma que, para toda solución $x = x(t)$ del sistema que cumple $\|x(0) - \tilde{x}\| < \delta$, se tiene que $\|x(t) - \tilde{x}\| < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Un punto de equilibrio que no es estable se dice **inestable**.

Definición 1.21. Un **punto de equilibrio** \tilde{x} se dice que es **atrayente** si existe un $\delta > 0$ de forma que, para toda solución $x = x(t)$ del sistema que verifica $\|x(0) - \tilde{x}\| < \delta$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tilde{x}$.

Definición 1.22. Un **punto de equilibrio** \tilde{x} se dice **asintóticamente estable** si es estable y atrayente.

Por lo tanto, toda órbita cercana a un punto asintóticamente estable, a largo plazo, convergerá a él. Conviene señalar que un punto estable no tiene por qué ser asintóticamente estable, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.23. Siguiendo con el Ejemplo 1.11, se tiene que el origen es un punto estable, pero no asintóticamente estable. Esto es debido a que, dado $\varepsilon > 0$, todas las soluciones en el disco $D(0, \delta)$, con $0 < \delta \leq \varepsilon$, permanecen dentro de él; sin embargo, aunque todas las órbitas son periódicas, no tienden al cero.

A continuación, se mencionarán varias nociones de equivalencia entre sistemas dinámicos que serán de utilidad para comparar diagramas de fase.

Definición 1.24. Dos **sistemas dinámicos** (T_1, E_1, φ_1) y (T_2, E_2, φ_2) son **topológicamente equivalentes** (respectivamente, \mathbb{C}^r -equivalentes) si existe un homeomorfismo (respectivamente, difeomorfismo de clase \mathbb{C}^r) $F : E_1 \rightarrow E_2$ de forma que F envía las órbitas de φ_1 en órbitas de φ_2 y además preservan la orientación.

Nota 1.25. Conviene señalar que no es necesario que preserven la parametrización.

Definición 1.26. En las condiciones de la definición anterior, si el homeomorfismo preserva la parametrización, es decir, $F(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, F(x))$ para todo $t \in T_1$ y $x \in E_1$, entonces son **topológicamente conjugados** (respectivamente, \mathbb{C}^r -conjugados).

Nota 1.27. En este caso es necesario que el intervalo maximal I_x de φ_1 sea el mismo que $I_{F(x)}$ de φ_2 .

Es obvio que dos sistemas topológicamente conjugados también son topológicamente equivalentes.

Nota 1.28. *Del mismo modo, se podrían cambiar dos sistemas dinámicos por dos campos vectoriales de clase \mathcal{C}^r , con $r \geq 1$.*

Cabe destacar que una equivalencia topológica asigna puntos singulares en puntos singulares y, análogamente, con las órbitas periódicas. A su vez, una conjugación topológica también preserva el periodo de los ciclos.

Ejemplo 1.29. *Volviendo al Ejemplo 1.11, se tiene que los sistemas son topológicamente conjugados. Para ello basta tomar $F(x, y) = (kx, ky)$, siendo k una constante. Además, se mantiene el origen como punto singular y las órbitas cerradas.*

La siguiente proposición proporciona una caracterización en el plano para campos vectoriales \mathcal{C}^r -conjugados, con $r \geq 1$.

Proposición 1.30. *Sean $X_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $X_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales de clase \mathcal{C}^r y $F : E_1 \rightarrow E_2$ un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^r , con $r \geq 1$. Entonces F es una conjugación entre X_1 y X_2 si y solo si $DF_p(X_1(p)) = X_2(F(p))$, para todo $p \in E_1$.*

Demostración.

Sean φ_1 y φ_2 los flujos respectivos de X_1 y X_2 . Hay que ver que se verifican ambas implicaciones.

\Rightarrow) Si F es una conjugación, dado $p \in E_1$, se cumple por definición que

$$F(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, F(p))$$

para todo $t \in I_1(p) = I_2(F(p))$, donde I_1, I_2 son los intervalos máximos de existencia respectivamente.

Derivando esta igualdad respecto a t con la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dt}F(\varphi_1(t, p)) = \frac{d}{dt}\varphi_2(t, F(p)) \Leftrightarrow DF(\varphi_1(t, p))\frac{d}{dt}\varphi_1(t, p) = X_2(\varphi_2(t, F(p)))$$

Finalmente, evaluándola en $t = 0$, y usando que $\varphi_1(0, p) = p$ y $\varphi_2(0, F(p)) = F(p)$ se tiene que

$$DF_p X_1(p) = X_2(F(p))$$

como se quería demostrar.

\Leftrightarrow) Si se cumple que $DF_p(X_1(p)) = X_2(F(p))$, dado $p \in E_1$, se define $\Psi(t) = F(\varphi_1(t, p))$ con $t \in I_1(p)$. Como

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(t) &= DF(\varphi_1(t, p)) \frac{d}{dt} \varphi_1(t, p) = \\ &= DF(\varphi_1(t, p)) X_1(\varphi_1(t, p)) = X_2(F(\varphi_1(t, p))) = X_2(\Psi(t))\end{aligned}$$

entonces Ψ es solución de $\dot{x} = X_2(x)$, $x(0) = F(p)$.

Por lo tanto, $F(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, F(p))$ y h es una conjugación entre X_1 y X_2 .

□

2. Sistemas dinámicos planos

A partir de este capítulo, el estudio se centrará en ocasiones en los sistemas dinámicos planos, es decir, los que el espacio de estados es un subconjunto del plano Euclídeo \mathbb{R}^2 . En una primera impresión podría parecer que la reducción al caso bidimensional es una simplificación demasiado abrupta, pero es imprescindible para poder estudiar mayores dimensiones a posteriori. Además, se tienen resultados como el Teorema de Poincaré-Bendixson, el cual se tratará en el siguiente capítulo, que no tiene generalización.

2.1. Clasificación de los sistemas planos

En esta sección se lleva a cabo un recordatorio de la clasificación de los sistemas planos $\dot{x} = X(x)$, siendo $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, separando el caso lineal del no lineal. Para ello, se va a usar como guion los apuntes de Ecuaciones diferenciales expuestos en el grado, [1], omitiendo las demostraciones ya dadas en él. Además, para la demostración del teorema de la variedad estable se emplearán como referencia los libros [2], [3], [10] y [13].

2.1.1. Sistemas lineales

Los sistemas lineales planos se pueden expresar con el par de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, o equivalentemente, en forma vectorial $\dot{x} = Ax$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Si la matriz A es regular ($\det A \neq 0$), solo se tiene un único punto de equilibrio en $\tilde{x} = 0$.

A continuación, se llevará a cabo una clasificación para el punto $\tilde{x} = 0$ en función de los valores propios de la matriz A asociada al sistema. Sus correspondientes diagramas de fase se representan en la Figura 2.1; en el caso inestable, el diagrama sería similar al estable, pero con la orientación invertida.

- a) **Punto de silla:** Dos valores propios reales distintos y de signo opuesto, el cual es inestable.
- b) **Nodo estable:** Dos valores propios reales, distintos y negativos.
- c) **Nodo propio estable:** Un valor propio real, doble, negativo y siendo A diagonalizable.
- d) **Nodo impropio estable:** Un valor propio real, doble, negativo y siendo A no diagonalizable.
- e) **Foco estable:** Dos valores propios complejos conjugados, con parte real negativa.
- f) **Nodo inestable:** Dos valores propios reales, distintos y positivos.
- g) **Nodo propio inestable:** Un valor propio real, doble, positivo y siendo A diagonalizable.
- h) **Nodo impropio inestable:** Un valor propio real, doble, positivo y siendo A no diagonalizable.
- i) **Foco inestable:** Dos valores propios complejos conjugados, con parte real positiva.
- j) **Centro:** Dos valores propios complejos imaginarios conjugados, el cual es estable.

Ejemplo 2.1. *En el caso del oscilador armónico del Ejemplo 1.11, el sistema dado se corresponde con un centro estable.*

Teorema 2.2. *Sea el origen un punto crítico del sistema lineal $\dot{x} = X(x)$ y $A = D_0X$ la matriz jacobiana en él. Si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, entonces el origen es asintóticamente estable; sin embargo, si tiene al menos un autovalor con parte real positiva, entonces el origen es inestable.*

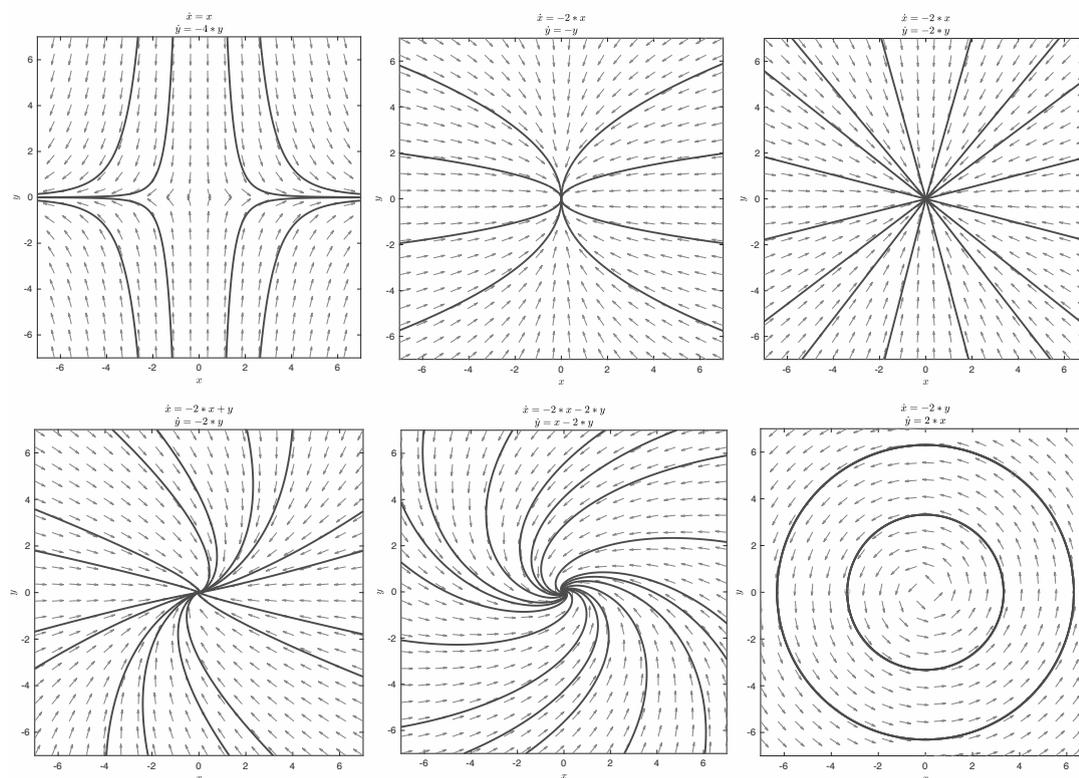


Figura 2.1: Diagramas de fase de los casos a), b), c), d), e) y j), respectivamente.

Demostración.

Por el Teorema 5.11 del anexo, sus soluciones vienen dadas por $x(t) = e^{At}x_0$.

Si todos los autovalores de A tienen parte real negativa entonces, por la Proposición 5.13 del anexo, se tiene que $\|e^{At}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto, se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| = 0$, luego el origen es asintóticamente estable.

Análogamente, si existe un autovalor de A con parte real positiva, entonces $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| = \infty$ y el origen es inestable.

□

En cambio, si la matriz A es singular ($\det A = 0$) se tienen numerosos puntos de equilibrio, además del origen. En este caso, se tendrían dos valores propios, uno el origen y el otro un número real, siendo ambos inestables. A continuación, se enumeran los casos en función del segundo valor propio y sus correspondientes diagramas de fase se pueden observar en la Figura 2.2.

- Si es no nulo: el sistema es topológicamente equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dependiendo si es positivo o negativo respectivamente y, por tanto, los puntos de equilibrio son $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. El sentido de la trayectoria en el diagrama de fase depende nuevamente del signo.

- Si es cero y A diagonalizable: el sistema es topológicamente equivalente a la matriz nula y, por tanto, los puntos de equilibrio son $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
- Si es cero y A no diagonalizable: los puntos de equilibrio son $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, ya que el sistema es topológicamente equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

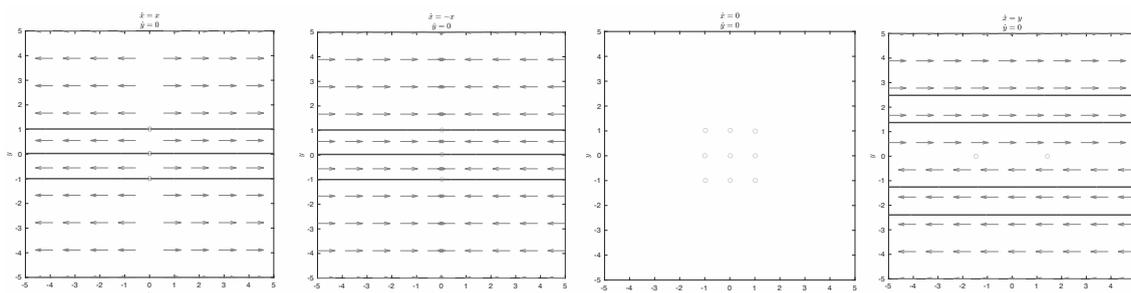


Figura 2.2: Diagramas de fase en función del segundo autovalor, respectivamente.

2.1.2. Sistemas no lineales

Sea $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 , no necesariamente lineal. Sea x_0 un punto crítico de la ecuación $\dot{x} = X(x)$, entonces se tiene el sistema linealizado $\dot{x} = Ax$, siendo $A = D_{x_0}X$ la matriz jacobiana evaluada en x_0 . De acuerdo con el Teorema 5.11 del anexo, las soluciones vienen dadas por $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$.

A continuación, se introducen unas nociones básicas requeridas para los próximos resultados.

Definición 2.3. Una *matriz* A es *hiperbólica* si todos sus autovalores tienen la parte real no nula. Un *punto crítico* es *hiperbólico* si la matriz jacobiana del sistema en dicho punto es hiperbólica.

Definición 2.4. Los *espacios estable e inestable* de un punto crítico hiperbólico x_0 se definen, respectivamente,

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n : e^{tA}x \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

y

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^n : e^{tA}x \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}.$$

A continuación, se demuestra que los subespacios estable e inestable forman una suma directa, es decir, dado $x \in \mathbb{R}^n$, existen de manera única $y \in E^s$ y $z \in E^u$ tales que $x = y + z$.

Proposición 2.5. Dada la ecuación $\dot{x} = X(x)$, si x_0 es un punto crítico hiperbólico se cumple que:

- E^s y E^u son subespacios lineales de \mathbb{R}^n con $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
- Para todo $x \in E^s, y \in E^u$ y $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $e^{At}x \in E^s$ y $e^{At}y \in E^u$.

Demostración.

- Dado que el punto x_0 es hiperbólico, la matriz $A = D_{x_0}X$ también lo es. En consecuencia, A no posee autovalores con parte real nula, y su forma canónica de Jordan es de la forma

$$\begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}$$

donde A_s y A_u son los bloques de Jordan correspondientes a los valores propios con parte real negativa y positiva, respectivamente.

Se definen los subespacios de \mathbb{R}^n

$$F^s = \text{span}\{v \mid Av = \lambda v, \text{Re}(\lambda) < 0\} \quad \text{y} \quad F^u = \text{span}\{v \mid Av = \lambda v, \text{Re}(\lambda) > 0\}.$$

Por construcción, $\mathbb{R}^n = F^s \oplus F^u$.

De acuerdo con la Proposición 5.13 del anexo, si $x \in F^s$ entonces $e^{At}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Análogamente, si $x \in F^u$ se verifica que $e^{At}x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Por ende, $F^s = E^s$ y $F^u = E^u$, como se quería demostrar.

- Como $e^{As}e^{At} = e^{At}e^{As}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$, en particular, si $x \in E^s$, se cumple que

$$e^{As}(e^{At}x) = e^{At}(e^{As}x). \quad (2.1)$$

Nuevamente, por la Proposición 5.13 del anexo, como $e^{As}x \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, se tiene que $e^{At}(e^{As}x) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$. Asimismo, por (2.1) se tiene que $e^{At}x \in E^s$.

De forma análoga, se comprueba que si $y \in E^u$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces $e^{At}y \in E^u$.

□

De acuerdo con la proposición anterior, se puede observar que los espacios estable e inestable son invariantes, y sus dimensiones se corresponden con el número de autovalores negativos y positivos de la matriz A , respectivamente.

Por otro lado, se definen las transformaciones lineales $P_u, P_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de manera que $P_s x = y$ y $P_u x = z$. Estas aplicaciones verifican que $P_s(\mathbb{R}^n) = E^s$ y $P_u(\mathbb{R}^n) = E^u$. Además, son proyecciones sobre los espacios E^s y E^u , ya que $P_s^2 = P_s$ y $P_u^2 = P_u$.

A partir de ahora se asumirá, sin pérdida de generalidad, que el equilibrio es el origen. Es razonable suponer que, en un entorno pequeño de él, las soluciones de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ tengan características similares a las de $\dot{x} = Ax$. En cambio, debido a la no linealidad, no se espera la existencia del subespacio estable e inestable; sin embargo, sí existirán otras superficies invariantes asociadas a dicha ecuación.

Definición 2.6. Una *variedad diferenciable* m -dimensional M en \mathbb{R}^n es un conjunto conexo que se puede recubrir mediante una colección de abiertos U_α , donde $M = \cup_\alpha U_\alpha$, cumpliendo las siguientes propiedades:

- Para cada índice α , existe un homeomorfismo $H_\alpha : U_\alpha \rightarrow B_m$, donde B_m es la bola abierta unidad en \mathbb{R}^m .
- Dados dos conjuntos abiertos cualquiera $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}$ del recubrimiento, si $H_{\alpha_1} : U_{\alpha_1} \rightarrow B_m$ y $H_{\alpha_2} : U_{\alpha_2} \rightarrow B_m$ son homeomorfismos, entonces la aplicación $H := H_{\alpha_1} \circ H_{\alpha_2}^{-1}$ es diferenciable, y además $\det \frac{dH}{dx}(x) \neq 0$ en todo su dominio.

Así, una variedad diferenciable m -dimensional se puede entender como un conjunto conexo con estructura de espacio Euclídeo m -dimensional de forma local. Esto permite extender los conceptos de espacio estable e inestable a las variedades correspondientes de la ecuación no lineal.

Sea $\dot{x} = Ax$ la linealización de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ en $x = 0$, siendo $A = DX(0)$. Sean λ_i^- y λ_j^+ , con $i = 1, \dots, n_-$ y $j = 1, \dots, n_+$, los autovalores de A cuya parte real

es negativa y positiva, respectivamente. Sean E^s y E^u los espacios estable e inestable ya definidos y φ^t el flujo inducido por $\dot{x} = X(x)$.

Definición 2.7. Una variedad diferenciable de dimensión n_- se denomina **variedad estable** M^s de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ en $x = 0$ si es positivamente invariante, tangente al espacio estable E^s en $x = 0$ y para cualquier $x \in E^s$, se tiene que $\varphi^t(x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

De manera análoga, una variedad diferenciable de dimensión n_+ se denomina **variedad inestable** M^u de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ en $x = 0$ si es negativamente invariante, tangente al espacio inestable E^u en $x = 0$ y para cualquier $x \in E^u$, se tiene que $\varphi^t(x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

El siguiente teorema proporciona una relación entre las variedades estable e inestable de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ y los espacios estable e inestable de su ecuación linealizada $\dot{x} = Ax$ en un entorno del origen.

Teorema 2.8 (Teorema de la variedad estable e inestable). Sea $\dot{x} = Ax$ la linealización de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ en $x = 0$, donde $A = DX(0)$ es la matriz jacobiana de X en $x = 0$ y se asume hiperbólica. Sea λ_i^- , λ_j^+ , con $i = 1, \dots, n_-$ y $j = 1, \dots, n_+$, el conjunto de autovalores de A con parte real negativa y positiva, respectivamente. Entonces, existe una variedad estable de dimensión n_- y una variedad inestable de dimensión n_+ en un entorno del origen.

Demostración.

Como X es de clase \mathcal{C}^1 y $X(0) = 0$, la ecuación $\dot{x} = X(x)$ puede expresarse como

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad (2.2)$$

donde A satisface las condiciones del teorema, y g es una función de clase \mathcal{C}^1 con $g(0) = 0$ y $Dg(0) = 0$. Además, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ y $\|y\| \leq \delta$ implican

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|. \quad (2.3)$$

Por el Lema 5.21 del anexo, existe una matriz regular $T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$T^{-1}AT = B := \begin{pmatrix} B_- & 0 \\ 0 & B_+ \end{pmatrix}$$

siendo B_- y B_+ las matrices cuadradas de dimensiones n_- y n_+ , cuyos autovalores son λ_i^- , λ_j^+ , con $i = 1, \dots, n_-$ y $j = 1, \dots, n_+$, respectivamente.

Se define $y := T^{-1}x$, entonces la ecuación (2.2) se puede expresar en términos de y de la forma

$$\dot{y} = By + h(y), \quad (2.4)$$

siendo $h(y) = T^{-1}gT(y)$ una función de clase \mathcal{C}^1 que cumple que $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$.

Sean E^s y E^u los respectivos espacios estable e inestable, y sea $\dot{y} = By$ la linealización de la ecuación (2.4). Entonces, los conjuntos $F^s := \{T^{-1}d : d \in E^s\}$ y $F^u := \{T^{-1}d : d \in E^u\}$ se corresponden con los espacios estable e inestable de dicha linealización, respectivamente.

Primeramente, hay que ver que existe una variedad estable de dimensión n_- de la ecuación (2.4).

Se definen

$$U(t) := \begin{pmatrix} e^{B_-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad V(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{B_+t} \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz A es hiperbólica, se verifica que $n_- + n_+ = n$. Así, por la Proposición 5.13 del anexo, se garantiza la existencia de constantes $K, \alpha > 0$ y $\sigma \in (0, \alpha)$ tales que, para todo $t \geq 0$

$$\|U(t)\| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t} \quad y \quad \|V(t)\| \leq Ke^{\sigma t}. \quad (2.5)$$

Por la Proposición 5.12 del anexo, las soluciones de la ecuación (2.4) vienen dadas por

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}h(s, c)ds.$$

De este modo, tiene sentido considerar la ecuación integral

$$u(t, c) = U(t)\tilde{c} + \int_0^t U(t-s)h(u(s, c))ds - \int_t^\infty V(t-s)h(u(s, c))ds \quad (2.6)$$

donde $\tilde{c} = (c, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^{n_-}$.

A continuación, se verá que si $u(t, c)$ es solución de la ecuación (2.6), entonces también lo será de la ecuación (2.4).

Sea $u(t, c)$ una solución de la ecuación (2.6), si se deriva (2.6) por ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned} u'(t, c) &= U'(t)\tilde{c} + \int_0^t U'(t-s)h(u(s, c))ds + U(0)h(u(t, c)) \\ &\quad - \int_t^\infty V'(t-s)h(u(s, c))ds + V(0)h(u(t, c)). \end{aligned}$$

Además,

$$U'(t) = \begin{pmatrix} B_-e^{B_-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_- & 0 \\ 0 & B_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{B_-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BU(t),$$

$$V'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_+ e^{B_+ t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_- & 0 \\ 0 & B_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{B_+ t} \end{pmatrix} = BV(t)$$

y

$$U(t) + V(t) = \begin{pmatrix} e^{B_- t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{B_+ t} \end{pmatrix} = e^{Bt}.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} u'(t, c) &= B[U(t)\tilde{c} + \int_0^t U(t-s)h(u(s, c))ds - \int_t^\infty V(t-s)h(u(s, c))ds] \\ &\quad + (U(0) + V(0))h(u(t, c)) = Bu(t, c) + h(u(t, c)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(t, c)$ es también solución de la ecuación (2.4) como se quería.

Ahora, hay que comprobar que la ecuación (2.6) tiene una solución en $[0, \infty)$.

Para ello se emplea el método de las aproximaciones sucesivas.

Se define una sucesión de funciones $\{u^{(i)}\}_{i=0}^\infty$ por recurrencia de la forma siguiente:

$$u^{(0)}(t, c) = 0$$

$$u^{(i+1)}(t, c) = U(t)\tilde{c} + \int_0^t U(t-s)h(u^{(i)}(s, c))ds - \int_t^\infty V(t-s)h(u^{(i)}(s, c))ds \quad (2.7)$$

para todo $i = 0, 1, \dots$

Además, dado $t \geq 0$, se comprueba por inducción que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|u^{(i)}(t, c) - u^{(i-1)}(t, c)\| < \frac{K|c|e^{-\alpha t}}{2^{i-1}} \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

- Para $i = 1$:

$$\|u^{(1)}(t, c) - u^{(0)}(t, c)\| = \|u^{(1)}(t, c)\| < K|c|e^{-\alpha t}.$$

- Se supone cierta la hipótesis de inducción:

$$\|u^{(i)}(t, c) - u^{(i-1)}(t, c)\| < \frac{K|c|e^{-\alpha t}}{2^{i-1}}.$$

- Por las desigualdades (2.3) y (2.5), junto con la hipótesis de inducción se cumple

$$\begin{aligned} \|u^{(i+1)}(t, c) - u^{(i)}(t, c)\| &\leq \int_0^t \|U(t-s)\| \varepsilon \|u^{(i)}(s, c) - u^{(i-1)}(s, c)\| ds \\ &\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| \varepsilon \|u^{(i)}(s, c) - u^{(i-1)}(s, c)\| ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon \int_0^t K e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \frac{K|c|e^{-\alpha s}}{2^{i-1}} ds + \varepsilon \int_t^\infty K e^{\sigma(t-s)} \frac{K|c|e^{-\alpha s}}{2^{i-1}} ds = \\
&= \varepsilon \frac{K^2|c|}{2^{i-1}} e^{-\alpha t - \sigma t} \int_0^t e^{\sigma s} ds + \varepsilon \frac{K^2|c|e^{\sigma t}}{2^{i-1}} \int_t^\infty e^{-(\sigma+\alpha)s} ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon K^2|c|e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{i-1}} + \frac{\varepsilon K^2|c|e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{i-1}} < \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \frac{K|c|e^{-\alpha t}}{2^{i-1}} = \frac{K|c|e^{-\alpha t}}{2^i},
\end{aligned}$$

tomando $\varepsilon < \frac{\sigma}{4K}$, entonces en (2.3) bastaría con haber elegido $|c| < \frac{\delta}{2K}$.

Por lo que queda probado que se verifica la desigualdad por inducción.

Así, para $i = 1, 2, \dots$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\|u^{(i)}(t, c) - u^{(i-1)}(t, c)\| < \frac{K|c|e^{-\alpha t}}{2^{i-1}} \leq \frac{K|c|}{2^{i-1}} \quad (2.8)$$

siendo $\sum_{i=1}^\infty \frac{K|c|}{2^{i-1}}$ convergente. Entonces, aplicando la prueba M de Weierstrass, Teorema 5.20 del anexo, se verifica que la serie

$$\sum_{i=1}^\infty (u^{(i)}(t, c) - u^{(i-1)}(t, c))$$

es uniformemente convergente para $t \geq 0$. Es decir, la sucesión $\{u^{(i)}(t, c)\}_{i=1}^\infty$ es uniformemente convergente.

Sea

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u^{(i)}(t, c) = u(t, c). \quad (2.9)$$

De este modo, al tomar límites en ambos lados de (2.7) y utilizando (2.9), junto con la convergencia uniforme de la sucesión $\sum_{i=1}^\infty (u^{(i)}(t, c) - u^{(i-1)}(t, c))$ para $t \geq 0$, se concluye que $u(t, c)$ satisface la igualdad (2.6). Por lo tanto, también cumple la ecuación (2.4).

Por (2.8) se tiene que

$$\|u(t, c)\| \leq \sum_{i=1}^\infty \|u^{(i)}(t, c) - u^{(i-1)}(t, c)\| < \sum_{i=1}^\infty \frac{K|c|e^{-\alpha t}}{2^{i-1}} = 2K|c|e^{-\alpha t}. \quad (2.10)$$

Se denota $u(t, c) = (u_-, u_+)^T(t, c)$, siendo u_- y u_+ los subvectores de u con dimensiones n_- y n_+ , respectivamente.

Sustituyendo en (2.6) se observa que $u(t, c)$ cumple las condiciones iniciales:

$$u_-(0, c) = c \quad \text{y} \quad u_+(0, c) = - \int_0^\infty V(-s)h(u(s, c))ds.$$

Sea $D := \{c \in \mathbb{R}^{n_-} : \text{existe solución } u(t, c) \text{ de la ecuación (2.6)}\}$. Además, se define la función $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_+}$ dada por

$$\phi(c) = - \int_0^\infty V(-s)h(u(s, c))ds$$

y la variedad diferenciable

$$N^s := \{(c, \phi(c))^T : c \in D\}.$$

Ahora hay que comprobar que la variedad N^s definida anteriormente es una variedad estable para la ecuación (2.4). De ser así, $M^s := \{x = Ty : y \in N^s\}$ será una variedad estable para la ecuación (2.2).

Sea $y(t, c)$ solución de la ecuación (2.4) satisfaciendo la condición inicial $y(0) = (c, \phi(c))$, y sea $u(t, c)$ solución de la ecuación (2.6) asociada al mismo valor de c . Entonces, $u(t, c)$ es también solución de la ecuación (2.2) con la misma condición inicial. Por ende, por la unicidad de solución del problema de valor inicial, se concluye que $y(t, c) \equiv u(t, c)$.

Es evidente que $y(0, c) \in N^s$. Por tanto, hay que comprobar si $y(t, c) \in N^s$ para todo $t \geq 0$.

Para un $t_1 > 0$, se define $\bar{u}(t, c) := u(t + t_1, c)$. De este modo, $\bar{u}(t, c)$ también es solución de la ecuación (2.6). En consecuencia, se tiene que $u_-(t_1, c) = u_-(0, c) \in D$.

Por (2.6), para $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} u_+(t, c) &= - \int_t^\infty V(t-s)h(u(s, c))ds = - \int_0^\infty V(-s)h(u(s+t, c))ds = \\ &= - \int_0^\infty V(-s)h(u(s, u_+(t, c)))ds = \phi(u_+(t, c)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(t, c) \in N^s$ y entonces, $y(t, c) \in N^s$ para todo $t \geq 0$.

Así, se concluye que N^s es positivamente invariante.

Por (2.10) se deduce que, si $c \in D$ entonces $y(t, c) = u(t, c) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, si $c \notin D$, los términos de la derecha de (2.6) no están acotados cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que los términos de la izquierda sí lo están. Entonces, $y(t, c) \not\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Además, como $D\phi(0) = 0$, entonces N^s es tangente a F^s en $c = 0$.

Por lo tanto, queda probado que N^s es una variedad estable para la ecuación (2.4).

Finalmente, al sustituir t por $-t$, la ecuación (2.2) se transforma en $\dot{x} = -Ax - g(x)$. Aplicando el mismo razonamiento que en el caso anterior, se concluye que esta ecuación posee una variedad estable de dimensión n_+ , lo que implica que la ecuación original (2.2) tiene una variedad inestable de dimensión n_+ .

□

Nota 2.9. Las variedades M^s y M^u están definidas localmente en un entorno del origen, pero pueden extenderse globalmente. Los conjuntos

$$W^s(0) := \{\varphi^t(x) : x \in M^s, t \leq 0\} \quad y \quad W^u(0) := \{\varphi^t(x) : x \in M^u, t \geq 0\}$$

se corresponden con las **variedades globales estable e inestable**, respectivamente, de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ en $x = 0$, donde φ^t denota el flujo inducido.

2.2. Teorema de Hartman-Grobman

Esta sección tiene como objetivo demostrar el Teorema de Hartman-Grobman y, así, establecer una analogía entre el comportamiento de los sistemas lineales y no lineales cerca de un punto de equilibrio hiperbólico. Las referencias principales para ello serán los libros [2], [13] y [14].

Para empezar, se verá un resultado que afirma que, para una perturbación muy pequeña de una ecuación no lineal con un punto crítico hiperbólico, sus soluciones son topológicamente conjugadas con las soluciones de su ecuación linealizada. A partir de este, y con la ayuda de dos lemas, se demostrará el Teorema de Hartman-Grobman.

Teorema 2.10. *Sea A una matriz hiperbólica de tamaño n y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función acotada que satisface $g(0) = 0$. Además, existe una constante $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, g verifica la condición de Lipschitz:*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \delta \|x - y\|. \quad (2.11)$$

Entonces, existe una única función acotada $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\eta(0) = 0$, tal que la transformación $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida como $h(x) = x + \eta(x)$, cumple que

$$h \circ e^{At} = \varphi^t \circ h \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

donde φ^t es el flujo correspondiente a la ecuación

$$\dot{x} = Ax + g(x). \quad (2.13)$$

Además, h es un homeomorfismo.

Demostración.

La demostración, dado su extenso desarrollo, se dividirá en varios pasos y contará con dos lemas auxiliares intermedios para facilitar su comprensión.

Paso 1: Comprobación de la existencia de soluciones globales:

Para comenzar, hay que verificar que la ecuación (2.13) define un flujo. Como la función $(t, x) \rightarrow Ax + g(x)$ es continua y localmente lipschitziana

en x , por el Teorema 5.10 del anexo, cada solución verifica

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}g(x(s))ds \quad (2.14)$$

con $t \in I_x$, siendo I_x el correspondiente intervalo maximal.

Al tomar $y = 0$ en (2.11) se obtiene que $\|g(x)\| \leq \delta\|x\|$.

Combinando esto con (2.14) se tiene que para $t \geq t_0$ en I_x

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\|A\|(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{\|A\|(t-s)}\delta\|x(s)\|ds = \\ &= e^{\|A\|t}e^{-\|A\|t_0}\|x(t_0)\| + e^{\|A\|t} \int_{t_0}^t e^{-\|A\|s}\delta\|x(s)\|ds \end{aligned}$$

es decir,

$$e^{-\|A\|t}\|x(t)\| \leq e^{-\|A\|t_0}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{-\|A\|s}\delta\|x(s)\|ds.$$

Y aplicando el Lema de Gronwall, Lema 5.7 del anexo, se tiene que

$$e^{-\|A\|t}\|x(t)\| \leq e^{-\|A\|t_0}\|x(t_0)\|e^{\int_{t_0}^t \delta ds} = e^{-\|A\|t_0}\|x(t_0)\|e^{\delta(t-t_0)}$$

o, equivalentemente,

$$\|x(t)\| \leq e^{(\|A\|+\delta)(t-t_0)}\|x(t_0)\|. \quad (2.15)$$

Si $I_x = (a, b)$, con b finito, por (2.15) se tendría que

$$\|x(b^-)\| \leq e^{(\|A\|+\delta)(b-t_0)}\|x(t_0)\|,$$

lo que lleva a contradicción con el Teorema 5.14 del anexo.

Por lo tanto, la solución estaría definida en $[t_0, \infty)$.

De manera análoga, se obtendría que la solución está definida en el intervalo $(-\infty, t_0]$.

Paso 2: Construcción de una función auxiliar:

Se define el conjunto

$$X_0 = \{\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \eta \text{ es continua, acotada y } \eta(0) = 0\},$$

el cual es un espacio métrico completo con la distancia derivada de la norma $\|\cdot\|_\infty$, por la Proposición 5.16 del anexo.

Se define la transformación G en X_0 para cada $\eta \in X_0$ y $t \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} G(\eta)(x) &= \int_0^\infty P_s e^{As} \eta(e^{-As} x) ds - \int_0^\infty P_u e^{-As} \eta(e^{As} x) ds = \\ &= \int_{-\infty}^t P_s e^{A(t-s)} \eta(e^{A(s-t)} x) ds - \int_t^\infty P_u e^{A(t-s)} \eta(e^{A(s-t)} x) ds, \end{aligned} \quad (2.16)$$

siendo P_s y P_u las proyecciones sobre los espacios estable e inestable, respectivamente.

A continuación, habría que ver que G está bien definida y es continua.

- Como la matriz A es hiperbólica, por la Proposición 5.13 del anexo y la definición de proyección, existen constantes $c, \mu > 0$ de forma que, para $s \geq 0$,

$$\|P_s e^{As}\| \leq ce^{-\mu s} \quad \text{y} \quad \|P_u e^{-As}\| \leq ce^{-\mu s}. \quad (2.17)$$

Por lo tanto, para $s \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \|P_s e^{As} \eta(e^{-As} x)\| &\leq \|P_s e^{As}\| \|\eta\|_\infty \leq ce^{-\mu s} \|\eta\|_\infty \\ \|P_u e^{-As} \eta(e^{As} x)\| &\leq \|P_u e^{-As}\| \|\eta\|_\infty \leq ce^{-\mu s} \|\eta\|_\infty \end{aligned} \quad (2.18)$$

ya que $\eta \in X_0$.

Finalmente, de (2.18) se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|P_s e^{As} \eta(e^{-As} x)\| ds + \int_0^\infty \|P_u e^{-As} \eta(e^{As} x)\| ds &\leq \\ &\leq \int_0^\infty ce^{-\mu s} \|\eta\|_\infty ds + \int_0^\infty ce^{-\mu s} \|\eta\|_\infty ds = \\ &= 2c \|\eta\|_\infty \int_0^\infty e^{-\mu s} ds = \frac{2c}{\mu} \|\eta\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, las integrales que definen $G(\eta)(x)$ convergen, lo que demuestra que $G(\eta)(x)$ está bien definida para $\eta \in X_0$ y $x \in X_0$.

Además, como se verifica que

$$\|G(\eta)(x)\| \leq \frac{2c}{\mu} \|\eta\|_\infty$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que la función $G(\eta)$ está acotada para todo $\eta \in X_0$.

- De acuerdo con (2.19), dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, existe un $T > 0$ tal que

$$\int_T^\infty \|P_s e^{As} \eta(e^{-As} x)\| ds + \int_T^\infty \|P_u e^{-As} \eta(e^{-As} x)\| ds < \varepsilon.$$

Por ende, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|G(\eta)(x) - G(\eta)(y)\| &< 2\varepsilon + \int_0^T \|P_s e^{As} [\eta(e^{-As} x) - \eta(e^{-As} y)]\| ds \\ &+ \int_0^T \|P_u e^{-As} [\eta(e^{As} x) - \eta(e^{As} y)]\| ds \leq 2\varepsilon \\ &+ \int_0^T c e^{-\mu s} \|\eta(e^{-As} x) - \eta(e^{-As} y)\| ds + \int_0^T c e^{-\mu s} \|\mu(e^{As} x) - \mu(e^{As} y)\| ds. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dado que las funciones continuas son uniformemente continuas en conjuntos compactos, para todo $\delta > 0$ se tiene que la función

$$(t, x) \rightarrow \eta(e^{-At} x)$$

es uniformemente continua en el conjunto compacto $[0, T] \times \overline{B(x, \delta)}$.

Por tanto, existe $\delta > 0$ de forma que para $s \in [0, T]$ e $y \in \overline{B(x, \delta)}$ se cumple que

$$\|\eta(e^{-As} x) - \eta(e^{-As} y)\| < \varepsilon.$$

Análogamente, tomando el mismo $\delta > 0$ para $s \in [0, T]$ e $y \in \overline{B(x, \delta)}$ se tiene

$$\|\eta(e^{As} x) - \eta(e^{As} y)\| < \varepsilon.$$

Por las dos desigualdades anteriores junto con (2.20), se obtiene

$$\|G(\eta)(x) - G(\eta)(y)\| < 2\varepsilon + 2c\varepsilon \int_0^T e^{-\mu s} ds = 2\varepsilon + 2cT\varepsilon.$$

Entonces, se verifica que la función $G(\eta)$ es continua.

Asimismo, por (2.16) se tiene que $G(\eta)(0) = 0$, por lo que $G(X_0) \subset X_0$.

Paso 3: Obtención de una igualdad equivalente a (2.12):

Dado $\eta \in X_0$, se denota $g_\eta(x) = g(h(x))$, siendo $h = Id + \eta$.

Como la función g está acotada, se deduce que g_η también lo está.

Además, de acuerdo con (2.11)

$$\|g_\eta(x) - g_\eta(y)\| = \|g(h(x)) - g(h(y))\| = \|g(x + \eta(x)) - g(y + \eta(y))\| \leq$$

$$\leq \delta \|(x + \eta(x)) - (y + \eta(y))\| \leq \delta \|x - y\| + \delta \|\eta(x) - \eta(y)\|.$$

Por otro lado, se puede observar que $g_\eta(0) = g(h(0)) = g(0) = 0$.

En consecuencia, se tiene que $g_\eta \in X_0$.

Lema 2.11. *La igualdad (2.12) es equivalente a $G(g_\eta) = \eta$.*

Demostración.

Hay que comprobar la equivalencia en ambos sentidos.

- Si $G(\eta) = \eta$, como $h = Id + \eta$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{-At} h(e^{At} x) &= \frac{d}{dt} e^{-At} (e^{At} x + \eta(e^{At} x)) = \\ &= \frac{d}{du} e^{-A(t+u)} \eta(e^{A(t+u)} x) \Big|_{u=0} = e^{-At} \frac{d}{du} e^{-Au} \eta(e^{Au} e^{At} x) \Big|_{u=0} = \\ &= e^{-At} \frac{d}{du} e^{-Au} G(g_\eta)(e^{As} x) \Big|_{u=0} = \\ &= e^{-At} \frac{d}{du} \left(\int_{-\infty}^u P_s e^{-As} g_\eta(e^{As} x) ds - \int_u^{\infty} P_u e^{-As} g_\eta(e^{As} x) ds \right) \Big|_{u=0} = \\ &= e^{-At} (P_s g_\eta(x) + P_u g_\eta(x)) = e^{-At} g(h(e^{At} x)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como

$$\frac{d}{dt} e^{-At} h(e^{At} x) = -A e^{-At} h(e^{At} x) + e^{-At} \frac{d}{dt} h(e^{At} x)$$

juntándolo con la igualdad obtenida en (2.21) se llega a que

$$-A h(e^{At} x) + \frac{d}{dt} h(e^{At} x) = g(h(e^{At} x)),$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} h(e^{At} x) = A h(e^{At} x) + g(h(e^{At} x)).$$

Por lo tanto, la función $y(t) = h(e^{At} x)$ cumple la ecuación (2.13).

Además, al ser $y(0) = h(x)$ se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $h(e^{At} x) = \varphi_t(h(x))$, por lo que se verifica (2.12) como se requería.

- Si se cumple (2.12), como $h = Id + \eta$, entonces $Id + \eta = \varphi_t \circ h \circ e^{-At}$.

Además, por la fórmula de variación de las constantes, Proposición 5.12 del anexo, para $t_0 = 0$ se tiene que

$$\varphi_t(x) = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-s)} g(\varphi_s(x)) ds.$$

Esto, junto con la igualdad previa y (2.12), da lugar a

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \varphi_t(h(e^{-At}x)) - x = \\
&= e^{At}h(e^{-At}x) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(\varphi_s(h(e^{-At}x)))ds - x = \\
&= e^{At}\eta(e^{-At}x) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(h(e^{A(s-t)}x))ds = \\
&= e^{At}\eta(e^{-At}x) + \int_0^t e^{As}g(h(e^{-As}x))ds. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Volviendo a la desigualdad (2.18), se sigue que

$$\|P_s e^{At} \eta(e^{-At}x)\| \leq ce^{-\mu t} \|\eta\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Esto, junto con (2.22), da lugar a

$$P_s \eta(x) = \int_0^\infty P_s e^{As} g(h(e^{-As}x)) ds. \tag{2.23}$$

Por otra parte, tomando la tercera igualdad de (2.22) se tiene que

$$\eta(x) = e^{At}\eta(e^{-At}x) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(h(e^{A(s-t)}x))ds$$

es decir,

$$e^{-At}\eta(x) = \eta(e^{-At}x) + \int_0^t e^{-As}g(h(e^{A(s-t)}x))ds.$$

Así, sustituyendo x por $e^{At}x$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
e^{-At}\eta(e^{At}x) &= \eta(e^{-At}e^{At}x) + \int_0^t e^{-As}g(h(e^{A(s-t)}e^{At}x))ds = \\
&= \eta(x) + \int_0^t e^{-As}g(h(e^{As}x))ds. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

De forma análoga, por la desigualdad (2.18), se sigue que

$$\|P_u e^{-At} \eta(e^{At}x)\| \leq ce^{-\mu t} \|\eta\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty$$

y juntando esto con (2.24) se tendría que

$$P_u \eta(x) = - \int_0^\infty P_u e^{-As} g(h(e^{As}x)) ds. \tag{2.25}$$

Finalmente, sumando (2.23) y (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned}\eta(x) &= P_s\eta(x) + P_u\eta(x) = \\ &= \int_0^\infty P_s e^{As} g(h(e^{-As}x)) ds - \int_0^\infty P_u e^{-As} g(h(e^{As}x)) ds = \\ &= G(g \circ h)(x) = G(g_\eta)(x).\end{aligned}$$

Por tanto, se cumpliría que $G(g_\eta) = \eta$ como se requería. □

Paso 4: Construcción de la conjugación:

Hay que comprobar que la ecuación $G(g_\eta) = \eta$ admite solución única.

Lema 2.12. *Para un valor suficientemente pequeño de δ , existe una única función $\eta \in X_0$ que verifica $G(g_\eta) = \eta$.*

Demostración.

Se define $F(\eta) = G(g_\eta)$ en X_0 . Como $g_\eta \in X_0$ si $\eta \in X_0$, se cumple que $G(X_0) \subset X_0$, y por tanto, $F(X_0) \subset X_0$.

Si F es una contracción, como X_0 es un espacio métrico completo y $F(X_0) \subset X_0$, por el Teorema 5.18 del anexo, se tiene que existe un único $\eta \in X_0$ de forma que $F(\eta) = \eta$, es decir, existe un único $\eta \in X_0$ tal que $G(g_\eta) = \eta$.

Por lo tanto, basta con ver que F es una contracción.

Para todo $\eta, \xi \in X_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}F(\eta)(x) - F(\xi)(x) &= \int_{-\infty}^t P_s e^{A(t-s)} [g_\eta(e^{A(s-t)}x) - g_\xi(e^{A(s-t)}x)] ds \\ &\quad - \int_t^\infty P_u e^{A(t-s)} [g_\eta(e^{A(s-t)}x) - g_\xi(e^{A(s-t)}x)] ds\end{aligned}$$

y por (2.11) se sigue que

$$\|g_\eta(e^{A(s-t)}x) - g_\xi(e^{A(s-t)}x)\| \leq \delta \| \eta(e^{A(s-t)}x) - \xi(e^{A(s-t)}x) \| \leq \delta d(\eta, \xi).$$

Juntando lo anterior con (2.17) se sigue que

$$\begin{aligned}\|F(\eta)(x) - F(\xi)(x)\| &\leq \int_{-\infty}^t c e^{-\mu(t-s)} \delta d(\eta, \xi) ds + \int_t^\infty c e^{-\mu(t-s)} \delta d(\eta, \xi) ds = \\ &= 2c\delta d(\eta, \xi) \int_0^\infty e^{-\mu(t-s)} ds = \frac{2c\delta}{\mu} d(\eta, \xi).\end{aligned}$$

Por tanto, se cumple

$$d(F(\eta), F(\xi)) \leq \frac{2c\delta}{\mu} d(\eta, \xi)$$

y F es una contracción para un δ suficientemente pequeño.

□

Según el Lema 2.11, la función η definida en el Lema 2.12 satisface la condición establecida en (2.13). Solo faltaría ver que $h = Id + \eta$ es un homeomorfismo.

Paso 5: Verificación de la existencia de inversa:

Se comprobará que la función h es biyectiva y, por tanto, tiene inversa.

- Para demostrar que h es suprayectiva, se toma $y \in \mathbb{R}^n$.

Se observa que $x = y + z$ es solución de la ecuación $h(x) = y$ si y solo si se cumple que $z = -\eta(y + z)$.

Aplicando el teorema del punto fijo de Brower, Teorema 5.23 del anexo, a la función

$$z \rightarrow H(z) = -\eta(y + z)$$

en $\overline{B(0, \|\eta\|_\infty)}$, se obtiene que existe al menos un punto $z \in \overline{B(0, \|\eta\|_\infty)}$ que satisface $z = -\eta(y + z)$.

- Para demostrar que h es inyectiva, se toman $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $h(x) = h(y)$.

Como $h = Id + \eta$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, se cumple que $h(e^{At}x) = h(e^{At}y)$, es decir, $e^{At}(x - y) = -\eta(e^{At}x) + \eta(e^{At}y)$.

Si $P_s(x - y) \neq 0$ o $P_u(x - y) \neq 0$, entonces $e^{At}(x - y)$ no está acotado, mientras que $\eta(e^{At}x) + \eta(e^{At}y)$ sí que lo está, lo cuál da lugar a una contradicción.

En conclusión, se tiene que $P_s(x - y) = P_u(x - y) = 0$, y por lo tanto $x = y$.

Paso 6: Comprobación de la continuidad de la inversa:

Como la función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y biyectiva, por el teorema del dominio invariante, Teorema 5.24 del anexo, se tiene que h es homeomorfismo.

□

Teorema 2.13 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sea $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 y x_0 un punto crítico hiperbólico de $\dot{x} = X(x)$. Si $\varphi^t(z)$ y $\Psi^t(z)$ son, respectivamente, las soluciones de los problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(x) \\ x(0) &= z \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y} &= D_{x_0}X(y) \\ y(0) &= z \end{cases} \quad (2.26)$$

entonces existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$, donde U y $V = h(U)$ son entornos de x_0 y 0 respectivamente, tal que $h(x_0) = 0$ y

$$h(\varphi^t(z)) = \Psi^t(h(z)) \quad (2.27)$$

con $z, \varphi^t(z) \in U$.

Demostración.

Se asume sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$. Esto es posible debido a que, haciendo el cambio de variable $y = x - x_0$, la ecuación $\dot{x} = X(x)$ se transforma en $\dot{y} = X(y + x_0)$ con $X(x_0) = 0$. Por tanto, se toma $X(x) = Ax + g(x)$, siendo $A = D_{x_0}X$ una matriz hiperbólica, g de clase \mathcal{C}^1 y $g(0) = X(0) - A \cdot 0 = 0$.

Se pretende aplicar el Teorema 2.10; sin embargo, en este caso puede no verificarse la propiedad (2.11) si δ no es suficientemente pequeño, lo cual exige una modificación de la función g fuera de un entorno de 0 .

Como la función $x \rightarrow D_x g$ es continua y $D_0 g = 0$, dado $\delta > 0$ se puede tomar $r > 0$ tal que

$$\sup\{\|D_x g\| : x \in B(0, r)\} \leq \frac{\delta}{3}. \quad (2.28)$$

Al ser $g(0) = 0$, por el teorema del valor medio, Teorema 5.19 del anexo, se tiene que

$$\sup\{\|g(x)\| : x \in B(0, r)\} \leq \frac{\delta r}{3}. \quad (2.29)$$

Se considera la función auxiliar $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^∞ que verifica:

- $0 \leq \alpha(x) \leq 1$.
- $\alpha(x) = 1$ si $\|x\| \leq \frac{1}{2}$.
- $\alpha(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$.

A continuación, se define la función $\bar{g}(x)$ de la forma siguiente:

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) g(x) & \text{si } \|x\| \leq r \\ 0 & \text{si } \|x\| > r \end{cases}$$

La función $\bar{g}(x)$ es de clase \mathcal{C}^1 y verifica que:

- $\bar{g}(x) = g(x)$ para $\|x\| \leq \frac{r}{2}$.
- $\bar{g}(x) = 0$ para $\|x\| \geq r$.

La derivada de $\bar{g}(x)$ por la regla de la cadena es

$$D_x \bar{g}(x) = \alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) D_x g(x) + g(x) D_x \left[\alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \right].$$

Cada término de la derivada anterior se puede acotar como sigue:

- Como $\|D_x g(x)\| \leq \frac{\delta}{3}$ y $\alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \leq 1$ se tiene que

$$\left\| \alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) D_x g(x) \right\| \leq \frac{\delta}{3}.$$

- Como $\|g(x)\| \leq \frac{\delta r}{3}$ y $D_x \left[\alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \right]$ está acotada por $\frac{2}{r}$ (dado que $\alpha(x)$ es \mathcal{C}^∞), entonces

$$\left\| g(x) D_x \left[\alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \right] \right\| \leq \frac{\delta r}{3} \cdot \frac{2}{r} = \frac{2\delta}{3}.$$

Sumando ambos términos, se obtiene

$$\|D_x \bar{g}(x)\| \leq \frac{\delta}{3} + \frac{2\delta}{3} = \delta.$$

Por lo tanto, $\bar{g}(x)$ cumple las condiciones necesarias para aplicar el Teorema 2.10. Así, se obtiene un homeomorfismo $h = Id + \eta$ de forma que se cumple $h \circ e^{At} = \bar{\varphi}_t \circ h$, para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $\bar{\varphi}_t$ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \bar{g}(x) \\ \bar{g}(0) &= z \end{cases}$$

Finalmente, dado que \bar{g} coincide con g en la bola $B(0, \frac{r}{3})$, se tiene que $\varphi_t(z) = \bar{\varphi}_t(z)$ cuando $\|z\| < \frac{r}{3}$ y $\|\varphi_t(z)\| < \frac{r}{3}$.

□

Por ende, el teorema garantiza que los diagramas de fase de los sistemas (2.26) son homeomorfos en entornos de x_0 y 0, respectivamente. Esto quiere decir que el comportamiento del sistema no lineal cerca de puntos críticos hiperbólicos es el mismo que en el sistema lineal correspondiente.

Asimismo, cabe destacar que los Teoremas 2.10 y 2.13 también contemplan el caso en el que uno de los espacios, estable o inestable, coincide con todo \mathbb{R}^n , ya que no requieren que estos tengan dimensión positiva.

Ejemplo 2.14. Se consideran los sistemas $\dot{x} = Ax$ e $\dot{y} = By$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Se introduce un cambio de coordenadas mediante la transformación lineal invertible $H(x) = Rx$, donde

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geométricamente, H consiste en una rotación de 45° con un cambio de escala y es evidentemente un homeomorfismo.

Con este cambio se puede transformar el sistema $\dot{x} = Ax$ en el sistema equivalente $\dot{y} = By$, ya que se cumple que $B = RAR^{-1}$. Por ende, H transforma trayectorias del primer sistema en trayectorias del segundo, como se observa en la Figura 2.3, conservando la parametrización.

En particular, si $x(t) = e^{At}x_0$ es solución del sistema $\dot{x} = Ax$, entonces $y(t) = H(x(t)) = Re^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0$ es solución del sistema $\dot{y} = By$. Además, se cumple que $He^{At} = e^{Bt}H$.

Por lo que se comprueba que se verifica el Teorema de Hartman-Grobman ya que ambos sistemas son topológicamente equivalentes en un entorno del origen.

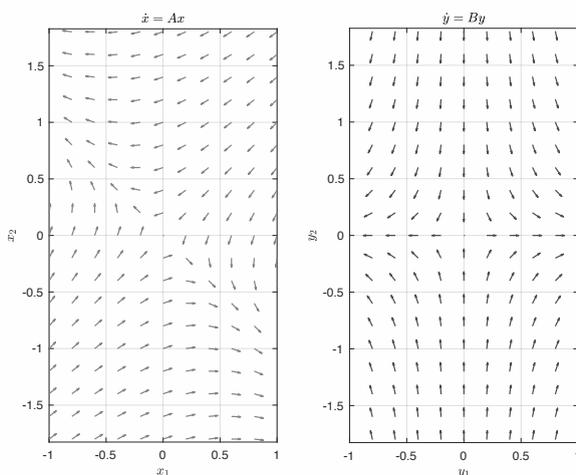


Figura 2.3: Diagramas de fase de los sistemas $\dot{x} = Ax$ e $\dot{y} = By$.

Este ejemplo ilustra cómo el Teorema de Hartman-Grobman se aplica para demostrar la equivalencia entre sistemas dinámicos lineales, proporcionando una herramienta fundamental para entender la relación entre sistemas lineales y no lineales en un entorno local.

Corolario 2.15. *Sea A una matriz $n \times n$ hiperbólica y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función acotada con $g(0) = 0$ y que verifica (2.11). Entonces*

- *si A tiene solo autovalores con parte real negativa y δ es suficientemente pequeño, el origen en la ecuación (2.13) es asintóticamente estable.*
- *si A tiene al menos un autovalor con parte real positiva y δ es suficientemente pequeño, el origen en la ecuación (2.13) es inestable.*

Demostración.

Como se cumplen todas las hipótesis del Teorema 2.10 se puede aplicar y se obtiene que $\varphi_t = h \circ e^{At} \circ h^{-1}$.

Si A tiene solo autovalores con parte real negativa, por el Teorema 5.13 del anexo, se sigue que $\|e^{At}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, como $h(0) = 0$, se tiene que el origen es asintóticamente estable.

De forma análoga, si A tiene al menos un autovalor con parte real positiva, se tiene que $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, y por tanto el origen sería inestable. □

Corolario 2.16. *Sea $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 y x_0 un punto crítico hiperbólico de $\dot{x} = X(x)$. Entonces*

- *si la matriz $D_{x_0}X$ tiene solo autovalores con parte real negativa, x_0 es asintóticamente estable.*
- *si la matriz $D_{x_0}X$ tiene al menos un autovalor con parte real positiva, x_0 es inestable.*

Demostración.

Bastaría con tomar la igualdad (2.27) y razonar de forma similar al corolario anterior. □

3. Comportamiento de las órbitas

Una vez realizada la clasificación de los distintos tipos de órbitas se profundizará en su comportamiento. Para ello, se desarrollarán los conceptos de conjuntos y ciclos límite que resultan clave para entender su dinámica. En general, estos términos pueden ser muy complejos; sin embargo, para los sistemas dinámicos bidimensionales, el Teorema de Poincaré-Bendixson ofrece una caracterización relativamente sencilla. En este caso se toman como base los libros [2], [5], [6] y [13].

Sea un punto $p \in E$, con $E \in \mathbb{R}^n$ y $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^r , con $r \geq 1$.

Definición 3.1. Los *conjuntos ω -límite* y *α -límite* de p se definen, respectivamente,

$$\omega(p) = \bigcap_{y \in \gamma(p)} \overline{\gamma^+(y)} \quad y \quad \alpha(p) = \bigcap_{y \in \gamma(p)} \overline{\gamma^-(y)}.$$

Definición 3.2. El conjunto formado por la unión de $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ se denomina *conjunto límite* de p .

Ejemplo 3.3. Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial con $X(x, y) = (x, -y)$.

Sea $p \in \mathbb{R}^2$,

- si $p = (0, 0)$, entonces se tiene que $\alpha(p) = \omega(p) = \{(0, 0)\}$.
- si $p \in \{(x, 0) : x \neq 0\}$, entonces se tiene que $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$ y $\omega(p) = \emptyset$.
- si $p \in \{(0, y) : y \neq 0\}$, entonces se tiene que $\omega(p) = \{(0, 0)\}$ y $\alpha(p) = \emptyset$.
- si $p \in \{(x, y) : xy \neq 0\}$, entonces se tiene que $\alpha(p) = \omega(p) = \emptyset$.

Ejemplo 3.4. Si γ es una órbita periódica, entonces $\gamma = \gamma^+ = \gamma^-$. Por lo tanto, para todo $p \in \gamma$, se cumple que $\omega(p) = \alpha(p) = \gamma$.

Sea $\gamma(p)$ la órbita de X que pasa por el punto p y sea q un punto en $\gamma(p)$, entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ de forma que $\varphi(t, p) = \varphi(t + c, q)$, por lo tanto $\omega(p) = \omega(q)$. Análogamente se tendría que $\alpha(p) = \alpha(q)$. Como resultado, el conjunto ω -límite (equivalentemente, α -límite) de una órbita γ se define como el conjunto $\omega(p)$ (equivalentemente, $\alpha(p)$) para algún $p \in \gamma$.

Asimismo, si se tiene que $\varphi(t, x)$ es la curva integral de un campo vectorial X en p , y $\phi(t, p)$ es la curva integral del campo vectorial $-X$ en p , entonces $\phi(t, p) = \varphi(-t, p)$. Esto implica que el conjunto ω -límite de ϕ coincide con el conjunto α -límite de φ . Gracias a esto, generalmente se estudian solo los conjuntos ω -límite, en lugar de ambos.

A continuación, se establecen varias propiedades de los conjuntos límite importantes para la posterior demostración del Teorema de Poincaré-Bendixson.

Proposición 3.5. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Si la semiórbita positiva de x , $\gamma^+(x)$, está acotada, entonces:*

- a) *El conjunto ω -límite de x , $\omega(x)$, es no vacío, compacto y conexo.*
- b) *Se tiene que $y \in \omega(x)$ si y solo si existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$ cuando $k \rightarrow \infty$.*
- c) *$\omega(x)$ es un conjunto positivamente invariante, es decir, para todo $y \in \omega(x)$ y $t > 0$ se cumple que $\varphi^t(y) \in \omega(x)$.*

Demostración.

Para demostrar la proposición se verificará, en el siguiente orden, que el conjunto $\omega(x)$ es no vacío, compacto, cumple la propiedad indicada en el apartado b), es conexo y positivamente invariante.

- $\omega(x)$ es no vacío y compacto:

Como por definición $\omega(x)$ es intersección de conjuntos compactos encajados no vacíos, se deduce directamente que $\omega(x)$ es un conjunto compacto y no vacío.

- Para demostrar que se cumple la propiedad del apartado b) se comprueban ambas implicaciones.

Dado que por hipótesis $\gamma^+(x)$ está acotada, aplicando el Teorema 5.14 del anexo, se tiene que $\mathbb{R}^+ \subset I_x$. Por lo tanto,

$$\omega(x) = \bigcap_{t>0} A_t \tag{3.1}$$

donde $A_t = \overline{\{\varphi^s(x) : s > t\}}$.

Así, si $y \in \omega(x)$, cualquier sucesión $t_k \rightarrow \infty$ cumple que $y \in A_{t_k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Entonces, existe una sucesión $s_k \rightarrow \infty$, con $s_k \geq t_k$ para $k \in \mathbb{N}$, tal que $\varphi^{s_k}(x) \rightarrow y$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Por otra parte, si existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $y \in A_{t_k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, como $A_t \subset A_{t'}$ si $t > t'$, se tiene que $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{t_k} = \bigcap_{t>0} A_t$.

- $w(x)$ es conexo:

Si no lo fuera, por definición de conexión existen conjuntos no vacíos A y B tales que $\omega(x) = A \cup B$ y $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

Como $\omega(x)$ es cerrado, se cumple que

$$\overline{A} = \overline{A} \cap \omega(x) = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A$$

y, análogamente, $\overline{B} = B$. Por lo tanto, A y B son cerrados. Además, A y B son compactos por ser subconjuntos cerrados del compacto $\omega(x)$.

Como A y B son compactos y disjuntos están a distancia positiva, es decir,

$$\delta := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0.$$

Se define el conjunto

$$C = \{z \in \mathbb{R}^2 : d(z, \omega(x)) \geq \frac{\delta}{4}\}.$$

Dado que la función distancia es continua, el conjunto C es cerrado porque es la preimagen de un conjunto cerrado bajo una función continua. Además, como K es compacto, y la intersección de un conjunto cerrado con un compacto es compacta, $C \cap K$ es compacto.

Además, $C \cap K$ es no vacío, ya que, de lo contrario, todos los puntos de K estarían a una distancia menor que $\frac{\delta}{4}$ de $\omega(x)$, lo cual contradice la definición de C .

Aplicando la propiedad b), se obtiene que $C \cap K \cap \omega(x) \neq \emptyset$. Sin embargo, esto contradice la definición de C .

Por tanto, se llega a una contradicción y se puede concluir que $\omega(x)$ es conexo.

- $\omega(x)$ es positivamente invariante, es decir, dado $y \in \omega(x)$ hay que probar que $\varphi^t(y) \in \omega(x)$ para $t > 0$.

Por la propiedad b), si $y \in \omega(x)$ entonces existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Como φ es continua, la sucesión $\varphi^t(\varphi^{t_k}(x)) \rightarrow \varphi^t(y)$ cuando $k \rightarrow \infty$. Y por definición de flujo, $\varphi^t(\varphi^{t_k}(x)) = \varphi^{t+t_k}(x)$. Por tanto, $\varphi^{t+t_k}(x) \rightarrow \varphi^t(y)$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Finalmente, como $t_k + t \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, por la segunda propiedad se tiene que $\varphi^t(y) \in \omega(x)$.

□

Se puede obtener un resultado para semiórbitas negativas acotadas de forma análoga.

Proposición 3.6. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Si la semiórbita negativa de x , $\gamma^-(x)$, está acotada, entonces:*

- El conjunto α -límite de x , $\alpha(x)$, es no vacío, compacto y conexo.*
- Se tiene que $y \in \alpha(x)$ si y solo si existe una sucesión $t_k \rightarrow -\infty$ tal que $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$ cuando $k \rightarrow \infty$.*
- $\alpha(x)$ es un conjunto negativamente invariante, es decir, para todo $y \in \alpha(x)$ y $t < 0$ se cumple que $\varphi^t(y) \in \alpha(x)$.*

Demostración.

Se define la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que $g(x) = -X(x)$.

Dado que la solución de la ecuación $\dot{x} = X(x)$ con $x(0) = x_0$ es $\varphi^t(x_0)$ para t en el intervalo maximal $I_{x_0} = (a, b)$, entonces

$$\frac{d}{dt}\varphi^{-t}(x_0) = -X(\varphi^{-t}(x_0))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $-t \in I_{x_0}$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación $\dot{x} = g(x)$ con $x(0) = x_0$ será $\Phi^t(x_0) = \varphi^{-t}(x_0)$ para $t \in (-b, -a)$.

Esto implica que $\gamma_g(x) = \gamma_X(x)$ y $\gamma_g^+(x) = \gamma_X^-(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\alpha_X(x) = \bigcap_{y \in \gamma_X(x)} \overline{\gamma_X^-(y)} = \bigcap_{y \in \gamma_g(x)} \overline{\gamma_g^+(x)} = \omega_g(x).$$

Si se asume que la semiórbita negativa $\gamma_X^-(x)$ está acotada, como $\gamma_g^+(x) = \gamma_X^-(x)$, por la Proposición 3.5 se tiene que

- el conjunto ω_g -límite de x , $\omega_g(x)$, es compacto, no vacío y conexo.
- $y \in \omega_g(x)$ si y solo si existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\Phi^{t_k}(x) \rightarrow y$ cuando $k \rightarrow \infty$.
- $\omega_g(x)$ es un conjunto positivamente invariante, es decir, para todo $y \in \omega_g(x)$ y $t > 0$, se cumple que $\Phi^t(y) \in \omega_g(x)$.

Finalmente, como $\Phi^t = \varphi^{-t}$ y $\alpha_X(x) = \omega_g(x)$, se obtiene el resultado requerido. \square

3.1. Aplicación de Poincaré

La aplicación de Poincaré es fundamental en el estudio de sistemas dinámicos, ya que permite transformar un sistema continuo en uno discreto al seleccionar los puntos de intersección con una transversal. Para esta sección se han consultado los libros [5] y [11] como fuentes de referencia.

Sea A un intervalo abierto, $E \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y $X : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^r , con $r \geq 1$.

Definición 3.7. Una aplicación $f : A \rightarrow E$ de clase \mathcal{C}^r se llama **sección local transversal** de X si $f'(a)$ es linealmente independiente de $X(f(a))$ para todo $a \in A$.

Definición 3.8. Si $f : A \rightarrow \Sigma$ es un homeomorfismo, siendo $\Sigma = f(A)$ con la topología inducida, se dice que Σ es una **sección transversal** de X .

Es decir, Σ es una sección local transversal de X (o Σ es transversal a X) si, para cada $x \in \Sigma$, las direcciones de Σ y $X(f(x))$ generan el espacio \mathbb{R}^2 . No obstante, podría ocurrir que una sección local transversal no sea una sección transversal, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. Se considera el campo vectorial $X(x, y) = (x, y)$ y la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

La derivada de f es $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ y el campo evaluado en la imagen de f es $X(f(t)) = X(\cos(t), \sin(t)) = (\cos(t), \sin(t))$. Dado que $f'(t)$ y $X(f(t))$ son linealmente independientes para todo $t \in \mathbb{R}$, f es una sección local transversal.

Por otro lado, la imagen de f es la circunferencia unidad, por lo que f no es un homeomorfismo de \mathbb{R} sobre \mathbb{R}^2 y, por ende, no es una sección transversal.

El siguiente teorema establece que, en torno a un punto regular de un campo vectorial, es posible encontrar una transformación que convierte las trayectorias del sistema en líneas rectas.

Teorema 3.10 (Teorema de rectificación de flujo). *Sea p un punto regular de un campo vectorial $X : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase \mathcal{C}^r con $r \geq 1$, y sea $f : A \rightarrow \Sigma$ una sección transversal de X de clase \mathcal{C}^r , tal que $f(0) = p$ y $\Sigma = f(A)$. Entonces, existe un entorno V de p en E , un difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de clase \mathcal{C}^r , con $\varepsilon > 0$, y B un intervalo abierto centrado en el origen, de forma que se verifica:*

a) $h(\Sigma \cup V) = \{0\} \times B$.

b) h es una \mathcal{C}^r -conjugación entre $X|_V$ y el campo vectorial $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$, siendo $Y = (1, 0)$.

Demostración.

Dado el flujo $\varphi : \Omega \rightarrow E$ del campo X , se define la función $F : \Omega_A \rightarrow E$, donde $\Omega_A = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times A : (t, f(u)) \in \Omega\}$, mediante la expresión $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$. Así, F transforma líneas paralelas en curvas integrales de X .

Para ver que F es un difeomorfismo en el origen, bastará con demostrar que $DF(0)$ es un isomorfismo y aplicar el teorema de la función inversa, Teorema 5.5 del anexo.

Como $\varphi(0, f(u)) = f(u)$ para todo $u \in A$, se tiene que

$$D_1F(0) = \frac{d}{dt}\varphi(t, f(0))|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p)$$

y

$$D_2F(0) = \frac{d}{du}\varphi(0, f(u))|_{u=0} = \frac{d}{du}f(u)|_{u=0} = Df(0).$$

Por tanto, como los vectores $X(p)$ y $Df(0)$ generan \mathbb{R}^2 , por ser p un punto regular y f la sección transversal, se concluye que $DF(0)$ es un isomorfismo.

Aplicando el teorema de la función inversa, Teorema 5.5 del anexo, se deduce que existe un $\varepsilon > 0$ y un entorno $B \subset \mathbb{R}$ alrededor del origen, de forma que la restricción $F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ es un difeomorfismo sobre el conjunto abierto $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$.

Sea $h = (F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B})^{-1}$, como se muestra en la Figura 3.1. Como $F(0, u) = \varphi(0, f(u)) = f(u) \in \Sigma$ para todo $u \in B$, entonces $h(\Sigma \times V) = \{0\} \times B$.

Por otra parte, como para todo $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ se tiene que

$$\begin{aligned} Dh_{(t,u)}^{-1}Y(t, u) &= DF_{(t,u)}(1, 0) = D_1F(t, u) = \frac{d}{dt}F(t, u) = \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(t, f(u)) = X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)), \end{aligned}$$

por la Proposición 1.30 se tiene que h^{-1} conjugua X e Y .

□

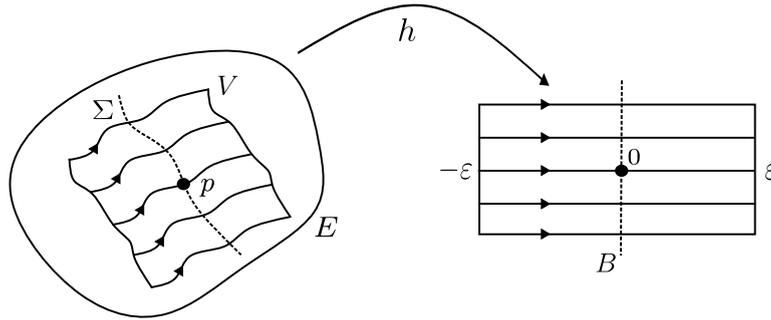


Figura 3.1: Aplicación h del teorema de rectificación de flujo.

Sea L_0 una órbita periódica de $\dot{x} = X(x)$ y $x_0 \in L_0$. Se incorpora una sección transversal Σ al ciclo L_0 en x_0 . Así, el ciclo L_0 puede interpretarse como una órbita que comienza en un punto de Σ y regresa al mismo punto ($x_0 \in \Sigma$).

Por el teorema de existencia y unicidad de (1.1), Teorema 5.8 del anexo, las trayectorias dependen de los valores iniciales. Así, una órbita que comienza en un punto $x \in \Sigma$, cercano a x_0 , regresará a Σ en un punto cercano a x_0 . Esto garantiza que las soluciones próximas a L_0 mantengan la transversalidad con Σ .

De esta forma, se construye la aplicación $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definida por $P(x) = \tilde{x}$, como se puede observar en la Figura 3.2.

Definición 3.11. La aplicación P asociada al ciclo L_0 se denomina **aplicación de Poincaré**.

Dado que el sistema dinámico a partir del que se define la aplicación de Poincaré es invertible, la aplicación también lo es. La aplicación $P^{-1} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ se construye siguiendo las órbitas que cruzan Σ hacia atrás en el tiempo, hasta la siguiente intersección con la sección transversal.

Es importante señalar que, dado que el punto x_0 cumple $P(x_0) = x_0$, es un punto fijo de la aplicación de Poincaré. Esto es debido a que las propiedades del sistema cercanas a L_0 se reflejan en P .

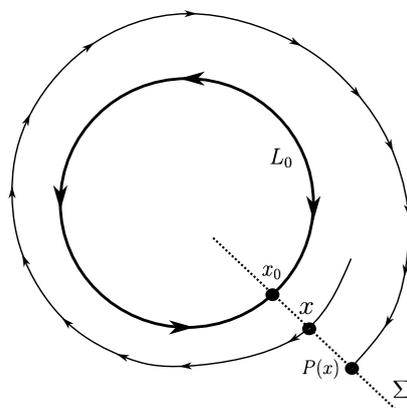


Figura 3.2: Comportamiento local cerca de un ciclo.

3.2. Ciclos límite

En términos generales identificar ciclos límite puede ser muy complejo. Algunos ejemplos cotidianos de su aplicación incluyen el estudio de células cancerígenas del páncreas, modelos depredador-presa, circuitos eléctricos... los cuales se pueden consultar en los libros [6] y [9]. Para el desarrollo de la sección han sido de utilidad los libros [5], [8] y [13].

Definición 3.12. Un **ciclo límite** L_0 de un sistema plano es una órbita periódica tal que, si existe un entorno V de L_0 , V no contiene ningún otro ciclo aparte de L_0 .

También se puede dar otra definición de ciclo límite en el contexto de los conjuntos límites como sigue:

Definición 3.13. Un **ciclo límite** L_0 de un sistema plano es una órbita periódica que se corresponde con el α -límite u ω -límite de otra órbita distinta de L_0 .

A continuación, se dará una definición que permitirá agrupar los puntos dependiendo de su ubicación respecto al ciclo. Esto será de gran utilidad para la posterior clasificación de los ciclos límite.

Definición 3.14. Si se considera una órbita periódica γ en el plano, entonces

- El conjunto de puntos que pertenecen a la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ se denominan **exterior** de γ , $Ext(\gamma)$.
- El conjunto de puntos que pertenecen a la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ se denominan **interior** de γ , $Int(\gamma)$.

Así, los ciclos límites en el plano pueden ser:

- **Estables:** si $\omega(q) = L_0$ para todo $q \in V$.
- **Inestables:** si $\alpha(q) = L_0$ para todo $q \in V$.
- **Semiestables:** si $\omega(q) = L_0$ para todo $q \in V \cap Ext(\gamma)$ y $\alpha(q) = L_0$ para todo $q \in V \cap Int(\gamma)$, o viceversa.

Asimismo, se puede obtener una clasificación equivalente con el empleo de la aplicación de Poincaré P . Esto es debido a que, al ser L_0 un ciclo límite, el punto x_0 será un punto fijo aislado. En este caso, tenemos que un ciclo límite es:

- **Estable** $\iff |P(x) - x_0| < |x - x_0|$ para todo $x \in \Sigma \setminus \{x_0\}$ suficientemente cerca.
- **Inestable** $\iff |P(x) - x_0| > |x - x_0|$ para todo $x \in \Sigma \setminus \{x_0\}$ suficientemente cerca.
- **Semiestable** $\iff |P(x) - x_0| < |x - x_0|$ para todo $x \in \Sigma \cap Ext(\gamma) \setminus \{x_0\}$ suficientemente cerca y $|P(x) - x_0| > |x - x_0|$ para todo $x \in \Sigma \cap Int(\gamma) \setminus \{x_0\}$ suficientemente cerca, o viceversa.

En definitiva, un ciclo límite se considera estable cuando las trayectorias cercanas se aproximan a él a medida que el tiempo tiende a infinito. En cambio, si esta aproximación ocurre cuando el tiempo tiende a menos infinito, se clasifica como inestable. Por otro lado, se habla de semiestabilidad si ambas situaciones ocurren simultáneamente.

3.3. Teorema de Poincaré-Bendixson

En esta sección se muestra uno de los teoremas más importantes de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos planos: el Teorema de Poincaré-Bendixson. Dicho teorema permite establecer un criterio para detectar la existencia de órbitas periódicas. No obstante, no se puede extender más allá del plano, ya que el teorema de la curva de Jordan resulta imprescindible para su demostración y no se cumple en dimensiones mayores. Las principales referencias serán los libros [2], [6] y [12].

Una **sucesión** de puntos x_0, x_1, \dots se dice que es **monótona a lo largo de una trayectoria** si $\varphi^{t_n}(x_0) = x_n$ con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$, es decir, si los puntos están ordenados temporalmente según la evolución del flujo φ^t . Por otro lado, se dice que

es **monótona a lo largo de un segmento** si $x_n - x_0$ es un múltiplo no negativo de $x_1 - x_0$ para $n \geq 2$, es decir, si x_n está entre x_{n-1} y x_{n+1} en el orden natural del segmento, para $n \geq 1$.

Cuando un segmento interseca con una trayectoria, puede generar una sucesión de puntos que sean monótonos en la curva pero no en el segmento, como se muestra en la Figura 3.3, o viceversa. No obstante, si el segmento es una transversal al campo, esto no puede ocurrir, como se muestra en la siguiente proposición.

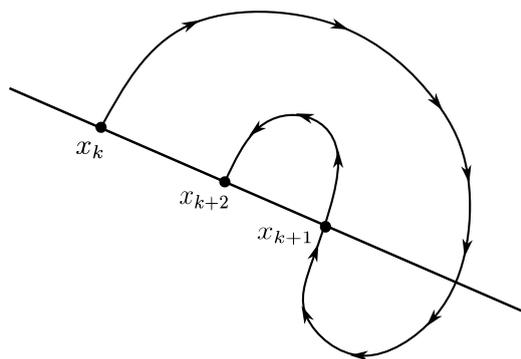


Figura 3.3: Sucesión monótona de una trayectoria.

Proposición 3.15. *Sea Σ una transversal a X y sean x_0, x_1, \dots una sucesión de puntos distintos de Σ que pertenecen a la misma trayectoria γ . Si la sucesión es monótona a lo largo de γ , entonces también es monótona a lo largo de Σ .*

Demostración.

Para la demostración basta con considerar tres puntos x_0, x_1, x_2 , el caso general es análogo.

Se traza C una curva cerrada y simple, formada por el segmento de órbita entre x_0 y x_1 , y el segmento T de la transversal que los une. Por el teorema de la curva de Jordan, Teorema 5.22 del anexo, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ genera dos componentes conexas, una acotada (la coloreada de gris en la Figura 3.4) y otra no. A la componente conexa acotada se la denotará D .

Se demostrará el caso en que la trayectoria de x_1 sale de D , como se muestra en la Figura 3.4. Si la trayectoria entrase se seguiría un razonamiento similar.

En cualquier punto de T , la trayectoria cruza la sección de forma transversal al flujo. Por lo tanto, al cruzar el borde de D , la trayectoria debe necesariamente entrar o salir de D .

Sea $T^- \subset T$ el conjunto de puntos donde las trayectorias salen de D y T^+ aquellos que entran. Como T^- y T^+ son subconjuntos abiertos, disjuntos y $T = T^+ \cup T^-$, la

conexión de T implica que T^+ es vacío. Es decir, ninguna trayectoria entra en D al cruzar T .

Además, las trayectorias no pueden cruzar γ en sentido contrario debido a la unicidad de las soluciones. Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus D$ es positivamente invariante, ya que, una vez fuera de D , las trayectorias permanecen allí.

Dado que x_2 es la siguiente intersección de γ con Σ , y γ no puede regresar a D , necesariamente $x_2 \in \Sigma \setminus T$. Esto implica que x_2 está en el segmento de Σ que sigue a x_1 , respetando la monotonía inducida por γ .

Finalmente, se puede concluir que x_1 se encuentra entre x_0 y x_2 . Por ende, la sucesión x_0, x_1, x_2 es monótona en Σ .

□

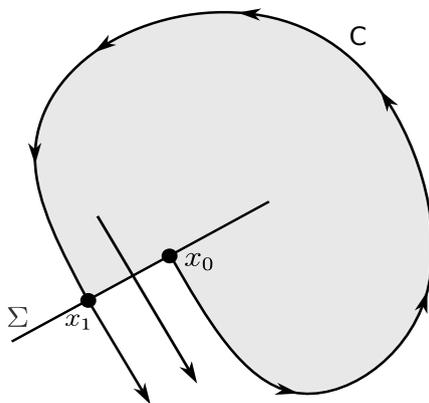


Figura 3.4: Posible configuración de la curva C .

Proposición 3.16. *Dado $x \in \mathbb{R}^2$ y Σ una transversal a X , la intersección $\omega(x) \cap \Sigma$ contiene como máximo un único punto.*

Demostración.

Si $\omega(x) \cap \Sigma = \emptyset$, el resultado es evidente. Por lo tanto, se supone que $\omega(x) \cap \Sigma \neq \emptyset$ y se considera un punto $q \in \omega(x) \cap \Sigma$.

Como $q \in \omega(x)$, por la Proposición 3.5, existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow q$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Dado que Σ es transversal al campo X , se puede aplicar el Teorema 3.10 de rectificación de flujo. Así, cualquier punto y suficientemente cercano a Σ cumple que $\varphi^t(y)$ cruza Σ en un tiempo positivo $t > 0$ o negativo $t < 0$, dependiendo de la dirección del flujo.

En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, se define $x_k = \varphi^{t_k + s_k}(x) \in \Sigma$, siendo s_k el tiempo necesario para que el flujo cruce nuevamente Σ tras $\varphi^{t_k}(x)$. De esta forma, se obtiene una sucesión de puntos x_k en Σ .

Por la Proposición 3.15, la sucesión $(x_k)_k$ es monótona y solo puede haber un punto de acumulación, lo que demuestra que $\omega(x) \cap \Sigma = \{q\}$.

□

Teorema 3.17 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 y la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$. Si para un punto $x \in \mathbb{R}^2$ su semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ está acotada y $\omega(x)$ no contiene puntos singulares, entonces $\omega(x)$ es una órbita periódica.*

Demostración.

Como la semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ está acotada, por la Proposición 3.5 se tiene que el conjunto límite $\omega(x)$ es no vacío, compacto y conexo. Por lo tanto, se puede elegir un punto $p \in \omega(x)$.

Aplicando nuevamente la Proposición 3.5, se tiene que el conjunto $\omega(p)$ también es no vacío y $\omega(p) \subset \omega(x)$. Por tanto, se puede tomar un punto $q \in \omega(p)$.

Dado que, por hipótesis, $\omega(x)$ no contiene puntos singulares y $\omega(p) \subset \omega(x)$, existe una transversal Σ a X de forma que $q \in \Sigma$.

Como $q \in \omega(p)$, nuevamente por la Proposición 3.5, existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\varphi^{t_k}(p) \rightarrow q$ cuando $k \rightarrow \infty$. Además, dado que $p \in \omega(x)$, se tiene que $\varphi^{t_k}(p) \in \omega(x)$ para $k \in \mathbb{N}$.

Siguiendo un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 3.16, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $\varphi^{t_k}(p) \in \Sigma$ para $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\varphi^{t_k}(p) \in \omega(p) \cap \Sigma$. Así, por la Proposición 3.16, se tiene que $q = \varphi^{t_k}(p)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $\gamma(p)$ es una órbita periódica y $\gamma(p) \subset \omega(x)$.

Si se comprueba que $\omega(x) = \gamma(p)$, se tendría que $\omega(x)$ es una órbita periódica, ya que $\gamma(p)$ lo es.

Se supondrá $\omega(x) \setminus \gamma(p) \neq \emptyset$. Esto implica que existen puntos en $\omega(x)$ que no pertenecen a la órbita periódica $\gamma(p)$.

Como $\omega(x)$ es un conjunto conexo y $\gamma(p) \subset \omega(x)$, cualquier entorno de $\gamma(p)$ contiene puntos de $\omega(x)$ que no pertenecen a $\gamma(p)$. En particular, se puede tomar un punto $z \in \omega(x) \setminus \gamma(p)$.

Como $\gamma(p) \subset \omega(x)$ y $\omega(x)$ no contiene puntos singulares, existe una transversal Σ' de X que interseca tanto $\gamma(p)$ como $\omega(x)$ en un entorno de z . Por ende, hay al menos dos puntos en $\omega(x) \cap \Sigma'$, uno perteneciente a $\gamma(p)$ y otro a $\omega(x) \setminus \gamma(p)$. Sin embargo, esta situación contradice la Proposición 3.16. Entonces se concluye que $\omega(x) = \gamma(x)$.

□

Al igual que en la primera sección del capítulo, se puede dar un resultado análogo para semiórbitas negativas acotadas.

Corolario 3.18. *Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 y la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$. Si para un punto $x \in \mathbb{R}^2$ su semiórbita negativa $\gamma^-(x)$ está acotada y $\alpha(x)$ no contiene puntos singulares, entonces $\alpha(x)$ es una órbita periódica.*

Demostración.

Se define la función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de forma que $g(x) = -X(x)$. Siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la demostración de la Proposición 3.6, se obtiene que $\gamma_g^+(x) = \gamma_X^-(x)$ y $\alpha_X(x) = \omega_g(x)$, para $x \in \mathbb{R}^2$.

Por último, aplicando el Teorema 3.17 de Poincaré-Bendixson se concluye el resultado de forma inmediata. □

También existe una versión más general del Teorema de Poincaré-Bendixson:

Teorema 3.19. *Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 y la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$. Si para un punto $x \in \mathbb{R}^2$ su semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ está acotada y existe un número finito de singularidades, entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones:*

- $\omega(x)$ es una órbita periódica.
- $\omega(x)$ es un punto singular.
- $\omega(x)$ está formada por conjunto de puntos singulares y órbitas, cada una de ellas tendiendo a un punto singular.

Demostración.

Se pueden distinguir tres casos posibles para $\omega(x)$:

- Si $\omega(x)$ no contiene puntos singulares: por el Teorema 3.17 se obtiene directamente que $\omega(x)$ es una órbita periódica.
- Si $\omega(x)$ no contiene puntos regulares: como $\omega(x)$ es conexo, por la Proposición 3.5, y hay un número finito de singularidades, entonces $\omega(x)$ es un punto singular.
- Si $\omega(x)$ contiene tanto puntos singulares como regulares: sea ϕ una órbita formada únicamente por puntos regulares contenida en $\omega(x)$. Si $\omega(\phi)$ contiene algún punto regular q , se puede tomar una transversal Σ al campo X que

pase por q . Como $\phi \subset \omega(x)$, aplicando la Proposición 3.16, se tiene que ϕ interseca a Σ en un único punto. Así, aplicando el Teorema 3.17 se tiene que ϕ es una órbita periódica y, por ende, $\omega(x) = \phi$. Sin embargo, esto es una contradicción, ya que $\omega(x)$ contiene puntos singulares. Por lo tanto, $\omega(\phi)$ es un punto singular.

□

Finalmente, se presenta un ejemplo que destaca la relevancia de la hipótesis del teorema en relación con la finitud de las singularidades.

Ejemplo 3.20. *Sea X un campo vectorial definido en la esfera S^2 . Este sistema cumple que:*

- *Los polos norte y sur, N y S , son singularidades del campo vectorial.*
- *El ecuador forma una órbita cerrada.*
- *Las trayectorias restantes nacen en los polos y mueren en el ecuador.*

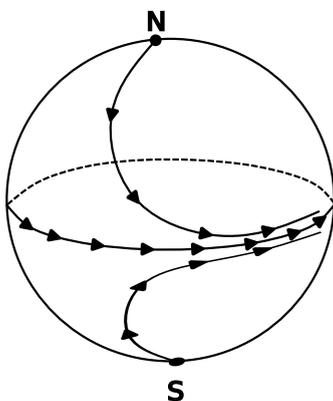


Figura 3.5: Representación del campo vectorial en S^2 .

Para modificar este campo se define una función $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es C^∞ , no negativa y se anula exactamente sobre el ecuador.

Con esta función, se construye un nuevo campo vectorial dado por $Y = \varphi \circ X$, donde se tiene que:

- *Cada punto del ecuador se convierte en una singularidad.*
- *Las trayectorias que no están ni en los polos ni en el ecuador tienen como conjunto ω -límite al ecuador completo.*

Entonces, para cualquier punto p que no esté ni en los polos ni en el ecuador, su trayectoria es forzada a aproximarse al ecuador. Dado que el ecuador está compuesto ahora por un número infinito de singularidades, el conjunto ω -límite de p no puede ser un único punto o subconjunto del ecuador. Por lo tanto, el ω -límite de p es el ecuador completo.

Este ejemplo muestra que el Teorema de Poincaré-Bendixson no es válido sin la hipótesis de un número finito de singularidades. En este caso, el ecuador contiene un número infinito de singularidades, lo que incumple dicha condición.

4. Bifurcaciones

El estudio de las bifurcaciones es una herramienta clave para analizar el comportamiento de los sistemas dinámicos al modificar los parámetros. En ellas, se representan alteraciones topológicas en la dinámica del sistema, lo que permite comprender la estructura global del sistema y los cambios cualitativos que pueden surgir al variar los parámetros. Este tema no se tratará en profundidad, ya que excedería el propósito del trabajo, simplemente se llevará a cabo una introducción. Para su estudio se han empleado como fuente de referencia los libros [7], [11] y [13].

Un sistema dinámico dependiente de parámetros se describe mediante la ecuación

$$\dot{x} = X(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m,$$

donde x son las variables del sistema y μ los parámetros.

Cuando el diagrama de fases de un sistema experimenta un cambio topológico debido a la variación de sus parámetros, se produce una **bifurcación**. Este fenómeno ocurre en valores específicos de los parámetros denominados **puntos de bifurcación**.

Definición 4.1. *Un **estrato** es el conjunto de parámetros en los que el sistema tiene diagramas de fase topológicamente equivalentes entre sí.*

Es decir, dentro de un estrato, los comportamientos cualitativos del sistema no cambian. De esta forma, se pueden agrupar todos los estratos en una estructura más general.

Definición 4.2. *El **diagrama paramétrico** es el conjunto de todos los posibles estratos.*

Al combinar este diagrama con los diagramas de fase, se obtiene una representación completa del comportamiento del sistema.

Definición 4.3. *El **diagrama de bifurcación** es la combinación del diagrama paramétrico junto con sus diagramas de fase.*

Las bifurcaciones que se observan en entornos pequeños de puntos de equilibrio se conocen como **bifurcaciones locales**. Aquellas que no se pueden observar en estos entornos se consideran **bifurcaciones globales**. Aunque algunas bifurcaciones globales pueden incluir bifurcaciones locales, si se tiene en cuenta únicamente las locales se obtendría información parcial del sistema.

4.1. Bifurcaciones en el caso unidimensional

La consideración de bifurcaciones de campos vectoriales en el caso unidimensional es un recurso de gran utilidad para familiarizarse con el concepto. En este contexto, se presentarán los tres ejemplos más simples y representativos: la bifurcación silla-nodo, la bifurcación transcítica y la bifurcación de pitchfork.

Todos los ejemplos analizados se corresponden con un sistema de la forma $\dot{x} = X(x, \mu)$, donde $x \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ actúa como parámetro de bifurcación.

Ejemplo 4.4 (Bifurcación silla-nodo). *Se considera el sistema*

$$\dot{x} = \mu - x^2.$$

Los puntos de equilibrio se determinan resolviendo $X(x, \mu) = 0$, es decir, $x^2 = \mu$. Por lo tanto, sus puntos de equilibrio son $x = \pm\sqrt{\mu}$.

A continuación, se analizan los distintos casos en función del parámetro μ :

- *Si $\mu > 0$ hay dos puntos de equilibrio, en $x = \pm\sqrt{\mu}$. Como $DX(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mp 2\sqrt{\mu}$, entonces el punto $x = \sqrt{\mu}$ es estable, mientras que el punto $x = -\sqrt{\mu}$ es inestable.*
- *Si $\mu = 0$ solo hay un punto de equilibrio, en $x = 0$. Como $DX(0, 0) = 0$, entonces $x = 0$ es un punto crítico no hiperbólico.*
- *Si $\mu < 0$ no hay puntos críticos, ya que $x^2 = \mu$ no tiene soluciones reales.*

El valor crítico de bifurcación es $\mu = 0$, ya que se produce una transición cualitativa en el número de puntos de equilibrio. Este comportamiento se ilustra en el diagrama de la bifurcación mostrado en la Figura 4.1, el cual está dividido en tres estratos: $\{\mu > 0\}$, $\{\mu = 0\}$ y $\{\mu < 0\}$.

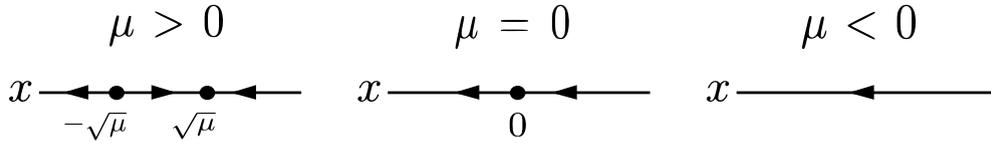


Figura 4.1: Diagrama de bifurcación del sistema $\dot{x} = \mu - x^2$.

Ejemplo 4.5 (Bifurcación transcítica). *Se considera el sistema*

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

En este caso, los puntos de equilibrio se corresponden con los valores donde $\mu x - x^2 = 0$, es decir, en $x = 0$ y $x = \mu$.

En función del valor del parámetro μ se tiene que:

- *Si $\mu > 0$ hay dos puntos de equilibrio, en $x = 0$ y $x = \mu$. Como $DX(0, \mu) = \mu > 0$, entonces el punto $x = 0$ es inestable. Sin embargo, $DX(\mu, \mu) = -\mu < 0$, por lo que el punto $x = \mu$ es estable.*
- *Si $\mu = 0$ solo hay un punto de equilibrio, en $x = 0$. Como $DX(0, 0) = 0$, entonces $x = 0$ es un punto crítico no hiperbólico.*
- *Si $\mu < 0$ hay dos puntos de equilibrio, en $x = 0$ y $x = \mu$. Como $DX(0, \mu) = \mu < 0$, entonces el punto $x = 0$ es estable. Sin embargo, $DX(\mu, \mu) = -\mu > 0$, por lo que el punto $x = \mu$ es inestable.*

Nuevamente, el valor crítico de bifurcación es $\mu = 0$, ya que se produce una transición cualitativa en el número de puntos de equilibrio. Este comportamiento se ilustra en el diagrama de la bifurcación mostrado en la Figura 4.2, el cual está dividido en tres estratos: $\{\mu > 0\}$, $\{\mu = 0\}$ y $\{\mu < 0\}$.

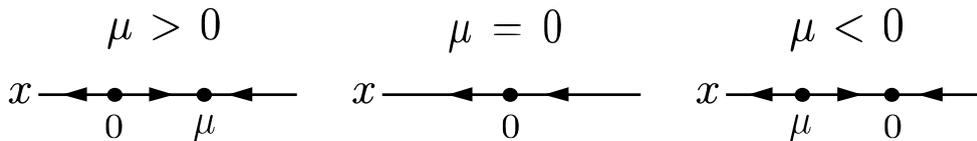


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación del sistema $\dot{x} = \mu x - x^2$.

Ejemplo 4.6 (Bifurcación de pitchfork). *Se considera el sistema*

$$\dot{x} = \mu x - x^3.$$

Los puntos de equilibrio se corresponden con los valores donde $\mu x - x^3 = 0$, es decir, en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\mu}$.

Dependiendo del valor del parámetro μ se tiene que:

- Si $\mu > 0$ hay tres puntos de equilibrio, en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\mu}$. Como $DX(0, \mu) = \mu > 0$, entonces el punto $x = 0$ es inestable. Sin embargo, $DX(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu < 0$, por lo que los puntos $x = \pm\sqrt{\mu}$ son estables.
- Si $\mu \leq 0$ solo hay un punto de equilibrio, en $x = 0$. Como $DX(0, 0) = 0$, entonces $x = 0$ es un punto crítico no hiperbólico.

El valor crítico de bifurcación es $\mu = 0$, ya que se produce una transición cualitativa en el número de puntos de equilibrio. Este comportamiento se ilustra en el diagrama de la bifurcación mostrado en la Figura 4.3, el cuál está dividido en dos estratos: $\{\mu > 0\}$ y $\{\mu \leq 0\}$.

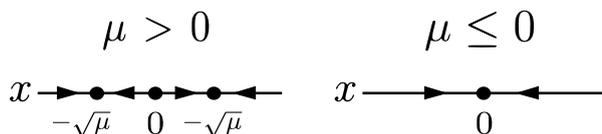


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación del sistema $\dot{x} = \mu x - x^3$.

Conviene mencionar que el Teorema de Poincaré-Bendixson garantiza la existencia de ciclos límite en sistemas bidimensionales, pero no en unidimensionales, donde no existen. Por ende, en sistemas unidimensionales tampoco pueden ocurrir bifurcaciones asociadas a ciclos límite.

4.2. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

Se considera el sistema dinámico $\dot{x} = X(x, \mu)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Una bifurcación de Hopf se produce cuando un par de autovalores complejos conjugados de la matriz jacobiana del sistema, evaluada en un punto de equilibrio, se acercan al eje imaginario y se vuelven imaginarios puros, es decir, $\lambda = \pm i\omega$, con $\omega > 0$.

Para que ocurra una bifurcación de Hopf es necesario que la dimensión del sistema sea al menos $n \geq 2$, ya que se requiere un par de autovalores complejos conjugados.

El siguiente ejemplo se corresponde con un sistema dinámico que presenta una bifurcación de Hopf en su forma normal. Esta forma es una versión simplificada del sistema original, obtenida eliminando los términos que no afectan la dinámica cualitativa. De esta manera, se resaltan únicamente los términos esenciales responsables de la aparición de ciclos límite, como se analiza a continuación.

Ejemplo 4.7 (Bifurcación de Hopf). *Se considera el sistema dinámico plano no lineal dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y - xy^2 - x^3 \\ \dot{y} &= x + \mu y - x^2y - y^3 \end{cases}$$

donde μ es un parámetro real.

El único punto crítico del sistema es el origen $(0, 0)$ y la matriz Jacobiana evaluada en él es:

$$Df(0, \mu) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son: $\lambda = \mu \pm i$.

A continuación, se estudia el comportamiento del sistema a medida que varía μ :

- Si $\mu < 0$: los valores propios son complejos conjugados con parte real negativa, por lo que el origen es un foco estable.
- Si $\mu > 0$: los valores propios son complejos conjugados con parte real positiva, por lo que el origen es un foco inestable.
- Si $\mu = 0$: los valores propios son imaginarios puros, lo que sugiere la posibilidad de una bifurcación de Hopf.

Para estudiar el comportamiento del sistema cerca del origen se pasa el sistema a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases}$$

Para ello, se calculan las derivadas de x e y :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

Sustituyendo \dot{x} e \dot{y} en el sistema original y simplificando se obtiene el sistema en coordenadas polares:

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

La estabilidad de las posibles soluciones de la primera ecuación son:

- Para $r = 0$: si $\mu < 0$ entonces $\dot{r} < 0$, por lo que el origen es estable. Si $\mu > 0$ entonces $\dot{r} > 0$, y el origen es inestable.
- Para $r = \sqrt{\mu}$ si $\mu > 0$: linealizando se obtiene que la solución es estable.

Finalmente, el comportamiento cualitativo del sistema en función del valor del parámetro μ es:

- Para $\mu < 0$: el origen es un foco estable.
- Para $\mu = 0$: la ecuación $\dot{r} = -r^3 < 0$ para cualquier $r > 0$, por lo que las trayectorias son espirales atraídas hacia el origen, es decir, es un foco estable.
- Para $\mu > 0$: aparece un ciclo límite estable $\gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu}(\cos t, \sin t)^T$ y el origen se vuelve inestable.

Por lo tanto, el sistema presenta una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$. En la Figura 4.4 se muestra el diagrama de bifurcación, el cual está dividido en dos estratos: $\{\mu \leq 0\}$ y $\{\mu > 0\}$.

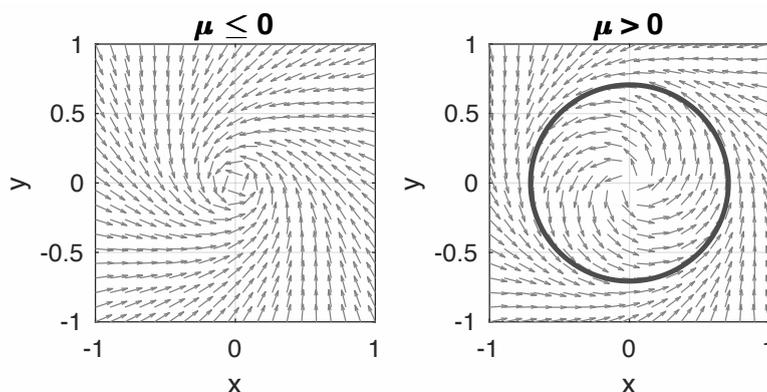


Figura 4.4: Diagrama de bifurcación de Hopf.

Este ejemplo muestra cómo el análisis en coordenadas polares facilita la identificación del ciclo límite y su estabilidad. Además, dado que la bifurcación ocurre en un entorno cercano al origen, se trata de una bifurcación local.

Nota 4.8. El sistema con los signos de los términos no lineales cambiados, es decir,

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + xy^2 + x^3 \\ \dot{y} = x + \mu y + x^2y + y^3 \end{cases}$$

se analizaría de forma análoga dando lugar también a una bifurcación de Hopf. Sin embargo, en este caso el ciclo límite sería inestable.

En el primer sistema, el ciclo límite es estable, por lo que a esta bifurcación se la denomina **bifurcación de Hopf supercrítica**. Por el contrario, para el segundo sistema, el ciclo límite es inestable, lo que corresponde a una **bifurcación de Hopf subcrítica**.

El siguiente teorema establece que los términos de orden superior no influyen en el comportamiento de la bifurcación. La demostración no se incluye ya que excede la finalidad de trabajo y se puede consultar en [11].

Teorema 4.9. *Cualquier sistema bidimensional*

$$\dot{x} = X(x, \mu)$$

que tiene en $\mu = 0$ el equilibrio $x = 0$, y cuyos valores propios son

$$\lambda = \pm i\omega, \quad \omega > 0,$$

es topológicamente equivalente, desde un punto de vista local, a una de las siguientes formas normales:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.10. *Se considera el sistema dinámico*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = (\mu - 2)x + (\mu - 1)y - x^3 - x^2y \end{cases}$$

El origen es un punto de equilibrio, ya que al sustituir $x = y = 0$ se obtiene que $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Además, el sistema linealizado en torno al origen es de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = (\mu - 2)x + (\mu - 1)y \end{cases}$$

Cuando $\mu = 0$, la matriz jacobiana asociada al sistema linealizado es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda = \pm i$.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 4.9 y el sistema no lineal es topológicamente equivalente a una de las correspondientes formas normales.

5. Anexo

Se incluye un recordatorio de definiciones o resultados que, a lo largo del trabajo, se han dado por conocidos debido a su uso reiterado a lo largo del grado en asignaturas de ecuaciones diferenciales, análisis matemático o álgebra lineal.

Definición 5.1. Sea X un espacio vectorial y sean X_1 y X_2 subespacios de X . Se dice que X es la **suma directa** de X_1 y X_2 si se cumple que

- la intersección de X_1 y X_2 es el conjunto cero, es decir, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, y
- todo elemento $x \in X$ puede expresarse de forma única como suma de elementos de X_1 y X_2 ; esto significa que existen $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$ tales que $x = x_1 + x_2$.

En este caso, se dice que X es la suma directa de X_1 y X_2 , y se denota por $X = X_1 \oplus X_2$. Si hubiera un número finito de subespacios se definiría de forma similar.

Definición 5.2. Una función $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, es **uniformemente continua** en U si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que si $x, y \in U$ cumplen $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|X(x) - X(y)\| < \varepsilon$.

Definición 5.3. Una función $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $E \subset \mathbb{R}^n$, se dice **localmente lipschitziana** en x si, para todo subconjunto compacto $K \subset E$, existe $L > 0$ tal que $\|X(x) - X(y)\| \leq L\|x - y\|$, $\forall x, y \in K$.

Proposición 5.4. Si la función X es de clase \mathcal{C}^1 entonces es localmente lipschitziana.

Teorema 5.5 (Teorema de la función inversa). Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, definida en un abierto A , y sea $a \in A$. Si la matriz jacobiana $DF(a)$ es invertible ($\det(DF(a)) \neq 0$), entonces existen abiertos $V \subset A$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ con $a \in V$ y $F(a) \in W$, tales que $F|_V : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^k .

Definición 5.6. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de $\dot{x} = X(x)$ con $x_0 = x(0)$. La **solución** se dice que es **maximal** si para toda solución $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subset J$ y $x = y|_{x_0}$ entonces $I = J$ y, por tanto, $x = y$. Además, al intervalo $I = I_{x_0}$ se le denomina **intervalo maximal**.

Proposición 5.7 (Lema de Gronwall). Sean $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas con $v \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Si para todo $t \in [a, b]$ se cumple que

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)ds$$

entonces se tiene que

$$u(t) \leq ce^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Teorema 5.8 (Teorema de existencia y unicidad). Sea $\dot{x} = X(x)$ con $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente lipschitziana en $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces para todo $x_0 \in E$ existe una solución única del problema de valores iniciales $\dot{x} = X(x)$, con $x(0) = x_0$. Además, la solución depende del punto inicial.

Teorema 5.9. Si la función $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y localmente lipschitziana en x en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces para todo $(t_0, x_0) \in E$ existe una única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

en un intervalo abierto que contiene a t_0 .

Teorema 5.10. Si la función $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y localmente lipschitziana en x en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces para todo $(t_0, x_0) \in E$ existe una única solución $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

de forma que, para cualquier otra solución $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ del mismo problema, se cumple que $I_x \subset (a, b)$ y $x(t) = \varphi(t)$ para $t \in I_x$.

Teorema 5.11. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

tiene solución única dada por $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$.

Proposición 5.12 (Fórmula de variación de las constantes). Sea $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. El problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

tiene como solución

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

y su intervalo máximo de definición es \mathbb{R} .

Proposición 5.13. Si una matriz A de tamaño $n \times n$ tiene todos los autovalores con parte real negativa, entonces existen constantes $c, d > 0$ de forma que $\|e^{At}\| \leq ce^{-dt}$, para todo $t \geq 0$. Sin embargo, si tiene todos los autovalores con parte real positiva, entonces existen constantes $c, d > 0$ de forma que $\|e^{At}\| \leq ce^{dt}$, para todo $t \leq 0$.

Teorema 5.14. Sea $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente lipschitziana en x en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si una solución $x(t)$ de la ecuación $\dot{x} = X(t, x)$ tiene como intervalo maximal $I_x = (a, b)$, entonces para todo subconjunto compacto $K \subset E$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t, x(t)) \in E \setminus K$, para todo $t \in (a, a + \varepsilon) \cup (b - \varepsilon, b)$ (si $a = -\infty$ el primer intervalo es vacío y si $b = \infty$ el segundo es vacío).

Definición 5.15. Un **espacio métrico** (X, d) se dice que es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Proposición 5.16. El conjunto de todas las funciones continuas acotadas $X : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo $E \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto cerrado, es un espacio métrico completo con la distancia $d(x, y) = \sup\{\|x(t) - y(t)\| : t \in E\}$.

Definición 5.17. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se dice que una transformación $T : X \rightarrow X$ es una **contracción** si existe $\lambda \in (0, 1)$ de forma que $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Teorema 5.18. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $T : X \rightarrow X$ es una contracción entonces T tiene un único punto fijo.

Teorema 5.19 (Teorema del valor medio). Sean A un abierto convexo de \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en A . Dados $x, y \in A$, existe un punto z en el segmento que une x e y , tal que

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x).$$

Teorema 5.20 (Prueba M de Weierstrass). *Si existen constantes C_i , con $i = 1, 2, \dots$, de forma que se verifica $|g_i(t)| \leq C_i$ para todo $t \in [a, b]$ y $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$ es convergente, entonces la serie de funciones $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(t)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$.*

Proposición 5.21. *Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con n_- autovalores con parte real negativa, n_+ autovalores con parte real positiva y n_0 autovalores con parte real nula, tales que $n = n_- + n_+ + n_0$. Entonces existe una matriz regular $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$T^{-1}AT = B := \begin{pmatrix} B_- & 0 & 0 \\ 0 & B_+ & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{pmatrix},$$

donde B_- , B_+ y B_0 son matrices cuadradas de dimensiones n_- , n_+ y n_0 respectivamente. Además, los valores propios de B_- , B_+ y B_0 se corresponden con los valores propios de A con partes reales negativas, positivas y nulas, respectivamente.

Teorema 5.22 (Teorema de la curva de Jordan). *Sea C el soporte de una curva continua, cerrada y simple en \mathbb{R}^2 . Entonces el complementario de C , $\mathbb{R}^2 \setminus C$, tiene exactamente dos componentes conexas con C como frontera, una acotada y la otra no.*

Los siguientes teoremas de topología algebraica, aunque están fuera del alcance de este trabajo, se incluyen por su uso previo en él. Se puede consultar su demostración en el libro [4].

Teorema 5.23 (Teorema del punto fijo de Brower). *Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola cerrada. Cualquier función continua $H : B \rightarrow B$ tiene al menos un punto fijo.*

Teorema 5.24 (Teorema del dominio invariante). *Si $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua inyectiva en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces $V = h(U)$ es abierto y $h|_U : U \rightarrow V$ es homeomorfismo.*

Bibliografía

- [1] I. Alonso. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales*. Universidad de Valladolid, 2020.
- [2] L. Barreira y C. Valls. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*. American Mathematical Society, 2012.
- [3] E. Coddington y N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.
- [4] T. Dieck. *Algebraic Topology*. European Mathematical Society, 2008.
- [5] F. Dumortier, J. Llibre y J. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer, 2006.
- [6] M. Hirsch y S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [7] J.Hale y H.Koçak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer, 1991.
- [8] V. Jiménez. *Ecuaciones diferenciales: Cómo aprenderlas, cómo enseñarlas*. Universidad de Murcia, 2000.
- [9] J. Keener y J. Sneyd. *Mathematical Physiology*. Springer, 2001.
- [10] Q. Kong. *A Short Course in Ordinary Differential Equations*. Springer, 2014.
- [11] Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 2004.
- [12] J. Palis y W. Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer, 1982.
- [13] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2006.
- [14] T. Siders. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Atlantis Press, 2013.
- [15] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Universität Wien, 2004.
- [16] L. Tristán. *Análisis matemático*. Universidad de Valladolid, 2020.