



---

Universidad de Valladolid

Dpto. Didáctica de la Matemática

VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS  
DE FUNCIÓN, DOMINIO, MONOTONÍA Y EXTREMOS, A  
TRAVÉS DEL MARCO TEÓRICO DEL ENFOQUE LÓGICO  
SEMIÓTICO (ELOS)

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación  
Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Laura de Fuente Muñoz

Tutora: Cristina Pecharromán Gómez

Valladolid, Julio 2014



# Índice

1. PRESENTACIÓN.....	5
2. ANÁLISIS CURRICULAR .....	7
2.1. LEGISLACIÓN EDUCATIVA.....	7
2.2. ANÁLISIS CURRICULAR A TRAVÉS DE LOS LIBROS DE TEXTO .....	9
3. MARCO TEÓRICO.....	16
4. MARCO METODOLÓGICO.....	19
5. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE TRABAJO.....	24
6. PLANIFICACIÓN Y DESARROLLO DE LA ACCIÓN .....	25
6.1. DISEÑO DE ENSEÑANZA .....	25
6.2. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS.....	29
6.2.1. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL CONOCIMIENTO PREVIO.....	29
6.2.2. CUESTIONARIO OBSERVADOR EXTERNO .....	31
6.2.3. CUESTIONARIO ALUMNOS .....	33
6.2.4. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE .....	34
6.3. ANÁLISIS DE LA DOCENCIA POR LA PROFESORA INVESTIGADORA .....	36
6.4. ANÁLISIS DE LA DOCENCIA POR UN OBSERVADOR EXTERNO.....	37
6.5. ANÁLISIS DE LA DOCENCIA POR LOS ALUMNOS .....	41
7. ANÁLISIS DE DATOS.....	44
7.1. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL CONOCIMIENTO PREVIO.....	44
7.2. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE .....	48
7.3. ANÁLISIS DE LA ACTITUD A TRAVÉS DEL CUADERNO.....	61
7.4. REFLEXIÓN FINAL DEL ANÁLISIS .....	63
7.5. ERRORES Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE .....	64
8. CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS .....	65
8.1. CONCLUSIONES .....	65
8.2. APORTACIONES DEL ESTUDIO .....	66
8.3. PUNTOS DÉBILES .....	67
8.4. CUESTIONES ABIERTAS.....	67
9. REFLEXIÓN PERSONAL SOBRE LA INVESTIGACIÓN REALIZADA.....	68
10. BIBLIOGRAFÍA .....	69
11. ANEXO: UNIDAD DIDÁCTICA .....	71



## 1. PRESENTACIÓN

El presente trabajo forma parte del Módulo Prácticum del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas impartido por la Universidad de Valladolid en su especialidad de Matemáticas.

La investigación que se realiza surge de problemas observados en el aula y susceptibles de mejora. Por una parte, se observa que el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones entraña dificultad al alumnado de curso 4º ESO, de la ‘Opción B’ de Matemáticas. Son contenidos cuyo estudio se ha iniciado en 3º ESO, pero en el presente curso aumenta su grado de abstracción y de formalización.

Por otra parte, se observa que esta unidad no siempre se llega a impartir a pesar de formar parte de los contenidos mínimos fijados por el BOE. Esto acrecienta las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos al enfrentarse a este tema en los cursos de Bachillerato.

En definitiva, esta investigación experimental se desarrolla en torno a un objetivo principal de valorar el aprendizaje de los conceptos de función, dominio, monotonía y extremos, tras una docencia regida por un diseño de enseñanza elaborado atendiendo al marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS).

Esta investigación educativa se llevó a cabo en el Colegio Jesús y María de Valladolid durante la fase de intervención del periodo de prácticas. La intervención se realizó en el aula de 4º ESO con un grupo de treinta alumnos que habían escogido la ‘Opción B’ de Matemáticas.

En el presente primer capítulo se ha presentado la temática de la investigación y a continuación se pasa a describir el contenido del trabajo.

En el segundo capítulo se presenta un análisis curricular. En primer lugar, se analiza cómo aparecen los contenidos objeto de la investigación en la legislación educativa vigente. Se presentan los contenidos mínimos que establece el Decreto 52/2007, de 17 de mayo, para la Unidad Didáctica ‘Funciones y sus propiedades globales’, sobre la que versa esta investigación, en la ‘Opción B’ de 4º ESO en la comunidad de Castilla y León. A continuación, se realiza un análisis curricular a través de varios libros de texto. Este análisis se estructura a través de seis categorías: motivación, conocimiento previo, contenidos, presentación de los contenidos, actividades y tipo de actividades. Uno de los fines de este análisis es observar el tratamiento didáctico de estos contenidos.

En tercer lugar, se describe el marco teórico ELOS que rige la elaboración del diseño de enseñanza que se realiza en esta investigación.

En el cuarto capítulo, se presenta la metodología de investigación-acción, la cual orienta nuestra investigación, a partir de sus características principales y de las fases que constituyen un ciclo de investigación.

En el siguiente capítulo, se fijan los objetivos específicos y las hipótesis de trabajo que guían este trabajo y que conducirán las conclusiones y las aportaciones del estudio.

El sexto capítulo recoge la planificación y desarrollo de la acción. Comienza con la presentación del diseño de enseñanza del concepto de función, dominio, monotonía y extremos, elaborado siguiendo el marco teórico de referencia. Tras el diseño de enseñanza se presentan los instrumentos de recogida de datos utilizados y se realiza un análisis de la acción por la propia profesora investigadora y asimismo por parte del observador externo y de los alumnos con el fin de que el análisis sea objetivo.

El trabajo continúa con un análisis de los datos que nos permite valorar el aprendizaje de los conceptos objeto de la investigación, y conocer las dificultades y errores más comunes que presentan los alumnos. Esto nos posibilitará plantear orientaciones didácticas que permitan la mejora del aprendizaje de estos contenidos.

La presente investigación finaliza con la presentación de las conclusiones redactadas a partir de las hipótesis de partida, expuestas en el capítulo quinto, y de los resultados obtenidos. Asimismo, se muestran los puntos débiles y las cuestiones que han quedado abiertas, para terminar con una reflexión personal sobre la investigación realizada y sobre los resultados obtenidos.

Por último, se incluye en los anexos la Unidad Didáctica ‘Funciones y sus propiedades globales’ planificada antes de impartirse la docencia y que ha servido como referente en el desarrollo de esta docencia.

## 2. ANÁLISIS CURRICULAR

En esta sección se presenta, en primer lugar, un análisis de los contenidos que son objeto de esta investigación en la legislación educativa vigente. Tras este análisis del concepto de función y de sus propiedades a través de la legislación vigente, se presenta un análisis curricular a través de varios libros de texto.

### 2.1. LEGISLACIÓN EDUCATIVA

En el Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad de Castilla y León se indica, entre otros, los contenidos mínimos del bloque quinto ‘Funciones y gráficas’.

En particular los contenidos mínimos específicos correspondientes a la Unidad Didáctica ‘Funciones y sus propiedades globales’ sobre la que versa esta investigación son los siguientes:

- *Funciones: expresión algebraica, variables, dominio y estudio gráfico.*
- *Características de las gráficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías y periodicidad.*
- *Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.*
- *Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión algebraica. Análisis de resultados utilizando el lenguaje matemático adecuado.*
- *Interpretación, lectura y representación de gráficas en la resolución de problemas relacionados con los fenómenos naturales y el mundo de la información.*

En lo que respecta a los criterios de evaluación fijados, son dos los específicos al bloque quinto de ‘Funciones y gráficas’ pero éstos no están propiamente relacionados con la Unidad Didáctica desarrollada sino con las que la siguen. Se observa que los contenidos de nuestra unidad son contenidos de transición puesto que ya han sido tratados en 3º ESO. De hecho en el curso de 3º ESO sí que se contempla la evaluación de estos contenidos. Pasamos a enunciar dichos criterios de evaluación del curso 3º ESO:

- *Reconocer las características básicas de las funciones constantes, lineales y afines en su forma gráfica o algebraica y representarlas gráficamente cuando vengan expresadas por un enunciado, una tabla o una expresión algebraica.*

- *Determinar e interpretar las características básicas (puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, continuidad y periodicidad) que permiten evaluar el comportamiento de una gráfica sencilla (de trazo continuo o discontinuo) y obtener información práctica a partir de una gráfica referida a fenómenos naturales, a la vida cotidiana o en el contexto de otras áreas de conocimiento.*

Por último, el aprendizaje de los contenidos que abarca esta Unidad Didáctica contribuye a alcanzar la mayor parte de los objetivos que marca la legislación vigente.

## **Reflexión**

Se observa que los contenidos que son objeto de esta investigación están presentes en la legislación educativa vigente en el bloque de contenidos ‘Funciones y gráficas’. Sin embargo, el hecho de que no haya unos criterios de evaluación específicos sobre los mismos, nos lleva a interpretar que en el curso de 4º de ESO se trata de contenidos de transición para las siguientes unidades didácticas: ‘Funciones polinómicas y racionales’ y ‘Funciones exponenciales y logarítmicas’.

En efecto, los criterios de evaluación sobre estos contenidos aparecen en 3º ESO.

No obstante, las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de estos contenidos nos llevan a observar la importancia de su enseñanza y aprendizaje en el curso de 4º ESO.

Asimismo, se observa que en este ciclo el estudio de las propiedades de una función ya no se reduce a su interpretación gráfica, sino que se amplía a su interpretación en los cuatro sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico.



## 2.2. ANÁLISIS CURRICULAR A TRAVÉS DE LOS LIBROS DE TEXTO

Se considera conveniente realizar un análisis del tratamiento de los contenidos de la Unidad Didáctica ‘Funciones y sus propiedades globales’ en el curso 4ºESO Opción ‘B’ a través de varios libros de texto dado que el libro de texto viene a ser una herramienta de uso habitual, tanto para el docente como para el alumnado, en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la materia.

Durante la planificación de esta unidad didáctica se plantea impartir los contenidos siguientes, siendo contenidos mínimos aquellos que aparecen subrayados:

- Concepto de función
- Dominio y recorrido de una función.
- Operaciones con funciones:
  - Suma de una función más una constante.
  - Producto de una función por una constante.
  - Suma de funciones.
  - Diferencia de funciones.
  - Producto de funciones.
  - Cociente de funciones.
  - Composición de funciones.
- Funciones recíprocas o inversas
- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Máximos y mínimos
- Periodicidad. Funciones periódicas
- Acotación
- Simetría. Función par y función impar
- Funciones definidas a trozos

Los libros de texto escogidos para el análisis curricular son:

- Anaya.
- Santillana.
- SM edición Algoritmo.
- SM edición Pitágoras.

A continuación se presentan las categorías a través de las cuales vamos a realizar una comparativa de los libros de texto anteriores:

- Motivación: A partir de conexiones con la historia de las Matemáticas, con otras disciplinas y con la vida real, propuesta de juegos y motivación a través de las ilustraciones.

- Conocimiento previo: Se recuerdan definiciones básicas o se plantean actividades de repaso.
- Contenidos: Presencia o ausencia los contenidos especificados al comienzo de este capítulo.
- Presentación de los contenidos: En general los conocimientos nuevos se introducen a través de la definición formal o mediante el uso de ejemplos a partir de los cuales el conocimiento puede ser generalizado.
- Actividades: Secuenciación de las actividades para trabajar los contenidos en orden de dificultad, predominio de ejercicios o de problemas, ejercicios resueltos, autoevaluación.
- Tipos de actividades: Ejercicios de reconocimiento y ejercicios algorítmicos o de repetición, problemas de enunciado de traducción simple o compleja, ejercicios y problemas de pensar/estrategia, problemas sobre situaciones reales, problemas a resolver con las nuevas tecnologías, otros problemas: históricos, puzles, juegos...

Estas categorías serán analizadas a partir de los indicadores descritos y los resultados se expondrán mediante tablas.

### ➤ Motivación

MIH: Introducción histórica.

MPR: Problemas de la vida real.

MCD: Conexión con otras disciplinas.

MNT: Utilización de las nuevas tecnologías.

MOJ: Motivación a través de juegos.

MOI: Motivación a través de las ilustraciones

EDITORIAL	MOTIVACIÓN					
	MIH	MPR	MCD	MNT	MOJ	MOI
ANAYA		*			*	*
SANTILLANA	*	*				*
SM (ALGORITMO)		*	*			*
SM (PITÁGORAS)		*	*	*		*

*Reflexión:* Los cuatro libros de texto analizados trabajan la motivación aunque de diferente modo. Son comunes los problemas con contextos de la vida cotidiana y la motivación a través de las ilustraciones.

➤ **Conocimientos previos**

CPD: Recuerda definiciones básicas.

CPA: Actividades de repaso.

EDITORIAL	CONOCIMIENTO PREVIO	
	CPD	CPA
ANAYA	*	*
SANTILLANA		
SM (ALGORITMO)	*	
SM (PITÁGORAS)		

*Reflexión:* Anaya es la editorial que más importancia concede al repaso de los conocimientos previos.

➤ **Contenidos:**

CF: Concepto de función

CDR: Dominio y recorrido de una función.

COF: Operaciones con funciones.

CFR: Funciones recíprocas o inversas.

CM: Monotonía de una función.

CE: Extremos de una función.

CP: Periodicidad.

CA: Acotación.

CS: Simetría. Función par y función impar.

CFT: Funciones definidas a trozos.

EDITORIAL	CONTENIDOS									
	CF	CDR	COF	CFR	CM	CE	CP	CA	CS	CFT
ANAYA	*	Sólo dominio			*	*	*			*
SANTILLANA	*	*			*	*	*		*	*
SM (ALGORITMO)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
SM (PITÁGORAS)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

*Reflexión:* Se observa que el libro de texto de la editorial SM en su edición Pitágoras es el único que abarca todos los contenidos fijados al inicio de este capítulo. Santillana se limita a contemplar tan sólo los contenidos mínimos y el libro de texto de Anaya ni tan siquiera abarca todos los contenidos mínimos establecidos por la legislación vigente al no trabajar el concepto de simetría. A priori el libro de texto de SM Algoritmo también parece ser muy completo pero sin embargo no trabaja el concepto de función definida a trozos que forma parte de los contenidos mínimos marcados por la legislación educativa.

➤ **Presentación de los contenidos:**

PF: En general introduce los contenidos mediante la definición formal.

PE: En general introduce los contenidos a través de un ejemplo.

EDITORIAL	PRESENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS	
	PF	PE
ANAYA		*
SANTILLANA	*	

SM (ALGORITMO)		*
SM (PITÁGORAS)	*	

*Reflexión:* Se observa que tanto el libro de texto de Santillana como el de SM edición Pitágoras introducen los conceptos directamente a partir de la definición formal frente a los libros de texto de las editoriales de Anaya y de SM edición Algoritmo que introducen los conceptos a través de ejemplos.

➤ **Actividades:**

ASD: Secuenciación de las actividades para trabajar los contenidos en orden de dificultad.

APE: Predominio de ejercicios.

APP: Predominio de problemas.

AER: Ejercicios resueltos.

AAE: Autoevaluación.

EDITORIAL	ACTIVIDADES				
	ASD	APE	APP	AER	AAE
ANAYA	*		*	*	*
SANTILLANA	*	*		*	*
SM (ALGORITMO)		*		*	
SM (PITÁGORAS)	*	*		*	*

*Reflexión:* Tan sólo en el libro de texto de Anaya predominan los problemas. Todos los libros de texto presentan ejercicios resueltos y la mayoría plantean una autoevaluación final.

➤ **Tipos de actividades:**

TE: Ejercicios de reconocimiento y ejercicios algorítmicos o de repetición.

TPS: Problemas de enunciado de traducción simple.

TPC: Problemas de enunciado de traducción compleja.

TPE: Ejercicios y problemas de pensar/estrategia.

TPR: Problemas sobre situaciones reales.

TNT: Problemas a resolver con las nuevas tecnologías

TPO: Otros problemas: históricos, puzles, juegos...

EDITORIAL	TIPOS DE ACTIVIDADES						
	TE	TPS	TPC	TPE	TPR	TNT	TPO
ANAYA	*	*	*	*	*		*
SANTILLANA	*	*	*		*		
SM (ALGORITMO)	*	*	*		*		
SM (PITÁGORAS)	*	*	*	*	*	*	

*Reflexión:* Las diferencias entre editoriales las encontramos al observar que SM edición Pitágoras es la única editorial que propone la resolución de problemas mediante las nuevas tecnologías y Anaya la única que plantea problemas en forma de juego. Asimismo, ambas editoriales plantean ejercicios y problemas que requieren de una estrategia.

## Reflexión

La motivación es un aspecto que los cuatro libros de texto analizados tienen en cuenta. Cada editorial busca la motivación de un modo diferente (por ejemplo, el libro de texto de la editorial Anaya incluye un apartado de *Juegos para Pensar*) pero lo que sí que es común a todas es la motivación a través de problemas de la vida cotidiana y de las ilustraciones.

Se observa que ninguna de las editoriales especifica los conocimientos previos y tan sólo los libros de texto de las editoriales de Anaya y SM en su edición Algoritmo recuerdan algunas definiciones o proponen algún ejercicio de repaso.

Somos conscientes de que en ocasiones el libro de texto acaba determinando el currículo real que se termina por impartir. Por lo que se debe tener especialmente en cuenta que no todos los libros de texto que hemos analizado abarcan todos los contenidos mínimos fijados por la legislación educativa vigente. En particular, el libro de texto de Anaya no incluye el concepto de simetría y el libro de texto de SM en su edición Algoritmo no incluye el concepto de función definida a trozos. De entre los libros de texto analizados, el libro de la editorial SM en su edición Pitágoras viene a ser el único libro de texto que contempla todos los contenidos que se han presentado al principio de este capítulo.

En cuanto a la presentación de los contenidos, se encuentra que SM edición Pitágoras abusa de la definición formal y en ocasiones carece de presentar todas las representaciones posibles y las conversiones entre ellas. Sin embargo, Anaya es una editorial que en este aspecto destaca por presentar los contenidos a través de ejemplos y además presenta los diferentes sistemas de representación del concepto de función.

En lo que respecta a los ejercicios y problemas, el libro de texto de la editorial Anaya es el único en el que predominan los problemas frente a los ejercicios.

En cuanto al tipo de actividades, los libros de texto de Anaya y SM edición Pitágoras son los que se desmarcan y proponen actividades de estrategia que implican una mayor abstracción y también otro tipo de actividades tales como resolver problemas mediante las nuevas tecnologías o juegos.

### 3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta una descripción del marco teórico que se utiliza en esta investigación que resulta de la síntesis de varios artículos de investigación.

El marco teórico que sigue esta investigación es el marco teórico conocido como Enfoque Lógico Semiótico (ELOS).

Este marco teórico desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) se presenta en el trabajo de Socas (2007) y se define a través de la elaboración de modelos de competencia teóricos y prácticos (Formal y Cognitivo) pretendiendo aportar instrumentos que nos permitan analizar, describir y comprender situaciones problemáticas que suceden en el Microsistema Educativo, en nuestro caso formado por tres elementos esenciales que son la Matemática, los alumnos y el profesor, desde una perspectiva centrada en la Semiótica.

En lo que respecta al Modelo de Competencia Formal, éste puede describirse mediante el estudio de los aspectos funcionales, fenomenológicos y conceptuales del lenguaje algebraico.

Nos centramos en el Modelo de Competencia Cognitivo que se organiza en torno a tres componentes: las representaciones semióticas, los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación y las dificultades y errores en el aprendizaje.

Las relaciones entre dichas componentes nos van a aportar un enfoque desde el que poder describir la comprensión que el alumno tiene de un objeto matemático.

Socas (2007) considera que el dominio de un sistema de representación formal ha de ser una meta más que un camino, apareciendo una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo, hasta producir competencia, en el uso del sistema de representación formal.

Por lo que Socas estructura de manera jerárquica el aprendizaje de los conceptos matemáticos como un proceso de abstracción de los sistemas de representación mediante estadios de desarrollo cognitivo de tal forma que cada uno se cimienta en el estadio anterior.

A continuación clasificamos dichos estadios:

- Semiótico: Los signos nuevos adquieren significado a partir del conocimiento previo del alumno.
- Estructural: Una vez que el alumno ya domina un sistema de representación, se realizan transformaciones en dicho registro y conversiones a otro nuevo sistema de representación.



- Autónomo: Se dominan al menos dos sistemas de representación y se coordinan de forma espontánea.

Estos estadios se caracterizan mediante acciones de aprendizaje sobre las diferentes representaciones de los conceptos. Dichas acciones de aprendizaje son:

- Reconocimiento.
- Transformación interna (en el propio registro).
- Conversión.
- Coordinación: pasar de una representación a otra y viceversa.

Se considera que se domina un concepto matemático cuando se conocen sus representaciones y se realizan acciones tales como transformaciones dentro del propio registro (tratamiento de una representación) y transformaciones de la representación de un concepto de un registro a otro (conversión de una representación), en particular Duval (1993) considera que existe dominio cuando se realizan conversiones bidireccionales de manera espontánea entre al menos dos sistemas de representación.

Las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas tienen diferentes orígenes y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. Como señala Socas (2007) *el error va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.*

## **Reflexión**

Para la elaboración del diseño de enseñanza de los conceptos de función, dominio, monotonía y extremos, se emplea la caracterización de los diferentes estadios de aprendizaje descritos en el marco teórico ELOS.

Se considera que la consecución de este modelo facilita el aprendizaje de los alumnos e implica un aprendizaje significativo de los conceptos.

Se establece el sistema antiguo para cada concepto puesto que el aprendizaje de los símbolos nuevos se debe fundamentar en el sistema antiguo para que el aprendizaje sea significativo.

Se establecen cada uno de los tres estadios (semiótico, estructural y autónomo) de cada concepto. Dichos estadios son jerárquicos y se cimientan cada uno en el estadio anterior. A través de ellos se sigue un proceso de abstracción de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos.

Asociados al concepto de función existen cuatro sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico.

Se parte de la representación gráfica de los conceptos por ser ésta la más cercana al alumno y a la intuición que el alumno presenta del concepto, y de la representación verbal aproximada de los conceptos.

Se considera que el alumno ha alcanzado el estadio estructural si éste ya domina un sistema de representación y es capaz de realizar transformaciones en dicho registro y conversiones a otro nuevo sistema de representación.

Consideramos, al igual que Duval, que existe un dominio del concepto matemático cuando se realizan conversiones bidireccionales de manera espontánea entre al menos dos sistemas de representación. Estas acciones de aprendizaje caracterizan el estadio autónomo.

No obstante, para alcanzar un estadio se debe haber alcanzado el estadio anterior dado su carácter jerárquico.

## 4. MARCO METODOLÓGICO

El presente trabajo es de investigación, por lo que se precisa de una metodología de investigación a seguir. La metodología que mejor se ajusta a las características de la investigación es la metodología cualitativa de investigación-acción, la cual pasamos a describir de forma breve.

Se trata de una línea de investigación que tiene su origen en los trabajos de Kurt Lewin en la década de los 40 cuyo objetivo era producir un cambio social resolviendo problemas prácticos y urgentes. Ya se comienzan a distinguir algunas de las cualidades que caracterizan esta metodología tales como el conocimiento, la intervención, la mejora y la colaboración.

En las décadas de los 50 y los 60 se encuentra en declive por las críticas y el rechazo en contraposición a la investigación+desarrollo+difusión dominante la cual prevalece el desarrollo y la evaluación curricular a gran escala en el campo educativo.

Por lo que hay que esperar hasta la década de los 70 para que llegue el reconocimiento de esta metodología, siendo su principal representante John Elliot.

La investigación-acción es una forma de explorar una situación social, en nuestro caso educativa, la cual se trata de una situación problemática o susceptible de mejora, con la finalidad de comprenderla y mejorarla -Kemmis y McTaggart (1988)-, siendo los propios docentes los investigadores.

Se debe discernir entre lo que es y lo que no es la investigación-acción en la educación. Algunos de los rasgos que caracterizan y delimitan la investigación-acción enunciados por Pérez Serrano (1994) son:

- *Que el proyecto surja de problemas y preocupaciones educativas.*
- *El proyecto implica a todos los responsables del mismo.*
- *Que no se produzcan rupturas en el proceso educativo del grupo de alumnos donde se desarrolla la investigación, respetando así el carácter ecológico.*
- *Evitar una dependencia exclusiva de pruebas, dirigirse estrictamente a la determinación del logro o ignorar las perspectivas de otros profesores.*
- *Que se mantenga la redacción de un diario del proyecto en el que se registren las reflexiones críticas relativas al tema a investigar.*
- *Que el grupo siga una espiral de ciclos de acción-reflexión.*
- *Integrar docencia, praxis e investigación; relacionar la investigación documental y la formación investigadora; y aplicar los resultados a la práctica educativa.*

La Investigación-Acción se desarrolla siguiendo un modelo en espiral en ciclos sucesivos, donde cada ciclo consta de cuatro fases de investigación: fase de planificación, fase de acción, fase de observación y fase de reflexión, generando esta última un nuevo ciclo de investigación. En cuanto a su duración, Elliott (1886) aconseja que cada ciclo debe comprender un trimestre y la espiral de investigación un año.

Inicialmente se ha de determinar la preocupación temática sobre la que se va a investigar. Su elección debe de estar motivada por problemas reales detectados o vividos por los docentes y que puedan ser resueltos. Se lleva a cabo una reflexión inicial

La primera *fase es la de planificación*. En esta fase se confecciona un plan de elaboración el cual ha de ser realista y flexible ante posibles imprevistos que puedan presentarse.

En la *fase de acción* se pone en práctica el plan diseñado en la fase anterior. No obstante, éste puede verse modificado puesto que hay aspectos y circunstancias imprevisibles.

Esta fase se complementa con la tercera fase, *la fase de observación*, que se caracteriza por la recogida de datos por parte del docente investigador que registren los efectos de la acción y sirva de fundamento para la posterior reflexión.

Dado el carácter cualitativo de esta metodología, la información se recoge mediante la observación y la interacción entre el investigador y el objeto de la investigación.

Se dispone de varios instrumentos de recogida de datos que se pueden utilizar durante la observación, tales como diarios, registros anecdóticos, las producciones escritas de los alumnos (pruebas, cuaderno del alumno, ...), cuestionarios tanto al observador externo como a los alumnos (que deben realizarse una vez analizadas las producciones escritas y una vez desarrollada la docencia), grabaciones de audio o informes del observador externo. Toda la información procedente del observador externo es clave puesto que nos aporta un punto de vista objetivo.

Por último, un *análisis y reflexión* de los resultados en torno a la situación por la que surgió la investigación. Las consecuencias y conclusiones serán las que promuevan el inicio de otro ciclo en la espiral de la investigación finalizando los ciclos cuando se llegue a la saturación.

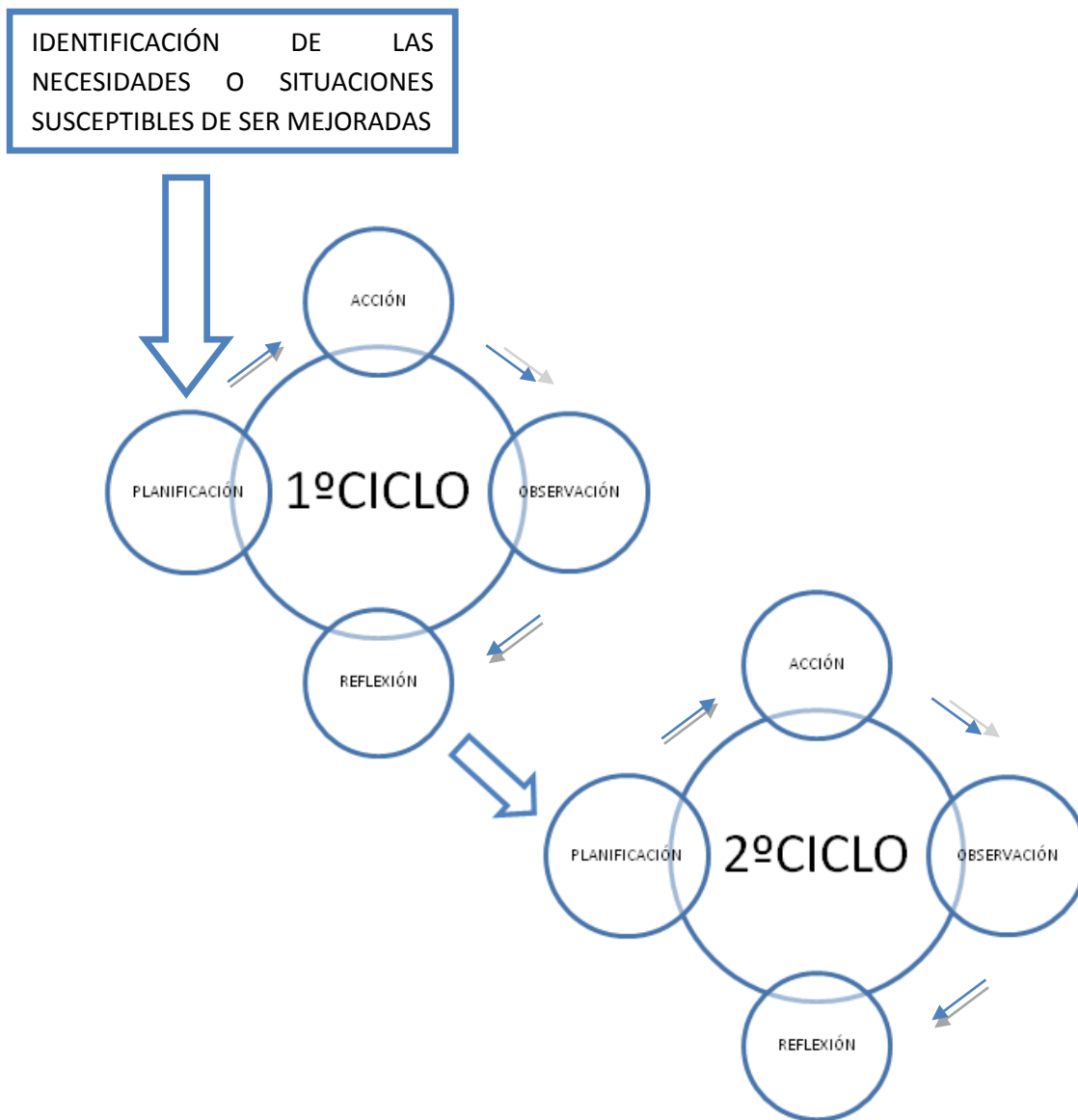


Figura 1. Esquema de dos ciclos de investigación-acción.

Esta metodología está expuesta a la crítica y muchos autores ponen en duda su valor como investigación principalmente en dos vertientes: la objetividad, al ser los investigadores los propios implicados, y la generalización, al no trabajar con muestras amplias y representativas.

En cuanto a la subjetividad se responde mediante el contraste que se lleva a cabo de las percepciones de los implicados, generalmente docentes, estudiantes y observadores externos, confrontándose diferentes puntos de vista.

En relación a la falta de generalización que reprobaban algunos autores, Elliott (1991, p. 65) recomienda a los docentes que analicen sus experiencias pasadas y comprueben su valor a la hora de comprender situaciones actuales; *"mediante este proceso los*

*profesores asumen que pueden generalizar de una experiencia pasada a otra presente" y, por lo tanto "por qué no asumir también que los estudios de casos de otros profesionales pueden también proporcionar experiencias extensibles a sus propias situaciones, y viceversa?"*.

Asimismo, Pérez Serrano (1990) señala que el objeto de la investigación cualitativa no es la búsqueda de la generalización sino el estudio en profundidad de una situación concreta. Tal y como se indicaba en la definición de esta metodología, se busca la comprensión y no la explicación o la casualidad.

Existe una amplia gama de modalidades de investigación-acción. Entre otras razones, esto se debe a la diversidad de los contextos sociales y a las particularidades de los participantes implicados en estas investigaciones.

Asimismo, las diferentes formas de entender la investigación-acción dan lugar a tres racionalidades: la técnica, la práctica y la emancipatoria.

En lo que se refiere a la investigación-acción técnica, ésta busca diseñar y aplicar planes de intervención que mejoren la resolución de problemas y las habilidades profesionales. Los agentes externos cumplen un papel fundamental siendo expertos responsables de los procesos de investigación.

La investigación-acción práctica tiene como finalidad desarrollar el pensamiento práctico de los participantes y mejorar el desarrollo profesional mediante el diálogo y la reflexión. En este tipo de investigación los agentes prácticos dirigen la investigación en la toma de decisiones.

La investigación-acción emancipatoria integra los propósitos de las modalidades anteriores y además se centra en la eliminación de las jerarquías en la investigación habiendo una igual responsabilidad compartida entre los participantes.

Antonio Latorre (2003) señala que autores como Zuber-Skerritt (1992) consideran las tres modalidades de investigación-acción válidas en sí, *las tres modalidades conllevan desarrollo profesional, y es legítimo comenzar por la indagación técnica y, progresivamente, avanzar hacia las de tipo práctico y emancipatorio*. Por otra parte Carr y Kemmis (1988) tan sólo consideran como verdadera investigación-acción la emancipatoria.

## **Reflexión**

Esta investigación se ha llevado a cabo en el Colegio Jesús y María en Valladolid durante la fase de intervención del periodo de prácticas. El tutor del centro asignado actuó como observador externo en el aula. Tras mi docencia completó un cuestionario valorando mi intervención como docente.

En dicha investigación se completa un único ciclo siguiendo las cuatro fases de investigación. No ha sido posible la realización de más ciclos dada la brevedad de duración del periodo del Prácticum en particular.

La presente investigación surge de problemas observados:

- La Unidad Didáctica ‘Funciones y propiedades globales’ suele resultar más compleja en el curso 4º ESO, en particular en las matemáticas Opción ‘B’, comparada con el curso anterior de 3º ESO donde predomina el estudio gráfico de las propiedades de las funciones, que es más cercano a la intuición. Sin embargo, en 4º ESO se busca alcanzar cierta abstracción y formalización de los conceptos, lo cual entraña una mayor dificultad.
- Otra de las complicaciones que suelen encontrarse los alumnos es realizar conversiones entre las diferentes representaciones.
- Asimismo se observa que es una unidad que en ocasiones no se imparte pese a formar parte de los contenidos mínimos fijados por el BOE, hecho que se constata en la programación del centro. Esto acrecienta las dificultades que se presentan al enfrentarse los alumnos a este tema en los cursos de Bachillerato, puesto que carecen de conocimientos previos sólidos.

La fase de planificación ha consistido en la realización de un análisis curricular a través de la legislación educativa vigente, la valoración de los conocimientos previos con los que parten los alumnos y la elaboración del diseño de enseñanza y de las herramientas de recogida de datos.

En la fase de acción-observación se ha llevado a cabo el desarrollo de la docencia y la recogida de datos mediante el cuaderno del alumno y cuestionarios a los alumnos y al observador externo.

Tras esta fase viene el análisis de los datos recogidos y con ello la valoración del aprendizaje de los alumnos.

Por último, se realizan reflexiones que pueden dar inicio, en un futuro, a otro ciclo de investigación cuya planificación vendría orientada por dichas reflexiones.

## 5. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE TRABAJO

La investigación surge con el objeto de valorar el aprendizaje de unos contenidos específicos.

Tanto el marco teórico como el marco metodológico orientan esta investigación y permiten definir un objetivo general.

Por tanto se plantea como **objetivo general** de la investigación el siguiente:

Valorar el aprendizaje de los conceptos de función, dominio, monotonía y extremos, tras una docencia regida por un diseño de enseñanza elaborado atendiendo al marco del enfoque lógico semiótico (ELOS).

Este objetivo lo desarrollamos en los objetivos específicos que se presentan a continuación:

**Objetivo 1:** Elaborar un diseño de enseñanza de los conceptos de función, dominio, monotonía y extremos, a través de los distintos registros de representación con el referente el marco ELOS.

**Objetivo 2:** Valorar el aprendizaje de los conceptos matemáticos anteriores en los diferentes registros y en el paso de uno a otro.

**Objetivo 3:** Observar los errores y dificultades de aprendizaje de los conceptos matemáticos anteriores.

**Objetivo 4:** Plantear orientaciones didácticas que permitan la mejora del aprendizaje de estos contenidos.

Para el desarrollo experimental del trabajo nos guiamos a través de las siguientes hipótesis:

**Hipótesis 1:** La mejor representación para acercarse al concepto de función y sus propiedades es la representación gráfica.

**Hipótesis 2:** La enseñanza de los conceptos a través de los distintos registros facilita el aprendizaje.

**Hipótesis 3:** Los alumnos alcanzan con facilidad el estadio semiótico.

**Hipótesis 4:** Se esperan encontrar dificultades en el aprendizaje debido a un conocimiento previo insuficiente.



## 6. PLANIFICACIÓN Y DESARROLLO DE LA ACCIÓN

En este capítulo se presenta el diseño de enseñanza de los conceptos de función, dominio, monotonía y extremos, elaborado siguiendo el marco teórico ELOS descrito en el capítulo tercero ‘Marco teórico’.

Tras el diseño de enseñanza se presentan los diversos instrumentos de recogida de datos y se realiza un análisis de la acción docente de la profesora investigadora.

### 6.1. DISEÑO DE ENSEÑANZA

En este apartado, se presenta el diseño de enseñanza de los contenidos que son objeto de esta investigación: concepto de función, dominio, monotonía y extremos, siguiendo el marco teórico de referencia.

En el diseño de enseñanza establecemos el sistema antiguo para cada concepto, es decir, la relación de contenidos que necesita conocer el alumno para el aprendizaje de cada concepto nuevo, y a continuación se establece la estructuración de los estadios.

Este diseño de enseñanza sigue la línea marcada en los siguientes artículos cuyas referencias bibliográficas se encuentran en el capítulo décimo ‘Bibliografía’.

- Pecharromán, C. y Ortega, T., (2008). Sistemas de símbolos antiguo teórico y antiguo real asociados a las propiedades globales de las funciones.
- Pecharromán, C., Ortega, T. (2009). Diseño de un marco de investigación. Aplicación al proceso de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones.
- Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.

A continuación, se presenta el diseño de enseñanza elaborado para cada uno de los conceptos indicados.

➤ **Concepto de función.**

- Se establece el sistema antiguo para el concepto de función:

1. Conocen el sistema cartesiano. Eje de abscisas y eje de ordenadas. Origen de ordenadas.
2. Representación en el plano de puntos determinados por sus coordenadas cartesianas. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.
3. Proporcionalidad entre magnitudes. Dependencia entre variables.
4. Correspondencias. Formas de expresar una correspondencia.
5. Relaciones dadas por tablas de valores. Construcción de una tabla de valores. Elaboración de una gráfica a partir de una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla que relacione dos variables.
6. Valor numérico de una expresión algebraica.
7. Representan e identifican funciones sencillas.

- Se establecen los diferentes estadios:

*Estadio semiótico:* Se parte de la interpretación gráfica y verbal del concepto de función por ser las más cercanas a la intuición del alumno.

*Estadio estructural:* Obtener una tabla de valores de la función.

*Estadio autónomo:* Dada la representación gráfica y numérica de una función lineal hallar su representación algebraica.

➤ **Dominio.**

- Se establece el sistema antiguo para el concepto de dominio:

1. Conocen el sistema cartesiano. Eje de abscisas y eje de ordenadas. Origen de ordenadas.
2. Representación en el plano de puntos determinados por sus coordenadas cartesianas. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.
3. El concepto de función como dependencia entre variables.
4. Proyectar puntos sobre el eje de abscisas.

5. Ecuaciones e inecuaciones

6. Intervalos. Notación simbólica corchetes paréntesis. Notación punto relleno y punto vacío.

- Se establecen los diferentes estadios:

*Estadio semiótico:* Reconocimiento gráfico. Se visualiza dónde está la gráfica de la función.

*Estadio estructural:* Se proyecta la gráfica sobre el eje de abscisas para obtener los intervalos gráficos donde está definida la función. Dichos intervalos se expresan mediante notación numérica.

*Estadio autónomo:* Se define formalmente el concepto de dominio de una función como el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente. Se obtiene el dominio de una función mediante su expresión algebraica.

➤ **Monotonía.**

- Se establece el sistema antiguo para el concepto de monotonía:

1. Conocen el sistema cartesiano. Eje de abscisas y eje de ordenadas. Origen de ordenadas.

2. Representación en el plano de puntos determinados por sus coordenadas cartesianas. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.

3. El concepto de función como dependencia entre variables.

4. Sistemas de representación de funciones: verbal, tabular, gráfico y algebraico.

5. Intervalos. Notación simbólica corchetes paréntesis. Notación punto relleno y punto vacío.

6. Conocen los símbolos  $\leq$   $\geq$ .

7. Interpretación de la gráfica de una función.

8. Proyectar puntos sobre el eje de abscisas y el eje de ordenadas.

- Se establecen los estadios:

*Estadio semiótico:* Se señala sobre la gráfica las partes donde la función crece, decrece y es constante.

*Estadio estructural:* Se proyecta sobre el eje de abscisas la gráfica para extraer los intervalos numéricos donde la función crece, decrece o es constante.

*Estadio autónomo:* Se define formalmente el concepto de función creciente, función decreciente y función constante.

### ➤ **Extremos.**

- Se establece el sistema antiguo para el concepto de extremos:

1. Conocen el sistema cartesiano. Eje de abscisas y eje de ordenadas. Origen de ordenadas.

2. Representación en el plano de puntos determinados por sus coordenadas cartesianas. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.

3. El concepto de función como dependencia entre variables.

4. Sistemas de representación de funciones: verbal, tabular, gráfico y algebraico.

5. Intervalos. Notación simbólica corchetes paréntesis. Notación punto relleno y punto vacío.

6. Conocen los símbolos  $\leq$   $\geq$ .

7. Interpretación de la gráfica de una función.

8. Proyectar puntos sobre el eje de abscisas y el eje de ordenadas.

9. Se conoce el significado del término entorno.

- Se establecen los estadios:

*Estadio semiótico:* Se señala sobre la gráfica los máximos y mínimos vistos como picos y valles.

*Estadio estructural:* Se dan las coordenadas de los máximos y mínimos mediante la proyección de dichos puntos sobre los ejes cartesianos.

*Estadio autónomo:* Se define formalmente el concepto de máximo y mínimo.

## **6.2. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS**

En esta sección se presentan los instrumentos empleados para la recogida de datos. En primer lugar se encuentra la prueba inicial realizada a los alumnos para evaluar los conocimientos previos con los que parten puesto que nuestro modelo de enseñanza se fundamenta en los conocimientos previos. En segundo lugar, se encuentra el cuestionario que se pasó al observador externo. En tercer lugar, se encuentra el cuestionario que se pasó a los alumnos. Por último, se presenta la prueba final que se realizó a los alumnos para valorar su aprendizaje.

Otros instrumentos utilizados fueron la revisión del cuaderno del alumno y la observación de un trabajo grupal que se llevó a cabo.

### **6.2.1. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL CONOCIMIENTO PREVIO**

Nuestro diseño de enseñanza se establece a partir de los conocimientos previos que poseen los alumnos. Hay muchas fuentes para obtener información acerca de los conocimientos previos. Se llevaron a cabo entrevistas con los diferentes profesores responsables de la docencia en los cursos previos y se analizaron los contenidos mínimos que establece la legislación educativa vigente.

No obstante, somos conscientes de que los alumnos no recuerdan todo lo visto, por lo que se consideró oportuno realizar una prueba para conocer los conocimientos previos reales.

A continuación se presenta la prueba inicial:

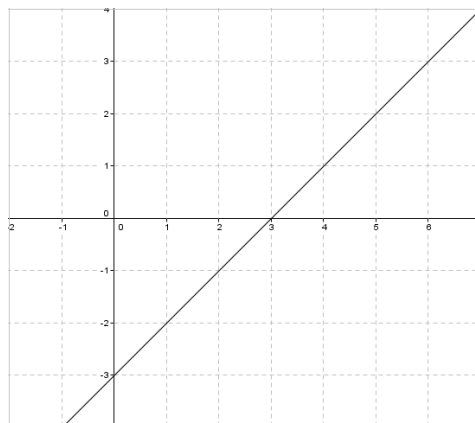
## EVALUACIÓN CONOCIMIENTOS PREVIOS

1.- Observa la siguiente gráfica.

a) ¿Cuál es la pendiente de la recta?

b) ¿Cuál es la ordenada en el origen?

c) Escribe su ecuación.



2.- Considera la función de proporcionalidad inversa  $y = \frac{2}{x}$ , y represéntala gráficamente completando antes la siguiente tabla.

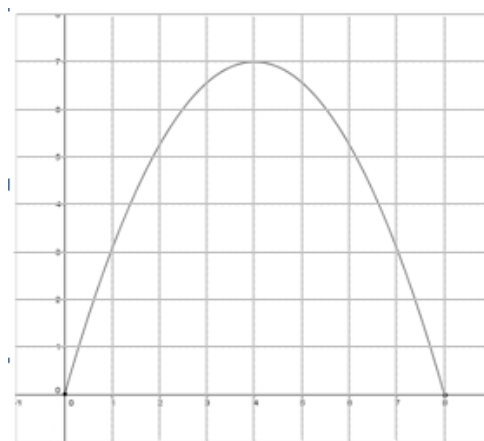
x	- 4	- 2	- 1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y										

3.- Se lanza una pelota al aire. La gráfica representa la altura alcanzada por la pelota en función del tiempo. Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?

b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanzó la pelota?

c) ¿Durante cuántos segundos subió y bajó la pelota?



## 6.2.2. CUESTIONARIO OBSERVADOR EXTERNO

Tras la intervención en el centro de prácticas se entrega el siguiente cuestionario al tutor asignado en el centro educativo para que como observador externo valore el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje durante la docencia impartida.

### CUESTIONARIO OBSERVADOR EXTERNO

Puntúa de 1 (menor valoración) a 5 (mayor valoración), según la escala de Likert, las siguientes cuestiones que permiten valorar la docencia del alumno en prácticas. A continuación, escribe tu opinión por escrito, para apreciar mejor los matices de la valoración.

1	2	3	4	5
En total desacuerdo	Poco de acuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Bastante de acuerdo	Totalmente de acuerdo

1. Grado de adecuación de la docencia al nivel educativo en cuanto a objetivos y contenidos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

2. Valora la metodología utilizada en el desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

3. ¿Se ajusta el desarrollo de la unidad didáctica al tiempo previsto?

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

4. Motiva a los alumnos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión (Uso de la historia, uso de situaciones de la vida cotidiana, conexiones con otras disciplinas, utilidad de las funciones,...):

5. Dominio de los contenidos tratados.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

6. Claridad y calidad de sus intervenciones.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión (adecuación de la expresión al nivel de los alumnos, adecuada secuenciación del contenido,...):

7. Valoración del conocimiento previo de los alumnos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

8. Las pruebas escritas se corresponden con lo tratado en clase.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

9. Interés por el aprendizaje de los alumnos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

10. Grado de atención de los alumnos en el desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión (orden del aula, atención a la explicación, actitud del alumno ante el profesor, ...)

11. Intervención del alumno en el proceso de enseñanza (salidas a la pizarra, intervenciones orales, actividades,...).

Frecuencia: Nunca, a menudo, constantemente.



12. El profesor muestra una actitud que favorece el diálogo y al planteamiento de dudas.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

13. Idoneidad de los recursos y materiales empleados en relación con el tratamiento.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

14. Comentarios personales.

### 6.2.3. CUESTIONARIO ALUMNOS

Asimismo, tras finalizar la docencia se realizó a los alumnos un cuestionario anónimo. Este cuestionario estaba ya planificado en la Unidad Didáctica que se encuentra en los anexos. Se busca poder conocer mediante sus respuestas si, a su juicio, la docencia les ha resultado adecuada, si se ha logrado mostrar la utilidad de la materia impartida y que hagan una reflexión sobre su trabajo personal.

A continuación se muestra el cuestionario realizado.

#### CUESTIONARIO ALUMNOS

- ¿Consideras útil la materia impartida en esta unidad didáctica de funciones? Justifica tu respuesta.
- De los conceptos vistos en esta unidad didáctica, ¿cuáles te han resultado más fáciles y cuáles más difíciles?
- De las actividades llevadas a cabo, ¿cuáles te han gustado más y cuáles menos? Justifica tu respuesta.
- ¿Crees que se han mandado muchas tareas?
- ¿Cuánto tiempo, fuera del horario escolar, has dedicado al trabajo de esta asignatura a la semana? ¿Consideras que ha sido suficiente?
- Comentarios personales.

#### 6.2.4. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

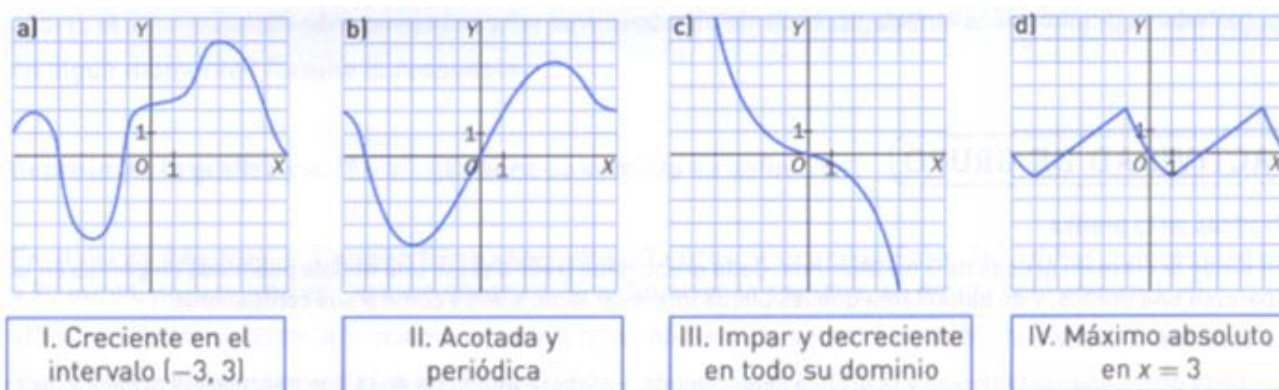
Por último se presenta el cuestionario de valoración del aprendizaje que se llevó a cabo durante la última sesión y cuyos resultados servirán de gran aportación para la valoración del aprendizaje.

Aunque la investigación se centra en la valoración del aprendizaje de los conceptos de función, dominio, monotonía y extremos, se realiza una prueba que atiende a todos los contenidos de la Unidad Didáctica para valorar si realmente hay un aprendizaje de la temática.

Se pasa a mostrar dicho cuestionario:

#### CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

1.- (1 p) Relaciona cada gráfica de función con sus características.



2.- (2 p) Calcula el dominio de las siguientes funciones y estudia si presentan algún tipo de simetría.

a)  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

b)  $g(x) = \frac{6}{x^2 - 5x + 4}$

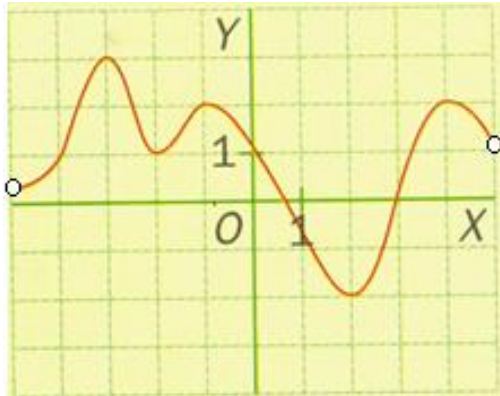
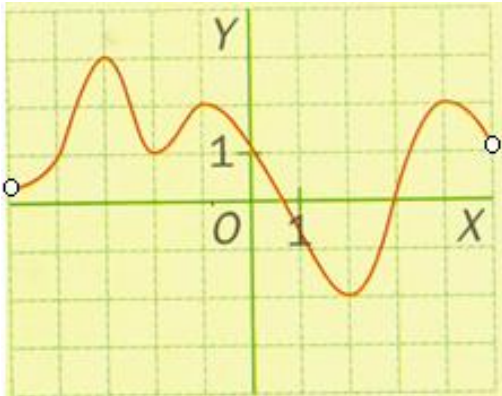
3.- Las siguientes gráficas corresponden ambas a la misma función definida en  $(-5,5)$ .

a) (0.5 p) Señala sobre la gráfica de la izquierda dónde crece y dónde decrece la función, y señala sobre la gráfica de la derecha los máximos y mínimos de la función.

b) (0.75 p) Da los intervalos numéricos donde la función crece o decrece.

c) (0.75 p) Da las coordenadas de los máximos y los mínimos.

d) (1 p) Define función decreciente y mínimo.



4.- (1.5 p) Calcula la función recíproca de  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{2}}$ , y comprueba que realmente se verifica que son recíprocas.

Resuelve **uno** de los siguientes problemas propuestos:

5.- (2.5 p) Un grupo de amigos viaja a Peñafiel desde Valladolid (50 km de distancia). Los primeros 15 km los recorren a 5 km/hora, descansan una hora, y luego cogen un tren de cercanías para llegar en media hora a su destino. Representa gráficamente la función que representa la distancia a la que se encuentran desde Valladolid en cada instante, da su expresión, y estudia su dominio y recorrido.

5'.- (1.5 p) Aitor quiere alquilar un coche y recibe dos ofertas distintas.

Oferta A: 25€ el primer día y 15€ más por cada día de alquiler o fracción, es decir, se paga el día completo independientemente de que lo alquiles 15 minutos o 22 horas.

Oferta B: 18€ cada día o fracción.

Representa ambas funciones durante los 5 primeros días e indica los intervalos de días en los que es mejor cada oferta.

### 6.3. ANÁLISIS DE LA DOCENCIA POR LA PROFESORA INVESTIGADORA

Se considera que los alumnos han mostrado un buen comportamiento e interés durante el desarrollo de la docencia. Prueba de ello es que en general había silencio en el aula y exponían dudas que mostraban inquietud por la materia, interviniendo siempre en orden y respetando las aportaciones de los compañeros.

Asimismo, han participado activamente cuando se ha requerido y han mostrado mucha motivación y esfuerzo en la realización de varias actividades.

Esta actitud del grupo favoreció el buen desarrollo de la docencia.

En cuanto al conocimiento previo con el que parten los alumnos de la propia unidad se considera que es bueno, sin embargo se ha observado un conocimiento previo deficiente relacionado con las Unidades Didácticas ‘Ecuaciones’ e ‘Inecuaciones’ del presente curso, que en ocasiones ralentizaba el desarrollo de la docencia.

A pesar de esta dificultad encontrada se pudo llevar a cabo la planificación prevista. En particular se ha podido realizar la docencia de los conceptos objeto de esta investigación según aparece en el diseño de enseñanza planificado a través de los distintos registros de representación con el referente el marco ELOS.

Considero que, en general, ha habido un buen aprendizaje. Se llega a esta conclusión puesto que los alumnos prestaban atención en clase y solían responder correctamente a las preguntas que se les formulaba. Asimismo, ellos eran los encargados de resolver los ejercicios y problemas propuestos y se observa que, en general, los errores individuales corregidos no suelen volver a ser cometidos por estos alumnos.

Se percibe que ha habido un aprendizaje significativo de los conceptos de monotonía y extremos tras seguir el diseño de enseñanza planificado y se espera que el análisis de datos corrobore dicha percepción.

Sin embargo, no se percibe el mismo aprendizaje con el concepto de dominio que resulta ser un concepto nuevo y menos cercano a la intuición.

En conclusión, se ha sentido que se ha captado la atención y el interés del alumnado y además se ha logrado motivarlos. En cuanto al grado de aprendizaje de los alumnos mi impresión es que ha sido alto.

Con respecto a mi intervención creo que las explicaciones han sido claras dado que las dudas planteadas solían ser fruto del interés por saber más y no tanto de una mala comprensión.

## 6.4. ANÁLISIS DE LA DOCENCIA POR UN OBSERVADOR EXTERNO

A continuación se muestran las respuestas del cuestionario completado por el observador externo. Éstas son de gran valor puesto que aportan objetividad en la valoración de la acción docente y del proceso de enseñanza-aprendizaje, y por lo tanto, también de la investigación.

Se pidió que puntuara de 1 (menor valoración) a 5 (mayor valoración), las siguientes cuestiones y que comentara su opinión por escrito, para apreciar mejor los matices de la valoración.

1	2	3	4	5
En total desacuerdo	Poco de acuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Bastante de acuerdo	Totalmente de acuerdo

1. Grado de adecuación de la docencia al nivel educativo en cuanto a objetivos y contenidos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Se adecuaba perfectamente.

2. Valora la metodología utilizada en el desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Motiva a los alumnos despertando su interés por la asignatura. Mantuvo su atención durante el desarrollo de las sesiones.

3. ¿Se ajusta el desarrollo de la unidad didáctica al tiempo previsto?

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Con total precisión.

4. Motiva a los alumnos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión (Uso de la historia, uso de situaciones de la vida cotidiana, conexiones con otras disciplinas, utilidad de las funciones,...): Preparó diferentes actividades que conectaba con cuestiones de la vida cotidiana, o lo suficientemente motivadoras para captar su atención.

5. Dominio de los contenidos tratados.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Sin lugar a dudas.

6. Claridad y calidad de sus intervenciones.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión (adecuación de la expresión al nivel de los alumnos, adecuada secuenciación del contenido,...): Es muy clara exponiendo, y muy metódica en la intervención.

7. Valoración del conocimiento previo de los alumnos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Se preocupó de preparar una evaluación inicial que corrigió de forma inmediata.

8. Las pruebas escritas se corresponden con lo tratado en clase.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Muy pensada la prueba escrita para que cubriera los diferentes objetivos

9. Interés por el aprendizaje de los alumnos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Muy alto; está muy motivada para la docencia.

10. Grado de atención de los alumnos en el desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión (orden del aula, atención a la explicación, actitud del alumno ante el profesor, ...): Como ya he dicho, captaba perfectamente su atención y le mostraron mucho respeto, tanto en la fase de observación como en la de intervención.

11. Intervención del alumno en el proceso de enseñanza (salidas a la pizarra, intervenciones orales, actividades,...).

Frecuencia: Nunca, a menudo, constantemente.

Muy a menudo

12. El profesor muestra una actitud que favorece el diálogo y al planteamiento de dudas.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Es muy cercana al alumnado por lo que lo favorece mucho.

13. Idoneidad de los recursos y materiales empleados en relación con el tratamiento.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión: Trabajó con mucho interés en la búsqueda de ejercicios y materiales, innovando actividades.

#### 14. Comentarios personales.

Muy motivada para la docencia; capta el interés rápidamente de los alumnos y mantiene su atención; además controla perfectamente el comportamiento de la clase como si tuviera años de experiencia docente.

#### **Reflexión**

La puntuación dada por el observador externo en todos los aspectos a valorar ha sido la máxima.

El observador externo conocía la temporalización prevista y corrobora que el desarrollo de la unidad didáctica se ajustó al tiempo previsto. Además, considera que el contenido escogido para la docencia se adecuaba al nivel del grupo de alumnos.

El observador cree que mostré preocupación por conocer los conocimientos previos para poder iniciar la docencia partiendo de ellos y aprobó la evaluación inicial que elaboré. Asimismo, opina que la prueba escrita final fue muy meditada, buscando siempre cubrir todos los contenidos mínimos.

En lo que respecta a la actuación de la profesora, el observador externo considera que las intervenciones han sido claras y metódicas, mostrando motivación por la docencia y buscando siempre la motivación y el interés del alumnado.

Valora el esfuerzo por preparar diferentes actividades conectadas con cuestiones de la vida cotidiana y por diseñar una actividad grupal innovadora que resultó lo suficientemente motivadora para captar la atención de los alumnos.

Menciona, en varias ocasiones, que se captó la atención de los alumnos y que la actitud mostrada hacia ellos favoreció que la participación de los alumnos fuera muy frecuente.

En conclusión, finaliza con el siguiente comentario personal resumen de su valoración por la intervención realizada: *“Muy motivada para la docencia; capta el interés rápidamente de los alumnos y mantiene su atención; además controla perfectamente el comportamiento de la clase como si tuviera años de experiencia docente.”*.



## 6.5. ANÁLISIS DE LA DOCENCIA POR LOS ALUMNOS

En la planificación de la Unidad Didáctica se consideró conveniente y útil planificar un cuestionario anónimo para entregárselo a los alumnos una vez terminada la docencia y que así también ellos participen en la evaluación del proceso de enseñanza realizado por la profesora investigadora en prácticas. Asimismo su opinión nos aporta un punto de vista diferente.

Se sabe que estos alumnos se muestran críticos cuando desarrollan las diferentes evaluaciones propuestas por el centro educativo, y además se espera que se muestren sinceros al ser el cuestionario anónimo.

Se realiza un análisis y una síntesis global de las respuestas a cada pregunta.

- **1ª pregunta:** ¿Consideras útil la materia impartida en esta unidad didáctica de funciones? Justifica tu respuesta.

El 84,62% de los alumnos encuentran útil la materia impartida, en especial en el ámbito de la vida cotidiana y también indican que se han trabajado ejemplos que conectaban con otras disciplinas, como la física, lo cual les parece muy útil.

En concreto, dos alumnos consideran que es la Unidad Didáctica de Matemáticas que más útil les resulta.

Por otro lado un 15,38% de los alumnos consideran que los contenidos vistos pueden ser útiles a lo largo de su vida académica o para interpretar algunas gráficas pero en relación a la vida cotidiana no le ven utilidad.

- **2ª pregunta:** De los conceptos vistos en esta unidad didáctica, ¿cuáles te han resultado más fáciles y cuáles más difíciles?

En general los conceptos que les han resultado más fáciles han sido los conceptos de monotonía y extremo. La representación gráfica de estos conceptos se vio en el curso anterior, por lo que los alumnos ya parten de ciertos conocimientos previos, y sobre estos conocimientos previos se afianzó aquello que ya conocían y se impartió la docencia siguiendo los diferentes estadios de enseñanza. Cabría pensar que esta forma de enseñar los conceptos ha favorecido que les resulte más fácil de aprender.

No obstante, el concepto de dominio, que también se impartió siguiendo los diferentes estadios de enseñanza, es uno de los conceptos que les ha resultado más complicado. Uno de los motivos podría ser que este concepto es nuevo para ellos.

Un alumno ratifica que el estadio autónomo para el concepto de dominio entraña mayor dificultad que el estadio semiótico y estructural: *“Más fácil interpretar la gráfica, es decir, los conceptos dominio, recorrido, máximos y mínimos. Más difíciles: sacar el dominio y el recorrido a partir de una función (expresión algebraica).”*.

Asimismo la composición de funciones y con ello el concepto de función recíproca, consideran que también les ha generado mucha dificultad.

- **3ª pregunta:** De las actividades llevadas a cabo, ¿cuáles te han gustado más y cuáles menos? Justifica tu respuesta.

La actividad que sin duda más ha gustado a la mayoría de los alumnos fue una actividad grupal llevada a cabo en forma de juego. Consideran que aprendieron y a la vez se divirtieron. Encuentran que *“la actividad estaba muy bien preparada y pensada y reconocen y admiran el esfuerzo dedicado”*. También exponen que la competición sana entre grupos les motivó, no obstante un alumno cree que también *se producen algunos “piques”*.

Además, consideran que han sido interesantes los problemas con contextos reales y la tarea de analizar una gráfica relacionada con la vida real o con otras disciplinas.

En cuanto a las actividades que menos han gustado tan sólo un alumno comenta que la prueba de evaluación de los conocimientos previos no le agradó porque no recordaba nada.

- **4ª pregunta:** ¿Crees que se han mandado muchas tareas?

La mayoría de la clase, un 96,15%, considera que la cantidad de tareas mandadas han sido suficientes y necesarias para practicar la teoría.

Una persona considera que sí que se han mandado muchas tareas pero no argumenta su respuesta.

- **5ª pregunta:** ¿Cuánto tiempo, fuera del horario escolar, has dedicado al trabajo de esta asignatura a la semana? ¿Consideras que ha sido suficiente?

El 76,92% de los encuestados cree que ha trabajado lo suficiente y el resto considera que podría haber trabajado más. No todos los alumnos han especificado el número de horas que han dedicado a la materia y entre los alumnos que lo especifican encontramos datos muy oscilantes, observándose que algunos alumnos han dedicado poco tiempo pero lo consideran suficiente y otros que habiendo trabajado más horas aún no lo consideran suficiente. Esto es un reflejo de que el aprendizaje de los conceptos matemáticos entraña diferente dificultad a cada alumno, necesitando diferentes tiempos para su aprendizaje.

➤ **Reflexión** a través de los comentarios personales.

Los comentarios personales de los alumnos nos permiten hacer una valoración de la intervención de la profesora en prácticas y una valoración de los ejemplos y ejercicios desarrollados.

Se considera que las explicaciones de los conceptos han sido claras, explicando *paso a paso* (por estadios), lo cual les ayudaba a entender mejor los conceptos. Asimismo manifiestan que mi actitud favoreció el aprendizaje y dio pie a que se atrevieran a exponer dudas. Algunos de los comentarios seleccionados que recogen estas opiniones son:

*“Tu actitud frente a la clase ha sido muy buena y amena, nos ha ayudado a entender las cosas y a hacer preguntas”.*

*“Me ha gustado mucho como se explicaba la materia, muy clara y preocupada porque lo entenderíamos”.*

*“Me ha gustado como has dado las clases porque lo explicabas bien y eran amenas”.*

*“Ha sido una semana bastante más atractiva”.*

Un alumno manifiesta que al principio parecía nerviosa:

*“Creo que tu forma de explicar es muy buena ya que lo dejas todo muy claro. Se te vio un poco nerviosilla el primer día pero a medida que has cogido más confianza ya estabas bien; y se agradece que al menos desde fuera se te notase a gusto”.*

En cuanto a los ejemplos y ejercicios escogidos se observa que la elección fue buena puesto que les ha gustado que fueran ejemplos reales y en ocasiones relacionados con otras disciplinas como la física.

## 7. ANÁLISIS DE DATOS

En este apartado se analizan los conocimientos previos con los que parte cada uno de los alumnos y la valoración del aprendizaje tras la docencia impartida.

Esta valoración del aprendizaje se analiza a través de la prueba final escrita realizada y de la actitud de los alumnos a través del cuaderno.

### 7.1. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL CONOCIMIENTO PREVIO

Partiendo de la importancia que se le otorga a los conocimientos previos, tal y como se ha expuesto a lo largo de este trabajo, se llevó a cabo una prueba de evaluación inicial con un doble objeto:

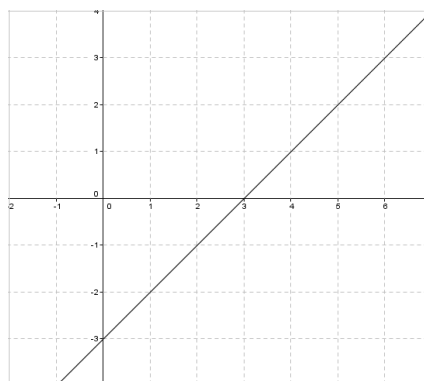
- Obtener información necesaria sobre el grado de consecución de los contenidos correspondientes a la Unidad Didáctica ‘Funciones y sus propiedades globales’ en el curso de 3º ESO.
- Detectar las dificultades específicas de cada uno de los alumnos a la hora de iniciar el desarrollo de la nueva unidad.

En este apartado se estudian los resultados obtenidos a través del análisis de las respuestas a cada una de las preguntas.

#### ➤ Cuestión nº 1:

*Enunciado:* Observa la siguiente gráfica.

- ¿Cuál es la pendiente de la recta?
- ¿Cuál es la ordenada en el origen?
- Escribe su ecuación.



*Objetivo:* Conocen el sistema de referencia cartesiano y saben identificar funciones sencillas, realizando conversiones de la representación gráfica a la expresión algebraica.

Resultados:

RC	a)	58,62%
	b)	41,38%
	c)	37,94%
RI	a)	27,59%
	b)	44,83%
	c)	31,03%
NC	a)	13,79%
	b)	13,79%
	c)	31,03%

*Reflexión:* Los porcentajes de respuestas correctas son muy bajos por lo que habrá que analizar los errores cometidos y proponer orientaciones didácticas.

*Dificultades y errores:* En cuanto a la pendiente indican sin justificación que ésta es  $m = -1$ . Con respecto al apartado b) el error más común es dar como ordenada 3, confundiendo ordenada con abscisa, o bien indican que la ordenada es el punto (0,-3).

En el último apartado observamos que muchos alumnos se abstienen de responder y los errores cometidos fueron aportar una expresión incorrecta, derivada de errores en los apartados anteriores, o simplemente considerar que su expresión es la ecuación general  $y = mx+n$ .

*Orientaciones didácticas:* Se debe comenzar corrigiendo estos errores e insistir en los conceptos de ordenada y abscisa.

➤ **Cuestión nº 2:**

*Enunciado:* Considera la función de proporcionalidad inversa  $y = \frac{2}{x}$ , y represéntala gráficamente completando antes la siguiente tabla.

x	- 4	- 2	- 1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y										

*Objetivo:* Comprobar si los alumnos recuerdan completar una tabla de valores partiendo de la expresión algebraica de una función y su capacidad para elaborar una gráfica a partir de la tabla de valores (representación de puntos en el plano cartesiano).

*Resultados:*

RC	Tabla de Valores	100%
	Representación Gráfica	79,31%
RI	Tabla de Valores	0%
	Representación Gráfica	20,69%
NC	Tabla de Valores	0%
	Representación Gráfica	0%

*Reflexión:* Todos los alumnos completan correctamente la tabla de valores y se observa durante la realización de la prueba que la representación gráfica en ocasiones es incompleta por falta de tiempo.

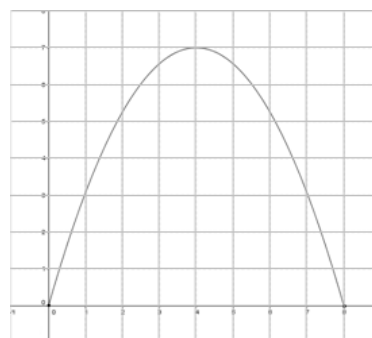
*Errores y dificultades:* La representación de puntos en el plano cartesiano en ocasiones es incorrecta y en consecuencia la gráfica no puede ser correcta. Asimismo, se observa un caso en el que la representación de puntos es correcta pero no reconocen qué tipo de función es y terminan representando una función lineal.

*Orientaciones didácticas:* Recordar la representación de puntos en el plano cartesiano. Asimismo recordar las funciones elementales.

➤ **Cuestión nº 3:**

*Enunciado:* Se lanza una pelota al aire. La gráfica representa la altura alcanzada por la pelota en función del tiempo. Contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?
- ¿Cuál es la máxima altura que alcanzó la pelota?
- ¿Durante cuántos segundos subió y bajó la pelota?



*Objetivo:* Comprobar sus conocimientos previos sobre el estudio gráfico de una función a partir de sus propiedades (monotonía y extremos) y su interpretación dentro de un contexto de la vida real.

*Resultados:*

RC	a)	79,31%
	b)	79,31%
	c)	82,76%
RI	a)	10,34%
	b)	17,24%
	c)	13,79%
NC	a)	10,34%
	b)	3,45%
	c)	3,45%

*Reflexión:* En torno a un 80% de los alumnos realizan correctamente el estudio gráfico de una función a partir de sus propiedades.

*Errores y dificultades:* Hay confusiones entre cuál es la variable dependiente e independiente. Se observa que reconocen gráficamente cuál es el máximo de la función e identifican sus coordenadas pero presentan dificultades a la hora de hacer una interpretación contextual con estos datos.

*Orientaciones didácticas:* Se considera imprescindible trabajar ejemplos y problemas contextualizados. Asimismo, insistir en los conceptos de variable independiente y variable dependiente ejemplificando con fenómenos de la vida cotidiana.

## **Reflexión**

Tras el análisis de los resultados obtenidos se observa que en general hay un predominio de las respuestas correctas, lo que nos indica que el conocimiento previo con el que parten los alumnos les va a permitir un buen aprendizaje de la docencia.

Los alumnos presentan facilidad trabajando con la representación tabular del concepto de función y su conversión a la representación gráfica. Asimismo, en general realizan correctamente el estudio gráfico de una función a partir de sus propiedades (monotonía y extremos) y su interpretación dentro de un contexto de la vida real.

Ahora bien, pese a que el conocimiento previo es bueno, hay contenidos que les presentan una mayor dificultad y estas dificultades se manifiestan mediante errores cometidos. Tras el análisis de datos, las mayores dificultades se han encontrado en los siguientes contenidos:

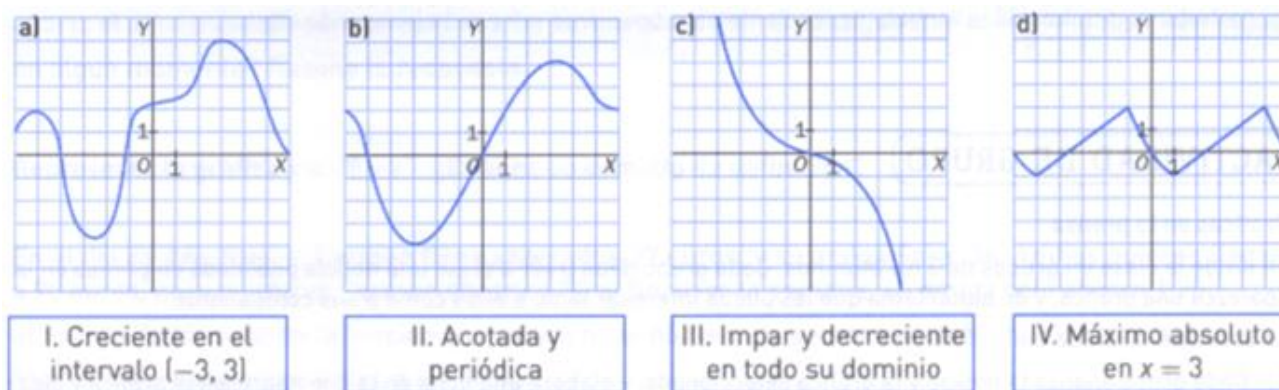
- Sistema cartesiano.
- Conversión del registro gráfico al sistema de representación algebraico.

## 7.2. CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

En este apartado se analizan cada una de las preguntas que se realizaron al finalizar la docencia con el fin de valorar el aprendizaje y asimismo analizar los errores cometidos y plantear propuestas didácticas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

### ➤ Cuestión nº 1:

*Enunciado:* Relaciona cada gráfica de función con sus características.



*Objetivo:* Comprobar si los alumnos son capaces de reconocer gráficamente algunas de las propiedades globales de las funciones.

*Resultados:*

RC	a)	93,33%
	b)	93,33%
	c)	100%
	d)	96,67%
RI	a)	6,67%
	b)	6,67%
	c)	0%
	d)	3,33%
NC	a)	0%
	b)	0%
	c)	0%
	d)	0%

*Reflexión:* Prácticamente la totalidad de los alumnos reconocen gráficamente las propiedades explicadas en la docencia, por lo que han alcanzado el estadio semiótico para estos conceptos.



*Errores y dificultades:* Dos alumnos han tenido problemas en examinar el intervalo de crecimiento y un alumno presenta problemas en el reconocimiento de funciones periódicas.

*Orientaciones didácticas:* Insistir en actividades de refuerzo de reconocimiento gráfico solamente en los alumnos que presenten problemas.

➤ **Cuestión nº 2:**

*Enunciado:* Calcula el dominio de las siguientes funciones y estudia si presentan algún tipo de simetría.

b)  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

b)  $g(x) = \frac{6}{x^2 - 5x + 4}$

*Objetivo:* Comprobar si los alumnos son capaces de hallar el dominio y estudiar el tipo de simetría de una función dada su expresión algebraica.

- Apartado a:

- *Resultados con respecto al cálculo del dominio:*

RC	13,33%
RI	76,67%
NC	10%

*Reflexión:* La mayoría de alumnos se aventuran a dar una respuesta aunque en la mayor parte de los casos viene a ser incorrecta. Se observa que el cálculo del dominio de una función con raíces cuadradas les presenta gran dificultad.

*Errores y dificultades:* Algunos alumnos exponen directamente un resultado sin sentido y sin justificación. Otros buscan un valor numérico particular que no pertenece al dominio, concluyendo que el dominio es  $\mathbb{R}$  salvo dicho valor.

Una gran dificultad que no han superado es la resolución de inecuaciones junto con el análisis de signos y su paso a intervalos numéricos. Dos alumnos exponen que el radicando ha de ser positivo pero no son capaces de resolver la inecuación.

Otro error común es el que mostramos a continuación al tomar raíces cuadradas:

2- a)  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$   
 $4x^2 - 1 \geq 0$   
 $4x^2 \geq 1$   
 $x^2 \geq \frac{1}{4}; x = \sqrt{\frac{1}{4}}$   
 Dom:  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \sqrt{\frac{1}{4}} \right\}$

Desarrollo del ejercicio por el alumno 18

*Orientaciones didácticas:* Insistir más en la resolución de inecuaciones.

- *Resultados con respecto al estudio de la simetría:*

RC	66,67%
RI	13,33%
NC	20%

*Reflexión:* La mayoría de los alumnos contestan bien a la pregunta. Se observa un porcentaje más alto que el anterior con respecto a no contestar la pregunta que posiblemente se deba a que no leen el enunciado completo.

*Errores y dificultades:* Los errores cometidos son el mal cálculo de  $f(-x)$  y  $-f(x)$  y la confusión entre las simetrías.

*Orientaciones didácticas:* Afianzar la definición formal del concepto de simetría y los cálculos de  $f(-x)$  y de  $-f(x)$ .

• Apartado b:

- *Resultados con respecto al cálculo del dominio:*

RC	60%
RI	26,67%
NC	13,33%

*Reflexión:* Tan sólo cuatro alumnos dejan la pregunta sin contestar. Poco más de la mitad de los alumnos responden correctamente.

*Errores y dificultades:* Respuestas incomprensibles que indican dificultades con respecto a la Unidad Didáctica de Ecuaciones.

Otro error cometido es aplicar una fórmula errónea al buscar los valores que anulan el denominador. A continuación se muestra un ejemplo de este error:

The image shows a student's handwritten work on a grid background. At the top, it says 'b)  $g(x) = \frac{5}{x^2 - 5x + 4}$ '. Below this, the denominator is written as  $x^2 - 5x + 4$ . Then, the quadratic formula is applied incorrectly:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{4a - c}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{5}{2}$ . The student has used  $4a - c$  instead of  $b^2 - 4ac$  in the discriminant.

Desarrollo del ejercicio por el alumno 14

*Orientaciones didácticas:* Incidir y repasar más las cuestiones concernientes a la resolución de ecuaciones.

- *Resultados con respecto al estudio de la simetría:*

RC	63,33%
RI	16,67%
NC	20%

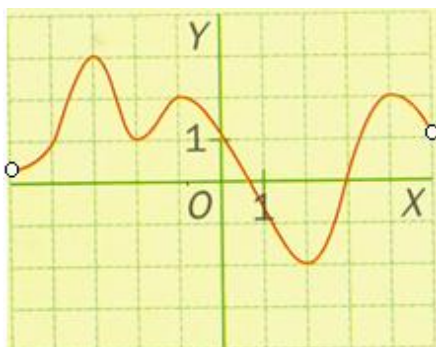
*Reflexión:* Observamos que los alumnos que no han estudiado la simetría en el apartado a) tampoco lo hacen en este apartado. El motivo podría ser una incompleta lectura del enunciado o que no comprenden la definición formal del concepto de simetría.

*Errores y dificultades:* las respuestas incorrectas derivan de errores cometidos en el cálculo de  $g(-x)$  o bien de  $-g(x)$  y problemas al realizar comparativas entre estos resultados obtenidos y la función  $g(x)$ .

*Orientaciones didácticas:* Afianzar la definición formal del concepto de simetría.

➤ **Cuestión n° 3:**

*Enunciado:* La siguiente gráfica corresponde a una función definida en  $(-5,5)$ .



*Objetivo:* Valorar el aprendizaje de los conceptos de monotonía y de extremos a través de los diferentes estadios de aprendizaje: semiótico, estructural y autónomo.

- Apartado a:

*Enunciado:* Señala sobre la gráfica dónde crece y dónde decrece la función y señala los máximos y mínimos de la función.

- *Resultados con respecto a la monotonía:*

RC	96,67%
RI	0%
NC	3,33%

*Reflexión:* Excepto un alumno, el resto de la clase indica bien la monotonía sobre la gráfica. Esto quiere decir que todos los alumnos, salvo uno, han alcanzado el estadio de aprendizaje semiótico.

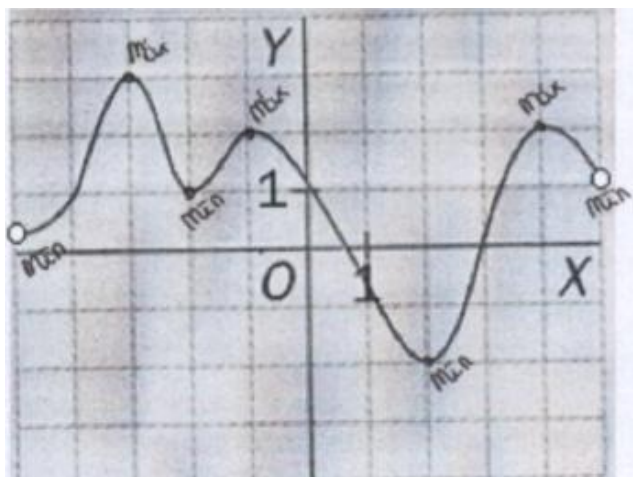
- *Resultados con respecto a los extremos:*

RC	83,34%
RI	13,33%
NC	3,33%

*Reflexión:* La mayoría de los alumnos alcanzan el estadio semiótico de aprendizaje para el concepto de extremos pero se observa que el porcentaje de respuestas incorrectas es ligeramente mayor con respecto a lo acontecido con respecto a la monotonía. Un alumno no realiza este apartado y esto puede ser debido a que o bien no comprende el

enunciado o bien no lee el enunciado completo. Nos inclinamos por esta última opción puesto que después demuestra en el siguiente apartado que sabe identificar los extremos dando correctamente sus coordenadas.

*Errores y dificultades:* Los errores cometidos se deben a que consideran el intervalo  $[-5,5]$  como dominio de la función a pesar de estar indicado en el enunciado que el dominio es  $(-5,5)$  y de reflejarse sobre la gráfica con la notación de punto vacío. Por lo tanto, no saben interpretar la notación de intervalo abierto/cerrado ni la notación de punto relleno/vacío.



Desarrollo del ejercicio por el alumno 19

*Orientaciones didácticas:* Incidir más en la notación y en el reconocimiento gráfico de los extremos.

- Apartado b:

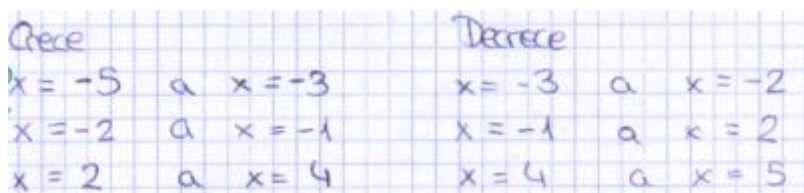
*Enunciado:* Da los intervalos numéricos donde la función crece o decrece.

*Resultados:*

RC	80%
RI	16,67%
NC	3,33%

*Reflexión:* La mayoría de los alumnos alcanzan el estadio de aprendizaje estructural.

*Errores y dificultades:* Presentan dificultad para expresar la monotonía mediante intervalos numéricos. Les genera confusión la coincidencia del uso de la notación  $(,)$  para intervalo abierto y para dar las coordenadas de un punto.



Desarrollo del ejercicio por el alumno 10

*Orientaciones didácticas:* Trabajar más la notación.

- Apartado c:

*Enunciado:* Da las coordenadas de los máximos y los mínimos.

*Resultados:*

RC	76,67%
RI	23,33%
NC	0%

*Reflexión:* Todos los alumnos responden a la pregunta y la mayoría alcanzan el estadio estructural para el concepto de extremos.

*Errores y dificultades:* Un error común cometido es dar las coordenadas de los puntos que en el apartado a) consideraron extremos pero no pertenecen al dominio.

Exceptuando este error, previsible dados los resultados del estadio anterior, el resto de errores observados corresponden a no saber dar las coordenadas de los extremos que se encuentran en el segundo cuadrante y a utilizar corchetes para dar las coordenadas de un punto.

*Orientaciones didácticas:* Ser más insistente en el repaso del sistema cartesiano y en la notación.

- Apartado d:

*Enunciado:* Define función decreciente y mínimo.

- *Resultados con respecto a la definición de función decreciente:*

RC	70%
RI	30%
NC	0%

*Reflexión:* El 30% de los alumnos no alcanza el estadio de aprendizaje autónomo.

*Errores y dificultades:* Este estadio entraña mayor dificultad y entre los errores se observa que algunos alumnos poseen una idea intuitiva pero no llegan a ser rigurosos. Otro de los errores observados es confundirse con la definición de función creciente, por lo que no están entendiendo ni razonando lo que escriben.

*Orientaciones didácticas:* Insistir en la importancia de ser rigurosos y de leer y razonar especialmente en este tipo de preguntas. Introducir las definiciones formales apoyándonos en una interpretación gráfica.

- *Resultados con respecto a la definición de mínimo:*

RC	63,33%
RI	30%
NC	6,67%

*Reflexión:* Poco más de la mitad de los alumnos alcanza el estadio autónomo.

*Errores y dificultades:* Dan la definición de máximo en lugar de mínimo por lo que no comprenden lo que escriben. Otras definiciones no son lo suficientemente precisas y otras directamente carecen de sentido.

*Orientaciones didácticas:* Insistir en la importancia de ser rigurosos y de leer y razonar especialmente en este tipo de preguntas. Introducir las definiciones formales apoyándonos en una interpretación gráfica.

➤ **Cuestión nº 4:**

*Enunciado:* Calcula la función recíproca de  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{2}}$ , y comprueba que realmente se verifica que son recíprocas.

*Objetivo:* Valorar el aprendizaje del concepto de función recíproca así como de la composición de funciones.

- *Resultados con respecto al cálculo de la función recíproca:*

RC	73,34%
RI	13,33%
NC	13,33%

*Reflexión:* La mayoría de los alumnos hallan la función recíproca. Cuatro alumnos no responden esta cuestión.

*Errores y dificultades:* El desarrollo de una de las respuestas incorrectas no es comprensible. En el resto de errores se observan problemas con cuestiones de polinomios y de ecuaciones.

*Orientaciones didácticas:* Se vuelve a hacer patente la necesidad de trabajar ciertas cuestiones de temas precedentes vistos en el presente curso.

- *Resultados con respecto a la comprobación:*

RC	56,67%
RI	6,67%
NC	36,66%

*Reflexión:* Apenas la mitad de la clase realiza bien la comprobación que pide el ejercicio. Se observa que alumnos que habían hallado la función recíproca no intentan verificar que realmente dicha función obtenida cumple la definición. Posiblemente se deba a la complejidad que conlleva la composición de funciones en este curso.

*Errores y dificultades:* Sólo dos alumnos han intentado sin éxito la comprobación pedida y nuevamente los problemas vienen al operar con polinomios.

*Orientaciones didácticas:* Insistir en las operaciones básicas con polinomios y trabajar más la composición de funciones.

➤ **Cuestión nº 5:**

*Enunciado:* Resuelve **uno** de los siguientes problemas propuestos.

*Objetivo:* Atender a la diversidad mediante un examen flexibilizado. Ambos problemas trabajan el concepto de función definida a trozos y se busca comprobar si son capaces de realizar la conversión de una función lineal definida a trozos dada mediante su enunciado a su representación gráfica y de ésta a su expresión algebraica. Asimismo comprobar su capacidad para estudiar el dominio y el recorrido mediante su gráfica.

*Reflexión:* El 73,33% de los alumnos escogieron la opción primera que a priori consideramos tanto el observador externo como yo que podría resultar más complicada. El 23,33% de los alumnos optaron por el segundo problema propuesto y tan sólo una persona no realizó ninguno de los dos problemas.



- Opción primera:

*Enunciado:* Un grupo de amigos viaja a Peñafiel desde Valladolid (50 km de distancia). Los primeros 15 km los recorren a 5 km/hora, descansan una hora, y luego cogen un tren de cercanías para llegar en media hora a su destino. Representa gráficamente la función que representa la distancia a la que se encuentran desde Valladolid en cada instante, da su expresión, y estudia su dominio y recorrido.

- *Resultados con respecto a la representación gráfica:*

RC	81,82%
RI	18,18%
NC	0%

*Reflexión:* La mayoría de los alumnos representan correctamente la gráfica de la función.

*Errores y dificultades:* Algunos alumnos indican gráficamente que el recorrido se realizó en más horas pero hay una ausencia de justificación por lo que no se sabe el origen del error.

*Orientaciones didácticas:* A pesar de ser buenos los resultados hay que trabajar más los problemas contextualizados.

- *Resultados con respecto a dar la expresión:*

RC	22,73%
RI	27,27%
NC	50%

*Reflexión:* Siendo conscientes de que esta parte entraña mayor dificultad, enmarcándose en el estadio autónomo, la mitad de los alumnos no intenta hallar la expresión algebraica de la función y menos de la cuarta parte logra dar correctamente la expresión.

*Errores y dificultades:* Presentan expresiones incompletas o bien tienen dificultad a la hora de definir los intervalos en los que está definida cada parte de la función.

*Orientaciones didácticas:* Se debe trabajar más la conversión de la representación gráfica a la expresión algebraica.

- *Resultados con respecto al dominio:*

RC	40,91%
RI	50%
NC	9,09%

*Reflexión:* Menos de la mitad de los alumnos reconocen correctamente el dominio de la función a través de la gráfica y expresan numéricamente de forma correcta el dominio de la función. Estos alumnos han alcanzado el estadio estructural y con ello previamente el estadio semiótico. La mitad de los alumnos halla mal el dominio a partir de la gráfica.

*Errores y dificultades:* Gran parte de los alumnos expresa, sin justificación, que el dominio es  $[0, +\infty)$ . Otro de los errores cometidos es consecuencia de una mala representación de la gráfica.

*Orientaciones didácticas:* Insistir en la proyección de la gráfica sobre el eje de abscisas.

- *Resultados con respecto al recorrido:*

RC	68,18%
RI	22,73%
NC	9,09%

*Reflexión:* Los resultados obtenidos son ligeramente mejores que con respecto al dominio.

*Errores y dificultades:* Dan un recorrido incorrecto y sin justificación, por lo que resulta imposible sacar conclusiones del origen del error.

*Orientaciones didácticas:* Insistir en la proyección de la gráfica sobre el eje de ordenadas.

- Opción segunda:

*Enunciado:* Aitor quiere alquilar un coche y recibe dos ofertas distintas.

Oferta A: 25€ el primer día y 15€ más por cada día de alquiler o fracción, es decir, se paga el día completo independientemente de que lo alquiles 15 minutos o 22 horas.

Oferta B: 18€ cada día o fracción.

Representa ambas funciones durante los 5 primeros días e indica los intervalos de días en los que es mejor cada oferta.

- *Resultados con respecto a representación gráfica:*

RC	28,57%
RI	71,43%
NC	0%

*Reflexión:* La mayoría de alumnos que han escogido este problema no realiza bien la conversión de enunciado a representación gráfica debido a una mala interpretación del enunciado. Recordamos que este problema lo escogieron tan sólo 7 personas por lo que es una minoría los alumnos que no alcanzan el estadio estructural para el concepto de función.

*Errores y dificultades:* Las funciones definidas a trozos les presentan grandes dificultades y el error común cometido es representar una función lineal continua en lugar de una función definida a trozos.

*Orientaciones didácticas:* Trabajar más el concepto de función definida a trozos en especial a través de problemas contextualizados que requieran de conversiones entre las diferentes representaciones. Insistir en la necesidad de una buena comprensión de los enunciados.

- *Resultados con respecto al intervalo:*

RC	14,28%
RI	42,86%
NC	42,86%

*Reflexión:* Casi la mitad de los alumnos no contesta esta cuestión por lo que se cree que hay una mala comprensión de lo que pide el enunciado.

*Errores y dificultades:* Las respuestas incorrectas derivan de la mala representación gráfica realizada en el apartado anterior.

*Orientaciones didácticas:* Como propuesta para corregir estas dificultades se plantea realizar más problemas contextualizados que requieran de interpretación de enunciados, asimismo insistir en la conveniencia de leer detenidamente los enunciados tantas veces como sea necesario hasta su comprensión.

## Reflexión

Esta prueba escrita realizada trató de abarcar la mayor parte de los contenidos impartidos atendiendo siempre a que fueran evaluados todos los contenidos mínimos.

A continuación se recogen los porcentajes de las respuestas correctas:

PORCENTAJE RESPUESTAS CORRECTAS			
Reconocimiento gráfico de las propiedades globales de las funciones	Extremos		93,33%
	Monotonía		93,33%
	Simetría y Monotonía		100%
	Acotación y Periodicidad		96,67%
Estudio Dominio y Simetría de una función dada su expresión algebraica	Dominio		13,33%
	Simetría		66,67%
	Dominio		60%
	Simetría		63,33%
Valorar el aprendizaje de los conceptos de monotonía y extremos a través de los diferentes estadios de aprendizaje	Reconocimiento Gráfico	Monotonía	96,67%
		Extremos	83,34%
	gráfico→numérico	Monotonía	80%
		Extremos	76,67%
	Definición Formal	Decreciente	70%
		Mínimo	63,33%
Funciones recíprocas y composición de funciones	Cálculo Recíproca		73,34%
	Composición de Funciones		56,67%
Función definida a trozos	Enunciado→ Gráfica		81,82%
	Gráfica→Expresión algebraica		22,73%
	Reconocimiento Gráfico	Dominio	40,91%
		Recorrido	68,18%
Función definida a trozos	Enunciado→ Gráfica		28,57%
	Gráfico→Numérico		14,28%

A través de esta tabla se observa que hay un predominio de las respuestas correctas por lo que se considera que el grado de aprendizaje ha sido alto.

Se observa que en general el reconocimiento gráfico de las propiedades globales de las funciones les resulta más fácil y en particular presentan facilidad en los conceptos de monotonía y extremos en cualquiera de sus representaciones. Asimismo, la mayoría halla correctamente la función recíproca de una función dada.

Sin embargo, las mayores dificultades se observan en los conceptos de dominio y de función definida a trozos.

### 7.3. ANÁLISIS DE LA ACTITUD A TRAVÉS DEL CUADERNO

Puesto que el cuaderno del alumno es una herramienta que nos aporta gran información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos, en varias ocasiones éste fue recogido para evaluar el trabajo personal y observar qué dificultades aparecían en este proceso.

Todos estos datos observados están recogidos en la siguiente tabla donde se indica mediante un asterisco si la tarea fue entregada.

ENTREGA DE LA TAREAS (T) POR EL ALUMNO (A)			
A/T	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
1			*
2	*	*	*
3			*
4	*	*	*
5	*	*	*
6	*	*	*
7	*	*	*
8	*	*	*
9			*
10	*	*	*
11	*	*	*
12	*	*	*
13	*	*	*
14	*	*	*
15	*	*	*
16	*	*	*
17	*	*	*
18	*	*	*
19	*	*	*
20	*	*	*
21	*	*	*
22	*	*	*
23	*	*	*
24	*	*	*
25	*	*	*
26	*		*
27	*	*	*
28	*	*	*
29	*	*	*
30	*	*	*

## **Reflexión**

El primer día que se recogieron los cuadernos se observó que el 90% de los alumnos presentaban las actividades a realizar para ese día.

También se mandó un trabajo individual en el que se pedía el análisis de la gráfica de una función dentro de un contexto de la vida cotidiana o en relación con otras disciplinas y el 86,67% de los alumnos entregaron esta actividad.

Se observó que durante la última semana de la docencia, el 100% de los alumnos traía las actividades pedidas.

Podemos concluir que la mayoría de los alumnos realiza regularmente las tareas pedidas y muestran mayor trabajo y esfuerzo personal cuando se acerca la fecha del examen.

Asimismo, se revisa el trabajo personal de los alumnos a través de su cuaderno mediante la observación individual en las sesiones dedicadas a la resolución de ejercicios y problemas los cuales han de resolver ellos. Se observa que en torno al 90% de los alumnos trabaja activamente en la resolución de ejercicios y problemas en el aula y, sin embargo, hay un 10% que generalmente “pierde el tiempo”.

Algunos alumnos prefieren trabajar por parejas, las cuales están estratégicamente organizadas por el observador externo. Por tanto, no se muestra oposición al trabajo en parejas sino que se considera que es enriquecedor tal y como están escogidas.

En cuanto a la actividad grupal, además de la observación directa del trabajo de los diversos grupos, también se recogieron las fichas elaboradas por cada grupo y tras el análisis de ambos datos se concluye que todos los grupos trabajaron en la resolución de todos los ejercicios.

Por tanto, se considera que la mayoría de los alumnos se esfuerzan y realizan las diferentes actividades pedidas.

## 7.4. REFLEXIÓN FINAL DEL ANÁLISIS

En esta reflexión final se va a valorar por una parte el conocimiento previo en general, ya que es la base de conocimientos con la que parten los alumnos, y por otra parte el aprendizaje de los contenidos que son objeto de esta investigación.

Los resultados obtenidos en la prueba inicial de valoración del conocimiento previo indican que hubo un alto grado de consecución de los contenidos correspondientes a la Unidad Didáctica de 'Funciones y sus propiedades globales' en el curso anterior de 3º ESO. Por lo que a priori se puede considerar que esto les va a permitir un buen aprendizaje de la docencia. A pesar de que el conocimiento previo es bueno, se observa que la conversión de la gráfica de una función lineal a su expresión algebraica les genera una gran dificultad.

Se hace una valoración del aprendizaje de los contenidos objeto de esta investigación a través del cuaderno del alumno y de los resultados obtenidos en la prueba escrita final.

En cuanto al concepto de función, se observa durante la docencia que la mayoría de los alumnos alcanza con facilidad los estadios semiótico y estructural. Tras el análisis de los resultados de los problemas de la prueba final donde se valora el estadio de aprendizaje autónomo para el concepto de función, se observa que un porcentaje muy bajo de alumnos, en torno al 20%, alcanzó dicho estadio.

Con respecto al grado de aprendizaje del concepto de dominio se considera que ha sido bajo puesto que menos de la mitad de los alumnos han alcanzado el estadio estructural. Sin embargo, si analizásemos aisladamente otro de los ejercicios con respecto al cálculo del dominio de una función a partir de su expresión algebraica cabría pensar que más de la mitad de los alumnos han alcanzado el estadio autónomo. Pero sabemos que realmente no lo han alcanzado y esto no es más que una consecuencia de un aprendizaje mecánico y memorístico.

Por último, se considera que ha habido un buen aprendizaje de los conceptos de monotonía y extremos. Basta observar la siguiente tabla en la que se recogen los datos obtenidos de ambos conceptos en cada uno de los estadios.

PORCENTAJE DE LOS ALUMNOS QUE ALCANZAN CADA ESTADIO DE LOS CONCEPTOS DE MONOTONÍA Y EXTREMOS			
Concepto \ Estadio	Estadio Semiótico	Estadio Estructural	Estadio Autónomo
Monotonía	96,67%	80%	70%
Extremos	83,34%	76,67%	63,33%

## 7.5. ERRORES Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

En este apartado se recopilan los principales errores y dificultades de aprendizaje que se han observado en el alumnado en la resolución de las cuestiones que abarcaban los conceptos objeto de esta investigación de la prueba final.

- Errores en la resolución de ecuaciones.
- Errores en la resolución de inecuaciones.
- Errores derivados de una mala interpretación de la notación punto vacío-relleno.
- Dificultad para reconocer gráficamente el dominio de una función.
- Falta de rigurosidad en las definiciones formales.
- Errores en la conversión del registro gráfico al sistema de representación algebraico.
- Dificultad para interpretación enunciados de problemas.

Con ello se plantean las siguientes orientaciones didácticas principales que se considera que pueden implicar la mejora del aprendizaje de estos contenidos.

- Repasar más despacio las cuestiones concernientes a los conocimientos previos.
- Insistir en cuestiones relacionadas con las Unidades Didácticas de Ecuaciones e Inecuaciones.
- Incidir en la notación que requiere cada concepto remarcando su significado.
- Introducir las definiciones formales apoyándonos en su interpretación gráfica.
- Trabajar más problemas que impliquen una conversión del enunciado a su representación gráfica y de ésta a su expresión algebraica.



## 8. CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

En este apartado se presenta, en primer lugar, las conclusiones obtenidas así como las aportaciones del estudio. Además, se exponen los puntos débiles encontrados y se finaliza con algunas cuestiones abiertas sobre las que se podría seguir investigando.

### 8.1. CONCLUSIONES

A continuación se redactan las conclusiones a través de las hipótesis formuladas en la sección quinta ‘Objetivos e hipótesis de trabajo’.

**Hipótesis 1:** La mejor representación para acercarse al concepto de función y sus propiedades es la representación gráfica.

**Conclusión 1:** En cierta medida esta hipótesis ha sido confirmada tras el estudio realizado. Se obtienen mejores resultados de aprendizaje cuando se trabaja en el registro gráfico y si algún concepto se introduce mediante una definición formal se limitan a memorizarla pero sin entender su significado. Por lo tanto se concluye que el uso de la representación gráfica ayuda a la comprensión del concepto matemático.

**Hipótesis 2:** La enseñanza de los conceptos a través de los distintos registros facilita el aprendizaje.

**Conclusión 2:** No se puede concluir que en todos los casos esta hipótesis sea cierta. Por una parte se observa que la enseñanza de los conceptos de función, monotonía y extremos, a través de los distintos registros sí que ha facilitado su aprendizaje. En cambio, se considera que con respecto al concepto de dominio no ha habido un verdadero aprendizaje sino que la mayoría de los alumnos ha recurrido a un aprendizaje mecánico y memorístico, por lo que no ha influido su enseñanza a través de los distintos registros.

**Hipótesis 3:** Los alumnos alcanzan con facilidad el estadio semiótico.

**Conclusión 3:** En general sí es cierta esta hipótesis aunque no siempre se cumple. En cuanto a los conceptos de función, monotonía y extremos, sí que se observa que los alumnos alcanzan con facilidad el estadio semiótico. Sin embargo, con respecto al concepto de dominio, se observa que en general la mayoría de alumnos presenta una gran dificultad en el reconocimiento gráfico del dominio de una función.

**Hipótesis 4:** Se esperan encontrar dificultades en el aprendizaje debido a un conocimiento previo insuficiente.

**Conclusión 4:** Tras el estudio realizado se comprueba que esta hipótesis no se verifica. El grupo de alumnos, con el que se ha realizado la investigación, inicia este proceso de enseñanza-aprendizaje con una buena base en el tema de funciones y sus propiedades globales tal y como se observa en el análisis de datos.

## 8.2. APORTACIONES DEL ESTUDIO

A partir de los objetivos específicos, formulados en el capítulo quinto ‘Objetivos e hipótesis de trabajo’, se presentan las aportaciones del estudio.

**Objetivo 1:** Elaborar un diseño de enseñanza de los conceptos de función, dominio, monotonía y extremos, a través de los distintos registros de representación con el referente el marco ELOS.

**Aportación 1:** Se ha presentado un diseño de enseñanza, de los conceptos objeto de estudio de esta investigación, elaborado atendiendo al marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS).

**Objetivo 2:** Valorar el aprendizaje de los conceptos matemáticos anteriores en los diferentes registros y en el paso de uno a otro.

**Aportación 2:** Se aporta un cuestionario de valoración del aprendizaje de los conceptos que aborda esta investigación en los diferentes registros, así como un análisis de los resultados obtenidos tras realizar este cuestionario un grupo de alumnos.

**Objetivo 3:** Observar los errores y dificultades de aprendizaje de los conceptos matemáticos anteriores.

**Aportación 3:** Se presenta un análisis de los errores y dificultades que presentan los alumnos en cada concepto evaluado en la prueba final escrita y finalmente se recopilan los errores y dificultades de aprendizaje observadas con respecto a los conceptos objeto de esta investigación.

**Objetivo 4:** Plantear orientaciones didácticas que permitan la mejora del aprendizaje de estos contenidos.

**Aportación 4:** Tras el análisis de cada error o dificultad encontrado se plantean orientaciones didácticas que permitan la mejora de su aprendizaje.

### 8.3. PUNTOS DÉBILES

A continuación se presentan los puntos débiles que se han encontrado en la realización de la presente investigación.

- Uno de los principales puntos débiles que se encuentran es la falta de tiempo para desarrollar más despacio el diseño de enseñanza en el aula.
- Fue necesario el repaso de algunas cuestiones relacionadas con las Unidades Didácticas de ‘Polinomios’, ‘Ecuaciones’ e ‘Inecuaciones’ vistas en el presente curso y previas a la nuestra, lo que en ocasiones hizo que se ralentizara la docencia.
- Se encuentran limitaciones debidas a la falta de experiencia en el campo de la investigación educativa, especialmente al inicio de esta investigación que comienza cuando aún no se ha recibido la formación de la asignatura Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas, por lo que el conocimiento previo con el que parte la profesora investigadora es insuficiente.

### 8.4. CUESTIONES ABIERTAS

Tras las reflexiones realizadas se plantean las siguientes cuestiones que han quedado abiertas y que se podrían abordar en un segundo ciclo de investigación. Éstas son:

- Buscar alternativas para la enseñanza del concepto de dominio dado que no se han obtenidos los resultados esperados.
- Realizar un diseño de enseñanza siguiendo el marco teórico ELOS para los conceptos de simetría, periodicidad y acotación.
- Modificar y refinar los cuestionarios de opinión, tanto del observador externo como del alumnado, enfocándolos hacia la valoración del aprendizaje de los conceptos objeto de la investigación a través de los diferentes estadios.
- Contrastar la docencia bajo el marco teórico ELOS con una docencia orientada bajo el libro de texto.

## 9. REFLEXIÓN PERSONAL SOBRE LA INVESTIGACIÓN REALIZADA

La presente investigación constituye mi primera experiencia como investigadora, llevándose a cabo un primer ciclo de investigación experimental.

En esencia, en esta investigación se ha analizado el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función y alguna de sus propiedades, realizando una reflexión sobre la propia práctica y una valoración del aprendizaje de la materia por parte del alumnado. Los resultados observados han sido satisfactorios y se considera que, en general, los alumnos han alcanzado un alto grado de aprendizaje.

Además, esta investigación presenta sus aportaciones, las cuales podrían ser de utilidad a otros docentes, así como las cuestiones que se han quedado abiertas y que pudieran servir de motivación para iniciar otro segundo ciclo de investigación en el que abordarlas.

Es labor del docente planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje, tal y como se hace en esta investigación, y está en sus manos tratar de dar alternativas que aporten soluciones a los problemas identificados relativos a la enseñanza y al aprendizaje de su materia así como potenciar procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas. Por tanto, se considera esencial la investigación educativa para el desarrollo profesional de todos los docentes, en particular, en la especialidad de Matemáticas por ser una de las disciplinas en la que los alumnos presentan mayores dificultades.

Ahora bien, para la realización de una investigación se han de conocer metodologías de investigación educativa y técnicas básicas para la recogida y tratamiento de información sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo que se considera necesaria la iniciación a la investigación educativa dentro de la formación de los futuros docentes.

En definitiva, esta experiencia ha contribuido activamente a mi formación como docente- investigadora a través de una enseñanza reflexiva.

## 10. BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M. y otros. (2011): *Matemáticas 4º ESO OPCIÓN B. Proyecto La Casa del Saber*. Torrelaguna(Madrid): Santillana.
- Colera, J., Gaztelu, I., García, R., Olivieira, M.J y Martínez, M.M. (2006): *Matemáticas 4 Opción B*. Madrid: grupo Anaya S.A.
- Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (2007). Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL, 23 de mayo de 2007*.
- Elliot, J. (2000): *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.
- Latorre, A. (2003): *La investigación-acción: conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Graó.
- MEC (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE nº 5, de 5 enero de 2007*.
- Ortega, T. (2010). *Metodologías de investigación cualitativa*. Notas elaboradas para la asignatura de Investigación Educativa del Máster de Profesorado en Secundaria. Universidad de Valladolid.
- Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias, 28(2)*, 215-226. Barcelona. ISSN: 0212-4521.
- Pecharromán, C. y Ortega, T. (2008). Sistemas de símbolos antiguo teórico y antiguo real asociados a las propiedades globales de las funciones. (CD-ROM: Comunicaciones de grupos de investigación. En *Investigación en Educación Matemática XII*. Edts.: R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (pp.1-20). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper” y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Depósito Legal: BA-478-08. ISBN: 978-84-934488-9-9. ISSN: 1888-0762.
- Pecharromán, C. y Ortega, T. (2009). Diseño de un marco de investigación. Aplicación al proceso de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. En *Investigación en Educación Matemática XIII*. Edts.: M.J. González, M.T. González & J. Murillo, (pp.367-378). Santander: SEIEM. Depósito Legal: SA-540-2009. ISBN: 978-84-8102-548-4. ISSN: 1888-0762.

Pecharromán, C. (2010). *Aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de sus representaciones*. Notas elaboradas para la asignatura de Didáctica de la Matemática del Máster de Profesorado en Secundaria. Universidad de Valladolid.

Socas, M. (2007): Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En *Investigación en Educación Matemática XI*. Recuperado de <https://dl.dropboxusercontent.com/u/104572257/Actas/Actas11SEIEM.pdf>, 19-52.

Suárez, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación-acción colaboradora en la educación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 1, N° 1, 40-56.

Vizmanos, J.R. y Anzola, M. (2003): *Matemáticas. Algoritmo 4º Secundaria (opción B)*. Madrid: S.M.

Vizmanos, J.R., Alcaide, F. y otros. (2011): *Matemáticas. Pitágoras 4º Secundaria (opción B)*. Proyecto Conecta 2.0. Madrid: S.M.

## 11. ANEXO: UNIDAD DIDÁCTICA

A continuación, se presenta la Unidad Didáctica ‘Funciones y sus propiedades globales’ planificada para el curso 4ºESO Opción B y que ha servido como referente en el desarrollo de la docencia llevada a cabo en esta investigación.

Dicha Unidad Didáctica sigue la siguiente estructura:

- Introducción contextual.
- Contribución a las competencias básicas.
- Objetivos.
- Contenidos.
- Metodología.
- Recursos.
- Actividades de aprendizaje y enseñanza.
- Atención a la diversidad.
- Evaluación.
- Conclusiones y evaluación de la unidad didáctica.
- Bibliografía.

## 1. Introducción contextual

Esta unidad didáctica se sitúa dentro del bloque 5 que corresponde a Funciones y Gráficas, según el Real Decreto 1631/2006 del Boletín Oficial del Estado.

Los alumnos de 4º ESO ya poseen ciertos conocimientos previos sobre la materia adquiridos en los cursos anteriores.

En la vida cotidiana se presentan situaciones en las que se requiere la interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica de una función por lo que es fundamental que los alumnos adquieran un buen dominio de la materia.

Dada la importancia de la materia, también en las Matemáticas I y II del Bachillerato de Ciencias y Tecnología y en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I Y II del Bachillerato de Ciencias Sociales se afianzan y completan los conocimientos y destrezas adquiridos.

## 2. Contribución a las competencias básicas

Con esta unidad didáctica se contribuye a la adquisición de las siguientes competencias básicas desarrolladas en el Real Decreto 1631/2006.

- Competencia matemática: Puesto que el aprendizaje de la materia que abarca esta unidad didáctica conlleva la adquisición de la capacidad de razonar, el uso de herramientas y elementos matemáticos y la interpretación de la información.
- Competencia en comunicación lingüística: Dado que plantearemos problemas los cuales requieren de la expresión oral y escrita para su interpretación y expresión de resultados.
- Tratamiento de la información y competencia digital: Saber utilizar internet para encontrar información y gráficas de la vida cotidiana relacionadas con la unidad e interpretar los datos.



### 3. Objetivos

- Conocer y relacionar las distintas formas de representar una función.
- Conocer y distinguir los conceptos de dominio y recorrido de una función.
- Deducir los extremos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
- Reconocer funciones simétricas y periódicas.
- Comprender e interpretar una función definida a trozos.
- Interpretar y realizar gráficas de funciones que aparezcan en situaciones sociales, físicas, económicas, etc., y obtener informaciones prácticas.
- Desarrollar el pensamiento reflexivo.
- Adquirir hábitos racionales de trabajo, tanto individual como en equipo.
- Valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual.

### 4. Contenidos

Durante la realización de esta unidad didáctica se desarrollarán los contenidos siguientes, siendo contenidos mínimos aquellos que aparecen subrayados:

- Concepto de función
- Dominio y recorrido de una función.
- Operaciones con funciones:
  - Suma de una función más una constante.
  - Producto de una función por una constante.
  - Suma de funciones.
  - Diferencia de funciones.
  - Producto de funciones.
  - Cociente de funciones.
  - Composición de funciones.
- Funciones recíprocas o inversas
- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Máximos y mínimos
- Periodicidad. Funciones periódicas
- Acotación
- Simetría. Función par y función impar
- Funciones definidas a trozos

La temporalización prevista para esta unidad didáctica es la siguiente:

1.- En la primera sesión conviene evaluar los conocimientos previos de la unidad didáctica, por lo que se realizará una prueba inicial.

Tras la prueba se introducirá el tema de funciones desde un punto de vista histórico y buscando su relación con otras materias y su utilidad en la vida cotidiana.

2.- Tras el previo análisis de las respuestas de los alumnos en la prueba inicial, se aclaran los errores cometidos y se incide en algunos conceptos matemáticos relacionados con las funciones.

Introducción de los conceptos de correspondencia y función. Ejemplos. Preguntas para comprobar si los alumnos discriminan entre correspondencia y función.

Dominio y recorrido de una función. Ejemplos.

3.- Breve repaso de los conceptos vistos en la sesión anterior.

Ejercicios en el aula de los conceptos vistos hasta el momento y corrección por parte de los alumnos.

4.- Operaciones con funciones.

Ejercicios y problemas en el aula.

5.- Corrección, por parte de los alumnos, de los ejercicios y problemas de la clase anterior.

Composición de funciones y función inversa. Ejemplos de funciones inversas y mediante cartulinas observamos su simetría con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

Ejercicios para casa.

6.- Corrección de los ejercicios por parte de los alumnos.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

Se mandará una actividad para realizar durante las vacaciones de Semana Santa: búsqueda y análisis del gráfico de una función de la vida real.

7.- Actividad grupal.

8.- Tras las vacaciones se comenzará con un repaso de todos los conceptos vistos hasta el momento.

Se introducirá la periodicidad y acotación.

Simetría.

Ejemplos y ejercicios.

9.- Función definida a trozos.

Ejercicios y problemas.

10.- Resolución de dudas que no hayan sido resueltas en las sesiones anteriores.

Ejercicios y problemas.

11.- Realización de un examen de esta unidad didáctica.

## 5. Metodología

La metodología que se va a emplear va a combinar clases magistrales con el método de resolución de ejercicios y problemas.

La metodología de aula será interactiva entre el profesor y los alumnos, siendo el profesor quien introduce los conceptos nuevos en un primer momento. Éstos serán introducidos de lo concreto a lo abstracto tratando de enlazar con sus conocimientos previos. Se realizarán preguntas orales para tratar de llevarles hacia el nuevo concepto y valorar el grado de comprensión, resolver dudas y así poder insistir en los puntos débiles en las clases de problemas.

La teoría siempre se impartirá acompañada de ejemplos de la vida cotidiana. En algunas de estas sesiones teóricas, además se aplicará la teoría a la resolución de ejercicios, por lo que cambiará la dinámica de la clase, siendo más participativa.

El desarrollo de las clases de problemas será muy diferente a las clases magistrales. Se trata de potenciar el trabajo personal del alumno. Los alumnos estarán muy implicados en el proceso de resolución de ejercicios y problemas puesto que considero que su aprendizaje no se adquiere con sólo enseñar y mostrar cómo se hace, sino practicando, ejercitando y aprendiendo de sus propios errores.

Habrán actividades tanto individuales como en grupo.

## 6. Recursos

Se seguirá un libro de texto que servirá como guía.

Cuaderno del alumno.

Cartulinas y folios de colores.

Periódicos e Internet.

Esquemas

## 7. Actividades de Aprendizaje y Enseñanza

Las actividades de aprendizaje y enseñanza se realizarán en el aula y el número de sesiones que se les dedica ha sido especificado en el apartado 4.

Inicialmente se realizará una prueba inicial para evaluar los conocimientos previos que poseen los alumnos.

No se contempla mandar todos los días deberes para realizar en casa dado que los alumnos ya participarán activamente en las sesiones de resolución de ejercicios y problemas. No obstante, si algún problema no lo han acabado en clase, deberán terminarlo fuera del horario escolar. Han de tener en cuenta que estas actividades podrían ser recogidas para ser evaluadas.

En cuanto a los ejercicios y problemas se comenzarán realizando aquellos más sencillos puesto que éstos tienen un efecto motivador muy importante.

Es esencial comenzar por ejercicios sencillos para que practiquen los conceptos nuevos, y puesto que su resolución suele resultar un procedimiento mecánico y en ocasiones aburrido, se planifica un juego grupal para su realización de un modo más dinámico y motivador. Se llevará a cabo en grupos formados por 5 personas. Con estas actividades además fomentamos el cálculo mental.

En cuanto a los problemas, su nivel de dificultad irá aumentando progresivamente, llegando a problemas que contribuyan activamente a la adquisición tanto de la competencia matemática como de la competencia en comunicación lingüística.

Otra de las actividades propuestas a los alumnos es la búsqueda del gráfico de una función en los medios de comunicación, internet o en las diferentes materias y se pide que hagan un estudio de las propiedades de la función y tras su análisis, una interpretación de los datos.

## 8. Atención a la Diversidad

Hay tanta diversidad como alumnos en el aula. Se tratará de dar respuesta del siguiente modo.

En la actividad grupal se formarán equipos heterogéneos de tal forma que los alumnos con cierto talento en matemáticas ayuden a los alumnos que presenten dificultades en la materia, habiendo un aprendizaje cooperativo.

La prueba de evaluación inicial y el conocimiento del profesor tutor del alumnado, serán claves para la formación de los grupos.

Además, se plantearán actividades de refuerzo y de ampliación que atiendan a la diversidad y se realizará un examen flexible.

## 9. Evaluación

Es muy importante que desde el comienzo del curso, el alumno conozca el sistema de evaluación que el profesor va a seguir y que, a lo largo del año académico, experimente que su participación en el desarrollo diario de la clase y su trabajo en casa tiene una repercusión sobre la calificación.

La evaluación es continua y personalizada.

Se evaluarán los conocimientos propios de este tema mediante un examen, la realización de las actividades para casa y las actitudes que se tengan para con las actividades que se desarrollen y para con el grupo en general.

- En cuanto a la ACTITUD (30% de la nota de la evaluación) se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:
  - El comportamiento:
    - Asistencia a clase.
    - Traer las tareas o el material que se pida.
    - Atención en clase. Participación.
    - No interrumpir innecesariamente la clase
    - Salidas a la pizarra.
    - Aprovechar el tiempo de TRABAJO PERSONAL.
    - Colaborar en los TRABAJOS DE GRUPO.
    - Respetar las opiniones, dudas, comentarios y respuestas de los compañeros.
    - Participación en concursos.
  - El cuaderno (folios de trabajo en carpesano o portafolios) es obligatorio.
    - Será un instrumento de trabajo.
    - Servirá para recoger ordenadamente el desarrollo diario de clase, numerando cada página y poniendo la fecha del día al empezar a trabajar.
    - También servirá para la evaluación ya que recoge el trabajo diario y por tanto se recogerá periódicamente para hacer un seguimiento de su marcha.
- PRUEBAS ESCRITAS (50% de la nota de la evaluación):
  - En las evaluaciones se realizarán preguntas de la materia sin avisar con antelación y podrán recogerse a un grupo sólo de alumnos. (1/3 de este apartado)
  - Habrá un mínimo de dos exámenes escritos, por evaluación, que agrupen una parte de la materia y serán fijados previamente con los alumnos. La presentación y la ortografía supondrán 0,5 puntos en la nota del ejercicio. (2/3 de este apartado)
  - Las recuperaciones de las evaluaciones se podrán exigir a todos los alumnos, y para los que ya aprobaron, la nota se considerará para la siguiente evaluación.
  - Los alumnos que no hayan aprobado el curso por evaluaciones, tendrán exámenes globales de la materia en junio.
- La nota media de los trabajos en grupo y de las tareas extraordinarias será, cada una, el 10% de la nota de la evaluación.

## 10. Conclusiones y evaluación de la unidad didáctica.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica se irá anotando todo aquello que se considere relevante, prestando especial atención a los siguientes puntos:

- Reacciones de los alumnos.
- Dificultades de las actividades.
- Reflexión sobre los tiempos programados.
- Análisis de los resultados en el examen.
- Planteamiento sobre si se han alcanzado los objetivos de enseñanza.

Tras su análisis, si no es satisfactorio el balance, deberemos plantearnos qué cosas han fallado, cuál es el motivo por el que han fallado y cómo podemos solucionarlas.

Además deberemos autoevaluarnos y reflexionar si hemos estado cómodos tal y como hemos realizado nuestro trabajo, si hemos conseguido captar la atención de los alumnos y motivarlos, si además hemos conseguido llegar a ellos y transmitirles la materia o si por el contrario la forma de impartir las clases y las actividades propuestas no han sido lo suficiente claras y motivadoras.

Por último, sería conveniente realizar a los alumnos una encuesta anónima en la que evalúen el proceso de enseñanza realizado por el profesor.

Preguntas que se le cuestionarían:

- ¿Consideras útil la materia impartida en esta unidad didáctica de funciones? Justifica tu respuesta.
- De los conceptos vistos en esta unidad didáctica, ¿cuáles te han resultado más fáciles y cuáles más difíciles?
- De las actividades llevadas a cabo, ¿cuáles te han gustado más y cuáles menos? Justifica tu respuesta.
- ¿Crees que se han mandado muchas tareas?
- ¿Cuánto tiempo, fuera del horario escolar, has dedicado al trabajo de esta asignatura a la semana? ¿Consideras que ha sido suficiente?
- Comentarios personales.

## 11. BIBLIOGRAFÍA.

Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M. y otros. (2011): *Matemáticas 4º ESO OPCIÓN B. Proyecto La Casa del Saber*. Torrelaguna(Madrid): Santillana.

Colera, J., Gaztelu, I., García, R., Oliveira, M.J. y Martínez, M.M. (2006): *Matemáticas 4 Opción B*. Madrid: grupo Anaya S.A.

Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (2007). Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL, 23 de mayo de 2007*.

MEC (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE nº 5, de 5 enero de 2007*.

Vizmanos, J.R., Alcaide, F. y otros. (2011): *Matemáticas. Pitágoras 4º Secundaria (opción B). Proyecto Conecta 2.0*. Madrid: S.M.