



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

**TRAYECTORIAS NULAS Y FORMACIÓN DE SOMBRAS EN OBJETOS
COMPACTOS**

**Autor/a: José Alberto Araúzo Araúzo
Tutor/es/as: Diego Sáez Gómez
2025**

Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo numérico para simular la apariencia visual de un disco de acreción alrededor de objetos compactos descritos por la métrica Black Bounce. Se consideran orientaciones arbitrarias del disco, distintos perfiles de emisión y corrimientos al rojo gravitacionales y Doppler. Los resultados muestran que la orientación del sistema, la cinemática del disco y la geometría del espacio-tiempo influyen de forma significativa en la imagen observada, especialmente en la forma, simetría y brillo de las tres imágenes más relevantes: directa, de lente y anillo de fotones. En conjunto, el estudio aporta una visión más detallada de los mecanismos que determinan la estructura de las sombras en entornos gravitacionales extremos.

Palabras clave:

relatividad general, agujeros negros, trayectorias nulas, métrica Black Bounce, simulación.

Abstract

This work develops a numerical model to simulate the visual appearance of an accretion disk around compact objects described by the Black Bounce metric. Arbitrary disk orientations, different emission profiles, and both gravitational and Doppler redshifts are considered. The results show that the system's orientation, the disk's kinematics, and the space-time geometry significantly affect the observed image, especially in the shape, symmetry, and brightness of the three most relevant components: the direct image, the lensed image, and the photon ring. Overall, the study provides a more detailed understanding of the mechanisms that shape shadows in extreme gravitational environments.

Key words:

general relativity, black holes, null geodesics, Black Bounce metric, simulation.

Índice general

Resumen

Abstract

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes y justificación	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Contenido de la memoria	2
2	Estructura del espacio-tiempo	3
2.1	Relatividad especial	3
2.1.1	Transformaciones de Lorentz	4
2.1.2	Espacio-tiempo de Minkowsky	5
2.1.3	Cuadrimomento y espacio de fases	5
2.1.4	Transformación de magnitudes radiativas	7
2.2	Relatividad general	8
2.2.1	Principio de equivalencia	8
2.2.2	Elementos de geometría diferencial	9
2.2.3	Formulación geométrica de la gravedad	13
3	Espacio-tiempo estático con simetría esférica	15
3.1	Métricas estáticas con simetría esférica	15
3.1.1	Métrica de Schwarzschild	16
3.1.2	Métrica <i>Black Bounce</i>	17
3.2	Trayectorias de partículas materiales	18
3.2.1	Órbitas circulares y condiciones de estabilidad	19
3.3	Trayectorias nulas	21
3.3.1	Esfera de fotones y parámetro de impacto crítico	22
4	Simulación de trayectorias nulas y formación de sombras	23
4.1	Procedimiento de simulación	23
4.1.1	Imagen directa, de lente y anillo de fotones	23
4.1.2	Consideración de orientaciones arbitrarias del disco	24
4.1.3	Perfiles de intensidad emitida por el disco de acreción	27
4.1.4	Corrección por corrimiento al rojo	28
4.1.5	Implementación del procedimiento de simulación	29
4.2	Resultados de simulación	30
4.2.1	Efecto de la orientación del disco	30
4.2.2	Influencia del efecto Doppler	32
4.2.3	Influencia de la forma del espacio-tiempo	34
5	Conclusiones y trabajos futuros	39
	Referencias	41

Índice de figuras

2.1	Transformación de coordenadas.	3
4.1	Ejemplo de trazado de rayos para diferentes valores de b e imagen observada. .	24
4.2	Características de la imagen y orientación del disco de acreción con $\psi = 90^\circ$. . .	24
4.3	Características de la imagen y orientación del disco de acreción con $\psi = 135^\circ$. .	25
4.4	Casos particulares de orientación α del plano orbital con disco inclinado de forma arbitraria.	25
4.5	Plano del disco de acreción orientado según ψ ; plano orbital orientado según α . .	26
4.6	Perfil I de emisión del disco de acreción.	27
4.7	Perfil II de emisión del disco de acreción.	27
4.8	Perfil III de emisión del disco de acreción.	28
4.9	Sombras para diferentes orientaciones ψ del disco de acreción, con métrica de Schwarzschild ($a = 0$), perfil de emisión I_{em}^I y únicamente corrimiento al rojo gravitacional (G).	31
4.10	Trazado de rayos y perfiles en $\alpha = 90^\circ$, para $\psi = 158^\circ$, $a = 0$, I_{em}^I y G	32
4.11	Trazado de rayos y perfiles en $\alpha = 270^\circ$, para $\psi = 158^\circ$, $a = 0$, I_{em}^I y G	32
4.12	Comparación de sombras con corrimiento al rojo gravitacional (G) vs. total (GD) para $\psi = 90^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II}	33
4.13	Comparación de sombras con corrimiento al rojo gravitacional (G) vs. total (GD) para $\psi = 135^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II}	33
4.14	Comparación de sombras con corrimiento al rojo gravitacional (G) vs. total (GD) para $\psi = 170^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II}	34
4.15	Influencia del efecto Doppler en función del plano de visión α , para $\psi = 158^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II}	34
4.16	Trazado de rayos para diferentes parámetros de impacto b y diferentes parámetros de la métrica a	35
4.17	Sombras para diferentes orientaciones ψ del disco de acreción, y diferentes geometrías del espacio tiempo ($a = 0$, $a = 1.5$, $a = 2.5$). El perfil de emisión es I_{em}^{III} y únicamente se contempla corrimiento al rojo gravitacional (G).	36
4.18	Perfiles de brillo observado para diferentes parámetros de la métrica a , en $\alpha = 90^\circ$ y $\alpha = 270^\circ$, para $\psi = 170^\circ$, I_{em}^{III} y sólo considerando corrimiento al rojo gravitacional	36
4.19	Sombras para diferentes orientaciones ψ del disco de acreción, y diferentes geometrías del espacio tiempo ($a = 0$, $a = 2.5$). El perfil de emisión es I_{em}^{II} y se contempla corrimiento al rojo gravitacional y Doppler (GD).	37
4.20	Perfiles de brillo observado para diferentes parámetros de la métrica a , en $\alpha = 0^\circ$ y $\alpha = 180^\circ$, para $\psi = 135^\circ$, I_{em}^{II} y corrimiento al rojo gravitacional y Doppler . .	37

Capítulo 1. Introducción

Desde la formulación de la teoría general de la relatividad por Albert Einstein en 1915, esta se ha consolidado como una herramienta fundamental para comprender la estructura y evolución del universo. Como teoría de la gravedad que es, su impacto ha sido decisivo en el desarrollo de las teorías cosmológicas modernas, así como en el estudio de fenómenos extremos como los agujeros negros. Además, la relatividad general ha permitido predecir y explicar efectos como las lentes gravitatorias, que revelan información sobre la distribución de materia en el cosmos. En este contexto, el estudio de la propagación de la luz en espacio-tiempos curvos, propagación que se hace a través de las llamadas trayectorias o geodésicas nulas, resulta esencial para interpretar correctamente fenómenos en los que están implicados fuertes campos gravitatorios. Esto sucede especialmente en los cuerpos compactos o de alta densidad.

1.1 Antecedentes y justificación

Poco después de que de Albert Einstein publicara las ecuaciones de campo que describían los fenómenos gravitatorios, Karl Schwarzschild encontró una solución exacta a dichas ecuaciones para el caso de una distribución de masa esféricamente simétrica en el vacío: la métrica de Schwarzschild. Esta solución implicaba la existencia de una región del espacio-tiempo de la que nada, ni siquiera la luz, podría escapar. A esta región se la denominó agujero negro, y a su frontera, horizonte de sucesos. Sin embargo, en aquel momento, muchos físicos consideraban estos objetos como una curiosidad matemática sin realización física.

Sin embargo, con el avance de la astrofísica estelar a mediados del siglo XX, se descubrió que las estrellas muy masivas podían colapsar tras agotar su combustible nuclear. Este colapso podría llevar, si la masa es suficiente, a la formación de un agujero negro. Esta posibilidad teórica cobró fuerza con la observación de fuentes compactas de rayos X y la dinámica de sistemas binarios, donde objetos invisibles causaban efectos gravitatorios intensos.

Un avance decisivo ocurrió en los años 1990 y 2000, cuando observaciones del centro galáctico revelaron el movimiento de estrellas alrededor de un punto aparentemente vacío, conocido como Sagitario A*. Estudios liderados por Reinhard Genzel y Andrea Ghez mostraron que estas estrellas seguían órbitas cerradas extremadamente rápidas, lo que implicaba la presencia de un objeto invisible con una masa de unos millones de veces la del Sol confinado en un espacio minúsculo [4]. Esas observaciones eran compatibles con la existencia de un agujero negro supermasivo en ese lugar. El descubrimiento fue tan importante que ambos investigadores fueron galardonados con el Premio Nobel de Física en 2020.

Más recientemente, la existencia de los agujeros negros ha sido reforzada por la detección de ondas gravitacionales procedentes de fusiones de agujeros negros (LIGO/Virgo, desde 2015) y por la obtención de imágenes del entorno del horizonte de sucesos mediante el *Event Horizon Telescope* (EHT). En 2019, el EHT reveló la primera imagen de la sombra de un agujero negro en la galaxia M87 [1], y en 2022 logró una imagen similar de Sagitario A* [2], cerrando así un siglo de especulación con evidencia directa.

Las imágenes obtenidas por el EHT no muestran el horizonte de sucesos, sino el llamado

disco de acreción. Un disco que está formado por materia que gira a gran velocidad alrededor del agujero negro y que, al calentarse por fricción y efectos gravitatorios extremos, emite radiación. Debido a los intensos campos gravitatorios, la luz que proviene del disco sufre curvaturas extremas, influyendo sobre la forma y el brillo con que se percibe desde la Tierra.

Estudiar teóricamente cómo vería este disco un observador lejano es de gran interés, ya que permite contrastar las predicciones de la relatividad general con las observaciones. Diversos trabajos han simulado la imagen de un agujero negro rodeado de un disco de acreción delgado bajo distintas teorías de emisión y geometrías del espacio-tiempo [9, 6, 7]. En particular, en [7] se analiza cómo varía el aspecto del entorno del agujero negro suponiendo una geometría del espacio-tiempo conocida como *black bounce*. Estas simulaciones permiten explorar configuraciones alternativas al agujero negro clásico y examinar las posibles diferencias observacionales.

1.2 Objetivos

En trabajos anteriores como [6, 7] se simula la apariencia óptica de objetos compactos rodeados por un disco de acreción situado frente al observador, pero sería deseable poder considerar otras orientaciones del disco. Para ello se plantean los siguientes objetivos:

- Extender el modelo de black bounce de [7] para considerar orientaciones arbitrarias del disco de acreción.
- Analizar el efecto de distintos perfiles de emisión del disco de acreción sobre la imagen obtenida, comparando cómo varía la apariencia en función del modelo de luminosidad adoptado.
- La geometría Black Bounce tiene un parámetro característico en función del cual se puede modelar desde agujeros negros a agujeros de gusano con diferentes aperturas. Esto permitirá estudiar cómo cambia la imagen observada en función de este parámetro.

Con este enfoque, se espera aportar una mejor comprensión del papel que juegan tanto la geometría del espacio-tiempo como la orientación del sistema en la apariencia visual de objetos compactos.

1.3 Contenido de la memoria

El resto de la memoria se organiza de la siguiente manera: en el segundo capítulo se repasan brevemente los fundamentos de la teoría general de la relatividad necesarios para comprender la propagación de la luz en campos gravitatorios intensos. En el tercer capítulo se estudian las trayectorias nulas en geometrías esféricamente simétricas, con especial atención a su relevancia en la formación de sombras gravitatorias. El cuarto capítulo está dedicado a la simulación de la apariencia óptica de estos objetos, considerando diferentes orientaciones del disco de acreción y variaciones en la geometría del espacio-tiempo tipo Black Bounce. Finalmente, en el capítulo quinto se presentan las conclusiones del trabajo y posibles líneas futuras de investigación.

Capítulo 2. Estructura del espacio-tiempo

La concepción moderna de la gravedad surge de un cambio profundo en nuestra comprensión del espacio y el tiempo. En la teoría general de la relatividad, la gravedad deja de entenderse como una fuerza para interpretarse como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, inducida por la presencia de masa y energía. Este cambio tiene sus raíces en la necesidad de incorporar el electromagnetismo de Maxwell dentro del marco del principio de relatividad galileano, lo que llevó al desarrollo de la teoría especial de la relatividad. Dicha teoría unifica espacio y tiempo en una estructura cuatridimensional y sustituye las transformaciones de Galileo por las de Lorentz. En este nuevo marco, la formulación clásica de la gravedad de Newton resultaba incompatible, lo que motivó la creación de una nueva teoría: la relatividad general, que describe los fenómenos gravitatorios como resultado de la geometría del espacio-tiempo.

2.1 Relatividad especial

Uno de los pilares del pensamiento físico clásico es el principio de relatividad de Galileo, según el cual las leyes de la mecánica son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, es decir, aquellos que no están sometidos a aceleraciones y que se mueven a velocidad constante unos respecto de otros.

Supongamos un sistema inercial S con coordenadas (t, x, y, z) y otro sistema también inercial S' con coordenadas (t', x', y', z') que se mueve con velocidad constante v respecto a S a lo largo del eje x (figura 2.1). Si suponemos que en $t = t' = 0$ los sistemas S y S' tienen el mismo origen y orientación de los ejes, y además que $x' = 0$ se corresponde siempre con $x = vt$, y $x = 0$ con $x' = -vt'$, las transformaciones de coordenadas tendrán la siguiente forma genérica:

$$\begin{array}{lll}
 t' = At + Bx & \text{Suponiendo:} & t' = At + Bx \\
 x' = Dt + Ex & x' = 0 \mapsto x = vt & \Rightarrow x' = A(x - vt) \\
 y' = y & x = 0 \mapsto x' = -vt' & y' = y \\
 z' = z & \Rightarrow D = -Ev, D = -Av & z' = z
 \end{array} \quad (2.1)$$

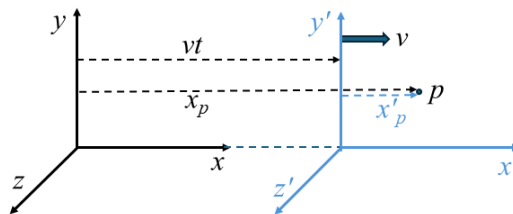


Figura 2.1: Transformación de coordenadas.

La mecánica clásica asume que existe un tiempo absoluto de forma que para cualquier observador el origen de tiempos es el mismo, $t = t'$. Esto implica que $A = 1$ y $B = 0$, lo cual

nos lleva a las transformaciones de Galileo:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

2.1.1 Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Galileo presuponen un tiempo absoluto y separan espacio y tiempo como entidades independientes. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo predicen que la velocidad de la luz en el vacío es constante e independiente del estado de movimiento del observador, lo que contradice el marco galileano. Para reconciliar esta discrepancia, se propuso el éter como un medio absoluto de referencia, pero el experimento de Michelson-Morley lo refutó.

Einstein resolvió este conflicto con la teoría especial de la relatividad (1905), basada en dos postulados: (1) las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas inerciales y (2) la velocidad de la luz c es constante para todos los observadores inerciales. Según esto, si en $t = t' = 0$ sale un rayo de luz desde $x = x' = 0$ en dirección x , se debería cumplir que $x - ct = x' - ct' = 0$. Imponiendo estas condiciones a las transformaciones genéricas 2.1 se obtiene las transformaciones de Lorentz [8]. En la parte central de 2.2 se tiene la forma más usual de estas transformaciones en forma matricial. En ella se toma como coordenadas temporales ct y ct' , que tienen dimensiones de longitud y además hace que las transformaciones sean simétricas. Para hacer el cambio de coordenadas inverso basta con sustituir v por $-v$.

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta &= \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por ser estas transformaciones lineales, los incrementos transforman como las coordenadas. Si aplicamos 2.2 al vector de incrementos $(0, \Delta x, 0, 0)$, obtenemos que $\Delta t' = -\gamma\beta\Delta x/c$ y $\Delta x' = \gamma\Delta x$. Esto permite observar tres fenómenos. El primero es la relatividad del concepto de simultaneidad. Lo que en S es simultáneo ($\Delta t = 0$), en S' no lo es ($\Delta t' < 0$). El segundo es la *contracción de longitudes* en la dirección del movimiento ($\Delta x = \Delta x'/\gamma$), lo cual implica que las longitudes en la dirección del movimiento de S' son vistas contraídas desde S . El tercero es la dilatación temporal. Si aplicamos la transformación inversa de 2.2 al vector $(\Delta t', 0, 0, 0)$, obtenemos que $dt = \gamma dt'$. Este hecho implica que los relojes que se mueven con S' van más lentos que los de S .

La transformación anterior, con la configuración de los ejes dadas, se conoce como *boost* sobre el eje x . De forma similar se pueden plantear sobre los otros ejes. Además, si los ejes de S' están girados respecto a los de S , o la dirección de v no coincide con un eje de " S ", habría que aplicar transformaciones de giros y el *boost* en el orden adecuado para llegar a las transformaciones correctas. Estas transformaciones se suelen representar en notación más compacta como¹:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$$

donde $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ son los componentes de la matriz de transformación y $x^{\mu'}$ y x^{ν} las coordenadas (ct, x, y, z) en cada sistema de referencia.

¹En este texto, como en otros de que abordan relatividad, se usará el criterio de sumación de Einstein. Cuando en una fórmula aparecen multiplicaciones de elementos con índices repetido arriba y abajo, se entiende que hay un sumatorio sobre el índice repetido. Así, por ejemplo: $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$

2.1.2 Espacio-tiempo de Minkowsky

Una de las propiedades más significativas de las transformaciones de Lorentz es la invarianza del intervalo espacio-temporal entre dos sucesos. Si consideramos dos eventos con coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) , el intervalo entre ellos se define como:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$ y análogamente para las coordenadas espaciales. Este valor, a diferencia de las coordenadas individuales de cada evento, se mantiene *invariante* bajo cualquier transformación de Lorentz. Esta invarianza asegura que todos los observadores inerciales concuerdan en el valor de Δs^2 , lo que lo convierte en un objeto geoméricamente significativo.

Según el signo de Δs^2 , se distinguen tres tipos de intervalos entre sucesos:

- Si $\Delta s^2 < 0$, el intervalo es *temporal*, y los sucesos pueden estar conectados causalmente mediante una señal que viaje a una velocidad menor que la de la luz.
- Si $\Delta s^2 > 0$, el intervalo es *espacial*, y no existe una conexión causal posible entre ellos.
- Si $\Delta s^2 = 0$, el intervalo es *nulo*, y los sucesos pueden estar unidos por una señal que viaje exactamente a la velocidad de la luz.

Esta estructura está codificada en la métrica de Minkowski, que actúa como regla para medir “distancias” en este espacio cuatridimensional. En notación tensorial, el intervalo se expresa como:

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu,$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ son los componentes del tensor métrico de Minkowski, dado por:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta métrica permite definir el producto interno entre dos vectores con componentes A^μ y B^ν de la siguiente forma: $\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu$, donde $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$. En este contexto, hay que distinguir entre coordenadas contravariantes (A^μ) (con superíndices) y covariantes (A_μ) (con subíndices). La métrica actúa como un operador que permite subir y bajar índices, de modo que $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$, y viceversa, $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$, donde $\eta^{\mu\nu}$ es la inversa de $\eta_{\mu\nu}$, que en este caso son coincidentes.

Hay que destacar que la métrica de Minkowsky no es definida positiva, como en el caso del espacio euclídeo, lo que refleja la profunda diferencia con la visión clásica del espacio y del tiempo. En el espacio-tiempo de Minkowski los intervalos pueden ser negativos, nulos o positivos, y el tiempo se entrelaza con el espacio de forma inseparable. Este enfoque geométrico permite describir las leyes físicas de manera coherente en todos los sistemas inerciales y constituye la base para la formulación de la relatividad general.

2.1.3 Cuadrimento y espacio de fases

En el contexto de la relatividad especial, las magnitudes cinemáticas clásicas, como la velocidad y el momento, dejan de tener sentido absoluto. En este marco, el tiempo no es universal, por lo que se hace necesario definir una derivada temporal que sea coherente para todos los observadores. Un posible tiempo invariante es el que se denomina *tiempo propio*,

que no es otra cosa que el tiempo medido por un reloj solidario al móvil, y que se denota por τ . Debido a la dilatación temporal, $d\tau$ estará relacionado con el tiempo coordinado por $d\tau = dt/\gamma$. Con esto, se define la *cuadrivelocidad* como:

$$U = \frac{d}{d\tau}(ct, c, y, z) = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt}(ct, c, y, z) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

Esta magnitud, por construcción, es un vector en el espacio de Minkowski, y como tal, transforma bajo las transformaciones de Lorentz de la misma forma que las coordenadas. El módulo cuadrado de la cuadrivelocidad es un invariante con valor: $U^\mu U_\mu = -c^2$

De forma análoga a la definición de momento en la mecánica clásica, en el contexto relativista se puede definir el *cuadrimomento* como:

$$P = m_0 U = \left(\frac{\gamma m_0 c^2}{c}, \gamma m_0 v_x, \gamma m_0 v_y, \gamma m_0 v_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (2.3)$$

donde m_0 es la masa en reposo, $\vec{p} = \gamma m_0(v_x, v_y, v_z)$ es el momento lineal relativista y $E = \gamma m_0 c^2$ la energía total de la partícula. Al igual que U , P transforma como un vector bajo transformaciones de Lorentz, y su módulo también es invariante: $P^\mu P_\mu = -m_0^2 c^2$. Este resultado hace que la energía y el momento estén también acoplados, como se muestra en la famosa relación:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.4)$$

• Volumen del espacio de fases

En muchas aplicaciones físicas es esencial considerar no solo una partícula, sino distribuciones de partículas en el llamado *espacio de fases*, cuyas coordenadas son las posiciones y momentos $(\vec{x}, \vec{p})$. Se define el volumen elemental del espacio de fases como: $dV_{ps} = dV_s dV_p = (dx dy dz) (dp_x dp_y dp_z)$. Para analizar sistemas compuestos por muchas partículas, como haces luminosos formados por fotones, es interesante conocer como transforma dV_{ps} ante cambios de sistemas de referencia [5].

Considérese un haz de partículas moviéndose respecto a un sistema inercial S a lo largo del eje x con una velocidad v . Supongamos un sistema S' , comóvil con el haz, y con ejes orientados como en S . Dentro de una región diferencial $dV'_s = dx' dy' dz'$ habrá un conjunto de partículas con una dispersión de momentos contenidos en un volumen $dV'_p = dp'_x dp'_y dp'_z$. Por la contracción de longitudes en la dirección del movimiento, tendremos que el volumen V'_s transformará según:

$$dV_s = dx dy dz = \frac{1}{\gamma} dx' dy' dz' = \frac{1}{\gamma} dV'_s \quad (2.5)$$

Por otro lado, si diferenciamos el cuadrimomento 2.3, $(dE'/c, dp'_x, dp'_y, dp'_z)$, y lo pasamos a S utilizando la transformación inversa de 2.2 llegamos a:

$$dp_x = \gamma(\beta dE' + dp'_x), \quad dp_y = dp'_y, \quad dp_z = dp'_z$$

Diferenciando 2.4 obtenemos que: $E' dE' = p'_x dp'_x + p'_y dp'_y + p'_z dp'_z$. La energía E' es siempre mayor que cero, y el momento, por ser S' comóvil con el haz, será cero en ese sistema de referencia ($p'_x = p'_y = p'_z = 0$). De esta forma, necesariamente $dE' = 0$, y por lo tanto:

$$dV_p = dp_x dp_y dp_z = \gamma dp'_x dp'_y dp'_z = \gamma dV'_p \quad (2.6)$$

Combinando 2.5 y 2.6 se concluye que el volumen en el espacio de fases es un invariante Lorentz.

$$dV_{ps} = dV_s dV_p = \frac{1}{\gamma} dV'_s \gamma dV'_p = dV'_s dV'_p = dV'_{ps} \quad (2.7)$$

2.1.4 Transformación de magnitudes radiativas

La observación del cosmos se hace mayoritariamente analizando la luz que nos llega de fuentes distantes. Pero esta luz puede estar afectada por efectos relativistas como el desplazamiento Doppler o la aberración, alterando su frecuencia, intensidad o dirección aparente. Analizar correctamente estas transformaciones es esencial para interpretar las observaciones y reconstruir las propiedades físicas del sistema emisor.

• Transformación de la frecuencia: efecto Doppler

Sea una fuente luminosa de frecuencia ν' y longitud de onda $\lambda' = c/\nu'$, situada en un sistema de referencia S' que se mueve a velocidad v en la dirección x respecto de otro sistema S , de forma que las transformaciones de S a S' se realizan mediante 2.2. Supongamos que la fuente se sitúa en el plano $x'y'$ de S' y que el rayo que emite forma un ángulo θ con la dirección del movimiento. Teniendo en cuenta que, según la teoría cuántica, la energía y el momento de cada fotón están dados por: $E = h\nu$, $p = h/\lambda$, el cuadrivector de ese fotón será, según 2.3:

$$\mathbf{P}' = h \left(\frac{\nu'}{c}, \frac{\nu'}{c} \cos \theta', \frac{\nu'}{c} \sin \theta', 0 \right)$$

Si aplicamos a $\mathbf{P}'$ la transformación de Lorentz para pasar de S' a S , se debería obtener el cuadrivector en S , que deberá corresponderse, según los argumentos anteriores, con $\mathbf{P} = h/c(\nu, \nu \cos \theta, \nu \sin \theta, 0)$. Comparando esta expresión con la que obtenemos transformando $\mathbf{P}'$ se deduce que:

$$\nu = \gamma \nu' (1 + \beta \cos \theta), \quad \nu \cos \theta = \gamma \nu' (\beta + \cos \theta'), \quad \nu \sin \theta = \nu' \sin \theta'$$

La primera expresión nos da directamente la transformación de la frecuencia, que es lo que se denomina *efecto Doppler relativista*. Además, dividiendo la tercera expresión entre la segunda se puede obtener la transformación de la dirección, conocida como *aberración astronómica*. Resumiendo, las transformaciones de frecuencia y dirección vienen dadas por:

$$\nu = \gamma \nu' (1 + \beta \cos \theta) \quad \tan \theta = \frac{\cos \theta'}{\gamma(\beta + \cos \theta')} \quad (2.8)$$

• Transformación de la intensidad

Otra magnitud fundamental para describir la radiación electromagnética es la *intensidad específica*, I_ν , también denominada en ocasiones *brillo espectral*. Esta magnitud se define como la energía transportada por unidad de área perpendicular a la dirección de propagación ($A_\perp$), por unidad de tiempo, por unidad de ángulo sólido (Ω) y por unidad de frecuencia:

$$I_\nu = \frac{dE}{dA_\perp dt d\Omega d\nu} \quad (2.9)$$

Para analizar cómo transforma esta magnitud entre distintos sistemas de referencia inerciales, conviene conectar la intensidad con la descripción cuántica del campo de radiación en el espacio de fases. En esta formulación, la distribución de fotones se describe mediante una función f , que representa el número medio de partículas por celda de volumen en el espacio de fases $dV_{ps} = dV_e dV_s$. El número de estados en dicha celda está limitado por el principio de incertidumbre de Heisenberg, según el cual una partícula ocupa un volumen mínimo h^3 en el espacio de fases. Además, para los fotones, el factor de degeneración $g = 2$, correspondiente

a los dos posibles estados de polarización (espín ± 1). Así, el número de fotones en una celda infinitesimal del espacio de fases se puede poner como $dN = 2f dV_{ps}/h^3$, y la energía, por lo tanto, será:

$$dE = h\nu dN = \frac{2f\nu}{h^2} dV_{ps}$$

Si se pudiera poner dV_{ps} en función de $dA_{\perp} dt d\Omega d\nu$, la expresión 2.9 se simplificaría bastante. La parte espacial dV_{ps} se puede poner como $dV_s = dA_{\perp} c dt$, mientras que el volumen en el espacio de momentos, en coordenadas esféricas sería $dV_p = p^2 dp d\Omega$. Sustituyendo $p = h\nu/c$, la última expresión se podría escribir como $dV_p = (h/c)^3 \nu^2 d\nu d\Omega$. Con esto sustituyendo dE en 2.9, la intensidad específica quedaría:

$$I_{\nu} = \frac{2f\nu}{h^2} \frac{dV_{ps}}{dA_{\perp} dt d\Omega d\nu} = \frac{2f\nu}{h^2} \frac{dA_{\perp} c dt (h/c)^3 \nu^2 d\nu d\Omega}{dA_{\perp} dt d\Omega d\nu} = \frac{2fh}{c^2} \nu^3$$

Dado que, tanto el número de partículas dN , como dV_{ps} , son invariantes Lorentz (2.7), la densidad de partículas f que es proporcional a dN/dV_{ps} también lo es. Esto implica que la cantidad I_{ν}/ν^3 se conserva.

$$\frac{I_{\nu}}{\nu^3} = \frac{I'_{\nu'}}{\nu'^3}$$

Si suponemos que el observador está en el sistema S y la fuente en el S' , se puede definir el desplazamiento al rojo como $z = (\nu' - \nu)/\nu = \nu'/\nu - 1$, con lo que [3]:

$$I_{\nu} = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^3 I'_{\nu'} = \frac{1}{(1+z)^3} I'_{\nu'}$$

En ocasiones, puede ser interesante trabajar con la intensidad en vez de con la intensidad específica o espectral. Para hallarla habrá que integrar esta última para todas las frecuencias. Teniendo en cuenta que z es independiente de la frecuencia $d\nu = 1/(1+z) d\nu'$. Entonces:

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+z)^3} I'_{(1+z)\nu} \frac{1}{(1+z)} d\nu' = \frac{1}{(1+z)^4} \int_0^{\infty} I'_{\nu'} d\nu' = \frac{1}{(1+z)^4} I' \quad (2.10)$$

2.2 Relatividad general

Mediante la teoría especial de la relatividad se formuló una nueva mecánica que hacía compatible el principio de relatividad con el electromagnetismo, pero quedaba un problema: la teoría newtoniana de la gravitación. Aunque extraordinariamente exitosa, presenta dos dificultades fundamentales cuando se la confronta con la relatividad especial. En primer lugar, el carácter instantáneo de la fuerza gravitatoria, que Newton postulaba como acción a distancia, entra en contradicción con la noción de causalidad finita impuesta por la constancia de la velocidad de la luz. En segundo lugar, no existe en el formalismo newtoniano un principio de invarianza para los observadores inerciales: la fuerza gravitatoria se introduce en las ecuaciones del movimiento sin que haya un principio que garantice su tratamiento idéntico para todas las trayectorias rectilíneas uniformes. Para resolver este conflicto, Einstein postuló el principio de equivalencia, que le sirvió de inspiración para proponer una nueva teoría de la gravedad compatible con la relatividad especial: la relatividad general.

2.2.1 Principio de equivalencia

Uno de los hechos empíricos más intrigantes de la física clásica es la igualdad entre la masa inercial —que mide la resistencia al cambio de movimiento— y la masa gravitatoria,

responsable de la intensidad de la interacción con un campo gravitatorio. De esta coincidencia se deriva el hecho de que todos los cuerpos, independientemente de su masa o composición, siguen la misma trayectoria en presencia de un mismo campo gravitatorio. Es decir, la aceleración de un cuerpo provocada por dicho campo no depende de sus propiedades particulares.

Inspirado por esta observación, Einstein formuló el principio de equivalencia. Este sostiene que las leyes de la física adoptan localmente la misma forma en un sistema en caída libre que en un sistema inercial descrito por la relatividad especial. En otras palabras, un observador encerrado en una cabina sin ventanas, en caída libre, no puede realizar ningún experimento físico que le permita distinguir si se encuentra en un campo gravitatorio o en el vacío del espacio interestelar.

Este principio, al identificar la aceleración gravitatoria con la aceleración debida a un cambio de referencia, sugiere que la gravedad no debe describirse como una fuerza en el sentido clásico, sino como una manifestación de la geometría del espacio-tiempo. Para formalizar esta idea es necesario abandonar el marco de las geometrías planas, como la euclídea o la de Minkowski, y adoptar un lenguaje más general: el de la geometría diferencial de variedades, desarrollada en el siglo XIX por matemáticos como Gauss y Riemann. En este nuevo marco, los efectos de la gravedad se interpretan como la curvatura del espacio-tiempo, y las trayectorias de los cuerpos en caída libre se describen como geodésicas.

2.2.2 Elementos de geometría diferencial

La geometría diferencial proporciona el marco matemático para describir espacios curvos mediante herramientas del cálculo infinitesimal. Su objeto central es la *variedad diferenciable*, que generaliza nociones como curvas y superficies a dimensiones arbitrarias.

Una *variedad* $\mathcal{M}$ de dimensión n es un conjunto cuyos puntos pueden etiquetarse mediante n números reales $\{x^a\}$, llamados *coordenadas*, de modo que $\mathcal{M}$ se asemeja en cada vecindad a $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{M}$ es continua si en el entorno de cualquier punto P hay otros cuyas coordenadas difieren infinitesimalmente de las de P . Si, además, se puede definir un campo escalar en cada punto que sea diferenciable, se dice que $\mathcal{M}$ es una *variedad diferenciable*.

Por lo general, no se puede utilizar un único sistema de coordenadas que cubra toda la variedad, por lo que se recurre a una colección de sistemas locales denominados *cartas*. Además, la elección del sistema es arbitraria y puede haber varios, con una correspondencia suave entre las coordenadas de unos y otros. Esto implica que se pueden hacer cambios de coordenadas $x^a \mapsto x^{a'}$, cuyas diferenciales se relacionan mediante la regla de la cadena:

$$dx^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} dx^b.$$

Esta estructura permite definir campos escalares diferenciables y, posteriormente, vectores, tensores, métricas y nociones de curvatura.

• Métrica

La geometría de la variedad se especifica al introducir una métrica, que permite definir la distancia entre dos puntos infinitesimalmente próximos. En geometría riemanniana, esta distancia se expresa mediante el elemento de línea de la forma:

$$ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b,$$

donde $g_{ab}(x)$ es el tensor métrico, una forma bilineal simétrica ($g_{ab} = g_{ba}$) y definida positiva, que puede depender de las coordenadas.

En el contexto de la relatividad general, se utiliza una generalización de esta estructura: la geometría pseudo-riemanniana, en la que la métrica no es definida positiva. En particular, el espacio-tiempo de Minkowski es una variedad de este tipo con curvatura nula, y cuya métrica, adoptaría la forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

A pesar de la posible complejidad de la métrica, en una vecindad suficientemente pequeña de cualquier punto de la variedad siempre existe un sistema de coordenadas en el que la métrica adopta la forma de la métrica euclídea o de Minkowski, según el caso. Esta propiedad refleja la equivalencia local con el espacio plano.

• Espacio tangente, vectores y tensores

Para extender la noción de vectores a una variedad diferenciable $\mathcal{M}$, se introduce el *espacio tangente* $T_P(\mathcal{M})$ en cada punto P . Este es un espacio vectorial de dimensión n , isomorfo a $\mathbb{R}^n$, que contiene todos los vectores tangentes a curvas que pasan por P . Un *vector tangente* en P se puede definir como un operador de derivada direccional que actúa sobre funciones escalares suaves $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$V(f) = v^a \frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

Los operadores $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}$ forman una *base coordenada* (o base holónoma) del espacio tangente, asociada al sistema de coordenadas $\{x^a\}$. Un vector V puede entonces expresarse como combinación lineal:

$$V = v^a \partial_a,$$

donde v^a son las componentes *contravariantes* del vector en dicha base.

El dual del espacio tangente es el *espacio cotangente* $T_P^*(\mathcal{M})$, formado por formas lineales que asignan números reales a vectores tangentes. Su base dual está dada por las 1-formas diferenciales $\{dx^a\}$, que satisfacen $dx^a(\partial_b) = \delta_b^a$. Un elemento del cotangente, ω , se escribe como:

$$W = w_a dx^a,$$

donde w_a son las componentes *covariantes*.

El producto tensorial entre vectores y covectores permite construir objetos más generales: los *tensores*. En particular, la métrica g_{ab} , ya introducida, es un tensor de tipo (0,2) que permite definir productos internos y establecer una correspondencia entre el espacio tangente y cotangente, es decir, *eleva* y *baja* índices:

$$v_a = g_{ab} v^b, \quad v^a = g^{ab} v_b,$$

donde g^{ab} es el inverso de g_{ab} . Los vectores y tensores se transforman bajo cambios de coordenadas según reglas específicas que preservan su carácter geométrico. Algunos ejemplos de transformaciones son las siguientes:

$$v^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} v^b, \quad v_{a'} = \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} v_b, \quad T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^c} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^d} T^{cd}, \quad T_{a'b'} = \frac{\partial x^c}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^d}{\partial x^{b'}} T_{cd}. \quad (2.11)$$

• Derivada covariante y conexión

En una variedad diferenciable, los espacios tangentes en puntos distintos no pueden compararse directamente, lo que impide definir una derivada ordinaria de un campo vectorial. Para resolverlo, se introduce un objeto adicional: la *conexión afín*, que permite comparar vectores en puntos próximos y definir una derivada coherente con la geometría de la variedad. La conexión se expresa mediante los *símbolos de Christoffel* Γ_{bc}^a , que permiten definir la *derivada covariante* $\nabla_b v^a$ de un campo vectorial v^a como:

$$\nabla_b v^a = \partial_b v^a + \Gamma_{bc}^a v^c.$$

La derivada covariante puede extenderse a covectores y tensores de cualquier tipo, actuando índice por índice. Así, por ejemplo, la derivada covariante del tensor métrico queda:

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - \Gamma_{cb}^d g_{ad}$$

Los símbolos de Christoffel no forman un tensor, pero se determinan completamente a partir de la métrica si se impone: (1) la conexión es simétrica en los índices b y c , es decir, $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$, y (2) La derivada covariante de la métrica se anula: $\nabla_c g_{ab} = 0$. Estas condiciones definen la *conexión de Levi-Civita*, cuya expresión en términos de la métrica es:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \quad (2.12)$$

Este formalismo permite formular leyes físicas en variedades curvas manteniendo su forma independiente del sistema de coordenadas.

• Geodésicas

En una variedad con métrica, las *geodésicas* son las curvas que generalizan para espacios curvos la noción de línea recta en los espacios planos. Pueden definirse de dos formas equivalentes: (1) como las trayectorias que minimizan la distancia entre dos puntos, o (2) como las curvas en las que el vector tangente mantiene constante su dirección a lo largo de la trayectoria, en el sentido de que se transporta paralelamente en el espacio tangente.

Se puede usar la segunda condición para plantear la ecuación de la geodésica, pero previamente habrá que formular la derivada de un campo vectorial V de componentes v^a a lo largo de una curva parametrizada por λ . Análogamente a como se procede en un espacio plano, donde $\frac{dv^a}{d\lambda} = \partial_b v^a \frac{dx^b}{d\lambda}$, al sustituir $\partial_b v^a$ por la derivada covariante $\nabla_b v^a$, se obtiene:

$$\frac{Dv^a}{d\lambda} = \nabla_b v^a \frac{dx^b}{d\lambda} = \frac{dv^a}{d\lambda} + \Gamma_{bc}^a v^c \frac{dx^b}{d\lambda} \quad (2.13)$$

Para obtener la ecuación de la geodésica se debe imponer que la dirección del vector tangente $u^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$ no varíe a lo largo de la curva. Además, se puede imponer una parametrización, llamada *afín*, tal que el módulo del vector tangente permanezca constante. Con esto, la ecuación de la geodésica resulta al exigir que (2.13), aplicada al vector tangente, se anule:

$$\frac{Du^a}{d\lambda} = \frac{d^2 x^a}{d\lambda^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = 0.$$

De forma equivalente, la geodésica también puede obtenerse con un planteamiento variacional, minimizando la longitud:

$$L = \int \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda}} d\lambda.$$

• Curvatura del espacio-tiempo: Tensor de Riemann y Ricci

Una forma de analizar la curvatura de una variedad consiste en estudiar cómo cambia un vector cuando se transporta paralelamente a lo largo de una curva cerrada. Este proceso, conocido como *transporte paralelo*, se define por la condición de que la derivada covariante del vector a lo largo de la curva sea nula:

$$\frac{Dv^a}{d\lambda} = 0.$$

En una variedad curva, el resultado del transporte paralelo de un vector a lo largo de diferentes caminos entre dos puntos puede diferir debido a la curvatura. Esta variación se cuantifica mediante el *tensor de Riemann*, que mide la no conmutatividad de la doble derivada covariante.

$$\begin{aligned} [\nabla_c, \nabla_d]v^a &= \nabla_c(\nabla_d v^a) - \nabla_d(\nabla_c v^a) \\ &= (\partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e) v^b \\ &= R_{bcd}^a v^b \end{aligned}$$

Con lo que el tensor de Riemann queda como:

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{bc}^e,$$

El tensor de Riemann contiene toda la información local sobre la curvatura de la variedad. Si este tensor se anula en una región, dicha región es localmente plana, es decir, equivalente a un espacio euclídeo (o de Minkowski, si la métrica es pseudo-riemanniana).

A partir del tensor de Riemann se obtienen, por contracción², otros dos objetos de gran relevancia. El *tensor de Ricci* R_{ab} , y el *escalar de curvatura* R :

$$R_{ab} = R_{acb}^c, \quad R = g^{ab} R_{ab}.$$

Estos tensores resumen distintos aspectos de la curvatura y jugarán un papel central en las ecuaciones de campo de Einstein, que relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía.

• Vectores de Killing

Los vectores de Killing permiten identificar simetrías del espacio-tiempo. Un campo vectorial ξ se denomina *vector de Killing* si satisface la siguiente ecuación:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0.$$

Esta condición implica que los componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ no cambian en la dirección de ξ . Es decir, la métrica permanece constante a lo largo del campo de Killing.

Estos vectores están relacionados con leyes de conservación. Si una partícula se mueve a lo largo de una geodésica con cuadrivelocidad u^μ , entonces el producto interno $\xi_\mu u^\mu$ se conserva a lo largo de su trayectoria. Cada vector de Killing da lugar a una constante del movimiento. Esto permite simplificar notablemente la obtención de las geodésicas a partir de la métrica, especialmente en aquellos casos en los que las simetrías del espacio-tiempo son evidentes.

²La contracción consiste en aplicar el criterio de sumación de Einstein a índices repetidos arriba y abajo en un mismo tensor. Esto reduce orden del tensor, manteniendo cierta información y conservando su carácter tensorial.

2.2.3 Formulación geométrica de la gravedad

El principio de equivalencia sugiere que los efectos de la gravedad pueden interpretarse como consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, haciendo que las partículas sigan trayectorias geodésicas. Para entender esta aproximación, resulta útil formular la gravitación newtoniana para campos débiles como una teoría geométrica, y luego extenderla a regímenes relativistas.

• Enfoque para campos débiles

Para un campo gravitatorio débil, la métrica se puede escribir como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, y donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski. Si además suponemos velocidades pequeñas, $\gamma \approx 1$, por lo que $d\tau \approx dt$, y como $x_0 = ct$, entonces $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \approx c$. Con esto, la ecuación de la geodésica queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \approx -c^2 \Gamma_{00}^\mu. \quad (2.14)$$

Utilizando 2.12, los símbolos de Christoffel Γ_{00}^i se puede poner en función de los componentes de la métrica. Suponiendo campo estático, las derivadas temporales ∂_0 se anulan, con lo que, denotando con el índice i a las coordenadas espaciales:

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{ij} (\partial_0 h_{0j} + \partial_0 h_{0j} - \partial_j h_{00}) \approx -\frac{1}{2} \partial_i h_{00}. \quad (2.15)$$

Sustituyendo 2.15 en 2.14 se llega a una ecuación para las trayectorias de partículas clásicas obtenida desde un punto de vista geométrico (2.16.a). Si se compara este resultado con la ecuación de la trayectoria clásica en función del potencial Φ (2.16.b), se puede deducir la métrica para campos débiles y bajas velocidades.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} &\approx \frac{c^2}{2} \partial_i h_{00} & \Rightarrow \quad h_{00} &\approx -\frac{2\Phi}{c^2} & \Rightarrow \quad g_{00} &\approx -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \\ \text{(b)} \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= -\partial_i \Phi \end{aligned} \quad (2.16)$$

El resultado anterior también permite intuir cómo podría ser una ecuación relativista de campo gravitatorio. La ecuación de campo clásica ($\nabla^2 \Phi = -4\pi G\rho$), tiene en el lado izquierdo derivadas segundas del potencial Φ y en el lado derecho la fuente del campo, la densidad de materia ρ . Como, según 2.16, la métrica depende linealmente del potencial Φ , una teoría relativista de la gravedad debería incluir derivadas segundas de la métrica en el lado izquierdo de la ecuación de campo, lo que sugiere el uso de tensores de curvatura y una fuente relacionada con la densidad de masa en el lado derecho.

• Tensor energía-momento

Para formular una teoría relativista de la gravedad, es necesario identificar una fuente que generalice la densidad de masa de la teoría newtoniana. Esta densidad no puede usarse como escalar, ya que transforma entre sistemas inerciales como $\rho = dm/dV = \gamma^2 dm'/dV' = \gamma^2 \rho'$, lo que sugiere —según 2.11— que se comporta como una componente de un tensor de segundo orden. Una forma natural de construir dicho tensor es usar la cuadrivelocidad U y la densidad en reposo ρ_0 , formando el producto tensorial:

$$T = \rho_0 U \otimes U,$$

que define el tensor energía-momento. Este tensor, por construcción simétrico, no solo codifica la densidad de masa-energía, sino también sus flujos. Sus componentes tienen una interpretación física directa:

- $T^{00} = \rho_0 c^2$: densidad de energía,
- $T^{0i} = \rho_0 c u^i$: densidad de momento (o flujo de energía en la dirección i),
- $T^{ij} = \rho_0 u^i u^j$: flujo de momento o tensiones.

Las componentes $T^{0\mu}$ representan densidades de cantidad conservada, mientras que los términos T^{ij} representan los flujos de dichas cantidades. Esto permite establecer ecuaciones de continuidad: la variación temporal de una cantidad en un volumen es igual al flujo neto entrante. En términos covariantes, esto se expresa como la anulación de la divergencia del tensor. Esta ecuación generaliza la conservación de energía y momento:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.17)$$

• Tensor de Einstein y ecuaciones de campo

Como se ha argumentado anteriormente, en una teoría relativista de la gravedad la métrica, que juega el papel del potencial gravitatorio, debe intervenir con derivadas segundas, lo cual sugiere el uso de tensores de curvatura. Por otra parte, la fuente del campo, que es el tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$, tiene divergencia nula. Esto implica que el tensor geométrico que aparezca en el lado izquierdo de las ecuaciones también debe tenerla. De los tensores contruidos a partir del tensor de Riemann, el único que cumple esta propiedad y es simétrico es el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R,$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, y R su traza (la curvatura escalar). En general, es posible añadir un término proporcional a la métrica con una constante Λ , conocida como *constante cosmológica*. Sin embargo, dado que es empíricamente muy pequeña, no afecta al objetivo de este trabajo.

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden plantearse con una constante arbitraria κ : $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. El valor de κ se puede determinar considerando el límite clásico ya tratado anteriormente. Con ello se obtiene $\kappa = 8\pi G/c^4$, siendo G la constante de la gravitación universal, con lo que las ecuaciones adoptan la forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Tomando las ecuaciones en su forma general $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$, se puede subir un índice multiplicando a ambos lados por $g^{\alpha\mu}$ llegando a: $R^\alpha_\nu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\nu R = \kappa T^\alpha_\nu$. Si tras esto, se contraen los dos índices ($\alpha = \nu$), se deduce que: $R = -\kappa T$, donde $T = T^\alpha_\alpha$ es la traza del tensor energía-momento. Sustituyendo este resultado en las ecuaciones de campo originales se obtiene una expresión alternativa:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.18)$$

Capítulo 3. Espacio-tiempo estático con simetría esférica

La simetría esférica aparece con frecuencia en contextos astrofísicos, como estrellas, agujeros negros o sistemas colapsados. En este capítulo se estudian las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein bajo esta simetría. Partiendo de consideraciones generales, se deduce la forma de la métrica estática y esféricamente simétrica, y se particulariza en dos casos relevantes: la métrica de Schwarzschild y una modificación tipo black bounce.

Para alcanzar el objetivo de este trabajo —la simulación del aspecto del agujero negro para un observador en el infinito— es necesario conocer tanto las trayectorias de la luz como las trayectorias de las partículas del disco de acreción. Una vez obtenida la métrica, se plantearán las ecuaciones que rigen estas trayectorias, identificando propiedades como el parámetro de impacto crítico o el radio de la esfera de fotones en el caso de la luz, y el límite de estabilidad o la velocidad angular en el caso de las partículas materiales.

3.1 Métricas estáticas con simetría esférica

Para determinar la forma general de la métrica en un espacio-tiempo con simetría esférica y estático, se imponen dos condiciones: que la métrica sea invariante bajo rotaciones espaciales y que sea independiente del tiempo.

- La simetría esférica permite adoptar un sistema de coordenadas adaptado (t, x, θ, ϕ) , donde x es una coordenada invariante bajo rotaciones. Además, la parte angular debe tomar la forma compatible con el elemento de área sobre la 2-esfera, lo que se consigue escribiendo el término angular como $r(x)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = r(x)^2 d\Omega^2$, siendo $r(x)$ una función de la coordenada radial, $d\Omega$ el diferencial de ángulo sólido.
- La estaticidad implica la existencia de un sistema de coordenadas en el que la métrica no depende del tiempo y es invariante bajo inversión temporal. Esto significa que los coeficientes métricos no dependen de t .

Aunque, en principio, la métrica podría contener términos cruzados del tipo $dt dx$, se puede demostrar que es posible realizar un cambio de coordenadas para eliminarlos [8]. Con todo ello, la forma más general del elemento de línea compatible con estas simetrías es:

$$ds^2 = -A(x) c^2 dt^2 + B(x) dx^2 + r(x)^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

donde $A(x)$, $B(x)$ y $r(x)$ son funciones regulares. El término $r(x)^2 d\Omega^2$ indica que $r(x)$ representa la coordenada radial areal, es decir, aquella tal que las 2-esferas tienen área $4\pi r(x)^2$.

Esta expresión representa la métrica general de cualquier espacio-tiempo que sea estático y esféricamente simétrico. Las funciones $A(x)$ y $B(x)$ quedan determinadas al resolver las ecuaciones de campo de Einstein bajo condiciones físicas apropiadas.

3.1.1 Métrica de Schwarzschild

La solución más sencilla e importante de las ecuaciones de campo de Einstein con simetría esférica describe el vacío alrededor de una masa puntual y estática; esta es la *métrica de Schwarzschild*, que describe el espacio-tiempo exterior a cualquier objeto esférico no cargado y sin rotación. Para su deducción se adopta coordenada radial de forma que $r(x) = x$. Con esto, la forma general de la métrica queda:

$$ds^2 = -A(r) c^2 dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Tomando 2.18, e imponiendo que no existe materia ni energía en la región exterior a la fuente, $T_{\mu\nu} = 0$, las ecuaciones de campo quedan:

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

donde, el tensor de Ricci, se construye a partir de los símbolos de Christoffel, los cuales se puede expresar en función de la métrica:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda, \quad \text{con} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

En principio, estas expresiones producen diez ecuaciones diferenciales independientes, una para cada componente simétrica de $R_{\mu\nu}$. Afortunadamente, en este caso tan simétrico y estático solo sobreviven los términos diagonales, y tras largos cálculos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para las componentes de la métrica [8]:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} = 0, \\ R_{11} &= \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = 0, \\ R_{22} &= \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = 0, \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta = 0. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce la relación $A'B + AB' = 0$, por lo que, AB debe ser constante ($AB = \alpha$), lo que permite escribir: $B = \alpha/A$. Sustituyendo en las ecuaciones anteriores y resolviendo se llega a

$$A(r) = \alpha \left(1 + \frac{k}{r} \right),$$

con α y k constantes de integración. Para determinar estas constantes, se impone que en el límite de campo débil (2.16) la componente temporal de la métrica recupere la forma newtoniana,

$$g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right), \quad \Phi = -\frac{GM}{r},$$

lo que implica:

$$A(r) \simeq 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad \implies \quad \alpha = 1, \quad k = -\frac{2GM}{c^2}.$$

Sustituyendo estos valores en la métrica original, se obtiene la expresión final de la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

La métrica de Schwarzschild, pese a su forma relativamente sencilla, encierra algunos aspectos sorprendentes. En ella aparecen dos puntos singulares destacados: el primero, en $r = r_s = 2GM/c^2$, conocido como el *radio de Schwarzschild*, y el segundo, en $r = 0$. A continuación se analizan estos aspectos clave:

- *Radio de Schwarzschild.* Este radio se obtiene anulando el componente temporal de la métrica:

$$g_{00} = -A(r) = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

En este punto, la componente temporal se anula y la radial diverge. Sin embargo, esta es una singularidad de coordenadas, no una singularidad física. Puede eliminarse mediante un cambio de coordenadas apropiado (por ejemplo, las de Kruskal-Szekeres) [8]. Desde el punto de vista físico, este radio caracteriza al *horizonte de eventos*: una superficie que encierra una región del espacio desde la cual nada puede escapar. Dentro del horizonte los coeficientes de la métrica asociados a dt^2 y dr^2 cambian sus signos, por lo que las coordenadas t y r intercambian sus roles.

- *Singularidad en $r = 0$.* A diferencia del caso anterior, en $r = 0$ hay una singularidad física esencial. En este punto la curvatura diverge, por lo que la métrica deja de tener sentido.
- *Dilatación temporal y desplazamiento al rojo.* Si tomamos la métrica y hacemos $r \rightarrow \infty$, se puede comprobar que en el infinito la métrica toma la forma plana en coordenadas esféricas. Esto implica que Δt marca el paso de tiempo de un observador lejano. Sin embargo, el paso del tiempo medido por un observador local en r sería $\Delta\tau = \sqrt{A(r)} dt$, por lo tanto más lento. Esto, lógicamente, tiene efecto sobre la frecuencia percibida por un observador lejano (ν_{ob}), de una señal luminosa emitida desde una posición r con frecuencia (ν_r). A este fenómeno se le denomina *corrimiento al rojo gravitacional* (z), dado que la frecuencia disminuye al ascender en el potencial gravitatorio, y viene dado por:

$$\frac{\nu_{\text{ob}}}{\nu_r} = \frac{1}{1+z} = \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \sqrt{A(r)} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (3.2)$$

- *Alargamiento de longitudes radiales.* Aunque r es una coordenada radial areal (define el área de las 2-esferas), no representa directamente la distancia física al centro. La distancia radial efectiva entre dos radios r_1 y r_2 es:

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{B(r)} dr = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} dr.$$

Al acercarse a r_s , esta integral crece sin límite, lo que significa que una longitud radial física se alarga fuertemente debido a la curvatura. Así, la estructura del espacio está deformada en las cercanías del horizonte.

3.1.2 Métrica *Black Bounce*

Además de la solución clásica de Schwarzschild, se han propuesto otras métricas compatibles con la simetría esférica estática, con el objetivo de explorar nuevos escenarios físicos. Una de ellas es la llamada *métrica Black Bounce*, propuesta como una forma de regularizar la singularidad central del agujero negro de Schwarzschild mediante un núcleo no singular y atravesable, dependiendo de los parámetros del modelo. A diferencia del caso anterior, esta métrica no surge como solución directa de las ecuaciones de campo en el vacío, sino que presupone un tipo particular de materia o modificación gravitacional. Por tanto, debe considerarse como modelo teórico con fines exploratorios.

La métrica se ajusta de forma natural a la forma general adoptada previamente:

$$ds^2 = -A(x) c^2 dt^2 + B(x) dx^2 + r(x)^2 d\Omega^2,$$

donde, en este caso, se toma:

$$r^2 = x^2 + a^2, \quad A(x) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r(x)}, \quad B(x) = \frac{1}{A(x)}.$$

Aquí, $a > 0$ es un parámetro con dimensiones de longitud que evita que $r \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$. Así, en lugar de la singularidad en $r = 0$ de Schwarzschild, se obtiene un mínimo no nulo del radio $r_{\min} = a$, y la métrica es suave en todo el dominio de $x \in (-\infty, +\infty)$.

El comportamiento geométrico y causal de esta métrica depende crucialmente del valor del parámetro a , lo que da lugar a distintos escenarios:

- Caso $a = 0$: Se recupera exactamente la métrica de Schwarzschild, con su singularidad en $r = 0$ y el horizonte de eventos en $r_s = 2GM/c^2$.
- Caso $0 < a < r_s$: La métrica describe un *agujero negro regular*, donde la singularidad central ha sido sustituida por una región de curvatura finita. Se conserva la presencia de un horizonte de eventos en $r = r_s$, pero el interior ya no termina en una singularidad, sino que se extiende hasta un mínimo $r = a$ que puede interpretarse como un cuello de tipo rebote (*bounce*).
- Caso $a = r_s$: Se obtiene una solución límite entre un agujero negro y una geometría sin horizonte. El cuello se sitúa justo en el lugar del antiguo horizonte, lo que marca una transición crítica en la estructura causal.
- Caso $a > r_s$: En este régimen, la función $A(x)$ nunca se anula, por lo que no existe horizonte de eventos. La métrica describe un *agujero de gusano* atravesable, con un mínimo en $r = a$ que conecta dos regiones asintóticamente planas. Este tipo de geometría permite trayectorias que atraviesan de una región del espacio a otra sin encontrar una barrera causal.

En todos los casos con $a > 0$, se evita la aparición de la singularidad en $r = 0$, que en Schwarzschild conduce a una divergencia en las invariantes de curvatura. La métrica Black Bounce ofrece así una interpolación continua entre un agujero negro clásico, un agujero negro regular y un agujero de gusano, según el valor del parámetro a . Desde el punto de vista físico, estas soluciones requieren la existencia de materia exótica, lo que las hace especulativas desde la perspectiva de la Relatividad General estándar.

En resumen, la métrica Black Bounce proporciona un laboratorio teórico para explorar geometrías regulares sin singularidades y analizar los límites entre distintas estructuras espacio-temporales, abriendo posibilidades para entender mejor el comportamiento de la gravedad en regímenes extremos.

3.2 Trayectorias de partículas materiales

Para poder simular el aspecto de los discos de acreción que rodean a cuerpos compactos, es necesario conocer algunos aspectos de la cinemática de los discos. Estos están formados por multitud de partículas orbitando el cuerpo compacto en trayectorias circulares. Para obtener estas trayectorias se tomará la ecuación de métrica estática con simetría esférica 3.1, limitándonos, sin pérdida de generalidad, a órbitas en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$):

$$ds^2 = -A(x) c^2 dt^2 + B(x) dx^2 + r(x)^2 d\phi^2,$$

Dado que la métrica es independiente de t y ϕ , existen dos vectores de Killing, que expresados en la base coordenada $\partial_t, \partial_x, \partial_\theta, \partial_\phi$, serán: $\xi_{(t)} = \partial_t = (1, 0, 0, 0)$ y $\xi_{(\phi)} = \partial_\phi = (0, 0, 0, 1)$.

Estos vectores expresan la simetría temporal y axial de la métrica, y multiplicándolos escalarmente por la cuadrivelocidad $(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau})$, lleva a cantidades conservadas; en este caso: la energía por unidad de masa E , y el momento angular por unidad de masa L , que permiten definir las siguientes leyes de conservación:

$$\begin{aligned} E = -g_{\mu\nu}\xi_{(t)}^\mu u^\nu = A(x) c^2 \frac{dt}{d\tau} &\Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{A(x) c^2}, \\ L = g_{\mu\nu}\xi_{(\phi)}^\mu u^\nu = r(x)^2 \frac{d\phi}{d\tau} &\Rightarrow \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r(x)^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para encontrar la ecuación del movimiento se puede partir de la normalización de la cuadrivelocidad, que para una partícula con masa ($u^\mu u_\mu = -c^2$) será:

$$-A(x) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + B(x) \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + r(x)^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -c^2.$$

Sustituyendo las leyes de conservación 3.3, en la ecuación anterior, se llega a:

$$-\frac{E^2}{A(x) c^2} + B(x) \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r(x)^2} = -c^2,$$

Considerando solo las métricas propuestas, donde $B(x) = 1/A(x)$, y reordenando términos para aislar $(\frac{dx}{d\tau})^2$, se obtiene una ecuación similar a la de las órbitas keplerianas, en forma de potencial efectivo¹:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + A(x) \left(c^2 + \frac{L^2}{r(x)^2}\right) = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{ef}}(x) = \frac{E^2}{c^2}, \quad (3.4)$$

donde el potencial efectivo viene dado por:

$$V_{\text{ef}}(x) = A(x) \left(c^2 + \frac{L^2}{r(x)^2}\right). \quad (3.5)$$

Este potencial permite interpretar la dinámica radial como el movimiento de una partícula en una dimensión bajo la acción de una energía efectiva, con el lado izquierdo actuando como una energía cinética radial. A partir de esas ecuaciones es posible obtener una ecuación diferencial para la trayectoria $x(\phi)$ de la partícula. Para ello, aplicamos la regla de la cadena y la conservación del momento angular 3.3, y remplazando en la ecuación 3.4, obtenemos:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dx}{d\phi} \cdot \frac{L}{r(x)^2} \Rightarrow \left(\frac{L}{r(x)^2} \frac{dx}{d\phi}\right)^2 + V_{\text{ef}}(x) = \frac{E^2}{c^2}. \quad (3.6)$$

Esta es la ecuación de la trayectoria $x(\phi)$, que resulta útil para estudiar la forma de las órbitas a partir de la métrica.

3.2.1 Órbitas circulares y condiciones de estabilidad

El estudio de las órbitas circulares permite caracterizar propiedades de la dinámica de los discos de acreción. En el caso relativista, estas órbitas pueden presentar comportamientos

¹En un campo gravitatorio newtoniano originado por una masa puntual M , la energía por unidad de masa de una partícula orbitando viene dada por: $E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V_{\text{ef}}$, donde $V_{\text{ef}} = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$ es el potencial efectivo.

que no tienen análogo clásico, como la existencia de un radio mínimo a partir del cual las trayectorias circulares dejan de ser estables.

A continuación, se parte del potencial efectivo obtenido previamente para deducir la velocidad angular y las condiciones que deben satisfacer las órbitas circulares estables. Se considera una métrica *Black Bounce*, para la cual se toma:

$$A(r) = 1 - \frac{2\mu}{r}, \quad B(r) = \frac{1}{A(r)}, \quad r^2 = a^2 + x^2, \quad \text{donde } \mu = \frac{GM}{c^2}.$$

El potencial efectivo 3.5 toma entonces la forma:

$$V_{\text{ef}}(r) = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \left(c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) = c^2 - \frac{2\mu c^2}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2\mu L^2}{r^3}. \quad (3.7)$$

Si se toma este potencial efectivo, sustituyéndolo en la ecuación 3.6, y haciendo el cambio $u = 1/r$, se obtiene:

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{dx}{dr} \cdot \frac{du}{d\phi} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dr} \cdot \frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{2\mu c^2 u}{L^2} + u^2 - 2\mu u^3 = \frac{1}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^2} - c^2\right),$$

y derivando con respecto a ϕ :

$$\frac{dx}{dr} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dx}{dr} \cdot \frac{du}{d\phi}\right) + u = \frac{\mu c^2}{L^2} + 3\mu u^2.$$

En las órbitas circulares el radio es constante, con lo que $u = 1/r$ también lo es, y por lo tanto sus derivadas son igual a cero. Esto implica que en estas órbitas, el término de la izquierda de la expresión anterior es cero, lo que nos lleva a:

$$u = \frac{\mu c^2}{L^2} + 3\mu u^2 \Rightarrow L^2 = \frac{\mu c^2 r^2}{r - 3\mu} \Rightarrow \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{L^2}{r^4} = \frac{\mu c^2}{r(r - 3\mu)}.$$

Por otro lado, si tomamos la ecuación 3.6 y se hace $\frac{dx}{d\tau} = 0$ se obtiene $V_{\text{ef}}(r) = E^2/c^2$. Si ahí se toma la expresión del V_{ef} de 3.7, se sustituye L^2 por el obtenido anteriormente y se despeja la energía, se llega a:

$$\frac{E}{c^2} = \frac{1 - 2\mu/r}{(1 - 3\mu/r)^{1/2}}. \quad (3.8)$$

Todo esto permite obtener, por un lado, la velocidad angular de la órbita con respecto al tiempo coordenado t , que coincide formalmente con la expresión de la mecánica newtoniana:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\phi}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\phi}{d\tau} \cdot \frac{A(r)c^2}{E}\right)^2 = \frac{GM}{r^3},$$

y por otro lado, un límite interno para órbitas circulares. Si se tiene en cuenta que la energía por unidad de masa E , no puede superar c^2 , ya que en ese caso la partícula material no estaría ligada, se llega al radio de la órbita circular más interna posible r_{IBCO} (*Innermost Bound Circular Orbit*):

$$\frac{1 - 2\mu/r}{(1 - 3\mu/r)^{1/2}} \leq 1 \Rightarrow r \geq 4\mu = \frac{4GM}{c^2} = r_{\text{IBCO}}.$$

Otra característica de estos espacio-tiempos es la existencia de un radio mínimo para órbitas circulares estables r_{ISCO} (*Innermost Stable Circular Orbit*). Este se deduce del comportamiento del potencial efectivo. En particular, una órbita circular estable requiere que el

potencial tenga un mínimo, es decir, que se cumplan $dV_{\text{ef}}/dx = 0$ y $d^2V_{\text{ef}}/dx^2 > 0$. Al disminuir el radio, este mínimo se va haciendo más llano, hasta que en un punto crítico se convierte en un punto de inflexión, donde $d^2V_{\text{ef}}/dx^2 = 0$. Por debajo de este radio, ya no existen mínimos del potencial y las órbitas circulares dejan de ser estables. En las métricas consideradas este radio viene dado por:

$$r_{\text{ISCO}} = 6\mu = \frac{6GM}{c^2}.$$

3.3 Trayectorias nulas

El estudio de las trayectorias nulas es esencial para entender la propagación de la luz en torno a objetos compactos, así como para determinar la apariencia observada de estos sistemas. A diferencia de las partículas materiales, los fotones siguen trayectorias de tipo nulo, es decir, aquellas para las cuales el intervalo espacio-tiempo cumple $ds^2 = 0$.

Se parte de una métrica estática con simetría esférica 3.1 en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$): y se toma como parámetro afín λ para describir la evolución de la trayectoria nula. Como en el caso de partículas materiales, las simetrías temporales y axiales implican la existencia de cantidades conservadas asociadas a los vectores de Killing:

$$E = A(x) c^2 \frac{dt}{d\lambda}, \quad L = r(x)^2 \frac{d\phi}{d\lambda}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la condición nula $ds^2 = 0$, resolviendo para $\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2$, y considerando el caso habitual de las métricas tratadas en este trabajo ($B(x) = 1/A(x)$), se obtiene:

$$-A(x) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + B(x) \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + r(x)^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + A(x) \frac{L^2}{r(x)^2} = \frac{E^2}{c^2}.$$

lo cual permite definir el potencial efectivo para trayectorias nulas:

$$V_{\text{ef}}^{\text{nulo}}(x) = A(x) \frac{L^2}{r(x)^2}. \quad (3.9)$$

Este potencial determina el comportamiento radial de los fotones. Como en la mecánica clásica, las órbitas están restringidas a las regiones donde el lado derecho de la ecuación supera al potencial efectivo. En este contexto, adquiere especial importancia el *parámetro de impacto*:

$$b = \frac{cL}{E},$$

el cual representa, en el límite plano, la distancia mínima a la que una partícula sin masa pasaría del centro si no estuviese influida por la gravedad.

Suponiendo una reparametrización que haga $L = 1$, b quedara como ($b = c/E$) y sustituyendo $E = c/b$ en la ecuación de la trayectoria, se llega a:

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{A(x)}{r(x)^2} \quad \text{donde ahora:} \quad V_{\text{ef}}^{\text{nulo}}(x) = \frac{A(x)}{r(x)^2}. \quad (3.10)$$

Esta expresión permite estudiar el movimiento radial del fotón en términos del parámetro de impacto b .

Para obtener la forma de la trayectoria, puede derivarse una ecuación para $\frac{d\phi}{dx}$ a partir de:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi/d\lambda}{dx/d\lambda} = \mp \frac{b}{r(x)^2 \sqrt{1 - \frac{b^2 A(x)}{r(x)^2}}}, \quad (3.11)$$

donde el signo depende de si la trayectoria es entrante o saliente. Esta ecuación permite calcular de forma numérica las curvas seguidas por los rayos de luz en un espacio-tiempo dado.

3.3.1 Esfera de fotones y parámetro de impacto crítico

Las trayectorias nulas en torno a objetos compactos presentan una configuración especialmente relevante: la existencia de órbitas circulares inestables para los fotones, que definen lo que se denomina *esfera de fotones* (*photon sphere*). Esta corresponde a un máximo del potencial efectivo $V_{\text{ef}}^{\text{nulo}}(x)$, y actúa como una barrera dinámica: un fotón con el parámetro de impacto adecuado puede orbitar un número arbitrariamente grande de veces cerca de esa región antes de ser dispersado hacia el infinito o capturado por el objeto compacto.

La condición para que un fotón llegue a su punto de retorno más cercano, es que $\frac{dx}{d\lambda} = 0$. El valor mínimo de b para el cual esta condición puede satisfacerse define el *parámetro de impacto crítico* b_c , que corresponde al máximo del potencial efectivo:

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{A(x)}{r(x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_c^2 = \frac{r(x_{\text{ps}})^2}{A(x_{\text{ps}})}, \quad (3.12)$$

donde x_{ps} es el valor de la coordenada radial en la que se alcanza dicho máximo, es decir, la posición de la esfera de fotones.

En el caso particular de la métrica *Black Bounce*, con $r(x)^2 = x^2 + a^2$ y $A(x) = 1 - 2\mu/r(x)$, se puede demostrar que la posición de la esfera de fotones se encuentra en:

$$x_{\text{ps}} = \sqrt{9\mu^2 - a^2}.$$

Una propiedad notable de esta familia de soluciones es que, al sustituir este valor en la expresión del parámetro de impacto crítico (3.12), se obtiene:

$$b_c = 3\sqrt{3}\mu,$$

que coincide exactamente con el resultado de Schwarzschild. Es decir, todas las soluciones *Black Bounce* que admiten una esfera de fotones comparten el mismo valor crítico del parámetro de impacto.

Sin embargo, no todas las configuraciones admiten este tipo de órbita. Para que exista una esfera de fotones (es decir, para que el máximo de $V_{\text{ef}}^{\text{nulo}}$ esté definido y sea real), se debe cumplir que $a < 3\mu$. Esto permite clasificar las soluciones en dos regímenes: (1) para $0 < a < 2\mu$ la métrica describe un agujero negro regular con horizonte de eventos, donde la esfera de fotones se encuentra en el exterior del horizonte, y (2), para $2\mu < a < 3\mu$ la solución describe un agujero de gusano atravesable sin horizonte, pero que aún conserva una esfera de fotones. Los casos límite $a = 2\mu$ y $a = 3\mu$ marcan transiciones críticas: el primero entre agujeros negros y agujeros de gusano, y el segundo la desaparición de la esfera de fotones.

Capítulo 4. Simulación de trayectorias nulas y formación de sombras

La integración de trayectorias nulas en geometrías relativistas permite simular cómo se vería un objeto compacto rodeado por un disco de acreción desde la perspectiva de un observador lejano. Este capítulo describe el procedimiento seguido para generar dichas imágenes, y presenta los resultados obtenidos.

Además de seguir un esquema general ampliamente utilizado, el trabajo incorpora dos elementos diferenciadores: la posibilidad de considerar orientaciones arbitrarias del disco y la inclusión del efecto Doppler debido al movimiento del material, junto al corrimiento al rojo gravitacional.

4.1 Procedimiento de simulación

La generación de imágenes se basa en la integración hacia atrás de trayectorias nulas, trazando rayos desde un observador lejano hacia el entorno del objeto compacto. Cada rayo se propaga a través del espacio-tiempo siguiendo las ecuaciones de la geodésica nula, en nuestro caso la de la ecuación 3.11, hasta intersectar con el plano del disco de acreción.

Cuando el rayo intersecta el disco, se evalúa la intensidad de la emisión en el punto de impacto. Esta intensidad depende, en general, del perfil de brillo del disco, que puede modelarse como una función de la distancia al centro. Una vez determinada, la intensidad se corrige teniendo en cuenta el desplazamiento al rojo total sufrido por el fotón, que puede incluir tanto el corrimiento gravitacional como el efecto Doppler asociado al movimiento del material en el disco.

4.1.1 Imagen directa, de lente y anillo de fotones

Gracias a la simetría esférica de la métrica *Black Bounce*, las trayectorias nulas están completamente caracterizadas por el parámetro de impacto b , que se conserva a lo largo del movimiento. Desde el punto de vista del observador, este parámetro se asocia a la distancia radial del punto de la imagen con respecto al centro óptico del sistema (centro del cuerpo compacto).

En la figura 4.1 se puede ver, a la izquierda y en el centro, diferentes ejemplos de trazado de rayos para diferentes valores de b , suponiendo métrica de Schwarzschild. Los rayos se han trazado hasta que cortan al plano del disco de acreción en algún momento. Se supone que el observador ve el disco (representado por líneas en rojo) de frente. Las figuras muestran notables diferencias en el trazado de rayos, en función del valor de b respecto a su valor crítico $b_c = 3\sqrt{3} \approx 5,196$. Si $b \gg b_c$ (líneas en verde de la figura 4.1a) los rayos cortan una vez al plano del disco. Si b es ligeramente mayor que b_c (líneas en magenta de la figura 4.1a), los rayos se curvan bastante y cortan dos veces al plano del disco, pudiendo el observador ver la parte inferior posterior del disco. Si b se aproxima mucho a b_c (líneas en azul de la figura 4.1b), los rayos se curvan aún más y el observador vería otra imagen del disco. Si $b = b_c$ el

rayo giraría alrededor del disco inestablemente (esfera de fotones) y si $b < b_c$ (4.1b) el rayo alcanzaría el horizonte de eventos.

En la figura (4.1c) se presenta la imagen observada de un disco con brillo uniforme, que se extiende radialmente desde $x = 6$, hasta $x = 9$. El observador vería tres discos concéntricos: el mayor, formado por los rayos que cortan una vez al plano del disco de acreción; el siguiente, más pequeño y muchísimo más estrecho, generado por los rayos que cortan dos veces al plano del disco; y un tercero ligeramente menor que el último y casi imperceptible, correspondiente a los rayos que cortan tres veces al disco. Estas tres imágenes del disco se denominan respectivamente *directa*, *de lente*, y *anillo de fotones* [6]. Teóricamente debería haber infinitas imágenes del disco formadas por rayos con b cada vez más próximo a b_c que podrían cortar al disco un número arbitrario de veces, pero como se argumenta en [7], estas imágenes, dada su contribución despreciable, se puede obviar en la simulación.

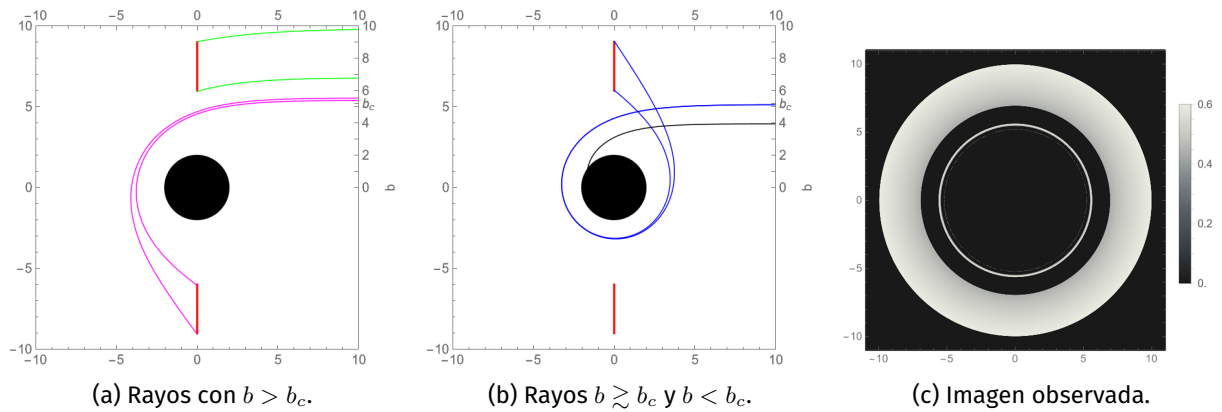


Figura 4.1: Ejemplo de trazado de rayos para diferentes valores de b e imagen observada.

4.1.2 Consideración de orientaciones arbitrarias del disco

Cuando el disco de acreción está orientado frontalmente respecto al observador (figura 4.2b), la imagen resultante posee simetría de rotación. En ese caso, lo adecuado es utilizar coordenadas polares en el plano de la imagen, definiendo un ángulo α y un radio, que corresponde al parámetro de impacto b (figura 4.2a). Como el espacio-tiempo presenta simetría esférica, y el disco es simétrico respecto al eje visual, la luminosidad observada en cada punto de la imagen no depende del ángulo α .

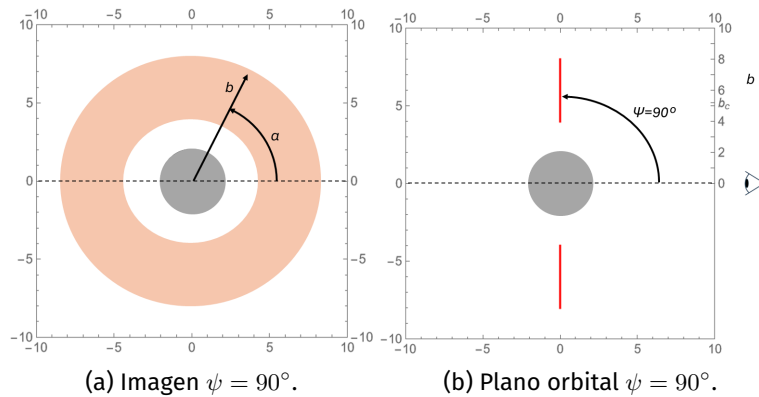


Figura 4.2: Características de la imagen y orientación del disco de acreción con $\psi = 90^\circ$.

Cuando el disco de acreción está inclinado (figura 4.3b), aunque el espacio-tiempo conserve simetría esférica, la imagen pierde simetría de rotación debido a la inclinación del disco

(figura 4.3a). Para cada ángulo α en el plano de la imagen, el trazado de rayos es el mismo, ya que este depende únicamente de b . Por tanto, la asimetría no procede del trazado de rayos, sino del punto en que estos intersectan el disco de acreción. Para analizarlo, se estudian varios casos particulares suponiendo una orientación arbitraria del disco ψ .

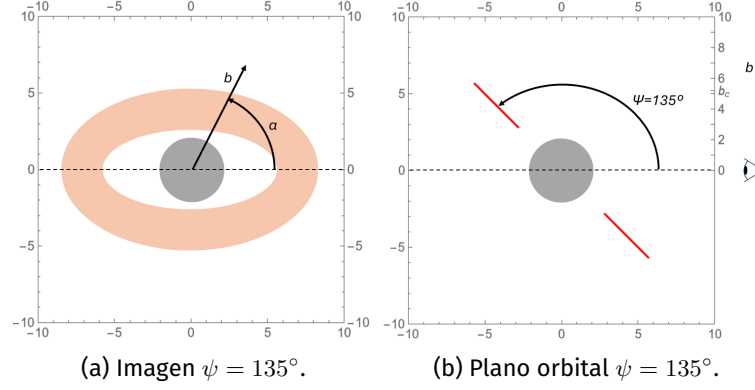


Figura 4.3: Características de la imagen y orientación del disco de acreción con $\psi = 135^\circ$.

• Casos particulares

En la figura 4.4a se muestra el caso con $\alpha = \pi/2$. La orientación del disco de acreción se define mediante el ángulo ψ , que vale $\pi/2$ cuando el disco está de frente, y aumenta al inclinarse hacia el plano horizontal. Se observa que, con $\alpha = \pi/2$, la coordenada angular ϕ de la geodésica que corta el disco de acreción (ϕ_d) es igual a ψ . Debe destacarse que α no solo indica la dirección de la imagen, sino también determina el plano orbital que contiene la geodésica $r(\phi)$ ¹.

En la figura 4.4b se representa la geometría para $\alpha = 0$. En este caso, se observa que la coordenada angular ϕ de la geodésica que intersecta el disco (ϕ_d) es igual a $\pi/2$.

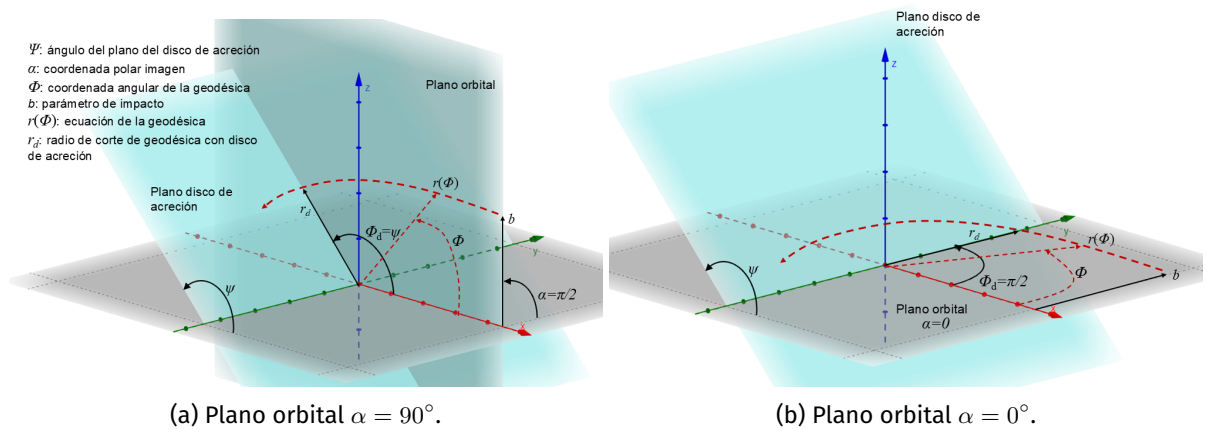


Figura 4.4: Casos particulares de orientación α del plano orbital con disco inclinado de forma arbitraria.

¹En este apartado se utiliza r como coordenada radial de la trayectoria, en lugar de x como en la métrica *Black Bounce*, para evitar confusión con el eje óptico, también llamado x .

• Caso general

Para determinar la intensidad en un punto de la imagen (b, α) , es necesario calcular la intensidad emitida en el punto del disco donde incide la geodésica con parámetro de impacto b . Esto requiere conocer ϕ_d (coordenada angular en el plano de la geodésica). A partir de ella, se determina el valor de $r_d = r(\phi_d)$, que permite obtener la intensidad emitida según el perfil del disco.

La figura 4.5 representa la situación general. Si $\alpha \in (0, \pi/2)$, entonces ϕ_d tomará valores entre ψ y $\pi/2$. Este ángulo depende tanto de la inclinación del disco (ψ) como de la orientación del plano orbital (α). ϕ_d es el ángulo entre el eje óptico (x) y la intersección de los planos del disco y orbital.

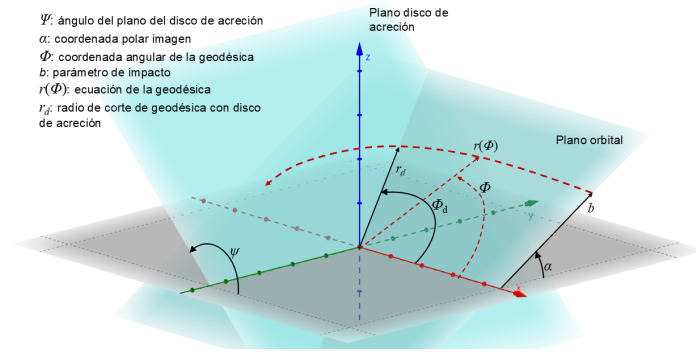


Figura 4.5: Plano del disco de acreción orientado según ψ ; plano orbital orientado según α .

Según el sistema de referencia de las figuras, el disco de acreción y el plano orbital están definidos por:

$$z = x \tan(\psi), \quad z = y \tan(\alpha).$$

Restando estas ecuaciones se obtiene la recta de intersección:

$$x \tan(\psi) = y \tan(\alpha) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\psi)} y$$

Por tanto, la recta de corte puede parametrizarse como:

$$x = t \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\psi)}, \quad y = t, \quad z = t \tan(\alpha)$$

Un vector director de dicha recta se obtiene tomando $t = 1$:

$$\vec{v} = \left(\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\psi)}, 1, \tan(\alpha) \right)$$

Sin embargo, este vector presenta problemas para $\psi = 0 + \pi n$ y $\alpha = \pi/2 + \pi n$. El caso $\psi = 0$ puede tratarse como caso límite, pero para evitar divergencias en $\alpha = \pi/2$, es mejor multiplicar el vector por $\cos(\alpha)$. Así se obtiene:

$$\vec{v} = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\psi)}, \cos(\alpha), \sin(\alpha) \right)$$

Finalmente, el ángulo ϕ_d que forma el vector anterior con el eje x viene dado por:

$$\cos(\phi_d) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_x}{\|\vec{v}\|} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\psi)}}{\sqrt{\frac{\sin^2(\alpha)}{\tan^2(\psi)} + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\sin^2(\alpha) + \tan^2(\psi)}} \quad (4.1)$$

Es fácil comprobar que este resultado reproduce correctamente los casos límites mostrados en la figura 4.4:

- Para $\alpha = \pi/2$, se tiene $\sin(\alpha) = 1$, y por tanto:

$$\cos(\phi_d) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\psi)}} = \cos(\psi) \Rightarrow \phi_d = \psi$$

- Para $\alpha = 0$, se tiene $\sin(\alpha) = 0$, y entonces:

$$\cos(\phi_d) = 0 \Rightarrow \phi_d = \frac{\pi}{2}$$

4.1.3 Perfiles de intensidad emitida por el disco de acreción

Consideraremos discos de acreción finos, compuestos por fuentes emisoras isotrópicas, es decir, que irradian la misma cantidad de energía en todas las direcciones. Supondremos cuatro perfiles radiales de emisión, utilizados para modelar la intensidad del disco de acreción. Cada perfil se extiende desde diferentes radios internos hasta el infinito, decayendo su intensidad más o menos rápidamente en las cercanías del objeto compacto.

El primer perfil (figura 4.6) tiene como radio más interno el correspondiente a la última órbita circular estable para partículas materiales, $x_{\text{ISCO}} = \sqrt{36 - a^2}$. En ese punto, la intensidad emitida es máxima y luego decae con rapidez conforme aumenta la distancia radial. Junto a la ecuación se ha representado el perfil de emisión para el caso de la métrica de Schwarzschild ($a = 0$).

$$I_{\text{em}}^I(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x - (x_{\text{ISCO}} - 1))^2}, & x \geq x_{\text{ISCO}} \\ 0, & x < x_{\text{ISCO}} \end{cases}$$

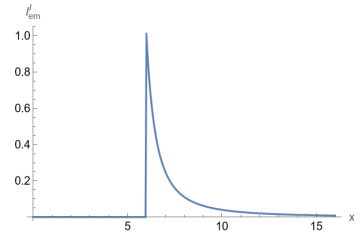


Figura 4.6: Perfil I de emisión del disco de acreción.

El segundo perfil (figura 4.7) comienza su emisión en el radio correspondiente a la órbita circular más interna posible, $x_{\text{BCO}} = \sqrt{16 - a^2}$. En este caso, la intensidad decae más lentamente que en el perfil anterior. Como antes, la gráfica que acompaña a la ecuación se corresponde con el caso $a = 0$.

$$I_{\text{em}}^{II}(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x - 8)}{\frac{\pi}{2} - \arctan(x_{\text{BCO}} - 8)}, & x \geq x_{\text{BCO}} \\ 0, & x < x_{\text{BCO}} \end{cases}$$

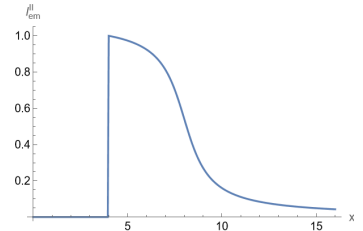


Figura 4.7: Perfil II de emisión del disco de acreción.

Finalmente, el perfil IV (figura 4.8) representa un modelo de disco extendido, cuya emisión comienza desde el horizonte de eventos, $x_{\text{EH}} = \sqrt{4 - a^2}$. Al igual que en el perfil II, la intensidad decae lentamente con la distancia radial. La gráfica se muestra para el caso $a = 0$.

$$I_{\text{em}}^{\text{III}}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(x - 5), & x \geq x_{\text{EH}} \\ 0, & x < x_{\text{EH}} \end{cases}$$

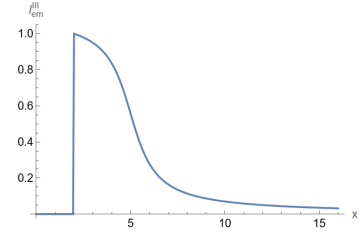


Figura 4.8: Perfil III de emisión del disco de acreción.

4.1.4 Corrección por corrimiento al rojo

Como ya se argumentó en el apartado 2.1.4, la intensidad luminosa observada, se calcula aplicando el factor de corrección $(1+z)^{-4}$, donde z es el desplazamiento al rojo experimentado entre el emisor y el observador (véase ecuación 2.10). Este desplazamiento al rojo puede tener tres orígenes: cosmológico, gravitacional y por el efecto Doppler debido al movimiento de las partículas emisoras. El corrimiento al rojo cosmológico se debe a la expansión del universo y afectaría por igual a toda la imagen, por lo que no es necesario tenerlo en cuenta. Veamos el resto.

• Corrimiento al rojo gravitacional

El corrimiento al rojo gravitacional es una manifestación de la dilatación temporal en presencia de un campo gravitatorio: cuanto más profundo se encuentra una fuente de luz en dicho campo, más lentamente transcurre el tiempo en comparación con un observador lejano. Como consecuencia, la frecuencia de la luz emitida se percibe desplazada hacia el rojo. Este fenómeno también puede interpretarse como una pérdida de energía del fotón al ascender por el potencial gravitatorio. En una métrica black Bounce, el factor de corrimiento al rojo viene dado, según se justificó en la expresión 4.2, por:

$$1+z = \frac{1}{\sqrt{A(x)}} = \left(1 - \frac{2\mu}{r(x)}\right)^{-1/2}. \quad (4.2)$$

• Corrimiento al rojo total: gravitacional y Doppler

Cuando se simula la apariencia de un disco de acreción alrededor de un objeto compacto, es importante tener en cuenta el desplazamiento al rojo por efecto Doppler (2.8). Este fenómeno surge debido al movimiento orbital de las partículas del disco, que emiten luz mientras giran a velocidades relativistas en torno al objeto central. Aunque en configuraciones frontales —cuando el disco está orientado de cara al observador— el efecto Doppler puede tener un impacto limitado, su relevancia aumenta significativamente en discos inclinados. En estas situaciones, las regiones del disco que se acercan al observador aparecen más brillantes (desplazamiento al azul), mientras que las que se alejan se ven más atenuadas (desplazamiento al rojo), lo que modifica notablemente la simetría y la distribución del brillo en la imagen observada.

Aunque se podría incorporar el efecto Doppler al modelo utilizando la expresión 2.8 del apartado 2.1.4, se ha preferido, por simplicidad, seguir la argumentación de [9], donde se calcula directamente el desplazamiento al rojo total considerando que, para un fotón emitido desde el disco, este puede obtenerse mediante:

$$1+z = \frac{\nu_{\text{em}}}{\nu_{\text{ob}}} = \frac{h \nu_{\text{em}}}{h \nu_{\text{ob}}} = \frac{E_{\text{em}}}{E_{\text{ob}}},$$

donde E_{em} es la energía del fotón medida en el sistema de referencia comóvil con la partícula emisora, y E_{ob} la medida por el observador.

La energía E_{em} viene dada por la proyección del cuadrimomento p^μ del fotón sobre la cuadvirvelocidad u^μ del emisor. Suponiendo que las partículas del disco giran en órbitas circulares, entonces:

$$\frac{E_{\text{em}}}{c} = -p_\mu u^\mu = -p_t u^t - p_{\phi'} u^{\phi'} = -p_t u^t \left(1 + \Omega \frac{p_{\phi'}}{p_t} \right),$$

donde ϕ' es la coordenada angular del disco de acreción (diferente de ϕ , que representa la coordenada angular en el plano orbital del fotón), y $\Omega = \frac{d\phi'}{dt} = \frac{u^{\phi'}}{u^t}$ es la velocidad angular de la partícula emisora.

Si se tiene en cuenta que $b = \frac{cL}{E} = \frac{p_\phi}{p_t}$, y que $p_{\phi'}$ es la proyección de p_ϕ sobre la dirección ϕ' , según los ángulos definidos en la figura 4.5, se tiene:

$$\frac{p_{\phi'}}{p_t} = -\frac{p_\phi \cos \alpha \cos \psi}{p_t} = -b \cos \alpha \cos \psi.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\frac{E_{\text{ob}}}{c} = -p_t$, el corrimiento al rojo total queda:

$$1 + z = \frac{E_{\text{em}}}{E_{\text{ob}}} = u^t (1 - \Omega b \cos \alpha \cos \psi).$$

Para calcular u^t , se parte de la normalización de la cuadvirvelocidad:

$$u^\mu u_\mu = -c^2 = g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{t\phi'} u^t u^{\phi'} + g_{\phi'\phi'} (u^{\phi'})^2.$$

Factorizando u^t , y recordando que $\Omega = \frac{u^{\phi'}}{u^t}$ y por lo tanto $u^{\phi'} = \Omega u^t$, se obtiene:

$$u^t = \frac{c}{\sqrt{-(g_{tt} + 2g_{t\phi'}\Omega + g_{\phi'\phi'}\Omega^2)}}.$$

En el caso de una métrica estática y simétrica como la Schwarzschild o la Black Bounce, los coeficientes son:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2\mu}{r(x)}\right) c^2, \quad g_{t\phi'} = 0, \quad g_{\phi'\phi'} = r(x)^2, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\mu}{r(x)^3}}, \quad \mu = \frac{GM}{c^2},$$

y por tanto:

$$u^t = \left(1 - \frac{3\mu}{r(x)}\right)^{-1/2},$$

con lo que la expresión completa para el corrimiento al rojo total (gravitacional y Doppler) es:

$$1 + z = \left(1 - \frac{3\mu}{r(x)}\right)^{-1/2} \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{r(x)^3}} b \cos \alpha \cos \psi\right). \quad (4.3)$$

4.1.5 Implementación del procedimiento de simulación

Con el objetivo de simular la imagen observada del disco de acreción, se busca construir una función de intensidad observada $I_{\text{ob}}(b, \alpha, \psi)$, que permita asignar a cada punto de la imagen su correspondiente brillo. El procedimiento numérico seguido para obtener esta función puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Se integra numéricamente la ecuación de la geodésica 3.11 desde radios lejanos, para un valor dado del parámetro de impacto b , obteniendo así $\phi_b(x)$. En la ecuación se supone $\mu = GM/c^2 = 1$. A continuación, se invierte esta función para construir la función $x_b(\phi)$, que proporciona la coordenada radial en función del ángulo a lo largo de la trayectoria del rayo.
2. Se integra la geodésica para múltiples parámetros de impacto, generando una lista de pares $\{b_i, x_b(\phi)\}$. Esta lista puede considerarse como una función $x(b, \phi)$, que devuelve la coordenada radial x en función de b y ϕ .
3. Se calcula el punto de corte de la geodésica con el plano del disco, suponiendo inclinación del disco ψ . Ese punto está determinado por la expresión $x(b, \phi_d(\alpha, \psi))$, donde ϕ_d es el ángulo en el que la geodésica con parámetro b intersecta al disco de acreción, y depende tanto del ángulo de la imagen α como de la inclinación del disco ψ (ecuación 4.1).
4. A partir de ese punto de corte, se obtiene la intensidad emitida por el disco como $I_{\text{em}}(x(b, \phi_d(\alpha, \psi)))$, de acuerdo con el perfil de emisión considerado.
5. La intensidad observada se corrige por el desplazamiento al rojo gravitacional (ecuación 4.2) o total (ecuación 4.3), a través del factor $C_{\text{rs}}(b, \alpha, \psi, x) = \frac{1}{(1+z)^4}$, lo que da lugar a la intensidad observada final:

$$I_{\text{ob}}(b, \alpha, \psi) = C_{\text{rs}}(b, \alpha, \psi, x(b, \phi_d(\alpha, \psi))) \cdot I_{\text{em}}(x(b, \phi_d(\alpha, \psi))).$$

6. Finalmente, para representar de manera completa las tres imágenes, directa, de lente y anillo de fotones, se consideran los rayos que cruzan el disco tras completar giros adicionales. En ese caso, la intensidad total observada para un ángulo α y parámetro b se obtiene como:

$$I_{\text{total}}(b, \alpha, \psi) = I_{\text{ob}}(x(b, \phi_d(\alpha, \psi))) + I_{\text{ob}}(x(b, \phi_d(\alpha, \psi + \pi))) + I_{\text{ob}}(x(b, \phi_d(\alpha, \psi + 2\pi))).$$

Todo el procedimiento descrito ha sido implementado mediante el software *Mathematica*. Para aquellos lectores interesados en los detalles técnicos y computacionales, se incluye como anexo el código utilizado.

4.2 Resultados de simulación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante el procedimiento de simulación desarrollado. El objetivo es analizar cómo distintos factores influyen en la apariencia del disco de acreción observado. Para ello, se han generado imágenes variando sistemáticamente algunos parámetros clave del modelo.

En las subsecciones siguientes se estudia, en primer lugar, el efecto de la orientación del disco respecto al observador. A continuación, se analiza el impacto del corrimiento al rojo —tanto gravitacional como Doppler— sobre la intensidad observada. Finalmente, se investiga la influencia de la métrica del espacio-tiempo, comparando distintas configuraciones geométricas del objeto compacto central.

4.2.1 Efecto de la orientación del disco

La figura 4.9 muestra imágenes simuladas del disco de acreción para distintos ángulos de inclinación ψ , utilizando la métrica de Schwarzschild ($a = 0$) y el perfil de emisión I_{em}^I , que se

caracteriza por estar concentrado en las regiones más internas del disco. En esta simulación se ha considerado únicamente el corrimiento al rojo gravitacional, lo que permite aislar mejor los efectos puramente geométricos.

Para $\psi = 90^\circ$, la imagen presenta simetría circular, ya que el disco se observa de frente. A medida que aumenta ψ , la imagen directa pierde simetría debido a la inclinación del disco, mientras que la imagen de lente y el anillo de fotones conservan su forma aproximadamente circular. En las inclinaciones más extremas ($\psi = 158^\circ, 170^\circ$), se hace visible la parte posterior del disco debido al efecto de lente gravitacional. Curiosamente, la imagen con el disco completamente de perfil ($\psi = 180^\circ$) se asemeja mucho a la obtenida para el caso frontal, aunque con una representación más estrecha del disco, y con la imagen de lente prácticamente coincidiendo con el anillo de fotones.

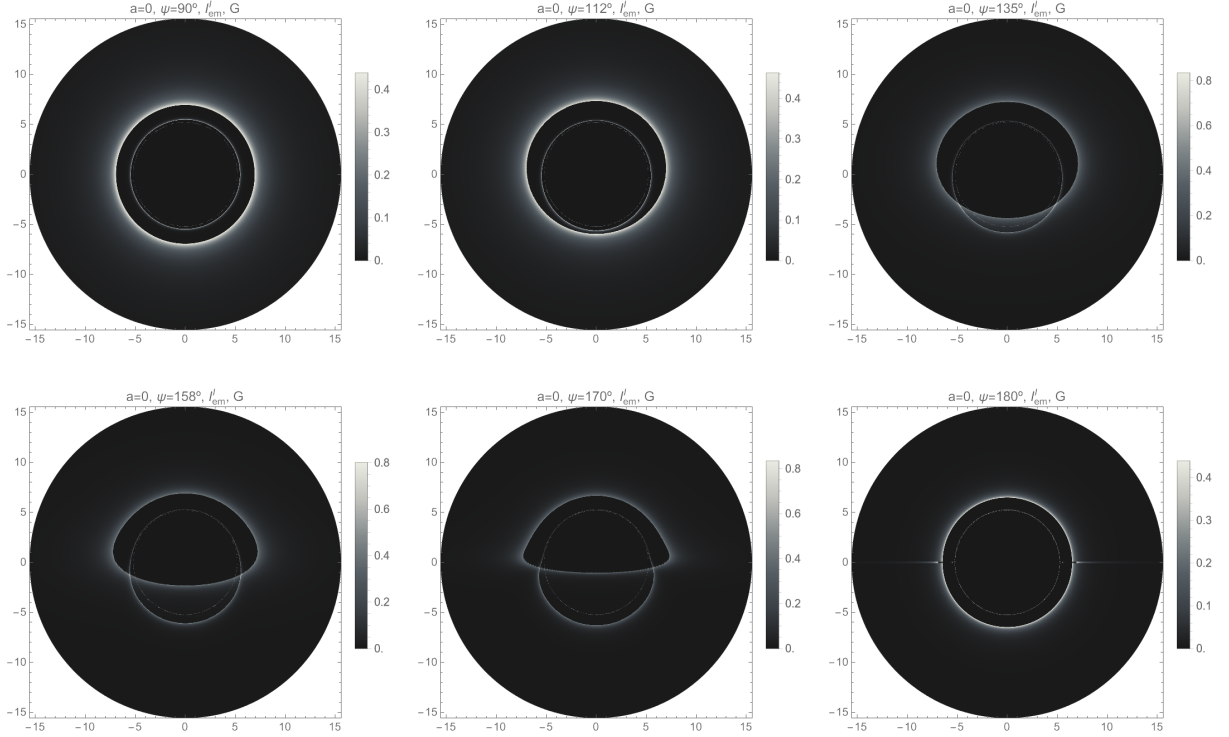


Figura 4.9: Sombras para diferentes orientaciones ψ del disco de acreción, con métrica de Schwarzschild ($a = 0$), perfil de emisión I_{em}^I y únicamente corrimiento al rojo gravitacional (G).

Las figuras 4.10 y 4.11 muestran un análisis detallado del origen de las distintas estructuras que aparecen en las imágenes simuladas, mediante el trazado de rayos y la representación de perfiles de intensidad observada. Ambas corresponden a una inclinación fija del disco, $\psi = 158^\circ$, pero difieren en la orientación del ángulo polar de la imagen: la primera, con $\alpha = 90^\circ$, representa el perfil correspondiente a la zona superior, mientras que la segunda, con $\alpha = 270^\circ$, corresponde a la región inferior.

El panel central de cada figura muestra la trayectoria de los rayos que llegan al observador, permitiendo identificar el punto del disco desde el cual proviene la señal registrada. Esto facilita la distinción entre la imagen directa (rayo que corta el disco sin rodear el objeto), la imagen de lente (tras media vuelta) y el anillo de fotones (tras una vuelta completa). El círculo negro central representa el horizonte de eventos.

En la figura 4.10, correspondiente a $\alpha = 90^\circ$, la imagen directa es la más externa, mientras que la imagen de lente y el anillo de fotones aparecen muy próximos entre sí. En cambio, en la figura 4.11, con $\alpha = 270^\circ$, se observa un comportamiento inverso: la imagen directa es la más interna, seguida por el anillo de fotones, y finalmente la imagen de lente como la más

externa.

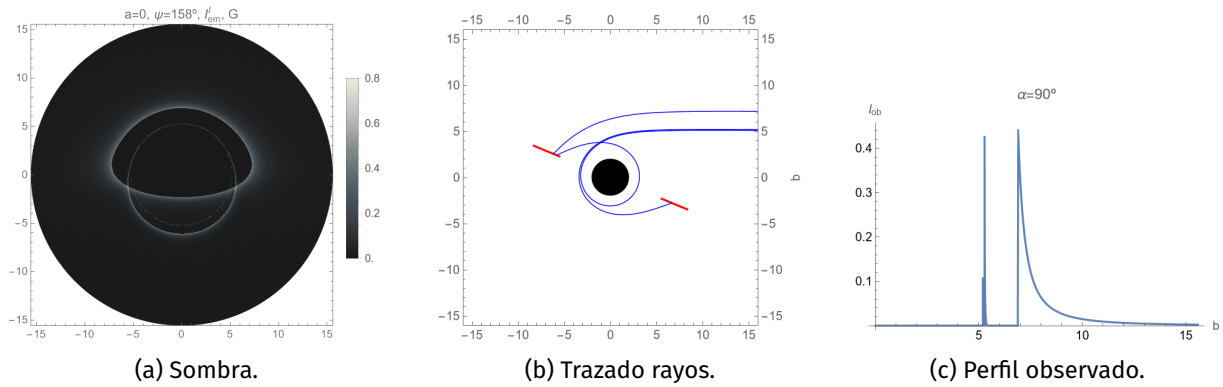


Figura 4.10: Trazado de rayos y perfiles en $\alpha = 90^\circ$, para $\psi = 158^\circ$, $a = 0$, I_{em}^I y G .

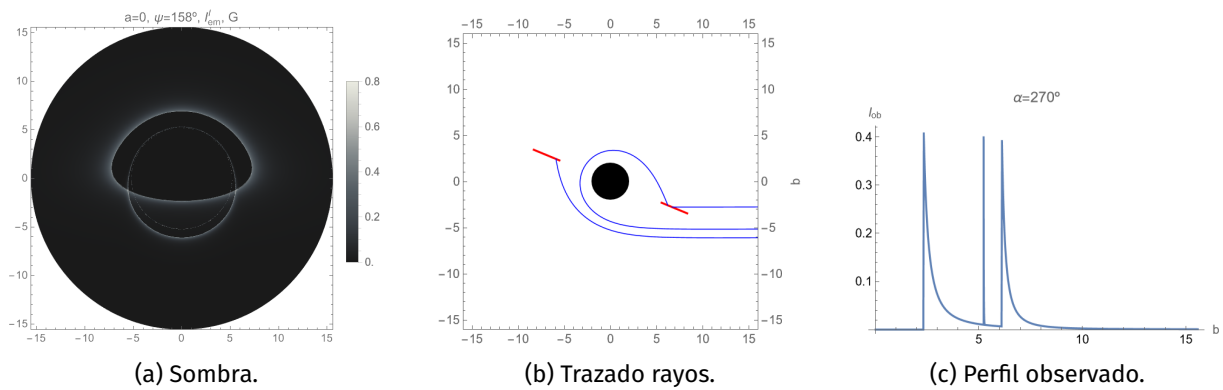


Figura 4.11: Trazado de rayos y perfiles en $\alpha = 270^\circ$, para $\psi = 158^\circ$, $a = 0$, I_{em}^I y G .

4.2.2 Influencia del efecto Doppler

En esta sección se analiza el impacto del efecto Doppler sobre las imágenes del disco de acreción en distintas inclinaciones. Para ello, se compararán los resultados obtenidos considerando únicamente el corrimiento al rojo gravitacional con aquellos que incluyen también el efecto Doppler relativista.

Se utilizará el perfil de emisión I_{em}^{II} , que comienza en el límite interior de órbitas circulares posibles, una condición necesaria para que el cálculo del efecto Doppler sea físicamente coherente. Además, se mantendrá la métrica de Schwarzschild ($a = 0$).

Las siguientes figuras se comparan las imágenes obtenidas con solo corrimiento al rojo gravitacional (G) frente a aquellas que incluyen también el efecto Doppler relativista (GD). Esta comparación se realiza para distintos valores del ángulo de inclinación del disco ψ , y diferentes ángulos de observación α , lo que permite visualizar claramente el papel que juega la cinemática del disco en la formación de las imágenes.

En la figura 4.12, correspondiente a $\psi = 90^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$, el disco se encuentra orientado frontalmente al observador, por lo que no hay componente de la velocidad del disco que genere un corrimiento Doppler clásico. Sin embargo, el efecto Doppler transversal —asociado a la dilatación temporal por el movimiento orbital de las partículas— sí produce una diferencia notable. Aunque las formas generales de las sombras son similares, la intensidad observada en el caso total (GD) es significativamente menor que en el puramente gravitacional (G), como refleja claramente el perfil de brillo (figura 4.12c). Este comportamiento es consistente con el

factor de corrección, que pasa de $(1 - 2\mu/r)^2$ en el caso G a $(1 - 3\mu/r)^2$ cuando se incorpora el movimiento orbital. Se observa también que el efecto Doppler desplaza los máximos de brillo observado hacia mayores valores de b .

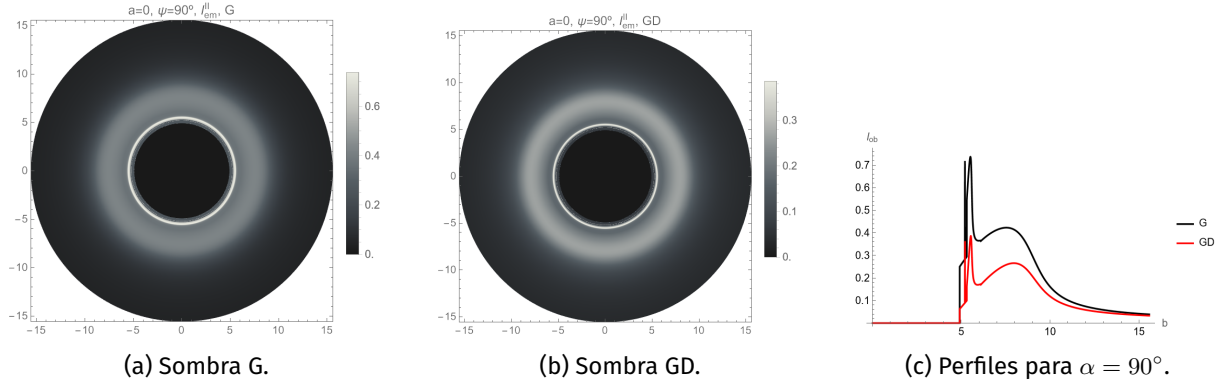


Figura 4.12: Comparación de sombras con corrimiento al rojo gravitacional (G) vs. total (GD) para $\psi = 90^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II} .

La figura 4.13 muestra las sombras para una inclinación del disco de $\psi = 135^\circ$. En la versión con efecto Doppler (GD) aparece una región notablemente más brillante en el lado del disco que se aproxima al observador, rompiendo la simetría que presenta la imagen puramente gravitacional (G). Esta asimetría se manifiesta también en el perfil observado (figura 4.13c), correspondiente a $\alpha = 180^\circ$, donde el movimiento del disco hacia el observador es máximo (corrimiento al azul).

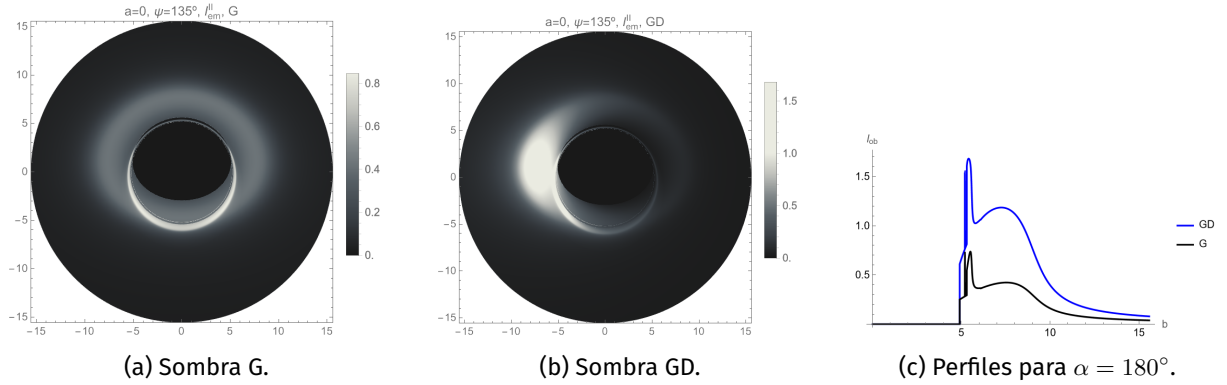


Figura 4.13: Comparación de sombras con corrimiento al rojo gravitacional (G) vs. total (GD) para $\psi = 135^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II} .

La figura 4.14, con $\psi = 170^\circ$, muestra cómo una inclinación extrema del disco acentúa notablemente el efecto Doppler. En la imagen GD, el brillo se concentra en la región del disco que se aproxima al observador, generando un fuerte contraste con la imagen puramente gravitacional (G). El perfil de intensidad observada para $\alpha = 0^\circ$ —donde el disco se aleja del observador, produciendo corrimiento al rojo máximo— revela una diferencia significativa entre ambas curvas, lo que pone de manifiesto la importancia del efecto Doppler en configuraciones altamente inclinadas.

Finalmente, se muestra una figura (4.15) que ilustra la influencia del efecto Doppler sobre la intensidad observada en función del ángulo α , para una configuración con el disco muy inclinado ($\psi = 158^\circ$). Se presenta únicamente la sombra con corrección total (GD), junto con perfiles de brillo observados para distintos valores simétricos de α respecto al eje vertical.

Las gráficas de los perfiles muestran claramente el impacto del movimiento relativo entre el disco y el observador. Para $\alpha = 60^\circ$ y 120° , la señal proviene de regiones que se alejan o

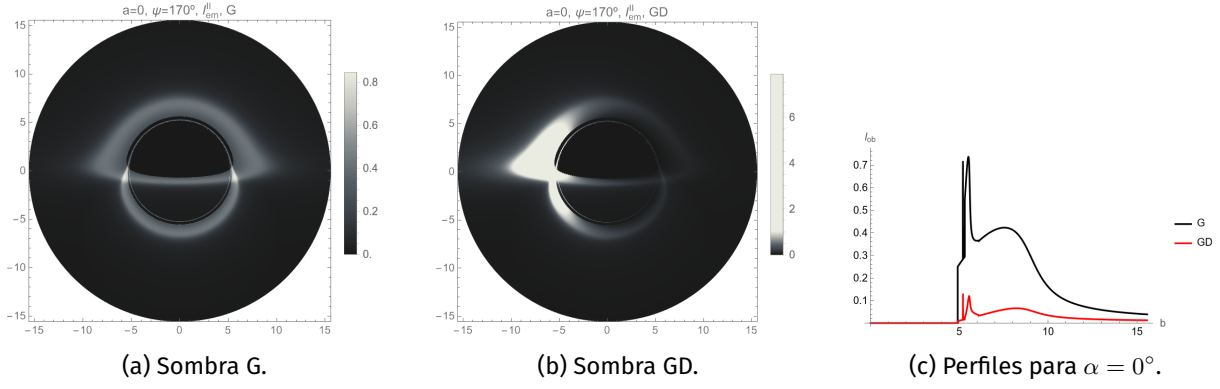


Figura 4.14: Comparación de sombras con corrimiento al rojo gravitacional (G) vs. total (GD) para $\psi = 170^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II} .

se acercan moderadamente al observador, generando un corrimiento al rojo y al azul menos acusado que en el siguiente caso. En cambio, para $\alpha = 30^\circ$ y 150° , se observa un notable corrimiento al rojo y al azul, con intensidades mucho más marcadas. Esto evidencia que el efecto Doppler es más intenso cuanto más próximo está el ángulo α al eje horizontal, donde la componente de la velocidad respecto al eje óptico es máxima.

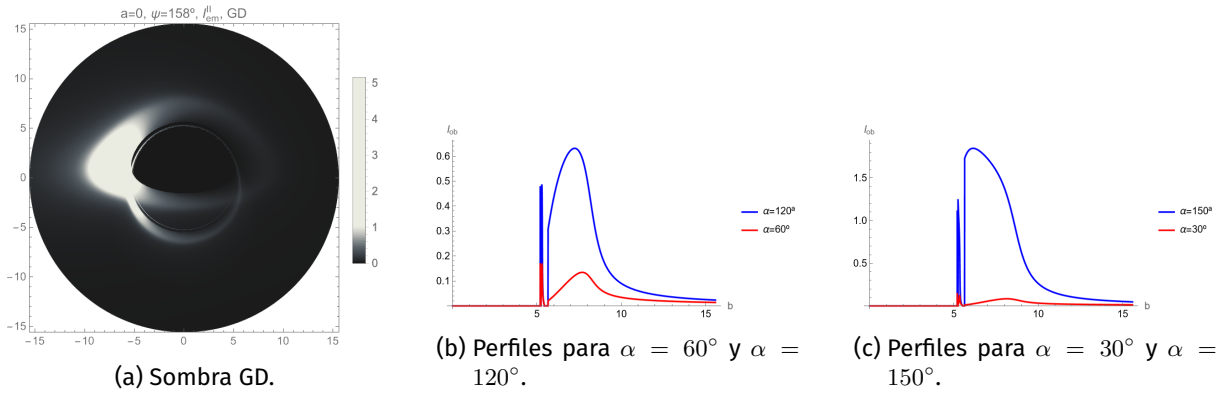


Figura 4.15: Influencia del efecto Doppler en función del plano de visión α , para $\psi = 158^\circ$, $a = 0$, I_{em}^{II} .

4.2.3 Influencia de la forma del espacio-tiempo

En esta sección se analiza cómo influye la forma del espacio-tiempo, representada mediante el parámetro a de la métrica, sobre las geodésicas y las sombras observadas.

La figura 4.16 muestra el trazado de rayos para distintos valores del parámetro de impacto b y diferentes valores del parámetro a . Se aprecia claramente cómo las geodésicas se curvan más intensamente conforme aumenta a , en particular para $a = 2.5$ (agujero de gusano transitable), lo que anticipa que las imágenes observadas serán más extensas y deformadas.

La figura 4.17 muestra cómo varía la sombra del disco de acreción al modificar la geometría del espacio-tiempo a través del parámetro a , considerando únicamente el corrimiento al rojo gravitacional. Se utiliza el perfil de emisión I_{em}^{III} que comienza en regiones más próximas al horizonte de sucesos, lo que permite explorar mejor los efectos relativistas. Se exploran tres configuraciones del parámetro $a = 0, 1.5, 2.5$ y tres inclinaciones del disco: $\psi = 90^\circ, 135^\circ, 170^\circ$.

A medida que a aumenta, se observa un ensanchamiento progresivo en las imágenes de lente y del anillo de fotones, especialmente evidente en las configuraciones con inclinación más extrema del disco. Esto es consecuencia directa del aumento de la curvatura del espacio-

tiempo, que provoca una mayor desviación de los rayos luminosos. En cambio, la imagen directa permanece prácticamente inalterada, ya que su formación depende menos de trayectorias que bordean el objeto compacto.

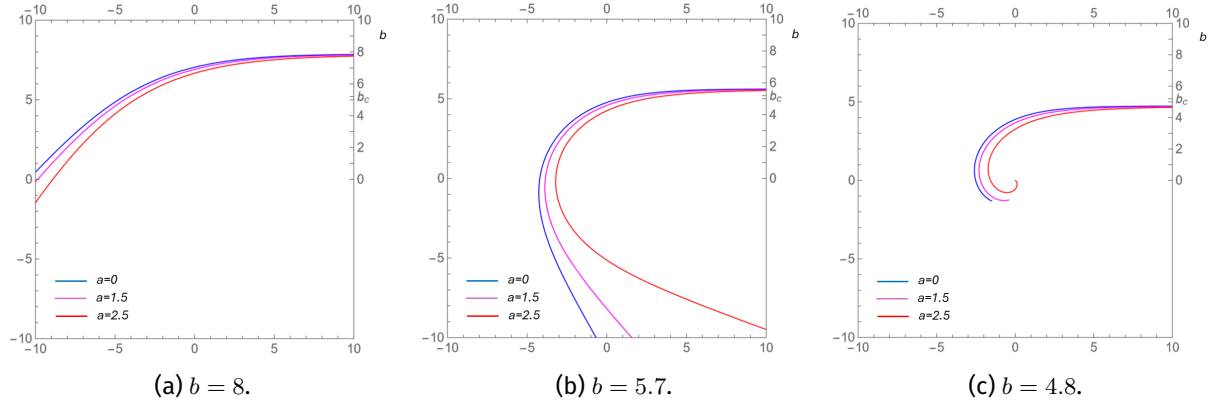


Figura 4.16: Trazado de rayos para diferentes parámetros de impacto b y diferentes parámetros de la métrica a .

La figura 4.18 presenta los perfiles de brillo observados para dos orientaciones del ángulo de visión, $\alpha = 90^\circ$ y $\alpha = 270^\circ$, en el caso de un disco con inclinación $\psi = 170^\circ$.

En ambos perfiles se observa un ensanchamiento de los picos de intensidad conforme aumenta el valor de a , así como un desplazamiento hacia mayores valores del parámetro de impacto b , en línea con lo ya apreciado en las imágenes. Adicionalmente, se aprecia que el corrimiento al rojo es menos acusado a medida que crece a . Este fenómeno se debe a que el potencial gravitacional efectivo cambia con a , alterando la trayectoria y la energía observada de los fotones.

Para finalizar el análisis, se considera el corrimiento al rojo total (gravitacional y Doppler) con el fin de estudiar cómo influye la geometría del espacio-tiempo sobre las imágenes simuladas. Para ello, se utiliza el perfil de emisión I_{em}^{II} , más adecuado para incluir efectos Doppler. El perfil I_{em}^{III} , presenta problemas para establecer órbitas circulares por debajo de ($x < x_{\text{BCO}} = \sqrt{x^2 - a^2}$), ya que las partículas no estarían ligadas. Además, se omite el caso intermedio $a = 1.5$, que mostraba variaciones poco significativas con respecto a $a = 0$.

La figura 4.19 muestra las sombras obtenidas para diferentes inclinaciones del disco ($\psi = 90^\circ, 135^\circ, 170^\circ$) y dos geometrías del espacio-tiempo: Schwarzschild ($a = 0$) y la correspondiente a un agujero de gusano transitible con $a = 2.5$. Como en los casos sin efecto Doppler, se observa que el aumento de a amplifica las imágenes de lente y del anillo de fotones.

La influencia del efecto Doppler es parecida en ambos espacio-tiempos estudiados. Como es de esperar, se intensifica el brillo en la región del disco que se aproxima al observador, mientras que se atenúa en la región que se aleja. Esto genera imágenes más asimétricas y con mayor contraste, especialmente en configuraciones inclinadas. En el caso más extremo ($\psi = 170^\circ$), la zona brillante se vuelve más compacta y dominante.

La figura 4.20 muestra los perfiles de intensidad observada para ángulos opuestos de la imagen respecto al eje vertical ($\alpha = 0^\circ$ y $\alpha = 180^\circ$), donde el efecto Doppler es máximo. Los resultados confirman lo observado en las sombras: el aumento del parámetro a provoca un ensanchamiento de las imágenes, aunque este efecto queda parcialmente enmascarado por la fuerte contribución Doppler. Por otro lado, se observa de forma cuantitativa el marcado aumento del brillo en la región del disco que se aproxima al observador, y la correspondiente atenuación en el lado opuesto. Las curvas también reflejan que el corrimiento al rojo total disminuye con a .

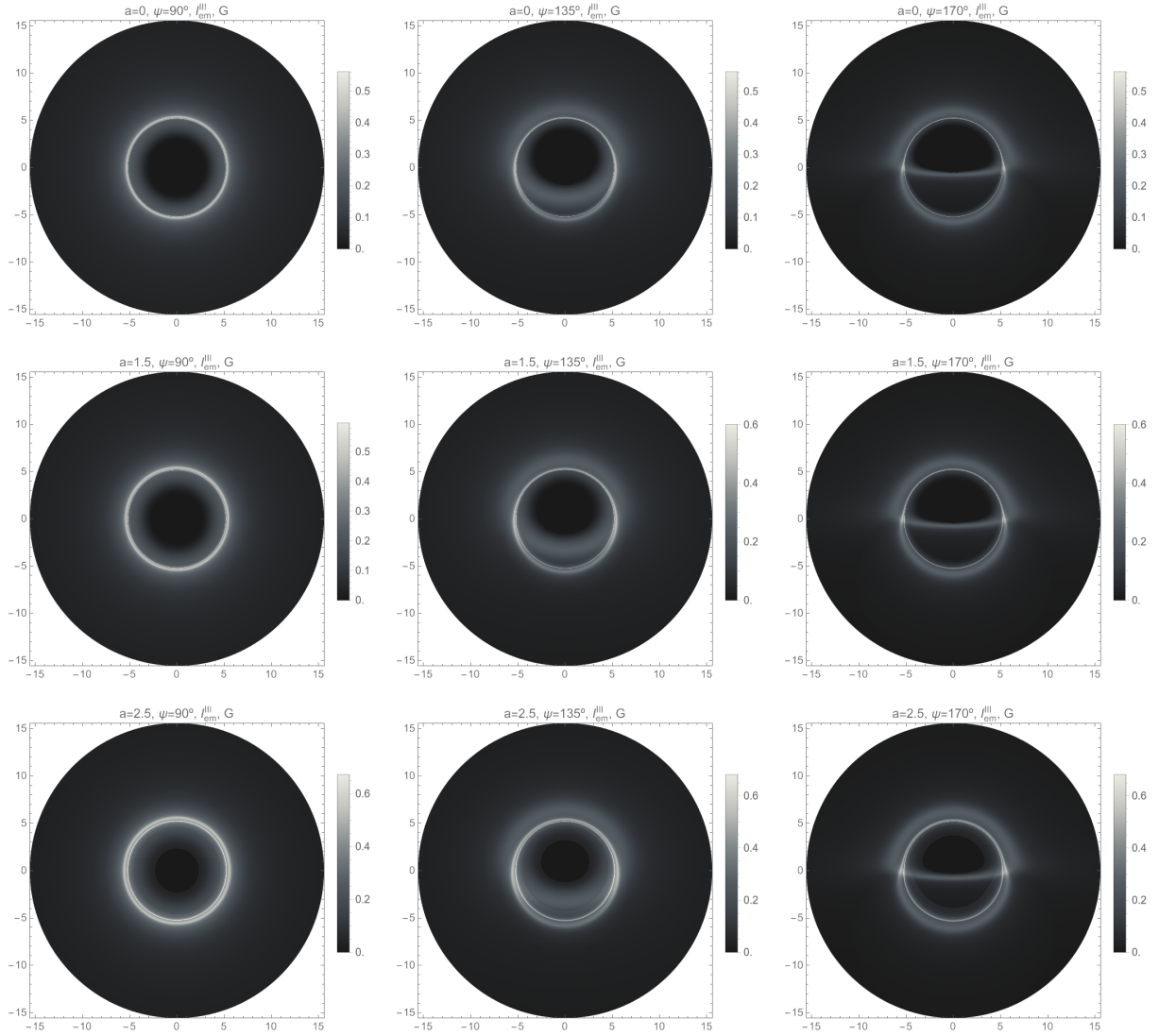


Figura 4.17: Sombras para diferentes orientaciones ψ del disco de acreción, y diferentes geometrías del espacio tiempo ($a = 0, a = 1.5, a = 2.5$). El perfil de emisión es I_{em}^{III} y únicamente se contempla corrimiento al rojo gravitacional (G).

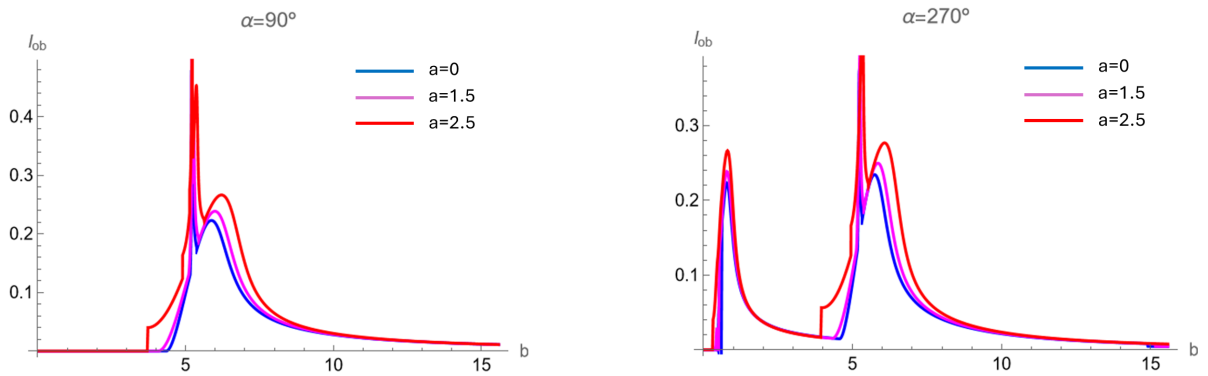


Figura 4.18: Perfiles de brillo observado para diferentes parámetros de la métrica a , en $\alpha = 90^\circ$ y $\alpha = 270^\circ$, para $\psi = 170^\circ$, I_{em}^{III} y sólo considerando corrimiento al rojo gravitacional

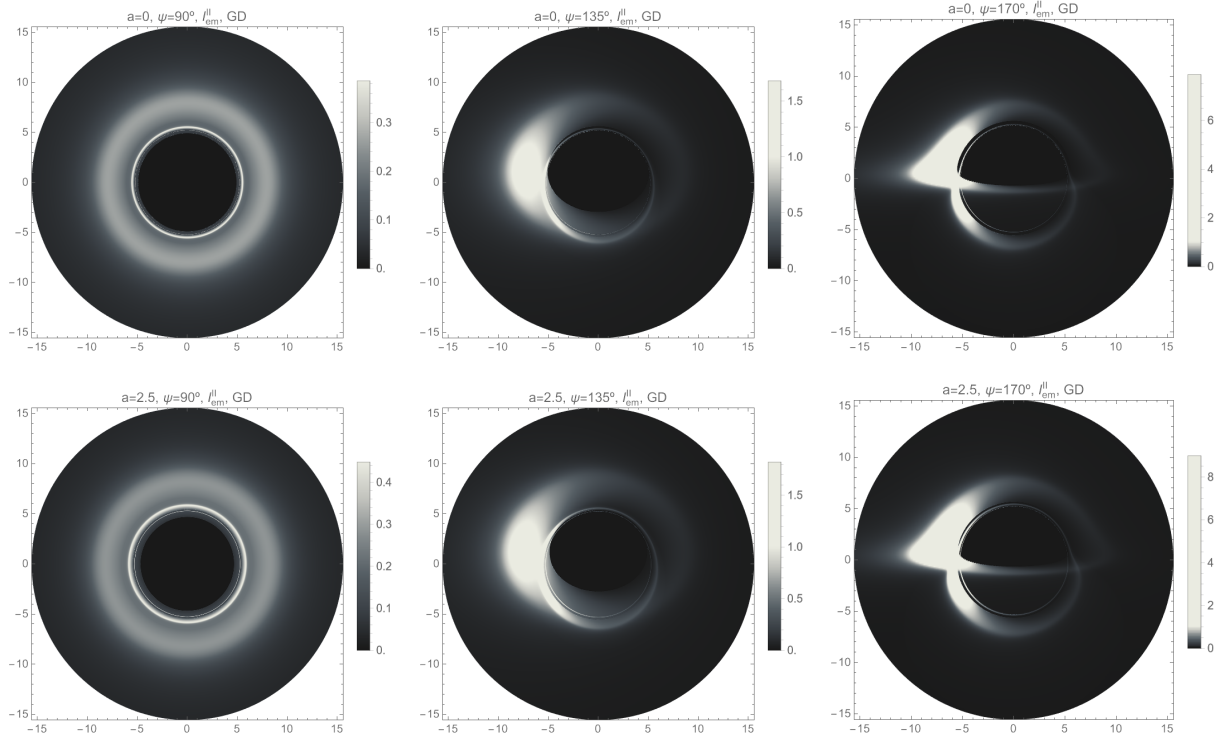


Figura 4.19: Sombras para diferentes orientaciones ψ del disco de acreción, y diferentes geometrías del espacio tiempo ($a = 0, a = 2.5$). El perfil de emisión es I_{em}^{II} y se contempla corrimiento al rojo gravitacional y Doppler (GD).

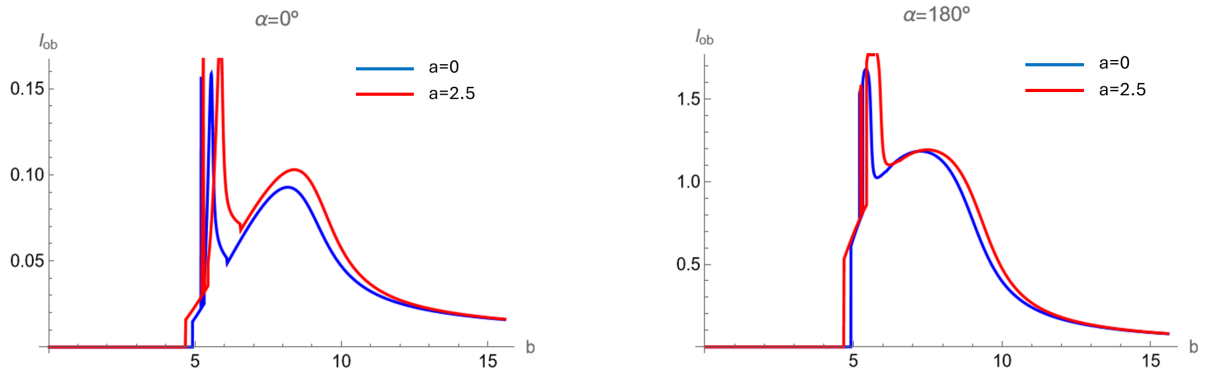


Figura 4.20: Perfiles de brillo observado para diferentes parámetros de la métrica a , en $\alpha = 0^\circ$ y $\alpha = 180^\circ$, para $\psi = 135^\circ$, I_{em}^{II} y corrimiento al rojo gravitacional y Doppler

Capítulo 5. Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se ha desarrollado y aplicado un modelo numérico para simular la apariencia visual de un disco de acreción alrededor de objetos compactos descritos por la métrica Black Bounce, considerando distintas orientaciones del disco y perfiles de emisión. El estudio se ha centrado en geometrías con simetría esférica, permitiendo un análisis detallado de los factores que influyen en las sombras observadas. De los resultados obtenidos pueden extraerse las siguientes conclusiones principales:

- La alta *curvatura del espacio-tiempo* en las proximidades del objeto compacto permite la existencia de múltiples trayectorias para los fotones, lo que genera diversas imágenes del disco de acreción. Estas imágenes corresponden a geodésicas que rodean el objeto un número creciente de veces. Sin embargo, su contribución a la intensidad observada decrece rápidamente. En la práctica, sólo las tres primeras imágenes —la directa, la de lente (tras media vuelta) y el anillo de fotones (una vuelta completa)— son relevantes en la construcción de las sombras observadas.
- El *parámetro de impacto crítico* desempeña un papel clave en la formación de las imágenes. Las geodésicas con valores cercanos a este parámetro son responsables de la imagen de lente y del anillo de fotones. A nivel computacional, esto exige una alta discretización del parámetro de impacto cerca del valor crítico para obtener una resolución adecuada en las simulaciones.
- La *posición de la esfera de fotones* es una característica que depende exclusivamente de la geometría del espacio-tiempo y resulta independiente del modelo de disco de acreción. Esto convierte a las imágenes asociadas a esta región en una herramienta especialmente útil para contrastar teorías gravitatorias mediante observaciones, sin verse condicionadas por las incertidumbres en la física del disco.
- La *orientación del disco de acreción* respecto al observador tiene un efecto determinante sobre la imagen resultante. A medida que se incrementa la inclinación, la imagen directa pierde simetría de forma notable, la imagen de lente se deforma ligeramente y el anillo de fotones permanece esencialmente circular.
- El *efecto Doppler relativista* introduce una asimetría notable en la intensidad observada, con zonas del disco que se acercan al observador apareciendo significativamente más brillantes. Este efecto se intensifica en ángulos próximos al plano del disco, y se manifiesta incluso en configuraciones frontales debido a la dilatación temporal asociada al movimiento orbital.
- La *geometría del espacio-tiempo*, caracterizada por el parámetro a de la métrica Black Bounce, influye directamente en la curvatura de las geodésicas. A valores altos de a , se observa un ensanchamiento de las imágenes de lente y del anillo de fotones, así como una disminución general del corrimiento al rojo gravitacional.

Este estudio ha demostrado la capacidad del modelo desarrollado para explorar cómo la geometría y la orientación afectan a las sombras de objetos compactos. Como posible línea futura de investigación, sería interesante extender este enfoque a geometrías no esféricas, como la métrica de Kerr, que introduce rotación y rompe la simetría. Esto permitiría modelar configuraciones más realistas.

Referencias

- [1] Event Horizon Telescope Collaboration. "First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole". En: *The Astrophysical Journal Letters* 875.1 (2019), pág. L1.
- [2] Event Horizon Telescope Collaboration. "First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way". En: *The Astrophysical Journal Letters* 930.2 (2022), pág. L12.
- [3] George FR Ellis, Roy Maartens y Malcolm AH MacCallum. *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] R. Genzel, F. Eisenhauer y S. Gillessen. "The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster". En: *Reviews of Modern Physics* 82.4 (2010), págs. 3121-3195.
- [5] Jeremy Goodman. *Topics in High-Energy Astrophysics*. 2013.
- [6] Samuel E Gralla, Daniel E Holz y Robert M Wald. "Black hole shadows, photon rings, and lensing rings". En: *Physical Review D* 100.2 (2019), pág. 024018.
- [7] Merce Guerrero et al. "Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk". En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2021.08 (2021), pág. 036.
- [8] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou y Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge university press, 2006.
- [9] J.P. Luminet. "Image of a spherical black hole with thin accretion disk". En: *Astronomy and Astrophysics*, vol. 75, no. 1-2, May 1979, p. 228-235. 75 (1979), págs. 228-235.

Anexo A: Código fuente

El código fuente utilizado para implementar el procedimiento de simulación ha sido desarrollado en Wolfram Mathematica. Se puede consultar y descargar a través del siguiente enlace:

[Simulación de sombras](#)