



Universidad de Valladolid

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

**EL EFECTO TALBOT Y LA DIFRACCIÓN DE
FRESNEL**

Autor: Néstor Corral Barbero

Tutor: Gabriel Pérez Callejo

Curso 2024-2025

Índice general

1. Introducción:	5
1.1. Estructura de trabajo	6
2. Fundamento teórico	8
2.1. Teoría de la difracción de Fresnel	8
2.2. Redes de difracción	9
2.3. El efecto Talbot	11
3. Alfombras de Talbot y función de transferencia	13
3.1. Estudio mediante la fórmula de Fresnel	14
3.2. Estudio mediante la función de transferencia óptica de Fresnel	16
3.2.1. Parámetros configurables	16
4. Elementos de un interferómetro Talbot	20
4.1. Funcionamiento general	20
4.2. Generación del interferograma: Beamsplitter	20
4.3. Modificación de la alfombra ante un gradiente de fase	22
5. Simulación de un experimento de interferometría Talbot	25
5.1. Modulación del frente de onda	25
5.2. Obtención de interferogramas	26
5.3. Análisis de imagen: Desacople en el espacio de Fourier	27
5.4. Tratamiento de la fase: <i>phase unwrapping</i> y reconstrucción del frente de onda	33
6. Complicaciones experimentales y montajes habituales	35
6.1. Tamaño de píxel y análisis de imagen: Analizador	35
6.1.1. Phase stepping	36
6.1.2. Análisis Moiré	36
6.2. Coherencia: Efecto Lau y red fuente	37
7. Conclusiones	39
A. Scripts empleados	42
A.1. Simulación mediante fórmula integral de Fresnel simplificada	42
A.2. Simulación mediante función de transferencia	44

A.3. Simulación de interferograma a z variable	46
A.4. Estudio de la alfombra con un gradiente de fase local.	
Perfil de intensidades en $z_T/4$	48
A.5. Simulación de experimento de interferometría	50

Resumen

Los rayos X son famosamente conocidos por ser radiación electromagnética muy penetrante que permite tomar imágenes sensibles a absorción en diagnóstico médica.

Las técnicas de imagen por absorción de rayos X son, por lo tanto particularmente útiles en sistemas con componentes cuya absorción sean suficientemente distinta entre unos y otros. No obstante, en el caso de que sean similares estos valores, el usuario queda obligado a emplear tiempos de irradiación e intensidades mucho mayores, resultando en un estudio mucho menos eficiente.

Este trabajo versa sobre una alternativa a estos métodos, que en lugar de la parte imaginaria del índice de refracción, emplea su parte real para obtener imágenes de diversos materiales y obtener magnitudes relevantes. Esta técnica recibe el nombre de **interferometría Talbot**.

Abstract

X-rays are a highly penetrating form of electromagnetic radiation that owe their fame to its use on clinical imaging.

These imaging systems capitalize on low X-ray absorption by most materials. Therefore, its usefulness becomes evident upon studying systems with enough variance on absorption coefficients. However, this is not always the case, and when absorption coefficients within a sample are similar enough, higher dosage is required, which is far from ideal.

This dissertation features an alternative imaging technique centered around the phase shift an object introduces to an incoming X-ray beam: **Talbot interferometry**. In other words, rather than working with the attenuation image that stems from working with the imaginary component of the refraction index, we shall use the real part of this parameter to recreate object images.

Capítulo 1

Introducción:

Las técnicas de obtención de imagen por rayos X son principalmente conocidas por su gran utilidad en la toma de imágenes cruciales a la diagnosis médica. También juegan un rol de creciente importancia en el mundo de los ensayos no destructivos, donde se emplean en áreas de lo más variopintas que abarcan desde el estudio del deterioro de piezas industriales incrustadas en estructuras mayores (y por lo tanto inseparables de estas), al estudio de obras de arte con el fin de descubrir detalles ocultos en museos como el del Prado en Madrid [\[1\]](#).



Figura 1.1: “Carlos II con con armadura” de Carreño de Miranda y radiografía de la obra. Museo Nacional del Prado[\[2\]](#)

Las técnicas de radiografía convencionales obtienen imágenes de alta resolución capitalizando la absorción de los distintos materiales para lograr un contraste adecuado. Sin embargo, este método presenta limitaciones al trabajar con tejidos biológicos de baja absorción, como puede ser la realización de una mamografía, en los que aumentar la dosis de radiación para mejorar el contraste resulta perjudicial para la salud del paciente.

Es en este contexto que surge la necesidad de explorar alternativas que permitan obtener imágenes de alta calidad sin comprometer la seguridad del paciente. Una de estas técnicas es la radiografía de fase, que se basa en el empleo de diversos métodos para medir la fase de la radiación propagada con el fin de obtener imágenes de alta resolución y contraste.

Este trabajo estudia una de estas técnicas: la interferometría de Talbot [3], o Talbot-Lau, que toma su nombre del físico francés Henry Fox Talbot, quien descubrió el efecto que lleva su nombre en 1836. Dicho fenómeno emerge de manera natural de la difracción de la luz bajo la aproximación de Fresnel, y consiste en la formación de patrones de interferencia periódicos que se analizan para reconstruir la imagen de la muestra.

1.1. Estructura de trabajo

Este trabajo se enfoca simultáneamente de manera bibliográfica y experimental. Con esto nos referimos a que el objetivo es proveer al lector de una visión general y comprensiva de la interferometría Talbot, describiendo y explicando las configuraciones más típicas de los interferómetros de este tipo.

No obstante, describir la fenomenología que motiva el análisis no es suficiente, y disponer de imágenes que la ilustren resulta una herramienta de vital importancia para entenderlo. No solo eso, sino que los distintos parámetros del interferómetro afectan radicalmente a la calidad de los resultados, siendo así que en el diseño de experimentos de interferometría Talbot es de crucial importancia disponer de una idea preliminar de la resolución que se puede obtener para valorar la viabilidad de los mismos.

Es por esto que de manera complementaria se ha programado una serie de scripts en Matlab con varios fines:

1. Ilustrar el efecto Talbot.
2. Validar el empleo de la función de transferencia óptica para el estudio del mismo.
3. Simular un experimento de interferometría Talbot, y los distintos efectos que afectan a las imágenes resultantes.

Estos scripts constituyen la base experimental del trabajo y conforman el esqueleto del mismo. Es por ello que el trabajo se estructura como sigue:

Comenzando por el capítulo 2 explicaremos de manera formal la teoría subyacente a este trabajo. Como parte de la teoría se introduce también la función de transferencia óptica y el efecto Talbot, cuya importancia se discute en el capítulo 3, siendo ilustrada mediante el empleo de los dos primeros scripts elaborados.

A continuación en el capítulo 4 realizamos el estudio de la interferometría Talbot. Se introducen otros dos nuevos scripts que justifican la elección del punto de máximo contraste y el fundamento de la modificación del interferograma al interponer un objeto.

Dejado claro el funcionamiento de la técnica, pasamos a simular en el capítulo 5 un sencillo experimento de interferometría Talbot, explicando los pasos necesarios para la obtención de los parámetros de interés físico.

A continuación, en el capítulo 6, se hace alusión a las discusiones experimentales que habitualmente complican el análisis Talbot. Asimismo, se explican las distintas técnicas que se emplean para resolver problemas como coherencia y resolución de píxel.

El trabajo concluye en el capítulo 7, donde se resumen los resultados y nociones aprendidas.

Capítulo 2

Fundamento teórico

2.1. Teoría de la difracción de Fresnel

Para entender el efecto Talbot es necesario introducir la teoría de la difracción de Fresnel, que describe cómo se propaga la luz a través de aperturas y bordes en campo cercano. Esta aproximación modela el frente de onda emergente como una superposición de ondas que se ajustan a un perfil parabólico, en vez de esférico, simplificando considerablemente los resultados con respecto a la formulación de Kirchhoff, más general.

Otra aproximación que suele emplearse para evitar estas inconveniencias es la de Fraunhofer. Esta aproximación, válida sólo en campo lejano, considera la distancia z mucho mayor que las dimensiones del objeto difractor y permite modelar la onda difractada como plana, simplificando la expresión matemática considerablemente.

Dada la eficacia de la aproximación de Fraunhofer para los cálculos de difracción en campo lejano, se hace evidente la necesidad de un criterio que permita delimitar de manera razonable la validez de ambas aproximaciones: la de Fraunhofer y la de Fresnel. Es por ello que se define el número de Fresnel F como:

$$F = \frac{d^2}{\lambda z} \quad (2.1)$$

Donde d es el tamaño del elemento difractor y λ la longitud de onda. Cuando $F \ll 1$ se puede emplear la aproximación de Fraunhofer, mientras que cuando $F \approx 1$ se debe emplear la aproximación de Fresnel, y para $F \gg 1$ se emplean otras técnicas más precisas y computacionalmente costosas, como el método del espectro angular.

La expresión general de la difracción de Fresnel para la propagación del campo eléctrico difractado a través de una abertura se puede expresar como:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} E_{G1}(x', y') \times e^{\frac{ik}{2z}((x-x')^2 + (y-y')^2)} dx' dy' \quad (2.2)$$

Donde $U(x, y, z)$ es el campo eléctrico a una cierta distancia z , E_{G1} es el campo eléctrico en el elemento difractor, λ y k son la longitud de onda y número de onda de la radiación incidente, y x' e y' son las coordenadas que recorren el plano de difracción.

Esta expresión presenta dos principales inconvenientes a la hora de su implementación en una simulación numérica o en un experimento real:

1. La integral es complicada de resolver numéricamente en las inmediaciones de la red de difracción debido al término exponencial, que oscila a gran velocidad cuando z es pequeño en comparación con las variables x' e y' .
2. El cálculo de la integral requiere un elevado coste computacional, ya que para obtener el campo eléctrico en un punto concreto del espacio es necesario calcular la contribución de todos los puntos del plano de difracción mediante la integral. Debemos hacer esto para cada punto del espacio.

Podemos solucionar estas dificultades empleando el teorema de la convolución, que nos permite expresar la integral como el producto de las transformadas de Fourier del campo eléctrico y de la función de propagación.

De esta manera, podemos expresar el campo eléctrico en un punto como:

$$U(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ E_{G1}(x', y') \} \cdot H(k_x, k_y, z) \} \quad (2.3)$$

Donde $\mathcal{F} \{ E_{G1}(x', y') \}$ es la transformada de Fourier del campo eléctrico en el elemento difractor, y $H(k_x, k_y, z)$ es la función de transferencia de Fresnel, que se define como:

$$H(k_x, k_y, z) = \mathcal{F} \left\{ \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left[\frac{ik}{2z} ((x - x')^2 + (y - y')^2) \right] \right\} \quad (2.4)$$

Esta transformada puede realizarse analíticamente y por lo tanto, podemos expresar la función de transferencia de Fresnel como:

$$H(k_x, k_y, z) = \exp \left\{ ikz \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} (f_x^2 + f_y^2) \right] \right\} \quad (2.5)$$

Donde f_x y f_y son las frecuencias espaciales asociadas a x e y . Definidas como:

$$f_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{1}{x}, \quad f_y = \frac{k_y}{2\pi} = \frac{1}{y} \quad (2.6)$$

2.2. Redes de difracción

Una red de difracción es una estructura periódica que se utiliza para difractar la luz. Consiste, por lo tanto, en una serie de ranuras o líneas paralelas que separan dos medios con diferentes índices de refracción y transmitancias.

Típicamente las redes de difracción emplean el fenómeno de interferencia para separar las distintas componentes espectrales de la luz incidente en distintos ángulos de emergencia, siendo excelentes elementos dispersivos. Para ello se hace la siguiente consideración bajo aproximación de Fraunhofer:

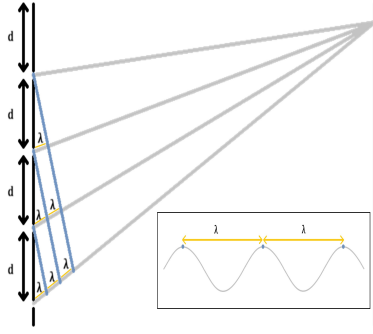


Figura 2.1: Difracción, interferencia constructiva con $\Delta x = 1\lambda$

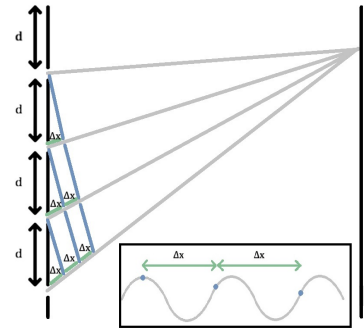


Figura 2.2: Difracción, interferencia destructiva con $\Delta x = 0,9\lambda$

La luz incidente, al difractarse, sale desperdigada en multitud de ángulos. En la figura 2.1 se muestra un ángulo privilegiado, en el que la diferencia de caminos ópticos entre ranuras adyacentes, δx resulta ser un múltiplo entero de la longitud de onda. Este número entero recibe el nombre de orden de difracción, y siempre que se cumpla esta condición estaremos en situación de interferencia constructiva, dando pie a un máximo de intensidad en este ángulo.

La figura 2.2 muestra el caso más habitual: Cuando la condición de interferencia constructiva no se cumple para el ángulo emergente, los frentes de onda provenientes de ranuras adyacente que interfieren a una cierta distancia se encontrarán ligeramente desfasados. Este desfase va creciendo conforme consideramos ranuras más alejadas, hasta que llega un punto en el que la diferencia de fase es tal que el campo eléctrico resultante empieza a tomar valores negativos. Es este fenómeno, repetido cientos y cientos de veces, el que da lugar a la interferencia destructiva, que se manifiesta como un mínimo de intensidad en el patrón de difracción.

Cabe resaltar que estas condiciones se obtienen de la suposición de que el punto de interferencia está lo suficientemente lejos como para poder considerarse que los rayos son paralelos entre sí. El estudio de las interferencias en campo cercano dista mucho de ser tan simple, y en este trabajo se trata de manera puramente fenomenológica.

Sea cual sea el caso, el principio del funcionamiento de una red de difracción es el mismo: la existencia de una serie de aberturas que promueven la difracción de la luz. El modelo más simple de red de difracción consiste en una serie de ranuras paralelas separadas una cierta distancia p , llamada periodo de la red. Aparte de la separación entre ranuras, debe considerarse también el ancho de las mismas d . Se define así el factor de apertura a como la relación entre el ancho de las ranuras y el periodo de la red:

$$a = \frac{d}{p} \quad (2.7)$$

Además del factor de apertura de la red, es importante considerar la naturaleza de las ranuras. Hasta ahora hemos considerado únicamente redes de difracción opacas, donde las ranuras son transparentes y el resto de la red es opaco. No obstante, estas redes tienen el gran problema de que se pierde gran parte de la luz incidente, lo que reduce la intensidad de la señal difractada. Para solucionar este problema, se emplean redes de difracción de fase. Estas redes están formadas por dos medios con diferentes índices de refracción y alta transmisividad. El grosor

de ambos medios se ajusta para que la diferencia entre caminos ópticos entre medios, en incidencia normal, sea una cierta fase constante.

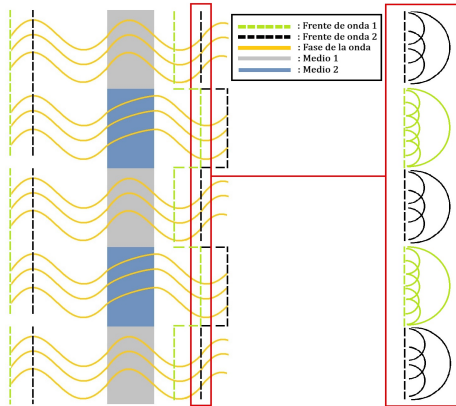


Figura 2.3: Modulación del frente de onda mediante una red de fase de $\pi/2$.

La figura 2.3 muestra el efecto de una red de fase sobre una onda plana. En este caso los índices de refracción son tales que la diferencia de caminos ópticos entre los dos medios es de $\pi/2$ radianes. Vemos que, por lo tanto, la red de difracción actúa como un modulador del frente de onda. Analizando una sección paralela al plano de la red de difracción, vemos que está formada por dos frentes de onda superpuestos que podemos relacionar con dos frentes de onda planos y desfasados $\pi/2$ antes de la acción de la red: el primer frente de onda desfasado $\pi/2$ radianes por el medio n_2 y el segundo frente de onda que no ha sido desfasado.

Cada punto individual de esta mezcla de ondas se comportará como un emisor secundario y se difractará según principio de Huygens. De esta manera, la red de fase actúa como una red de difracción convencional, con la excepción de que la intensidad de la luz transmitida es notoriamente mayor y que los patrones de difracción son más complejos.

2.3. El efecto Talbot

Talbot [3] descubre el fenómeno que lleva su nombre en 1836 trabajando con una red de difracción en incidencia normal con luz blanca puntual:

Observa una serie de bandas de colores complementarios cuya disposición se altera al desplazarse en el eje óptico. Simultáneamente, los colores presentes se alternan, pasando de franjas rojas y verdes a azules y amarillas (siempre colores complementarios). Ambos fenómenos se repiten periódicamente a lo largo del eje óptico, de manera que al desplazarse en el eje óptico se observan franjas de colores complementarios que se repiten periódicamente.

Más adelante, en 1881, Rayleigh [4] estudia este fenómeno con mayor rigor y lo dota de una explicación teórica:

Primero de todo, advierte que para poder observar este fenómeno es necesario emplear una red de difracción con una periodicidad muy grande ($p \approx 0,25mm$). Recalca además, cómo la presencia de colores en las bandas de Talbot implica que el efecto está relacionado con la longitud de onda de las componentes espectrales de la luz blanca, y que por lo tanto, el fenómeno es de interferencia y está causado por la difracción de la luz. Concluye, además, que las bandas de Talbot se corresponden con una autoimagen de la red de difracción, que es capaz de ver gracias al empleo de lentes de gran potencia.

Al realizar un estudio formal del fenómeno, Rayleigh opta por un enfoque que ignora la geometría de la red de difracción dada su rudimentariedad, centrandose en el estudio de la difracción en analogía al estudio de una vibración en su forma más general.

Este estudio concluye en la descripción de la formación de una autoimagen de la red de difracción en los múltiplos de una cierta distancia sobre el eje óptico. Esta distancia recibe el nombre de **distancia de Talbot** y se calcula como sigue:

$$z_T = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{p^2}}} \quad (2.8)$$

Considerando que la longitud de onda para el visible es del orden de las décimas de micra y que el perímetro de la red de difracción que permite observar el fenómeno es varios ordenes de magnitud superior, es razonable expandir el anterior resultado en serie de potencias, obteniéndose el siguiente resultado:

$$z_T = \frac{2p^2}{\lambda} \quad (2.9)$$

Tratamientos más modernos del efecto Talbot [5] concuerdan con el resultado anterior añadiendo que, restringiendo el estudio a luz monocromática, el efecto Talbot exhibe una replica exacta de la intensidad en la red de difracción opaca a la distancia de Talbot. A la mitad de la distancia de Talbot, se genera la misma imagen de la rendija, pero desplazada medio periodo. Este fenómeno se replica para cada distancia intermedia racional con subsecuentes imágenes cada vez más y más pequeñas que dan pie a un patrón fractal¹[6] a lo largo del eje z que recibe el nombre de alfombra de Talbot.

Un análisis de ordenes de magnitud considerando una red comercial de baja periodicidad ($p \approx 5\mu m$) revela que para luz visible (longitud de onda $\lambda \approx 500nm$), la distancia de Talbot se encuentra en tan solo unos pocos milímetros, lo que imposibilita la observación del fenómeno con luz visible, salvo que se empleen montajes como los de Talbot y Rayleigh, que introducen fuertes fuentes de error al sistema óptico².

Es por ello que los experimentos modernos de interferometría Talbot se realizan con Rayos-X. Con longitudes de onda del orden del angstrom, la distancia de Talbot aumenta a ser del orden de los metros. En el caso de rayos-X de 30 keV, empleados en mamografías, la distancia de Talbot asciende a valores en torno a los 1,2 metros, permitiendo el estudio del patrón en una escala manejable.

¹El estudio de las propiedades fractales de las alfombras de Talbot queda fuera del alcance de este trabajo, pero es un tema de gran interés en la literatura científica.

²En el caso de sus montajes, tales fuentes de error son las redes de difracción, que eran altamente irregulares y las aberraciones ópticas introducidas por el uso de las lentes magnificantes.

Capítulo 3

Alfombras de Talbot y función de transferencia

Como adelantábamos en el anterior capítulo, las representaciones de la intensidad luminosa en el plano xz , definido por la dirección de la periodicidad de la red y el eje óptico, respectivamente, reciben el nombre de alfombras de Talbot. Estas alfombras para luz monocromática toman la forma de patrones fractales. La correcta simulación de estas alfombras es el primer paso clave para poder simular un experimento de interferometría. Es por eso que dedicamos este capítulo al estudio y simulación de estos patrones.

La primera consideración que debemos hacer es que cuando trabajamos a la distancia de Talbot, el número de Fresnel depende únicamente del factor de apertura de la red como:

$$F_{z_T} = \frac{a^2}{2} \tag{3.1}$$

Considerando valores típicos para la apertura de $a=0.5$, vemos que el número de Fresnel es de tan solo $1/8$ a la distancia de Talbot. Para fracciones de esta distancia, el número de Fresnel aumenta según el factor del denominador. Siendo así que en $\frac{z_T}{8}$ alcanza la unidad.

Estas consideraciones son suficientes para afirmar que la difracción de Fresnel es un buen marco teórico desde el que afrontar el problema. Es por esto que dedicamos este capítulo a simular la difracción de Fresnel a lo largo de una distancia de Talbot para recrear las alfombras.

3.1. Estudio mediante la fórmula de Fresnel

Como primera aproximación al estudio del efecto Talbot, se realiza una simulación a partir de la expresión general para la difracción de Fresnel (2.2). Para simular la propagación de la luz solo es necesario conocer la distribución del campo eléctrico en la dirección de las aperturas de la rendija.

Con el fin de reducir la complejidad computacional del algoritmo, simplificaremos sustancialmente el problema: Consideramos una red de difracción opaca con un factor de apertura muy muy pequeño, de tal manera que cada rendija se comporta como un emisor puntual. Bajo este marco de trabajo, el campo eléctrico en la rendija puede ser sustituido por una colección de deltas de Dirac.

De esta manera la complejidad de la integral de Fresnel se reduce, siendo sustituida por la siguiente suma:

$$U(x, y, z) = \sum_{j=-0}^n e^{\frac{ik}{2z}((x-x_j)^2+(y-y_j)^2)} \quad (3.2)$$

Podemos restringir nuestro problema a uno de dos dimensiones, x y z . En este caso el campo eléctrico es:

$$U(x, z) = \sum_{j=-0}^n e^{\frac{ik}{2z}(x-x_j)^2} \quad (3.3)$$

En este caso, la suma se extiende a una apertura puntual, i.e. de un pixel de grosor, para cada periodo. Se simula el patrón de intensidades (es decir, $I(x, z) = U(x, z)^2$) a lo largo de una distancia de Talbot y se obtienen las figuras 3.1.

En la figura (a) se observa la alfombra obtenida mediante este modelo, para mejor visibilidad ha sido dividida en su mitad inferior (i.e. $z \in [z_T/2, z_T]$) (b) y superior (c) ($z \in [0, z_T/2]$):

La parte inferior (b) de la alfombra muestra cómo el efecto de la autoimagen se cumple: En cada multiplo entero de la periodicidad de la red la intensidad se reduce a un único punto, es decir, la intensidad asociada al campo eléctrico propuesto en nuestro modelo. Además, en la mitad inferior es claramente observable el patrón fractal que caracteriza al fenómeno, siendo un buen indicador de la calidad de la simulación.

Al examinar la mitad superior (c) es difícil sacar conclusiones. La parte inferior de la figura parece mostrar indicios de un patrón periódico, pero que no coincide con la mitad inferior del fractal completo. Además, la parte superior de la alfombra muestra un patrón completamente distinto al resto de la figura.

La asimetría de este patrón se puede entender desde la ecuación 3.3: El término oscilante aumenta su frecuencia drásticamente cuando $z_T/z \gg 1$ ¹, es decir, en las proximidades de la red. Este carácter oscilatorio tan rápido al principio del patrón se traduce en problemas

¹Nótese que el término $k(x-x_j)^2$ es directamente proporcional a la distancia de talbot para los puntos más separados de la abertura: $z_T = \frac{2p^2}{\lambda}$, y $x - x_j = \frac{p}{2}$, si x_j es un punto extremo de la j -ésima abertura.

de aliasing que dificultan la visualización del patrón. Como la propia periodicidad del patrón repercute en estos problemas de aliasing, este enfoque resultará siempre en problemas de este tipo.

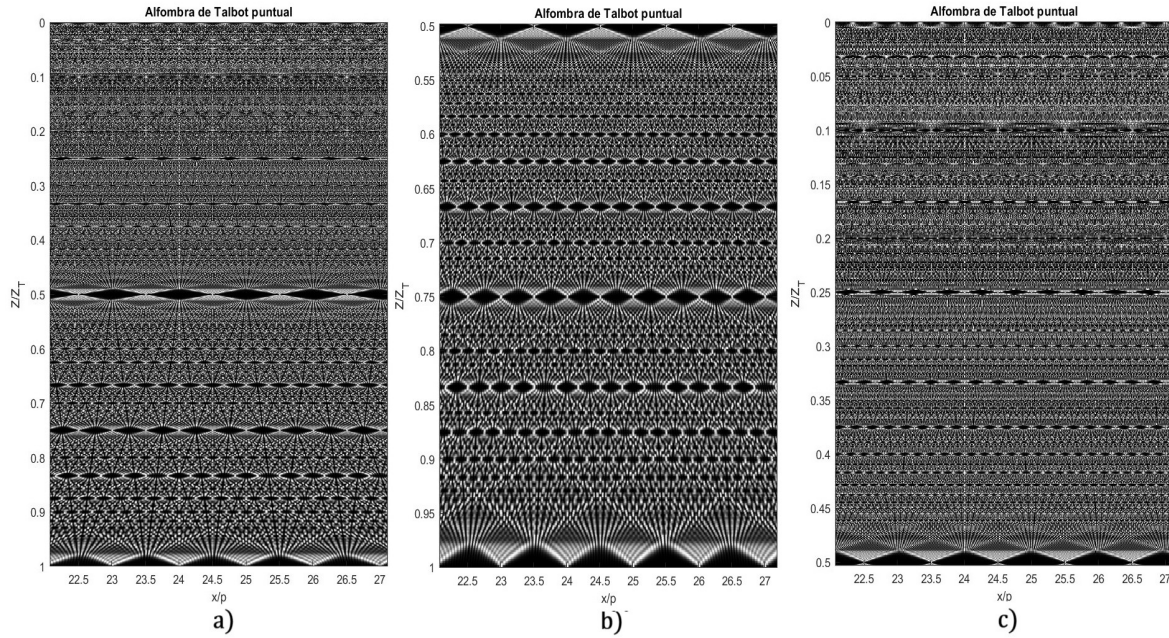


Figura 3.1: Alfombra de Talbot simulada mediante la fórmula de la difracción de Fresnel para una red opaca con abertura perfectamente puntual modelizada como una delta de Dirac. Se muestra la alfombra completa (a), así como la mitad inferior (b) y superior (c).

3.2. Estudio mediante la función de transferencia óptica de Fresnel

Para solucionar los problemas de aliasing se recurre a la ecuación 2.5, la función de transferencia óptica del sistema. El empleo de esta herramienta presenta las siguientes tres ventajas respecto al modelo anterior:

- El término oscilatorio es directamente proporcional a la distancia z . No tendremos una divergencia de la oscilación centrada en las proximidades de la red.
- Disponer de una fórmula general para la transformada de Fourier de la respuesta del sistema reduce notoriamente el coste computacional, ahorrandonos la transformada de Fourier de la función de propagación al espacio recíproco.
- Emplear este formalismo para la difracción de Fresnel nos permite abandonar la noción de fuente perfectamente puntual en la rendija ², que es físicamente dudosa y computacionalmente falsa.

3.2.1. Parámetros configurables

Es precisamente esta última noción la que nos permite dotar a este segundo script de un poco más de flexibilidad. El abandonar la noción de abertura **necesariamente** puntual, nos permite introducir el factor de apertura de la red en el código (variable *duty*), así como el desfase de la red (variable *phshift*), que regulan ambos el tipo de la red de difracción que se considera:

- Todos los puntos de la red que no se transmitan de manera natural, verán alterada su fase asociada un cierto valor previamente indicado. De esta manera puede simularse mediante esta herramienta el efecto de una red cuadrada de fase.
- Si además seleccionamos un número imaginario de módulo elevado para nuestro factor de fase, se traduce en una atenuación abrupta de la intensidad de esta onda, permitiendo de esta manera simular redes opacas si así se desea.

Si dejamos la configurabilidad del patrón de lado, también podemos ver ciertas mejoras en las alfombras de Talbot. Seleccionando un espaciado de 100 píxeles entre ranuras, y un factor de apertura de 0 (que se corresponde con una apertura puntual en el script) para una red opaca, se obtienen las alfombras que se muestran en la figura 3.2:

En ellas, se vé cómo mediante el empleo de la función de transferencia hemos logrado que el patrón vuelva a ser completamente simétrico (resultado lógico de un fenómeno de autoimagen), muestra de que hemos perdido los problemas de aliasing que presentaba el método de la suma a rendijas. Esto puede verse particularmente en (b) y (c): que la distribución de intensidades que emerge de la rendija sea exactamente la misma que coverage a la autoimagen (d) confirma esta noción de simetría, viendo la recta de simetría es la marcada por $z = z_T/2$.

²El formalismo integral de Fresnel permite calcular la difracción para cualquiera que sea la abertura, pero la sustitución de la integral por la suma (que es lo que se hizo en la simulación y que simplifica el cálculo considerablemente en relación con la integral) es exclusivo para aberturas estrictamente puntuales.

Sin embargo las figuras anteriores tienen un principal problema que las hace particularmente difíciles de manejar: la resolución de imagen. Tan solo hace falta ver las immediateces de los puntos de autoimagen para encontrar rápidamente subimágenes claramente pixelizadas. Este problema se debe a la resolución en el espacio de frecuencias: Introducir un único punto emisor por red implica necesariamente un grado muy alto de localización en el espacio real. Esta localizabilidad en el espacio real se traduce en un grado alto de deslocalización en el espectro de frecuencias espaciales que reconstruyen la imagen en el espacio recíproco.

Recordemos que es justo en este espacio en el que se calcula la propagación del campo eléctrico mediante la función de transferencia, y que por lo tanto tanto la complejidad de la imagen una vez deshecha la transformada de Fourier, como la resolución, depende del espectro de frecuencias espaciales de la señal. Dicho de otra manera, tanto la complejidad del patrón de Talbot como la resolución necesaria para observarlo dependen de la extensión de la fuente emisora. Añadir más rendijas a la simulación extiende el espectro de frecuencias accesible sin modificar la puntualidad del emisor como sí haría, por ejemplo, aumentar el espaciado.

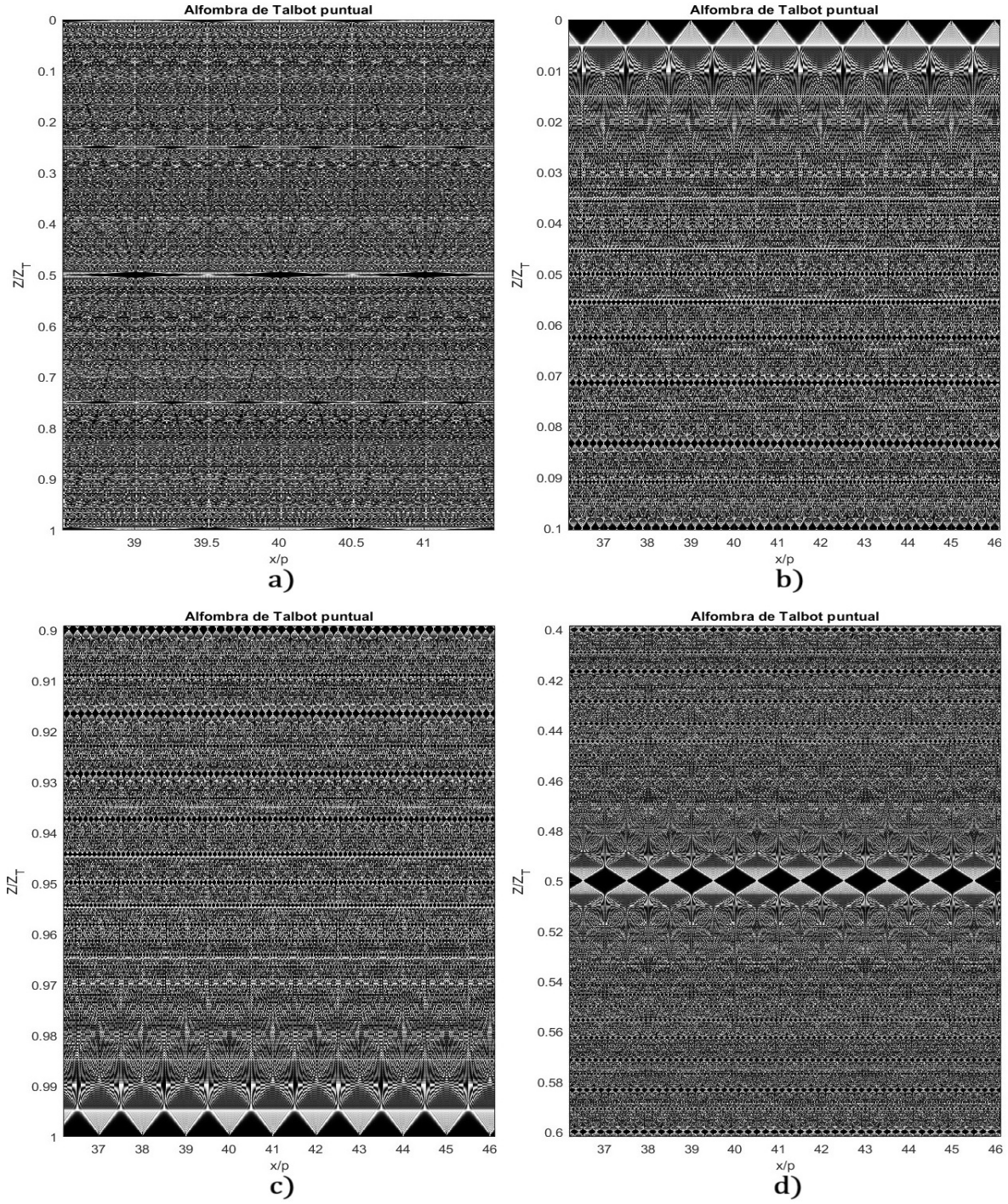


Figura 3.2: Alfombra de Talbot simulada mediante la función de transferencia para la difracción de Fresnel para una red opaca con abertura perfectamente puntual. Se muestra la alfombra completa (a), así una pequeña porción del patrón en la proximidad de la red de difracción (b) y en la autoimagen (c). Por último, se muestra la evolución del patrón en torno a la mitad de la distancia de talbot (d).

Afortunadamente, la complejidad de la imagen es un problema que prevalece exclusivo del ciclo de trabajo, y que puede solucionarse aumentándolo progresivamente. Como para realizar interferometría estamos interesados en tener un contraste claro entre franjas y de tamaño comparable al del detector, empleamos factores de apertura lo más grandes posibles. Tomaremos, por lo tanto, $a = 0,5$. Es por ello que el asunto de la complejidad de las subestructuras de fractales más elaborados nos es de poca relevancia al requerirse una resolución experimental que no existe en detectores comerciales para poder resolverlos, aun si bien es cierto que resulta clave en otros campos como por ejemplo la litografía de redes de difracción [7].

A continuación se muestra cómo el problema de la complejidad fractal se reduce conforme aumenta el factor de apertura, de acuerdo con nuestra simulación:

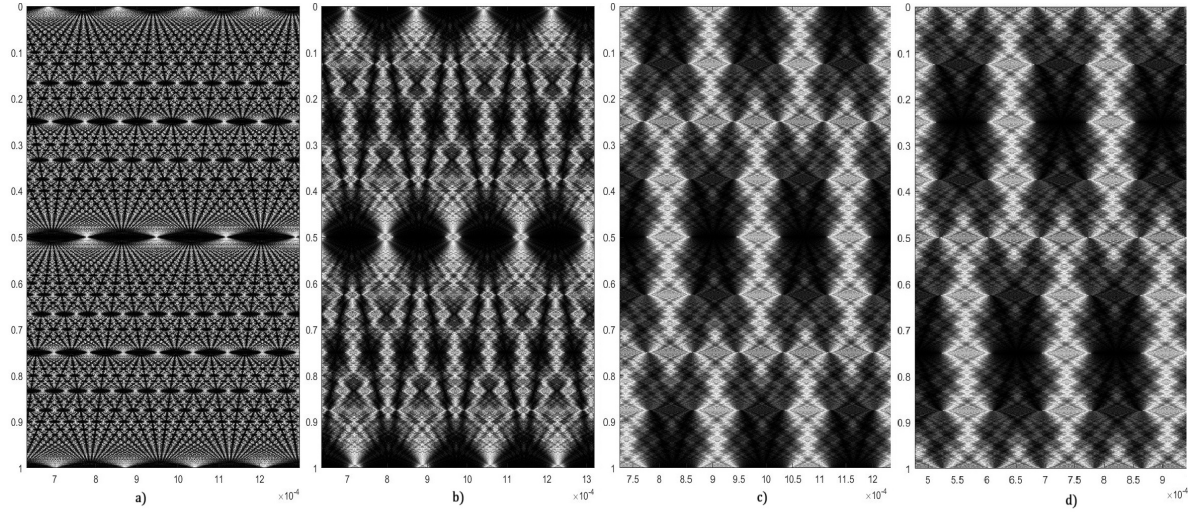


Figura 3.3: Alfombras de Talbot asociadas a un factor de apertura de 0.05 (a) y 0.25 (b) en una red opaca, y alfombras con un factor de apertura de 0.5 en una red opaca (c) en una red de fase de $\frac{\pi}{2}$ (d).

Las alfombras (a), (b) y (c) ilustran la modificación del patrón de Talbot según varía el factor de apertura de una red de difracción opaca. Por último, en la figura (d) se muestra cómo la alfombra de Talbot se ve modificada al cambiar el tipo de red de difracción por una de fase de $\pi/2$ (desfase en el patrón de interferencia de $\pi/2$).

Un rápido vistazo a las alfombras (c) y (d) pone en evidencia que el efecto de sustituir un tipo de red por otro es muy poco disruptivo: El desfase en la distribución del patrón fractal que se introduce en (d) es muy poco relevante para, a efectos prácticos, duplicar la intensidad luminosa que se transmite a nuestro sistema óptico. Es por ello que en experimentos Talbot siempre se emplean redes de fase.

Capítulo 4

Elementos de un interferómetro Talbot

Habiendo introducido la fenomenología y los principios físicos que explican las alfombras de Talbot, dedicamos este apartado a describir el funcionamiento general de un interferómetro Talbot e ilustrar la fenomenología que nos permitirá realizar un análisis posterior de un experimento de interferometría.

4.1. Funcionamiento general

Un interferómetro Talbot estudia cómo cambia un interferograma al introducir un objeto entre la fuente de rayos X y la red de difracción. Esto hace que la fase del frente de onda se modifique y que por lo tanto el patrón de interferencia se altere.

En esta sección ilustramos el funcionamiento de dos scripts, *Talbot 2D* y *grad_carpet*, que nos permitirán entender la motivación detrás de la simulación de las alfombras y asentarán las bases de la simulación del [5](#).

4.2. Generación del interferograma: Beamsplitter

Para poder generar el patrón de Talbot, se emplea una red de difracción de fase para maximizar la intensidad transmitida. Esta red separa el haz en dos frentes de onda distintos, y por ello recibe el nombre de **beamsplitter**. Se trata de la parte central del interferómetro, ya que sus características (ciclo de trabajo y periodicidad) dictan el tipo de alfombra y su longitud de Talbot.

El interferómetro Talbot opera a una distancia fija con respecto al beamsplitter. Esta distancia se elige de tal manera que el patrón de franjas verticales exhiba el mayor contraste posible. Para lograr este punto, se examina la alfombra de Talbot asociada a la red, y se buscan máximos extensos y brillantes, que decaigan rápido a mínimos oscuros e igualmente extensos.

La figura 4.1 muestra la diferencia entre el perfil de intensidades a lo largo de dos periodos del interferograma en los puntos de máximo ($z = z_T/4$) y mínimo ($z = z_T/2$) contraste, para una red de fase de $\pi/2$. Como es lógico de la reconstrucción de una señal discontinua mediante una serie truncada de Fourier, el fenómeno de Gibbs aparece patente en ambos interferogramas.

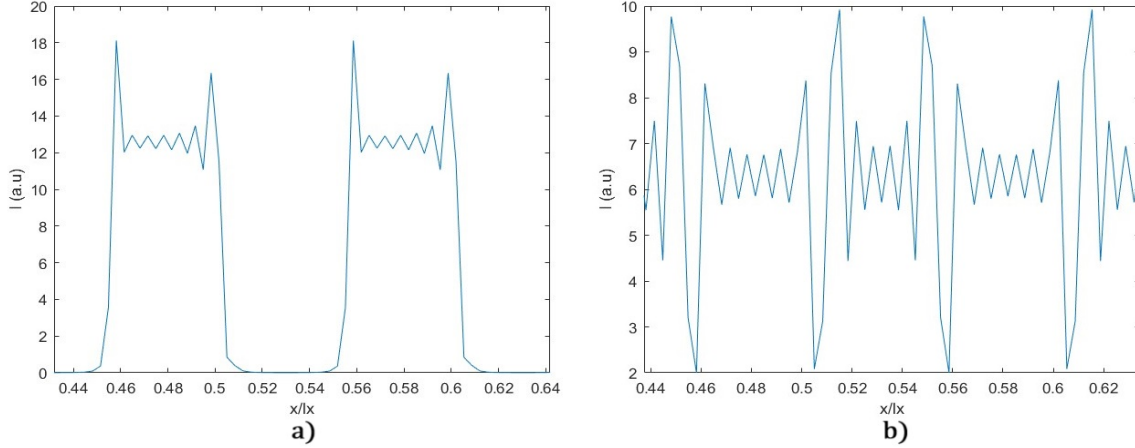


Figura 4.1: Perfiles de intensidad a lo largo de dos periodos de la red correspondientes a $z_T/4$ (a) y $z_T/2$ (b). Simulaciones para 10 rendijas separadas 30 pixeles

Es sencillo caer en la tentación de pensar que la señal de (b) tiene un mayor nivel de ruido, pero bajo comparación con (a), vemos que el valor de las oscilaciones no deseadas es prácticamente idéntico. La diferencia crucial es el patrón de intensidades en el punto de observación. $z_T/2$ corresponde a un punto de autoimagen de la intensidad que atraviesa el beamsplitter. Como el beamsplitter ha sido modelado como una red de fase de opacidad nula, su perfil teórico de intensidades debería ser constante y por lo tanto no debería poder observarse la presencia de franjas.

En nuestra simulación somos capaces de ver pequeñas franjas debido al caracter finito de nuestro espectro al realizar la transformada inversa de Fourier. Esto es lo que da pie a las oscilaciones. Aumentar el numero de rendijas aumenta consecuentemente las frecuencias accesibles a nuestro tratamiento de datos. De esta manera, obtenemos los siguientes perfiles de intensidades:

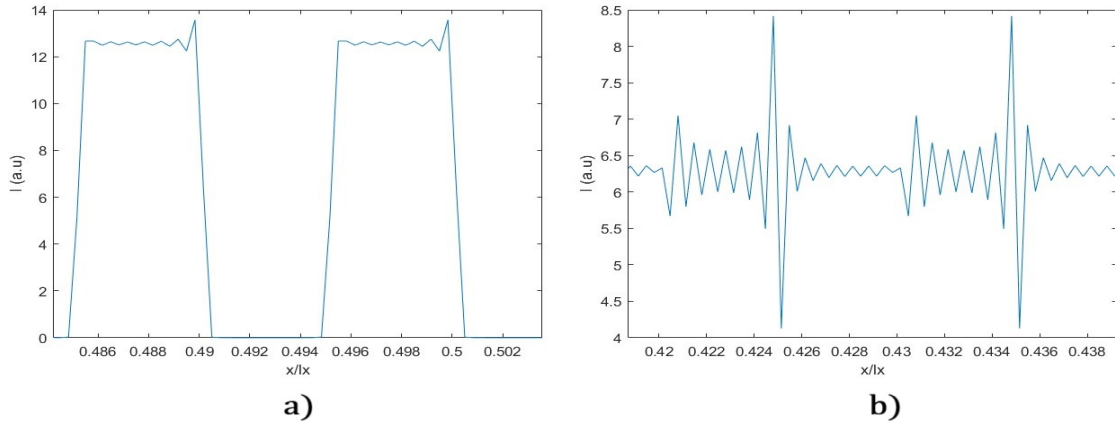


Figura 4.2: Perfiles de intensidad a lo largo de un periodo de la red correspondientes a $z_T/4$ (a) y $z_T/2$ (b). Simulaciones para 100 rendijas separadas 30 pixeles

Por otra parte, en la figura 4.3 se muestra la alfombra de Talbot asociada a los distintos perfiles de intensidades mostrados en la figura 4.1. Simultáneamente se han representado los interferogramas obtenidos en los puntos de mínimo y máximo contraste, evidenciando la importancia de la elección del punto de trabajo.

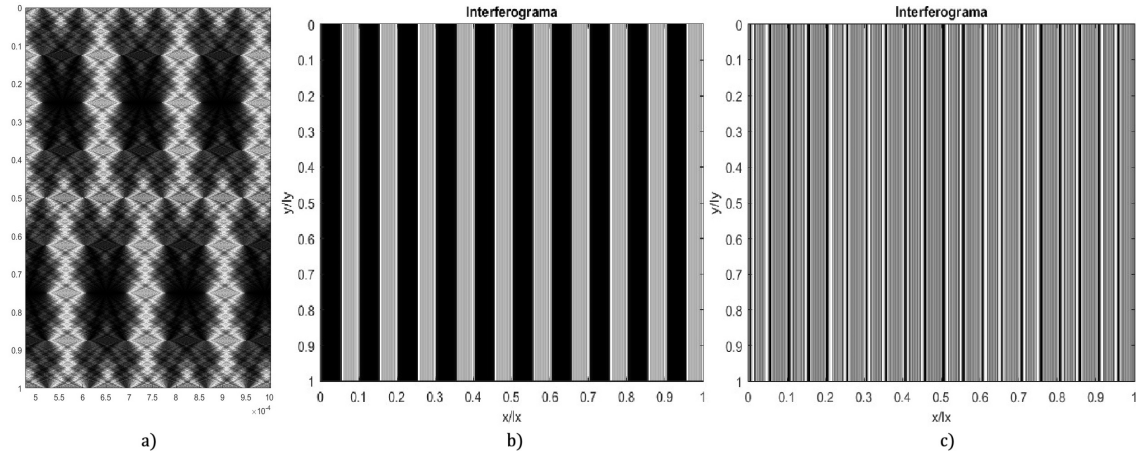


Figura 4.3: Alfombra de Talbot de $\pi/2$ (ciclo de trabajo 0.5) a) y patrones de Talbot asociados a distintas distancias del beamsplitter: b) $z_T/2$, c) $z_T/4$

4.3. Modificación de la alfombra ante un gradiente de fase

El objetivo de esta sección es introducir de manera intuitiva el principio detrás de la modificación del interferograma al atravesar un objeto. Para ello hemos de pararnos a reflexionar acerca del frente de onda y de la propagación de la radiación electromagnética.

Recordemos que el frente de onda se define como el lugar geométrico de los puntos con misma fase y que la propagación de una onda electromagnética es siempre perpendicular al frente de onda. Cuando introducimos un objeto que produce un gradiente de fase local en

distintos puntos de la onda incidente, también alteramos la dirección de propagación de la onda, afectando a la propagación de la misma al atravesar el beamsplitter. Es este cambio en el frente de ondas y en la dirección de propagación lo que se ilustra en la figura 4.4:

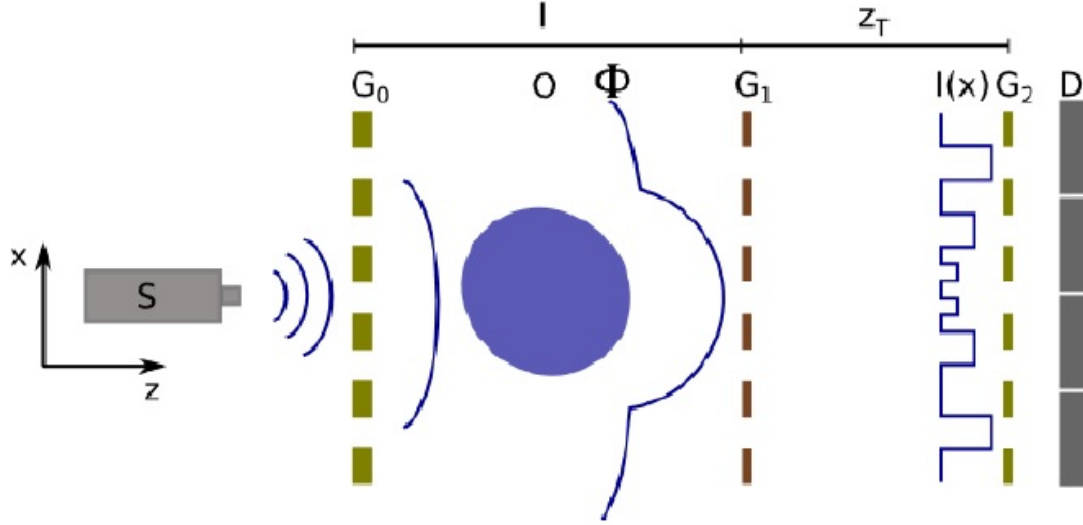


Figura 4.4: Esquema de la modificación de un frente de onda al atravesar un obstáculo esférico, extraído de [8]

El punto clave de la interferometría Talbot Lau reside en considerar que el interferograma es tal que los cambios locales en la posición de las franjas de interferencia se deben **únicamente** a la desviación angular del frente de onda de la rendija que en condiciones normales hace autoimagen en las franjas. En resumidas cuentas, lo que establecemos es una correspondencia punto a punto entre el gradiente de fase (que recordemos, fija la dirección de propagación de la onda en ese entorno), con las franjas en un periodo a su alrededor.

El desplazamiento lateral de la franja queda, por lo tanto, relacionado con la el gradiente de fase mediante:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = k \cdot \frac{p}{z} \cdot \frac{\Delta \phi_f}{2\pi} \quad (4.1)$$

Donde ϕ_f es la información de fase asociada al desplazamiento lateral de la franja de interferencia y ϕ es la fase de la onda incidente.

Para validar esta hipótesis se ha elaborado un pequeño script, que estudia cómo se modifica la alfombra de Talbot al curvar el frente de onda ligeramente en un único ciclo de trabajo, haciendo que tome forma de onda convergente. Se visualizan a la vez la modificación de la alfombra de Talbot y el perfil de intensidades obtenido para un gradiente de fase de un mrad:

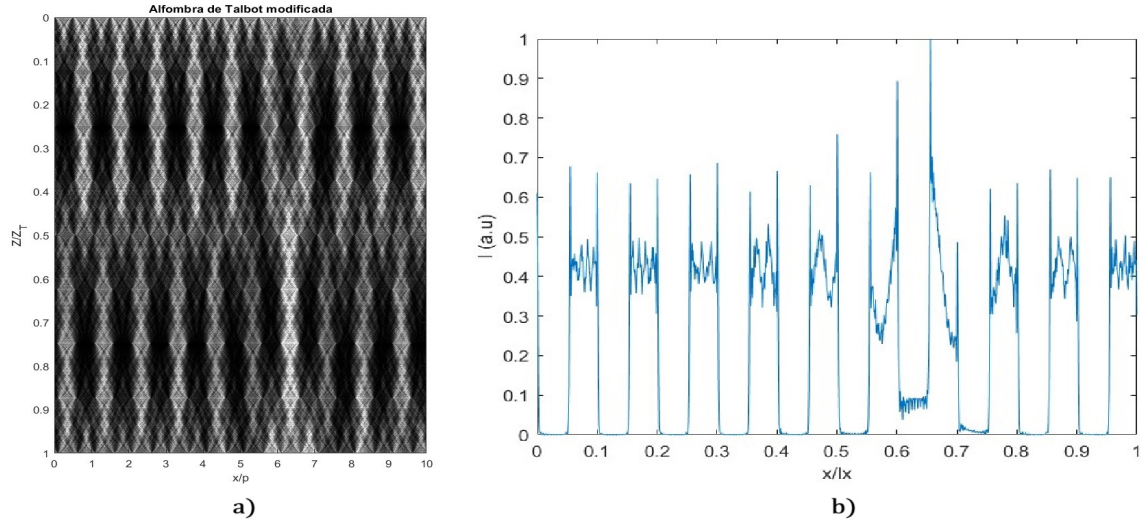


Figura 4.5: Simulación de una alfombra de talbot con un gradiente local en $x/p=6-6.25$ de 0.001rad y en $6.25-6.5$ de -0.001rad (a) e intensidad asociada a las distancia de máximo contraste (b)

En la figura 4.5 vemos como el gradiente local de fase propaga a lo largo de la alfombra, provocando una redistribución de la intensidad de los bordes más alejados del patrón de difracción hacia el centro. La intensidad del mínimo aumenta hasta la unidad, al igual que la de los bordes más cercanos de la franja de interferencia. El perfil que estamos viendo es muy similar a la redistribución de intensidades ocasionada por una lente convergente.

Capítulo 5

Simulación de un experimento de interferometría Talbot

A modo de conclusión del trabajo experimental se simula el siguiente experimento de interferometría Talbot:

Deseamos analizar una esfera de mediante rayos X. Estimulamos la emisión de rayos X de cobre en su línea K_α y la hacemos pasar a través de un beamsplitter de $\pi/2$ con una periodicidad de $50\mu m$ y un factor de apertura de 0.5. Supondremos que la resolución espacial del detector es suficiente para medir las franjas sin tener que recurrir a montajes complejos y, para máximo contraste, trabajaremos con el detector situado a una distancia $z = \frac{z_T}{4}$.

De esta descripción los dos parámetros de interés son la longitud de onda los rayos X y el índice de refracción. La línea K_α del cobre emite radiación de 8.04778 keV [9], o lo que es lo mismo, $\lambda = 1,5437\text{\AA}$. La parte real del índice de refracción se supone conocida y de valor $n = 1 - 4 \cdot 10^{-6}$ ¹.

5.1. Modulación del frente de onda

Como veíamos en 4.1, el objetivo del análisis que se realiza en un interferómetro Talbot es detectar los cambios de fase e intensidad en un haz que atravieasa un objeto. Es es por ello que tenemos que definir el haz que emerge del beamsplitter de tal manera que dé cuenta de la refracción en la esfera. Para ello se procedió de la siguiente forma:

- Se declara el campo eléctrico en el beamsplitter como si no existiera la esfera de manera idéntica de como se hizo durante el estudio de la alfombra de Talbot mediante la función de transferencia.
- Se define una cierta región de interes (ROI) en la que la esfera queda confinada como un cuadrado de lado $2R$, donde R es el radio de la esfera.

¹Esta no es una suposición inverosímil de hacer. Existen multitud de bases de datos como la de https://henke.lbl.gov/optical_constants/getdb2.html que tabulan estos coeficientes de interés para una gran variedad de materiales.

- Se considera el grosor de un píxel en nuestro sistema, que viene dado por el cociente entre por la periodicidad de la red y el espaciado entre puntos. Se calcula la diferencia de fase introducida por un píxel de material: $d\phi$
- Para todos los puntos en la ROI a una distancia del centro menor que R, se calcula su diferencia de fase como:

$$\Delta\phi = 2\sqrt{R^2 - r_i^2} \cdot d\phi \quad (5.1)$$

- Se multiplica la fase caculada en el beamsplitter por el factor de fase que le hemos asociado.

$$E_{esfera} = E_{beamsplitter} \cdot e^{i\Delta\phi} \quad (5.2)$$

El frente de onda así descrito tiene la siguiente forma:

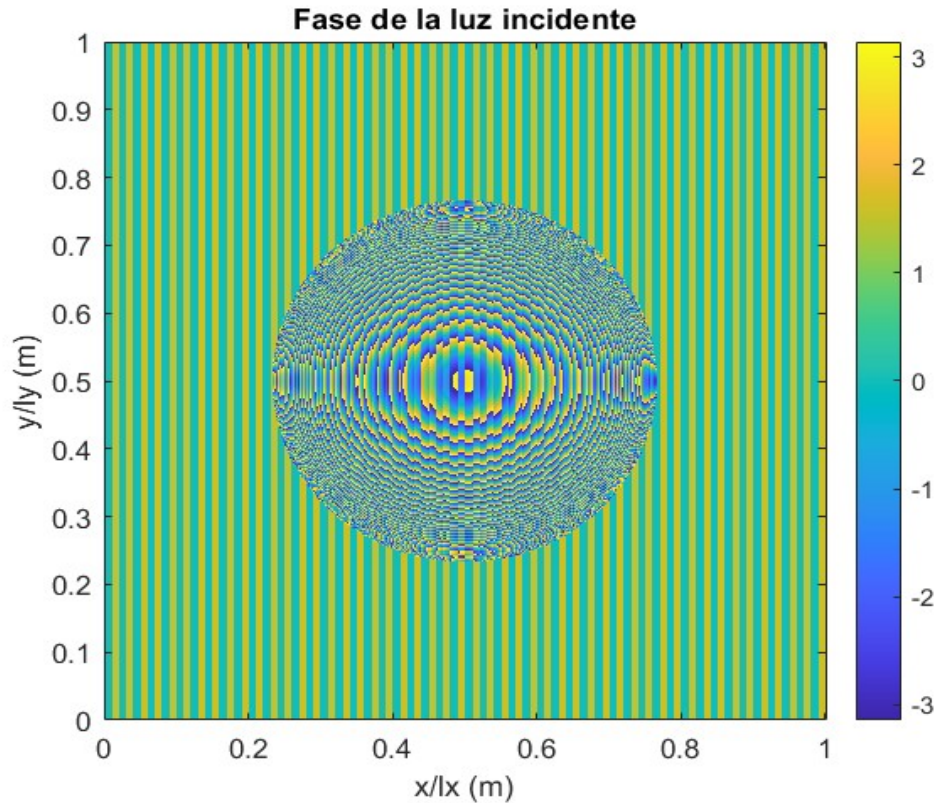


Figura 5.1: Fase de la onda en el beamsplitter

5.2. Obtención de interferogramas

Definido ya el frente de onda, se pasa a estudiar su perfil de intensidades a una distancia fija $z = \frac{z_T}{4}$. Se aplica a la distribución de campo eléctrico la funcion de transferencia evaluada en la distancia de observación haciendo uso del teorema de la convolución. Para poder realizar un análisis correcto de las imágenes, el script se ha programado para trabajar simultáneamente

con el frente de ondas con y sin objeto. De esta manera, denotaremos con el subíndice *ref* y *obj* a las imágenes de referencia y en presencia de muestra, respectivamente.

Antes de mostrar las imágenes obtenidas, hemos de dar cuenta de un problema de nuestro experimento: Resulta demasiado poco realista. Además, dar cuenta de todos los efectos experimentales que pueden dar pie a una pérdida de resolución del sistema (forma de la red, no monocromaticidad del haz, alineamiento óptico, etcétera) complica innecesariamente la complejidad del script sin ser particularmente ilustrativo. Es por ello que para dar cuenta de todos los fenómenos que desidealizan nuestro sistema, aplicamos en última instancia un filtro gaussiano de radio personalizable. Podemos tratar el valor del radio de acción del filtro como el inverso del grado de idealizabilidad de nuestro sistema. A lo largo del experimento hemos tomado un radio de acción para el filtro de 3px.

Hecho esto, se obtienen las siguientes imágenes simuladas:

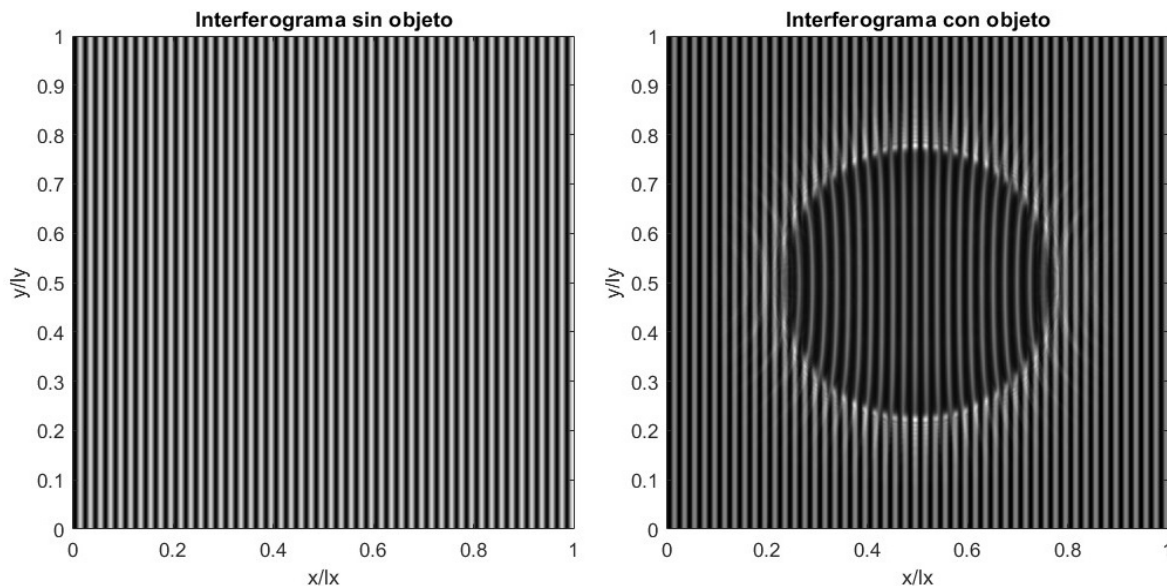


Figura 5.2: Interferogramas a una distancia $\frac{zT}{4}$

5.3. Análisis de imagen: Desacople en el espacio de Fourier

Si nos fijamos en la imagen asociada al objeto, especialmente comparada con la referencia, observamos dos principales características:

- La intensidad del interferograma parece decrecer en el interior de la esfera, y aumentar en los bordes.
- Las franjas parecen curvarse hacia el centro en el interior de la esfera.

Estos dos fenómenos pueden analizarse de manera independiente, desglosando la parte periódica de la no periódica de la señal:

Las franjas de Talbot heredan la periodicidad de la red a la distancia de trabajo. Llamamos a su numero de onda asociado k_F y escribimos para ambos interferogramas:

$$I(r) = A(r) + B(r)e^{i[k_F \cdot r + \phi(r)]} \quad (5.3)$$

Aunque las distintas bandas obedecen de manera general a la periodicidad fundamental del beamsplitter, el hecho de que se curven afecta a la fase de la componente oscilatoria en 5.3. Es por ello que se introduce el término $\phi(r)$ que describe la fase de las franjas de interferencias.

Los coeficientes $A(r)$ y $B(r)$ dan cuenta de las partes no periódica y periódica de la señal, respectivamente.

Para obtener estos coeficientes, trabajamos en el espacio de Fourier, y obtenemos el espectro de frecuencias espaciales de la imagen. Para visualizar mejor los valores trabajaremos con el logaritmo del espectro de Fourier. Así se obtienen las siguientes imágenes, con y sin objeto:

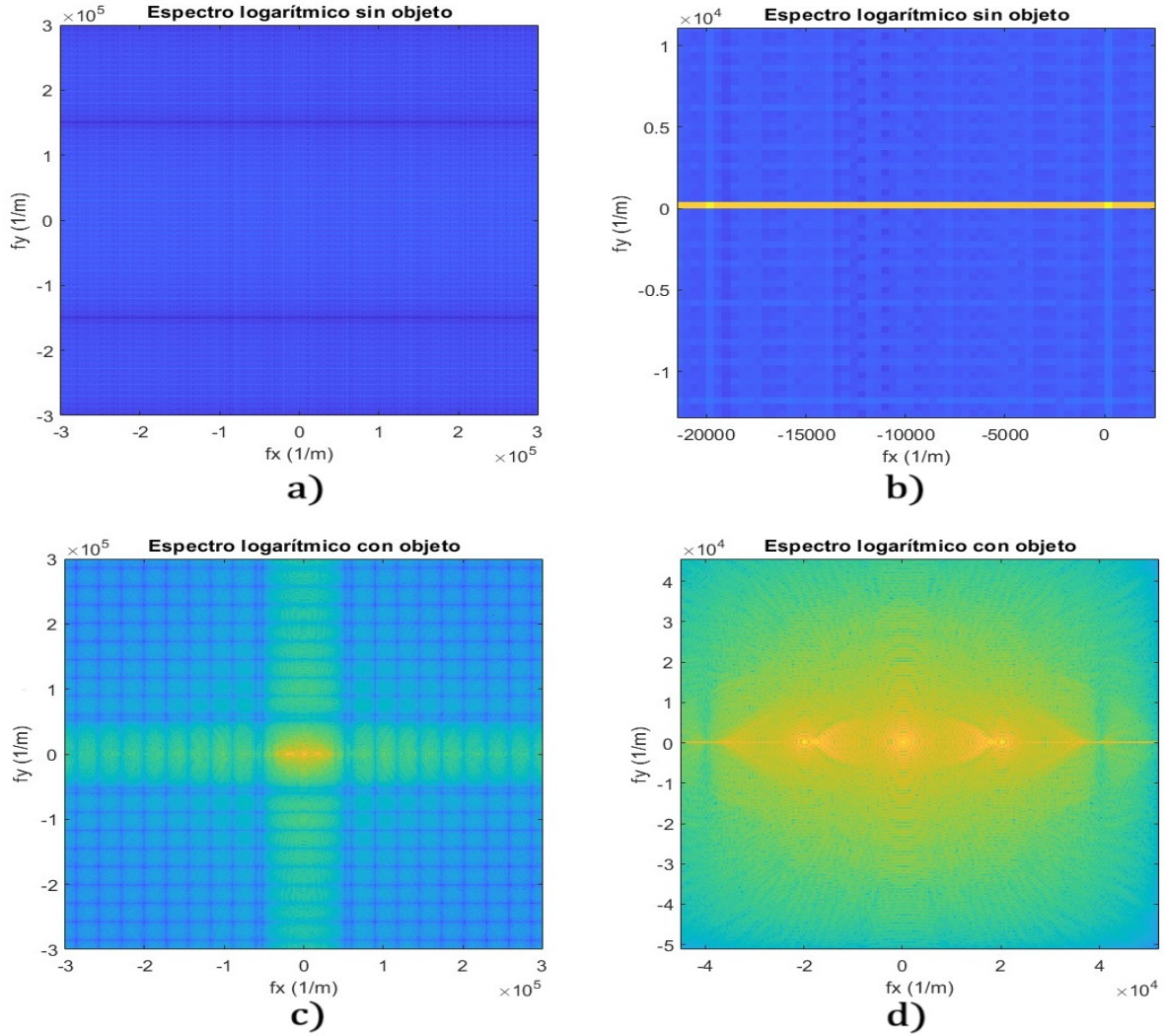


Figura 5.3: Espectros logarítmicos de las imágenes sin objeto (a),(b) y con objeto (c),(d): En (b) y (d) se ha hecho zoom para poder apreciar los dos picos en la frecuencia propia del beamsplitter, además del pico a frecuencia 0. En concreto la imagen (b) solo muestra la parte negativa del espectro pues al ser el pico puramente puntual se requiere un grado de zoom mayor que impide ver parte del eje

Al comparar los espectros con y sin objeto, es fácil encontrar una serie de similitudes y diferencias a ambas imágenes. Ambas presentan máximos en torno a la frecuencia espacial del beamsplitter $f_x = 1/p = 2 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$. Sin embargo, la imagen sin objeto no tiene valores apreciables en las frecuencias verticales, esto se debe a que la señal se mantiene constante para todo valor de y en un valor de x fijo. Esto no sucede en la imagen con objeto, en la que el hecho de que las franjas se curven en el eje y introduce al espectro una combinación de frecuencias que permitan recrear su modificación.

Este efecto tiene lugar en ambas componentes de espectro en frecuencias, y por lo tanto restringe la información periódica no a un punto único punto, como se sucede en la figura (b), sino a toda la región circular en torno al máximo, como se ve en (d).

Para desacoplar la información periódica de la no periódica se selecciona el pico de la frecuencia fundamental de la imagen buscando a lo largo de la fila central del espectro el máximo local no central de mayor valor. Tras ubicarlo, se toma una cierta region circular de interés a su alrededor. El radio de este círculo se puede regular ajustando la tolerancia del proceso de filtrado. Eso se hace mediante el parámetro “*tol*”, que actúa como el peso del radio de filtrado respecto a la distancia entre el fundamental y el cero. En nuestras simulaciones se ha empleado siempre “*tol*” = 0,5. Definida esta región se eliminan los valores del espectro en torno a ese valor, y se guardan en nuevas variables: “*cpeak*” y “*cpeak_empty*”, que corresponden a los valores de la imagen con objeto y de referencia, respectivamente.

Para la representación de las distintas componentes es particularmente util comparar las imágenes con objeto con aquella sin objeto. Es por ello que definimos la atenuación de la imagen, el darkfield y el desfase como:

$$\text{Atenuacion}(r) = \frac{A_{obj}(r)}{A_{ref}(r)} \quad (5.4)$$

$$\text{Darkfield}(r) = \frac{B_{obj}(r)}{B_{ref}(r)} \quad (5.5)$$

$$\Delta\phi = \phi_{obj} - \phi_{ref} \quad (5.6)$$

Separadas ambas variables, se realiza la transformada inversa de Fourier, volviendo al espacio real. De esta manera, y si llamamos “*ghost*” y “*ghost_empty*” a los respectivos espectros sin armónico fundamental con y sin objeto, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\mathcal{F}^{-1}(\text{“ghost”}) = A_{obj} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\text{“ghost_empty”}) = A_{ref} \quad (5.8)$$

De la misma manera, para la componente periódica se tiene:

$$\mathcal{F}^{-1}(\text{“cpeak”}) = B_{obj}(r)e^{i[k_F \cdot r + \phi_{obj}(r)]} \quad (5.9)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\text{“cpeak_empty”}) = B_{ref}(r)e^{i[k_F \cdot r + \phi_{ref}(r)]} \quad (5.10)$$

No obstante, la información de la componente periódica sigue distribuida en dos componentes: B y ϕ . Para desacoplar el término de fase del darkfield basta con tomar las partes imaginaria y real, respectivamente, del logaritmo de la transformada inversa. Se puede observar trivialmente que.

$$\log B = \mathcal{Re} \left(\log \left[B(r)e^{i[k_F \cdot r + \phi(r)]} \right] \right) \quad (5.11)$$

$$\Delta\phi = \mathcal{Im} \left(\log \left[\frac{B_{obj}(r)e^{i[xk_F \cdot r + \phi_{obj}(r)]}}{B_{ref}(r)e^{i[k_F \cdot r + \phi_{ref}(r)]}} \right] \right) \quad (5.12)$$

Tras este tratamiento, se obtienen las siguientes imágenes para la atenuación y el darkfield:

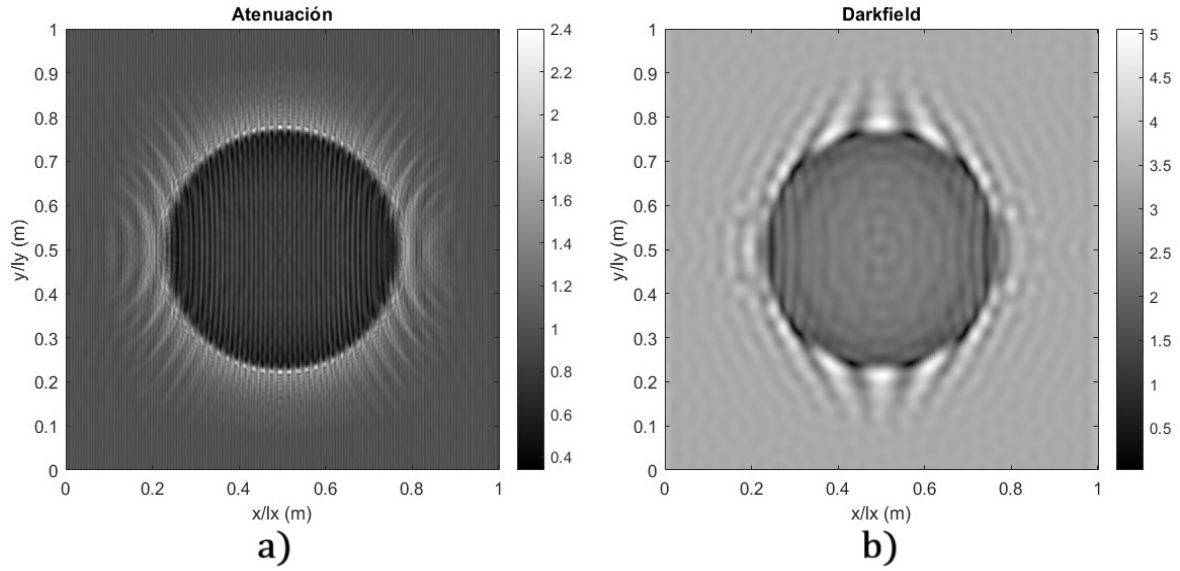


Figura 5.4: Atenuación y darkfield obtenidos para la simulación

Viendo las figuras obtenidas, algo rápidamente llama nuestra atención: La escala de grises.

El cociente entre ambas contribuciones a la señal supera la unidad en los bordes de la esfera. Esto se debe a un efecto denominado **refraction enhancement**. Como el índice de refracción los rayos X es menor que uno, la esfera de teflón actúa como una lente divergente. Este efecto es mayor cuanto mayor sea el gradiente fase entre puntos adyacentes del interferograma de la esfera. Lo que estamos viendo en las figura 5.4 es una redistribución de la intensidad desde el interior de la esfera hacia los bordes.

Precisamente, cuando tomamos el índice de refracción mayor que la unidad observamos justo lo contrario: El campo eléctrico, en vez de dispersarse hacia los confines de la imagen converge hacia una región interior a la esfera. El valor máximo de los coeficientes de atenuación y darkfield aumenta debido a que la nueva redistribución sucede un área menor, y el borde de la esfera queda completamente oscurecido:

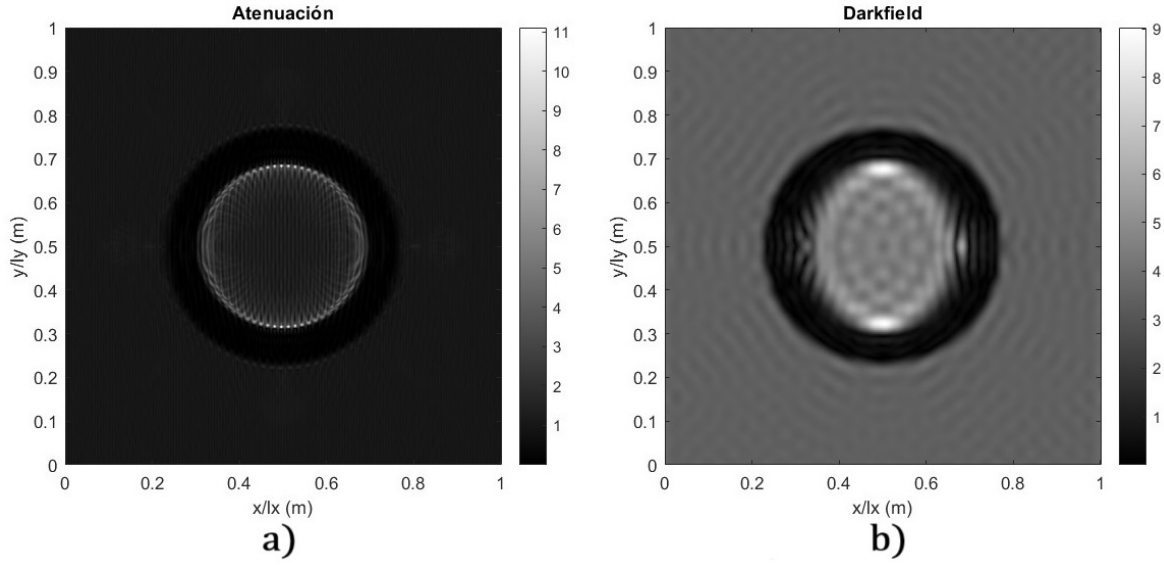


Figura 5.5: Atenuación y darkfield obtenidos para la simulación con un índice de refracción superior a la unidad: $n = 1 + 4 \cdot 10^{-6}$

Por último, se define la visibilidad como el cociente entre el darkfield y la imagen de atenuación. Este parámetro es una medida la calidad de la imagen de las franjas, en concreto del contraste entre estas y el fondo de la imagen (i.e. su nivel de continuo).

$$V = \frac{\text{Darkfield}(r)}{\text{Atenuación}(r)} \quad (5.13)$$

La visibilidad para nuestro experimento de interferometría es la siguiente:

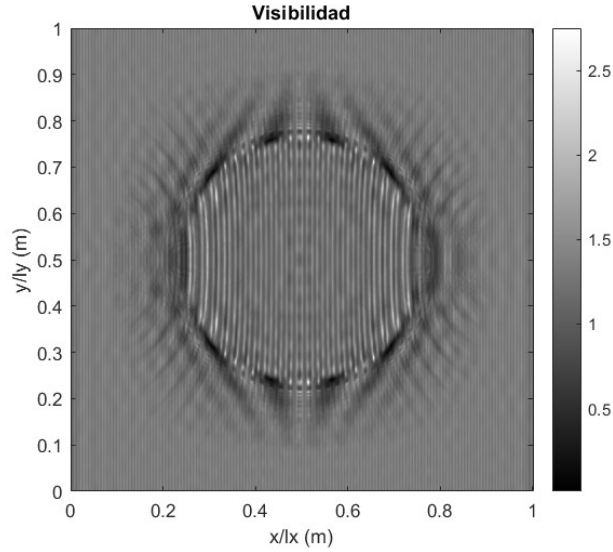


Figura 5.6: Visibilidad de las figuras obtenidas en la simulación

5.4. Tratamiento de la fase: *phase unwrapping* y reconstrucción del frente de onda

El último parámetro cuyo análisis no hemos realizado todavía es la fase del interferograma. Siguiendo el tratamiento descrito en 5.12, se obtiene la siguiente imagen de fase de las franjas de interferencia:

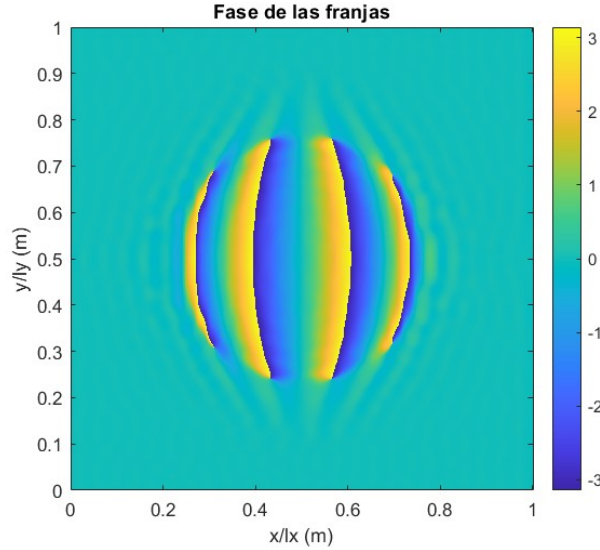


Figura 5.7: Imagen de fase de la esfera

El desfase de las franjas está directamente relacionado con el gradiente de fase de la onda incidente: Al atravesar la esfera, el frente de onda se modifica, tomando una forma esférica de acuerdo con la figura 5.1. Recordemos que la propagación de la radiación es perpendicular al frente de onda, y por lo tanto, esa pequeña curvatura tendrá repercusiones en la propagación del campo eléctrico tras el beamsplitter.

A la hora de manejar esta expresión vemos que hay un gran problema con nuestros datos de fase de las franjas: la periodicidad. Como la fase es periódica, desgranar el índice de refracción de la imagen no será sencillo. Para solucionar esta problemática, basta con aplicar un algoritmo de phase unwrapping (o desenvoltura de fase) [10].

No obstante, este algoritmo asigna un valor de fase a toda la imagen, no solo a la esfera. Es por ello que normalizamos la fase restandole a la figura entera el valor de fase asignado a la primera fila de la figura de fase, que claramente no tiene información de fase. En la figura 5.8 vemos las dos figuras con la fase “desenvuelta”, antes y después de este pequeño calibrado:

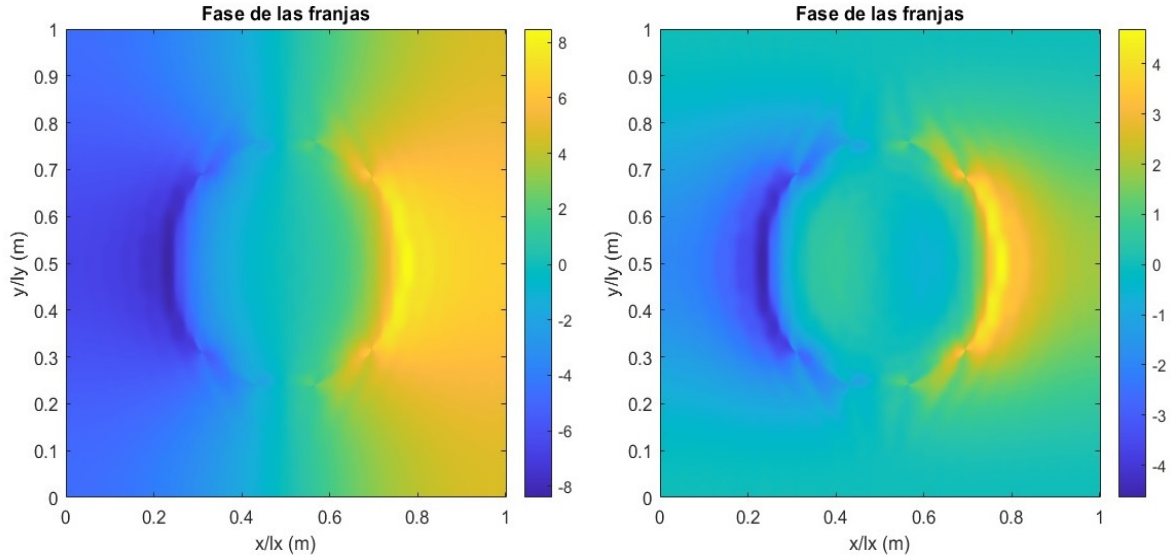


Figura 5.8: Imágenes de fase obtenidas tras el *Phase unwrapping*

Es de particular interés la imagen situada a la derecha, despojada del gradiente del fondo introducido por el algoritmo de “desenvoltura”.

De acuerdo con la ecuación 4.1, el gradiente de fase es proporcional a las imágenes de fase obtenidas. Es por esto que es natural observar un fondo sin gradiente de fase que corresponde a la parte del frente de onda que no atravesó la fase.

Por último es razonable de destacar que el gradiente de fase replica la estructura simétrica de la esfera. Al moverse en la dirección x en la semiesfera izquierda, el grosor atravesado por los rayos aumenta, resultando en rayos que recorren un menor camino óptico ($n < 1$) y que por lo tanto salen adelantados con respecto al resto. Es a este fenómeno a lo que se deben las tonalidades amarillentas en el interior de la esfera.

Lo contrario sucede en la semiesfera derecha, en la que las tonalidades son azuladas debido a ausencia progresiva de cada vez más materia.

En los laterales de la imagen de fase, vemos un cierto engrosamiento de la imagen debido, de nuevo, al efecto de lente divergente. Este engrosamiento se hace cada vez menos evidente conforme bordeamos la esfera hacia sus zonas superiores debido a la que el gradiente de fase que estamos muestreando es solo vertical: Como las franjas de interferencia son verticales, la información de fase en la dirección y es solo observable en presencia de un gradiente en la dirección x . Es por esto que en las zonas con un gradiente vertical más acuciado, pero más tenue en el eje horizontal, vemos valores más tenues de la imagen de fase.

Capítulo 6

Complicaciones experimentales y montajes habituales

Un experimento real de interferometría Talbot presenta muchos más inconvenientes de los que se han podido cubrir en este trabajo. El objetivo de este capítulo es dar un pequeño resumen de estos problemas, y explicar cómo se solucionan experimentalmente.

6.1. Tamaño de píxel y análisis de imagen: Analizador

Para poder realizar interferometría Talbot, resulta insuficiente el uso únicamente del Beamsplitter, debido al tamaño del píxel del detector. En un caso ideal, el tamaño de píxel del detector sería mucho más pequeño que el del interferograma, permitiendo medir con exactitud la variación del interferograma píxel por píxel.

En un experimento real, el tamaño de píxel es del orden de las pocas micras. Considerando que el periodo del beamsplitter suele ser un orden de magnitud similar, en torno a las décimas de micra (llegando en ocasiones a las micras) es sencillo concluir que tendremos un problema de resolución.

Recordemos que el efecto Talbot es un efecto de autoimagen. Como tal, las dimensiones del patrón de Talbot serán las mismas que las de la red de difracción, y por consiguiente, el tamaño de píxel registrará simultáneamente varias franjas de Talbot. Esto significa que perderemos la información de la curvatura de las franjas, dado que la resolución del detector es menor que la distancia entre franjas, $p/2$.

Para solucionar este problema, se emplea una segunda red de difracción, llamada **analizador**, que se coloca inmediatamente antes del detector. Esta red de difracción es una red opaca, cuyas dimensiones son exactamente las mismas que las del patrón de Talbot y actúa como un filtro espacial que substraerá siempre la misma contribución del patrón de Talbot. Según la configuración del analizador, se puede diferenciar entre dos técnicas de adquisición de datos: phase stepping (o montajes multi-disparo), Moiré (o montajes de disparo único).

6.1.1. Phase stepping

En estos montajes, se coloca el analizador en coincidencia con el patrón de Talbot y se muestrea un periodo de la beamsplitter progresivamente, desplazando el analizador en la dirección del patrón de Talbot a lo largo de una serie de pasos.

La intensidad registrada en cada paso se registra en el detector, buscándose que el desplazamiento lateral abarque un periodo del analizador tras el total de pasos, p . De esta manera, la intensidad medida en cada píxel se puede expresar como una función de las coordenadas del píxel y de la posición del analizador, $I(x, y, n)$. n corresponde al índice asociado a la n -ésima imagen tomada en el proceso de phase stepping.

Esta señal será periódica en n y de manera general puede escribir como una serie de Fourier como sigue [11]:

$$I(x, y, n) = I_0 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} I_j(x, y) e^{i \frac{2\pi j}{p} n} \quad (6.1)$$

De esta manera somos capaces de relacionar las distintas contribuciones a la intensidad con distintas magnitudes físicas:

I_0 corresponde al nivel de continuo sobre la señal entera. De ahora en adelante llamamos a este factor A_0 . De la misma manera, podemos definir el coeficiente B como la intensidad asociada a la periodicidad del patrón. Para ello nos quedamos con el primer término de la serie de Fourier, I_1 que es el que recrea la periodicidad de la intensidad. De esta forma podemos reconstruir la parte puramente periódica de la señal a partir de esta componente empleando el tratamiento descrito en 5.12

Otra ventaja del phase stepping es que permite identificar fácilmente el ruido de la imagen. Al forzar la generación de una señal periódica durante el muestreo con el analizador, se genera una situación en la que el ruido y el nivel de continuo se mantienen constantes, mientras que las franjas se mueven, permitiendo identificarlas con mayor facilidad. No obstante, el principal problema de este método es que cada medida requiere de varias imágenes, siendo particularmente problemático en el campo de la física médica donde los efectos iatrogénicos deben ser minimizados.

6.1.2. Análisis Moiré

Se habla de configuración Moiré, en aquellos sistemas en los que se coloca el analizador girado un pequeñísimo ángulo respecto al beamsplitter. El efecto es la generación de un patrón de mayor periodicidad, que recibe el nombre de patrón Moiré.

El análisis de estas franjas es más complicado dado que el espectro de Fourier de estos patrones tiene dos periodicidades marcadas en direcciones distintas. Para realizar un análisis satisfactorio es necesaria una reorientación de los ejes del sistema, que permita realizar el análisis de Fourier posterior de manera clara y siendo capaces de ignorar las periodicidades del patrón para centrarse en la periodicidad “emergente”. Para ello es tan sencillo como considerar la siguiente relación [12].

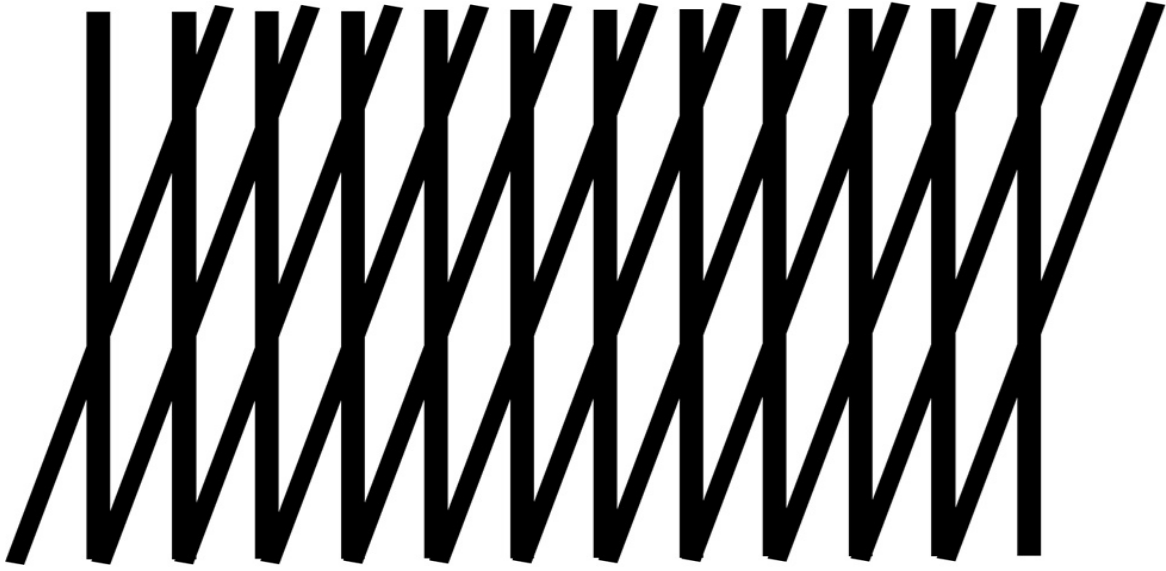


Figura 6.1: Ejemplo de un patrón Moiré

$$p_{\text{Moiré}} = \frac{p_{\text{eff}}/2}{\sin(\theta/2)} \approx \frac{p_{\text{eff}}}{\theta} \quad (6.2)$$

Para realizar un análisis similar al phase stepping, se estudia el espectro de Fourier de la imagen, en el que se define un par de ejes nuevos, x', y' que siguen la periodicidad Moiré. Se extrae la contribución periódica de primer armónico asociado, y se toma el resto de la señal como offset. Estos montajes son los que se emplean en los llamados montajes “Single shot”, de particular interés en aplicaciones médicas.

6.2. Coherencia: Efecto Lau y red fuente

No debemos olvidar que el experimento que estamos realizando es un experimento de interferometría, y como tal, se requiere cierto grado de coherencia en la luz incidente. Si bien es cierto que existen instalaciones dotadas fuente de rayos X coherentes como el EuXFEL^[13]¹, el mecanismo más común de emisión de rayos X es la radiación Bremsstrahlung, manifiestamente incoherente. Es por ello que es necesario una configuración que permita lograr un cierto grado de coherencia en la luz incidente.

Estos montajes reciben el nombre de **montajes Lau**. Consisten en la colocación de una lámina opaca a los rayos X en el que hay dispuestas una serie de orificios de diminuto tamaño. Llamamos a esta lámina G_0 , y recibe el nombre de **red fuente**. La luz difractada a través de cada una de estas ranuras se comporta como una fuente puntual localmente coherente.

Esta luz se emite, llegando al beamsplitter, donde se genera el interferograma. No obstante los interferogramas Lau no operan bajo aproximación de onda plana debido a la presencia de la red fuente. Es por ello que ocurre una cierta magnificación de la alfombra, adoptando una

¹Siglas para European X-ray Free Electron Laser.

forma trapezoidal, en vez de rectangular. No obstante, las alfombras generadas por distintas aberturas de la red fuente no guardan ninguna relación de fase en particular, por lo que no interferirán en ellas: la intensidad del interferograma es la suma de cada interferograma individual. No hay efectos de interferencia. Es por ello que las restricciones sobre el diseño del interferómetro impuestas en un montaje Lau son puramente geométricas, a fin de que todos los maximos de cada alfombra se sumen en el mismo punto: el analizador y el beamsplitter deberán cumplir los siguientes requisitos [12]:

$$p'_1 = p_1 \cdot \frac{d_{G_0-obj}}{d_{G_0-G_1}} \quad (6.3)$$

$$p'_2 = p_2 \cdot \frac{d_{G_0-obj}}{D + d_{G_0-G_1}} \quad (6.4)$$

Donde p_1 y p_2 son las nuevas periodicidades del beamsplitter y el analizador necesarias para un montaje Lau y p'_1 y p'_2 son las periodicidades en un montaje sin efecto Lau. D es la distancia entre el beamsplitter y el analizador. Es de destacar que cuando $d_{G_0-obj} \gg 1$, los requisitos sobre las periodicidades con y sin efecto Lau coinciden. Esto se debe a que la onda emergente de cada una de las ranuras pasa a ser más parecida a un frente de onda plano, para el que no hay magnificación de la alfombra.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado una técnica de adquisición de imágenes conforme al índice de refracción de los materiales que atraviesan. Para ello nos hemos centrado en la teoría de la función de transferencia óptica de la difracción de Fresnel, que permite reducir significativamente el coste computacional, así como algunos fenómenos asociados al cálculo numérico de integrales. Se han elaborado una serie de scripts en Matlab que pretenden ilustrar distintas partes del proceso de estudio:

Primero, y con el objetivo de validar nuestro enfoque, se ha simulado la difracción de Fresnel por una abertura mediante su formulación integral y mediante la función de transferencia óptica del sistema, comparándose los resultados. Esta comparativa muestra que la segunda es una herramienta mucho más potente, ya que evita problemas de aliasing, permite mayor flexibilidad en los parámetros de la simulación sin comprometer la complejidad computacional.

Verificada la validez del método, se ha empleado para observar experimentalmente el efecto Talbot, y la importancia de los distintos parámetros regulables en un experimento en la obtención de interferogramas. De igual manera, se ha ilustrado la modificación de los interferogramas al introducir un gradiente de fase local a la onda incidente, asentando las bases del formalismo que describe la reconstrucción del frente de onda en tratamientos más complejos. Dichos interferogramas han sido después simulados a distancias fijas, a fin de encontrar un punto de máximo contraste que permita una extracción de datos lo más fiable posible.

Una vez hemos encontrado las condiciones óptimas se ha procedido a la simulación de un experimento real. Mediante las únicas suposiciones de haz plano y una red de difracción cuadrada, se han obtenido y tratado una serie de imágenes: La imagen de absorción, el dark-field, y la imagen de fase diferencial. Para el tratamiento de las mismas, se ha recurrido al análisis de Fourier, que nos ha permitido separar sus componentes periódica y no periódica así como dotar a cada una de ellas de significado físico.

Por último y desde una perspectiva más bibliográfica, se ha explicado la metodología habitual de este tipo de experimentos: Las técnicas más frecuentes que se emplean, con sus ventajas e inconvenientes así como las principales dificultades experimentales en interferometría Talbot.

Bibliografía

- [1] Joan Rae J. van Asperen de Boer et al. «Algunas cuestiones técnicas del «Descendimiento de la Cruz» de Roger van der Weyden». En: *Boletín del Museo del Prado* 4 (1983), pág. 39.
- [2] *El Museo Nacional del Prado descubre algunas de sus obras a través de los rayos X*. <https://www.museodelprado.es/actualidad/noticia/el-museo-nacional-del-prado-descubre-algunas-de/60c1e0dc-04ef-7737-0a18-dc81e420cb43>. Último acceso: 12-07-2025.
- [3] H.F. Talbot. «LXXVI. Facts relating to optical science. No. IV». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9.56 (1836), págs. 401-407. DOI: [10.1080/14786443608649032](https://doi.org/10.1080/14786443608649032).
- [4] Lord Rayleigh. «XXV. On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 11.67 (1881), págs. 196-205. DOI: [10.1080/14786448108626995](https://doi.org/10.1080/14786448108626995).
- [5] William B. Case et al. «Realization of optical carpets in the Talbot and Talbot-Lau configurations». En: *Opt. Express* 17.23 (2009), págs. 20966-20974. DOI: [10.1364/OE.17.020966](https://doi.org/10.1364/OE.17.020966).
- [6] M.V. Berry y S. Klein. «Integer, fractional and fractal Talbot effects». En: *Journal of Modern Optics* 43 (1996), págs. 2139-2164. DOI: [10.1080/09500349608232876](https://doi.org/10.1080/09500349608232876).
- [7] Harun H. Solak, Christian Dais y Francis Clube. «Displacement Talbot lithography: a new method for high-resolution patterning of large areas». En: *Opt. Express* 19.11 (mayo de 2011), págs. 10686-10691. DOI: [10.1364/OE.19.010686](https://doi.org/10.1364/OE.19.010686). URL: <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-19-11-10686>.
- [8] Maria Seifert et al. «Improved Reconstruction Technique for Moiré Imaging Using an X-Ray Phase-Contrast Talbot-Lau Interferometer». En: *Journal of Imaging* 4.5 (2018). ISSN: 2313-433X. DOI: [10.3390/jimaging4050062](https://doi.org/10.3390/jimaging4050062). URL: <https://www.mdpi.com/2313-433X/4/5/62>.
- [9] A.C. Thompson. *X-ray Data Booklet*. Lawrence Berkeley National Laboratory, University of California, 2001. URL: <https://xdb.lbl.gov>.
- [10] Dennis C. Ghiglia y Louis A. Romero. «Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods». En: *J. Opt. Soc. Am. A* 11.1 (1994), págs. 107-117. DOI: [10.1364/JOSAA.11.000107](https://doi.org/10.1364/JOSAA.11.000107). URL: <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-11-1-107>.

- [11] G. Pérez-Callejo et al. «Phase imaging of irradiated foils at the OMEGA EP facility using phase-stepping X-ray Talbot–Lau deflectometry». En: *High Power Laser Science and Engineering* 11 (2023), e49. DOI: [10.1017/hpl.2023.44](https://doi.org/10.1017/hpl.2023.44).
- [12] Gabriel Pérez-Callejo et al. «TIA: A forward model and analyzer for Talbot interferometry experiments of dense plasmas». En: *Physics of Plasmas* 29 (abr. de 2022), pág. 043901. DOI: [10.1063/5.0085822](https://doi.org/10.1063/5.0085822).
- [13] G. Margaritondo y Primož Rebernik Ribic. «A simplified description of X-ray free-electron lasers». En: *Journal of Synchrotron Radiation* 18 (2011), págs. 101-108. DOI: [10.1107/S090904951004896X](https://doi.org/10.1107/S090904951004896X).

Apéndice A

Scripts empleados

A lo largo de este apéndice se recogen todos los scripts empleados para la realización de las distintas simulaciones del trabajo.

A.1. Simulación mediante fórmula integral de Fresnel simplificada

```
clear
clc

%|Constantes físicas:|
lgo=550e-9;      % Longitud de onda
k=2*pi/lgo;      % Número de onda
p=2.e-4 ;        % Periodicidad del beamsplitter
tb1=2*p^2/lgo;   % Distancia de Talbot
n=50;            % Número de rendijas
esp=100;         %Espaciado entre las rendijas

%|Layout del problema:|

xprim=zeros(1,n);      % Variable donde guardo la posición de cada uno
                        % de los n emisores puntuales
x=linspace(0,n*p,(esp*n));
z=linspace(0,tb1,1000); % Declaro los ejes: x para el eje de la rendija,
                        % z para la dirección de propagación.
grid=zeros(1,length(x)); % Inicializo a cero el valor del campo en el
                        % beamsplitter
```

```

%Definimos la función rendija y ubicamos los emisores puntuales
j=1;
for i=1:length(x)
    if mod(i-1,esp)==0
        grid(i)=1;
        xprim(j)=x(i);
        j=j+1;
    end
end

%|"Integral" de Fresnel (más bien suma)|

%Inicializamos el valor del campo electrico a 0

E=zeros(length(z), length(x));

%Definimos xnew, donde vamos a meter (x-x')
xnew=zeros(1,length(x));

for j=1:n

    % Guardamos en xnew el vector x, menos el valor del j-ésimo emisor
    xnew=x-xprim(j);

    % Escribimos los distintos términos que aparecen en la suma de Fresnel

    t1=(exp(1i*k*z'))/(1i*lgo);
    t2=exp((1i*k)./(2*z')*(xnew).^2);
    t2(1,:)=zeros(1,length(x));
    t2(1,grid(esp*(j-1)+1))=1;

    % Calculamos la propagación del campo emergente por la rendija en xnew
    % y lo guardamos en la variable intermedia Emid

    Emid=t1.*t2;

    % Calculamos el campo neto aplicando progresivamente el principio
    % de superposición sobre el campo de cada rendija

    E=E+Emid;
end

% Iterando al número de redijas obtenemos el campo eléctrico total.

E(1,:)=grid;

```

```

Ef=abs(E).^2;          % Nos quedamos el módulo
Ef=Ef./max(Ef)';      % Normalizamos

```

```

imagesc(x/p,z/tb1,Ef);
colormap gray;
title('Alfombra de Talbot puntual');
xlabel('x/p');
ylabel('Z/Z_T');

```

A.2. Simulación mediante función de transferencia

```

clear
clc

%|Constantes físicas:|
lgo=550e-9;          % Longitud de onda
k=2*pi/lgo;          % Número de onda
p=1.7e-4;            % Periodicidad del beamsplitter
tb1=2*(p^2)/lgo;     % Distancia de Talbot
n=10;                % Número de rendijas
esp=100;             % Espaciado entre rendijas
duty=0.5;            % Factor de apertura
phshift=pi/2;        % Desfase de la red
                    % (valores imaginarios altos para red opaca)
%|Layout del problema:|

x=linspace(0,n*p,(esp*(n))); % declaro los ejes. x para el eje de la rendija,
z=linspace(0,tb1,10000);    % z para la dirección de propagación.

fmax=length(x)/max(x);
fmin=1/max(x);

fx=linspace(-fmax/2,fmax/2,length(x)); %Espacio recíproco del eje x

grid=zeros(1,length (x));

```

```

%Definimos la función rendija
for i=1:length(x)
    if mod(i-1,esp)==0
        grid(i:i+(esp*duty))=1;
    end
end

end

grid(grid==0)=exp(1i*phshift);

%|Convolución de Fresnel|

%Empecemos por la función de transferencia:

transfer=exp(1i*k*z'*(1-((lgo^2/2)*fx.^2)));
Fgrid=fftshift(fft(grid));
%Fgrid=(fft(grid));
%Campo electrico transformado
FE=Fgrid.*transfer;

%Deshago la transformada
E=sqrt(2*pi)*(ifft(FE,[],2));

%Nos quedamos con el módulo
Ef=(abs(E).^2);

%Normalizamos
%Ef=Ef./(max(Ef,[],2));
Ef=Ef./max(Ef)';
%figure;
%plot(x,Ef(length(z)/2,:));

imagesc(x/p,z/tb1,Ef);
colormap gray;
%axis image;
title('Alfombra de Talbot');
xlabel('x/p');
ylabel('Z/Z_T');

```

A.3. Simulación de interferograma a z variable

```
clear
clc

%|Constantes físicas:|
lgo=550e-9;           % Longitud de onda
k=2*pi/lgo;           % Número de onda

%|Variables de x|
px=1.7e-4;             % Periodicidad de la red
tb1x=2*(px^2)/lgo;     % Distancia de Talbot
nx=100;                % Número de rendijas
espx=30;               % Espaciado entre rendijas
xduty=0.5;             % Factor de apertura
xphshift=pi/2;         % Fase de la red
                      % (valores imaginarios altos para red opaca)

% Definimos el eje y de manera análoga para
% potencialmente adaptar el código a montajes Moiré

%|Variables de y|
py=px;                 % Periodicidad de la red
ny=nx;                 % número de rendijas
espy=espx;             % Espaciado entre rendijas

% Como trabajamos con un detector situado a una distancia fija,
% fijamos el valor de z en nuestra simulación

z=tb1x/4;

%|Layout del problema:|

x=linspace(0,nx*px,(espx*(nx)));
y=linspace(0,ny*py,(espy*(ny)));
% Declaro los ejes en el plano de la rejilla.

xfmax=length(x)/max(x); % Espacio recíproco del eje x
xfmin=1/max(x);
fx=linspace(-xfmax/2,xfmax/2,length(x));
```

```

yfmax=length(y)/max(y); % Espacio recíproco del eje x
yfmin=1/max(y);
fy=linspace(-yfmax/2,yfmax/2,length(y));

%Definimos la función rendija (eje x)
gridx=zeros(1,length(x));
grid=zeros(length(y),length(x));

% Calculamos la función rendija total

for i=1:length(x)
    if mod(i-1,espx)==0
        grid(:,i:i+(espx*xduty))=1;
    end
end

    grid(grid==0)=exp(1i*xphshift);

%|Convolución de Fresnel|

% Empecemos por la función de transferencia.
% Para ello defino matriz de las frecuencias espaciales.

ftot=(fy.^2)'+(fx.^2);

transfer=exp(1i*k*z'.*(1-((lgo^2/2)*ftot)));

Fgrid=fftshift(fft2(grid));

%Campo electrico transformado
FE=Fgrid.*transfer;

%Deshago la transformada
E=sqrt(2*pi)*(ifft2(FE));

%nos quedamos con el módulo
Ef=(abs(E).^2);

```

```
figure
imagesc(x/max(x),y/max(y),Ef);
colormap gray;
title('Interferograma');
xlabel('x/lx');
ylabel('y/ly');
```

```
figure
plot(x/max(x),Ef(1,:))
xlabel('x/lx');
ylabel('I (a.u)');
```

A.4. Estudio de la alfombra con un gradiente de fase local. Perfil de intensidades en $z_T/4$

```
clear
clc

%|Constantes físicas:|
lgo=550e-9;           % Longitud de onda
k=2*pi/lgo;           % Número de onda
p=1.7e-4;             % Periodicidad del beamsplitter
tb1=2*(p^2)/lgo;      % Distancia de Talbot
n=10;                 % Número de rendijas
esp=100;              % Espaciado entre rendijas
duty=0.5;             % Factor de apertura
phshift=pi/2;         % Fase de la red
                    % (valores imaginarios altos para red opac)
%|Layout del problema:|

x=linspace(0,n*p,(esp*(n)));
z=linspace(0,tb1,10000);           % declaro los ejes. x para el eje de la rendija,
                                   % z para la dirección de propagación.

fmax=length(x)/max(x);
fmin=1/max(x);

fx=linspace(-fmax/2,fmax/2,length(x)); % Espacio recíproco del eje x

grid=zeros(1,length (x));
```

```

%Definimos la función rendija
for i=1:length(x)
    if mod(i-1,esp)==0
        grid(i:i+(esp*duty))=1;
    end
end

end

grid(grid==0)=exp(1i*phshift);

%Definimos el gradiente de fase entre los puntos afectados
grad=0.001;

% Rellenamos 1/4 del periodo con gradiente positivo
for i=600:625
    grid(i)=grid(i)*exp(+1i*grad*i);
end
% Rellenamos 1/4 del periodo con gradiente negativo (sin discontinuidad de fase)

for i=625:650
    grid(i)=grid(i)*exp(1i*625*grad)*exp(1i*+grad*i);
end

%|Convolución de Fresnel|

%Empecemos por la función de transferencia:

transfer=exp(1i*k*z'*(1-((lgo^2/2)*fx.^2)));
Fgrid=fftshift(fft(grid));
%Fgrid=(fft(grid));
%Campo electrico transformado
FE=Fgrid.*transfer;

%Deshago la transformada
E=sqrt(2*pi)*(ifft(FE,[],2));

%Nos quedamos con el módulo
Ef=(abs(E).^2);

Ef=Ef./max(Ef')';

```

```

imagesc(x/p,z/tb1,Ef);
colormap gray;
title('Alfombra de Talbot modificada');
xlabel('x/p');
ylabel('Z/Z_T');

figure
plot(x/max(x),Ef(2500,:));
xlabel('x/lx');
ylabel('I (a.u)');

```

A.5. Simulación de experimento de interferometría

```

close("all")
clear
clc

```

```

function phi = solvePoisson(rho)
    dctRho = dct2(rho);
    [N, M] = size(rho);
    [I, J] = meshgrid([0:M-1],0:N-1);
    dctPhi = dctRho ./ 2 ./ (cos(pi*I/M) + cos(pi*J/N) -2);
    dctPhi(1,1) = 0;
    phi = idct2(dctPhi);
end

```

```

function phi = phase_unwrap_direct(psi)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Unwrapping phase based on Ghiglia and Romero (1994) based on weighted
%and unweighted least-square method
% URL: https://doi.org/10.1364/JOSA.11.000107
% Inputs:
% * psi: wrapped phase from -pi to pi
% Output:
% * phi: unwrapped phase from the weighted (or unweighted) least-square
%phase unwrapping
% Author: Muhammad F. Kasim (University of Oxford, 2016)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% get the wrapped differences of the wrapped values
dx = [zeros([size(psi,1),1]), wrapToPi(diff(psi, 1, 2)), zeros([size(psi,1),1])];
dy = [zeros([1,size(psi,2)]); wrapToPi(diff(psi, 1, 1)); zeros([1,size(psi,2)])];
rho = diff(dx, 1, 2) + diff(dy, 1, 1);

% get the result by solving the poisson equation
phi = solvePoisson(rho);
end

%|Constantes físicas:|
lgo=1.5437e-10;           % Rayos X de la línea k-alfa del cobre
k=2*pi/lgo;              % Numero de onda

% También hemos de definir el indice de refracción y el radio de la esfera
delta=1-(4e-6);
r=400;
% Por último dejamos como variable el radio del filtro gaussiano y la
% tolerancia en la selección de picos
rfilt=3;
tol=0.5;

%|Variables de x|
px=5e-5;                 % Periodicidad de la red
tb1x=2*(px^2)/lgo;        % 1ª distancia de Talbot
nx=50;                   % número de rendijas
espx=30;                 % Espaciado entre rendijas
xduty=0.5;
xphshift=pi/2;

%|Variables de y|
py=px;                   % Periodicidad de la red
ny=nx;                   % número de rendijas
espy=espx;               % Espaciado entre rendijas

% Como trabajamos con un detector situado a una distancia fija, fijamos el
% valor de z a tb/4 para máximo contraste

z=0.25*tb1x;

% |Layout del problema:|

% Declaro los ejes en el plano de la rejilla:
x=linspace(0,nx*px,(espx*(nx)));

```

```

y=linspace(0,ny*py,(espy*(ny)));

% Espacio recíproco del eje x:
xfmax=length(x)/max(x);
xfmin=1/max(x);
fx=linspace(-xfmax/2,xfmax/2,length(x));

% Espacio recíproco del eje y:
yfmax=length(y)/max(y);
yfmin=1/max(y);
fy=linspace(-yfmax/2,yfmax/2,length(y));

% Inicializamos la función rendija:
grid=zeros(length(y),length(x));

% La calculamos para simular una red de fase
for i=1:length(x)
    if mod(i-1,espx)==0
        grid(:,i:i+(espx*xduty))=1;
    end
end

grid(grid==0)=exp(1i*xphshift);

grid_empty=grid;

%% ---MODULACIÓN DEL FRENTE DE ONDA ---

% Ahora debemos dar cuenta del efecto de la refracción sobre el haz que
% llega a la red. Probamos el desfase de una geometría esférica.

% Definimos el radio de esa esfera y las coordenadas de su centro. Tomamos
% el centro del haz representado
cx=length(x)/2; cy=length(y)/2;

```

```

% La esfera tendrá cierta profundidad siendo los puntos más alejados los que
% menos desfase sufrirán. Considerando que tienen el grosor mínimo entre
% puntos de los ejes, podemos calcular la diferencia de camino óptico y
% asignarle un desfase
phase_min=(delta-1)*x(2)*2*pi/(lgo);

% Calculamos la esfera. Como vamos a hacerlo mediante bucles, lo mejor será
% acotar el calculo a una región razonable: Un cuadrado de lado 2r.

for i=cx-r:cx+r
    for j=cy-r:cy+r
        rcsq=(j-cy)^2+(i-cx)^2;
        if rcsq<=r^2
            grid(j,i)=grid(j,i)*exp(1i*(sqrt(r^2-rcsq))*2*phase_min);
        end
    end
end

%% ---PROPAGADOR DE FRESNEL---

% Empecemos por la función de transferencia. Para ello debo definir la
% matriz de las frecuencias espaciales.

ftot=(fy.^2)+(fx.^2);
transfer=exp(1i*k*z'.*(1-((lgo^2/2)*ftot)));

Fgrid=fftshift(fft2(grid));
Fgrid_empty=fftshift(fft2(grid_empty));

%Campo electrico transformado
FE=Fgrid.*transfer;
FE_empty=Fgrid_empty.*transfer;

%Deshago la transformada
E=sqrt(2*pi)*(ifft2(FE));
E_empty=sqrt(2*pi)*(ifft2(FE_empty));
%nos quedamos con el módulo
Ef=(abs(E).^2);
Ef_empty=(abs(E_empty).^2);

```

```

Ef=imgaussfilt(Ef,rfilt);
Ef_empty=imgaussfilt(Ef_empty,5);

figure;
imagesc(x/max(x),y/max(y),Ef_empty);
colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Interferograma sin objeto');
xlabel('x/lx');
ylabel('y/ly');

figure;
imagesc(x/max(x),y/max(y),Ef);
colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Interferograma con objeto');
xlabel('x/lx');
ylabel('y/ly');

%% --- ANÁLISIS ESPECTRAL DEL PATRÓN DE DIFRACCIÓN ---

ghost = fftshift(fft2(Ef));
ghost_empty = fftshift(fft2(Ef_empty));

ghostlog = log(abs(ghost));
ghostlog_empty = log(abs(ghost_empty));

%% --- VISUALIZACIÓN DEL ESPECTRO ---
figure;
imagesc(fx, fy, ghostlog);
%colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Espectro logarítmico con objeto');
xlabel('fx (1/m)');
ylabel('fy (1/m)');

figure;
imagesc(fx, fy, ghostlog_empty);

```

```

%colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Espectro logarítmico sin objeto');
xlabel('fx (1/m)');
ylabel('fy (1/m)');

%% --- SELECCIÓN DE PICOS ---

rowmax=max(ghostlog,[],1);
rowmax_empty=max(ghostlog_empty,[],1);
% me quedo con el máximo valor en todas las filas de ghostlog

[a,b]=max(rowmax);
[a_empty,b_empty]=max(rowmax_empty);
% Busco el valor del máximo central (a) y me guardo su posición (b)

crop=ghostlog(b,:);
crop_empty=ghostlog_empty(b_empty,:);
% restrinjo el estudio a esa fila en ambos espectros

[TF,P]=islocalmax(crop);
[TF_empty,P_empty]=islocalmax(crop_empty);
% busco máximos en la fila central (TF) y me guardo sus pesos (P)

lilP=resize(P,(length(crop)/2)-2);
lilP_empty=resize(P_empty,(length(crop_empty)/2)-2);
% me quedo unicamente con la mitad de esa fila (por simetría)

[c,d]=max(lilP);
[c_empty,d_empty]=max(lilP_empty);
% Busco el maximo de los pesos que me he guardado (c) y lo ubico (d)

peakwidth=round(abs(d-b)*tol);
peakwidth_empty=round(abs(d_empty-b_empty)*tol);
% Defino el ancho del pico como la distancia entre el primer pico y
% el máximo central multiplicada por el parametro tol

% Inicializo cpeak, donde guardaré la contribución periódica
cpeak=zeros(length(x),length(x));
cpeak_empty=zeros(length(x),length(x));

% Recorro ambos espectros, guardando la información de los picos en cpeak

```

```

% según la borro de ghost y ghostlog (este ultimo solo se usa para imágenes)
for i=b-peakwidth:b+peakwidth
    for j=d-peakwidth:d+peakwidth
        rcsq=(j-d)^2+(i-b)^2;
        if rcsq<=peakwidth^2
            cpeak(i,j)=ghost(i,j);
            ghost(i,j)=0;
            ghost(i,j+2*round(abs(d-b)))=0;

            ghostlog(i,j)=0;
            ghostlog(i,j+2*round(abs(d-b)))=0;

        end
    end
end

for i=b_empty-peakwidth_empty:b_empty+peakwidth_empty
    for j=d_empty-peakwidth_empty:d_empty+peakwidth_empty
        rcsq_empty=(j-d_empty)^2+(i-b_empty)^2;
        if rcsq_empty<=peakwidth_empty^2
            cpeak_empty(i,j)=ghost_empty(i,j);
            ghost_empty(i,j)=0;
            ghost_empty(i,j+2*round(abs(d-b)))=0;

            ghostlog_empty(i,j)=0;
            ghostlog_empty(i,j+2*round(abs(d-b)))=0;

        end
    end
end

% Vuelvo al espacio real
cpeak=ifft2(ifftshift(cpeak));
cpeak_empty=ifft2(ifftshift(cpeak_empty));

% Divido los datos de imagen de referencia y con objeto,
% Para extraer el darkfield y la fase
cpeak_div=cpeak./cpeak_empty;
B_div=exp(real(log(cpeak_div)));
phi=imag(log(cpeak_div));

phasediff=phi;
% phasediff=phase_unwrap_direct(phi); % Descomentar para unwrappear
% phasediff=phasediff-phasediff(1,:); % Descomentar para unwrap calibrado

```

```

% PLOTTEO phi
figure;
imagesc(x/max(x), y/max(y), (phasediff));
%colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Fase de las franjas');
xlabel('x/lx (m)');
ylabel('y/ly (m)');

% ---CÁLCULO DE A ---

A=ifft2(ifftshift(ghost));
A_empty=ifft2(ifftshift(ghost_empty));
A=abs(A)./abs(A_empty);

% PLOTTEO A
figure;
imagesc(x/max(x), y/max(y), A);
colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Atenuación');
xlabel('x/lx (m)');
ylabel('y/ly (m)');

% PLOTTEO B
B=exp(real(log(cpeak)));
figure;
imagesc(x/max(x), y/max(y), abs(B));
colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Darkfield');
xlabel('x/lx (m)');
ylabel('y/ly (m)');

% PLOTTEO COMO HA QUEDADO EL GHOSTLOG (QUE ES MÁS FACIL DE VER QUE EL GHOST)
figure;
imagesc(x/max(x), y/max(y), log(abs(ghost)));
colormap gray;
axis image;

```

```

set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Ghostlog borrado');
xlabel('fx (1/m)');
ylabel('fy (1/m)');

figure;
imagesc(x/max(x), y/max(y), ghostlog_empty);
colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Ghostlog de prueba borrado');
xlabel('fx (1/m)');
ylabel('fy (1/m)');

figure;
imagesc(x/max(x), y/max(y), B_div./abs(A));
colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Visibilidad');
xlabel('x/lx (m)');
ylabel('y/ly (m)');

figure;
imagesc(x/max(x), y/max(y), imag(log(grid)));
%colormap gray;
axis image;
set(gca, 'YDir', 'normal');
title('Fase de la luz incidente');
xlabel('x/lx (m)');
ylabel('y/ly (m)');

```