



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO  
GRADO EN FÍSICA**

**Estructuras geométricas de la Termodinámica.**

Autor: Jaime Bajo Da Costa

Tutores: Manuel de León Rodríguez, José Manuel Izquierdo Rodríguez  
2025



*Dedicado a mi familia, que siempre me ha apoyado en mi carrera.*



## RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es presentar un formalismo geométrico que permita realizar un estudio global de diversos sistemas termodinámicos fuera del equilibrio. Para ello se realizará una introducción a la geometría diferencial y se estudiará la aplicación de la misma a la mecánica, tanto a través del formalismo lagrangiano como del hamiltoniano. Se generalizará este enfoque, partiendo de los postulados de Stückelberg, para describir la termodinámica del no equilibrio.

## ABSTRACT

The aim of this thesis is to present a geometric formalism allowing the study of non-equilibrium thermodynamics. An introduction of differential geometry will be carried out and its application to mechanics explored both via the Lagrangian and the Hamiltonian formalism. This approach will be generalized, following Stückelberg's postulates, to describe non-equilibrium thermodynamics.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Preliminares matemáticos</b>	<b>9</b>
2.1. Variedades diferenciables . . . . .	9
2.2. Vectores tangentes, aplicación diferencial y subvariedades . . . . .	10
2.3. Fibrados tangente y cotangente . . . . .	13
2.4. Formas diferenciales . . . . .	15
2.5. Variedades simplécticas . . . . .	18
2.5.1. Construcción de una estructura simpléctica en $TM$ . . . . .	20
2.6. Variedades casi cosimplécticas: ejemplos y extensiones . . . . .	22
<b>3. Mecánica geométrica</b>	<b>24</b>
3.1. Mecánica simpléctica . . . . .	24
3.1.1. Transformación de Legendre . . . . .	28
3.2. Mecánica cosimpléctica . . . . .	29
3.3. Mecánica de contacto . . . . .	31
<b>4. Termodinámica del no equilibrio</b>	<b>34</b>
4.1. Sistemas simples adiabáticamente cerrados . . . . .	35
4.2. Sistemas compuesto adiabáticamente cerrado sin transferencia interna de masa . . . . .	38
<b>5. Descripción geométrica de la Termodinámica del no equilibrio</b>	<b>39</b>
5.1. Sistemas simples adiabáticamente cerrados . . . . .	40
5.2. Sistemas compuestos adiabáticamente cerrados . . . . .	42
5.3. Sistemas abiertos . . . . .	44
<b>6. Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Referencias</b>	<b>46</b>



## 1. Introducción

Los formalismos lagrangiano y hamiltoniano de la mecánica fueron introducidos por Lagrange, Hamilton, Laplace, Euler y Jacobi en los siglos XVIII y XIX. No obstante, fue Poincaré, en el siglo pasado el que introdujo la formulación moderna de la geometría diferencial y la aplicó a la mecánica, permitiendo estudiar los problemas de forma global, lo que resultó de gran utilidad para entender la estabilidad de ciertos sistemas [1]. Este enfoque permitió utilizar métodos topológicos para estudiar la mecánica en el espacio de las fases, en lugar de disponer solo de los métodos analíticos. Los primeros desarrollos de esta teoría fueron realizados por Poincaré, Kolmogorov, Arnold y Moser, entre otros, quienes consiguieron probar la existencia de soluciones periódicas del problema de los tres cuerpos sin necesidad de encontrarlas explícitamente.

Comenzaremos el trabajo realizando una introducción a las técnicas de la geometría diferencial necesarias para entender el formalismo geométrico de la mecánica. Para ello serán de especial relevancia los fibrados tangente y cotangente. La mecánica geométrica necesita dotar a las variedades diferenciales de estructura adicional, dando lugar a las variedades simplécticas. Para poder estudiar sistemas mecánicos de complejidad creciente introduciremos dos generalizaciones de la estructura simpléctica, las variedades cosimplécticas y las variedades de contacto.

El objetivo último del trabajo es presentar el formalismo geométrico desarrollado por de León y Bajo [16] para estudiar la termodinámica del no equilibrio. Para ello presentaremos los postulados de la termodinámica introducidos por Stückelberg [25]. A partir del primero de ellos deduciremos las ecuaciones que gobiernan los sistemas termodinámicos cerrados. El segundo postulado nos permitirá restringir la forma funcional de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre los sistemas termodinámicos, así como la expresión de la potencia introducida al sistema en forma de calor. Además, el principio de equilibrio nos llevará a establecer propiedades sobre los valores de algunas funciones de estado de los sistemas termodinámicos en sus estados de equilibrio.

En la última sección presentaremos dicho formalismo geométrico, basado a su vez en las ecuaciones establecidas a partir de principios variacionales por Gay-Balmaz y Yoshimura [7]. Para ello estudiaremos sistemas termodinámicos de complejidad creciente, comenzando con un sistema adiabáticamente cerrado que puede describirse por una única variable no mecánica (sistema simple), siguiendo por un sistema compuesto también adiabáticamente cerrado y finalizando con la descripción de un sistema abierto. Además, comprobaremos que se puede llevar a cabo el estudio tanto desde el punto de vista hamiltoniano como desde el lagrangiano. La transformación de Lagrange nos permitirá establecer la equivalencia entre ambos enfoques.

## 2. Preliminares matemáticos

En esta primera sección daremos un resumen sobre los conceptos y resultados básicos relativos a la geometría diferencial, necesarios para realizar un estudio formal de la mecánica y la termodinámica desde el punto de vista geométrico. Para un estudio detallado de la geometría diferencial nos referimos a las referencias [15, 27].

En todo el trabajo se asumirá el convenio de sumación de índices repetidos de Einstein.

### 2.1. Variedades diferenciables

Comenzamos estudiando el concepto de variedad diferenciable, pues las coordenadas generalizadas que caracterizan el estado de los sistemas físicos representan puntos de ciertas variedades diferenciables.

**Definición 2.1.1.** Dado un espacio topológico  $S$ , una carta o sistema coordenado en  $S$  es un homeomorfismo  $\xi : U \subset S \rightarrow \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$  donde  $U$  es un abierto de  $S$  y  $\xi(U)$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Siendo:

$$\xi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)),$$

las funciones  $x^1, \dots, x^n$  se denominan funciones coordenadas o coordenadas locales de  $\xi$  y a  $n$  se le denomina dimensión de  $\xi$ .

Se dice que dos cartas  $\xi, \eta$  en  $S$  se cortan suavemente si las funciones  $\xi \circ \eta^{-1}$  y  $\eta \circ \xi^{-1}$  son diferenciables, es decir, de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en sus respectivos abiertos de definición.

**Definición 2.1.2.** Un atlas  $n$ -dimensional en un espacio topológico  $S$  es un conjunto de cartas de dimensión  $n$  tales que:

- Cada punto de  $S$  está contenido en el dominio de alguna carta.
- Todo par de cartas en  $S$  se cortan suavemente.

Un atlas se dice completo si contiene a cada carta en  $S$  que corta suavemente a toda carta del atlas.

El siguiente resultado nos asegura que los atlas completos existen y que no es necesario preocuparnos de, si al definir una variedad mediante un atlas concreto, este es o no completo.

**Teorema 2.1.3.** Todo atlas en  $S$  está contenido en un único atlas completo.

**Definición 2.1.4.** Una variedad diferenciable es un espacio de Hausdorff,  $M$  con un atlas completo que cuenta con una base de abiertos numerable. Se define la dimensión de la variedad como la de su atlas.

La condición de que el espacio  $M$  posea una base de abiertos numerable, así como el hecho de que sea de Hausdorff, son propiedades matemáticas necesarias para alguna de las demostraciones de los resultados utilizados en el resto del trabajo. No obstante, la primera de las condiciones no es estrictamente necesaria para definir una variedad. Algunos autores como [21] deciden no incluirla en la definición y hacen un tratamiento especial de aquellas variedades que sí la cumplen.

Si bien la definición rigurosa del concepto de variedad diferenciable implica varios tecnicismos matemáticos, intuitivamente éstas son un conjunto que localmente se parece a un espacio euclídeo. Por ello, vía un atlas, se pueden transportar conceptos del cálculo diferencial e integral a estos espacios más generales. Además, según el teorema de Embebimiento de Whitney, siempre se puede considerar que la variedad se encuentra dentro de  $\mathbb{R}^N$  para  $N$  suficientemente grande.

**Ejemplo 2.1.5.** 1. El primer ejemplo de variedad diferenciable es el propio espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  en el cual se desarrolla la mecánica newtoniana.

2. Un ejemplo ya no trivial es el de las curvas y superficies suaves contenidas en  $\mathbb{R}^3$  (sin bordes).

Extendemos ahora el concepto de funciones diferenciables que conocemos para las aplicaciones de  $\mathbb{R}^n$  a aplicaciones en variedades diferenciables.

**Definición 2.1.6.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida sobre una variedad diferenciable  $M$ . Se dice que  $f$  es diferenciable si para todo sistema coordenado  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \circ \xi^{-1}$  es diferenciable, en el sentido habitual. Denotaremos por  $\mathcal{F}(M)$  al conjunto de todas las funciones diferenciables sobre una variedad.

**Definición 2.1.7.** Sean  $M, N$  variedades diferenciables, no necesariamente de la misma dimensión. Una aplicación  $\phi : M \rightarrow N$  se dirá diferenciable si para todo sistema coordenado  $\xi$  de  $M$  y  $\eta$  de  $N$  se tiene que  $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$  es diferenciable en el sentido habitual.

Se dirá que  $\phi$  es un difeomorfismo si tiene inversa y también es diferenciable y, en tal caso, se dirá que  $M$  y  $N$  son difeomorfas. Se dirá que  $\phi$  es un difeomorfismo local si, alrededor de cada punto, existe un abierto tal que al restringir  $\phi$  a dicho abierto, es un difeomorfismo.

*Observación 2.1.8.* Estas definiciones, cuando se trabaja con  $\mathbb{R}^n$  con su estructura de variedad diferenciable habitual, se reducen a las de funciones y aplicaciones diferenciables habituales.

## 2.2. Vectores tangentes, aplicación diferencial y subvariedades

Seguiremos la definición de vectores tangentes presentada en [20]. Para introducir el concepto de vector tangente, consideraremos el caso de  $\mathbb{R}^3$ . Podemos pensar en  $\mathbb{R}^3$  como el conjunto de puntos dados por tres coordenadas, pero también podemos considerarlo como un espacio vectorial compuesto por vectores de tres componentes. Estos vectores los podemos colocar en cada punto de  $\mathbb{R}^3$ , de manera que en cada uno de estos puntos tendremos un espacio vectorial.

De manera análoga, con los vectores tangentes conseguiremos definir un espacio vectorial en cada punto de la variedad diferenciable. Estos serán además, de manera natural, una generalización del concepto de derivada direccional que conocemos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.2.1.** Una curva en  $M$  es una aplicación diferenciable,  $\sigma$ , de un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  en  $M$ . Se dice que  $\sigma$  es una curva en un punto  $p \in M$  si  $0 \in I$  y  $\sigma(0) = p$ . Decimos que dos curvas en  $p$ ,  $\sigma$  y  $\tau$ , son tangentes si existe un sistema coordenado  $(\xi, U)$ ,  $p \in U$ , con funciones coordenadas  $x^i$  tal que:

$$\left( \frac{d(x^i \circ \sigma)}{dt} \right)_{t=0} = \left( \frac{d(x^i \circ \tau)}{dt} \right)_{t=0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Definición 2.2.2.** El conjunto de todas las curvas en  $p \in M$  tangentes en  $p$  a una curva  $\sigma$  en  $p$  dada (la clase de equivalencia), se denomina vector tangente a  $\sigma$  en  $p$ , y se denota  $\dot{\sigma}(0)$ . El conjunto de todos los vectores tangentes a  $p$  se denomina espacio tangente a  $p$ , y se denota  $T_p(M)$ .

En verdad, siendo  $(\xi, U)$  un sistema coordenado entorno a  $p \in M$ , podemos identificar el vector tangente a  $\sigma$  en  $p$  con la  $n$ -úpla:

$$\left( \left( \frac{d(x^1 \circ \sigma)}{dt} \right)_0, \dots, \left( \frac{d(x^n \circ \sigma)}{dt} \right)_0 \right), \quad (1)$$

la cual no depende del representante  $\sigma$  de la clase de equivalencia tomado. De hecho, por medio de esta identificación, se dota al espacio tangente de estructura de espacio vectorial. Esta estructura no depende del sistema coordenado elegido. Así vemos que los vectores tangentes dan un sentido a la “velocidad” de las curvas.

**Definición 2.2.3.** Si  $\sigma : I \rightarrow M$  es una curva,  $t \in I$ , se define el vector tangente a  $\sigma$  en  $t$ , como  $\dot{\sigma}(t) = \dot{\tau}(0)$ , donde  $\tau(s) = \sigma(s+t)$ ,  $\forall t \in I$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $p \in M$  y sea  $(\xi, U)$  un sistema coordenado entorno a  $p$ . Denotamos por  $x^i$  a sus funciones coordenadas. Entonces podemos considerar las curvas  $\sigma^i(t) = \xi^{-1}(\xi(p) + te_i)$ , donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector coordenado de  $\mathbb{R}^n$ . Estas curvas son las que trazaría una partícula al aumentar su coordenada  $i$ -ésima cuando se expresa su posición usando el sistema coordenado  $\xi$ . Denotamos sus vectores tangente por:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \dot{\sigma}^i(0).$$

Estos forman una base de  $T_p(M)$ .

**Definición 2.2.5.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. Se define su aplicación diferencial en  $p \in M$ ,  $dF(p)$  o  $F_*$ , como la aplicación lineal  $dF(p) : T_p(M) \rightarrow T_{F(p)}(N)$  dada por:

$$dF(p)(\dot{\sigma}(0)) = \widehat{(F \circ \sigma)}(0).$$

*Observación 2.2.6.* Usando el teorema de la aplicación inversa se puede probar que una aplicación  $F$  entre variedades es un difeomorfismo local si y solo si su aplicación diferencial en cada punto de  $M$  es un isomorfismo lineal.

En particular, cuando consideremos funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  podemos considerar que los vectores tangentes actúan sobre  $f$  como:

$$\dot{\sigma}(0)(f) = df(p)(\dot{\sigma}(0)).$$

De forma que, si consideramos un sistema coordenado  $\xi$  con funciones coordenadas  $x^i$  y  $\dot{\sigma}(0) = \sigma^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ , entonces se tiene que, identificando  $T_{f(p)}\mathbb{R}$  con  $\mathbb{R}$  por medio del isomorfismo  $\frac{d}{dt} \mapsto 1$ :

$$\dot{\sigma}(0)(f) = \sigma^i \left( \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial x^i} \right)_{\xi(p)}.$$

Es decir, los vectores tangentes actúan sobre las funciones definidas sobre variedades de forma análoga a como lo harían las derivadas direccionales en  $\mathbb{R}^n$ . Se puede probar fácilmente que cumplen las siguientes propiedades que, de hecho, caracterizan a los vectores tangentes y permiten dar una definición alternativa de ellos (ver [15, 22]).

**Proposición 2.2.7.** Sean  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funciones definidas sobre una variedad y sea  $p \in M$ . Sean  $v \in T_p M$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces se cumple:

1.  $v(f + g) = v(f) + v(g)$ ,
2.  $v(\alpha f) = \alpha v(f)$ ,
3.  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ .

De manera análoga, la diferencial de una función entre variedades actuará de forma análoga a como lo hace la diferencial de una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ , como muestra en particular el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.8.** Sean  $F : M \rightarrow N$ ,  $G : N \rightarrow P$  dos aplicaciones diferenciables. Entonces  $G \circ F$  es diferenciable y se cumple que:

$$d(G \circ F)(p) = dG(F(p)) \circ dF(p), \quad \forall p \in M.$$

**Definición 2.2.9.** Un campo de vectores es una aplicación,  $X$ , que a cada punto  $p$  de  $M$  le asigna un vector tangente a  $M$  en  $p$ ,  $X(p)$ .

Dado un sistema coordenado  $(\xi, U)$  con coordenadas locales  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , podemos expresar en cada punto  $p \in U$  el vector tangente  $X(p)$  en la base del espacio tangente definida en el ejemplo previo. Así pues:

$$X(p) = X^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

De hecho, se cumple que  $X^i(p) = X(p)(x^i)$ . Si  $(\phi, V)$  es otro sistema coordenado con coordenadas locales  $y^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , entonces se tiene que:

$$X(p) = Y^j(p) \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p,$$

con:

$$Y^j(p) = X^i(p) \left( \frac{\partial(y^j \circ \xi^{-1})}{\partial x^i} \right)_{\xi(p)}.$$

**Definición 2.2.10.** Diremos que un campo de vectores  $X$  es diferenciable o  $C^\infty$  si, usando la notación precedente, las funciones  $X^i$  son diferenciables para todo sistema coordenado. De ahora en adelante entenderemos que todos los campos de vectores con los que trabajamos son diferenciables. El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre  $M$  se denominará  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Definición 2.2.11.** Sea  $X$  un campo de vectores en una variedad  $M$ . Se dice que una curva  $\sigma : I \rightarrow M$  es una curva integral de  $X$  si  $\forall t \in I$ , se cumple que  $\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$ , es decir, si la velocidad de la curva  $\sigma$  viene dada en cada punto por  $X$ .

Usando el teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales, se puede probar el siguiente resultado trabajando en un sistema coordenado.

**Teorema 2.2.12.** Dado  $X$  un campo de vectores en  $M$  y  $p_0 \in M$ , existen  $\varepsilon > 0$  y una única curva  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tales que  $\sigma$  es curva integral de  $X$  y  $\sigma(0) = p_0$ .

**Definición 2.2.13.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un grupo de transformaciones 1-paramétrico local de  $M$  es una aplicación:

$$\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M,$$

con  $U \subset M$  abierto, tal que:

1. Para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\phi_t : U \rightarrow \phi(t, U)$  dada por  $\phi_t(p) = \phi(t, p)$  es un difeomorfismo.
2. Si  $s, t, s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , entonces para todo  $p \in U$  se cumple que  $\phi_{s+t}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$ .

La siguiente proposición establece que, si consideramos un abierto de  $M$  suficientemente pequeño y lo evolucionamos siguiendo las curvas integrales de un campo de vectores  $X$ , entonces, para cada instante  $t$ , dicha evolución es un difeomorfismo.

**Proposición 2.2.14.** Sea  $X$  un campo de vectores en  $M$  y sea  $p_0 \in M$ . Entonces existen un entorno  $U$  de  $p_0$ ,  $\varepsilon > 0$  y un grupo de transformaciones 1-paramétrico local de  $M$ ,  $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$  (que denominaremos grupo 1-paramétrico de transformaciones local generado por  $X$ ) tales que para cada  $p \in U$   $X(p)$  es el vector tangente a la curva  $t \mapsto \phi(t, p)$  en  $t = 0$ . Además, en tal caso, las curvas  $t \mapsto \phi(t, p)$  son curvas integrales de  $X$ .

*Observación 2.2.15.* De hecho, si la variedad  $M$  es compacta, se puede probar fácilmente que dicho grupo 1-paramétrico de transformaciones puede definirse en  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$  para algún  $\varepsilon > 0$ .

El siguiente concepto será un análogo de lo que las superficies y curvas diferenciales en  $\mathbb{R}^3$  son al espacio total.

**Definición 2.2.16.** Una variedad diferenciable  $P$  es una subvariedad de  $M$  si:

- $P$  es un subespacio topológico de  $M$ .
- La aplicación inclusión,  $j : P \rightarrow M$  es diferenciable y para cada  $p \in P$ , su aplicación diferencial es inyectiva.

Esta última condición nos permite identificar el espacio tangente a  $P$  en cada punto con un subespacio vectorial de  $T_p(M)$  e ignorar la aplicación inclusión.

### 2.3. Fibrados tangente y cotangente

Pasamos a construir ahora dos variedades diferenciales a partir de una variedad diferenciable  $M$  dada, las cuales serán vitales en nuestro estudio posterior, pues representarán el espacio de configuración y velocidades y el espacio de las fases de un sistema cuyas coordenadas generalizadas están descritas por puntos de la variedad  $M$ . Estas estructuras serán casos particulares de una estructura geométrica más general: las variedades fibradas y, en particular, los fibrados vectoriales.

**Definición 2.3.1.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y consideremos el conjunto  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  junto con la proyección canónica,  $\tau_M : TM \rightarrow M$  dada por  $\tau_M(v) = p$ ,  $\forall v \in T_p M$ . Entonces la terna  $(TM, \tau_M, M)$  se denominará fibrado tangente de  $M$ . En ocasiones nos referiremos directamente a  $TM$  como el fibrado tangente de  $M$ .

Veamos cómo dotar al fibrado tangente a su vez de estructura de variedad diferenciable, dando un atlas de la misma. Para ello consideremos la notación de la definición anterior y sea  $(\phi, U)$  un sistema coordenado en  $M$  con coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n)$ . Definimos, siendo  $TU = \bigcup_{p \in U} T_p M$ :

$$\begin{aligned}\Phi : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow TU \\ (p, a) &\longmapsto a^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p,\end{aligned}$$

donde  $a = (a^1, \dots, a^n)$ .

Esta aplicación es claramente biyectiva lo que permite, usando el lema del pegado, dotar a  $TM$  de una topología, que es la única tal que  $\Phi$  es homeomorfismo.

Consideramos ahora la aplicación:

$$\begin{aligned}\Phi' : \phi(U) \times \mathbb{R}^n &\subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow TU \\ (x, a) &\longmapsto a^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\phi(x)}.\end{aligned}$$

Si  $(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$  son dos sistemas coordinados con coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n)$  e  $(y^1, \dots, y^n)$ , respectivamente, haciendo uso de la matriz de cambio de base en cada espacio tangente, si  $p \in U \cap V$  y  $v \in T_p M$  es tal que:

$$v = v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = w^j \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p,$$

entonces se cumple que:

$$w^j = v^i \left( \frac{\partial(y^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \right)_{\phi(p)}.$$

Con lo que, usando la notación anterior, la aplicación  $(\Psi')^{-1} \circ \Phi'$  es  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ , pues sus primeras  $n$  componentes serán las componentes de  $\psi^{-1} \circ \phi$ , mientras que las últimas  $n$  componentes son las dadas por  $w^j$ , de acuerdo con la expresión anterior. Todo esto nos permite comprobar que  $TM$  es una variedad diferenciable y que las aplicaciones  $\Phi^{-1} : TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$  (la inversa de las definidas anteriormente) son sistemas coordinados de las mismas. Estos sistemas coordinados se denominan inducidos y son con los que trabajaremos salvo que se indique lo contrario.

*Observación 2.3.2.* Es claro que un campo de vectores (diferenciable),  $X$ , sobre una variedad,  $M$ , no es sino una aplicación diferenciable  $X : M \rightarrow TM$ , cumpliendo que  $\tau_M \circ X = Id_M$ , es decir, una sección diferenciable de la proyección canónica.

Definimos a continuación una forma de extender las aplicaciones entre variedades diferenciables a sus fibrados tangentes.

**Definición 2.3.3.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. Definimos la aplicación  $TF : TM \rightarrow TN$  dada por:

$$TF(v) = dF(p)(v), \quad v \in T_p M.$$

Pasamos ahora a estudiar las 1-formas y el espacio cotangente. Para ello en primer lugar recordamos el concepto de espacio dual, propio del álgebra lineal.

**Definición 2.3.4.** Sea  $V$  un espacio vectorial real. Se define el espacio dual de  $V$ ,  $V^*$ , como el espacio vectorial de las aplicaciones lineales  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 2.3.5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $p \in M$ . Se define el espacio cotangente de  $M$  en  $p$ ,  $T_p^* M$  como el espacio dual de  $T_p M$ .

**Definición 2.3.6.** En las condiciones anteriores, una aplicación  $\eta$  tal que a cada  $p \in M$  le asigna un elemento  $\eta(p) \in T_p^* M$  se denomina una 1-forma.

Sea  $\eta$  una 1-forma sobre  $M$  y  $X$  un campo de vectores en  $M$ . Entonces  $\eta(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función. Si para todo campo de vectores diferenciable sobre  $M$ ,  $X$ , se cumple que  $\eta(X) \in \mathcal{F}(M)$ , entonces se dirá que  $\eta$  es una 1-forma diferenciable.

*Observación 2.3.7.* Sea  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Entonces la diferencial de  $f$  es una 1-forma  $df$  dada por  $df(v) = v(f)$ ,  $\forall v \in TM$ , la cual es diferenciable.

**Ejemplo 2.3.8.** En las condiciones anteriores consideremos un sistema coordenado  $(\xi, U)$  con coordenadas locales  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Consideremos las  $n$  1-formas  $dx^1, \dots, dx^n$ . En cada punto  $p \in U$  se tiene que estas son la base dual de la base considerada en la sección anterior en el espacio tangente pues:

$$dx^i \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \left( \frac{\partial(x^i \circ \xi^{-1})}{\partial x^j} \right)_p = \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)_p = \delta_{i,j},$$

siendo  $u_i$  la  $i$ -ésima proyección canónica de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ .

De hecho, se cumple que para toda 1-forma,  $\eta$ , se puede expresar:

$$\eta = \eta_i dx^i, \quad \eta_i = \eta \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Y en particular, sobreentendiendo la composición con  $\xi^{-1}$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Estudiamos ahora las propiedades básicas de la diferencial de una función, las cuales se deducen fácilmente de la definición y, en el caso de la última propiedad, trabajando localmente.

**Proposición 2.3.9.** La aplicación diferencial  $d$  cumple las siguientes propiedades:

- Es una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal.
- Cumple la regla del producto, es decir,  $d(fg) = gd(f) + fd(g)$ ,  $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ .
- Si  $f \in \mathcal{F}(M)$  y  $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , entonces  $d(h(f)) = h'(f)d(f)$ .

**Definición 2.3.10.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$  y  $\pi_M : TM \rightarrow M$  la proyección canónica, dada por  $\pi_M(\alpha) = p$  si  $\alpha \in T_p^* M$ . Entonces la terna  $(T^* M, \pi_M, M)$  se denomina fibrado cotangente de  $M$ . En ocasiones nos referiremos directamente a  $T^* M$  como fibrado cotangente de  $M$ .

Al igual que ocurre con el fibrado tangente, se puede dotar al fibrado cotangente de una estructura de variedad diferenciable natural inducida por la variedad base,  $M$ . Para ello consideremos  $(\phi, U)$  un sistema coordenado en  $M$  con coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n)$  y, siendo  $T^*U = \bigcup_{p \in U} T_p^*M$ , definimos la aplicación:

$$\begin{aligned}\Phi : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow T^*U \\ (p, a) &\longmapsto a_i dx^i(p)\end{aligned}$$

donde  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

Esta aplicación es claramente biyectiva lo que permite, usando el lema del pegado, dotar a  $T^*M$  de una topología, que es la única tal que  $\Phi$  es homeomorfismo.

Consideramos ahora la aplicación:

$$\begin{aligned}\Phi' : \phi(U) \times \mathbb{R}^n &\subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow T^*U \\ (x, a) &\longmapsto a_i dx^i(\phi(x))\end{aligned}$$

Razonando de manera análoga al caso del fibrado tangente, se comprueba que

$$\{((\Phi')^{-1}, T^*U) : (\phi, U) \text{ es sistema coordenado de } M\}$$

forman un atlas diferenciable sobre  $T^*M$ . A estos sistemas coordinados los denominaremos de nuevo inducidos.

## 2.4. Formas diferenciales

En la sección anterior hemos introducido las 1-formas diferenciales. En esta sección, generalizaremos este concepto para introducir las  $n$ -formas diferenciales y sus propiedades fundamentales. Un análisis más detallado de las formas diferenciales puede leerse en el capítulo 7 de [24].

Para estudiarlas, hemos de comenzar comentando algunos conceptos propios del álgebra lineal.

**Definición 2.4.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial  $n$ -dimensional sobre  $\mathbb{R}$ . Una aplicación  $T : \overbrace{V \times \cdots \times V}^k \longrightarrow \mathbb{R}$  se dice que es  $k$ -multilineal si es lineal en cada componente. Además, se dice que  $T$  es alternada si:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0, \quad \text{si } v_i = v_j, \quad i \neq j.$$

El conjunto de las aplicaciones  $k$ -multilineales alternadas se denotará  $\Omega^k(V)$ .

**Definición 2.4.2.** Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $v_1, \dots, v_k \in V$  y  $\sigma$  una permutación de  $\{1, \dots, k\}$ , es decir,  $\sigma \in S_k$ . Entonces se define:

$$\sigma(v_1, \dots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

**Definición 2.4.3.** Sea  $f : V \longrightarrow W$  una aplicación lineal. Entonces se define  $f^* : \Omega^k(W) \longrightarrow \Omega^k(V)$  como:

$$f^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k)),$$

para todos  $v_1, \dots, v_k \in V$ . Esta es de nuevo una aplicación lineal.

**Definición 2.4.4.** Sea  $T$  una aplicación  $k$ -multilineal sobre  $V$ . Se define el alternado de  $T$  por:

$$Alt(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T \circ \sigma,$$

donde  $\text{sgn}(\sigma)$  es la signatura de la permutación, 1 si es par y  $-1$  si es impar.

A partir de la definición se puede comprobar que para toda aplicación  $k$ -multilineal,  $T$ , se cumple que  $Alt(T) \in \Omega^k(V)$  y que si  $T \in \Omega^k(V)$  entonces  $Alt(T) = T$ .

**Definición 2.4.5.** Sean  $\omega \in \Omega^k(V)$  y  $\eta \in \Omega^l(V)$ . Se define el producto vectorial de  $\omega$  y  $\eta$  como:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta),$$

donde  $\otimes$  denota el producto tensorial.

**Proposición 2.4.6.** Usando la notación de la definición anterior, el producto vectorial cumple las siguientes propiedades:

1. Es una aplicación bilineal.
2. Es anticomutativo en el sentido que  $\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta$ .
3. Dada  $f : W \rightarrow V$  se cumple que  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ .

Este producto vectorial nos permitirá construir bases de los espacios vectoriales de las aplicaciones multiliniales alternadas.

**Teorema 2.4.7.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $\{\phi^i\}_{i=1}^n$  una base de  $V^*$ . Entonces, el conjunto de los elementos de la forma:

$$\phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$$

es una base de  $\Omega^k(V)$ .

Este teorema nos proporciona una caracterización inmediata de los conjuntos de formas lineales independientes.

**Corolario 2.4.8.** Sean  $\omega^1, \dots, \omega^k \in \Omega^1(V)$ . Entonces, dichas formas lineales son independientes si y solo si:

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k \neq 0.$$

Una vez completado este repaso sobre los preliminares algebraicos, procedemos a definir las formas diferenciales de manera general.

Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $p \in M$ . Consideramos las aplicaciones  $k$ -multiliniales alternadas del espacio tangente a  $M$  en  $p$ ,  $\Omega^k(T_p M)$ , y definimos  $\Omega^k(TM) = \bigcup_{p \in M} \Omega^k(T_p M)$ .

Podemos dotar a este nuevo conjunto de estructura de variedad diferenciable de manera análoga a como se hizo para el fibrado tangente y el fibrado cotangente, considerando ahora las bases en  $\Omega^k(T_p M)$  dadas a partir de coordenadas locales en  $M$ , por:

$$\{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}. \quad (2)$$

**Definición 2.4.9.** Una  $k$ -forma diferencial en  $M$  es una sección diferenciable de  $\Omega^k(TM)$  respecto a la proyección canónica,  $\pi_k : \Omega^k(TM) \rightarrow M$  dada por  $\pi(\omega) = p$  si  $\omega \in \Omega^k(T_p M)$ . Denotaremos por  $\Lambda^k(M)$  al conjunto de todas las  $k$ -formas diferenciables sobre  $M$ .

Es decir, una  $k$ -forma diferencial (o simplemente  $k$ -forma) es una aplicación que asigna a cada punto  $p \in M$  una aplicación  $k$ -multilineal alternada que actúa sobre  $T_p M$ , de manera que los coeficientes en las bases locales inducidas por las coordenadas locales de  $M$  dadas en (2), sean aplicaciones diferenciables entre variedades.

Estudiemos ahora sus propiedades básicas, las cuales se deducen de forma inmediata trabajando puntualmente, es decir, en  $\Omega_p^k(M)$ .

**Proposición 2.4.10.** Sean  $\omega_1, \omega_2, \omega$   $k$ -formas sobre una variedad diferenciable  $M$ ,  $\eta_1, \eta_2, \eta$   $l$ -formas sobre  $M$ ;  $f : N \rightarrow M$  una aplicación entre variedades diferenciables y  $g \in \mathcal{F}(M)$ . Entonces:

1.  $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$ .
2.  $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$ .
3.  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$  (se entiende que  $f^*$ , llamado pullback de  $f$ , es la aplicación  $(df)^*$  en cada punto de la variedad).
4.  $(g\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (g\eta) = g(\omega \wedge \eta)$ .
5.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ .

Nótese que las 1-formas se corresponden con el concepto ya definido en la sección anterior, mientras que podemos identificar las 0-formas con las funciones diferenciables sobre  $M$ .

Pasamos ahora a definir dos operaciones nuevas sobre el conjunto de las formas diferenciales: la diferencial exterior y la derivada de Lie.

**Definición 2.4.11.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, sea un entorno coordenado de  $M$  con coordenadas locales,  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y sea  $\omega$  la  $k$ -forma dada localmente por:

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Se define la  $k + 1$ -forma  $d\omega$ , llamada diferencial exterior de  $\omega$ , a partir de su expresión local:

$$d\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

donde  $d\omega_{i_1, \dots, i_k}$  es la diferencial de una función.

Nótese que en el caso de  $f \in \mathcal{F}(M)$  una 0-forma, este concepto se reduce al de  $df$  definido al estudiar las 1-formas.

**Proposición 2.4.12.** Con la notación de la definición anterior, la aplicación diferencial exterior cumple que para todas  $\omega_1, \omega_2, \omega$   $k$ -formas en  $M$  y  $\omega_3$  una  $l$ -forma en  $M$ :

1.  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ .
2.  $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = d\omega_1 \wedge \omega_3 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_3$ .
3.  $d(d\omega) = 0$ .

Se puede probar que la definición de esta aplicación no depende del sistema coordenado elegido, y por ello está bien definida de forma global y no solo en el dominio del sistema coordenado tomado. También se puede probar que es la única aplicación que se puede definir entre  $k$ -formas cumpliendo las propiedades anteriores y actuando sobre  $\mathcal{F}(M)$  de la misma forma que lo hace  $d$ .

**Proposición 2.4.13.** Sean  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre variedades y  $\omega$  una  $k$ -forma en  $N$ . Entonces:

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

**Definición 2.4.14.** Se dice que una  $k$ -forma,  $\omega$ , en  $M$  es cerrada si  $d\omega = 0$ ; y se dice que es exacta si existe una  $k - 1$ -forma en  $M$ ,  $\eta$  tal que  $\omega = d\eta$ .

*Observación 2.4.15.* Se puede demostrar que toda  $k$ -forma cerrada es localmente exacta, es decir, que dada  $\omega$  cerrada, existe un abierto  $U$  en  $M$  y una  $k - 1$ -forma en  $U$ ,  $\eta$ , tal que en  $U$  se cumple que  $\omega = d\eta$ , pero puede que  $\eta$  no se pueda extender de forma diferenciable a toda  $M$ . Esto se conoce como Lema de Poincaré.

**Definición 2.4.16.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  un campo de vectores sobre  $M$ . Se define la derivada de Lie con respecto de  $X$  como la única aplicación de  $\Omega(TM) = \bigcup_k \Omega^k(TM)$  en sí mismo  $\mathbb{R}$  lineal tal que:

1.  $L_X f = Xf \quad \forall f \in \mathcal{F}(M)$
2. Si  $\omega \in \Omega^k(TM)$  y  $\eta \in \Omega^l(TM)$ , entonces,  $L_X(\omega \wedge \eta) = L_X \omega \wedge \eta + \omega \wedge L_X \eta$
3.  $L_X$  commuta con  $d$

Nótese que efectivamente estas propiedades definen una única aplicación, pues, para calcular la derivada de Lie de una  $k$ -forma, bastará con expresar esta en unas coordenadas locales, usar la propiedad 2 de la definición en cada sumando, a continuación, la propiedad 3 para comutar cada  $d$  con la derivada de Lie y, finalmente, usar la propiedad 1.

**Definición 2.4.17.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  un campo de vectores. Se define el producto interno de una  $k$ -forma,  $\omega$ , por  $X$ ,  $i_X \omega$ , como la  $(k - 1)$ -forma:

1.  $i_X \omega = 0$  si  $k = 0$ .
2.  $i_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) \quad \forall Y_1, \dots, Y_{k-1}$  campos de vectores sobre  $M$ .

**Proposición 2.4.18.** El producto interno en una variedad  $M$  por un campo de vectores,  $X$ , cumple que:

1.  $(i_X)^2 = 0$ .
2.  $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_X\eta), \quad \forall \omega \in \Omega^k(TM), \eta \in \Omega^l(TM)$ .

El siguiente resultado nos relaciona los tres conceptos previos, dándonos una forma alternativa de calcular la derivada de Lie:

**Proposición 2.4.19.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  un campo de vectores sobre  $M$ . Entonces  $L_X = i_X d + di_X$ .

Cabe mencionar que las tres operaciones sobre el conjunto de las formas diferenciales sobre una variedad presentadas previamente son casos particulares de un concepto más general: las derivaciones (ver [20]). La proposición anterior se prueba de manera rápida haciendo uso de dicho concepto.

## 2.5. Variedades simplécticas

El estudio de la mecánica desde el punto de vista geométrico se basa en las variedades simplécticas. Por ello, haremos un estudio de las mismas basándonos en [20, 23].

Comenzamos estudiando los espacios vectoriales simplécticos a modo de introducción.

**Definición 2.5.1.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\omega$  una forma bilineal antisimétrica sobre  $V$ ,  $\omega \in \Omega^2(V)$ . Se define la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} S_\omega : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto i_u\omega, \end{aligned}$$

siendo  $i_u\omega(v) = \omega(u, v)$  el producto interior. Denotamos por  $\text{Im } S_\omega$ ,  $\text{Ker } S_\omega$  a la imagen y el núcleo de la aplicación anterior, respectivamente.

**Teorema 2.5.2.** Sean  $V$ ,  $\omega$  en las condiciones de la definición anterior. Entonces, existe una base de  $V$ ,  $u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_s$ , tal que:

$$\begin{aligned} \omega(u_i, v) &= 0, & \forall i = 1, \dots, k, \quad \forall v \in V, \\ \omega(e_i, e_j) &= 0 = \omega(f_i, f_j), & \forall i, j = 1, \dots, s, \\ \omega(e_i, f_j) &= \delta_{i,j}. & \forall i, j = 1, \dots, s \end{aligned}$$

Así, la matriz de  $\omega$  en esta base es:

$$\begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times s} & 0_{k \times s} \\ 0_{s \times k} & 0_{s \times s} & Id_{s \times s} \\ 0_{s \times k} & -Id_{s \times s} & 0_{s \times s} \end{pmatrix}$$

Y el rango de  $\omega$ , es decir, la dimensión de su imagen, es  $2s$ .

**Definición 2.5.3.** Se dice que una forma bilineal antisimétrica  $\omega$  sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ ,  $V$  es no degenerada si su rango es  $n$ , es decir, si  $S_\omega$  es un isomorfismo. En tal caso, se dice que el par  $(V, \omega)$  es una estructura simpléctica sobre  $V$ .

Nótese que si existe una estructura simpléctica sobre  $V$ , en virtud del teorema anterior, la dimensión de  $V$  ha de ser par.

**Definición 2.5.4.** Sean  $(U, \omega)$  y  $(V, \eta)$  estructuras simplécticas sobre los espacios vectoriales  $U$  y  $V$ , respectivamente. Sea  $h : U \longrightarrow V$  una aplicación lineal. Se dirá que  $h$  es una aplicación simpléctica si  $h^*\eta = \omega$ , es decir, si  $\forall u, v \in U$ , se cumple que  $\eta(h(u), h(v)) = \omega(u, v)$ .

**Definición 2.5.5.** Se dice que una 2-forma  $\omega$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es simpléctica si es cerrada y  $\forall p \in M$   $(T_p M, \omega(p))$  es una estructura simpléctica sobre el espacio vectorial  $T_p M$ . En tal caso, se dice que el par  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica.

Nótese que, si existe una 2-forma simpléctica sobre una variedad  $M$ , entonces la dimensión de  $T_p M$  es par para todo  $p \in M$  y, por ello, la dimensión de la variedad diferenciable ha de ser par.

**Definición 2.5.6.** Sean  $(M, \omega_1)$  y  $(N, \omega_2)$  variedades simplécticas  $2n$ -dimensionales y sea  $\phi : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Se dice que  $\phi$  es un simplectomorfismo si  $\phi^*\omega_2 = \omega_1$ . Si  $M = N$  se dice que  $\phi$  es una transformación canónica.

*Observación 2.5.7.* Si  $\phi : M \rightarrow N$  cumple que  $\phi^*\omega_2 = \omega_1$ , aun si  $\phi$  no es un difeomorfismo global entre las variedades, se puede probar que será un difeomorfismo local.

Para ello consideremos que  $v \in T_p(M)$  es tal que  $d\phi(v) = 0$ , entonces, para todo  $w \in T_p(M)$ ,  $S_{\omega_1(p)}(v)(w) = \omega_1(v, w) = \omega_2(d\phi(v), d\phi(w)) = 0$  y  $S_{\omega_1(p)}(v) = 0$ . Como  $S_{\omega_1(p)}$  es isomorfismo,  $v = 0$ , y  $d\phi$  es inyectiva, con lo que  $\phi$  es difeomorfismo local.

Los simplectomorfismos son a las variedades simplécticas lo mismo que los isomorfismos a los espacios vectoriales o las isometrías a los espacios con producto interno. Es decir, son la forma natural en que podemos identificar dos variedades simplécticas.

**Definición 2.5.8.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. Se define:

$$\begin{aligned} \flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ v &\longmapsto i_v(\omega(p)) = S_{\omega(p)}(v), \quad v \in T_p M, \end{aligned}$$

el cual es un difeomorfismo de variedades diferenciables. Para comprobar que es diferenciable basta trabajar con coordenadas locales inducidas.

*Observación 2.5.9.* Podemos entender también  $\flat$  como un  $\mathcal{F}(M)$ -isomorfismo entre  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\Lambda^1(M)$ , es decir, un isomorfismo de módulos sobre el álgebra de funciones. Esto quiere decir que si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ , entonces  $S_\omega(fX + gy) = fS_\omega(X) + gS_\omega(Y) \in \Lambda^1(M)$ .

El siguiente teorema nos permitirá trabajar de forma local cómodamente en cualquier variedad simpléctica.

**Teorema 2.5.10** (de Darboux). Sea  $\omega$  una 2-forma de rango  $2n$  sobre una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $2n + r$ . Entonces  $\omega$  es cerrada si y solo si  $\forall p \in M, \exists (U, \phi)$  sistema coordenado en torno a  $p$  con coordenadas locales  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, z^1, \dots, z^r)$  tales que:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

**Corolario 2.5.11.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$ . Entonces  $\forall p \in M, \exists (U, \phi)$  sistema coordenado en torno a  $p$ , con coordenadas locales  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  tal que:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

A partir de este resultado, se prueba, trabajando de forma local, la siguiente proposición.

**Proposición 2.5.12.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. Entonces, siendo  $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$  el producto vectorial de  $\omega$  consigo mismo  $n$  veces,  $\omega^n \neq 0$  y en particular  $M$  es orientable.

Estudiamos ahora el caso de mayor interés entre las variedades simplécticas y que sirve de modelo para el resto de ellas, como consecuencia del teorema de Darboux. Estas son los fibrados cotangentes de cierta variedad  $M$  de dimensión  $n$ . Definiremos de manera global la estructura simpléctica canónica en  $T^*M$  y comprobaremos que las coordenadas inducidas son coordenadas de Darboux, es decir, en las que la forma simpléctica tiene la expresión buscada en el teorema de Darboux.

**Definición 2.5.13.** Se define la 1-forma  $\lambda_M$  en  $T^*M$ , la cual actuará sobre vectores tangentes  $v \in T_\alpha(T^*M)$  con  $\alpha \in T_p M$ , como:

$$\lambda_M(v) = \alpha(p)(d\pi_M(\alpha)v).$$

Esta se conoce como 1-forma de Liouville.

Nótese que como  $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ , entonces,  $d\pi_M(\alpha) : T_\alpha(T^*M) \rightarrow T_p M$ , con lo que envía  $v$  en un vector tangente a  $M$  sobre el que puede actuar  $\alpha(p)$ , pues es una 1-forma. Así pues,  $\lambda_M$  es una forma de actuar sobre los vectores tangentes a  $T^*M$  en  $\alpha$  de la manera natural en que actuaría  $\alpha$  sobre la componente

tangente a  $M$ . Este hecho queda más claro cuando consideramos coordenadas locales inducidas en  $T^*M$ ,  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ , en las que se cumple que, como localmente  $\alpha(p) = p_j dq^j$  y  $d\pi_M(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = 0$ :

$$\begin{aligned}\lambda_M(q^j, p_j)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) &= (p_j dq^j)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = p_i, \\ \lambda_M(q^j, p_j)\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Y por tanto, comprobamos que:

$$\lambda_M = p_i dq^i.$$

**Definición 2.5.14.** Se define la forma simpléctica canónica sobre  $T^*M$  por:

$$\omega_M = -d\lambda_M.$$

Es claro, a partir de la expresión local de la forma de Liouville, que localmente:

$$\omega_M = dq^i \wedge dp_i.$$

En particular se comprueba que es no degenerada pues, en cada punto  $p \in M$ :

$$\begin{aligned}S_{\omega_M(p)}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_p &= dp_i|_p, \\ S_{\omega_M(p)}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_p &= -dq^i|_p,\end{aligned}$$

con lo que  $S_{\omega_M(p)}$  transforma una base de  $T_p M$  en una de  $T_p^* M$  y por ello es isomorfismo. Además, se tiene que:

$$\begin{aligned}\flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) &= dp_i, \\ \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) &= -dq^i.\end{aligned}\tag{3}$$

### 2.5.1. Construcción de una estructura simpléctica en $TM$

Procedemos ahora a construir una forma simpléctica sobre el espacio tangente de una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $M$ . En  $TM$  no existe una forma simpléctica canónica y hace falta definirla a partir de una función dada, que cumpla ciertas características.

Para construir esta 2-forma comenzaremos definiendo la estructura casi tangente canónica de  $TM$  siguiendo [20].

Consideremos la proyección canónica  $\tau_M : TM \rightarrow M$ . Para cada  $v \in T_p M$  definimos el siguiente subespacio:

$$V_v = \ker\{d\tau_M(v) : T_v(TM) \rightarrow T_p M\} \subset T_v(TM).$$

Consideramos  $V = \cup_{v \in TM} V_v$ , el cual llamaremos fibrado vertical.

**Definición 2.5.15.** Un vector tangente a  $TM$ ,  $z$ , se dirá que es vertical si  $z \in V$  y un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(TM)$  se dirá que es vertical si  $X(v) \in V$  para todo  $v \in TM$ .

Básicamente, los vectores tangentes verticales son aquellos que solo dan cuenta de variaciones cuando cambian las coordenadas correspondientes a los vectores tangentes a  $M$ , sin importar lo que pase con las coordenadas correspondientes a  $M$ . De hecho, un vector tangente,  $z$ , es vertical si y solo si, considerando un sistema de coordenadas inducido en  $TM$ ,  $(q^i, v^i)$ :

$$z = z^i \frac{\partial}{\partial v^i},$$

para ciertos valores  $z^i$ . Es decir, que una base de  $V_v$  es  $\{\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}\}$ .

**Definición 2.5.16.** Sea  $v \in T_p M$  y sea  $u \in T_p M$ . Se define el levantamiento vertical de  $u$  en  $v$ ,  $u^v$  como el vector tangente en  $t = 0$  de la curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow T_p M$  dada por  $\sigma(t) = v + tu$ .

*Observación 2.5.17.* Nótese que, en las condiciones de la definición anterior, como  $\tau_M(\sigma(t)) = p$  para todo  $t$ , entonces  $d\tau_M(\sigma(t)) = 0$  y  $u^v \in V_v$ . De hecho, considerando coordenadas locales inducidas en  $TM$ ,  $(q^i, v^i)$ , si  $u = u^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ , entonces es inmediato de (1) que:

$$u^v = u^i \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

**Definición 2.5.18.** En las condiciones anteriores, para cada  $v \in TM$  define la aplicación lineal  $S_v : T_v(TM) \rightarrow T_v(TM)$  dada por:

$$S_v(z) = ((d\tau_M)z)^v.$$

Así pues, podemos considerar la aplicación  $S : T(TM) \rightarrow T(TM)$ , la cual denominaremos estructura casi tangente canónica de  $TM$ .

Nótese que  $S$  también se puede interpretar como un  $\mathcal{F}(M)$ -morfismo de  $\mathfrak{X}(TM)$  en sí mismo. De hecho, es un ejemplo de una clase de aplicaciones más general, los tensores de tipo  $(1,1)$ .

Si consideramos coordenadas locales inducidas en  $TM$ ,  $(q^i, v^i)$ , entonces se tiene que:

$$S\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad S\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 0.$$

**Definición 2.5.19.** Se define la derivación vertical sobre  $TM$  como la aplicación  $i_S : \Lambda^p(TM) \rightarrow \Lambda^p(TM)$  que, para cada  $p = 0, 1, \dots$ , está definida por:

$$i_S f = 0, \quad i_S \omega(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, S X_i, \dots, X_p),$$

con  $f \in C^\infty(TM)$ ,  $\omega \in \Lambda^p(TM)$  y  $X_i \in \mathfrak{X}(TM)$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

**Ejemplo 2.5.20.** Consideremos coordenadas locales inducidas en  $TM$ ,  $(q^i, v^i)$  y veamos como actúa  $i_S$  sobre las 1-formas:

$$i_S(dq^i)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dq^i\left(S\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dq^i\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 0, \quad i_S(dq^i)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = dq^i\left(S\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = dq^i(0) = 0.$$

Razonando de igual forma para  $dv^i$  concluimos que:

$$i_S(dq^i) = 0 \quad i_S(dv^i) = dq^i$$

**Proposición 2.5.21.** La derivación vertical cumple las siguientes propiedades:

1. Es  $\mathcal{F}(M)$ -lineal.
2.  $i_S(\omega \wedge \eta) = (i_S \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (i_S \eta)$  para cada  $\omega \in \Lambda^p(TM)$  y  $\eta \in \Lambda^q(TM)$ .

**Definición 2.5.22.** Se define la diferenciación vertical en  $TM$  como la aplicación  $d_S : \Lambda^p(TM) \rightarrow \Lambda^{p+1}(TM)$  para cada  $p = 0, 1, \dots$ , dada por:

$$d_S = i_S d - di_S,$$

con  $d$  siendo la diferencial exterior e  $i_S$  la derivación vertical.

**Proposición 2.5.23.** La diferenciación vertical cumple las siguientes propiedades:

1.  $d_S d = -dd_S$ .
2.  $d_S^2 = 0$ .
3.  $d_S(\omega \wedge \eta) = (d_S \omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d_S \eta)$ , con  $\omega \in \Lambda^p(TM)$  y  $\eta \in \Lambda^q(TM)$ .

**Definición 2.5.24.** Sea  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Definimos la 2-forma cerrada siguiente:

$$\omega_L = -dd_S L.$$

**Teorema 2.5.25.** La forma  $\omega_L$  es simpléctica sobre  $TM$  si y solo si, para cada sistema de coordenadas locales inducidas  $(q^i, v^i)$ , la matriz hessiana:

$$\left( \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

es invertible.

*Demuestra.* Comencemos expresando localmente  $\omega_L$  en unas coordenadas locales inducidas como las del enunciado:

$$d_S L = i_S dL = i_S \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} dv^i \right) = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i,$$

$$\omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i \wedge dv^j. \quad (4)$$

Así pues, al tomar el producto exterior de  $\omega$  por sí misma  $n$  veces, teniendo en cuenta que, si en un producto exterior se repite una 1-forma, este es nulo, se llega a que:

$$\omega_L^n = \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^n,$$

de donde se concluye el resultado.  $\square$

El siguiente concepto nos será muy útil a la hora de estudiar sistemas mecánicos desde el punto de vista lagrangiano, pues nos permitirá definir correctamente la energía de dichos sistemas.

**Definición 2.5.26.** Se define el campo de vectores de Liouville  $\Delta \in \mathfrak{X}(TM)$  como:

$$\Delta(v) = (v)^v, \quad v \in TM.$$

Considerando coordenadas locales inducidas en  $TM$  se tiene que:

$$\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

## 2.6. Variedades casi cosimplécticas: ejemplos y extensiones

Realizamos ahora una introducción a la geometría casi cosimpléctica, así como a casos particulares y a una generalización suya. En particular, introducimos la geometría cosimpléctica, que es el marco natural para el estudio de los sistemas hamiltonianos dependientes del tiempo; la geometría de contacto, que lo es para el estudio de los sistemas con hamiltonianos dependientes de la acción, y la geometría parcialmente cosimpléctica, que es la base para el estudio de la termodinámica del no equilibrio.

Para un estudio más detallado de la geometría cosimpléctica ver [3].

**Definición 2.6.1.** Una estructura casi cosimpléctica sobre una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $2n+1$ , es un par  $(\omega, \eta)$ , donde  $\omega$  es una 2-forma sobre  $M$  y  $\eta$  una 1-forma, tales que  $\omega^n \wedge \eta$  es una forma de volumen, es decir, una  $(2n+1)$ -forma que no es nula en ningún punto de  $M$ . La terna  $(M, \omega, \eta)$  se denomina variedad casi cosimpléctica.

La característica fundamental de todas las variedades casi cosimplécticas es la existencia de un isomorfismo natural que nos permite relacionar los campos de vectores con las 1-formas de forma natural, como prueba el siguiente resultado:

**Proposición 2.6.2.** Sea  $(M, \omega, \eta)$  una variedad casi cosimpléctica de dimensión  $2n+1$ . La aplicación:

$$\begin{aligned} \flat : TM &\longrightarrow T^* M \\ X &\longmapsto i_X \omega + \eta(X) \eta, \end{aligned}$$

es un difeomorfismo. Además, es un isomorfismo entre los espacios tangente y cotangente en cada punto de  $M$ .

*Demostración.* Nótese en primer lugar que, si  $X \in T_p M$ , entonces  $\flat(X) \in T_p^* M$ , es decir, la aplicación conserva las fibras. Así pues, bastará con ver  $\flat|_{T_p M}$  es un isomorfismo lineal (el hecho de que sea diferenciable se deduce de que  $\omega$  y  $\eta$  lo sean y basta expresar la aplicación en coordenadas locales para comprobarlo).

Como  $T_p M$  y  $T_p^* M$  tienen ambos la misma dimensión, basta con ver que  $\flat|_{T_p M}$  es inyectivo, es decir, que si  $\flat(X) = 0$ , entonces  $X = 0$ . Para ello razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $X \in T_p M$  no nulo con  $\flat(X) = 0$ . Entonces  $\flat(X)(X) = (\eta(X))^2 = 0$ .

Pero si  $\eta(X) = 0$  entonces  $i_\omega(X) = 0$  y se tendría que, extendiendo  $X$  a una base  $\{X, X_2, \dots, X_{2n+1}\}$  de  $T_p M$ ,  $\omega^n \wedge \eta(X, X_2, \dots, X_{2n+1}) = 0$ . Absurdo, pues  $\omega^n \wedge \eta$  es una forma de volumen y es no nula al actuar sobre una base.  $\square$

Nótese que la aplicación anterior también es un  $\mathcal{F}(M)$ -isomorfismo entre  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\Lambda^1(M)$ , y así lo entenderemos en la mayoría de ocasiones.

**Definición 2.6.3.** En las condiciones de la proposición anterior, siendo  $\sharp = \flat^{-1}$ , se define el campo de Reeb como  $\mathcal{R} = \sharp\eta$ .

**Proposición 2.6.4.** El vector de Reeb cumple que:

$$i_{\mathcal{R}}\omega = 0, \quad \eta(\mathcal{R}) = 1.$$

**Definición 2.6.5.** Una variedad casi cosimpléctica  $(M, \omega, \eta)$  se dice que es cosimpléctica si  $\omega$  y  $\eta$  son cerradas.

**Teorema 2.6.6** (de Darboux para variedades cosimplécticas, [8, 20]). Sea  $(M, \omega, \eta)$  una variedad cosimpléctica. Para todo  $p \in M$ , existe un sistema coordenado en torno a  $p$  con coordenadas locales  $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, z\}$  tales que:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \quad \eta = dz.$$

En estas coordenadas:

$$\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

**Ejemplo 2.6.7.** Consideremos  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , y  $P = T^*M \times \mathbb{R}$  la cual es una variedad  $(2n + 1)$ -dimensional, que denominaremos fibrado cotangente extendido. Consideremos la 2-forma:

$$\omega = \pi_M^*(\omega_M).$$

Es decir, la forma simpléctica canónica de  $T^*M$  vista en  $P$ . Consideremos además la 1-forma definida (globalmente) por:

$$\eta = dt,$$

donde  $t : P \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección de la última componente. Si consideramos coordenadas  $q^i, p_i$  inducidas sobre  $T^*M$ , entonces  $\{q^i, p_i, t\}$  son coordenadas locales sobre  $P$  y en ellas:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \quad \eta = dt,$$

con lo que es inmediato probar que  $(P, \omega, \eta)$  es una variedad cosimpléctica. Es más, de acuerdo con el teorema de Darboux anterior, estas variedades sirven como modelo local de todas las variedades cosimplécticas.

Pasemos a estudiar ahora las variedades de contacto, de las que se puede leer un estudio más detallado en [17, 19].

**Definición 2.6.8.** Una variedad de contacto es un par  $(M, \eta)$  donde  $M$  es una variedad  $(2n + 1)$ -dimensional y  $\eta$  es una 1-forma en  $M$  tal que:

$$(d\eta)^n \wedge \eta \neq 0.$$

Obsérvese que en las condiciones anteriores, la terna  $(M, d\eta, \eta)$  es una variedad casi cosimpléctica y por ello se puede considerar el isomorfismo  $\flat$  sobre estas variedades, así como el campo de Reeb,  $\mathcal{R}$ .

En este caso se conoce también un teorema de Darboux, análogo al que existe para variedades cosimplécticas:

**Teorema 2.6.9** (de Darboux para variedades de contacto). Sea  $(M, \eta)$  una variedad de contacto. Entonces, alrededor de cada punto  $p \in M$ , existe un sistema coordenado  $(U, \phi)$  entorno a  $p$  con coordenadas locales  $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, z\}$  tales que:

$$\eta = dz - p_i dq^i.$$

Además, en estas coordenadas:

$$d\eta = dq^i \wedge dp_i, \quad \mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

**Ejemplo 2.6.10.** Consideremos una variedad diferenciable  $n$ -dimensional,  $M$ , y sea  $P = T^*M \times \mathbb{R}$ , variedad  $(2n+1)$ -dimensional. Consideremos  $\lambda_M$  la 1-forma de Liouville y definamos:

$$\eta = dz - \lambda_M,$$

donde  $z : P \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección sobre la última componente. Entonces, usando las coordenadas inducidas sobre  $T^*M$  y considerando coordenadas locales  $\{q^i, p_i, z\}$  se tiene que:

$$\eta = dz - p_i dq^i,$$

con lo que, trabajando localmente, se comprueba que  $(P, \eta)$  es una variedad de contacto y, de hecho, de acuerdo con el teorema previo, es el prototipo local de todas ellas.

Las últimas estructuras geométricas que estudiaremos en detalle son las variedades parcialmente cosimplécticas de orden  $p$  sobre las que se puede leer un análisis más detallado en [16]. Estas son una extensión, más débil, de las variedades cosimplécticas que permiten tratar sistemas termodinámicos con varios compartimentos.

**Definición 2.6.11.** Una estructura casi cosimpléctica de orden  $p$  sobre una variedad  $M$  de dimensión  $2n+p$  es una  $(p+1)$ -úpla,  $(\omega, \eta_1, \dots, \eta_p)$ , tal que  $\omega$  es una 2-forma y  $\eta_1, \dots, \eta_p$  son 1-formas tales que:

$$\omega^n \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p \neq 0.$$

Si además,  $\omega$  es cerrada, se dirá que la estructura es parcialmente cosimpléctica de orden  $p$ .

El siguiente teorema nos permite generalizar el isomorfismo introducido en el caso de las variedades casi cosimplécticas. La demostración del teorema es análoga a la expuesta en dicho caso.

**Teorema 2.6.12.** Sea  $(\omega, \eta_1, \dots, \eta_p)$  una estructura casi cosimpléctica de orden  $p$  sobre una variedad de dimensión  $2n+p$ ,  $M$ . Entonces, la aplicación siguiente es un difeomorfismo, así como un isomorfismo entre el espacio tangente y el espacio cotangente en cada punto de  $M$ .

$$\begin{aligned} \flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto i_X \omega + \sum_k \eta_k(X) \eta_k. \end{aligned}$$

De nuevo en este caso, la aplicación anterior puede entenderse como un  $\mathcal{F}(M)$ -isomorfismo entre  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\Lambda^1(M)$ .

### 3. Mecánica geométrica

La descripción de la mecánica desde el punto de vista lagrangiano y hamiltoniano permite estudiar de forma sistemática sistemas mecánicos en los que existen restricciones sin necesidad de recurrir a fuerzas de ligadura. Estos enfoques se basan en estudiar la mecánica de un sistema de partículas considerando que estas se encuentran sobre una variedad diferenciable,  $M$ , que denominaremos variedad de configuración [26].

#### 3.1. Mecánica simpléctica

Comenzamos estudiando el comportamiento de un sistema de partículas que se encuentran sobre una variedad diferenciable,  $M$ , desde el punto de vista hamiltoniano. Es decir, describimos el estado del sistema mediante sus coordenadas en el espacio de fases, el cual identificamos con el fibrado cotangente de  $M$ . De esta forma, al considerar coordenadas locales inducidas en  $T^*M$ ,  $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ , las variables  $q^i$  corresponden a lo que se suele denominar coordenadas generalizadas, mientras que las variables  $p_i$  son sus momentos conjugados.

**Definición 3.1.1.** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional y  $T^*M$  su espacio cotangente. Sea  $\omega$  la forma simpléctica canónica sobre  $T^*M$  y  $\flat$  el  $\mathcal{F}(M)$ -morfismo definido en la sección previa. Sea  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Se define el campo hamiltoniano de  $H$ ,  $X_H$ , como el único campo de vectores sobre  $M$  cumpliendo:

$$\flat(X_H) = dH,$$

es decir, el campo hamiltoniano de  $H$  es el campo que se identifica de manera natural mediante la estructura simpléctica de  $T^*M$  con la 1-forma que genera  $H$ ,  $dH$ .

La importancia de estos campos de vectores radica en que sus curvas integrales proporcionan la evolución temporal de un sistema mecánico independiente del tiempo cuyo hamiltoniano venga dado por la función  $H$ , como prueba la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.2.** En las condiciones de la definición anterior, sea  $\sigma : I \rightarrow T^*M$  una curva. Entonces  $\sigma$  es una curva integral de  $X_H$  si y solo si, siendo  $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$  coordenadas locales inducidas en  $T^*M$ ,  $\sigma = (q^i(t), p_i(t))$  cumple las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} q^i$$

*Demostración.* Comencemos calculando en las coordenadas locales del enunciado la expresión de  $X_H$ . Sabemos que, como  $\{\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_i}\}$  forman una base de los espacios tangentes en cada punto de  $M$ , podemos expresar localmente:

$$X_H = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Así pues, usando que  $\flat$  es un  $\mathcal{F}(M)$ -morfismo y (3):

$$\flat(X_H) = -B_i dq^i + A^i dp_i.$$

Como por otro lado:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i,$$

igualando los coeficientes de  $\{dq^i, dp_i\}$ , pues estas 1-formas forman una base de los espacios cotangentes, llegamos a que:

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Teniendo en cuenta la definición de curva integral de un campo de vectores y la expresión en coordenadas locales del vector tangente a una curva, (1), se concluye el resultado.  $\square$

Una de las propiedades fundamentales de los sistemas mecánicos cuyo hamiltoniano es independiente del tiempo, es que su energía es una constante del movimiento, como demuestran los siguientes resultados.

**Definición 3.1.3.** Se dice que una 1-forma,  $\alpha$ , sobre  $T^*M$  es una integral primera de un campo de vectores  $X$  si:

$$i_X \alpha = 0.$$

Se dice que una función  $f$  sobre  $T^*M$  es una integral primera de  $X$  si  $df$  lo es.

*Observación 3.1.4.* Nótese que la definición de integral primera de una función es equivalente a decir que la función es constante sobre las curvas integrales de  $X$ , pues si  $\sigma$  es una de dichas curvas integrales, por definición de vector tangente a una curva:

$$i_X df(\sigma(t)) = X(f)(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t)(f) = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt}.$$

**Corolario 3.1.5.** Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $T^*M$  su fibrado cotangente y  $\omega$  la forma simpléctica canónica sobre el mismo. Sea  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $X_H$  su campo hamiltoniano. Entonces  $H$  es una integral primera de  $X_H$ .

*Demostración.* Basta notar que, por definición de campo hamiltoniano  $dH = i_{X_H} \omega$  y por ello:

$$i_{X_H} dH = i_{X_H} i_{X_H} \omega = \omega(X_H, X_H) = 0.$$

$\square$

Pasamos ahora a estudiar el mismo problema, pero desde el punto de vista lagrangiano. Es decir, ahora en lugar de describir el estado del sistema por medio de sus coordenadas y momentos generalizados, lo hacemos a través de sus coordenadas y velocidades generalizadas. Comprobaremos que ambas formulaciones son localmente equivalentes.

**Definición 3.1.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $TM$  su fibrado tangente. Una función diferenciable  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  se denominará función lagrangiana o lagrangiano. Se dirá que el lagrangiano  $L$  es regular si la matriz

$$\left( \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

es invertible. En caso contrario se dirá que el lagrangiano es singular.

*Observación 3.1.7.* De acuerdo con el desarrollo realizado en la [sección 2.5.1](#),  $(TM, \omega_L)$  es una variedad simpléctica si y solo si  $L$  es un lagrangiano regular. Es por ello que nos centraremos en el estudio de los lagrangianos regulares. Un estudio detallado de los sistemas lagrangianos singulares, así como el desarrollo de un algoritmo para la resolución de estos sistemas, es decir, para hallar un campo de vectores cuyas curvas integrales describan la evolución del sistema mecánico, se puede encontrar en [18].

**Definición 3.1.8.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $L$  un lagrangiano regular sobre  $TM$ . Se define la energía asociada a  $L$  como la función:

$$E_L = \Delta(L) - L.$$

Considerando coordenadas locales inducidas en  $TM$ ,  $(q^i, v^i)$  se tiene que:

$$E_L = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L,$$

con lo que localmente se recupera la definición usual de la energía a partir del lagrangiano [9].

**Definición 3.1.9.** En las condiciones de la definición anterior, se define el campo de vectores de Euler-Lagrange para  $L$  como el único campo de vectores  $\xi_L$  tal que:

$$\flat(\xi_L) = dE_L. \quad (5)$$

**Teorema 3.1.10.** En las condiciones anteriores, una curva  $\sigma : I \rightarrow TM$  es una curva integral de  $\xi_L$  si y solo si, localmente, considerando coordenadas locales inducidas,  $\sigma(t) = (q^i(t), v^i(t))$  es solución de las ecuaciones:

$$v^i(t) = \frac{dq^i}{dt}(t), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

es decir, si y solo si su proyección sobre  $M$ ,  $\tilde{\sigma} = (q^i(t))$  es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

*Demostración.* Comencemos viendo que, considerando coordenadas locales inducidas  $(q^i, v^i)$ ,  $\xi_L$  está localmente dado por:

$$\xi_L = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i},$$

donde  $\xi^i$  son ciertas funciones sobre  $TM$ . Los campos vectoriales con esta expresión local se llaman SODEs (del inglés Second Order Differential Equations) pues sus curvas integrales son solución de un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, como comprobaremos más adelante en el caso particular de  $\xi_L$ .

Para ello comencemos poniendo:

$$\xi_L = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

De manera que, teniendo en cuenta la expresión local de  $\omega_L$  calculada en (4):

$$\flat(\xi_L) = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i} A^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} A^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \xi^j \right) dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} A^j dv^i.$$

Igualando a la diferencial de la energía:

$$dE_L = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial q^i} v^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} v^j dv^i.$$

Igualando los coeficiente de  $dv^i$  a ambos lados de (5) se llega a un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para  $(A^j - v^j)$  cuya matriz de coeficientes, por ser  $L$  regular, es invertible y, por tanto,  $A^j = v^j$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Teniendo esto último en cuenta, igualando los coeficientes de  $dq^i$  a ambos lados de (5), llegamos al sistema de ecuaciones que determina a  $\xi^j$ :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

Así pues, siendo en cada sistema de coordenadas locales inducidas,  $\sigma(t) = (q^i(t), v^i(t))$ ,  $\sigma$  es curva integral de  $\xi_L$  si y solo si:

$$\frac{dq^i}{dt} = A^i = v^i(t), \quad \frac{dv^i}{dt} = \xi^i.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, comprobamos que esto es equivalente a que se cumpla:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \dot{v}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

donde se denota como  $\dot{q}^i$  y  $\dot{v}^i$  a las derivadas temporales de las coordenadas sobre la trayectoria.  $\square$

*Observación 3.1.11.* En [20] se puede encontrar la prueba de que  $\xi_L$  es una SODE sin recurrir al uso de coordenadas locales.

**Proposición 3.1.12.** En las condiciones anteriores, la energía,  $E_L$  es constante a lo largo de las curvas integrales de  $\xi_L$ .

*Demostración.* Basta observar que:

$$\xi_L E_L = dE_L(\xi_L) = \flat(\xi_L)(\xi_L) = \omega_L(\xi_L, \xi_L) = 0,$$

y utilizar el mismo razonamiento que en la [observación 3.1.4](#).  $\square$

**Definición 3.1.13.** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional y  $L$  un lagrangiano regular sobre  $TM$ . Se dice que una 1-forma  $\beta$  es un campo de fuerzas sobre  $TM$  si es semibásica, es decir, si y solo si existe otra 1-forma  $\alpha \in \Lambda^1(TM)$  tal que:

$$\beta(X) = \alpha(SX)$$

, para cada  $X \in \mathfrak{X}(TM)$ , siendo  $S$  la estructura casi tangente canónica de  $TM$ . La terna  $(M, L, \beta)$  se denomina sistema mecánico.

*Observación 3.1.14.* De acuerdo con el cálculo realizado en el [ejemplo 2.5.20](#),  $\beta$  es una 1-forma semibásica si y solo si su expresión en coordenadas locales inducidas es de la forma:

$$\beta = F^i dq^i,$$

siendo  $F^i$  funciones definidas en  $TM$ .

**Teorema 3.1.15.** Consideremos un sistema mecánico,  $(M, L, \beta)$ , como en la definición anterior. Entonces una curva  $\sigma : I \rightarrow TM$  es una curva integral del campo  $\xi$  definido por:

$$\flat(\xi) = dE_L + \beta,$$

si y solo si localmente, considerando coordenadas locales inducidas y siendo  $\sigma(t) = (q^i(t), v^i(t))$  se tiene que:

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i(t), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = -F^i.$$

La demostración de este resultado es muy similar a la del teorema anterior y, por eso, no se incluye.

**Definición 3.1.16.** Se dice que un sistema mecánico  $(M, L, \beta)$  es conservativo si  $\beta$  es cerrada.

**Proposición 3.1.17.** Sea  $(M, L, \beta)$  un sistema mecánico conservativo con lo que, localmente,  $\beta = dV$  para cierta función  $V$ . Entonces, la energía definida como  $E_L + V$  es constante a lo largo de las curvas integrales del campo de vectores  $\xi$  definido en la proposición anterior, localmente.

*Demostración.* Basta notar que la ecuación que define localmente el campo  $\xi$  se puede expresar como:

$$i_\xi \omega = d(E_L + V),$$

y usar el mismo razonamiento que cuando no se considera la presencia de un campo de fuerzas.  $\square$

*Observación 3.1.18.* Si de hecho  $\beta = d(V \circ \tau_M)$  para cierta función  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces se dirá que  $(M, L, \beta)$  es un sistema lagrangiano y el sistema se comportará igual que si se considera el lagrangiano  $\tilde{L} = L - V \circ \tau_M$  definido sobre  $TM$ .

Una de las principales ventajas de usar el formalismo geométrico para estudiar los sistemas mecánicos es la facilidad con la que se pueden estudiar las simetrías. En particular, el teorema de Noether tiene una expresión muy sencilla en este lenguaje. Se puede consultar una demostración recurriendo a coordenadas locales en [26] y una hecha de forma intrínseca en [20]. En esta última referencia se pueden encontrar más resultados que permiten relacionar constantes del movimiento y simetrías, generalizando el teorema de Noether.

**Definición 3.1.19.** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional y sea  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular. Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Se dice que  $L$  admite  $X$  si para todo  $t$  para el que esté definido el grupo 1-paramétrico de transformaciones local que genera  $X$ ,  $\phi_t$ , se tiene que  $L \circ T\phi_t = L$ .

**Teorema 3.1.20** (de Noether). En las condiciones de la definición anterior, si  $L$  admite un campo de vectores  $X$ , entonces  $X^v L$  es constante a lo largo de las curvas integrales del campo vectorial de Euler-Lagrange de  $L$ ,  $\xi_L$ , es decir,  $\xi_L(X^v L) = 0$ .

*Observación 3.1.21.* Considerando coordenadas locales inducidas  $(q^i, v^i)$ , siendo  $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  se tiene que:

$$X^v L = X^i \frac{\partial L}{\partial v^i}.$$

### 3.1.1. Transformación de Legendre

La transformación de Legendre nos permitirá realizar, para sistemas con lagrangianos regulares, una identificación local entre  $TM$  y  $T^*M$  a través de la cual se comprueba que la evolución del sistema predicha por los formalismos lagrangiano y hamiltoniano es equivalente (al menos de forma local).

**Definición 3.1.22.** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional y sea  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano. Se define la 1-forma:

$$\alpha_L = d_S L.$$

Considerando coordenadas locales  $(q^i, v^i)$  se tiene que:

$$\alpha_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i,$$

con lo que comprobamos que se trata de una 1-forma semibásica.

**Definición 3.1.23.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $L$  un lagrangiano regular. Se define la transformación de Legendre como la aplicación  $Leg : TM \rightarrow T^*M$  dada por:

$$Leg(X)(v) = \alpha_L(X)(\bar{v}),$$

donde  $X \in T_p M$ ,  $v \in T_p M$  y  $\bar{v} \in T_{X(p)}(TM)$ , con  $d\tau_M(\bar{v}) = v$ .

*Observación 3.1.24.* Consideremos coordenadas locales  $(q^i, v^i)$ . Entonces vemos que:

$$Leg\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_p\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right) = \frac{\partial L}{\partial v^i}\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_p\right) dq^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial q^j} + A^k \frac{\partial}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial L}{\partial v^i}\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_p\right).$$

donde hemos explicitado el punto en que se consideran los campos de vectores y las 1-formas, así como el punto en que se evalúa  $\frac{\partial L}{\partial v^i}$ . Este cálculo nos permite ver que, en coordenadas inducidas  $Leg$  actúa conservando las fibras, es decir, sin cambiar el punto sobre  $M$ , y mandando las velocidades en los momentos conjugados a través de  $L$ :

$$(q^i, v^i) \mapsto \left(q^i, \frac{\partial L}{\partial v^i}\right).$$

Además, el cálculo anterior muestra que, gracias a que  $\alpha_L$  es semibásica, da igual el vector  $\bar{v}$  tomado en la definición de la transformación de Legendre.

**Proposición 3.1.25.** En las condiciones de la definición anterior se cumple que:

$$\text{Leg}^* \lambda_M = \alpha_L, \quad \text{Leg}^* \omega_M = \omega_L.$$

*Demostración.* Consideremos coordenadas locales  $\{q^i\}$  en  $M$  y las coordenadas que estas inducen en  $TM$  y  $T^*M$ ,  $\{q^i, v^i\}$  y  $\{q^i, p_i\}$ , respectivamente. Recordemos que:

$$\lambda_M = p_i dq^i.$$

Así pues:

$$\begin{aligned} \lambda_M \left( d\text{Leg} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \right) &= \lambda_M \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right) = p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}, \\ \lambda_M \left( d\text{Leg} \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \right) &= p_j dq^j \left( d\text{Leg} \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \right) = p_i \left( d\text{Leg} \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \right) (q^j) = p_i \frac{\partial (q^j \circ \text{Leg})}{\partial v^i} = 0, \end{aligned}$$

con lo que, trabajando localmente, hemos comprobado la primera igualdad. Como  $\omega_M = -d\lambda_M$  y  $\omega_L = -d\alpha_L$  y la diferencial exterior conmuta con los pullbacks de funciones, se tiene la segunda igualdad.  $\square$

**Corolario 3.1.26.** La transformación de Legendre es un difeomorfismo local.

*Demostración.* Basta con notar que  $\text{Leg}$  es un simplectomorfismo.  $\square$

**Definición 3.1.27.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $L$  un lagrangiano regular. Si  $\text{Leg}$  es un difeomorfismo global, se dirá que  $L$  es hiperregular.

**Definición 3.1.28.** Sea  $L$  un lagrangiano hiperregular sobre una variedad diferenciable  $M$ . Se define el hamiltoniano asociado a  $L$  como la aplicación  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $H = E_L \circ \text{Leg}^{-1}$ .

Usando las propiedades del producto interno con respecto a los pullbacks de funciones, se pueden probar los siguientes resultados, que nos permiten comprobar que los formalismos lagrangiano y hamiltoniano son equivalentes.

**Proposición 3.1.29.** Sea  $L$  un lagrangiano hiperregular y sean  $\xi_L$  el campo de Euler-Lagrange para  $L$  y  $X_H$  el campo hamiltoniano de  $H$ . Entonces:

$$X_H = T\text{Leg} \circ \xi_L \circ \text{Leg}^{-1}.$$

**Corolario 3.1.30.** En las condiciones anteriores, si  $\sigma$  es una curva integral de  $\xi_L$ , entonces  $\gamma = \text{Leg} \circ \sigma$  es una curva integral de  $X_H$ .

## 3.2. Mecánica cosimpléctica

Presentamos ahora un formalismo para el estudio de los sistemas mecánicos no autónomos. Si bien existen otros enfoques para estudiar este mismo problema, por ejemplo, basados en 1-jets (ver [20]), obtendremos las ecuaciones del movimiento a partir del campo de evolución [16]. En [13] se estudia la forma en que ambos enfoques se relacionan.

Comencemos estudiando el formalismo hamiltoniano cosimpléctico. Consideremos  $M$  la variedad  $n$ -dimensional de configuración y sea  $T^*M$  su fibrado cotangente. Consideremos el fibrado cotangente extendido,  $T^*M \times \mathbb{R}$ , junto con la 2-forma  $\omega$  y la 1-forma  $\eta$  definidas en la sección 2.6, con lo que  $(T^*M \times \mathbb{R}, \omega, \eta)$  es una variedad cosimpléctica. Sea  $H : T^*M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable que denominaremos función hamiltoniana o hamiltoniana.

**Definición 3.2.1.** Se define el campo de evolución de  $H$ ,  $\mathcal{E}_H$  como el único campo de vectores sobre el fibrado cotangente cumpliendo:

$$\flat(\mathcal{E}_H) = dH - (\mathcal{R}(H) - 1)\eta, \tag{6}$$

donde  $\flat$  es el isomorfismo asociado a la estructura cosimpléctica.

**Proposición 3.2.2.** Una curva  $\sigma : I \rightarrow T^*M \times \mathbb{R}$  es curva integral de  $\mathcal{E}_H$  si y solo si, considerando coordenadas locales inducidas en el fibrado cotangente extendido  $(q^i, p_i, z)$ , siendo  $\sigma(t) = (q^i(t), p_i(t), z(t))$ , se cumple que:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \frac{dz}{dt} = 1.$$

En tal caso,  $z = t + \text{const}$  por lo que se pueden identificar ambas coordenadas.

*Demostración.* Nótese en primer lugar que, en coordenadas locales inducidas, el miembro derecho de (6) se expresa como:

$$dH - (\mathcal{R}(H) - 1)\eta = \frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Así pues, usando que:

$$\flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dp_i, \quad \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -dq^i, \quad \flat\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = dz,$$

expresando  $\mathcal{E}_H = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i} + C \frac{\partial}{\partial z}$  y, usando la  $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de  $\flat$ , concluimos que:

$$A^i dp_i - B_i dq^i + C dz = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Igualando los coeficientes de los elementos de la base del espacio cotangente  $\{dq^i, dp_i, dz\}$ :

$$\mathcal{E}_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Por tanto, comprobamos que  $\sigma(t) = (q^i(t), p_i(t), z(t))$  es curva integral de  $\mathcal{E}_H$  si y solo si cumple, localmente, las ecuaciones del enunciado.  $\square$

Pasamos ahora a considerar el formalismo lagrangiano. Para ello, nos centraremos en el estudio del fibrado tangente extendido,  $TM \times \mathbb{R}$ , donde es necesario considerar una función lagrangiana  $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se considera de nuevo la estructura casi tangente canónica,  $S$ , actuando ahora sobre  $TM \times \mathbb{R}$  de la misma forma en que se definió en la [sección 2.5.1](#) (considerando ahora  $\tau_M : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y definiendo el levantamiento vertical de un vector tangente a  $M$  a  $T(TM \times \mathbb{R})$  de forma análoga). A partir de ella se puede definir  $d_S$  como se hacía en dicha sección y, con ello las formas diferenciables siguientes:

$$\lambda_L = d_S L, \quad \omega_L = -dd_S L.$$

En coordenadas locales inducidas,  $(q^i, v^i, z)$  se tiene que:

$$\lambda_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i, \quad \omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i \wedge dv^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial z} dq^i \wedge dz, \quad (7)$$

con lo que se comprueba que  $(TM \times \mathbb{R}, \omega_L, dz)$  es una variedad cosimpléctica si y solo si el lagrangiano es regular, en el sentido definido en la [sección 2.5.1](#).

**Definición 3.2.3.** Supongamos que  $L$  es un lagrangiano regular y sea  $\Delta$  el campo de vectores de Liouville, que consideramos ahora como  $\Delta \in \mathfrak{X}(TM \times \mathbb{R})$  sin más que considerar nula su componente en  $T\mathbb{R}$ . Se define la energía lagrangiana como:

$$E_L = \Delta(L) - L.$$

**Definición 3.2.4.** En las condiciones anteriores se define el campo de evolución del lagrangiano regular  $L$  como el único campo de vectores que cumple, siendo  $\flat$  el isomorfismo asociado a la estructura cosimpléctica:

$$\flat(\mathcal{E}_L) = dE_L - (\mathcal{R}(H) - 1) dz.$$

**Proposición 3.2.5.** Una curva  $\sigma : I \rightarrow TM \times \mathbb{R}$  es una curva integral de  $\mathcal{E}_L$  si y solo si, considerando coordenadas locales inducidas en el fibrado tangente extendido  $(q^i, v^i, z)$ , siendo  $\sigma(t) = (q^i(t), v^i(t), z(t))$ , se cumple que:

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} = v^i(t), \quad \frac{dz}{dt} = 1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

con lo que, en particular, se pueden identificar las variables  $z$  y  $t$ .

*Demostración.* El resultado se prueba siguiendo el mismo esquema de demostración que en el [teorema 3.1.10](#)  $\square$

Al igual que ocurre en el caso de los sistemas autónomos, estos dos enfoques pueden relacionarse, al menos de manera local, a través de la transformación de Legendre. Para ello comenzamos definiendo la 1-forma:

$$\alpha_L = d_S L,$$

que, en coordenadas locales inducidas  $(q^i, v^i, z)$ , se expresa como:

$$\alpha_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} (q, v, z) dq^i.$$

Definimos la transformación de Legendre entre los espacios tangente y cotangente extendidos como:

$$\begin{aligned} Leg : TM \times \mathbb{R} &\longrightarrow T^* M \times \mathbb{R} \\ (X, z) &\longmapsto (\overline{Leg}(X, z), z), \end{aligned}$$

donde  $\overline{Leg}(X, z)$  actúa sobre un vector tangente  $v \in T_p M$  como  $\overline{Leg}(X, z)(v) = \alpha_L(X|_p, z)(\bar{v})$ , con  $\bar{v} \in T(TM \times \mathbb{R})$  y  $d\pi_M(\bar{v}) = v$ , siendo  $\pi_M : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow M$  la proyección canónica. Al igual que en el caso autónomo, se puede comprobar que esta definición no depende del vector  $\bar{v}$  tomado gracias a que  $\alpha_L$  es semibásica. En coordenadas locales inducidas  $(q^i, v^i, z)$  se expresa la transformación de Legendre como:

$$Leg(q^i, v^i, z) = \left( q^i, \frac{\partial L}{\partial v^i}, z \right).$$

Es claro que, definida entre los fibrados extendidos, la transformación de Legendre seguirá siendo un difeomorfismo local. Si además es un difeomorfismo global, se dirá que  $L$  es hiperregular. En este último caso se define a partir de la energía lagrangiana, la función hamiltoniana,  $H$ , en  $T^* M \times \mathbb{R}$  como:

$$H = E_L \circ Leg^{-1}.$$

**Proposición 3.2.6.** En las condiciones anteriores se cumple que:

$$\lambda_L = Leg^* \lambda_M, \quad \omega_L = Leg^* \omega, \quad dz = Leg^* dz,$$

considerando  $\lambda_M$  actuando sobre  $T^* M \times \mathbb{R}$  y  $\lambda_L$  sobre  $TM \times \mathbb{R}$ .

Esta proposición se demuestra de forma análoga a la [proposición 3.1.25](#). De ella se obtienen los siguientes corolarios que establecen la conexión entre las formulaciones hamiltoniana y lagrangiana.

*Observación 3.2.7.* También se podría demostrar el resultado, sin tener que repetir los cálculos locales, haciendo uso de algunas propiedades de las variedades producto y los levantamientos de vectores tangentes en las mismas [22].

**Corolario 3.2.8.** Sea  $L$  un lagrangiano hiperregular y  $\mathcal{E}_L$  su campo de evolución. Sea  $\mathcal{E}_H$  el campo de evolución para el hamiltoniano asociado a  $L$ . Entonces:

$$\mathcal{E}_H = T Leg \circ \mathcal{E}_L \circ Leg^{-1}.$$

Además,  $\sigma$  es una curva integral de  $\mathcal{E}_L$  si y solo si  $\gamma = Leg \circ \sigma$  lo es de  $\mathcal{E}_H$ .

### 3.3. Mecánica de contacto

Procedemos a tratar ahora con sistemas mecánicos en que aparecen fuerzas disipativas a través de hamiltonianos o lagrangianos que dependen de la acción.

Estos sistemas comenzaron estudiándose partiendo de un enfoque variacional. Para ello, se parte de una función lagrangiana definida sobre el fibrado tangente extendido de la variedad de configuración  $L : TQ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Se consideran las curvas  $\sigma : [a, b] \longrightarrow M$  tales que tienen inicio y final fijos,  $\sigma(a) = p_1$  y  $\sigma(b) = p_2$ . Dado  $c \in \mathbb{R}$ , para cada curva  $\sigma$  diferenciable, se define  $z(t)$  como la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = L(\sigma(t), \dot{\sigma}(t), z), \quad z(a) = c,$$

y se busca la curva  $\sigma$  que haga extremo  $z(b)$ . Nótese que  $z$  es la acción a lo largo de la trayectoria, pues su derivada temporal es el lagrangiano. El Principio de Herglotz nos dice que tal curva, describirá la evolución del sistema mecánico.

Por medio de técnicas de cálculo variacional, se concluye que dicha curva  $\sigma$  ha de ser solución de las ecuaciones de Herglotz (ver [12, 19]):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial L}{\partial z}. \quad (8)$$

Nótese que este principio es una generalización del Principio de Mínima Acción de Hamilton, el cual se recupera en el caso en que  $L$  no dependa de la acción.

Estos sistemas también se pueden tratar de forma geométrica utilizando la geometría de contacto [14]. Comenzamos estudiando el formalismo hamiltoniano dentro de este enfoque.

Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea su fibrado cotangente extendido  $T^*M \times \mathbb{R}$  y consideremos la 1-forma  $\eta$  definida en el [ejemplo 2.6.10](#), con lo que  $(T^*M \times \mathbb{R}, \eta)$  es una variedad de contacto. Como en particular es una variedad casi cosimpléctica, podemos considerar el isomorfismo canónico  $\flat$ . Consideremos  $H : T^*M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana.

**Definición 3.3.1.** En las condiciones anteriores se define el campo hamiltoniano de  $H$  como el único campo de vectores,  $X_H$ , tal que:

$$\flat(X_H) = dH - (\mathcal{R}(H) + H)\eta \quad (9)$$

**Proposición 3.3.2.** Una curva  $\sigma : I \rightarrow T^*M \times \mathbb{R}$  es una curva integral de  $X_H$  si y solo si, considerando coordenadas locales inducidas en el fibrado cotangente extendido,  $(q^i, p_i, z)$ , y, siendo  $\sigma(t) = (q^i(t), p_i(t), z(t))$ , se cumple que:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z} \right), \quad \frac{dz}{dt} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H.$$

*Demostración.* Comenzamos expresando el miembro derecho de (9) en coordenadas locales inducidas:

$$dH - (\mathcal{R}(H) + H)\eta = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + p_i \frac{\partial H}{\partial z} dq^i - H\eta.$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dp_i - p_i\eta, \quad \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -dq_i, \quad \flat\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \eta.$$

Así pues, usando la  $\mathcal{F}(M)$ -linealidad de  $\flat$  y poniendo  $X_H = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i} + C \frac{\partial}{\partial z}$ , se tiene que:

$$\flat(X_H) = -B_i dq^i + A^i dp_i + (C - p_i A^i)\eta = \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z} \right) dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - H\eta.$$

Nótese que  $\{dq^i, dp_i, \eta\}$  forman una base de los espacios cotangentes del fibrado cotangente extendido. Así pues, igualando los coeficientes de dichas 1-formas, concluimos que:

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} + \left( p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

El resultado se concluye de forma inmediata. □

La siguiente proposición nos demuestra que los sistemas con los que tratamos ahora son no conservativos.

**Proposición 3.3.3.** Sea  $H : T^*M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana. Entonces:

$$X_H(H) = -\mathcal{R}(H)H.$$

*Demostración.* Haciendo uso de coordenadas locales inducidas, teniendo en cuenta la expresión local de  $X_H$  obtenida en la demostración previa, el resultado es trivial. Para ver una demostración intrínseca, consultese [19]. □

Al igual que hicimos en las secciones precedentes, pasamos ahora a estudiar el mismo problema pero desde el punto de vista lagrangiano. Para ello partimos de una función lagrangiana,  $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  regular, es decir, tal que

$$(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

es invertible. Consideremos la 1-forma  $\lambda_L$  actuando sobre el fibrado tangente extendido como en la sección previa y definamos:

$$\eta_L = dz - \lambda_L,$$

donde  $z : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección sobre  $\mathbb{R}$ . Es inmediato comprobar, usando coordenadas locales inducidas, que  $(TM \times \mathbb{R}, \eta_L)$  es una estructura de contacto, gracias a que  $L$  es regular.

**Definición 3.3.4.** Siendo  $\Delta$  el campo de vectores de Liouville, se define la energía asociada al lagrangiano  $L$  como:

$$E_L = \Delta(L) - L.$$

**Definición 3.3.5.** En las condiciones anteriores, se define el campo de Euler-Lagrange,  $\xi_L$ , como el único campo de vectores cumpliendo:

$$\flat(\xi_L) = dE_L - (\mathcal{R}(E_L) + E_L)\eta_L. \quad (10)$$

**Proposición 3.3.6.** El campo de vectores de Reeb de la estructura  $(TM \times \mathbb{R}, \eta_L)$  está dado, en coordenadas locales inducidas  $(q^i, v^i, z)$ , por:

$$\mathcal{R}_L = \frac{\partial}{\partial z} - W^{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial z} \frac{\partial}{\partial v^i},$$

donde  $(W^{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  es la matriz inversa de la hessiana,  $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

*Demostración.* Sabemos que el campo de vectores de Reeb existe y es único. Así pues, basta con ver que si la expresión local de  $\mathcal{R}_L$  es la del enunciado,  $\flat(\mathcal{R}_L) = \eta_L$

Para ello, nótese que:

$$d\eta_L = -d\lambda_L,$$

por lo que su expresión en coordenadas locales es la dada por (7). Así pues, es inmediato que:

$$\flat\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial z} dq^i + \eta, \quad \flat\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) = -\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i.$$

Usando la linealidad de  $\flat$  se tiene que:

$$\flat(\mathcal{R}_L) = -\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial z} dq^i + \eta + W^{kj} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial z} \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^k} dq^i = -\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial z} dq^i + \eta + \delta_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial z} dq^i = \eta.$$

□

**Teorema 3.3.7.** Con la notación de las proposiciones precedentes, una curva  $\sigma : I \rightarrow TM \times \mathbb{R}$  es una curva integral de  $\xi_L$  si y solo si, para todas coordenadas locales inducidas,  $(q^i, v^i, z)$ , siendo  $\sigma(t) = (q^i(t), v^i(t), z(t))$ , se cumple que:

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i, \quad \frac{dz}{dt} = L(q^i, v^i, z), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i} \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Es decir, si y solo si la proyección sobre  $M$  de  $\sigma$  es solución de las ecuaciones de Herglotz (8).

*Demostración.* Basta usar la representación en coordenadas inducidas del campo de vectores de Reeb dada en la proposición anterior para expresar el miembro derecho de (10) de forma local.

Para concluir el resultado se razona como en la demostración del teorema 3.1.10. □

Si consideramos ahora la transformación de Legendre definida en la sección anterior, usando la linealidad de  $Leg^*$ , así como la proposición 3.2.6, se deduce de forma directa el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.8.** Sea  $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano hiperregular y sea la función hamiltoniana asociada a  $L$ ,  $H = E_L \circ \text{Leg}^{-1} : T^*M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces se cumple que:

$$\eta_L = \text{Leg}^* \eta.$$

De la proposición anterior se deduce, haciendo uso de las propiedades de los pullbacks de funciones y de las extensiones de aplicaciones al fibrado tangente, el siguiente corolario, que permite relacionar las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana, al menos localmente.

**Corolario 3.3.9.** Sea  $L$  un lagrangiano hiperregular y  $\xi_L$  su campo de Euler-Lagrange. Sea  $X_H$  el campo hamiltoniano para la función hamiltoniana asociada a  $L$ . Entonces:

$$X_H = T\text{Leg} \circ \xi_L \circ \text{Leg}^{-1}.$$

Además, una curva  $\sigma$  es curva integral de  $\xi_L$  si y solo  $\gamma = \text{Leg} \circ \sigma$  lo es de  $X_H$ .

**Ejemplo 3.3.10.** [12] Consideremos como variedad de configuración  $M = \mathbb{R}$  y definamos el lagrangiano  $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$L(x, v, z) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \alpha z.$$

Nótese que en este caso  $(x, v, z)$  son coordenadas locales inducidas en  $TM \times \mathbb{R}$  que de hecho son globales. Así se tiene que la transformada de Legendre viene dada por:

$$\begin{aligned} \text{Leg} : TM \times \mathbb{R} &\longrightarrow T^*M \times \mathbb{R} \\ (x, v, z) &\longmapsto \left( x, \frac{\partial L}{\partial v}, z \right) = (x, mv, z), \end{aligned}$$

y, en particular,  $\text{Leg}$  es biyectiva y por ello  $L$  es hiperregular. La energía asociada a este sistema vendrá dada por:

$$E_L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \alpha z,$$

y, por ello, el hamiltoniano será:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \alpha z.$$

Trabajando en el formalismo lagrangiano, vemos que el sistema ha de cumplir la ecuación de Herglotz:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = -m\dot{x}\alpha,$$

donde las derivadas temporales sobre la trayectoria se han indicado con un punto sobre la coordenada.

Trabajando en el formalismo hamiltoniano, se cumplen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -kx - \alpha p, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kx^2 - \alpha z.$$

En cualquiera de los dos casos, las ecuaciones son equivalentes a las de un oscilador armónico amortiguado:

$$m\ddot{x} + m\dot{x}\alpha + kx = 0.$$

Por tanto, comprobamos con un ejemplo cómo este formalismo nos permite estudiar correctamente los sistemas disipativos.

## 4. Termodinámica del no equilibrio

Antes de pasar a estudiar una descripción geométrica de los sistemas termodinámicos, análoga a la que se ha presentado en la sección anterior para los sistemas mecánicos, presentamos los postulados de la termodinámica del no equilibrio introducidos por Stückelberg en 1960 [25]. Stückelberg consiguió extender la teoría ya existente de la termodinámica del equilibrio a una teoría dinámica, en la que la evolución de los sistemas termodinámicos viene dictada por una serie de ecuaciones diferenciales. Para ello, introduce dos funciones de estado, la entropía y la energía, a través de dos postulados. Si bien en la obra original, al trabajar con sistemas discretos, Stückelberg solo considera el caso en que estos están cerrados, posteriores trabajos (ver [11]) han generalizado los postulados para que sean válidos en sistemas abiertos.

**Definición 4.0.1.** Una variable  $\xi$  en un sistema termodinámico se dice que es extensiva si su valor es igual al resultado de la suma de la misma variable definida sobre cada subsistema que forma el sistema termodinámico.

**Postulado 4.0.2** (Primera ley). Para todo sistema termodinámico, existe una función de estado extensiva, es decir, que solo depende de las variables que describen el sistema, y que no depende de forma explícita del tiempo,  $H$ , que denominaremos energía, tal que:

$$\frac{dH}{dt} = P_W^{ext} + P_Q^{ext} + P_M^{ext},$$

donde  $P_W^{ext}$  es la potencia debida a las fuerzas externas que actúan modificando las variables mecánicas del sistema;  $P_Q^{ext}$ , la potencia debida a la variación de las variables no mecánicas, es decir, la debida al intercambio de calor; y  $P_M^{ext}$  la debida al intercambio de materia con el exterior.

Un sistema se dice cerrado si  $P_M^{ext} = 0$ ; adiabáticamente cerrado, si es cerrado y  $P_Q^{ext} = 0$ ; y aislado, si es adiabáticamente cerrado y  $P_W^{ext} = 0$ . En este último caso se conservará la energía del sistema.

**Definición 4.0.3.** Consideremos que el sistema está descrito por unas variables mecánicas  $q^i$ . Entonces se definen las fuerzas generalizadas externas a partir de la igualdad:

$$P_W^{ext} = F_i^{ext} \frac{dq^i}{dt}.$$

**Postulado 4.0.4** (Segunda ley). Para todo sistema termodinámico existe una función de estado extensiva, denominada entropía,  $S$ , que cumple las siguientes dos condiciones:

- a) Principio de evolución: Si el sistema es adiabáticamente cerrado, la entropía es una función no decreciente del tiempo, es decir:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0.$$

- b) Principio de equilibrio: Si el sistema está aislado, la entropía tenderá, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a un máximo local, compatible con las restricciones de sistema aislado y posibles restricciones internas.

*Observación 4.0.5.* Las ecuaciones que obtendremos mediante el formalismo geométrico en la siguiente sección son consecuencia exclusivamente de la primera de las leyes introducidas por Stückelberg. La segunda ley se encarga de establecer restricciones sobre la expresión de las potencias que actúan sobre el sistema, permitiéndonos definir conceptos como los coeficientes de rozamiento o las conductividades térmicas y establecer sus signos. Cabe mencionar que el principio de equilibrio es necesario para que la teoría no sea invariante ante inversión temporal y, por ello, dé lugar a la flecha del tiempo (ver [25]).

## 4.1. Sistemas simples adiabáticamente cerrados

**Definición 4.1.1.** Se dirá que un sistema termodinámico es simple si para describirlo es necesario el uso de una única variable no mecánica. Postularemos que esta variable puede tomarse como su entropía,  $S^A$ .

*Observación 4.1.2.* Consideramos un sistema termodinámico, siendo  $E$  y  $S$  su energía y entropía, compuesto por  $P$  subsistemas simples de energía  $E_A$  y entropía  $S_A$ . Entonces, se ha de cumplir que:

$$E = \sum_{A=1}^P E_A, \quad S = \sum_{A=1}^P S_A.$$

Nótese que el estado total del sistema vendrá determinado por las variables mecánicas junto con las  $P$  entropías de cada subsistema (pues esto determina el estado de cada subsistema). Además, el estado del subsistema  $A$  vendrá descrito por  $S_A$ , así como un subconjunto de las variables mecánicas del sistema global, pero estas últimas pueden usarse para describir varios subsistemas simultáneamente, reflejando las interconexiones entre ellos.

Comencemos estudiando las consecuencias que pueden extraerse de los dos postulados para sistemas simples, adaptando lo presentado en [25] al caso en que, en lugar de velocidades, consideramos los momentos conjugados como variables mecánicas.

Consideramos un sistema termodinámico simple adiabáticamente cerrado, descrito por las variables mecánicas  $(q^i, p_i)$ , siendo  $p_i$  el momento conjugado de  $q^i$ , es decir, tal que:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq^i}{dt},$$

en la evolución del sistema. Sea  $S$  su entropía. Entonces sabemos que, por ser su energía,  $H$ , una función de estado:

$$H(t) = H(q^i(t), p_i(t), S(t)),$$

con lo que podemos calcular su derivada temporal fácilmente. Siendo  $F_i^{ext}$  las fuerzas generalizadas externas que actúan sobre el sistema:

$$F_i^{ext} \frac{dq^i}{dt} = P_W^{ext} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial S} \frac{dS}{dt}. \quad (11)$$

Por comodidad, denotaremos de ahora en adelante a las derivadas temporales mediante un punto encima de la variable. Definimos las fuerzas elásticas generalizadas y las fuerzas de inercia generalizadas por:

$$F_i^{el} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad F_i^{in} = -\dot{p}_i.$$

Introducimos las fuerzas de rozamiento generalizadas a partir de imponer la ecuación del balance de fuerzas para el sistema total:

$$F_i^{el} + F_i^{in} + F_i^{ext} + F_i^{roz} = 0, \quad \forall i.$$

Concluimos que estas serán las fuerzas que actúan sobre el sistema pero sin producir un trabajo, como por ejemplo, fuerzas cuyo punto de aplicación no se mueve o lo hace de forma perpendicular a la acción de la fuerza [4]. Reescribiendo esta ecuación de balance de fuerzas, podemos llegar a las ecuaciones que proporcionan la evolución de la parte mecánica del sistema:

$$\dot{p}_i = F_i^{el} + F_i^{ext} + F_i^{roz}. \quad (12)$$

Además, utilizando la ecuación (11), podemos obtener la evolución de la entropía:

$$\dot{S} = I = -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial S}} F_i^{roz} \dot{q}^i. \quad (13)$$

Esto nos permite definir siempre para un sistema simple una temperatura, la cual de nuevo será una función de estado al ser una derivada parcial de la energía, como:

$$T = \frac{\partial H}{\partial S},$$

aunque en cierto sentido sería más natural trabajar con la temperatura natural del sistema  $\tau = -\frac{1}{T}$ , pues usando la escala de temperaturas dada por  $\tau$  los sistemas serán más calientes cuando mayor sea  $\tau$  de forma continua, mientras que la escala dada por  $T$  presenta una discontinuidad en  $T = 0$  y, de hecho, las temperaturas negativas se corresponden con sistemas más calientes que las positivas (en el sentido en que, al poner en contacto un sistema con temperatura negativa y uno con temperatura positiva, habría una transferencia de energía en forma de calor del primero al segundo).

En general, ambas ecuaciones están acopladas, puesto que  $F_i^{roz}$ ,  $F_i^{ext}$ ,  $F_i^{el}$  y  $T$  dependerán tanto de las variables mecánicas, como de la termodinámica. Cuando la dependencia de las fuerzas generalizadas con la variable termodinámica se pueda despreciar, se podrán resolver las ecuaciones mecánicas del sistema de manera independiente, lo que conduce al formalismo típicamente usado en mecánica.

De acuerdo con el principio de evolución de la segunda ley,  $\dot{S} \geq 0$  para cualquier valor de las velocidades que consideremos. Así pues, considerando que se puede dar cualquier valor de las mismas y recordando que  $\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ , ha de poderse escribir en la forma:

$$F_i^{roz} = \lambda_{i,j}(q^i, p_i, S, t) \dot{q}^j,$$

donde los coeficientes  $\frac{\lambda_{i,j}}{T}$  en cada instante de tiempo dan lugar a una forma bilineal (que podemos tomar simétrica) semidefinida positiva. En particular, los coeficientes  $\lambda_{i,i}$ , que serán los coeficientes de rozamiento, habrán de tener el mismo signo que la temperatura.

Un razonamiento análogo, partiendo del principio de equilibrio, nos permite concluir que las derivadas primeras respecto de las variables mecánicas de la energía se habrán de anular en los estados de equilibrio, así como que los coeficientes  $\frac{\partial^2 H}{\partial(q^i)^2}$  y  $\frac{\partial^2 H}{\partial p_i^2}$  han de tener el mismo signo que la temperatura en dichos estados. Estos coeficientes se corresponderán en sistemas concretos con la masa, la constante elástica,...

Cuando consideramos el sistema cerrado, pero admitimos la presencia de una potencia  $P_Q^{ext}$  transmitida en forma de calor, razonando de manera análoga a como se ha hecho hasta ahora, concluimos que el único cambio que es necesario introducir es que la ecuación de evolución de la entropía está dada por:

$$\dot{S} = I + \frac{P_Q^{ext}}{T},$$

siendo  $I$  la variación de la entropía si el sistema se encontrara adiabáticamente cerrado. Por tanto, como sabemos que  $I \geq 0$ , concluimos que:

$$\dot{S} \geq \frac{P_Q^{ext}}{T},$$

lo que da lugar a la desigualdad conocida en la termodinámica del equilibrio para la evolución de la entropía en los procesos termodinámicos (que, escrita de manera rigurosa, es la ecuación previa):

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

**Ejemplo 4.1.3.** Estudiemos, a modo de ejemplo de aplicación de esta teoría, un oscilador unidimensional de masa  $M$  adiabáticamente cerrado, el cual será un sistema simple [25]. Consideraremos las variables mecánicas posición y momento,  $r$  y  $p$ , así como una única variable no mecánica, la entropía  $S$ . La energía del sistema vendrá dada por una función:

$$H = H(S, r, p) = \frac{p^2}{2M} + U(S, r),$$

la cual consideramos que se puede descomponer en energía cinética y energía potencial. Consideremos que está sometido a unas fuerzas externas,  $F^{ext}$ , de tal forma que la potencia mecánica que se introduce al sistema es:

$$P_W^{ext} = F^{ext} \dot{r}.$$

Así pues, si además, existe una fuerza de rozamiento,  $F^{roz}$ , usando la ecuación (12) para el balance de fuerzas en el sistema, teniendo en cuenta que  $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{r}$  en la evolución del sistema, llegamos a la ecuación de evolución de la parte mecánica:

$$\dot{p} = F^{ext} + F^{roz} - \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Además, la ecuación de evolución de la entropía vendrá dada por (13):

$$\dot{S} = -\frac{1}{T} F^{roz} \dot{r}.$$

De acuerdo con el principio de evolución,  $\dot{S} \geq 0$ , con lo que podemos introducir un coeficiente de rozamiento,  $\lambda$ , de forma que:

$$F^{roz} = -\lambda(r, p, S) \dot{r},$$

y deducir que el coeficiente de rozamiento ha de tener el mismo signo que la temperatura.

Además, a partir del principio de equilibrio, podemos deducir que, en los estados de equilibrio, las siguientes magnitudes tendrán el mismo signo que la temperatura:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{1}{M}.$$

Aplicamos ahora la aproximación armónica del oscilador entorno a un equilibrio del sistema approximando:

$$H(S, r, p) = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} k_0 (r - r_0)^2 + U_0(S),$$

y suponemos que los coeficientes  $M, k_0, \lambda$  son constantes. El principio de equilibrio nos permite concluir que tanto la masa  $M$  del sistema como su constante elástica  $k_0$  han de tener el mismo signo que la temperatura.

De esta forma, la ecuación de evolución mecánica se convierte en la de un oscilador armónico amortiguado forzado:

$$M\ddot{r} = -k_0(r - r_0) - \lambda\dot{r} + F^{ext}.$$

Nótese que, si bien este sistema ya fue estudiado en el [ejemplo 3.3.10](#), gracias a este nuevo formalismo, podemos también conocer cómo evolucionan las variables termodinámicas hacia el equilibrio y cómo la dependencia de los parámetros del problema con la temperatura (o, equivalentemente, con la entropía) puede ser tenida en cuenta.

Otros ejemplos de aplicación de estas leyes para estudiar la evolución de diversos sistemas simples en presencia de rozamiento se pueden encontrar en [4, 10].

## 4.2. Sistemas compuesto adiabáticamente cerrado sin transferencia interna de masa

Pasamos ahora a considerar un sistema adiabáticamente cerrado compuesto por  $P$  subsistemas simples, cada uno de ellos cerrado, es decir, que no intercambian materia entre sí. Así pues, describiremos este sistema por las variables  $(q^i, p_i, S^1, \dots, S^P)$  siguiendo la notación anterior. Nótese que, si bien el sistema global está adiabáticamente cerrado, cada uno de los subsistemas individuales no lo está, pues puede existir transferencia de energía en forma de calor entre los subsistemas. Denotamos por  $P_Q^{BA}$  la potencia transferida en forma de calor desde el subsistema  $B$  al subsistema  $A$ , la cual ha de cumplir que  $P_Q^{BA} = -P_Q^{AB}$ . Así, la potencia en forma de calor recibida por el subsistema  $A$ , definiendo  $P_Q^{AA} = 0$ , será:

$$P_Q^A = \sum_{B=1}^P P_Q^{BA}.$$

Además, sabemos que la energía del sistema se podrá expresar como:

$$H(q^i, p_i, S^1, \dots, S^P) = \sum_{A=1}^P H_A(q^i, p_i, S^A)$$

Estudiemos el subsistema simple  $A$ -ésimo. Para ello definamos las fuerzas de inercia generalizadas para este subsistema:

$$F_{A,i}^{in} = -\frac{1}{\dot{q}_i} \frac{\partial H_A}{\partial p_i} \dot{p}_i ..$$

La evolución de la energía de cada subsistema vendrá dada por:

$$F_{A,i}^{ext} \dot{q}^i + P_Q^A = \dot{H}_A = \frac{\partial H_A}{\partial q^i} \dot{q}^i - F_{A,i}^{in} \dot{q}^i + \frac{\partial H_A}{\partial S_A} \dot{S}_A, \quad (14)$$

donde consideramos que, sobre cada subsistema, actúan fuerzas externas,  $F_{A,i}^{ext}$ . Consideramos la acción de fuerzas de rozamiento,  $F_{A,i}^{roz}$ , actuando sobre cada subsistema y definimos  $F_i^{roz} = \sum_{A=1}^P F_{A,i}^{roz}$ , de manera que la ecuación del balance de fuerzas dará lugar a las ecuaciones siguientes:

$$F_{A,i}^{in} - \frac{\partial H_A}{\partial q^i} + F_{A,i}^{ext} + F_{A,i}^{roz} = 0, \quad \forall i, \quad \forall A. \quad (15)$$

Para cada  $i$ , sumamos las ecuaciones anteriores para todos los valores de  $A$ , con lo que, definiendo  $F_i^{ext} = \sum_{A=1}^P F_{A,i}^{ext}$  y teniendo en cuenta que  $\sum_{A=1}^P F_{A,i}^{in} = -\dot{p}_i$ , llegamos a la ecuación de evolución de la parte mecánica del sistema:

$$\dot{p}_i = F_i^{ext} + F_i^{roz} - \frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (16)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (14), podemos obtener la ecuación de evolución de la entropía de cada subsistema, donde  $T^A = \frac{\partial H}{\partial S_A} = \frac{\partial H_A}{\partial S_A}$ :

$$\dot{S}_A = -\frac{1}{T^A} F_{A,i}^{roz} \dot{q}^i + \frac{1}{T^A} P_Q^A = I^A + \frac{1}{T^A} P_Q^A, \quad (17)$$

donde  $I^A$  es la variación de la entropía que sufriría cada uno de dichos subsistemas si, estando adiabáticamente cerrado, estuviera sometido a las mismas fuerzas externas y de rozamiento y, por tanto, es positiva. Sumando estas ecuaciones, obtenemos la ecuación de la variación de la energía total del sistema:

$$\dot{S} = \sum_{A=1}^P I^A + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^P \sum_{B=1}^P \left( \frac{1}{T^A} - \frac{1}{T^B} \right) P_Q^{BA},$$

la cual hemos reescrito, de forma que el segundo sumando sea simétrico. Nótese que la transferencia de entropía debida a las fuerzas de rozamiento entre los subsistemas, resumida en los términos  $I^A$ , es independiente de si los subsistemas se encuentran adiabáticamente cerrados o no y, por tanto, no puede verse afectada por la transferencia de calor, es decir, por el segundo sumando. Por tanto, es razonable suponer que ambos sumandos son independientes y, por tanto, dado que  $\dot{S} \geq 0$  pues el sistema total es adiabáticamente cerrado, entonces ha de tenerse que:

$$\sum_{A=1}^P \sum_{B=1}^P \left( \frac{1}{T^A} - \frac{1}{T^B} \right) P_Q^{BA} \geq 0.$$

Por tanto, dicho sumatorio ha de provenir de una forma bilineal simétrica semidefinida positiva y podemos expresar:

$$P_Q^{BA} = \sum_{C=1}^P \sum_{D=1}^P \bar{\kappa}^{BA,DC} \left( \frac{1}{T^C} - \frac{1}{T^D} \right),$$

donde los coeficientes  $\bar{\kappa}^{BA,DC}$  son funciones de estado que forman dicha forma bilineal simétrica semidefinida positiva. Se suele realizar la aproximación de que la transferencia de calor entre los subsistemas  $A$  y  $B$  depende solo del estado de dichos subsistemas y que, por tanto, solo son no nulos, los coeficientes  $\bar{\kappa}^{BA,BA}$  que denotaremos simplemente por  $\bar{\kappa}^{BA}$ . Nótese que en particular  $\bar{\kappa}^{BA} = \bar{\kappa}^{AB}$  y que además, serán siempre positivos. Bajo esta aproximación, podemos definir las conductividades térmicas, las cuales habrán de ser positivas si  $T^A$  y  $T^B$  tienen el mismo signo, como:

$$\kappa^{AB} = \frac{\bar{\kappa}^{BA}}{T^A T^B}.$$

Este cambio de constantes, es equivalente a pasar de utilizar la escala natural de temperatura,  $\tau$ , a usar la usual,  $T$ , de manera que la transferencia de potencia en forma de calor entre dos subsistemas la podremos expresar también por:

$$P_Q^{BA} = -\kappa^{AB} (T^A - T^B)$$

Los coeficientes  $J_{AB} = -(\kappa^{AB} - \delta_{AB} \sum_{C=1}^P \kappa^{AC})$  se utilizarán en las posteriores secciones, en lugar de las conductividades térmicas, para utilizar la misma nomenclatura que se encuentra en la literatura. Nótese que estos cumplen que  $J_{AB} = J_{BA}$ , pues las conductividades térmicas son simétricas por construcción, y, además,  $\sum_A J_{AB} = 0$ .

A partir de este análisis es sencillo estudiar el caso de transferencia de potencia en forma de calor con el exterior, considerando el sistema global formado por el sistema en estudio, más las fuentes de calor [25].

En [11] se puede ver una demostración, para un sistema simple en el caso en que la energía puede descomponerse como suma de una parte cinética (dependiente solo de las velocidades y de la entropía) y una parte potencial (dependiente solo de las coordenadas generalizadas y la entropía), de cómo la ecuación mecánica que se deduce de la primera ley es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange de la parte mecánica del sistema.

## 5. Descripción geométrica de la Termodinámica del no equilibrio

En una serie de recientes artículos [5, 6, 7], Gay-Balmaz y Yoshimura proponen una formulación variacional de la termodinámica del no equilibrio basada en una generalización del principio de Hamilton. Para ello, introducen la producción de entropía mediante una restricción no lineal no holonómica, así como mediante una restricción variacional. Esto permite obtener las ecuaciones de evolución, tanto de la parte termodinámica, como de la parte mecánica, para sistemas de complejidad creciente, de forma sistemática. Esta formulación permite en particular generalizar las ecuaciones de evolución de los sistemas

termodinámicos presentados en la sección anterior al caso en que existe transferencia de materia, tanto entre los subsistemas que conforman el subsistema global, como con el exterior.

En esta sección, siguiendo [16], nos propondremos dar un formalismo geométrico, análogo al presentado en el caso mecánico en la [sección 3](#), para explicar la evolución de los sistemas termodinámicos discretos, es decir, aquellos que pueden ser descritos por un número finito de variables, que sea equivalente a las ecuaciones deducidas por Gay-Balmaz y Yoshimura, para lo cual trataremos con sistemas de complejidad creciente.

### 5.1. Sistemas simples adiabáticamente cerrados

Consideremos en primer lugar un sistema simple adiabáticamente cerrado. Estudiaremos su comportamiento desde el punto de vista hamiltoniano. Para ello, consideraremos que las coordenadas generalizadas del sistema se encuentran sobre una variedad diferenciable  $M$ . Consideremos  $T^*M$  su fibrado cotangente, el cual describirá el conjunto de todas las variables mecánicas, las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados. Como consideramos un sistema termodinámico simple, es necesaria una única variable no mecánica, la entropía,  $S$ , para describir su estado. Como  $S$  puede tomar cualquier valor real, tomamos  $P = T^*M \times \mathbb{R}$  como variedad que describe el estado del sistema.

Consideremos una función hamiltoniana (que identificamos con la energía descrita en la sección previa):

$$H : P \longrightarrow \mathbb{R},$$

y sean  $F^{ext}, F^{roz} : P \longrightarrow T^*M$  aplicaciones que conservan las fibras, es decir, tales que  $F^{ext}(\alpha, S) \in T_\alpha^*M$ ,  $\forall \alpha \in T^*M$  e igual para  $F^{roz}$ . Estas representarán las fuerzas externas y de rozamientos que se ejercen sobre el sistema en estudio. Considerando coordenadas locales  $(q^i, p_i, S)$  en  $P$ :

$$F^{ext} = F_i^{ext}(q, p, S) dq^i, \quad F^{roz} = F_i^{roz}(q, p, S) dq^i.$$

Definimos la 1-forma sobre  $P$ :

$$\eta = -\frac{\partial H}{\partial S} dS - F^{roz}.$$

Consideramos además la 2-forma definida sobre  $P$  por:

$$\omega = \pi_M^* \omega_M,$$

donde  $\omega_M$  es la forma simpléctica canónica de  $T^*M$  y  $\pi_M : P \longrightarrow T^*M$  es la proyección canónica. En coordenadas locales inducidas  $(q^i, p_i, S)$ :

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

De esta forma, el par  $(\omega, \eta)$  define una estructura parcialmente cosimpléctica de orden 1 sobre  $P$ . Consideremos el isomorfismo  $\flat$  definido en el [teorema 2.6.12](#). Considerando coordenadas locales inducidas este cumple:

$$\flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dp_i - F_i^{roz} \eta, \quad \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -dq^i, \quad \flat\left(\frac{\partial}{\partial S}\right) = -\frac{\partial H}{\partial S} \eta.$$

**Definición 5.1.1.** Se define el campo de evolución de  $H$  sujeto a las fuerzas externas  $F^{ext}$  como el único campo de vectores,  $\mathcal{E}_H$  que cumple:

$$\flat(\mathcal{E}_H) = dH + \eta - F^{ext}. \quad (18)$$

El siguiente resultado muestra que las curvas integrales de este campo de vectores proporcionan la evolución temporal del sistema termodinámico, pues cumplen las ecuaciones diferenciales obtenidas en [28]. Nótese que estas son equivalentes a las ecuaciones (12) y (13) obtenidas en la [sección 4.1](#).

**Proposición 5.1.2.** Una curva  $\sigma : I \longrightarrow P$  es una curva integral del campo de evolución de  $H$  sujeto a las fuerzas externas  $F^{ext}$  si y solo si, en coordenadas locales adaptadas  $(q^i, p_i, S)$ ,  $\sigma(t) = \sigma(q^i(t), p_i(t), S(t))$  es solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i^{ext} + F_i^{roz}, \quad \frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial S}} \frac{\partial H}{\partial p_i} F_i^{roz}. \quad (19)$$

En particular, definiendo la temperatura del sistema como  $T = \frac{\partial H}{\partial S}$ , al igual que en la [sección 4.1](#), se tiene que:

$$T \frac{dS}{dt} = -F_i^{roz} \frac{dq^i}{dt}.$$

*Demostración.* Consideremos coordenadas locales inducidas como en el enunciado y expresemos el campo  $\mathcal{E}_H$  en estas coordenadas locales como:

$$\mathcal{E}_H = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i} + C \frac{\partial}{\partial S}.$$

Aplicando el isomorfismo  $\flat$  a  $\mathcal{E}_H$ , usando su  $\mathcal{F}(P)$ -linealidad:

$$\flat(\mathcal{E}_H) = -B_i dq^i + A^i dp_i - \left( A^i F_i^{roz} + C \frac{\partial H}{\partial S} \right) \eta. \quad (20)$$

Por otro lado, expresando el lado derecho de (18) en coordenadas locales:

$$dH + \eta - F^{ext} = \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} - F_i^{roz} - F_i^{ext} \right) dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i. \quad (21)$$

Teniendo en cuenta que las 1-formas  $\{dq^i, dp_i, \eta\}$  forman una base de cada espacio cotangente en los puntos de un abierto de  $P$ , concluimos, igualando los coeficientes de dichas 1-formas en (20) y (21):

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i^{roz} + F_i^{ext} \quad \text{y} \quad A^i F_i^{roz} + C \frac{\partial H}{\partial S} = 0.$$

de donde se deduce de forma inmediata el resultado.  $\square$

*Observación 5.1.3.* Cabe destacar que, en la definición de  $\flat$ , los dos sumandos que aparecen tienen dimensiones distintas, pues  $\omega$  tiene dimensiones de acción, mientras que  $\eta \otimes \eta$  tiene dimensiones de energía al cuadrado. No obstante, se puede probar que es posible realizar una descomposición del fibrado cotangente,  $T^*P$ , como la suma de Whitney  $W \oplus \langle \eta \rangle$ . Por tanto, cada uno de los sumandos de dicha definición se encuentra en un espacio distinto y, por tanto, no surge ninguna incompatibilidad física en la definición debida al análisis dimensional.

Este mismo sistema se puede estudiar también desde el punto de vista lagrangiano. Para ello, consideramos  $M$  la variedad de configuración de la parte mecánica del sistema y  $TM$  el espacio de coordenadas y velocidades generalizadas. Consideremos como única variable no mecánica la entropía,  $S$ , con lo que el sistema termodinámico vendrá descrito por la variedad  $Q = TM \times \mathbb{R}$ . Sea  $L : Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana regular, tal como se definió en la [sección 2.5.1](#).

Definimos la energía del lagrangiano por:

$$E_L = \Delta(L) - L,$$

donde  $\Delta$  es el campo de vectores de Liouville. Consideremos que, de hecho, el lagrangiano es hiperregular, es decir, que la transformación de Legendre,  $Leg : Q \rightarrow P$ , es un difeomorfismo global. Entonces, definimos la función hamiltoniana como  $H = E_L \circ Leg^{-1}$ . En coordenadas locales inducidas se tiene que:

$$H(q, p, S) = p_i \dot{q}^i(q, p, S) - L(q, \dot{q}(q, p, S), S).$$

Es inmediato, trabajando en coordenadas, comprobar a partir de la definición de la transformación de Legendre que:

$$\frac{\partial H}{\partial S} = -\frac{\partial L}{\partial S} = T.$$

Se definen las 1-formas en  $Q$  dadas por  $\tilde{F}^{ext} = Leg^* F^{ext}$  y  $\tilde{F}^{roz} = Leg^* F^{roz}$ , las cuales se corresponden con las fuerzas externas y de rozamiento que actúan sobre el sistema, vistas en  $Q$ . Se definen la 1-forma  $\eta_L$  y la 2-forma  $\omega_L$  por:

$$\eta_L = \frac{\partial L}{\partial S} dS - \tilde{F}^{roz}, \quad \omega_L = -dd_S L.$$

Se tiene que  $Leg^* \omega = \omega_L$  y  $Leg^* \eta = \eta_L$ , por lo que es inmediato comprobar que  $(\omega_L, \eta_L)$  es una estructura parcialmente cosimpléctica sobre  $Q$ . Definimos el campo de evolución de  $E_L$  sujeto a las fuerzas externas  $\tilde{F}^{ext}$  como el único campo de vectores,  $\xi_L$ , que cumple:

$$\flat(\xi_L) = dE_L + \eta_L - \tilde{F}^{ext}$$

. La siguiente proposición nos permite establecer la relación entre los campos de evolución definidos desde el punto de vista hamiltoniano y lagrangiano y, a partir de ella, deducir que la evolución del sistema descrita por ambos métodos es equivalente y coincide con la obtenida por Gay-Balmaz y Yoshimura en [7].

**Proposición 5.1.4.** En las condiciones anteriores se cumple que:

$$\mathcal{E}_H = T\text{Leg} \circ \xi_L \circ \text{Leg}^{-1}.$$

En particular,  $\gamma$  es una curva integral de  $\xi_L$  si y solo si,  $\sigma = \text{Leg}^{-1} \circ \gamma$  es una curva integral de  $\mathcal{E}_H$ .

**Corolario 5.1.5.** Una curva  $\gamma : I \rightarrow Q$  es una curva integral de  $\xi_L$  si y solo si, en coordenadas locales,  $(q^i, v^i, S)$ , se cumple que, siendo  $\gamma(t) = \gamma(q^i(t), v^i(t), S(t))$ :

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \tilde{F}_i^{roz} + \tilde{F}_i^{ext}, \quad \frac{\partial L}{\partial S} \frac{dS}{dt} = \tilde{F}_i^{roz} \frac{dq^i}{dt},$$

donde  $\tilde{F}^{roz} = \tilde{F}_i^{roz} dq^i$  y  $\tilde{F}^{ext} = \tilde{F}_i^{ext} dq^i$ .

*Demostración.* Comencemos notando que, si  $(q, v, S)$ ,  $(q, p, S)$  son coordenadas locales inducidas en  $Q$  y  $P$ , respectivamente, entonces la transformación de Legendre se expresa de forma trivial localmente. En particular, es inmediato observar que:

$$\tilde{F}_i^{ext} = F_i^{ext} \circ \text{Leg}, \quad \tilde{F}_i^{roz} = F_i^{roz} \circ \text{Leg}.$$

Así pues, teniendo en cuenta que  $\text{Leg}^{-1} \circ \gamma$  es una curva integral de  $\mathcal{E}_H$ , esta habrá de cumplir las ecuaciones (19). Como además,  $\text{Leg}^{-1}(q, p, S) = \left( q, \frac{\partial H}{\partial p_i}, S \right)$  y  $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ , entonces vemos que se ha de cumplir:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = v^i, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} + \tilde{F}_i^{roz} + \tilde{F}_i^{ext}, \quad \frac{\partial L}{\partial S} \frac{dS}{dt} = \tilde{F}_i^{roz} \frac{dq^i}{dt}.$$

Hemos usado que trabajando con la expresión en coordenadas de  $H$  en función de  $L$  es fácil deducir que:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

□

*Observación 5.1.6.* Trabajos previos proponían estudiar la evolución de algunos ejemplos de sistemas termodinámicos por medio de la geometría de contacto. Estos resultados pueden entenderse como un caso particular de nuestro estudio. En el caso concreto de [2], basta tomar  $F_i^{roz} = -\mathcal{R}(H)p_i$  y  $F^{ext} = 0$  para que el campo de evolución que ahí se define sea el mismo que consideramos en este trabajo.

## 5.2. Sistemas compuestos adiabáticamente cerrados

Consideremos ahora un sistema adiabáticamente cerrado, compuesto por  $P$  subsistemas simples, cerrados, es decir, tales que no intercambian materia entre sí, pero sí pueden intercambiar energía en forma de calor. Sea  $M$  la variedad de configuración y  $T^*M$  su espacio cotangente, que representa el espacio de fases de las variables mecánicas. Cada uno de los subsistemas estará caracterizado por una única variable no mecánica, su entropía,  $S_A$ . Así pues, el sistema termodinámico puede describirse por medio de la variedad  $P_1 = T^*M \times \mathbb{R}^P$ . Para poder desarrollar el formalismo correcto, hemos de considerar, para cada subsistema, una variable auxiliar,  $\Sigma_A$ , que, sobre la evolución del sistema, coincidirá con la entropía (no ocurrirá así en generalizaciones de este estudio para sistemas abiertos como veremos en la sección 5.3). Además, consideraremos unas nuevas variables,  $\Gamma^A$ , que llamaremos desplazamientos térmicos, tales que, sobre la trayectoria, su derivada será la temperatura del sistema. Así pues,  $S_A$  será el momento conjugado de la coordenada generalizada  $\Gamma^A$ , usando la nomenclatura típica de la mecánica. Sea  $P_2 = T^*M \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^P$ , donde las primeras  $P$  variables no mecánicas serán los desplazamientos térmicos, las segundas las entropías de cada subsistema y las últimas, las variables auxiliares  $\Sigma_A$ . Consideraremos la proyección canónica  $\pi : P_2 \rightarrow P_1$ .

Sobre cada subsistema simple actuarán tanto fuerzas de rozamiento como externas, las cuales introduciremos mediante sendas 1-formas  $F_A^{roz}, F_A^{ext} : P_1 \rightarrow T^*M$ , que identificaremos con sus pullbacks por  $\pi$ . Si consideramos coordenadas locales inducidas,  $(q, p, \Gamma, S, \Sigma)$ :

$$F_A^{roz} = F_{A,i}^{roz} dq^i, \quad F_A^{ext} = F_{A,i}^{ext} dq^i.$$

Sean además  $F^{roz} = \sum_{A=1}^P F_A^{roz} = F_i^{roz} dq^i$  y, análogamente,  $F^{ext} = \sum_{A=1}^P F_A^{ext} = F_i^{ext} dq^i$ . Consideremos una función hamiltoniana,  $H : P_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , que de nuevo identificaremos con su pullback por  $\pi$ , y funciones

$J_{AB} : P_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ , que también identificaremos con sus pullbacks a  $P_2$  y que cumplen  $\sum_{A=1}^P J_{AB} = 0$ ,  $\forall B$  y  $J_{AB} = J_{BA}$ . Estas últimas se corresponderán con las funciones de estado  $J_{AB}$  introducidas en [sección 4.2](#).

Definimos las  $P$  1-formas  $\eta_A$ ,  $A = 1, \dots, P$ , y la 2-forma  $\omega$  por:

$$\eta_A = -\frac{\partial H}{\partial S_A} d\Sigma_A - F_A^{roz} - J_{AB} d\Gamma^B, \quad \omega = \omega_M + d\Gamma^A \wedge d(S_A - \Sigma_A),$$

donde  $\omega_M$  es el pullback a través de la proyección  $\pi_2 : P_2 \longrightarrow T^*M$  de la forma simpléctica canónica a  $P_2$ . Nótese que, en la definición de  $\eta_A$ , no se suma sobre el índice  $A$  en el primer sumando. En coordenadas locales inducidas:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i + d\Gamma^A \wedge d(S_A - \Sigma_A).$$

Con estas definiciones,  $(\omega, \eta_1, \dots, \eta_P)$  es una estructura parcialmente cosimpléctica de orden  $P$  sobre  $P_2$ . Consideremos el isomorfismo  $\flat$  canónico introducido para estas estructuras en el [teorema 2.6.12](#).

**Definición 5.2.1.** Se define el campo de evolución de  $H$  sujeto a las fuerzas externas  $F^{ext}$  como el único campo de vectores,  $\mathcal{E}_H$ , que cumple:

$$\flat(\mathcal{E}_H) = dH + \sum_{A=1}^P \eta_A - F^{ext}. \quad (22)$$

El siguiente resultado nos muestra cómo las curvas integrales del campo de evolución cumplen las ecuaciones de evolución del sistema termodinámico deducidas por Stückelberg ([16](#)) y ([17](#)), siendo la transferencia de energía en forma de calor entre los subsistemas:

$$P_Q^A = -\sum_{B=1}^P J_{AB} (T^B - T^A).$$

**Proposición 5.2.2.** Una curva  $\sigma : I \longrightarrow P_2$  es una curva integral de  $\mathcal{E}_H$  si y solo si, en coordenadas locales inducidas,  $(q, p, \Gamma, S, \Sigma)$ , siendo  $\sigma(t) = \sigma(q(t), p(t), \Gamma(t), S(t), \Sigma(t))$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i^{roz} + F_i^{ext}, & \frac{d\Gamma^A}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial S_A}, & \frac{dS_A}{dt} &= \frac{d\Sigma_A}{dt}, \\ \frac{dS_A}{dt} &= -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial S_A}} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} F_i^{roz} + \frac{\partial H}{\partial S_B} J_{AB} \right). \end{aligned}$$

En particular, definiendo la temperatura de cada subsistema como  $T^A = \frac{\partial H}{\partial S_A}$ , teniendo en cuenta que  $\sum_B J_{AB} T^A = 0$  pues  $\sum_B J_{AB} = 0$ , entonces se cumplirá:

$$-T^A \frac{dS_A}{dt} = F_i^{roz} \frac{dq^i}{dt} + \sum_{B=1}^P J_{AB} (T^B - T^A).$$

*Demostración.* Comencemos calculando cómo actúa el isomorfismo  $\flat$  sobre la base de vectores tangentes asociada a las coordenadas elegidas:

$$\begin{aligned} \flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) &= dp_i - F_{A,i}^{roz} \eta_A, & \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) &= dq^i, & \flat\left(\frac{\partial}{\partial \Gamma^A}\right) &= d(S_A - \Sigma_A) - \sum_{A=1}^P J_{BA} \eta_B, \\ \flat\left(\frac{\partial}{\partial S_A}\right) &= d\Gamma^A \text{ quad} & \flat\left(\frac{\partial}{\partial \Sigma_A}\right) &= d\Gamma^A - \frac{\partial H}{\partial S_A} \eta_A. \end{aligned}$$

Así pues, si escribimos de forma local  $\mathcal{E}_H = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i} + C^A \frac{\partial}{\partial \Gamma^A} + D_A \frac{\partial}{\partial S_A} + E_A \frac{\partial}{\partial \Sigma_A}$ , entonces se cumplirá que:

$$\flat(\mathcal{E}_H) = -B_i dq^i + A^i dp_i + (E_A - D_A) d\Gamma^A + C^A d(S_A - \Sigma_A) - \sum_{A=1}^P \left( A^i F_{A,i}^{roz} + C^B J_{AB} + E_A \frac{\partial H}{\partial S_A} \right).$$

Por otro lado, escribiendo de forma local el miembro derecho de (22):

$$dH + \sum_{A=1}^P \eta_A - F^{ext} = \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} - F_i^{roz} - F_i^{ext} \right) dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial S_A} d(S_A - \Sigma_A).$$

Teniendo en cuenta que  $\{dq^i, dp_i, d\Gamma^A, d(S_A - \Sigma_A), \eta_A\}$  forman una base del espacio cotangente de  $P_2$  en cada punto de un abierto, igualando los coeficientes de dichas 1-formas se obtiene:

$$\begin{aligned} A^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & B_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i^{roz} + F_i^{ext}, & C^A &= \frac{\partial H}{\partial S_A}, & E_A - D_A &= 0, \\ A^i F_{A,i}^{roz} + C^B J_{AB} + E_A \frac{\partial H}{\partial S_A} &= 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\sigma(t)$  es curva integral de  $E_H$  si y solo si:

$$A^i = \frac{dq^i}{dt}, \quad B_i = \frac{dp_i}{dt}, \quad C^A = \frac{d\Gamma^A}{dt}, \quad D_A = \frac{dS_A}{dt}, \quad E_A = \frac{d\Sigma_A}{dt},$$

se concluye el resultado.  $\square$

Al igual que en la sección precedente, se puede establecer un formalismo análogo, basado en una función lagrangiana. Mediante la transformación de Legendre se puede establecer la equivalencia entre ambos formalismos, en el caso regular, localmente, y en el caso hiperregular, globalmente.

### 5.3. Sistemas abiertos

Estudiaremos ahora la extensión de este formalismo para sistemas termodinámicos abiertos. Al igual que en [7, 16], por simplicidad de la notación, nos restringiremos al caso de un sistema termodinámico simple con una sola especie química y no tendremos en cuenta la energía mecánica de la especie química, aunque el estudio puede hacerse en casos más generales, tanto desde el punto de vista variacional (ver [6]), como desde el punto de vista geométrico (en [16] se encuentra el estudio hecho para un sistema termodinámico cerrado simple con varias especies químicas, así como para un sistema termodinámico cerrado compuesto con una especie química por subsistema).

Sea  $M$  la variedad de configuración, de manera que  $T^*M$  será el espacio de fases del sistema. Denotaremos por  $N$  al número de moles del sistema termodinámico y consideraremos que está en contacto con  $A$  fuentes de materia externas y con  $B$  fuentes de calor. Para describir los sistemas abiertos, será necesario introducir una nueva variable auxiliar, análoga a los desplazamientos térmicos,  $W$ , que denominaremos desplazamiento termodinámico y cuya derivada temporal en la evolución del sistema será el potencial químico. Así pues,  $W$  será el momento canónico conjugado del número de moles,  $N$ . Denotaremos por  $\Gamma$  al desplazamiento térmico del sistema, que tendrá la misma interpretación que los introducidos en la sección anterior, por  $S$ , a la entropía y por  $\Sigma$ , a la variable auxiliar introducida en la sección previa, que ya no será igual a la entropía sobre la trayectoria. Consideraremos que todas estas variables pueden tomar cualquier valor real. Así pues, definimos las variedades  $P_1 = T^*M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , donde la primera variable no mecánica será  $N$  y la segunda  $S$ , y  $P_2 = T^*M \times \mathbb{R}^5$  considerando las variables no mecánicas ordenadas como  $W, N, \Gamma, S, \Sigma$ . Sea  $\pi : P_2 \rightarrow P_1$  la proyección canónica.

Consideramos que sobre el sistema actúan fuerzas externas y de rozamiento dadas por las 1-formas  $F^{ext}, F^{roz} : P_1 \rightarrow T^*M$ , que identificamos con sus pullbacks a  $P_2$  a través de  $\pi$ . También consideraremos  $A$  funciones  $\mathcal{J}^a : P_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , que identificaremos con sus pullbacks a  $P_2$  y que representan los flujos molares desde las fuentes de materia al sistema. Definimos de manera análoga las funciones  $\mu^a, T^a, S^a, T^b, J_S^b : P_1 \rightarrow \mathbb{R}$  para  $a = 1, \dots, A$  y  $b = 1, \dots, B$ , que identificaremos con sus pullbacks por  $\pi$ . Estas representarán, respectivamente, el potencial químico de la  $a$ -ésima fuente de materia, su temperatura, su entropía molar, la temperatura de la  $b$ -ésima fuente de calor y el flujo de entropía desde dicha fuente de calor al sistema. Finalmente consideramos  $\mathcal{J}_S^a = \mathcal{J}^a S^a$  el flujo de entropía desde la fuente de materia  $a$ -ésima al sistema.

Definimos la 1-forma  $\eta$  y la 2-forma  $\omega$  siguientes:

$$\eta = -\frac{\partial H}{\partial S} d\Sigma - F^{roz} - \sum_{a=1}^A (\mathcal{J}^a dW + \mathcal{J}_S^a d\Gamma) - \sum_{b=1}^B J_S^b d\Gamma,$$

$$\omega = \omega_M + dW \wedge dN + d\Gamma \wedge d(S - \Sigma),$$

donde  $\omega_M$  es el pullback de la forma simpléctica canónica de  $T^*M$  a través de la proyección  $\pi_2 : P_2 \longrightarrow T^*M$ . Es fácil comprobar, trabajando con coordenadas locales, que  $(\omega, \eta)$  es una estructura parcialmente cosimpléctica de orden 1 en  $P_2$ . Por tanto podemos considerar el isomorfismo  $\flat$  definido en el [teorema 2.6.12](#).

**Definición 5.3.1.** En las condiciones anteriores, se define el campo evolución sometido a las fuerzas externas  $F^{ext}$ ,  $\mathcal{E}_H$ , como el único campo de vectores que cumple:

$$\flat(\mathcal{E}_H) = dH + \eta - F^{ext} - \left( \sum_{a=1}^A (\mathcal{J}^a \mu^a + \mathcal{J}_S^a T^a) + \sum_{b=1}^B J_S^b T^b \right) \eta. \quad (23)$$

De nuevo será el campo evolución el que dictamine la evolución del sistema termodinámico, a través de sus curvas integrales.

**Proposición 5.3.2.** Una curva  $\sigma : I \longrightarrow P_2$  es una curva integral de  $\mathcal{E}_H$  si y solo si, considerando coordenadas locales inducidas,  $(q, p, W, N, \Gamma, S, \Sigma)$ , siendo  $\sigma(t) = (q(t), p(t), W(t), N(t), \Gamma(t), S(t), \Sigma(t))$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i^{roz} + F_i^{ext}, & \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial N}, & \frac{dN}{dt} &= \sum_{a=1}^A \mathcal{J}^a, \\ \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial S}, & \frac{dS}{dt} &= \frac{d\Sigma}{dt} + \left( \sum_{a=1}^A \mathcal{J}_S^a + \sum_{b=1}^B J_S^b \right), \\ -\frac{\partial H}{\partial S} \frac{d\Sigma}{dt} &= F_i^{roz} \frac{dq^i}{dt} + \sum_{a=1}^A \mathcal{J}^a \frac{dW}{dt} + \left( \sum_{a=1}^A \mathcal{J}_S^a + \sum_{b=1}^B J_S^b \right) \frac{d\Gamma}{dt} - \left( \sum_{a=1}^A (\mathcal{J}^a \mu^a + \mathcal{J}_S^a T^a) + \sum_{b=1}^B J_S^b T^b \right). \end{aligned}$$

*Demostración.* Comencemos viendo cómo actúa el isomorfismo  $\flat$  sobre los vectores tangentes asociados a las coordenadas locales consideradas en el enunciado:

$$\begin{aligned} \flat\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) &= dp_i - F_i^{roz} \eta, & \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) &= -dq^i, & \flat\left(\frac{\partial}{\partial W}\right) &= dN - \sum_{a=1}^A \mathcal{J}^a \eta, & \flat\left(\frac{\partial}{\partial N}\right) &= -dW, \\ \flat\left(\frac{\partial}{\partial \Gamma}\right) &= d(S - \Sigma) - \left( \sum_{a=1}^A \mathcal{J}_S^a + \sum_{b=1}^B J_S^b \right) \eta, & \flat\left(\frac{\partial}{\partial S}\right) &= -d\Gamma, & \flat\left(\frac{\partial}{\partial \Sigma}\right) &= d\Gamma - \frac{\partial H}{\partial S} \eta. \end{aligned}$$

Por tanto, expresando de forma local  $\mathcal{E}_H = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i} + C \frac{\partial}{\partial W} + D \frac{\partial}{\partial N} + E \frac{\partial}{\partial \Gamma} + F \frac{\partial}{\partial S} + G \frac{\partial}{\partial \Sigma}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \flat(\mathcal{E}_H) &= A^i dp_i - B_i dq^i + CdN - DdW + Ed(S - \Sigma) + (G - F)d\Gamma - \\ &\quad - \left( A^i F_i^{roz} + \sum_{a=1}^A C \mathcal{J}^a + \left( \sum_{a=1}^A \mathcal{J}_S^a + \sum_{b=1}^B J_S^b \right) E + G \frac{\partial H}{\partial S} \right) \eta. \end{aligned}$$

Por otro lado, el lado derecho de (23) se puede expresar localmente como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} - F_i^{roz} - F_i^{ext} \right) dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - \sum_{a=1}^A \mathcal{J}^a dW + \frac{\partial H}{\partial N} dN - \left( \sum_{a=1}^A \mathcal{J}_S^a + \sum_{b=1}^B J_S^b \right) d\Gamma + \frac{\partial H}{\partial S} d(S - \Sigma) - \\ - \left( \sum_{a=1}^A (\mathcal{J}^a \mu^a + \mathcal{J}_S^a T^a) + \sum_{b=1}^B J_S^b T^b \right) \eta. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\{dq^i, dp_i, dW, dN, d\Gamma, d(S - \Sigma), \eta\}$  forman una base de los espacios cotangentes de  $P_2$  para todos los puntos de un abierto e igualando los coeficientes de dichas 1-formas a ambos lados de (23), se tiene que:

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + F_i^{roz} + F_i^{ext}, \quad C = \frac{\partial H}{\partial N}, \quad D = \sum_{a=1}^A \mathcal{J}^a, \quad E = \frac{\partial H}{\partial S},$$

$$F = G + \sum_{a=1}^A \mathcal{J}_S^a + \sum_{b=1}^B J_S^b, \quad A^i F_i^{roz} + \sum_{a=1}^A (\mathcal{J}^a (C - \mu^a) + \mathcal{J}_S^a (E - T^a)) + \sum_{b=1}^B J_S^b (E - T^b) + G \frac{\partial H}{\partial S} = 0.$$

lo que permite concluir el resultado de la misma forma que en las secciones anteriores.  $\square$

A partir de:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{dS}{dt} - \sum_{a=1}^A \mathcal{J}_S^a - \sum_{b=1}^B J_S^b = \frac{dS}{dt} + \frac{dS_M}{dt} + \frac{dS_Q}{dt},$$

podemos concluir que la variación de la entropía del sistema global compuesto por las fuentes y el sistema es la derivada temporal de  $\Sigma$ . Como el sistema total estará aislado, de acuerdo con el principio de evolución de Stuckelberg, se tendrá que  $\frac{d\Sigma}{dt} \geq 0$ , [7].

De nuevo se puede hacer un estudio de estos sistemas basado en una función lagrangiana (ver [16]). Haciendo uso de la transformada de Legendre se consigue establecer la equivalencia entre dicha formulación y la que se ha presentado en esta sección (de forma local si la función lagrangiana es regular y de forma global si es hiperregular), con lo que se comprueba que las ecuaciones anteriores son el equivalente hamiltoniano de las utilizadas por Gay-Balmaz y Yoshimura en [7].

## 6. Conclusiones

En este trabajo hemos introducido el concepto de variedad diferenciable, prestando especial atención a los fibrados tangentes y cotangentes.

Hemos hecho énfasis en un tipo especial de variedades, con una estructura adicional, las variedades simplécticas y diversas generalizaciones suyas. Gracias a esta estructura adicional, las variedades simplécticas y sus generalizaciones nos han permitido estudiar la dinámica de un sistema mecánico de forma global, sin necesidad de recurrir al uso de coordenadas, tanto en el caso de sistemas autónomos, como en los no autónomos. Además, utilizando variedades de contacto, hemos podido estudiar sistemas en que el lagrangiano depende explícitamente de la acción, lo que nos ha permitido introducir en una formulación hamiltoniana/lagrangiana por primera vez en el trabajo, fuerzas disipativas proporcionales a la velocidad. Además, hemos enunciado el teorema de Noether dentro de este formalismo, el cual nos permite establecer integrales primarias del movimiento de forma sencilla.

Para establecer una estructura geométrica de la termodinámica análoga a la que existe en mecánica, hemos partido de los dos postulados de Stückelberg, a partir de los cuales hemos deducido las ecuaciones de evolución de los sistemas cerrados, basándonos en el concepto de sistemas simples. Además, el segundo postulado nos ha permitido introducir funciones de estado como las conductividades térmicas y establecer el signo que estas han de tener en los estados de equilibrio termodinámico. Más tarde, se ha comprobado cómo, en el caso en el que las fuerzas que se aplican sobre el sistema no dependan de la variable entropía las ecuaciones mecánicas y termodinámicas se desacoplan, recuperándose para las primeras los resultados conocidos de mecánica.

Finalmente, hemos utilizado las estructuras parcialmente cosimplécticas de orden  $P$  para establecer un formalismo geométrico global de la termodinámica del no equilibrio en sistemas de complejidad creciente, tanto cerrados como abiertos. Además, hemos comprobado como este se puede establecer tanto desde el punto de vista hamiltoniano, como desde el punto de vista lagrangiano y que, cuando la función lagrangiana es regular o hiperregular, se consigue establecer una equivalencia entre ambas descripciones por medio de la transformación de Legendre.

En general, en este formalismo hemos introducido 1-formas que recogen las variaciones de la entropía, así como las potencias internas mecánica, de calor y másica, de forma análoga a como lo hacen las restricciones variacionales utilizadas por Gay-Balmaz y Yoshimura. La definición del campo evolución, permite introducir las fuerzas externas, así como el resto de contribuciones a la energía del sistema que no aparecen en las 1-formas.

Este nuevo formalismo abre la posibilidad de establecer nuevos métodos numéricos que permitan realizar simulaciones de sistemas termodinámicos, asegurando que ciertas de sus propiedades no se ven afectadas por errores en la discretización del problema como ocurriría con métodos generales [2]. Además, se podrían desarrollar resultados que generalicen el teorema de Noether para sistemas termodinámicos fuera del equilibrio, o introducir corchetes análogos a los corchetes de Poisson, muy utilizados en mecánica.

## Referencias

- [1] R. Abraham y J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. AMS Chelsea publishing. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, 2008. ISBN: 9780821844380.

- [2] A. Anahory Simoes et al. “Contact geometry for simple thermodynamical systems with friction”. En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 476.2241 (2020), pág. 20200244. doi: [10.1098/rspa.2020.0244](https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0244).
- [3] B. Cappelletti-Monyano, A. De Nicola e I. Yudin. “A survey on cosymplectic geometry”. En: *Reviews in Mathematical Physics* 25.10 (2013), pág. 1343002. doi: [10.1142/S0129055X13430022](https://doi.org/10.1142/S0129055X13430022).
- [4] C. Ferrari y C. Gruber. “Friction force: from mechanics to thermodynamics”. En: *European Journal of Physics* 31.5 (ago. de 2010), pág. 1159. doi: [10.1088/0143-0807/31/5/017](https://doi.org/10.1088/0143-0807/31/5/017).
- [5] F. Gay-Balmaz y H. Yoshimura. “A Lagrangian variational formulation for nonequilibrium thermodynamics. Part I: Discrete systems”. En: *Journal of Geometry and Physics* 111 (2017), págs. 169-193. ISSN: 0393-0440. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.08.018>.
- [6] F. Gay-Balmaz y H. Yoshimura. “A Variational Formulation of Nonequilibrium Thermodynamics for Discrete Open Systems with Mass and Heat Transfer”. En: *Entropy* 20.3 (2018). ISSN: 1099-4300. DOI: [10.3390/e20030163](https://doi.org/10.3390/e20030163).
- [7] F. Gay-Balmaz y H. Yoshimura. “From Lagrangian Mechanics to Nonequilibrium Thermodynamics: A Variational Perspective”. En: *Entropy* 21.1 (2019). ISSN: 1099-4300. doi: [10.3390/e21010008](https://doi.org/10.3390/e21010008).
- [8] C. Godbillon. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Collection Méthodes. Hermann, 1969. ISBN: 9782705655684.
- [9] H. Goldstein, C.P. Poole y J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002. ISBN: 9780201657029.
- [10] C. Gruber. “Thermodynamics of systems with internal adiabatic constraints: time evolution of the adiabatic piston”. En: *European Journal of Physics* 20.4 (jul. de 1999), pág. 259. doi: [10.1088/0143-0807/20/4/303](https://doi.org/10.1088/0143-0807/20/4/303).
- [11] C. Gruber y S.D. Brechet. “Lagrange Equations Coupled to a Thermal Equation: Mechanics as Consequence of Thermodynamics”. En: *Entropy* 13.2 (2011), págs. 367-378. ISSN: 1099-4300. doi: [10.3390/e13020367](https://doi.org/10.3390/e13020367).
- [12] R.B. Guenther, C.M. Guenther y J.A. Gottsch. *The Herglotz Lectures on Contact Transformations and Hamiltonian Systems*. Lecture Notes in Nonlinear Analysis. Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies. Nicholas Copernicus University, 1995. ISBN: 9788323107361.
- [13] I. Gutierrez-Sagredo et al. *Mechanical presymplectic structures and Marsden-Weinstein reduction of time-dependent Hamiltonian systems*. 2024. arXiv: [2411.11997 \[math.DG\]](https://arxiv.org/abs/2411.11997).
- [14] M. Lainz Valcázar. “Contact hamiltonian systems”. Tesis doct. Universidad Autónoma de Madrid, 2022.
- [15] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9780387954486.
- [16] M. de León y J. Bajo. “A geometric description of some thermodynamical systems”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 58.17 (2025), pág. 175203. ISSN: 1751-8113. doi: [10.1088/1751-8121/adcd14](https://doi.org/10.1088/1751-8121/adcd14).
- [17] M. de León y M. Lainz Valcázar. “Contact Hamiltonian systems”. En: *Journal of Mathematical Physics* 60.10 (oct. de 2019), pág. 102902. ISSN: 0022-2488. doi: [10.1063/1.5096475](https://doi.org/10.1063/1.5096475).
- [18] M. de León y M. Lainz Valcázar. “Singular Lagrangians and precontact Hamiltonian systems”. En: *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 16.10 (2019), pág. 1950158. doi: [10.1142/S0219887819501585](https://doi.org/10.1142/S0219887819501585).
- [19] M. de León y M. Lainz Válcazar. “A review on contact Hamiltonian and Lagrangian systems”. En: (nov. de 2020). arXiv: [2011.05579 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/2011.05579).
- [20] M. de León y P.R. Rodrigues. *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*. North-Holland Mathematics Studies. North Holland, 2011. ISBN: 9780080872698.
- [21] Y. Matsushima y E.T. Kobayashi. *Differentiable Manifolds*. Pure and Applied Mathematics Series. Dekker, 1972. ISBN: 9780835760942.
- [22] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1983. ISBN: 9780080570570.
- [23] A.C. da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics no. 1764. Springer, 2001. ISBN: 9783540421955.

- [24] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry v. 1. Publish or Perish, Incorporated, 1999. ISBN: 9780914098706.
- [25] E.C.G. Stueckelberg. *Thermocinétique phénoménologique galiléenne: Livre 1*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2013. ISBN: 9782832312995.
- [26] K. Vogtmann, A. Weinstein y V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997. ISBN: 9780387968902.
- [27] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1983. ISBN: 9780387908946.
- [28] H. Yoshimura y F. Gay-Balmaz. “Hamiltonian variational formulation for nonequilibrium thermodynamics of simple closed systems”. En: *IFAC-PapersOnLine* 55.18 (2022). 4th IFAC Workshop on Thermodynamics Foundations of Mathematical Systems Theory TFMST 2022, págs. 81-86. ISSN: 2405-8963. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.08.034>.

