



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Interferometría de ultrasonidos

Autor:

Pablo Calderón Miguel

Tutores:

José María Muñoz Muñoz
Luis Sánchez-Tejerina San José

Año 2025

Índice general

1. Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	1
1.3 Estructura de la memoria	1
2. Propagación del sonido	2
2.1 Emisor en movimiento	3
2.2 Medio en movimiento a velocidad constante	5
2.3 Desarrollo en serie del desfase en el régimen $v \ll c$	8
3. Diseño y construcción del interferómetro de ultrasonidos	10
3.1 Análisis de la señal recibida	10
3.2 Transductores	12
3.3 Microcontrolador	13
3.4 Electrónica de adquisición	14
3.5 Programación del sistema	18
3.6 Esquema de funcionamiento general	19
3.7 Análisis del instrumento	20
3.7.1 Caracterización del ruido de fase del interferómetro	20
3.7.2 Medida de la velocidad del sonido	24
4. Aplicaciones del interferómetro de ultrasonidos	26
4.1 Radar FMCW	26
4.2 Radar de turbulencias	28
4.3 Radar Doppler	31
4.4 Recreación del experimento de Michelson-Morley	34
4.4.1 Montaje experimental	35
4.4.2 Resultados	37
5. Conclusiones	41
5.1 Líneas de desarrollo futuras	41

Resumen

En este trabajo se ha diseñado y construido un interferómetro de ultrasonidos, con el objetivo de desarrollar un instrumento útil y de bajo coste que permita ilustrar conceptos básicos de propagación de ondas en medios materiales y pueda servir como base para el diseño de un instrumento útil para la investigación. Se ha realizado un análisis teórico detallado de la propagación del sonido a través del estudio de la fase de la onda. El instrumento ha sido caracterizado experimentalmente, obteniendo una alta sensibilidad en la medida de las fases. Se han explorado diversas aplicaciones del dispositivo, incluyendo su uso como radar FMCW, radar de turbulencias o radas Doppler. El trabajo pone de manifiesto cómo es posible obtener resultados de gran precisión con recursos modestos, apoyándose en un diseño cuidadoso y el conocimiento físico del fenómeno.

Palabras clave: interferometría ultrasónica, radar, conmutador de Tayloe, función de fase

Abstract

In this work, an ultrasound interferometer has been designed and built with the aim of developing a low-cost and useful instrument to illustrate basic concepts of wave propagation in physical media, as well as to serve as a foundation for the design of a practical instrument for research. A detailed theoretical analysis of sound propagation has been carried out through the study of the wave phase. The instrument has been experimentally characterized, achieving high sensitivity in phase measurements. Various applications of the device have been explored, including its use as an FMCW radar, turbulence radar, or Doppler radar. This work demonstrates how highly precise results can be achieved with modest resources, relying on careful design and a solid physical understanding of the phenomenon.

Keywords: ultrasonic interferometry, radar, Tayloe switch, phase function

1. Introducción

1.1 Motivación

La motivación de este trabajo surge de la demanda constante de productos innovadores, así como la mejora en las prestaciones de los existentes. En particular, se trata de contribuir a satisfacer dicha demanda en el ámbito de los equipos de experimentación en Física.

La elección del campo de la electroacústica, y más concretamente, del diseño de un interferómetro de ultrasonidos, vino motivada por el hecho de que, si bien la interferometría es ampliamente utilizada en óptica, su aplicación en acústica es mucho menos común. Sin embargo, las longitudes de onda propias del sonido hacen que el manejo de los equipos sea mucho más simple, pudiendo ser el dispositivo desarrollado potencialmente útil tanto en contextos de investigación y docencia universitaria, como en niveles educativos más básicos (ESO-Bachillerato), donde la práctica experimental en laboratorio es, con frecuencia, insuficiente, debido a que en dichos niveles se cuenta con un presupuesto limitado; impedimento que se busca solucionar también con el diseño de un equipo de bajo coste.

Además, se ha querido añadir un componente lúdico e intelectual al trabajo: utilizar el interferómetro de ultrasonidos para recrear el célebre experimento de Michelson y Morley para demostrar, en este caso de forma efectiva, la existencia del “éter acústico”.

1.2 Objetivos

Los objetivos principales de este Trabajo de Fin de Grado son los siguientes:

- Diseñar y construir un interferómetro de ultrasonidos con los materiales disponibles en el laboratorio de trabajo.
- Una vez construido el instrumento, explorar y analizar las diferentes aplicaciones posibles del interferómetro ultrasónico desarrollado.

1.3 Estructura de la memoria

La memoria de este Trabajo de Fin de Grado se compone de cinco capítulos, considerando este como el primero.

Capítulo 2: Propagación del sonido

Se realiza un desarrollo teórico de la propagación del sonido para emisor/receptor en movimiento y para el medio en movimiento, estudiando fenómenos como el efecto Doppler y la aberración.

Capítulo 3: Diseño y construcción del interferómetro de ultrasonidos

En este capítulo se expone la electrónica y la programación del microcontrolador necesarias para el desarrollo del interferómetro. Además del análisis del ruido intrínseco del mismo y una comprobación de su correcto funcionamiento.

Capítulo 4: Aplicaciones del interferómetro de ultrasonidos

Este capítulo estudia la aplicación del interferómetro como radar¹ FMCW, radar de turbulencias y radar Doppler. Incluye también la recreación del experimento de Michelson-Morley.

Capítulo 5: Conclusiones

Finalmente, se realiza una recopilación de las conclusiones del trabajo realizado, indicando posibles líneas de desarrollo futuro

¹ Aunque técnicamente se trata de un SONAR (al emplear ondas acústicas), en este trabajo se utilizará el término RADAR por su mayor uso y reconocimiento en el lenguaje común.

2. Propagación del sonido

El sonido ha acompañado a la humanidad desde sus orígenes, ocupando un papel central en fenómenos tan fundamentales como el lenguaje o la música, aspectos esenciales en la vida cotidiana y pilares del desarrollo cultural y científico. No resulta extraño, por tanto, que el estudio del sonido haya sido una constante en la historia de la ciencia (Figura 1), avanzando de la mano con el estudio de la luz, con la que comparte su carácter ondulatorio.

Sin embargo, existen diferencias clave entre ambos fenómenos. Mientras que la luz, al ser una onda electromagnética, puede propagarse en el vacío; el sonido, como onda mecánica longitudinal, requiere de un medio material para transmitirse, como demostró Robert Boyle en 1660 con su célebre experimento mediante una campana de vacío [1]. Esta necesidad enriquece su propagación convirtiendo al medio en un actor protagonista y al sonido en una herramienta útil para inferir propiedades del medio como la temperatura, la velocidad del flujo, la densidad o el nivel de turbulencia. Su comportamiento intuitivo, su sensibilidad al entorno y la sencillez de su generación y detección desde el punto de vista experimental han motivado la elección del sonido en este trabajo.

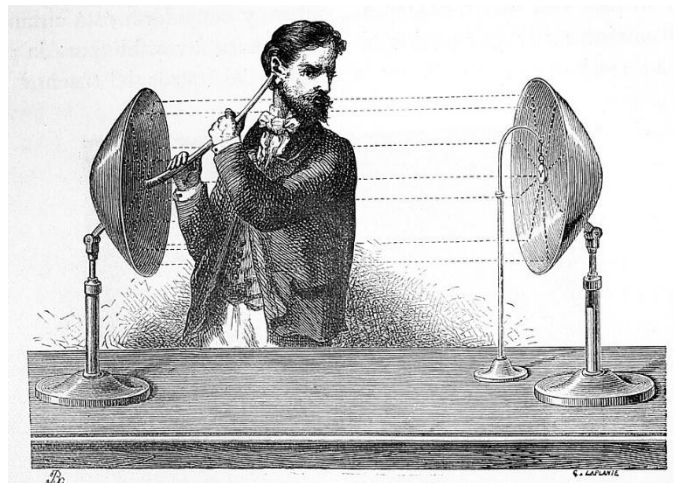


Figura 1: Experimento clásico para la comprobación práctica de las leyes de la reflexión del sonido. La fuente del sonido es el movimiento del volante de un reloj mecánico y el observador está provisto de un tubo con el fin de no interceptar las ondas. Fuente [2].

A continuación, se presenta un estudio de la propagación del sonido, abordando así el conocido efecto Doppler. Para ello, se analiza el desfase acumulado de la onda propagante, logrando una interpretación más intuitiva que otros métodos más habituales, como los recogidos en libros de texto clásicos [3-6]. El enfoque adoptado consiste en construir explícitamente la función de la fase de la señal en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo en el sistema de referencia del observador en el que el medio está en reposo [7]. El estudio de la fase de la onda proporciona una descripción completa y precisa del fenómeno de propagación, a diferencia del enfoque habitual, que se limita al análisis de frecuencias aisladas. En particular, el efecto Doppler (desplazamiento de la frecuencia aparente de la onda) aparece de forma natural al derivar esta función respecto al tiempo, mientras que de la derivada espacial de la fase surge de manera directa el fenómeno conocido como aberración (variación en la dirección de propagación aparente de la onda). De este modo, el efecto Doppler y la aberración son resultados parciales de un análisis general de la propagación del sonido.

El estudio de la fase de la onda realizado en este trabajo se presenta como una herramienta más útil y completa tanto para el estudio teórico como experimental.

2.1 Emisor en movimiento

Se comienza planteando un caso sencillo. Se tiene un emisor móvil a velocidad constante y tanto el receptor como el medio de propagación del sonido permanecen en reposo. Se establece, sin pérdida de generalidad, un sistema de referencia en el que el receptor está fijo en una posición arbitraria (x, y) y el emisor se mueve con una velocidad constante únicamente en el eje x , $\vec{v} = v \hat{u}_x$ (véase Figura 2). Además, se supone la velocidad del emisor v es menor que la velocidad de propagación c ($v < c$) y que no hay pérdidas por atenuación en el medio. El caso del receptor en movimiento es completamente análogo y conduce a resultados equivalentes bajo un cambio de sistema de referencia.

El emisor genera una onda de sonido $s_e(t)$ en el tiempo de frecuencia f y amplitud A constantes con una velocidad de propagación en el medio c tal que en el instante t :

$$s_e(t) = A \cdot \cos(2\pi f t) = \Re \{ A e^{j(2\pi f t)} \}, \quad (1)$$

y la función de la fase es:

$$\varphi_e(t) = 2\pi f t \quad (2)$$

A partir de aquí se trabajará con la representación fasorial de la onda en el plano complejo, lo cual facilita significativamente el tratamiento matemático, recordando siempre que únicamente su parte real tiene significado físico.

El fasor correspondiente gira en el plano complejo a una velocidad constante igual a $\omega = 2\pi f$. Si se proyecta este fasor sobre un sistema de referencia que gira a la misma velocidad, es decir, se multiplica por $e^{-j\omega t}$, se obtiene un fasor constante:

$$s_e(t) e^{-j\omega t} = A e^{j(0)} = A. \quad (3)$$

La onda que llega al receptor no es esta, puesto que la velocidad de propagación no es infinita, si no que tarda un tiempo t_p en llegar. La onda recibida es, por tanto:

$$s_r(x, y, t) = s_e(t - t_p) = A e^{j[\omega(t - t_p)]}, \quad (4)$$

y la función de su fase:

$$\varphi_r(x, y, t) = 2\pi f (t - t_p). \quad (5)$$

Es decir, por la propagación de la onda del emisor al receptor se acumula un desfase φ :

$$\varphi = \varphi_e(t) - \varphi_r(x, y, t) = 2\pi f t_p. \quad (6)$$

Del mismo modo, la posición en la que el emisor se encontraba al emitir la onda (en $t - t_p$) no es igual a la del emisor en el instante de recepción. Si el emisor parte del origen, su posición en cualquier instante es:

$$x_e(t) = v t. \quad (7)$$

Se toma como eje x el del movimiento del emisor. La distancia que ha recorrido la onda desde su emisión hasta su detección es:

$$\sqrt{[x - x_e(t - t_p)]^2 + y^2} = c t_p. \quad (8)$$

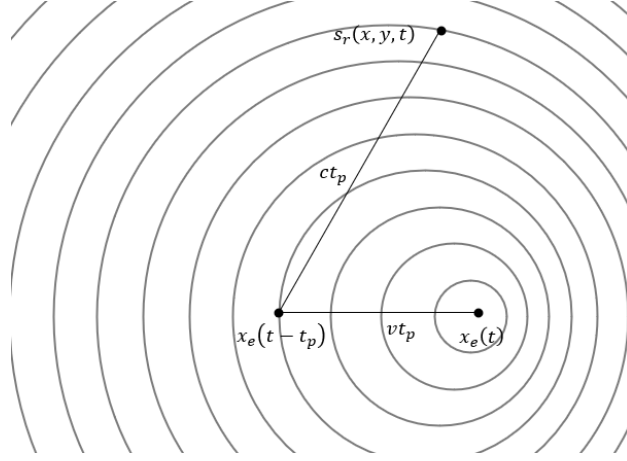


Figura 2: Representación de un tren de frentes de onda emitidos por un emisor en movimiento con velocidad constante y menor a la velocidad de propagación en el medio. La señal recibida en un punto (x, y) depende de la posición desde la que se emitió el frente correspondiente $x_e(t - t_p)$ y del tiempo transcurrido hasta su llegada, t_p . Durante ese tiempo, el emisor se ha desplazado hasta una nueva posición x_e . Figura inspirada en [7].

Sustituyendo $x_e(t - t_p) = v(t - t_p)$ y desarrollando, se obtiene una ecuación cuadrática en t_p :

$$(c^2 - v^2)t_p^2 - 2v(x - vt)t_p - [(x - vt)^2 + y^2] = 0. \quad (9)$$

Resolviendo e imponiendo que t_p sea positivo, teniendo en cuenta que $v < c$, se puede expresar el tiempo de propagación como:

$$t_p = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} \left[\beta(x - vt) + \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)y^2} \right], \quad (10)$$

donde se ha definido $\beta = \frac{v}{c}$. Sustituyendo en (5), la fase de la onda recibida tiene la siguiente expresión:

$$\varphi_r(x, y, t) = 2\pi f t - \frac{2\pi f \beta(x - vt) + \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)y^2}}{c(1 - \beta^2)}. \quad (11)$$

Si se supone que, emisor y receptor se encuentran a la misma altura ($y = 0$), como va a ocurrir siempre en los experimentos que se van a realizar en este trabajo, el desfase acumulado está dado por la siguiente expresión, que depende linealmente con el tiempo:

$$\varphi(x, t) = \frac{2\pi f}{c} \frac{(x - vt)}{1 - \beta}. \quad (12)$$

A partir de la función de la fase de la onda recibida (6) se puede obtener el desplazamiento de frecuencia en la señal recibida f' que será distinta de f como consecuencia del efecto Doppler. Para ello, se aplica que la frecuencia es la derivada de la fase:

$$f' = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_r}{dt}, \quad (13)$$

lo que implica una frecuencia observada distinta:

$$f' = \frac{f}{1 - \beta}. \quad (14)$$

Este es el efecto Doppler clásico para un emisor en movimiento con respecto al receptor con $f' > f$ si el emisor se acerca al receptor y $f' < f$ si se aleja. Esta expresión es válida únicamente cuando el movimiento del emisor se produce en la dirección del receptor, es decir, en una configuración puramente longitudinal.

2.2 Medio en movimiento a velocidad constante

Se aborda ahora una situación complementaria: el medio se encuentra en movimiento mientras que tanto el emisor como el receptor permanecen fijos, separados por una distancia d (véase Figura 3).

Se supone que el medio se desplaza a una velocidad constante y arbitraria:

$$\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y. \quad (15)$$

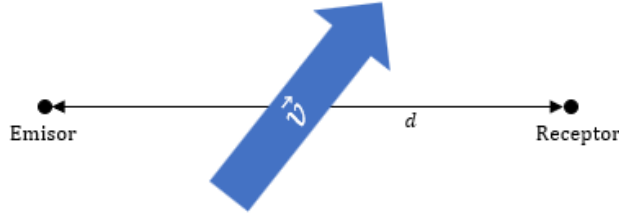


Figura 3: Esquema en el sistema del laboratorio donde el medio se desplaza con velocidad constante $\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$. El emisor y el receptor permanecen fijos y separados por una distancia d . El movimiento del medio afecta a la propagación de la onda entre ambos puntos.

No obstante, el análisis se simplificará trabajando en el sistema de referencia en el que el medio está en reposo. En este sistema, son el emisor y el receptor los que se desplazan a una velocidad, $-\vec{v}$. (Figura 4)

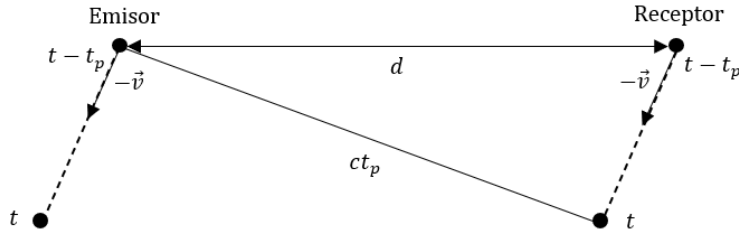


Figura 4: Esquema en el sistema de referencia del medio, en el que este permanece quieto y son el emisor y el receptor los que se mueven a una velocidad $-\vec{v}$. Durante el tiempo de propagación t_p , tanto emisor como receptor se desplazan.

Se fija el instante $t = 0$ como el momento en el que el emisor se encuentra en la posición $\vec{r}_e(0) = 0$, y el receptor en $\vec{r}_r(0) = d \hat{u}_x$. La evolución de sus posiciones es entonces:

$$\vec{r}_e(t) = -\vec{v} t = -v_x t \hat{u}_x - v_y t \hat{u}_y, \quad (16)$$

$$\vec{r}_r(t) = d \hat{u}_x - \vec{v} t = (d - v_x t) \hat{u}_x - v_y t \hat{u}_y. \quad (17)$$

De igual forma que en el apartado anterior, la onda generada por el emisor tarda un tiempo t_p en propagarse hasta al receptor. Por lo que, la distancia que la señal recorre desde su emisión hasta su detección es:

$$|\vec{r}_r(t) - \vec{r}_e(t - t_p)| = c t_p. \quad (18)$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado en t_p :

$$(c^2 - v^2) t_p^2 + 2v_x d t_p - d^2 = 0. \quad (19)$$

Resolviendo e imponiendo que t_p sea positivo:

$$t_p = \frac{d}{c^2 - v^2} \left(-v_x + \sqrt{c^2 - v_y^2} \right). \quad (20)$$

Por lo que, aplicando (5) la fase de la onda recibida es:

$$\varphi_r = 2\pi f t - \frac{2\pi f d}{c^2 - v^2} \left(-v_x + \sqrt{c^2 - v_y^2} \right), \quad (21)$$

y, de acuerdo con la expresión (6), el desfase acumulado por la onda propagante en un medio con velocidad constante es:

$$\varphi = \frac{2\pi f d}{c^2 - v^2} \left(-v_x + \sqrt{c^2 - v_y^2} \right). \quad (22)$$

Es importante destacar que esta expresión solo tiene sentido físico cuando la velocidad del medio es menor que la velocidad de propagación del sonido. Por tanto, se asume siempre que $v < c$, condición que se cumplirá en todos los desarrollos experimentales presentados.

Se puede aplicar este marco matemático a tres casos particulares que servirán para ilustrar el efecto de flujo del medio:

- Medio en reposo ($v = 0$)

En ausencia de flujo, la propagación se produce a una velocidad c a lo largo de una distancia d . El tiempo de propagación es simplemente $t_p = d/c$, y el desfase correspondiente es:

$$\varphi_0 = 2\pi f \frac{d}{c}. \quad (23)$$

Se trata de un desfase positivo: hay un retardo, la fase de la onda recibida es la que tenía el emisor un tiempo antes. Esta expresión servirá como referencia para comparar los efectos del movimiento del medio en los casos siguientes.

- Flujo longitudinal ($v_y = 0, v_x \neq 0$)

Cuando el flujo se encuentra alineado con el eje que une al emisor y al receptor, la propagación se ve directamente modificada. Sustituyendo en la expresión general (22), el desfase acumulado por la onda resulta:

$$\varphi_{v_x} = 2\pi f \frac{d}{c + v_x}. \quad (24)$$

Comparando con el caso de medio en reposo, se observa que el flujo modifica la velocidad efectiva de la onda acústica en el medio de c a $c + v_x$. El desfase adicional inducido exclusivamente por el flujo es:

$$\Delta\varphi_{v_x} = \varphi_{v_x} - \varphi_0 = -2\pi f \frac{dv_x}{c(c + v_x)}. \quad (25)$$

Se pueden distinguir dos subcasos:

- Flujo longitudinal favorable ($v_x > 0$): el medio impulsa la onda en la dirección de propagación. El tiempo de propagación se reduce y el desfase disminuye. ($\Delta\varphi < 0$).
- Flujo longitudinal contrario ($v_x < 0$) el medio se opone a la propagación. El tiempo de propagación se alarga, y el desfase aumenta. ($\Delta\varphi > 0$).

- Flujo transversal ($v_x = 0, v_y \neq 0$)

Aunque podría parecer, a primera vista, que un flujo transversal no debería de afectar a la propagación de una onda longitudinal, la expresión obtenida muestra lo contrario:

$$\varphi_{v_y} = 2\pi f \frac{d}{\sqrt{c^2 - v_y^2}}. \quad (26)$$

El desfase inducido únicamente por el flujo transversal, en comparación con el medio en reposo, es:

$$\Delta\varphi_{v_y} = \varphi_{v_y} - \varphi_0 = 2\pi f \frac{d \left(c - \sqrt{c^2 - v_y^2} \right)}{c \sqrt{c^2 - v_y^2}}. \quad (27)$$

Este término es positivo ($\Delta\varphi > 0$). Como se argumentará a continuación, este resultado no solo es correcto, sino que también es físicamente razonable.

Este resultado puede interpretarse de forma intuitiva si se adopta el sistema de referencia en el que el medio permanece en reposo (Figura 5.a), donde tanto emisor y receptor se mueven a una velocidad, $-\vec{v}$. Durante el tiempo de propagación t_p , el receptor se desplaza una distancia vt_p desde la posición que tenía en el instante de emisión de la onda. Esto implica que la onda debe recorrer una mayor distancia, lo que se traduce en un incremento tanto del tiempo de propagación como del desfase acumulado. Este efecto se acentúa cuanto mayor es la velocidad del medio. Para interpretar este fenómeno desde el sistema de laboratorio (Figura 5.b), puede recurrirse a una analogía sencilla: la de un nadador que cruza un río con corriente transversal. Aunque la distancia entre las orillas sea la misma que en ausencia de corriente, el nadador debe orientar su movimiento ligeramente en diagonal para compensar el arrastre del flujo. De forma análoga, aunque la trayectoria de la onda sonora sigue siendo recta entre emisor y receptor, su frente de onda no es perpendicular a dicha trayectoria, ya que la propagación se ve influida por el flujo transversal del medio. Esta compensación implica una velocidad de propagación efectiva menor en la dirección del receptor, lo que resulta en un mayor tiempo de propagación y un desfase acumulado adicional.

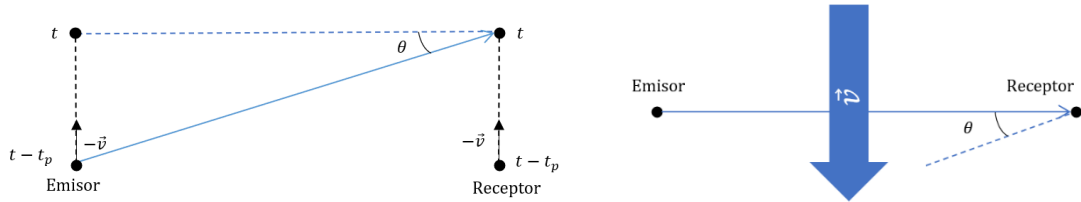


Figura 5: Representación del efecto de un flujo transversal del medio sobre la trayectoria de propagación de la onda. (a) Sistema de referencia en el que el medio está en reposo. (b) Sistema de referencia del laboratorio. En ambas figuras se representa el ángulo de aberración θ (véase texto).

Además del desfase inducido por el flujo transversal, este también provoca un efecto angular sobre la propagación de la onda, conocido como aberración. Aunque este fenómeno se da para flujos en cualquier dirección (excepto longitudinal), en este trabajo se analizará únicamente el caso de flujo puramente transversal.

Este efecto consiste en que, aunque en el sistema de laboratorio (Figura 5.a) la trayectoria de la onda es rectilínea entre emisor y receptor, el frente de onda no es perpendicular a dicha trayectoria, sino que se encuentra inclinado con un cierto ángulo θ . Puede interpretarse como una compensación necesaria para contrarrestar el arrastre lateral del flujo, de la misma manera que ocurriría con el nadador que cruza el río con corriente.

Este hecho se aprecia con claridad en el sistema de referencia en el que el medio está en reposo (Figura 5.b). En dicho sistema, el receptor se desplaza una distancia transversal $v_y t_p$ durante el tiempo que tarda la onda en propagarse, provocando una dirección de propagación inclinada respecto al eje emisor-receptor original.

El ángulo de aberración θ , definido como el ángulo entre la dirección del frente de onda y el eje emisor-receptor, viene dado por la relación:

$$\tan \theta = \frac{v_y t_p}{d} = \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v_y^2}}, \quad (28)$$

de donde se obtiene:

$$\theta = \arctan \left(\frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v_y^2}} \right). \quad (29)$$

Por último, se puede observar que ninguna de estas expresiones depende del tiempo. Esto indica que un medio en movimiento a velocidad constante no causa efecto Doppler. Para que se produzca un cambio en la frecuencia observada, debe existir una aceleración en el medio que modifique dinámicamente el tiempo de propagación. En contra de la idea general [3-6], no es necesario para que pueda ocurrir el efecto Doppler el movimiento relativo del emisor y receptor. Esta idea se desarrolla con mayor profundidad en el Apéndice A.

2.3 Desarrollo en serie del desfase en el régimen $v \ll c$

Cuando la velocidad del medio es considerablemente menor que la velocidad del sonido ($v \ll c$), las expresiones (25) y (27) de los desfases inducidos por flujos longitudinales y transversales del medio pueden simplificarse desarrollándolas en series de potencias de $\frac{v}{c}$.

- Flujo longitudinal

La expresión del desfase causado por un flujo longitudinal v_x puede describirse como:

$$\Delta\phi_{v_x} = 2\pi f \frac{dv_x}{c^2 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)}. \quad (30)$$

Dado que $v_x/c \ll 1$, se puede aplicar el desarrollo en serie:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad \text{para } |x| < 1. \quad (31)$$

Sustituyendo $x = \frac{v_x}{c}$, se obtiene una expansión que quedándose únicamente con el primer término:

$$\Delta\phi_{v_x} = \frac{2\pi f d}{c^2} v_x + O(v_x^2). \quad (32)$$

- Flujo transversal

Por otro lado, la expresión del desfase adicional debido a un flujo transversal v_y era:

$$\Delta\phi_{v_y} = 2\pi f \frac{d \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_y}{c} \right)^2} \right)}{c \sqrt{1 - \left(\frac{v_y}{c} \right)^2}}. \quad (33)$$

Aplicando el desarrollo en serie de $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \dots \quad \text{para } |x| < 1. \quad (34)$$

Sustituyendo $x = \left(\frac{v_y}{c} \right)^2$, se obtiene a orden dominante:

$$\Delta\phi_{v_y} = \frac{\pi f d}{c^3} v_y^2 + O(v_y^4). \quad (35)$$

Se observa que, en el régimen $v \ll c$, el desfase inducido por un flujo longitudinal varía linealmente con v_x , mientras que el generado por un flujo transversal lo hace de manera cuadrática con v_y . La contribución de los flujos longitudinales al desfase resulta más significativa que la de los flujos transversales, ya que afecta directamente a la velocidad de propagación de la onda. Estas expresiones resultan especialmente útiles para asociar al ruido de la fase a una velocidad de flujo mínima detectable (Apartado 3.7.1), así como para estimar velocidades características de turbulencia pequeña (Apartado 4.2). En ambos casos, el análisis se restringirá al flujo longitudinal, dado que su contribución al desfase es dominante.

3. Diseño y construcción del interferómetro de ultrasonidos

Antes de abordar el diseño del sistema experimental, conviene reflexionar brevemente sobre qué se entiende por un interferómetro. Clásicamente, un interferómetro funciona mediante la superposición de dos ondas coherentes que recorren trayectorias distintas y acumulan una diferencia de fase. Al superponerse, dan lugar a interferencias constructivas o destructivas, que se manifiestan como variaciones de intensidad detectables en el receptor como franjas o patrones característicos. Estos patrones contienen información precisa sobre las diferencias de recorrido o el medio atravesado. Ejemplos históricos destacados son el interferómetro de Michelson-Morley, que jugó un papel fundamental en la refutación del éter luminífero, y el interferómetro de Fizeau, empleado para estudiar la velocidad de la luz en medios en movimiento. Ambos constituyen referencias clave en el desarrollo de la física moderna, especialmente en lo relativo a la propagación de la luz.

En el presente trabajo no se observa una interferencia en el sentido habitual, ya que el fenómeno de interferencia no ocurre en el espacio físico, sino que tiene lugar durante el procesamiento de señales. La onda ultrasónica emitida se recibe con una determinada fase, la cual se compara con una fase de referencia establecida en el sistema de adquisición. En lugar de un patrón de interferencia, lo que se analiza es el desfase entre la señal recibida y la referencia. Esta diferencia de fase proporciona información sobre el tiempo de propagación del sonido y, por tanto, sobre la velocidad del medio. Aunque no exista una superposición directa de dos ondas en el espacio, el principio fundamental se conserva: detectar pequeñas variaciones de fase como medida de un cambio físico. Esta equivalencia conceptual justifica el uso del término *interferómetro* para describir el dispositivo desarrollado.

La base del interferómetro de ultrasonidos diseñado es conceptualmente sencilla: está compuesto por dos transductores, uno emisor y otro receptor. El primero genera una señal ultrasónica que se propaga a través del medio y es captada por el segundo. El análisis y procesamiento de esta señal recibida, en última instancia, determinar parámetros como la velocidad del aire o su grado de turbulencia, a partir de las variaciones de fase registradas.

3.1 Análisis de la señal recibida

Para el análisis de la señal tras su propagación por el medio se va a describir la señal como un número complejo, refiriéndose a la parte real como componente en fase *I* (*In-phase*) y la imaginaria como en cuadratura *Q* (*Quadrature*). Esta formulación permite acceder directamente a la información sobre la fase y la amplitud de la señal recibida (Figura 6).

Una señal armónica $s(t)$ puede expresarse como:

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \Re \{Ae^{j(\omega t + \varphi)}\}. \quad (36)$$

donde A es la amplitud, ω la frecuencia angular y φ la fase.

Del mismo modo que en (3), multiplicando por $e^{-j\omega t}$, es decir, proyectando la señal sobre un sistema de referencia que gire a la misma frecuencia, se obtiene un fasor constante en el tiempo:

$$s(t) \cdot e^{-j\omega t} = Ae^{j\varphi} = A \cos \varphi + j A \sin \varphi = I + jQ. \quad (37)$$

En esta formulación, $I = A \cos \varphi$ y $Q = A \sin \varphi$ son las proyecciones del fasor de la señal sobre los ejes real e imaginario, respectivamente.

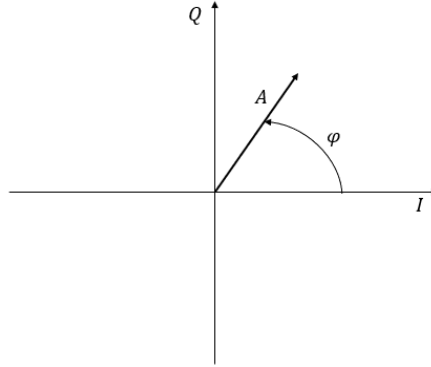


Figura 6: Representación en el plano complejo de una señal armónica en términos de sus componentes en cuadratura. El fasor, de amplitud A y fase φ , se descompone en sus proyecciones sobre los ejes I (In-phase) y Q (Quadrature), correspondientes a $I = A \cos \varphi$ y $Q = A \sin \varphi$ (ver texto).

En este trabajo se opta por una aproximación experimental más sencilla, basada en el muestreo discreto de la señal a lo largo de un periodo.

La técnica implementada, inspirada en el conmutador de Tayloe [8], consiste en muestrear la señal en cuatro instantes equiespaciados dentro de un periodo: $0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Este muestreo de cuatro puntos permite representar fielmente el contenido armónico fundamental de la señal, de acuerdo con el teorema de Nyquist. Este teorema establece que, para reconstruir perfectamente una señal analógica a partir de sus muestras discretas, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la máxima frecuencia presente en la señal [9].

La señal se proyecta sobre las funciones $\cos(\omega t)$ (parte real I) y $\sin(\omega t)$ (parte imaginaria Q), base ortonormal del espacio de señales armónicas de frecuencia ω (Figura 7). En los instantes $t_0 = 0$ y $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$, el coseno toma valores máximos en valor absoluto mientras que el seno se anula, proporcionando información sobre la componente, I . De forma análoga, en $t_1 = \frac{\pi/2}{\omega}$ y $t_3 = \frac{3\pi/2}{\omega}$, el seno alcanza sus valores máximos y el coseno se anula, capturando la componente, Q .

Así, las componentes en cuadratura pueden obtenerse mediante:

$$I \approx V_0 - V_2, \quad (38)$$

$$Q \approx V_1 - V_3, \quad (39)$$

donde V_i representa el valor de la señal en los instantes de muestreo t_i . Se emplea esta notación porque, en los experimentos realizados, la señal observada es una tensión eléctrica. El signo negativo se debe a que los puntos t_2 y t_3 se encuentran desfasados π radianes respecto a t_0 y t_1 , respectivamente; es decir, están en contrafase.

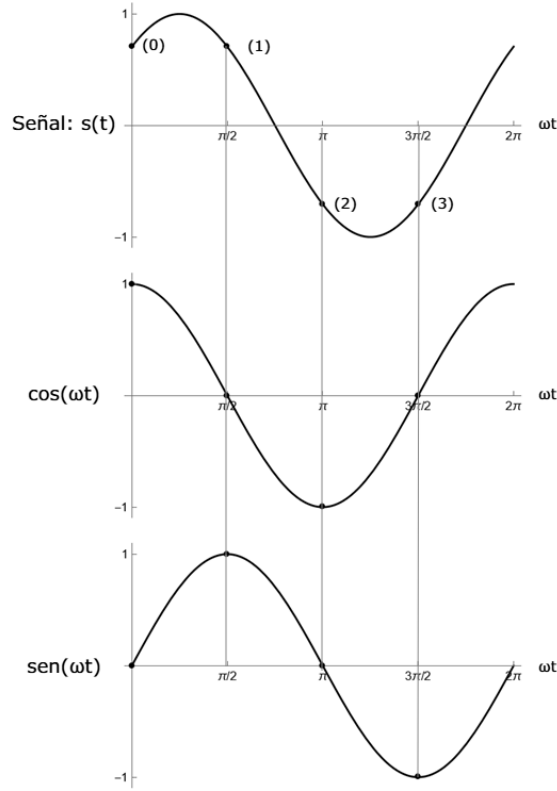


Figura 7: Representación gráfica en *Mathematica* del muestreo en cuatro puntos equiespaciados de la señal, y su proyección sobre las funciones $\cos(\omega t)$ y $\text{sen}(\omega t)$. Esta técnica permite obtener las componentes en cuadratura mediante las expresiones aproximadas $I = V_0 - V_2$ y $Q = V_1 - V_3$ (ver texto).

Este procedimiento constituye una forma simple y eficaz de obtener las componentes I y Q con un número mínimo de muestras. A partir de ellas, se puede reconstruir la fase de la señal mediante:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{Q}{I} \right), \quad (40)$$

y su amplitud como:

$$A = \sqrt{I^2 + Q^2}. \quad (41)$$

Este enfoque constituye la base del procesamiento de la señal en el interferómetro desarrollado en este trabajo.

3.2 Transductores

El interferómetro de ultrasonidos desarrollado cuenta con dos transductores. Por un lado, un emisor generador de una señal ultrasónica y, por otro, un receptor que genera una señal digital tras recibir la señal del emisor propagada por el medio.

El principio de funcionamiento se basa en el efecto piezoeléctrico. Cuando se aplica una señal eléctrica alterna a un material piezoeléctrico, este comienza a vibrar mecánicamente a la misma frecuencia de la señal, generando ondas ultrasónicas que se transmiten al aire a través del resonador. En modo receptor, el proceso se invierte: el material piezoeléctrico responde mecánicamente a las ondas acústicas incidentes, generando una señal eléctrica.

Los transductores utilizados son del modelo comercial TCT40-16 (Figura 8): transductores de tipo ultrasónico, con una frecuencia de funcionamiento en torno a los

40 kHz y una banda de trabajo muy estrecha, 1 kHz. A nivel de implementación, estos transductores están formados por un elemento piezoeléctrico cerámico, una placa metálica de soporte, un resonador acústico y una carcasa metálica que encapsula y protege el conjunto.



Figura 8: Fotografía del transductor ultrasónico TCT40-16 utilizado en el interferómetro.

Este tipo de transductores resulta adecuado para aplicaciones de medición por ultrasonidos en aire y, además, al tratarse de componentes comerciales ampliamente disponibles, su integración en el sistema resulta sencilla y económica.

3.3 Microcontrolador

Para el control del interferómetro y de los distintos elementos del circuito es necesario un dispositivo que gestione su funcionamiento: un microcontrolador.

El microcontrolador empleado en este proyecto es una Raspberry Pi Pico (Figura 9), seleccionado por su buen equilibrio entre prestaciones técnicas y facilidad de uso. Esta placa dispone de un microprocesador RP2040, con una velocidad de reloj de hasta 200 MHz, 264 kB de memoria RAM y 2 MB de memoria flash externa, lo que resulta suficiente para realizar el procesamiento de señales necesario y controlar el sistema en tiempo real.

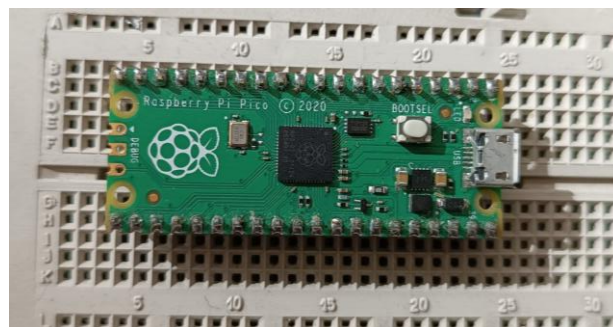


Figura 9: Fotografía del microcontrolador Raspberry Pi Pico montado sobre la placa de circuito del interferómetro.

Cuenta con un convertidor analógico-digital (ADC) interno de 12 bits que permite realizar un número adecuado de mediciones por segundo. Además, integra un puerto USB, que se ha utilizado para la transmisión de datos al ordenador, donde se realiza el análisis y visualización final.

La elección de este microcontrolador también estuvo motivada por su amplia documentación y su precio asequible, lo que la convierte en una opción muy atractiva para desarrollos experimentales como el interferómetro de ultrasonidos.

En este proyecto, la programación del microcontrolador se ha realizado mediante el entorno *Arduino IDE*, aprovechando su compatibilidad con el lenguaje C++ y su facilidad de integración con numerosas bibliotecas. Para ello, se empleó el *framework arduino-pico*, desarrollado por Earle Philhower [10], que permite programar la Raspberry Pi Pico dentro del entorno *Arduino*. Aunque se trata de una implementación basada en C++ estándar, este framework ofrece una estructura accesible y flexible, lo que facilita el control preciso de periféricos, temporizadores y señales moduladas por anchura de pulso (PWM por sus siglas en inglés), necesarias para el funcionamiento del interferómetro.

3.4 Electrónica de adquisición

El circuito diseñado para el interferómetro de ultrasonidos (véase Figura 10) se encarga de la generación de la señal, su recepción, su procesamiento analógico y su posterior digitalización y envío al ordenador. En términos generales, el circuito está compuesto por dos transductores, uno hace de emisor y el otro de receptor. La señal recibida por el receptor pasa primero por un amplificador de ganancia programable (PGA). A continuación, la señal amplificada se divide en cuatro partes mediante un conmutador, y el voltaje de cada una de ellas se promedia a través de un filtro. Posteriormente, estos voltajes son digitalizados a través de un convertidor analógico-digital (ADC). Todo el proceso está controlado por un microcontrolador, que gestiona también el envío de los datos al PC mediante un puerto USB.

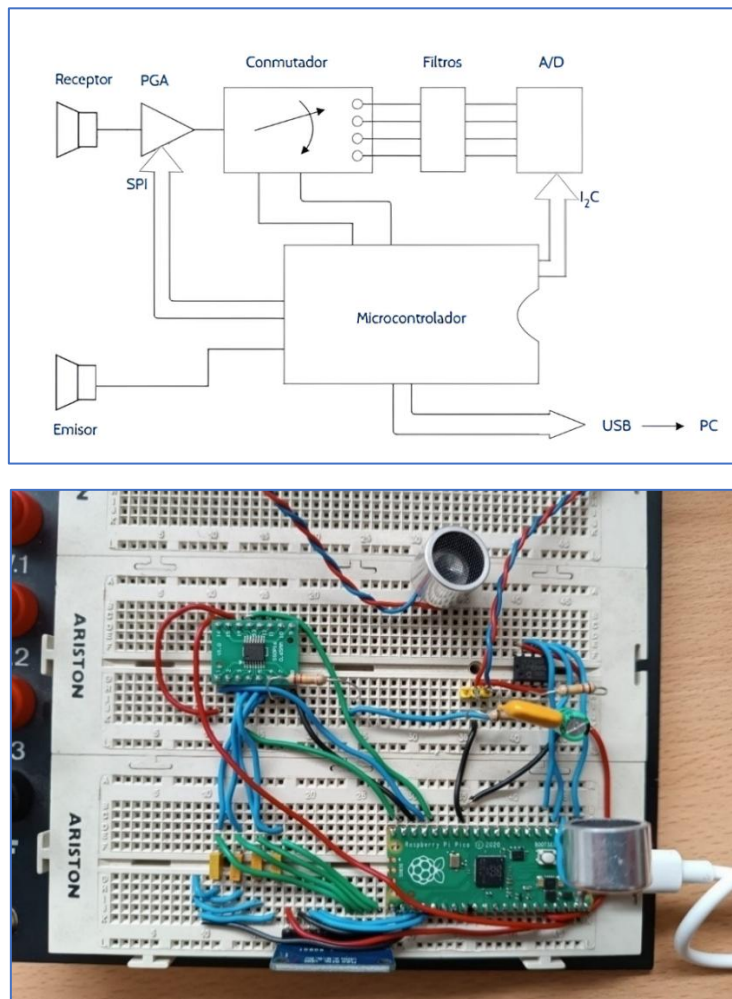


Figura 10: (a) Esquema del circuito diseñado para el interferómetro de ultrasonidos. (b) Fotografía del montaje del circuito del interferómetro.

Se ha optado por una solución analógica basada en un conmutador de Tayloe [8]. Esta técnica consiste, a grandes rasgos, en un tratamiento analógico de la señal mediante su muestreo en cuatro intervalos equiespaciados del periodo, permitiendo el análisis descrito en el Apartado 3.1. Para ello, se utiliza un conmutador controlado, que, cada cuarto de ciclo, dirige la señal de entrada hacia uno de los cuatro filtros RC. Cada filtro actúa como promediador de la señal en ese intervalo de tiempo, generando así las tensiones V_0, V_1, V_2 y V_3 , a partir de las cuales pueden extraerse las componentes en cuadratura de la señal original (ver Apartado 3.1). Este sistema no obtiene los valores de la señal en instantes puntuales (como se planteaba en la aproximación teórica del apartado 3.1), sino que mide el valor promedio de la señal en cada uno de los cuatro intervalos temporales del periodo (Figura 11). Esto permite una estimación más estable de las componentes en cuadratura, especialmente en presencia de ruido, puesto que se trata de un filtro RC que va a filtrar ese ruido de alta frecuencia.

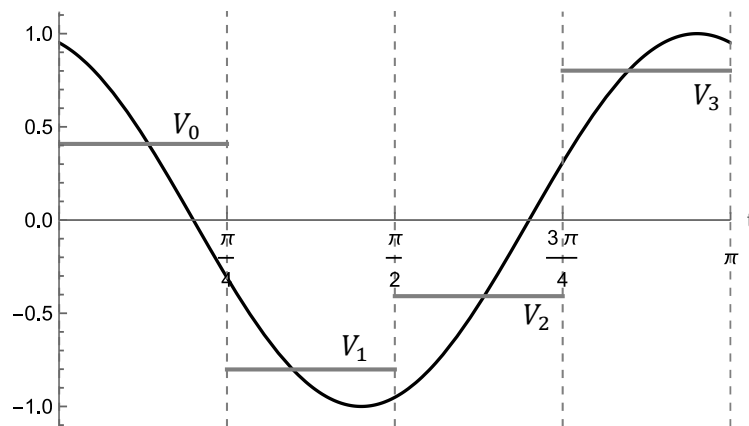


Figura 11: Representación gráfica en *Mathematica* del muestreo de la señal en cuatro intervalos equiespaciados realizado por el conmutador de Tayloe, junto con los cuatro valores promedio resultantes: V_0, V_1, V_2 y V_3 .

El uso de una solución analógica aporta una visión más física y tangible del fenómeno y el funcionamiento del interferómetro, además de realizar el muestreo con una gran precisión. Adicionalmente, se desarrolló en paralelo una versión alternativa basada en un procesamiento digital completo, que se recoge en el Apéndice C como complemento.

Entrando en detalle, el transductor emisor está conectado directamente al microcontrolador, que le suministra una señal cuadrada de 40 kHz generada mediante salida PWM (*Pulse Width Modulation*). Aunque esta señal no es estrictamente sinusoidal, el transductor responde predominantemente al primer armónico debido a su diseño resonante, por lo que va a actuar como filtro pasa banda y el resultado es, en la práctica, una onda de forma sinusoidal centrada en esa frecuencia para la señal emitida por el transductor.

La señal propagada es captada por el transductor receptor, colocado frente al emisor. La salida de este transductor pasa primero por un divisor resistivo (Figura 12), que limita la tensión a un nivel compatible con el resto del circuito, evitando tensiones negativas o superiores al umbral de entrada del convertidor A/D, el cual opera en un rango de 0 a 3,3 V.

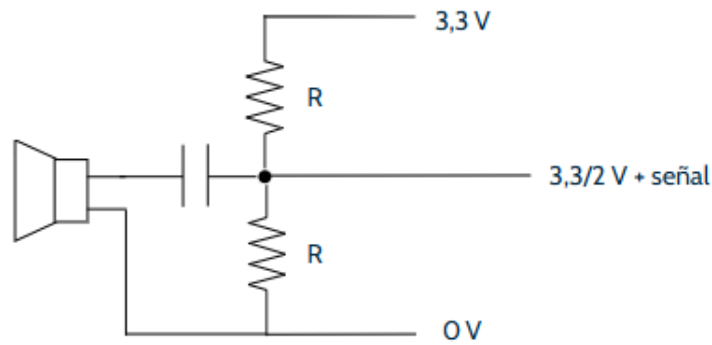


Figura 12: Esquema del divisor resistivo conectado a la salida del transductor receptor, que centra la señal en el rango de trabajo de 0 a 3,3 V.

Para garantizar un funcionamiento adecuado, las resistencias del divisor resistivo deben ser mayores que la impedancia del transductor, mientras que el condensador debe de tener una impedancia mucho menor a la frecuencia de trabajo; su función es bloquear la componente de continua, evitando que esta llegue al transductor. En este diseño se han utilizado resistencias de 120 k Ω y un condensador de 15 nF.

La señal es entonces amplificada mediante un amplificador de ganancia variable del tipo MCP6S92, controlado desde el microcontrolador mediante comunicación SPI. Este amplificador permite ajustar dinámicamente la ganancia con 8 niveles discretos: +1, +2, +4, +5, +8, +10, +16, +32 lo que permite optimizar el aprovechamiento del rango del circuito sin saturar la señal. Se conecta un condensador de desacoplo en la entrada de referencia (V_{ref}) para fijar el nivel medio y evitar que se amplifique la componente de continua de forma residual (véase Figura 13).

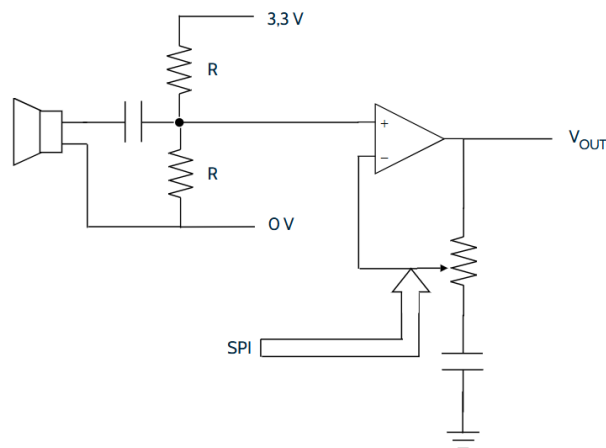


Figura 13: Esquema completo del circuito de acondicionamiento de señal, compuesto por un divisor resistivo y un amplificador de ganancia variable (PGA) controlado mediante comunicación SPI. Se incluye un condensador de desacoplo en la entrada de referencia (V_{ref}) para estabilizar el nivel medio. El conjunto permite amplificar la señal del transductor y ajustarla al rango de trabajo (0-3,3 V).

A continuación, la señal se dirige a un conmutador analógico FST3253, que realiza el muestreo en cuatro fases. Este conmutador está gobernado por dos señales PWM de 40 kHz generadas por el microcontrolador y desfasadas 90°, lo que permite dividir el ciclo de la señal en cuatro cuadrantes, correspondientes a los estados lógicos de sus dos entradas de control: ambos voltajes altos (HH), uno alto y otro voltaje de referencia, bajo (HL), y viceversa (LH) y ambos voltajes bajos (LL). En cada uno de esos intervalos, una de las cuatro salidas del conmutador se activa, permitiendo que se cargue el condensador de acuerdo a la constante del circuito RC (Figura 14) formado por una resistencia común de 120 k Ω y cuatro

condensadores de 100 nF. De esta forma, se obtiene la señal promediada de las cuatro divisiones de la señal V_0, V_1, V_2 y V_3 . Los valores de la resistencia y condensadores fueron seleccionados considerando la constante de tiempo del filtro, $\tau = RC$. Un valor elevado de τ reduce el ruido, pero ralentiza la respuesta del sistema, mientras que un valor bajo mejora la velocidad de respuesta a costa de mayor ruido. La constante de tiempo elegida, de 12 ms, representa un compromiso adecuado entre ruido y velocidad de respuesta, permitiendo realizar cientos de lecturas por segundo sin pérdida significativa de información.

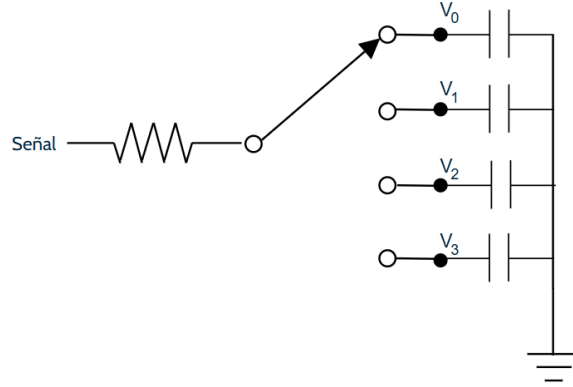


Figura 14: Esquema del sistema de muestreo en cuatro mediante un conmutador de Tayloe. En cada cuarto de ciclo la señal se dirige a uno de los cuatro filtros RC, cuyos condensadores acumulan la tensión media V_0, V_1, V_2 y V_3 de cada intervalo.

Estas señales promediadas se envían a un convertidor analógico-digital diferencial ADS1115, que se comunica con el microcontrolador mediante el protocolo I²C. Este ADC de 16 bits ofrece una resolución superior a la del convertidor del microcontrolador, que es de 12 bits. Además, al ser un convertidor diferencial, permite la lectura directa de las señales I y Q mediante la configuración adecuada de sus entradas (véase Apartado 3.1):

$$I = V_0 - V_2, \quad (42)$$

$$Q = V_1 - V_3, \quad (43)$$

entregando directamente las componentes en fase y en cuadratura de la señal recibida. Esta información se transfiere posteriormente al ordenador para su análisis y visualización.

Para el control y verificación del correcto funcionamiento del circuito se hizo uso de un osciloscopio Agilent DSO-x 2002A (Figura 15). Este instrumento permitió visualizar la evolución de la señal en distintos puntos del circuito, facilitando el diagnóstico de errores.



Figura 15: Fotografía del osciloscopio Agilent DSO-x 2002A utilizado para la visualización y análisis de la señal en distintas etapas del circuito.

3.5 Programación del sistema

La programación del sistema consta de dos partes: la programación del *firmware* del microcontrolador Raspberry Pi Pico y la programación en el ordenador para la visualización y el análisis de las señales adquiridas.

Dado que el diseño del interferómetro cuenta con una importante componente analógica, el código de control necesario para el funcionamiento del sistema resulta relativamente sencillo. Su objetivo es generar la señal ultrasónica, controlar las componentes del circuito (conmutador y amplificador), adquirir las muestras de la señal y enviarlas al ordenador para su posterior análisis. La programación del sistema se ha realizado sobre la Raspberry Pi Pico utilizando el entorno *Arduino IDE*, ya descrito en el Apartado 3.4.

En primer lugar, se definen los pines y se configuran los periféricos del sistema utilizados. Se inicializa el bus I²C para la comunicación con el convertidor ADS1115, se configura el bus SPI para controlar el amplificador de ganancia variable MCP6S92 y se habilita la comunicación USB serial para enviar los datos al ordenador.

Además, se implementa la función `Frecuencia()`, encargada de generar tres señales PWM de 40 kHz. Dos de ellas están desfasadas 90°, lo que permite gobernar el conmutador analógico FST3253 y realizar el muestreo de la señal ultrasónica. Estas señales y el desfase se consiguen ajustando los contadores de los canales PWM.

Se define también una función `setPGAGain()` para modificar dinámicamente la ganancia del amplificador variable mediante comandos SPI, así como la función `ads.setGain()` para controlar la ganancia interna del ADS1115.

En el bucle principal, el microcontrolador realiza una adquisición periódica con una frecuencia configurable. Esta flexibilidad permite al usuario ajustar el sistema según sus necesidades: aumentar la frecuencia de muestreo para obtener más medidas por segundo o reducirla para mejorar la estabilidad y precisión.

En cada iteración, se leen las entradas diferenciales del ADS1115 para obtener las tensiones correspondientes a las componentes en fase (*I*) y en cuadratura (*Q*) de la señal aplicando (42) y (43). Además, se comprueba el voltaje de la señal recibida. Si se encuentra fuera del rango óptimo, se ajustan automáticamente las ganancias del amplificador externo y del convertidor mediante la función `ajustarGanancias()`, para aprovechar al máximo el rango de entrada (0-3,3 V) y los 16 bits de resolución del ADC. No obstante, en algunas de las medidas realizadas, se prescindió de esta función manteniendo unas ganancias constantes para favorecer la estabilidad en detrimento de la resolución.

Las lecturas se realizan mediante la biblioteca *Adafruit_ADS1X15*, que permite acceder directamente a los canales diferenciales del ADS1115. Los valores adquiridos se envían por USB serial al ordenador en formato CSV para su posterior tratamiento en PC mediante herramientas como *Keysight ar Pro* o *Microsoft Excel*. Los programas de *Keysight VEE Pro* usados a lo largo del desarrollo del trabajo están recogidos en el Apéndice E.

El código completo se incluye en el Apéndice B, y la Figura 16 muestra el diagrama de flujo general del programa implementado en el microcontrolador:

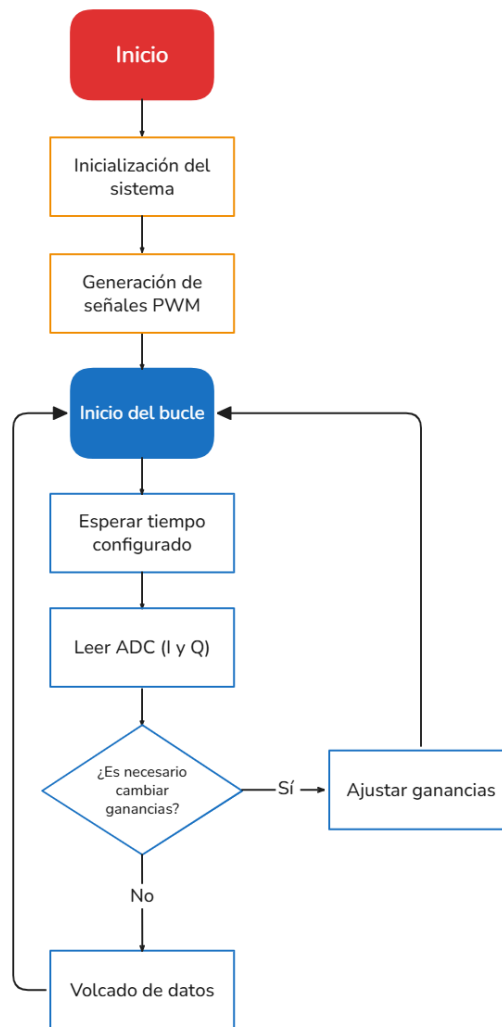


Figura 16: Diagrama de flujo del programa del interferómetro implementado en el microcontrolador.

3.6 Esquema de funcionamiento general

A continuación, se presenta un esquema de bloques que resume el funcionamiento completo del interferómetro ultrasónico desarrollado. El sistema parte de la generación de una señal ultrasónica de 40 kHz mediante el microcontrolador, que también gobierna los elementos encargados del muestreo y la adquisición. La señal captada por el transductor receptor se amplifica, se divide en cuatro mediante un conmutador analógico, y se digitaliza. Finalmente, las componentes en fase (I) y en cuadratura (Q) son obtenidas y enviadas al ordenador para su análisis.

El esquema de la Figura 17 permite visualizar con claridad la interacción entre los elementos físicos y el procesamiento digital implicado en el sistema.

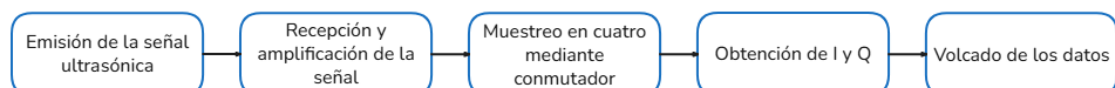


Figura 17: Esquema del funcionamiento general del interferómetro de ultrasonidos diseñado.

3.7 Análisis del instrumento

En primer lugar, se realiza una estimación de la sensibilidad del interferómetro de ultrasonidos. Suponiendo condiciones normales de laboratorio (temperatura de 20 °C, presión atmosférica de 1 atm y aire seco con composición típica), la velocidad del sonido en el aire es $c = 343,4$ m/s [11]. No obstante, aunque la velocidad del sonido depende muy poco de la presión, sí se debe tener en cuenta la dependencia con la temperatura. Se realizó un ajuste que se recoge en el Apéndice D. La ecuación resultante es:

$$c(T) \approx 0,6049 \cdot 1/^{\circ}\text{C} \cdot T + 331,24 \text{ m/s}, \quad (44)$$

donde $c(T)$ es la velocidad del sonido en m/s y T es la temperatura en °C.

Dado que la frecuencia de funcionamiento del sistema es $f = 40$ kHz, se puede calcular la longitud de onda utilizando la relación:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 8,585 \text{ mm}. \quad (45)$$

Por lo que, aplicando (23), suponiendo que no existe flujo de aire:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta d. \quad (46)$$

Un cambio de fase de $\Delta\varphi = 1^{\circ}$ equivale a un desplazamiento de $\Delta d = 23,85 \mu\text{m}$, destacando la alta sensibilidad del interferómetro.

3.7.1 Caracterización del ruido de fase del interferómetro

Para evaluar la estabilidad y sensibilidad del sistema, se llevó a cabo una medición prolongada con el interferómetro, tratando de mantener constantes tanto la posición relativa de los transductores como las condiciones ambientales (temperatura, presión y humedad) y evitando cualquier flujo de aire. El objetivo de esta prueba es caracterizar el ruido intrínseco del sistema, es decir, las fluctuaciones aleatorias de la fase cuando no existen cambios en la distancia entre transductores ni perturbaciones externas.

Este ruido se cuantifica mediante el valor RMS de la fase medida menos su valor medio en condiciones estables y se asociará a un flujo mínimo detectable que produciría un desplazamiento de fase equivalente.

Como primer intento, se empleó el montaje mostrado en la Figura 18. Los transductores se colocaron con cinta adhesiva a las paredes opuestas de una caja de cartón, que posteriormente se cerró para reducir las corrientes de aire. Adicionalmente, se procuró evitar cualquier perturbación externa: se mantuvieron cerradas las puertas del laboratorio, se apagó el aire acondicionado y se evitó cualquier movimiento cerca del interferómetro.



Figura 18: Primer montaje para la caracterización del ruido de fase del interferómetro. (a) Transductores fijados con cinta adhesiva en las paredes de la caja. (b) Caja cerrada para aislar el sistema del entorno.

No obstante, las mediciones revelaron derivas significativas en la fase, del orden de varias unidades de grado. Estas se atribuyeron a las limitaciones de aislamiento proporcionado por la caja de cartón. Este material permite la entrada de pequeñas corrientes de aire y, además, presenta una estructura flexible y variable en volumen. Pequeñas variaciones en la presión ambiental, en la humedad o incluso leves corrientes de aire pueden deformar las paredes de la caja, modificando así la distancia de la caja y, con ello de los transductores.

Para superar estas limitaciones, se preparó un nuevo montaje, mostrado en la Figura 19. En este caso, los transductores se fijaron firmemente sobre una base metálica rígida (Figura 19.a). Uno de los transductores se montó sobre un tornillo micrométrico de ajuste, que permite modificar con precisión la distancia entre ellos (relevante para el Apartado 3.7.2). Este montaje se introdujo dentro de un cajón cerrado encima de poliespán (Figura 19.b), con el fin de aislarlo de perturbaciones externas, en particular del flujo de aire y de la temperatura del suelo.

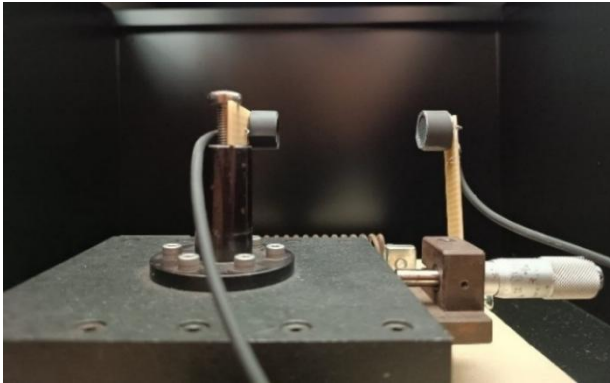


Figura 19: Montaje experimental para la caracterización del ruido de fase del interferómetro. (a) Transductores fijados sobre la base metálica. (b) Cajón cerrado para aislar el sistema del entorno.

Se realizó una adquisición continua durante 20 minutos y los datos obtenidos se procesaron con el software *Keysight VEE Pro*. En la Figura 20 se muestra el resultado de esta medida; la mayoría de las gráficas de este trabajo se han generado con *MATLAB*.

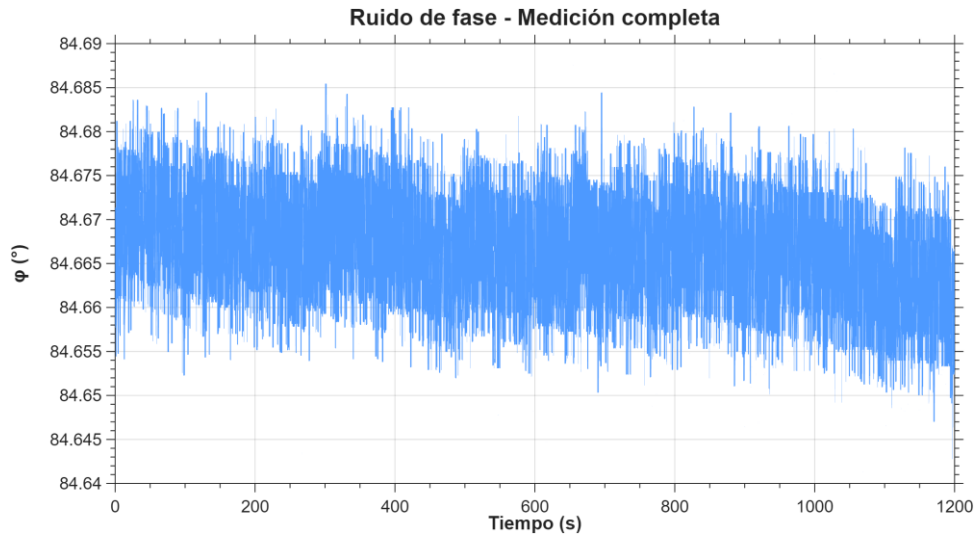


Figura 20: Fase medida por el interferómetro en función del tiempo para la caracterización del ruido del instrumento. Se observa el ruido de fase asociado al propio instrumento asociado al propio instrumento en condiciones estables.

Puede observarse que las fluctuaciones son pequeñas, menores a la décima de grado. No obstante, se aprecia una ligera deriva decreciente en la fase a lo largo del tiempo, posiblemente debida a cambios térmicos en el aire o en la base.

Para analizar exclusivamente las fluctuaciones aleatorias de fase, se seleccionó arbitrariamente un intervalo temporal del registro, representado en la Figura 21:

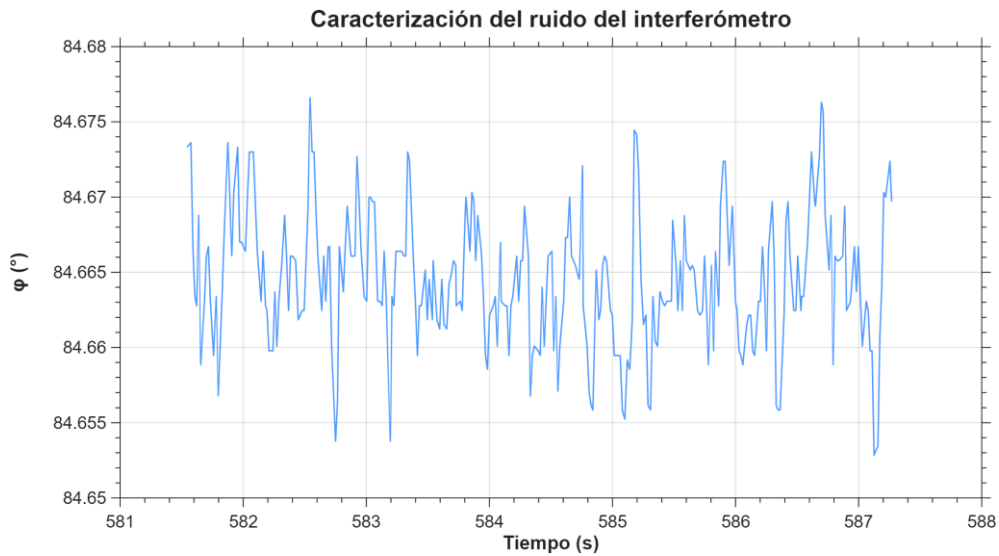


Figura 21: Fase medida por el interferómetro en condiciones estables, representada en función del tiempo para un intervalo de la adquisición completa. A partir de estos datos se obtuvo la fase RMS, utilizada para caracterizar el nivel de ruido del instrumento.

Sobre este intervalo se calculó el valor RMS de la fase menos su valor promedio, que representa el nivel de ruido de fase del interferómetro:

$$\varphi_{RMS} = 7,596 \cdot 10^{-5} \text{ rad.} \quad (47)$$

Este valor RMS, se traduce en una variación mínima detectable de posición, de acuerdo a la ecuación (46). De nuevo, se suponen condiciones normales de un laboratorio (temperatura de 20 °C, presión atmosférica de 1 atm y aire seco), por lo que la velocidad de propagación del sonido es $c = 343,4 \text{ m/s}$.

Por tanto, la resolución espacial mínima se estima en:

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2\pi} \varphi_{RMS} = 12,09 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda \approx 0,10 \mu\text{m}.^2 \quad (48)$$

Asimismo, las velocidades mínimas de flujo detectables se pueden estimar suponiendo que el flujo es pequeño (dentro del régimen $v \ll c$) y que la contribución dominante al desfase proviene de la componente longitudinal. Bajo estas condiciones, el flujo mínimo detectable se obtiene a partir de la expresión (32):

$$v \approx \frac{c^2}{2\pi f d} \varphi_{RMS} = \frac{3,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{d}. \quad (49)$$

Se obtiene una precisión superior a la esperada. Para hacerse una idea de su magnitud, en un interferómetro óptico con longitud de onda típica de medio micrómetro, la resolución suele limitarse por razones históricas a ese mismo orden de magnitud, ya que “a ojo” pueden distinguirse como aparecen y desaparecen las franjas de interferencia, llegando a estimar “cuartos de franja”. El interferómetro desarrollado tendría, por lo tanto, una resolución comparable a la de un interferómetro de Michelson tradicional [12]. No obstante, si en lugar de observar visualmente se mide con precisión la intensidad de la luz, es posible alcanzar resoluciones mucho mayores. Un ejemplo extremo es el potente interferómetro LIGO [13], cuya sensibilidad alcanza del orden de 10^{-11} veces la longitud de onda empleada [14].

Por tanto, la principal fuente de imprecisiones no radica en la electrónica, sino en la configuración experimental y las condiciones ambientales. El interferómetro de ultrasonidos está fuertemente condicionado por factores externos como el flujo de aire ambiente, la variación de temperatura (que afecta a la velocidad del sonido, la dilatación térmica de los materiales donde se apoyan los transductores y la respuesta de sus elementos piezoeléctricos). Estos serán, en última instancia, los factores que limiten la precisión de las medidas del instrumento.

Podría pensarse que se está siendo excesivamente meticuloso al darle tanta importancia a los efectos de las condiciones ambientales, y que su influencia en las medidas no es significativa. Como respuesta a esta objeción, además del ejemplo expuesto con el montaje con la caja de cartón, se presenta un sencillo cálculo que ilustra la importancia de tener en cuenta estos detalles.

Suponiendo que la base que sostiene a los transductores está fabricada de aluminio, cuyo coeficiente de dilatación lineal es $\alpha \approx 23,1 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ [11], y con una longitud inicial de $L_0 = 0,1$ m. Aplicando la fórmula de dilatación lineal:

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T, \quad (50)$$

un cambio de tan solo 1°C implicaría una expansión de $2,3 \mu\text{m}$, un orden de magnitud mayor que el ruido de la propia electrónica. Este simple cálculo subraya la importancia de tener en cuenta pequeños detalles que, en principio, podrían parecer despreciables debido a la alta precisión del instrumento con el que se trabaja

Dada la alta resolución del interferómetro, pueden observarse muchos efectos sutiles, por lo que resulta muy difícil distinguir entre errores sistemáticos y accidentales. Por ello, en el estado actual de desarrollo del sistema, solo es posible ofrecer estimaciones basadas en la resolución medida previamente en el Apartado 3.7.1 y en el sentido común.

² Teniendo en cuenta que la longitud de onda es de aproximadamente 8 mm y que el sistema digitaliza con 16 bits como máximo, una estimación rápida de la resolución da como resultado $\frac{8 \text{ mm}}{6500} \approx 0,12 \mu\text{m}$, valor que concuerda bien con el obtenido experimentalmente.

3.7.2 Medida de la velocidad del sonido

Con el objetivo de comprobar el correcto funcionamiento del interferómetro de ultrasonidos diseñados, se llevó a cabo la caracterización de la velocidad de propagación del sonido utilizando el mismo montaje experimental del apartado anterior representado en la Figura 19.

El procedimiento consistió en variar la distancia entre los transductores del interferómetro mediante el tornillo micrométrico del montaje. Para cada posición:

1. Se cerraba el cajón para evitar perturbaciones externas.
2. Se esperaba unos segundos hasta que la medida de la fase se estabilizara.
3. Se registraba el valor de la fase medida por el instrumento.
4. Se volvía a modificar la distancia, repitiendo el proceso.

Este procedimiento puede observarse claramente en las gráficas mostradas a continuación, donde se representan la fase en función del tiempo durante el proceso de medición (Figura 22) y la evolución de las señales I/Q (Figura 23). Entre cada medida de una posición (fase constante) se observa ruido de la señal como consecuencia de abrir el cajón y manipular el tornillo micrométrico.

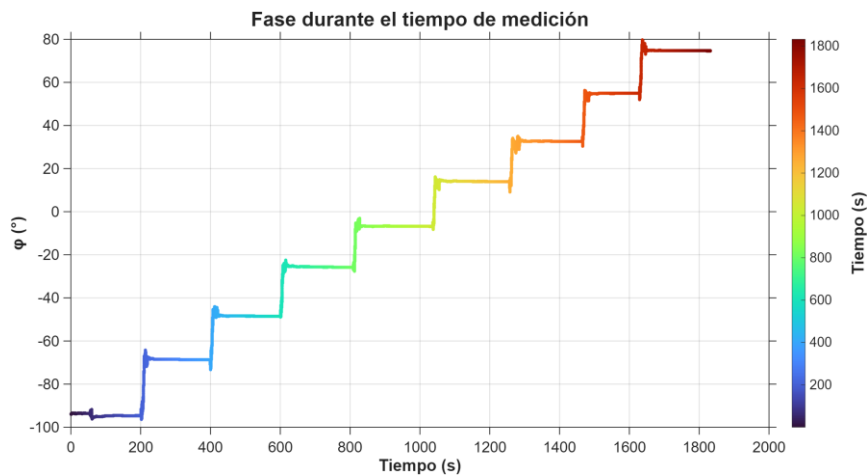


Figura 22: Evolución temporal de la fase medida durante el proceso de caracterización de la velocidad del sonido. Se observan saltos discretos correspondientes a los cambios de posición entre transductores realizados mediante el tornillo micrométrico. La escala de color fue añadida para facilitar la comparación visual con la Figura 23.

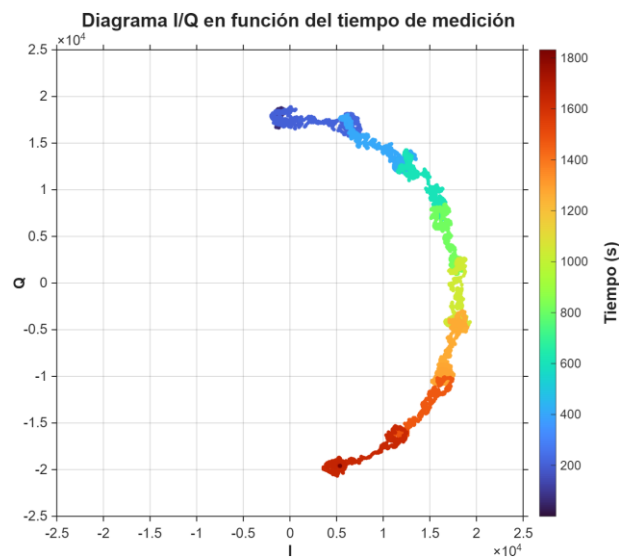


Figura 23: Señales I y Q registradas durante el proceso de caracterización de la velocidad del sonido. Se puede observar claramente el giro dextrógiro del fasor de la señal, resultado del alejamiento progresivo entre los transductores.

A continuación, se representa en la Figura 24 la fase media medida por el interferómetro, φ , para cada variación de distancia entre transductores, Δd .

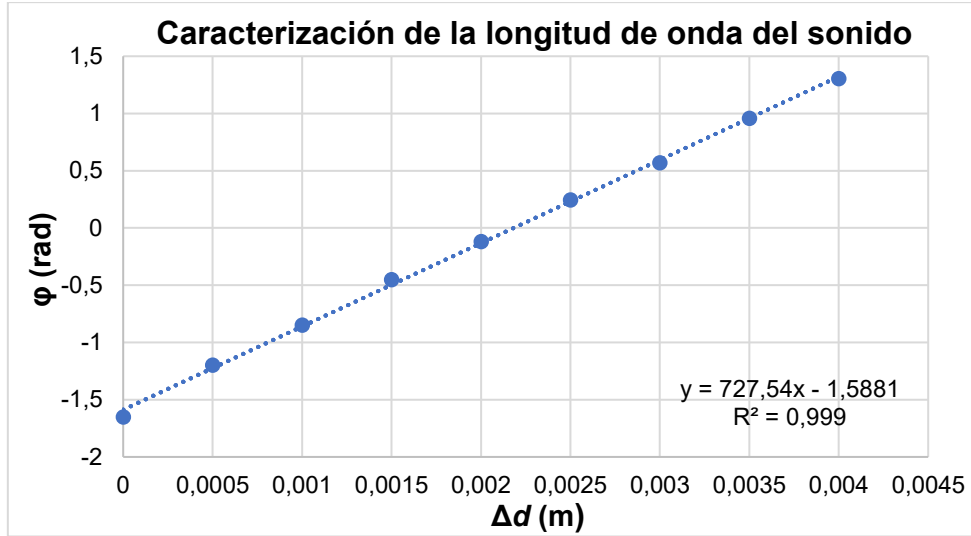


Figura 24: Ajuste lineal de la fase media medida, φ , en función de la variación de distancia entre transductores, Δd , para la caracterización de la velocidad del sonido.

Estos datos permiten realizar un ajuste lineal utilizando la expresión (46):

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta d + \varphi_0, \quad (51)$$

donde φ es la fase medida, λ es la longitud de onda del sonido en el medio, Δd es la variación de distancia y φ_0 una constante de fase que depende de la posición inicial.

A partir del ajuste lineal de los datos experimentales se obtiene una pendiente:

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} = (727,5 \pm 2,7) \text{ m}^{-1}.$$

de acuerdo con la teoría de errores descrita en [15].

Se observa que algunos puntos se desvían ligeramente de la línea ajustada. Esto podría atribuirse a posibles reflexiones de la onda en las paredes del cajón o a dilataciones mecánicas de la base metálica donde están montados los transductores, producidas durante su manipulación.

A partir del valor de la pendiente se determina la longitud de onda del sonido:

$$\lambda = (8,64 \pm 0,03) \text{ mm}. \quad (52)$$

Conociendo la frecuencia de emisión $f = 40 \text{ kHz}$, se calcula la velocidad del sonido en las condiciones experimentales:

$$c = f \cdot \lambda = (345,4 \pm 1,3) \text{ m/s}. \quad (53)$$

Este valor, corresponde, de acuerdo al ajuste de la velocidad del sonido con la temperatura del aire (44), a una temperatura aproximada dentro del cajón del montaje experimental de:

$$T = (23 \pm 2) ^\circ\text{C}. \quad (54)$$

Estos resultados demuestran, en primer lugar, el correcto funcionamiento del interferómetro de ultrasonido y, por otro, su potencial uso como sensor de temperatura basado en la propagación acústica. Para mejorar esta medida hubiera sido necesario mejorar el aislamiento del instrumento o la toma de un mayor número de datos.

4. Aplicaciones del interferómetro de ultrasonidos

4.1 Radar FMCW

Una de las aplicaciones naturales del interferómetro de ultrasonidos desarrollado surge al considerar el procedimiento seguido para la caracterización de la velocidad del sonido en el Apartado 3.7.2. En lugar de variar la distancia entre transductores, d , se modifica la frecuencia de la señal ultrasónica, f , y se realiza un ajuste lineal. A partir de la pendiente obtenida es posible estimar la distancia entre transductores teniendo en cuenta la expresión (23):

$$\varphi = \frac{2\pi d}{c} f. \quad (55)$$

Los instrumentos que mediante la modulación de la frecuencia de una señal continua miden distancias son conocidos como radares de onda continua de frecuencia modulada (radar FMCW, por sus siglas en inglés) [16].

Para que el interferómetro desarrollado en este trabajo pueda operar de manera similar, se añadieron al código unas líneas que modifican periódicamente la frecuencia de emisión, con un paso de 10 Hz dentro del rango comprendido entre 39,95 kHz y 40,05 kHz. El pequeño ancho de banda está motivado por el funcionamiento resonante del transductor, que obliga a no alejarse demasiado de la frecuencia de trabajo.

Los detalles de esta modificación se recogen en el Apéndice B, Apartado B.2 Modificación para funcionamiento tipo radar FMCW, siendo especialmente relevante la Tabla B.1, donde se muestran las frecuencias reales generadas. Estas difieren de los valores teóricos introducidos (39,95-40,05 kHz) debido a que la señal se genera mediante modulación por ancho de pulso (PWM), proceso que implica una división entera del reloj del microcontrolador. Esta operación introduce un error sistemático que debe tenerse en cuenta en la interpretación de los resultados.

En un primer intento, se colocaron los transductores sobre la base dentro del cajón en un montaje idéntico al mostrado en la Figura 19. No obstante, en esta ocasión se varió la frecuencia en lugar de la distancia. Se observó que el salto de fase entre frecuencias no era constante, para determinadas frecuencias, el desfase aumentaba bruscamente, mientras que en las siguientes el desfase en lugar de continuar aumentando disminuía. En vez de obtener el comportamiento lineal esperado se observó un comportamiento anómalo y que, además, cambiaba al cambiar la posición de la base dentro del cajón.

Este fenómeno se interpretó considerando la influencia de las paredes metálicas del cajón, que actuaban como un interferómetro de Fabry-Pérot. En este caso, la onda ultrasónica podía entrar en resonancia para ciertas frecuencias, dependiendo de la distancia de los transductores a dichas paredes. Esta resonancia provocaba interferencias constructivas o destructivas adicionales, afectando al patrón de fase medido.

Por ello, se colocó la base fuera del cajón para analizar como variaba la fase con la frecuencia, eliminando así los efectos resonantes introducidos por las paredes metálicas. Sin embargo, esta configuración presentaba una mayor inestabilidad en las mediciones de fase debido a la presencia de turbulencias en el aire del laboratorio. En la Figura 25 se muestra la evolución temporal de la fase:

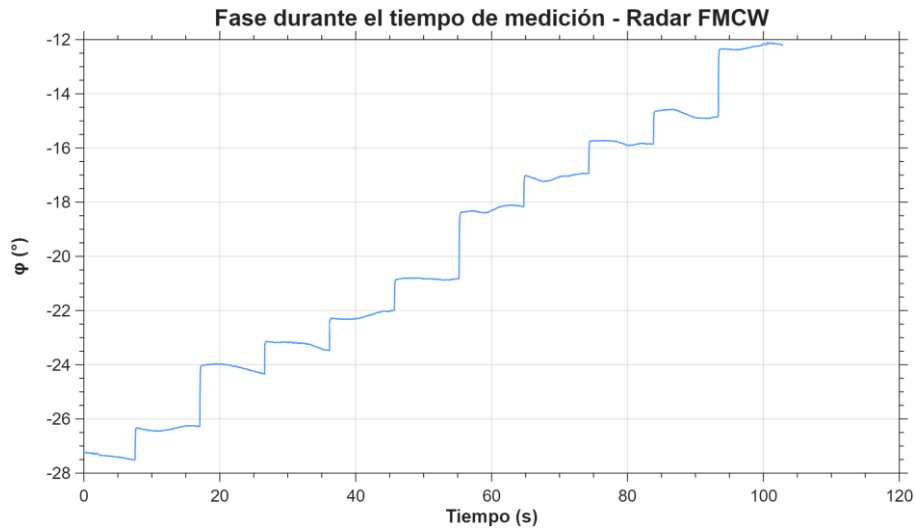


Figura 25: Evolución temporal de la fase medida con el interferómetro actuando como radar FMCW. Se puede observar la inestabilidad de las medidas aparecidas por las turbulencias del aire del laboratorio.

Para mitigar el efecto del ruido ambiental, se calculó la media de la fase correspondiente a cada frecuencia. Representado estas medias en función de las frecuencias reales generadas (véase Tabla B.1), se obtuvo la Figura 26, en la que se aprecia un comportamiento claramente lineal:

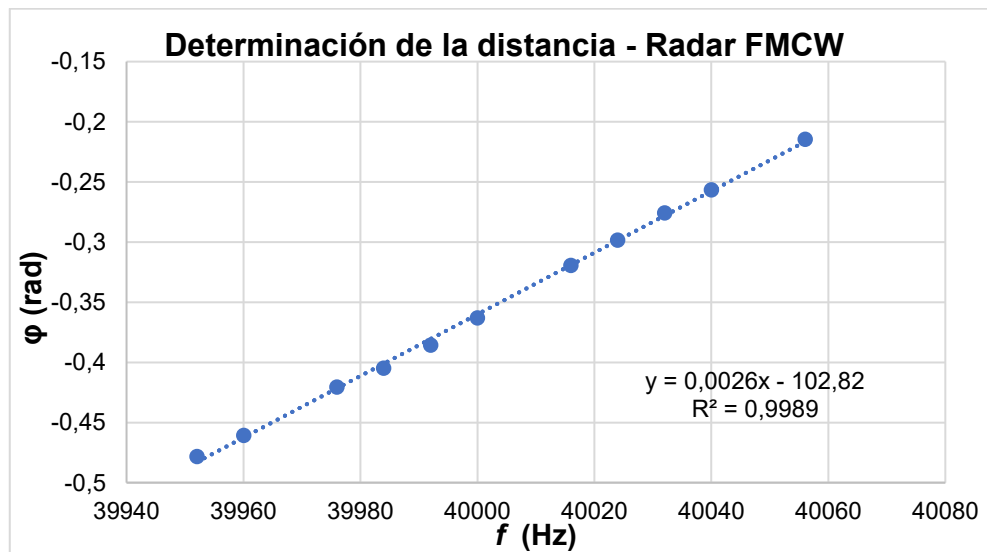


Figura 26: Ajuste lineal de la fase media medida, ϕ , en función de la frecuencia, f , para la determinación de la distancia entre transductores.

Mediante un ajuste lineal se obtiene la siguiente pendiente m :

$$m = \frac{2\pi d}{c} = 2,6 \text{ rad/kHz.} \quad (56)$$

A partir de este valor y suponiendo condiciones normales de laboratorio ($c = 343,4 \text{ m/s}$), se obtuvo una distancia entre transductores estimada de:

$$d = \frac{m c}{2\pi} = 14,21 \text{ cm.} \quad (57)$$

Sin embargo, la distancia medida con una cinta métrica entre los transductores era de aproximadamente 6 cm, un valor significativamente menor que el obtenido a partir de la

pendiente del ajuste, lo que indicaba que había algún fenómeno que no se estaba teniendo en cuenta.

Esta discrepancia se atribuyó al desfase introducido por los propios transductores. Al tratarse de dispositivos resonantes, su respuesta en fase varía bruscamente alrededor de la frecuencia de resonancia, en este caso de 40 kHz. En consecuencia, la fase de la onda acústica emitida o recibida no permanece constante con respecto a la fase de la señal eléctrica de la excitación del piezoeléctrico, sino que experimenta un desplazamiento dependiente de la frecuencia. Este fenómeno introduce un desfase sistemático dependiente también de la frecuencia.

Para comprobar esta hipótesis, se repitió la medición de fase variando la frecuencia, pero con los transductores colocados a una distancia prácticamente nula.

Efectivamente, los resultados confirmaron un comportamiento lineal de la fase con la frecuencia, incluso sin separación física apreciable entre transductores. Esto confirmó la existencia de un desfase adicional lineal con la frecuencia que se asoció al comportamiento resonante. La pendiente obtenida m_0 en este caso fue:

$$m_0 = 1,5 \text{ rad/kHz.} \quad (58)$$

Aplicando esta corrección, la distancia estimada resulta ser:

$$d = \frac{(m - m_0) c}{2\pi} = 6,01 \text{ cm.} \quad (59)$$

Un resultado mucho más coherente con la distancia medida físicamente.

Finalmente, se repitió este procedimiento para distancias entre transductores de 10 cm y 20 cm, con el objetivo de construir una recta de calibración que relacione la pendiente obtenida en el ajuste lineal con la distancia real en el modo de operación como radar FMCW.

Las pendientes obtenidas para cada distancia fueron:

- 6 cm $\rightarrow m_1 = 2,6 \text{ rad/kHz}$
- 10 cm $\rightarrow m_2 = 3,1 \text{ rad/kHz}$
- 20 cm $\rightarrow m_3 = 4,4 \text{ rad/kHz}$

Ajustando los datos experimentales se obtuvo la siguiente ecuación para la recta de calibración:

$$d = 0,0129 \cdot m/s \cdot m + 0,0018 \text{ m,} \quad (60)$$

donde d es la distancia en metros y m es la pendiente del ajuste lineal de fase frente a frecuencia (en rad/Hz).

4.2 Radar de turbulencias

Las turbulencias del aire son un fenómeno ampliamente estudiado en la bibliografía científica [17] y existen diversas metodologías para su caracterización. En este trabajo se ha optado por un enfoque sencillo para utilizar el interferómetro desarrollado como un radar de turbulencias.

Con los transductores colocados enfrentados a una distancia $d = 6 \text{ cm}$ y emitiendo a frecuencia constante, se midió la fase RMS en el tiempo. A partir de esta medida se estimó la velocidad media de las turbulencias, $\bar{v}$.

Suponiendo que la velocidad de la turbulencia se encuentra dentro del régimen $v \ll c$ (es decir, mucho menor que la velocidad del sonido) y que la contribución dominante al desfase

observado proviene de la componente longitudinal de la velocidad del aire, se parte de la expresión (32):

$$\Delta\varphi_{v_x} \approx \frac{2\pi f d}{c^2} v_x. \quad (61)$$

Tomando la desviación RMS del desfase, se obtiene una expresión para la velocidad media cuadrática asociada a las turbulencias:

$$\bar{v} \approx \frac{c^2}{2\pi f d} \varphi_{RMS}, \quad (62)$$

donde φ_{RMS} es la desviación RMS del desfase, $f = 40$ kHz es la frecuencia de la señal ultrasónica, $d = 6$ cm es la distancia entre transductores y $c = 343,3$ m/s es la velocidad del sonido en condiciones normales de laboratorio.

Esta relación proporciona un método sencillo y simplificado para cuantificar la intensidad de las turbulencias a partir de las variaciones de fase medidas por el interferómetro.

Para utilizar el interferómetro de ultrasonidos como radar de turbulencias, se diseñó un experimento en el que se midió la fase en el tiempo con el interferómetro colocado en el laboratorio, en condiciones ambientales normales. Posteriormente, se encendió el sistema de aire acondicionado para generar un flujo de aire artificial y aumentar la intensidad de las turbulencias.

Los transductores se colocaron alineados y enfrentados a una distancia $d = 6$ cm, cerca de uno de los conductos de ventilación, con el objetivo de que el haz ultrasónico atravesara la región afectada directamente por el flujo de aire.

De este modo, se pudieron comparar las medidas de fase obtenidas antes y después de encender el aire acondicionado. La evolución temporal de la fase en ambos casos se muestra en la Figura 27, donde se puede observar claramente el efecto de las turbulencias inducidas.

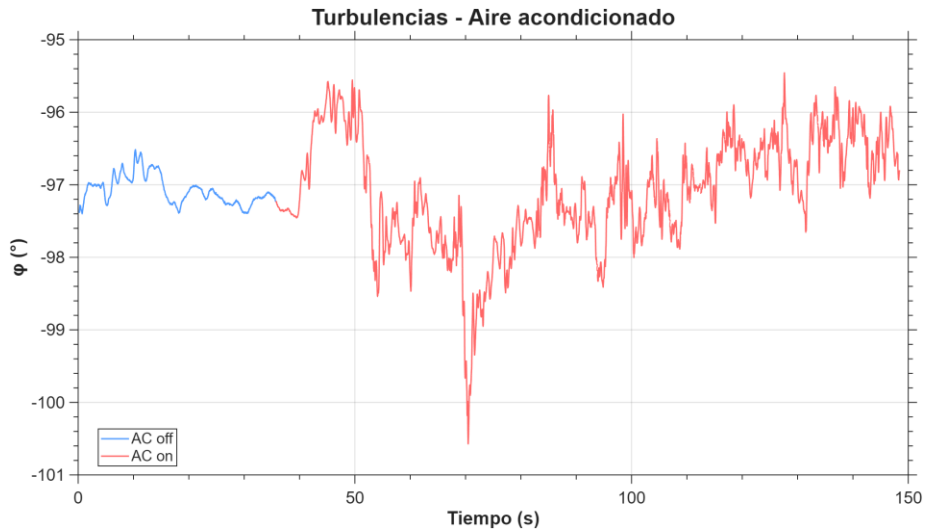


Figura 27: Evolución temporal de la fase medida por el interferómetro de ultrasonidos. El tramo azul (AC off) corresponde al aire del laboratorio con el aire acondicionado apagado, mientras que el tramo rojo (AC on) muestra el resultado con el aire acondicionado encendido. Se observa un notable incremento en las oscilaciones de fase debido al aumento de las turbulencias en el aire.

A partir de los datos registrados, se calcularon las siguientes fases RMS:

$$\varphi_{\text{RMS,off}} = 3,405 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad (63)$$

$$\varphi_{\text{RMS,on}} = 1,357 \cdot 10^{-2} \text{ rad}, \quad (64)$$

Aplicando la expresión (62), se obtienen las velocidades medias de las turbulencias:

- Con aire acondicionado apagado:

$$\bar{v}_{\text{off}} = 0,0266 \text{ m/s}, \quad (65)$$

- Con aire acondicionado encendido:

$$\bar{v}_{\text{on}} = 0,1061 \text{ m/s}. \quad (66)$$

Se observa cómo encender el aire acondicionado provoca un aumento considerable en la velocidad de las turbulencias del aire.

De forma complementaria, se realizó una medición para estudiar el efecto de la respiración sobre las turbulencias detectadas por el interferómetro. Para ello, se contuvo la respiración durante unos instantes y luego se respiró normalmente a unos dos metros del instrumento. La evolución temporal de la fase medida se muestra en la Figura 28:

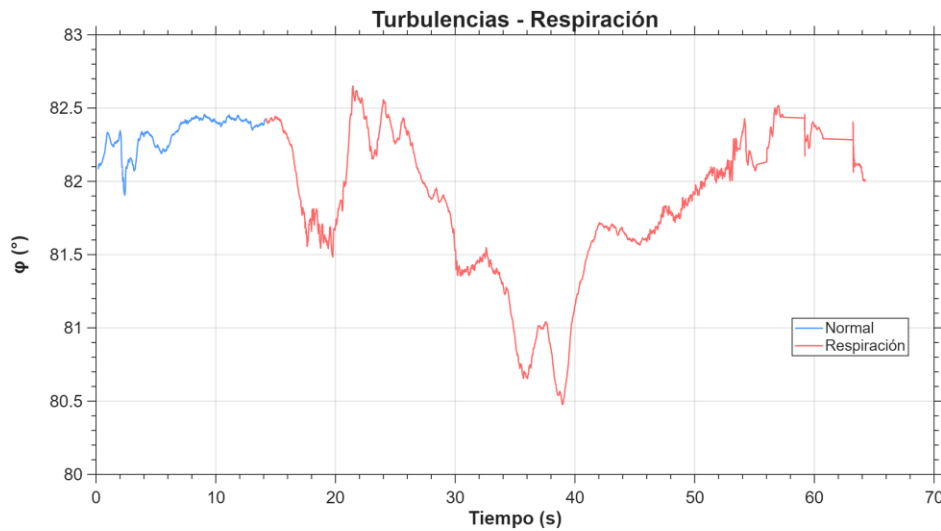


Figura 28: Evolución temporal de la fase medida por el interferómetro de ultrasonidos. El tramo azul (Normal) corresponde al aire de laboratorio en reposo, mientras que el tramo rojo (Respiración) incluye las turbulencias producidas por la respiración cerca del instrumento. Se aprecia un claro incremento en las oscilaciones de fase durante la respiración.

La fase RMS registrada durante la respiración fue:

$$\varphi_{\text{RMS,resp}} = 8,591 \cdot 10^{-3} \text{ rad}. \quad (67)$$

Aplicando nuevamente la ecuación (62), se obtiene la velocidad media de la turbulencia generada por la respiración:

$$\bar{v}_{\text{resp}} = 0,0671 \text{ m/s}. \quad (68)$$

Estos resultados evidencian la capacidad del interferómetro para detectar cambios en la intensidad de las turbulencias en el aire (incluso para fenómenos sutiles como la respiración humana), validando su funcionamiento como radar ultrasónico de turbulencias.

4.3 Radar Doppler

Mediante el interferómetro de ultrasonidos desarrollado, se puede medir la velocidad con la que un transductor se aproxima o se aleja del otro. Esto es posible gracias al efecto Doppler producido por el movimiento relativo emisor-receptor, estudiado en detalle en el Apartado 2.1. Los dispositivos que aprovechan este fenómeno reciben el nombre genérico de radar Doppler.

En el desarrollo teórico, ecuación (12), se mostró que, cuando uno de los transductores se mueve con velocidad relativa v a lo largo del eje que los une, el desfase acumulado en la propagación de la onda presenta una dependencia lineal con el tiempo.

Por lo tanto, el fasor de la señal recibida gira con una frecuencia constante f_D (frecuencia Doppler) e igual a:

$$f_D = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{f v}{c - v}, \quad (69)$$

donde $f = 40$ kHz es la frecuencia de la señal, c es la velocidad del sonido y v la velocidad relativa del emisor respecto del receptor.

De acuerdo a esta expresión:

- Si el emisor se acerca al receptor ($v > 0$), entonces $f_D < 0$, se produce un giro levógiro (sentido horario).
- Si el emisor se aleja del receptor ($v < 0$), entonces $f_D > 0$, se produce un giro dextrógiro (sentido antihorario).

Despejando la velocidad a partir de esta relación se obtiene:

$$v = \frac{f_D c}{f_D - f}. \quad (70)$$

Esta relación permite estimar experimentalmente la velocidad relativa entre ambos transductores (o la de cualquier objeto al que se acople uno de ellos) a partir de la frecuencia de giro del fasor o frecuencia Doppler.

Para verificar el funcionamiento del sistema como radar Doppler, se diseñó el montaje mostrado en la Figura 29.a. Se utilizó un *plotter* (véase Figura 29.b) al que se fijó el transductor emisor en la parte móvil, mientras que el receptor permaneció anclado en la base y alineado con el anterior. La principal ventaja de este dispositivo es que su desplazamiento puede programarse mediante *Keysight VEE Pro* (véase Apéndice E), de modo que se consigue una velocidad constante y conocida.



Figura 29: (a) Fotografía del montaje experimental del radar Doppler. (b) Fotografía del plotter empleado.

Se comenzó midiendo las componentes I y Q en función del tiempo para el emisor alejándose a una velocidad constante $v = 3 \text{ cm/s}$. En la Figura 30 se representa la evolución temporal de las señales I/Q . Se observa que describen un giro dextrógiro con una frecuencia de giro constante y positiva, tal como se espera teóricamente cuando el emisor se aleja del receptor. La amplitud decrece con el tiempo como consecuencia del alejamiento entre los transductores.

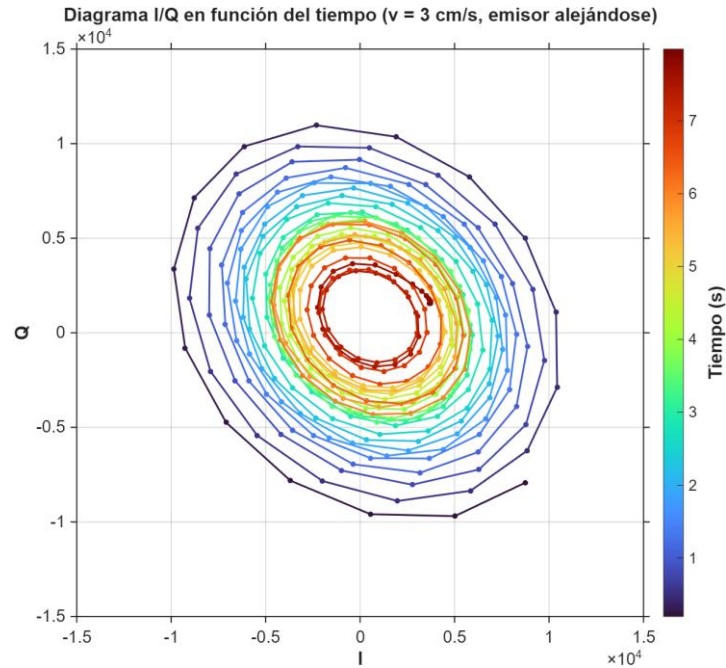


Figura 30: Representación de la señal en el plano I/Q durante la medición con el emisor alejándose a velocidad constante $v = 3 \text{ cm/s}$. La trayectoria formada por los puntos medidos revela un giro dextrógiro (sentido horario) del fasor, como ayuda a esa visualización de la trayectoria se unieron los puntos mediante una línea.

Para determinar frecuencia Doppler f_D se puede utilizar indistintamente la señal I o la señal Q , ya que ambas oscilan con la misma frecuencia angular. Esta frecuencia coincide, de forma natural, con la frecuencia de giro del fasor ($I = A \cos(\omega' t)$ y $Q = A \sin(\omega' t)$).

El procedimiento consiste en volcar los datos al programa *Keysight VEE Pro*, donde se construye una forma de onda a partir de la señal I (*Build Waveform*). A continuación, se aplica una transformada rápida de Fourier (*FFT*) sobre ella, permitiendo obtener un espectro de frecuencias (véase Figura 31) y, a partir de este, identificar la frecuencia de giro del fasor, que corresponde al pico principal del espectro.

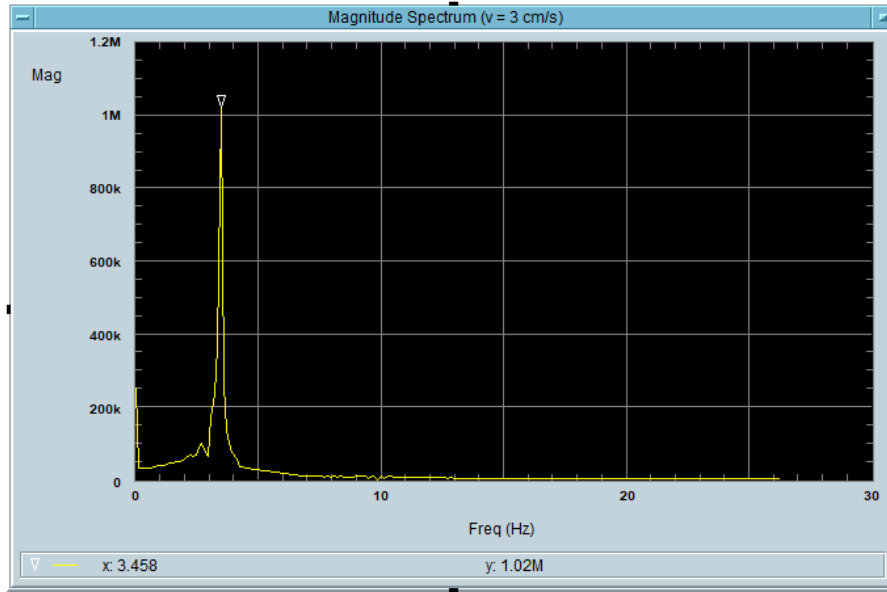


Figura 31: Espectro de frecuencias obtenido mediante FFT de la señal I registrada con el emisor alejándose con velocidad constante $v = 3 \text{ cm/s}$. El pico principal aparece en $f_D = 3,458 \text{ Hz}$. El pico en $f = 0 \text{ Hz}$ se debe a la componente continua de la señal.

En el espectro de frecuencias de la Figura 31, se identifican dos picos bien diferenciados:

- $f = 0 \text{ Hz}$, asociado a la componente continua de la señal, habitual en dispositivos electrónicos.
- $f_D = 3,458 \text{ Hz}$, correspondiente a la frecuencia Doppler

Por lo que, aplicando la expresión (70), la velocidad relativa es:

$$v = \frac{f_D c}{f_D - f} = -8,65 \cdot 10^{-5} \cdot c. \quad (71)$$

Sustituyendo la velocidad del sonido en condiciones normales de laboratorio $c = 343,3 \text{ m/s}$:

$$v = -2,97 \text{ cm/s}. \quad (72)$$

El valor obtenido se diferencia con la velocidad programada en el *plotter* (3 cm/s) en un 1 % confirmando la validez del método.

No obstante, el espectro de frecuencias empleado solo proporciona el módulo de f_D . Por tanto, el signo de la velocidad no se puede determinar a partir de una única señal (I o Q). En este caso, se sabía de antemano que el emisor se alejaba y que, por ello, $f_D > 0$. Sin embargo, en una situación general, este método no permitiría distinguir si el emisor se acerca o se aleja del receptor.

Para resolver esta indeterminación del signo, se debe usar el fasor de la señal y no sólo una de sus componentes, formando el número complejo $s = I + jQ$. A partir de esta señal compleja, se puede calcular su transformada de Fourier y observar directamente el espectro de frecuencias, con la dirección del giro reflejada en el signo de la frecuencia Doppler.

Dado que la función *FFT* de *Keysight VEE Pro* no permite operar directamente sobre números complejos, se emplearon las funciones de *MATLAB* incorporadas en el entorno *VEE*. Los detalles del procedimiento pueden consultarse en el Apéndice E.

Se programó el *plotter* para que el emisor primero se alejara a una velocidad $v_1 = 2$ cm/s y luego se acercara a una velocidad $v_2 = 5$ cm/s. El espectro de frecuencias obtenido a partir de la transformada de Fourier del fasor de la señal registrada se muestra en la Figura 32.

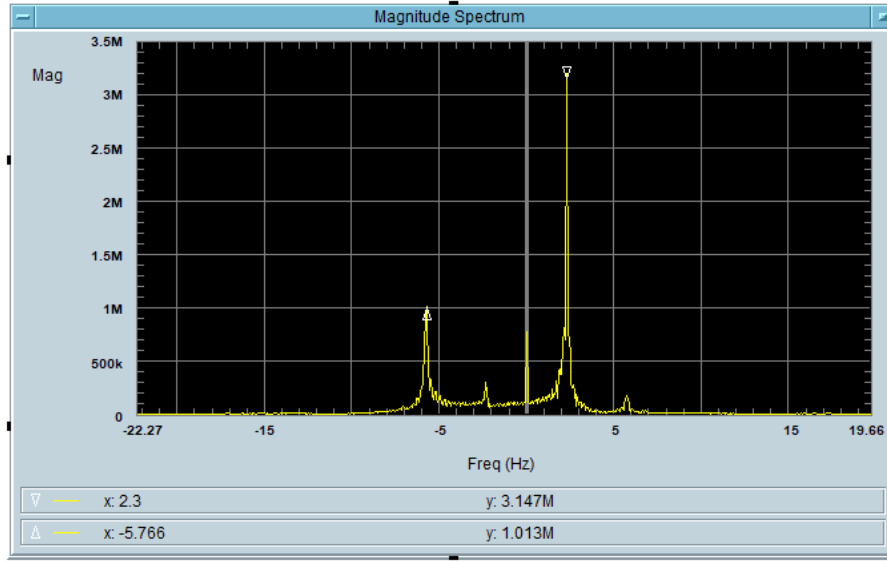


Figura 32: Espectro de frecuencias obtenido mediante la transformada de Fourier del fasor complejo de la señal registrada correspondiente a una trayectoria en la que el emisor se aleja a velocidad constante $v_1 = 2$ cm/s y luego se aproxima a $v_2 = 5$ cm/s. Se observan dos picos claramente diferenciados, uno en frecuencia positiva y otro en negativa. El pico de $f = 0$ Hz corresponde a la componente continua de la señal.

Las frecuencias detectas en el espectro son:

$$f_{D,1} = 2,300 \text{ Hz},$$

$$f_{D,2} = -5,766 \text{ Hz},$$

indicando efectivamente el signo si los transductores se acercan o se alejan. Aplicando la expresión (70), se obtienen las siguientes velocidades:

$$v_{D,1} = -5,75 \cdot 10^{-5} \cdot c = -1,97 \text{ cm/s}, \quad (73)$$

$$v_{D,2} = 1,44 \cdot 10^{-4} \cdot c = 4,95 \text{ cm/s}. \quad (74)$$

Estos resultados confirman la validez del interferómetro de ultrasonidos como radar Doppler y demuestran que, al operar con el fasor de la señal, es posible determinar el sentido del movimiento gracias al signo de la frecuencia Doppler.

La precisión de las medidas es notablemente alta (en torno al 1%) y las pequeñas desviaciones podían deberse a errores de calibración del *plotter* o a una velocidad del sonido diferente a la considerada (por una temperatura ambiental distinta). De hecho, si se asume que el *plotter* se mueve a la velocidad indicada, este mismo experimento podría utilizarse para estimar la temperatura del aire.

4.4 Recreación del experimento de Michelson-Morley

En 1887 se llevó a cabo el célebre experimento de Michelson-Morley. Su objetivo era poner a prueba la existencia del éter, un medio hipotético que llenaba todo el espacio y permitía la propagación de la luz. El propósito era detectar y medir la velocidad relativa de la Tierra con respecto a dicho éter.

Para ello, se utilizó el montaje esquematizado en la Figura 33, que consistía en definitiva en un interferómetro, el interferómetro de Michelson-Morley. Este estaba compuesto por una fuente de luz A , una placa de vidrio parcialmente plateada B y dos espejos C y E . La placa de vidrio dividía el haz de luz en dos caminos perpendiculares de la misma longitud L , que se reflejaban en los espejos y volvían a recombinarse en el punto de observación.

En caso de existir el éter, y suponiendo que la Tierra se desplazara a través de él con una cierta velocidad u , la distancia óptica recorrida por la luz en cada brazo del interferómetro dependería de su orientación respecto al movimiento del éter. Como consecuencia, se produciría una diferencia de fase entre ambos haces al recombinarse, lo que generaría un patrón de interferencias. El espaciado de este patrón magnitud de estas interferencias permitiría estimar la velocidad del éter. Los resultados teóricos esperados debido a la presencia de un medio en movimiento han sido desarrollados con mayor detalle en el Apartado 2.2.

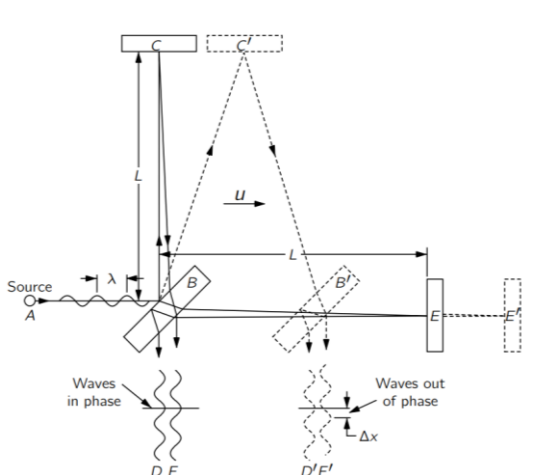


Figura 33: Diagrama esquemático del experimento de Michelson-Morley. Fuente [18].

Sin embargo, los resultados observados por Michelson y Morley no se correspondieron con los de un medio en movimiento, no había variación del patrón de interferencias al rotar el interferómetro. Esto les llevó a concluir que el éter no existía. No obstante, si se repitiera un experimento análogo usando ondas sonoras en lugar de luz, sí se obtendrían los resultados esperados, ya que sí existe un “éter acústico”, el aire.

4.4.1 Montaje experimental

Se trató de recrear el experimento de Michelson-Morley con el interferómetro de ultrasonidos diseñado con un sencillo montaje (véase Figura 34.a). La velocidad del flujo del aire se pudo medir experimentalmente gracias al anemómetro de cuchara *Windmaster 2* (Figura 34.b), prestado por el Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Valladolid.

En primer lugar, era necesario crear un flujo constante de aire. Para ello, se empleó un ventilador fijado con un gato de sujeción, para evitar desplazamientos al encenderse (Figura 34.c). En la salida del ventilador, se acopló un tubo cilíndrico de cartón, al final del cual se introdujo un gran número de pajitas (Figura 34.d). Estas pajitas actuaban como rectificadores del flujo, favoreciendo un régimen laminar y más uniforme del aire saliente.

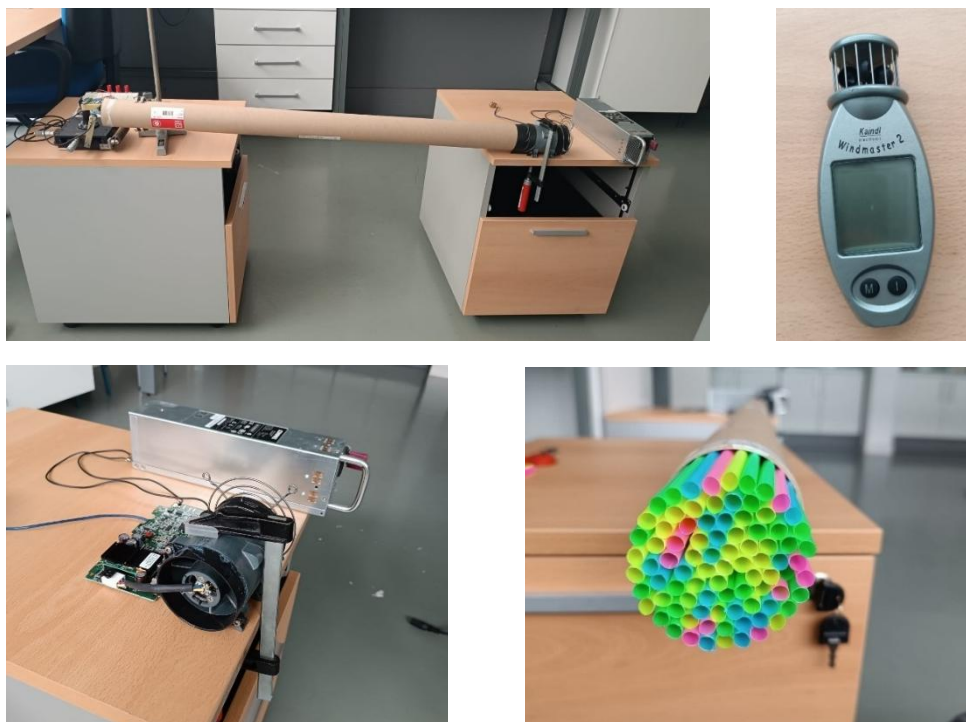


Figura 34: (a) Montaje completo para recrear el experimento Michelson-Morley. (b) Anemómetro de cuchara Windmaster 2. (c) Ventilador utilizado como generador del flujo de aire. (d) Pajitas usadas para lograr un flujo laminar de aire.

Tras este sistema de generación de flujo, se situó la base metálica de la Figura 19.a. Esta base se podía rotar para modificar la orientación del haz ultrasónico respecto a la dirección de flujo, permitiendo estudiar tanto el caso de flujo longitudinal (Figura 35.a) como el caso de flujo transversal (Figura 35.b).

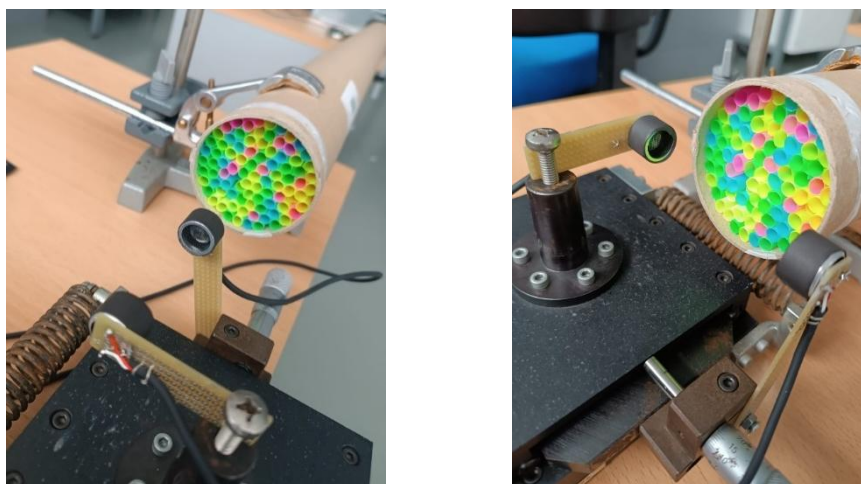


Figura 35: (a) Montaje orientado para estudiar el efecto de un flujo longitudinal. (b) Montaje orientado para estudiar el efecto de un flujo longitudinal.

Un lector atento podrá advertir que, a diferencia del experimento Michelson-Morley en el que el haz de luz se dividía en dos caminos ortogonales, en este montaje solo existe un haz de ultrasonidos que viaja del emisor al receptor. ¿Dónde se encuentra entonces el segundo brazo?

En este caso, el segundo brazo es virtual. Este segundo brazo es la señal de referencia generada con la que se conmuta la señal recibida. La interferencia no ocurre en el espacio físico entre haces, sino que lo hace en el conmutador de Tayloe.

Como apunte final, señalar que este montaje no tiene como objetivo realizar una medida precisa de la velocidad del aire. Aunque el interferómetro diseñado presenta una alta sensibilidad, son las condiciones experimentales las que limitaban la precisión de la medida: el sistema no estaba completamente aislado, el flujo de aire que se logró no era perfectamente uniforme e, incluso, el propio anemómetro usado para la comprobación de medidas tenía una resolución limitada (del orden de 1 km/h).

El propósito principal del montaje es, por tanto, demostrar que el sonido efectivamente se propaga a través del aire y que la presencia de un flujo modifica esta propagación de la forma expuesta en el Apartado 2.2.

4.4.2 Resultados

- Viento longitudinal

Durante las primeras mediciones con el montaje de la Figura 35.a, se identificaron varios problemas derivados de su simplicidad.

En primer lugar, al situar uno de los transductores directamente en el flujo de aire, se generaban turbulencias en el eje de propagación emisor-receptor, llegando a anularse el flujo en ciertos puntos, como se comprobó mediante el anemómetro.

Para mitigar este efecto, se modificó ligeramente el montaje: los transductores se alejaron de la salida de aire y se orientaron con una pequeña inclinación respecto al flujo. Esta solución permitió evitar el impacto directo del aire sobre los sensores, reduciendo así las turbulencias.

Esta inclinación introduce una componente transversal en la velocidad del aire. Sin embargo, se considera que su efecto sobre el desfase es despreciable frente a la componente longitudinal, tal y como se justificó en el Apartado 2.3. Para medir la velocidad del flujo con el anemómetro, este se colocó alineado con el eje emisor-receptor para medir únicamente esa componente longitudinal.

Por otro lado, se observó que, al introducir el flujo de aire, la temperatura del medio se veía alterada, lo cual modificaba la velocidad de sonido y, en consecuencia, el desfase medido.

Para minimizar el impacto de este efecto y garantizar que las mediciones se realizaran en condiciones térmicas equivalentes, se adoptó el siguiente procedimiento experimental: se encendía el ventilador, se dejaba estabilizar el flujo, y posteriormente se apagaba el ventilador para observar la variación de fase debida a la disminución del flujo de aire.

Procediendo de esta manera, se realizaron medidas para un flujo favorable (Figura 36.a) y un flujo contrario (Figura 36.b):

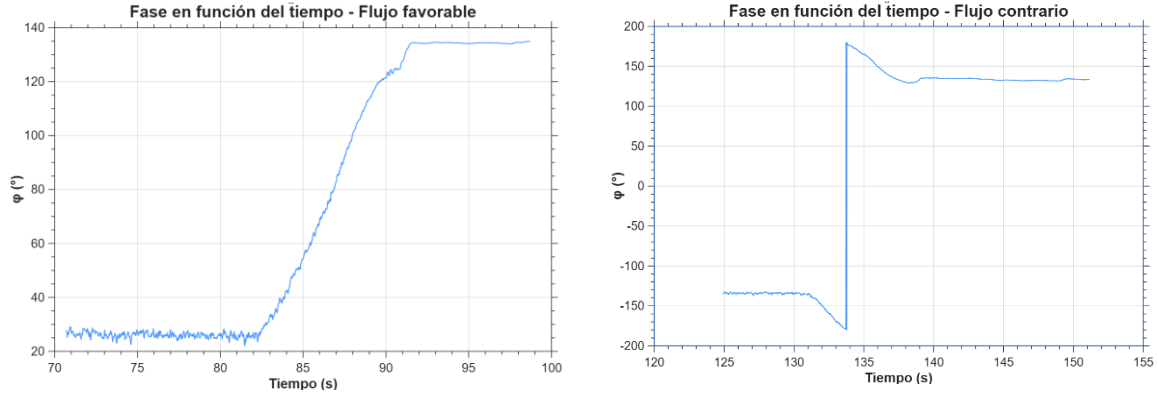


Figura 36: (a) Evolución temporal del desfase de la señal al apagar el flujo de aire longitudinal favorable. (b) Evolución temporal del desfase de la señal al apagar el flujo de aire longitudinal contrario.

Las variaciones de fase obtenidas debidas al flujo longitudinal fueron:

$$\varphi_{\text{fav}} = 26^\circ - 134^\circ = -108^\circ, \quad (75)$$

$$\varphi_{\text{cont}} = -134^\circ - (135^\circ - 360^\circ) = 91^\circ. \quad (76)$$

A partir de estos desfases y aplicando la ecuación (25), se puede estimar la velocidad del flujo del aire despejando:

$$v = -\frac{\Delta\varphi c^2}{\Delta\varphi c + 2\pi f d'} \quad (77)$$

donde $\Delta\varphi$ es el desfase medido (en radianes), $f = 40 \text{ kHz}$ es la frecuencia de la señal ultrasónica, $d = 0,06 \text{ m}$ es la distancia longitudinal entre transductores medida y $c = 343,3 \text{ m/s}$ es la velocidad del sonido supuesta.

Sustituyendo en la expresión (77) se obtuvieron los siguientes, resultados que se compararon con las velocidades medidas mediante el anemómetro:

$$v_{\text{fav}} = 51,1 \text{ km/h} \quad v_{\text{fav,anem}} = 53 \text{ km/h}$$

$$v_{\text{cont}} = -43,3 \text{ km/h} \quad v_{\text{cont,anem}} = -40 \text{ km/h}$$

Los resultados muestran una concordancia notable, confirmando la validez de las expresiones teóricas desarrolladas. Se demuestra así la existencia del “arrastre” que ejerce el flujo de aire sobre la onda acústica, efecto que Michelson y Morley esperaban observar con la luz y el éter.

Además, se probó a aumentar la distancia entre transductores con el fin de mejorar la sensibilidad del sistema. De acuerdo con la ecuación (25), para una misma velocidad del medio, un mayor valor de d implica una mayor variación de fase. No obstante, al aumentar la separación se observó una pérdida significativa de la uniformidad del flujo en el eje de propagación. Aun así, se comprobó que, efectivamente, el desfase aumentaba con la distancia.

- Viento transversal

Uno de los efectos más interesantes desarrollados en el Apartado 2.2 fue que un flujo transversal también afecta a la propagación de la onda, aumentando su tiempo de propagación y, en consecuencia, el desfase producido.

Sin embargo, al realizar el experimento correspondiente con el montaje mostrado en la Figura 35.b se observó que el desfase producido no aumentaba, sino que disminuía. Este resultado inesperado obligó a reconsiderar ciertos aspectos del montaje.

La interpretación propuesta fue que la pieza piezoeléctrica del transductor dista de comportarse como una fuente puntual o esférica, por lo que las superficies de fase generadas no son esféricas y presentan una dependencia angular significativa. Este comportamiento constituye un problema, ya que el flujo transversal provoca una aberración (ver ecuación (29)) que modifica el ángulo de incidencia de la onda sobre el receptor; Dicha modificación angular altera la fase registrada y enmascara el desfase propiamente debido al flujo transversal del medio.

Una solución posible sería aumentar la distancia entre los emisor y receptor porque, a grandes distancias, las superficies de fase pueden aproximarse a frentes planos. Sin embargo, esta opción resultaba inviable debido a las limitaciones físicas del experimento, en particular al diámetro del tubo que canaliza el flujo, que impone un límite máximo a la separación de los transductores.

Se optó por construir unos diafragmas de FR4 (Figura 37), material compuesto de fibra de vidrio recubierta por láminas de cobre, que se considera opaco a los ultrasonidos. La incorporación de estos diafragmas permitió aproximar el comportamiento del sistema al de una fuente puntual, aunque fue necesario aumentar al máximo la ganancia del PGA debido a la disminución del haz emitido. De esta forma, se logró minimizar el efecto angular no deseado y que el desfase fuera producido exclusivamente por el arrastre del flujo transversal.

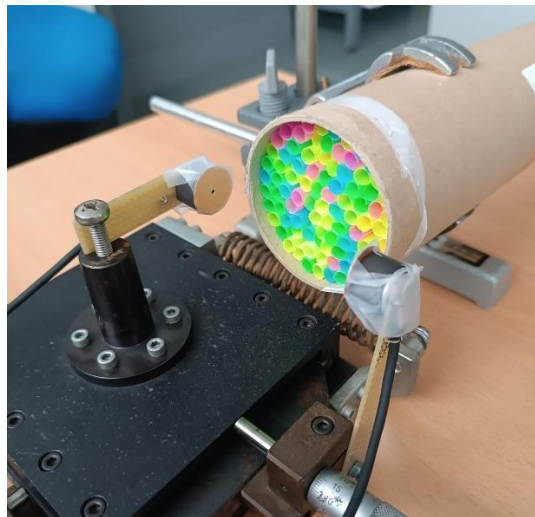


Figura 37: Montaje orientado para estudiar el efecto de un flujo transversal, los transductores cuentan con los diafragmas FR4 diseñados para que se comporten como un emisor y receptor puntuales.

A modo de comprobación, se midió la fase con el ventilador encendido y apagado. La fase registrada se muestra la Figura 38:

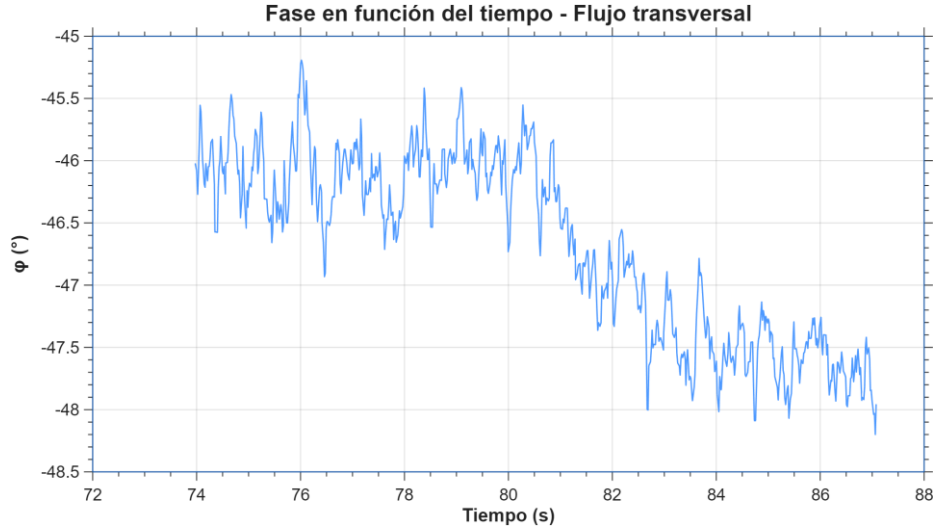


Figura 38: Evolución temporal del desfase de la señal al apagar el flujo de aire trasversal.

El desfase medido debido al flujo trasversal:

$$\varphi_{\text{trans}} = -46^\circ - (-47,75^\circ) = 1,75^\circ. \quad (78)$$

Aplicando la expresión (27), se pudo estimar la velocidad del flujo trasversal resolviendo la ecuación mediante el método de la secante en *Mathematica*:

$$\Delta\varphi = 2\pi f \frac{d \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} \right)}{c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}, \quad (79)$$

donde $\Delta\varphi$ es el desfase medido (en radianes), $f = 40$ kHz es la frecuencia de la señal ultrasónica, $d = 0,06$ m es la distancia entre transductores y $c = 343,3$ m/s es la velocidad del sonido supuesta.

El valor obtenido se comparó con la medida directa obtenida con el anemómetro fue:

$$v_{\text{fav}} = 46,3 \text{ km/h} \quad v_{\text{fav,anem}} = 42 \text{ km/h}$$

Se trata de un resultado coherente y significativo, que demuestra que el aire actúa para el sonido como se esperaba que lo hiciera el éter para la luz.

Este resultado es especialmente interesante, ya que en la mayoría de la bibliografía sobre anemometría la contribución de la componente transversal del flujo no se suele tener en cuenta [19-20]. Sin embargo, en ausencia de componente longitudinal, se trata del único efecto que permanece activo. Aquí se ha demostrado que la contribución del flujo trasversal es perfectamente detectable y cuantificable bajo las condiciones adecuadas.

5. Conclusiones

A modo de conclusión, puede considerarse que el desarrollo del interferómetro de ultrasonidos ha sido exitoso. Se ha logrado diseñar y construir un instrumento funcional, versátil y válido tanto para aplicaciones docentes y que puede servir como prueba de concepto para el desarrollo de un dispositivo de interés para aplicaciones investigadoras. Este trabajo pretende ser una prueba de que para desarrollar un equipamiento experimental útil no es necesario un elevado presupuesto, sino que basta con una comprensión profunda de los principios físicos implicados, ingenio y creatividad para afrontar los retos que surgen en este tipo de proyectos, cualidades que el alumno ha podido observar y aprender de primera mano de sus tutores.

El instrumento ha sido empleado de forma eficaz para verificar experimentalmente las expresiones obtenidas en el desarrollo teórico, observando cómo un emisor o un medio en movimiento modifican la fase de la onda recibida. Además, se ha comprobado la viabilidad del sistema para diversas aplicaciones, como radar FMCW, radar de turbulencias o radar Doppler. El desarrollo desde cero del interferómetro ha permitido al alumno poner en práctica los conocimientos adquiridos a lo largo del Grado de Física, desde conceptos de mecánica y óptica, hasta electromagnetismo y física computacional. Se trata de un trabajo muy completo, con un equilibrio notable entre teoría y práctica.

5.1 Líneas de desarrollo futuras

A lo largo del trabajo se ha puesto de manifiesto la flexibilidad del interferómetro de ultrasonidos desarrollado, así como la variedad de aplicaciones posibles. A continuación, se recogen algunas propuestas de mejora o líneas de desarrollo futuras que, por cuestiones de tiempo, espacio o recursos materiales, no se han podido abordar en el presente trabajo:

- Las mediciones podrían optimizarse mediante un mejor aislamiento acústico empleando una cámara anecoica, logrando un flujo de aire más uniforme mediante una cámara de viento o ambas.
- Adaptando el diseño, el interferómetro podría emplearse como sensor para la detección precisa del nivel de un líquido explotando la distinta velocidad de propagación en dos medios.
- El sistema podría implementarse como caudalímetro para determinar el flujo volumétrico de un gas o líquido con las adaptaciones adecuadas aprovechando la dependencia de la fase con la velocidad del medio.
- El interferómetro podría emplearse como un anemómetro. Para obtener medidas absolutas, sería necesario incorporar un termómetro que permitiera ajustar con precisión la velocidad del sonido en función de la temperatura del medio.

Bibliografía

- [1] R. Boyle, *New Experiments Physico-Mechanical, Touching the Spring of the Air and its Effects*, Londres, 1660.
- [2] A. Guillemin, *El mundo físico: gravedad, gravitación, luz, calor...*, Barcelona: Montaner y Simon, 1882.
- [3] J. D. Cutnell y K. W. Johnson, *Introduction to Physics*, John Wiley &, 2013.
- [4] P. A. Tipler y G. Mosca, *Physics for scientists and engineers*, Macmillan Learning, 2022.
- [5] R. A. Serway y J. W. Jewett, *Physics for scientists and engineers*, Cen, 2018.
- [6] D. Halliday, R. Resnick y J. Walker, *Fundamentals of Physics*, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.
- [7] Ó. Alejos y J. M. Muñoz, «The classical Doppler effect revisited by the mathematical description of the pashe function,» *arXiv:2308.08566 [physics.class-ph]*, 2023.
- [8] D. Tayloe, «Ultra-low noise, high performance, zero IF quadrature product detector and preamplifier,» *Journal of the Northern California QRP Club*, 2003.
- [9] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky y H. Nawab, *Signals and Systems*, 2 ed., Prentice Hall, 1997.
- [10] E. F. Philhower, «Arduino-Pico: Raspberry Pi RP2040 support for Arduino,» GitHub, [En línea]. Available: <https://github.com/earlephilhower/arduino-pico>.
- [11] W. M. Haynes, Ed., *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 96 ed., Boca Raton, Florida: CRC Press, 2015.
- [12] E. Hecht, *Optics*, San Francisco: Addison Wesley, 2002 .
- [13] B. P. Abbott y e. al., « Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,» *Physical Review Letters*, vol. 116, nº 6, p. 061102, 2016.
- [14] D. H. Shoemaker, «dvanced LIGO anticipated sensitivity curves,» LIGO Laboratory, 2010. [En línea]. Available: <https://dcc.ligo.org/LIGO-T0900288/public>.
- [15] J. L. Devore, *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, Cengage Learning, 2012.
- [16] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, 3 ed., McGraw-Hill, 2001.
- [17] P. A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2004.
- [18] R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vols. %1 de %2I: Mainly Mechanics, Radiation, Nueva York: Basic Books, 2011.
- [19] D. Han, S. Kim y P. Sekwang, «Two-dimensional ultrasonic anemometer using the directivity angle of an ultrasonic sensor,» *Microelectronics Journal*, vol. 39, nº 10, pp. 1195-1199, 2008.

- [20] Z. Shan, M. Han, X. Liu y Y. Liu, «Ultrasonic wind vector measurement based on quadratic correlation two-frequency phase method,» *ISA Transactions*, vol. 156, pp. 725-732, 2025.

Apéndice

Apéndice A

Efecto Doppler debido a la aceleración del medio

En este apéndice se amplía el caso estudiado anteriormente, en el que el emisor y el receptor permanecen en reposo mientras que el medio está en movimiento. Concretamente, se considera ahora que la situación en la que el medio no se desplaza a velocidad constante, sino que lo hace con una aceleración constante $\vec{a}$.

Como se ha visto en el desarrollo principal, un flujo con velocidad constante modifica el tiempo de propagación de la onda y, por tanto, su fase. Sin embargo, no induce un cambio en la frecuencia aparente, ya que el desfase resultante no depende del tiempo. Es decir, no hay efecto Doppler cuando el medio se mueve con velocidad constante.

En cambio, si el medio presenta aceleración, la fase de la señal recibida sí dependerá del tiempo, lo que da lugar a un desplazamiento en la señal observada. Este fenómeno puede interpretarse como un efecto Doppler inducido por la aceleración del medio, y se manifiesta incluso en ausencia de movimiento del emisor o del receptor.

Cabe destacar que el efecto Doppler se manifiesta para cualquier dirección de la aceleración, incluido el caso en el que es perpendicular a la propagación de la onda. No obstante, se restringirá el estudio al caso de aceleración puramente longitudinal, es decir, en la dirección que une el emisor con el receptor. Añadir una componente transversal conduce a ecuaciones de cuarto grado cuya resolución no resulta práctica y queda fuera del alcance de este trabajo.

Para el análisis de este caso, se trabajará nuevamente en el sistema de referencia del medio, en el cual el propio medio permanece en reposo. En este marco, el emisor y el receptor se desplazan con una aceleración constante $-\vec{a}$.

A.1 Flujo acelerado longitudinal

Se fija el instante $t = 0$ como el momento en el que el emisor se encuentra en la posición $\vec{r}_e(0) = 0$, y el receptor en $\vec{r}_d(0) = d \hat{u}_x$ y se supone que ambas velocidades iniciales son nulas. La evolución de sus posiciones es entonces:

$$x_e(t) = -\frac{1}{2}at^2 \quad (\text{A.1})$$

$$x_r(t) = d - \frac{1}{2}at^2. \quad (\text{A.2})$$

La señal ultrasónica generada por el emisor tarda un tiempo t_p en propagarse hasta al receptor. Por lo que, la distancia que recorrida por la señal desde su emisión hasta su detección es:

$$x_r(t) - x_e(t - t_p) = c t_p. \quad (\text{A.3})$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado en t_p :

$$a t_p^2 - 2(at + c)t_p + 2d = 0. \quad (\text{A.4})$$

cuyas soluciones son:

$$t_p = \frac{at + c \pm \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}{a}. \quad (\text{A.5})$$

Para determinar cuál de las dos soluciones tiene significado físico, se analiza el límite cuando la aceleración tiende a cero, es decir, $a \rightarrow 0$. En ese caso, se espera recuperar el resultado clásico para un medio sin aceleración:

$$\lim_{a \rightarrow 0} t_p = \frac{d}{c}. \quad (\text{A.6})$$

En primer lugar, se considera la rama con el signo positivo:

$$\lim_{a \rightarrow 0} t_{p,+} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{at + c + \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}{a} \approx \frac{2c}{a} \rightarrow \infty. \quad (\text{A.7})$$

por lo que esta solución no tiene interpretación física válida.

Por otro lado, para la rama negativa:

$$\lim_{a \rightarrow 0} t_{p,-} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{at + c - \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}{a}, \quad (\text{A.8})$$

multiplicando numerador y denominador por el conjugado:

$$t_{p,-} = \frac{at + c - \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}{a} \cdot \frac{at + c + \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}{at + c + \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}} = \frac{2d}{at + c + \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}} \quad (\text{A.9})$$

Entonces, evaluando el límite:

$$\lim_{a \rightarrow 0} t_{p,-} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2d}{at + c + \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}} = \frac{2d}{c + \sqrt{c^2}} = \frac{d}{c}, \quad (\text{A.10})$$

lo cual confirma que esta es la solución físicamente correcta, ya que recupera el tiempo de propagación esperado en el caso sin aceleración.

El desfase acumulado por la propagación en el caso de medio acelerado longitudinalmente resulta:

$$\varphi = -2\pi f \frac{at + c - \sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}{a}. \quad (\text{A.11})$$

Se observa como depende explícitamente del tiempo y, por tanto, se produce efecto Doppler, es decir, un desplazamiento de frecuencia en la señal recibida.

La frecuencia observada se obtiene como la derivada temporal de la fase:

$$f' = f + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = f + \left(-f + \frac{f(at + c)}{\sqrt{(at + c)^2 - 2ad}} \right) = f \frac{at + c}{\sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}. \quad (\text{A.12})$$

Por tanto, la frecuencia observada queda expresada como:

$$f' = f \frac{at + c}{\sqrt{(at + c)^2 - 2ad}}. \quad (\text{A.13})$$

Esta expresión muestra que el efecto Doppler puede generarse incluso si el emisor y el receptor están en reposo. $at \ll c$

Apéndice B

Código del interferómetro de ultrasonidos

B.1 Código principal del interferómetro

A continuación, se incluye el código completo implementado en la Raspberry Pi Pico para el control del interferómetro de ultrasonidos. El programa se desarrolló en el entorno *Arduino IDE*, utilizando el framework *arduino-pico*.

El código se presenta sin modificaciones, con comentarios integrados para facilitar su interpretación.

```
//-----  
// Interferómetro de ultrasonidos  
// Microcontrolador: Raspberry Pi Pico  
//-----  
  
#include <stdio.h>  
#include "hardware/pwm.h"  
#include "hardware/adc.h"  
#include "pico/stdlib.h"  
#include <SPI.h>  
#include <Wire.h>  
#include <Adafruit_ADS1X15.h>  
  
Adafruit_ADS1115 ads;  
  
// Pines y variables globales  
uint interruptor = 13;      // Control del conmutador OE1  
uint32_t reloj;  
  
// Ganancias del amplificador externo  
#define NUM_GAINS 8  
const int GAINS[NUM_GAINS] = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 32};  
uint GAIN = 2;  
  
// Configuración de SPI  
SPISettings spisettings(1000000, MSBFIRST, SPI_MODE0);  
  
// Rango de voltajes máximos según ganancia interna del ADS1115  
const float volt_range[] = {6.144, 4.096, 2.048, 1.024, 0.512, 0.256};  
const adsGain_t ads_gains[] = {  
    GAIN_TWOTHIRDS, GAIN_ONE, GAIN_TWO, GAIN_FOUR, GAIN_EIGHT, GAIN_SIXTEEN  
};  
const float adsGain[] = {2.0 / 3.0, 1, 2, 4, 8, 16};  
int current_ads_gain_index = 1;  
  
unsigned long previousMillis = 0;  
  
// Función de configuración
```

```

void setup() {
    pinMode(interruptor, OUTPUT);
    gpio_put(interruptor, LOW); // Enciende conmutador

    // Configuración del reloj ADC
    reloj = clock_get_hz(clk_sys);
    uint32_t relojADC = 100 * MHZ;
    clock_configure(clk_adc, 0, CLOCKS_CLK_ADC_CTRL_AUXSRC_VALUE_CLKSRC_PLL_SYS,
reloj, relojADC);

    // Inicialización del bus I2C externo (Wire1)
    Wire1.setSCL(19);
    Wire1.setSDA(18);
    Wire1.begin();
    ads.begin(0x48, &Wire1);

    Serial.begin(115200);

    // Inicialización de SPI
    SPI.setCS(1);
    SPI.setSCK(2);
    SPI.setTX(3);
    SPI.begin(true);

    // Configurar ganancia inicial del ADS1115 y PGA
    ads.setGain(GAIN_TWO);
    setPGAGain(5);

    // Configurar frecuencia de salida PWM
    Frecuencia(40000);
}

// Bucle principal
void loop() {
    unsigned long currentMillis = millis();

    if (currentMillis - previousMillis >= 10) { //100 medidas por segundo

        previousMillis = currentMillis; //Guarda el tiempo actual

        int16_t I = ads.readADC_Differential_0_1(); // AIN0 - AIN1
        int16_t Q = ads.readADC_Differential_2_3(); // AIN2 - AIN3

        int16_t volts = ads.computeVolts(sqrt(I * I + Q * Q));

        // Comprobación de si es necesario ajustar ganancias
        if (volts < 0.5 || volts > 3.0) {
            ajustarGanancias();
        }

        // Volcado de datos
        Serial.print(I);
        Serial.print(",");
        Serial.println(Q);

    }
}

```

```

// Configura la frecuencia de la señal de salida
void Frecuencia(uint32_t frec) {
    uint slice0 = pwm_gpio_to_slice_num(0);
    uint slice1 = pwm_gpio_to_slice_num(12);
    uint slice2 = pwm_gpio_to_slice_num(14);

    gpio_set_function(0, GPIO_FUNC_PWM);
    gpio_set_function(12, GPIO_FUNC_PWM);
    gpio_set_function(14, GPIO_FUNC_PWM);

    uint16_t divisor = reloj / frec;

    pwm_set_enabled(slice0, false);
    pwm_set_enabled(slice1, false);
    pwm_set_enabled(slice2, false);

    pwm_set_clkdiv(slice0, 1);
    pwm_set_clkdiv(slice1, 1);
    pwm_set_clkdiv(slice2, 1);

    pwm_set_wrap(slice0, divisor);
    pwm_set_wrap(slice1, divisor);
    pwm_set_wrap(slice2, divisor);

    pwm_set_chan_level(slice0, PWM_CHAN_A, divisor / 2);
    pwm_set_chan_level(slice1, PWM_CHAN_A, divisor / 2);
    pwm_set_chan_level(slice2, PWM_CHAN_A, divisor / 2);

    pwm_set_counter(slice0, 0);
    pwm_set_counter(slice1, divisor / 4);
    pwm_set_counter(slice2, 0);

    pwm_set_mask_enabled((1 << slice0) | (1 << slice1) | (1 << slice2));
}

// Envía al amplificador externo la ganancia deseada por SPI
void setPGAGain(int gain) {
    word packet = 0;
    byte gain_bits = 0;

    switch (gain) {
        case 1: gain_bits = 0b000; break;
        case 2: gain_bits = 0b001; break;
        case 4: gain_bits = 0b010; break;
        case 5: gain_bits = 0b011; break;
        case 8: gain_bits = 0b100; break;
        case 10: gain_bits = 0b101; break;
        case 16: gain_bits = 0b110; break;
        case 32: gain_bits = 0b111; break;
    }

    packet = (1 << 14) | gain_bits;

    SPI.beginTransaction(spisettings);
    SPI.transfer16(packet);
    SPI.endTransaction();
}

```

```

}

// Ajuste automático de ganancia
void ajustarGanancias() {
    float I1 = ads.computeVolts(ads.readADC_Differential_0_1());
    float Q1 = ads.computeVolts(ads.readADC_Differential_2_3());
    float v1 = sqrt(I1 * I1 + Q1 * Q1);

    int mejor_pga = 1;
    float mejor_error = 3;

    for (int i = 0; i < NUM_GAINS; i++) {
        int pga_gain = GAINS[i];
        float v1_prev = v1 * pga_gain;

        if (v1_prev > 1.5) continue;

        float error = fabs(v1_prev - 1.5);
        if (error < mejor_error) {
            mejor_error = error;
            mejor_pga = i;
        }
    }

    if (mejor_pga != GAIN) {
        GAIN = mejor_pga;
        setPGAGain(GAINS[GAIN]);

        // Descartar primera lectura tras cambio de ganancia
        ads.readADC_Differential_0_1();
        ads.readADC_Differential_2_3();

        if (mejor_pga == 7) { // Si la ganancia del PGA está al máximo
            float I2 = ads.computeVolts(ads.readADC_Differential_0_1());
            float Q2 = ads.computeVolts(ads.readADC_Differential_2_3());
            float v2 = sqrt(I2 * I2 + Q2 * Q2);

            if (v2 < 1.0) ads.setGain(GAIN_FOUR);
            if (v2 < 0.5) ads.setGain(GAIN_EIGHT);
            if (v2 < 0.25) ads.setGain(GAIN_SIXTEEN);
        }
    }
}

```

B.2 Modificación para funcionamiento tipo radar FMCW

En este apartado se presenta el bucle principal del código completo, que incluye la modificación realizada para que el interferómetro funcione como un radar FMCW.

La adaptación consiste en la variación periódica de la frecuencia de la señal ultrasónica mediante un contador que incrementa en 10 Hz el valor de la frecuencia cada cierto número de iteraciones del bucle principal (concretamente, cada 500 medidas). De este modo, la frecuencia cambia de 39 950 Hz a 40 050 Hz, con pasos de 10 Hz.

```
void loop() {

    unsigned long currentMillis = millis();

    if (currentMillis - previousMillis >= 10) { //100 medidas por segundo

        // Guarda el tiempo actual
        previousMillis = currentMillis;

        int16_t I = ads.readADC_Differential_0_1(); // AIN0 - AIN1
        int16_t Q = ads.readADC_Differential_2_3(); // AIN2 - AIN3

        Serial.print(I);
        Serial.print(",");
        Serial.println(Q);

        contador_medidas++;

        if (contador_medidas >= 500) {
            contador_medidas = 0;

            // Aumentar la frecuencia hasta 40500, paso de 10 Hz
            if (frecuencia_actual < 40050) {
                frecuencia_actual += 10;
                Frecuencia(frecuencia_actual); // Reconfigura PWM con nueva
frecuencia

            }

        }

    }

}
```

Es importante destacar que el valor de `frecuencia_actual` que se introduce en la función `Frecuencia()` no corresponde exactamente con la frecuencia real de salida del transductor. Esto se debe a la forma en que se genera la señal mediante modulación por ancho de pulso (PWM): el valor introducido se utiliza para dividir el reloj del sistema, determinando así el límite superior del contador del PWM que genera la señal. Dado que esta división se realiza con enteros, se introduce un pequeño error que debe de tenerse en cuenta. La Tabla B.1 recoge los valores de frecuencia introducidas en la función `Frecuencia()` y las correspondientes frecuencias reales generadas por el sistema mediante PWM:

Frecuencia introducida (Hz)	Frecuencia real generada (Hz)
39950	39952,08
39960	39960,04
39970	39976,01
39980	39984,00
39990	39992,00
40000	40000,00
40010	40016,00
40020	40024,01
40030	40032,03
40040	40040,04
40050	40056,08

Tabla B.1: Frecuencias teóricas introducidas y frecuencias reales generadas por el PWM

Los valores reales pueden calcularse con la fórmula:

$$f_{\text{real}} = \frac{f_{\text{reloj}}}{\left\lfloor \frac{f_{\text{reloj}}}{f_{\text{int}}} \right\rfloor}, \quad (\text{C. 1})$$

donde f_{real} es la frecuencia real generada, f_{reloj} es la frecuencia del reloj de la Raspberry Pi Pico (de acuerdo con la configuración usada es 200 MHz), f_{int} la función introducida en la función del código y $\left\lfloor \frac{f_{\text{reloj}}}{f_{\text{int}}} \right\rfloor$ es la división entera entre ambos valores que realiza el programa.

Apéndice C

Solución alternativa del interferómetro con procesamiento digital

En este apéndice se presenta una solución alternativa del interferómetro de ultrasonidos en la que todo el procesamiento de la señal se realiza digitalmente, prescindiendo del muestreo analógico. Esta versión simplifica el circuito al evitar el uso de conmutadores y cálculo analógico de las componentes I y Q , delegando el análisis completamente al microcontrolador. A continuación, se describe el circuito empleado y el código fuente implementado para esta versión. (digitalizo al principio y se hace todo por software)

C.1 Esquema del circuito

En la Figura C.1 se muestra el esquema eléctrico correspondiente a la versión digital del interferómetro. En esta implementación, se han eliminado tanto el conmutador analógico y el sistema de muestreo, trasladando todo el procesamiento al microcontrolador. La señal captada por el transductor es amplificada y enviada directamente al convertidor analógico-digital del microcontrolador, donde es muestreada digitalmente y procesada para extraer las componentes en fase y cuadratura.

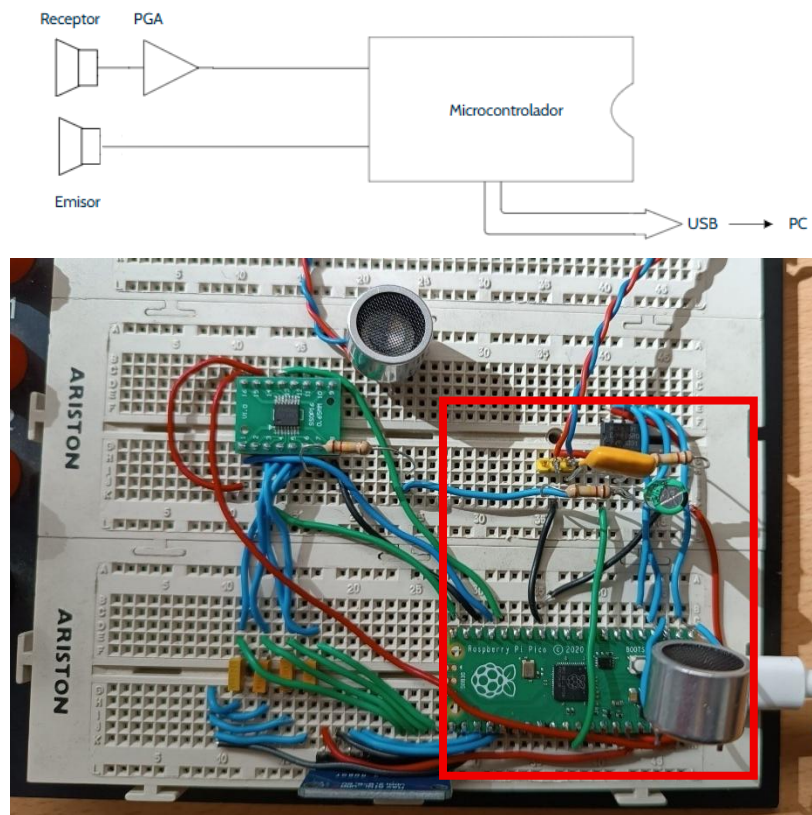


Figura C.1 : (a) Esquema del circuito diseñado para la versión digital del interferómetro de ultrasonidos. (b) Fotografía del montaje del circuito correspondiente. Se reutilizó el circuito del diseño principal, utilizando únicamente la sección recuadrada en rojo. Para ello, se desactivó el conmutador mediante su interruptor, y se conectó la salida del transductor, tras la etapa de acondicionamiento, directamente a una de las entradas ADC de la placa.

La etapa de acondicionamiento de señal, compuesta por un divisor resistivo y un amplificador de ganancia variable, es la misma empleada en la solución principal (véase Figura 13). El divisor ajusta el nivel de tensión para adaptarlo al rango de entrada del ADC (0-3,3 V), y el amplificador permite ajustar dinámicamente la amplitud de la señal antes de su digitalización.

C.2 Código fuente

El código implementado para esta versión alternativa del interferómetro ha sido diseñado para que todo el procesamiento se realice directamente en el microcontrolador.

El sistema genera una señal cuadrada de 40 kHz mediante la salida PWM, la cual excita directamente al transductor emisor.

La adquisición de la señal recibida se realiza mediante interrupciones temporizadas, que permiten muestrear la señal en cuatro fases equiespaciadas. Cada una de estas muestras se acumula en un registro, y al alcanzar un número determinado de ciclos, se calcula el promedio para cada fase. Este número de ciclos es ajustable, permitiendo así mayor precisión (más ciclos) o rapidez de respuesta (menos ciclos), según las necesidades experimentales.

El microcontrolador Raspberry Pi Pico cuenta con dos núcleos de procesamiento. Esta arquitectura se aprovecha en el programa separando tareas. En el núcleo 0 se ejecuta el bucle principal, encargado de realizar los cálculos matemáticos más costosos (como el cálculo de I y Q). En el núcleo 1 se ejecuta únicamente la gestión de interrupciones y adquisición de muestras, tarea que requiere ser lo más rápida y ligera posible.

El código también implementa un sistema de control automático de ganancia, que ajusta dinámicamente la ganancia del amplificador MCP6S92 para mantener la señal dentro del rango óptimo del ADC. Esto mejora la calidad de la medición, especialmente en condiciones variables.

Con el fin de optimizar el rendimiento del sistema y permitir una mayor velocidad de adquisición, se han aplicado algunos ajustes de configuración. El reloj del ADC interno se aumentó a 100 MHz (frente a los 48 MHz establecidos por defecto), la velocidad de CPU se configuró a 200 MHz y el código se compiló con la opción de optimización: `-Ofast`, que prioriza la velocidad de ejecución del programa.

A continuación, se incluye el código completo comentado, que refleja cada uno de estos aspectos.

```
//-----  
// Interferómetro de ultrasonidos - Versión digital  
// Microcontrolador: Raspberry Pi Pico  
// CPU Speed: 200 MHz  
// Compilación con optimización: -Ofast  
//-----  
  
#include <stdio.h>  
#include "hardware/irq.h"  
#include "hardware/pwm.h"  
#include "hardware/adc.h"  
#include "pico/stdlib.h"  
#include <SPI.h>
```

```

// Variables globales para componentes I/Q
float I = 0;
float Q = 0;

// Pines y configuración
uint patilla = 15;           // Pin de sincronización (GPIO15)
uint slice = 2;              // Slice PWM utilizado
uint32_t reloj;              // Frecuencia del sistema
uint salida = 0;             // Pin de control auxiliar (GPIO0)
uint entrada = 26;           // Entrada analógica del ADC interno (GPIO26 = A0)
int promedio = 5999;         // Número de ciclos para promediar la señal

// Buffers para acumulación de muestras en las 4 fases
volatile int32_t valor[4] = {0};
volatile int32_t valor_prom[4] = {0};
volatile bool datosDisponibles = false;

volatile int n = 0, p = 0; // Contadores de muestras y promedio

// Configuración del amplificador variable (MCP6S92)
#define NUM_GAINS 8
const int GAINS[NUM_GAINS] = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 32};
SPISettings spisettings(1000000, MSBFIRST, SPI_MODE0);
uint GAIN = 2; // Ganancia inicial

void setup() {
    pinMode(salida, OUTPUT);
}

// Configurar el reloj del ADC interno a 100 MHz para mayor velocidad
reloj = clock_get_hz(clk_sys);
uint32_t relojADC = 100 * MHZ;
clock_configure(clk_adc, 0,
CLOCKS_CLK_ADC_CTRL_AUXSRC_VALUE_CLKSRC_PLL_SYS, reloj, relojADC);

// Comunicación USB serie para volcado de datos
Serial.begin(115200);

// Inicialización del bus SPI para el amplificador variable
SPI.setCS(1);
SPI.setSCK(2);
SPI.setTX(3);
SPI.begin(true);

// Inicialización del ADC interno
adc_init();
adc_gpio_init(entrada);
adc_select_input(entrada - 26);

// Configuración de la señal PWM de 40 kHz
SacaFrec(40000);
setPGAGain(2);
}

```

```

// Configuración de interrupciones PWM

void setup1() {
    pwm_clear_irq(slice);
    pwm_set_irq_enabled(slice, true);
    irq_set_exclusive_handler(PWM_IRQ_WRAP, stop);
    irq_set_enabled(PWM_IRQ_WRAP, true);
}

void loop() {
    if (datosDisponibles) {
        datosDisponibles = false;

        // Cálculo de I y Q a partir de las muestras promedio
        I = float(valor_prom[0] - valor_prom[2]) / (GAINS[GAIN] * promedio /
4);
        Q = float(valor_prom[1] - valor_prom[3]) / (GAINS[GAIN] * promedio /
4);

        // Control automático de ganancia (AGC)
        float mod = sqrt(I * I + Q * Q);
        if (mod * GAINS[GAIN] > 3800 && GAIN > 0) {
            GAIN--;
        } else if (GAIN < 7 && mod * GAINS[GAIN + 1] < 3800) {
            GAIN++;
        }
        setPGAGain(GAINS[GAIN]);

        // Envío de datos I y Q por USB
        Serial.print(I);
        Serial.print(",");
        Serial.println(Q);
    }
}

void loop1() {}

// Rutina de interrupción PWM

void stop() {
    pwm_clear_irq(slice);

    // Control de sincronización auxiliar
    if (n == 2) gpio_put(salida, HIGH);
    if (n == 4) {
        gpio_put(salida, LOW);
        n = 0;
    }

    // Adquisición de la señal del ADC
    valor[n] += adc_read();
    n++;
    p++;

    // Promediado de las 4 fases

```

```

    if (p > promedio) {
        p = 0;
        for (int i = 0; i < 4; i++) {
            valor_prom[i] = valor[i];
            valor[i] = 0;
        }
        datosDisponibles = true;
    }
}

// Generación de señal PWM

void Sacafrec(uint32_t frecuencia) {
    uint16_t divisor = reloj / (frecuencia * 4);
    pwm_set_mask_enabled(0);
    pwm_set_clkdiv(slice, 1);
    pwm_set_wrap(slice, divisor);
    pwm_set_chan_level(slice, PWM_CHAN_A, divisor / 2);
    pwm_set_enabled(slice, true);
}

// Envío de ganancia al MCP6S92 por SPI

void setPGAGain(int gain) {
    word packet = 0;
    byte gain_bits = 0;
    byte data;

    // Codificación de ganancia
    switch (gain) {
        case 1: gain_bits = 0b000; break;
        case 2: gain_bits = 0b001; break;
        case 4: gain_bits = 0b010; break;
        case 5: gain_bits = 0b011; break;
        case 8: gain_bits = 0b100; break;
        case 10: gain_bits = 0b101; break;
        case 16: gain_bits = 0b110; break;
        case 32: gain_bits = 0b111; break;
    }

    // Preparar y enviar el paquete SPI
    packet = 1 << 14;
    packet |= gain_bits;

    SPI.beginTransaction(spisettings);
    data = SPI.transfer16(packet);
    SPI.endTransaction();
}

```

C.3 Comparación con la solución analógica

Los dos enfoques desarrollados para el procesamiento de la señal presentan diferencias notables, y cada uno de ellos cuenta con ventajas y limitaciones que conviene comentar:

Ventajas de la solución digital:

- Simplicidad de diseño: El circuito es significativamente más sencillo, al trasladarse todo el procesamiento al microcontrolador.
- Flexibilidad: Los ajustes se realizan por software, se pueden modificar parámetros sin intervención física (como constantes de filtrado). A diferencia de la solución analógica para la que haría falta cambiar piezas del circuito.

Inconvenientes de la solución digital:

- Resolución limitada del ADC: La Raspberry Pi Pico incorpora un convertidor analógico-digital de 12 bits, frente a los 16 bits del ADS1115 empleado en la solución analógica
- Ruido de muestreo: El muestreo digital de la señal exige operar cerca del límite del hardware. Esto puede introducir errores debido a la exigencia computacional (overcooking), disminuyendo el número de bits efectivos del sistema.
- Caja negra: En la versión digital, gran parte del procesamiento ocurre en el software, lo que convierte al sistema en una especie de “caja negra”. En contraste, la versión analógica permite visualizar y comprender más fácilmente el tratamiento de la señal.

En resumen, aunque la versión digital pueda resultar más sencilla, la solución analógica facilita la comprensión del fenómeno ocurrido. Por tanto, se consideró que era mucho más adecuada para este Trabajo de Fin de Grado.

Apéndice D

Ajuste de la velocidad del sonido en aire seco en función de la temperatura

En este apéndice se presenta el ajuste realizado a partir de los datos de la velocidad del sonido en aire seco en función de la temperatura, obtenidos del *CRC Handbook of Chemistry and Physics* [11]. La presión se mantiene constante a nivel atmosférico, ya que su influencia sobre la velocidad del sonido en estas condiciones es despreciable. En la

Tabla D.1 se recogen los valores empleados:

T (°C)	c (m/s)
-30	312,7
-25	315,9
-20	319,1
-15	322,2
-10	325,4
-5	328,4
0	331,5
5	334,5
10	337,5
15	340,5
20	343,4
25	346,3
30	349,2
35	352

Tabla D.1: Velocidad del sonido en aire seco a presión atmosférica en función de la temperatura. Fuente [11].

Representando estos valores en la Figura D. 1 se observa una dependencia prácticamente lineal entre la velocidad del sonido y la temperatura, lo cual justifica el uso de una regresión lineal para su ajuste.

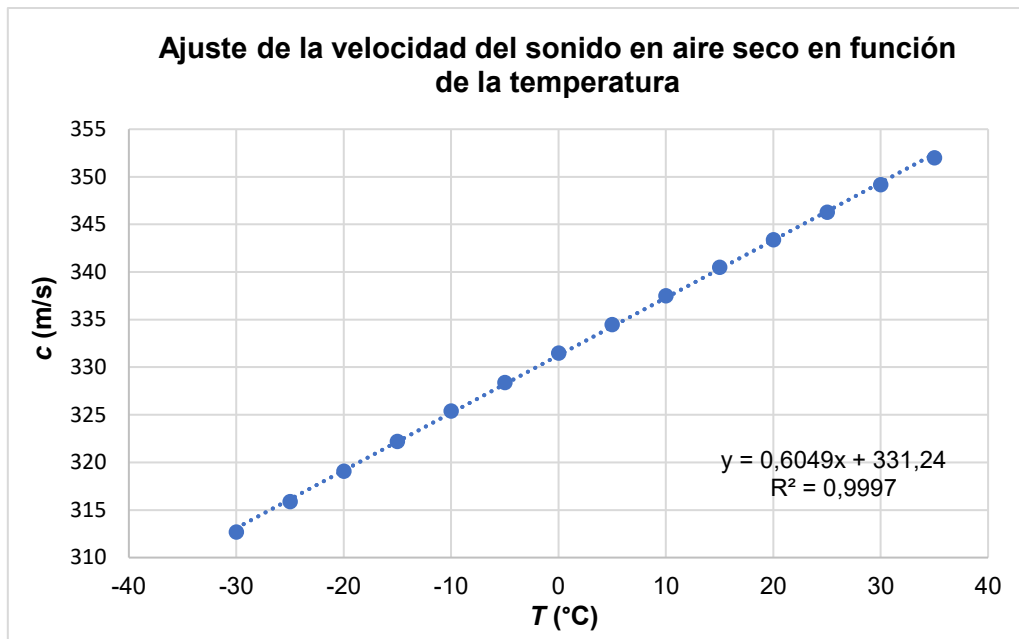


Figura D. 1: Ajuste lineal de la velocidad del sonido en aire seco a presión atmosférica en función de la temperatura.

El resultado del ajuste es:

$$c(T) \approx 0,6049 \cdot 1/^{\circ}\text{C} \cdot T + 331,24 \text{ m/s}, \quad (\text{D.1})$$

donde $c(T)$ es la velocidad del sonido en m/s y T es la temperatura en °C.

Apéndice E

Programas de *Keysight VEE Pro*

A continuación, se muestran las capturas de los programas realizados en el entorno de programación gráfica de *Keysight VEE Pro*.

E.1 Adquisición y guardado de datos

Se configuró el interferómetro de ultrasonidos como un nuevo instrumento virtual que recibe los datos enviados por el microcontrolador a través del puerto serie: las señales I y Q . Simultáneamente, se registraba el instante temporal correspondiente con la función `now()`. Los datos (tiempo, I , Q) se almacenaban en un archivo de texto.

Además del almacenamiento, se visualizaban en tiempo real el diagrama I/Q y el desfase calculado mediante la función $\text{atan2}(Q, I)$, lo que permitía comprobar que el sistema estaba funcionando correctamente durante la adquisición.

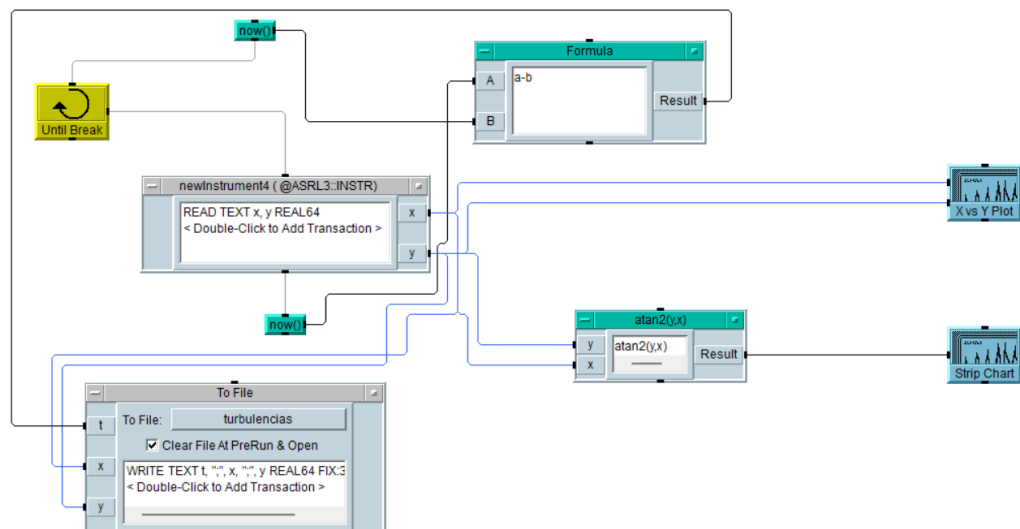


Figura E.1: Programa de adquisición y almacenamiento de datos con visualización en tiempo real

E.2 Lectura y visualización de datos

A partir del archivo generado con el programa del Apartado E.1, se reconstruyó un array con las tres columnas (t , I , Q). Con ello, se calculaba de nuevo el desfase mediante $\text{atan2}(Q, I)$ y se representaba en función del tiempo.

De forma adicional, se utilizó función `rms()` para calcular la raíz cuadrática media de la fase, con la que se pudo determinar el ruido del interferómetro y caracterizar turbulencias.

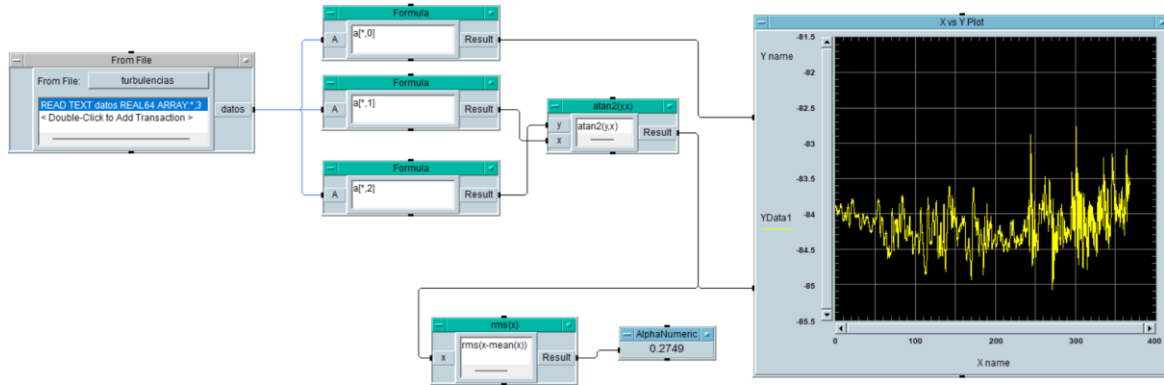


Figura E.2: Programa de carga, análisis y visualización de los datos registrados

E.3 Radar Doppler

E.3.1 Programación del *plotter*

Se utilizó el *plotter* como un instrumento controlado por *VEE Pro* y, a través de su programación, permitiendo fijar posiciones y velocidades mediante comandos de escritura. Esto permitió mover el transductor con velocidad constante y conocida para los experimentos Doppler.

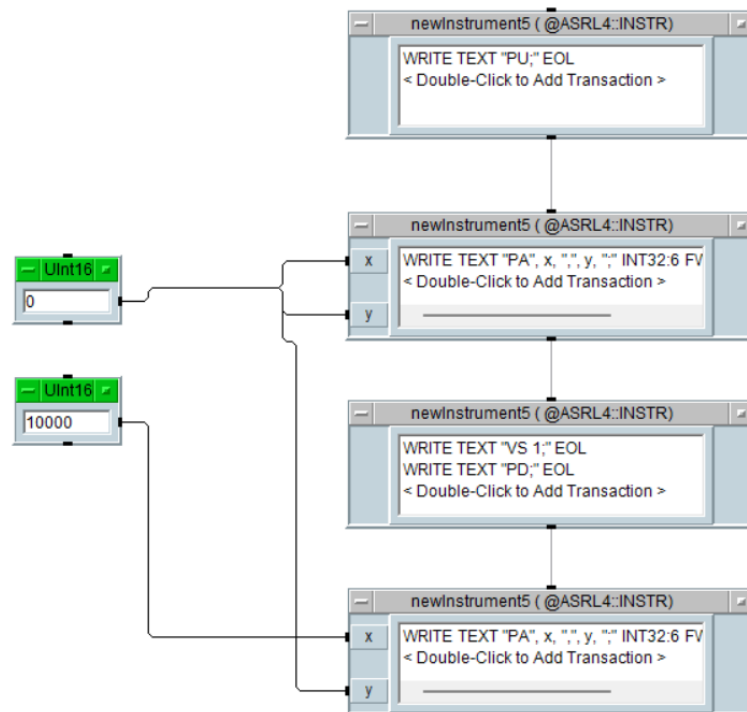


Figura E.3: Programa del control del *plotter*.

E.3.2 FFT de una sola componente (I o Q)

A partir de los datos medidos, se construyó una forma de onda con la componente I (o Q) y el tiempo de muestreo. Mediante la función `fft()` se calculó el espectro de frecuencias, con lo que se pudo obtener la frecuencia Doppler.

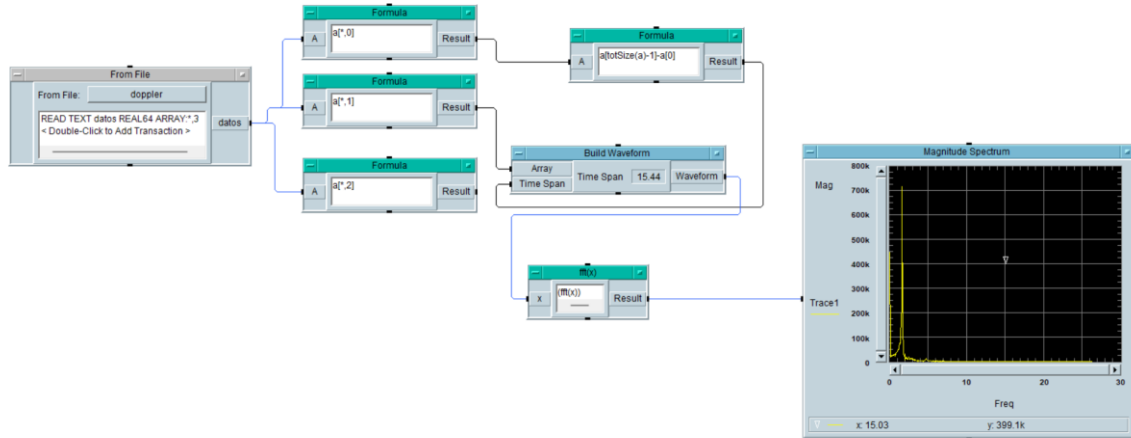


Figura E.4: Programa de cálculo de la FFT sobre una sola componente de la señal para estimación de la frecuencia Doppler.

E.3.3 FFT del fasor

Se construyó el número complejo $s = I + jQ$ a partir de las dos componentes medidas. Sobre este fasor se aplicó la función `fft()` de *MATLAB*, seguida de `fftshift()` para centrar el espectro, y de `mag()` para obtener su magnitud.

De forma paralela, se generó un vector con los valores de frecuencia, calculados como:

$$f = \left(-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right) / t_{\text{med}} \quad (\text{E.1})$$

siendo N el número de medidas y t_{med} el tiempo de medición.

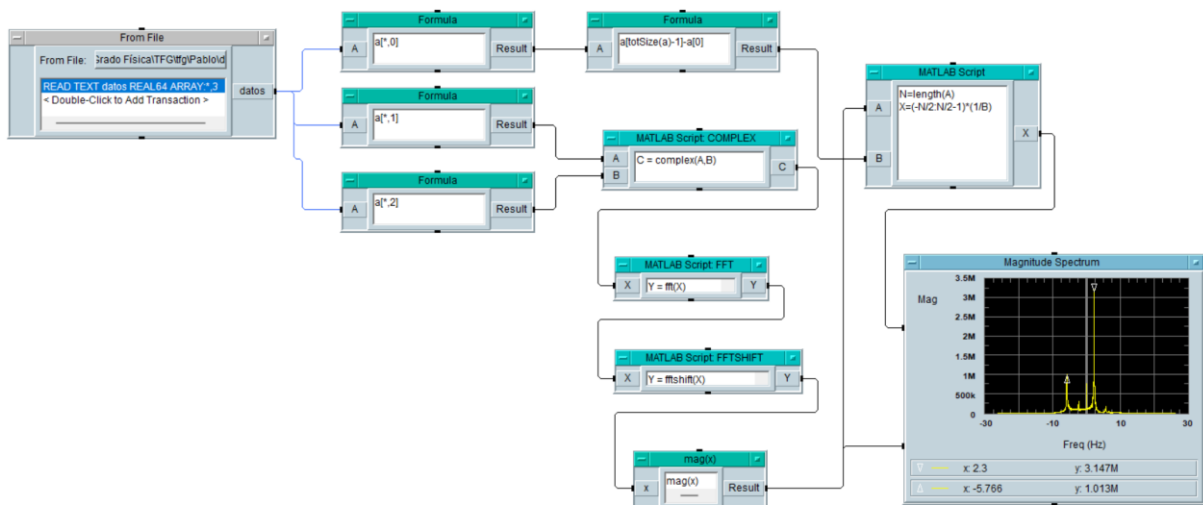


Figura E.5: Programa de cálculo del FFT del fasor.