



---

**Universidad de Valladolid**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

**El rol de la desviación de la fidelidad en teleportación cuántica**

Autor: Pablo Crespo Del Amo

Tutores: Diego G. Bussandri, Luis Miguel Nieto Calzada

27 de Septiembre de 2024

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Elementos de información y mecánica cuántica</b>	<b>7</b>
2.1. Variables aleatorias . . . . .	7
2.1.1. Distribuciones de probabilidad . . . . .	7
2.1.2. La esperanza . . . . .	9
2.1.3. La Varianza . . . . .	9
2.2. Formalismo y elementos básicos de la teoría cuántica . . . . .	10
2.2.1. Estados cuánticos . . . . .	10
2.2.2. Sistemas de dos niveles y la esfera de Bloch . . . . .	11
2.2.3. Entrelazamiento cuántico . . . . .	11
2.2.4. Canales cuánticos . . . . .	12
2.2.5. Mediciones . . . . .	13
2.3. Fidelidad . . . . .	14
2.3.1. Expresión simplificada para sistemas de dos niveles . . . . .	14
<b>3. Protocolos de teleportación</b>	<b>16</b>
3.1. Fidelidad de teleportación . . . . .	16
3.2. Protocolo clásico . . . . .	17
3.2.1. Fidelidad de teleportación clásica . . . . .	18
3.3. Protocolo cuántico . . . . .	22
3.3.1. Protocolo de teleportación cuántico perfecto . . . . .	23
3.3.2. Estado de Werner como recurso del protocolo cuántico . . . . .	24
<b>4. Desviación de la fidelidad</b>	<b>27</b>
4.1. Desviación en el modelo clásico . . . . .	27
4.2. Desviación en el modelo cuántico . . . . .	28
4.3. Gráficas . . . . .	29
<b>5. Conclusiones</b>	<b>32</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>36</b>
A.1. Estrategia Ingenua . . . . .	36

## Resumen

En este trabajo, analizaremos el comportamiento de una de las principales medidas empleadas para evaluar protocolos de teleportación de estados cuánticos. En particular, nos centraremos en el carácter *probabilístico* del protocolo cuántico cuando este es afectado por un tipo específico de ruido experimental. La *fidelidad de teleportación* se utiliza como una medida de rendimiento, la cual se calcula tomando la fidelidad entre el estado inicial que se desea teleportar y el conjunto de estados finales obtenidos tras aplicar el protocolo, promediada sobre el conjunto de todos los estados iniciales posibles.

Por otra parte, un procedimiento muy importante en información cuántica es el protocolo clásico de teleportación en el que se asume que emisor y receptor están comunicados únicamente por un canal clásico. Este protocolo sirve de referencia y establece una cota inferior que todo protocolo de teleportación cuántico debe superar para que su rendimiento sea considerado *no clásico*.

Recientes trabajos de investigación han agregado, como elemento de análisis de desempeño de un protocolo cuántico particular, a la *desviación estándar de la fidelidad* en el caso cuántico, obteniendo una visión más general del comportamiento estadístico de esta figura de mérito. En este trabajo, hemos calculado además la *desviación de la fidelidad* asociada al protocolo clásico, que debe ser considerada al momento de realizar comparaciones entre el procedimiento cuántico y el clásico.

## Abstract

In this paper, we will review the performance of the main existing figure of merit for assessing quantum state teleportation protocols. Specifically, we will focus on the *probabilistic* behavior of the quantum protocol when it is subjected to a particular experimental noise. The *teleportation fidelity* is a benchmark measure that is calculated by taking the fidelity between the initial state to be teleported and the ensemble of final states of the protocol averaged over the set of possible initial states.

On the other hand, a very important procedure in quantum information is the classical teleportation protocol in which it is assumed that the sender and receiver can communicate each other only by a classical channel. This protocol serves as a reference and establishes a lower bound that every quantum teleportation protocol must surpass for its performance to be considered *non-classical*.

Recent research works have added, as an element of performance analysis of a particular quantum protocol, the *fidelity standard deviation* in the quantum case, obtaining a more general view of the statistical behavior of this figure of merit. In this work, we have also calculated the *fidelity deviation* associated with the classical protocol, which must be considered when making comparisons between quantum and classical approaches.

# 1. Introducción

Entre los años 1920 y 1930 científicos como Max Plank, Niels Bohr, Werner Heisenberg y Erwin Schrödinger formularon las primeras teorías que describen el comportamiento de las partículas a niveles subatómicos [1]. Posteriormente, el concepto de entrelazamiento cuántico, planteado inicialmente por Einstein y desarrollado por John Bell, revolucionó nuestra comprensión de las correlaciones cuánticas entre partículas; este avance permitió en los años 90 la propuesta teórica de la teleportación cuántica.

La teleportación cuántica es el proceso por el cual la información de un sistema cuántico se transfiere a otro sistema que se encuentra a una cierta distancia. Este proceso se basa en los principios de la mecánica cuántica, siendo uno muy importante el de *entrelazamiento cuántico*, descrito por Einstein como *acción fantasmal a distancia* [2]. El hecho de que en un sistema entrelazado las propiedades de las partículas estén correlacionadas hace que al realizar una medición sobre una de las partículas parte de las propiedades de la otra partícula queden determinadas de manera instantánea, independientemente de la distancia que las separe. Gracias a la teleportación, propiedades de un sistema cuántico pueden ser transferidas a otro situado a cientos de kilómetros. El concepto de teleportación perfecta sólo tiene sentido dentro del contexto de la física cuántica ya que, como veremos más adelante, es imposible teleportar estados cuánticos con probabilidad uno clásicamente porque el entrelazamiento es un concepto indispensable a la hora de llevar a cabo procesos de teleportación [1].

El desarrollo de la teleportación cuántica no sólo sirve para ampliar el entendimiento de los sistemas físicos en general, sino para el desarrollo de aplicaciones prácticas. Estos procesos podrían ser la base de redes de comunicación cuántica seguras, debido a la capacidad de transportar información sin exponerse a que pueda ser interceptada. Del mismo modo, la teleportación cuántica ocupa un papel importante en la construcción de computadores cuánticos, permitiendo enviar información de una parte del mismo a otra [3].

El primer experimento que obtuvo un resultado exitoso de teleportación cuántica fue llevado a cabo en 1997 por un equipo liderado por Anton Zeilinger [4]. Gracias a este experimento se comprobó que estos procesos son viables. Durante el mismo, se utilizaron fotones entrelazados para teleportar el estado cuántico de un fotón a otro, poniendo de manifiesto no sólo la posibilidad de teleportar estados cuánticos entre dos sistemas, sino también sus sutilezas: el Teorema de no clonación y la imposibilidad de transmitir a un observador el resultado de la medición realizada por Alice más rápido que la velocidad de la luz [5].

Durante los años siguientes se han estado forzando los límites de la teleportación en referencia a la distancia y la complejidad de los estados. Los últimos experimentos han conseguido teleportar estados una gran cantidad de kilómetros, por ejemplo en 2017 se consiguió teleportar un estado entre un satélite y la tierra separados por 1400 km [6].

La teleportación cuántica todavía presenta una gran cantidad de desafíos, uno de los principales problemas reside en la preservación en el tiempo del entrelazamiento cuántico, ya que las interacciones de los sistemas cuánticos con el entorno generan *decoherencia* y una correspondiente perturbación en las correlaciones [7]. Además de esto, si se quiere realizar y evaluar de manera óptima el procedimiento, se deben cumplir las condiciones siguientes [8]:

1. No limitación para la información de entrada.
2. La información de entrada y salida debe ser proporcionada y verificada por un tercero, excepto por el remitente y el receptor.
3. La *fidelidad de teleportación* (un concepto que definiremos en breve) debe ser superior al umbral apropiado del *protocolo clásico*.

En la condición 3 mencionamos el concepto de *fidelidad*. Esta es una figura de mérito (o medida) cuyo objetivo es evaluar *distinguibilidad* entre dos estados cuánticos, es decir, cuantificar lo diferentes o parecidos que son tales estados. Utilizando esta cantidad, como veremos específicamente más adelante, es posible definir la *fidelidad de teleportación* que sirve para evaluar el rendimiento de un protocolo en particular.

Veamos intuitivamente cómo obtener tal medida para un protocolo dado. Consideremos que nuestro objetivo es transmitir un estado cuántico  $\rho_u$ . Aplicamos el protocolo de teleportación en cuestión obteniendo como estado de salida  $\rho_f$ . Como señalamos anteriormente, para comprobar cuánto se parecen los estados final e inicial utilizamos la fidelidad  $F$ . Dado además que el protocolo de teleportación cuántica debe ser capaz de transmitir todos los estados posibles, la fidelidad de teleportación es un promedio sobre todos los estados de entrada [9].

En diversos estudios se ha investigado la relación que existe entre el nivel de entrelazamiento y la fidelidad promedio que se puede obtener. La referencia [10] es uno de los trabajos de mayor relevancia en el área y, entre otras cosas, demuestra que cuando el entrelazamiento es máximo se puede alcanzar la fidelidad promedio igual a uno. Por otra parte, un procedimiento muy importante es el protocolo clásico de teleportación, mencionado por primera vez en la condición 3, que supone que el emisor y el receptor sólo pueden intercambiar *información clásica*, es decir, el valor de algún observable físico, o de alguna variable aleatoria en general. Este procedimiento, además de profundizar el conocimiento sobre el comportamiento de los sistemas cuánticos, sirve para certificar un protocolo como cuántico o clásico: Si la fidelidad de teleportación de un protocolo  $P$  es mayor a la del protocolo clásico, entonces certificamos a  $P$  como cuántico; en el caso contrario, como clásico. Sin embargo, la fidelidad de teleportación promedio no es suficiente para caracterizar completamente el comportamiento estadístico de un protocolo de teleportación cuántica, ya que no nos aporta información sobre cuán equitativamente se transmiten los estados. Por tal motivo, recientemente diferentes autores han propuesto estudiar la desviación de la fidelidad de teleportación  $\sigma_F$  [11]; esta cantidad será nuestro objeto principal de estudio en este trabajo.

En la Sección 2 de este trabajo, definiremos nuestro marco teórico, en el que explicaremos los conceptos básicos y necesarios de información clásica –variable aleatoria, distribuciones de probabilidad, varianza y desviación estándar– y los elementos principales de información cuántica –estados cuánticos, esfera de Bloch, entrelazamiento, canales cuánticos, el formalismo de medición y fidelidad.–

En la Sección 3, introduciremos el protocolo cuántico de teleportación ideal [12], y el protocolo clásico [13]. Utilizaremos, por otro lado, un estado de Werner como estado recurso del protocolo cuántico dando lugar a uno de los modelos de ruido más famosos en la literatura. En esta sección, comprobaremos que al utilizar un estado de Bell como recurso el protocolo

siempre lograr transmitir perfectamente el estado inicial y, además, calcularemos la fidelidad de teleportación en los demás casos.

Una vez definidos los principales elementos de los protocolos a estudiar, en la Sección 4, nos enfocaremos en las desviaciones estándar del protocolo clásico y cuántico con un estado de Werner. Nuestro aporte principal, entonces, es extender el estudio de la desviación al protocolo clásico y utilizar estados mixtos como entrada, lo que nos da una imagen más general del comportamiento de la fidelidad de teleportación.

## 2. Elementos de información y mecánica cuántica

### 2.1. Variables aleatorias

El concepto de variable aleatoria ocupa un lugar central en la teoría de probabilidad y estadística. De manera sencilla, es una función que asigna un valor numérico a un evento aleatorio particular. De este modo, una abstracción útil es la siguiente:

**Espacio muestral** Es el conjunto  $\Omega$  de posibles resultados de un experimento (eventos aleatorios).

Por ejemplo, si tienes un bombo con cien bolas enumeradas y el experimento consta de escoger aleatoriamente una de las bolas, el espacio muestral es:  $\Omega = \{\text{bola}_1, \dots, \text{bola}_{100}\}$ . Ahora bien, un mismo espacio muestral puede dar lugar a diferentes variables aleatorias, cuya definición formal es:

**Variable aleatoria (VA)** Sea  $\Omega$  un espacio muestral. Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asigna a cada elemento de  $\Omega$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ ;  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$ .

Siguiendo el ejemplo del bombo y las bolas, una variable aleatoria sobre el espacio muestral  $\Omega$  podría ser el peso de las bolas  $p_e(\omega)$ , mientras que otra diferente sería el radio de las mismas  $r(\omega)$ .

Las variables pueden ser de dos tipos principales, *discretas* o *continuas*, las cuales se diferencian principalmente en que las variables discretas toman valores numerables<sup>1</sup> mientras que las variables continuas pueden tomar cualquier valor de la recta real.

#### 2.1.1. Distribuciones de probabilidad

Una Distribución de Probabilidad (DP) describe el comportamiento estadístico de una variable aleatoria  $X$ . Matemáticamente, una DP queda definida por una función que toma elementos del espacio muestral  $\Omega$  y devuelve un número real positivo. En nuestro trabajo, las variables aleatorias están definidas unívocamente por un sólo espacio muestral, y viceversa, con lo cual, de ahora en adelante simplificaremos el formalismo estadístico considerando al espacio muestral  $\Omega_X$  definido por los posibles valores que puede tomar la variable  $X$ , es decir, los *experimentos* están dados por los eventos en los que la VA en cuestión toma diferentes valores.

De este modo, si  $x$  es un posible valor de  $X$ , su distribución de probabilidad  $p(x)$  es una función que describe cómo se distribuyen los posibles valores que toma  $X$ . Sus propiedades son:

- Positividad: Para todo valor de  $x$  se cumple que  $p(x) \geq 0$ .
- Normalización: La integral de  $p(x)$  sobre todos el espacio muestral (i.e. los posibles valores que toma  $X$ ) debe ser igual a 1:

$$\int_{\Omega_X} p(x) dV_{\Omega_X} = 1.$$

---

<sup>1</sup>Es decir, se puede realizar una biyección con algún subconjunto de los número naturales.

Nótese que  $p(x)$  no es una *probabilidad* en sí, sino una densidad de probabilidad, es decir,  $p(x)dV_{\Omega_X}$  denota la probabilidad de que  $X$  tome algún valor en las proximidades<sup>2</sup> de  $x$ . Para darle una interpretación geométrica, consideremos el caso unidimensional: la función  $p(x)$  es una curva en la recta real, cuya área por debajo nos proporciona la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre dos puntos límite  $[a, b]$ ,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx.$$

La definición anterior de DP es para una variable aleatoria continua, sin embargo, haciendo uso de la *distribución* conocida como delta de Dirac  $\delta(x)$ , podemos restringirnos al caso de una VA discreta por medio de:

$$p(x) = \sum_n p_n \delta(x_n - x). \quad (1)$$

De este modo, sólo los valores  $\{x_n\}_n$  son posibles, y se distribuyen de acuerdo a  $\{p_n\}_n$ .

Durante este trabajo, analizaremos el comportamiento estadístico de una variable aleatoria continua que consta de un vector tridimensional  $\vec{u}$  cuyo espacio muestral es la bola en  $\mathbb{R}^3$  de radio uno:  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ . Esta variable estará descrita por distribuciones de probabilidad *isotrópicas*, es decir, que sólo dependen del módulo de  $\vec{u}$ :  $p(\vec{u}) = f(u)$ , con  $u = |\vec{u}|$ . De este modo, la función  $f$  es no negativa y cumple con la normalización correspondiente,

$$\int_{\mathcal{B}} p(\vec{u})dV = 4\pi \int_0^1 u^2 f(u)du = 1, \quad (2)$$

y  $dV$  el diferencial de volumen en  $\mathcal{B}$ . Consideraremos tres distribuciones distintas:

- Los vectores unitarios, es decir de módulo uno, son igualmente probables, mientras que los demás tiene probabilidad de ocurrencia nula:

$$f_p(u) = \frac{1}{4\pi u^2} \delta(u - 1). \quad (3)$$

- Vectores  $\vec{u}$  uniformemente distribuidos en  $\mathcal{B}$ :

$$f_m(u) = \frac{3}{4\pi}. \quad (4)$$

- Distribución *cosecante*<sup>3</sup>:

$$f_r(u) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1 - u^2}}. \quad (5)$$

<sup>2</sup>Estas proximidades están dadas por  $dV_{\Omega_X}$ : Si  $X$  es una VA continua unidimensional, entonces  $p(x)dV_{\Omega_X} = p(x)dx$  es la probabilidad de que  $X$  tome un valor en el intervalo entre  $x$  y  $x + dx$ ; Si es multidimensional, el espacio muestral  $\Omega_X$  es un volumen, y  $dV_{\Omega_X}$  es un elemento infinitesimal de volumen.

<sup>3</sup>Más adelante veremos por qué hemos considerado esta distribución particular. El nombre surge de que si tomamos  $u = \cos x$  entonces  $1/\sqrt{1 - u^2} = \csc x$ .



Como veremos más adelante, el interés por las distribuciones anteriores se encuentra en el contexto cuántico [14], siendo cada una de ellas la representación estadística de procedimientos cuánticos particulares.

### 2.1.2. La esperanza

Consideremos una VA continua unidimensional, es decir, el espacio muestral es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . La esperanza, o también llamada *promedio*, de  $X$  viene denotado por  $\mathbb{E}[X]$ . Esta magnitud representa el valor esperado que puede tomar una VA teniendo en cuenta su distribución de probabilidad  $p(x)$ , y se define como,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega_X} xp(x)dx.$$

En el capítulo siguiente, utilizaremos cantidades físicas que dependen de variables aleatorias continuas en  $\mathbb{R}^3$ . Sea entonces  $X$  una VA de este tipo, y  $C : \Omega_X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional que representa alguna de estas magnitudes físicas, entonces la esperanza de  $C$  está dada por:

$$\mathbb{E}[C(X)] = \int_{\Omega_X} C(x)p(x)dV_{\Omega_X}.$$

Nótese que estamos considerando el caso de VAs continuas, pero siempre podemos restringirnos a variables discretas haciendo uso de la Ec. (1).

La esperanza presenta ciertas propiedades que son muy útiles en teoría de probabilidad, como por ejemplo:

- *Linealidad.* Para cualesquiera variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , y constantes  $a$  y  $b$ , se tiene,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

- *Esperanza de una constante.* Para cualquier constante  $c$ , su esperanza es ella misma:

$$\mathbb{E}[c] = c.$$

- *No negatividad.* Si  $X \geq 0$  entonces  $\mathbb{E}[X] \geq 0$ .

### 2.1.3. La Varianza

La varianza es una medida estadística que describe la dispersión de una variable aleatoria con respecto a la esperanza. La varianza juega un papel crucial en estadística ya que cuantifica el nivel de incertidumbre sobre los valores que puede tomar dicha variable. Encontramos un ejemplo trivial al considerar la variable aleatoria *constante*: no hay incertidumbre sobre sus valores (toma siempre el mismo), y la varianza es nula.

Específicamente, la varianza de una variable aleatoria  $X$  se denota por  $\sigma^2$ , siendo  $\sigma$  conocida como desviación estándar. En el caso unidimensional, puede ser calculada de la siguiente manera:

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2],$$

donde  $\mathbb{E}$  representa la esperanza. Además, se puede ver que la varianza se puede escribir como,

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X^2]. \quad (6)$$

Esta ecuación muestra que la varianza puede entenderse como la diferencia entre el valor esperado del cuadrado de  $X$  y el cuadrado de la esperanza.

Del mismo modo, si  $X$  es una VA continua multidimensional, y  $C : \Omega_X \rightarrow \mathbb{R}$  es una magnitud que depende de  $X$ , entonces,

$$\sigma^2[C(X)] = \mathbb{E}[(C(X) - \mathbb{E}[C(X)])^2].$$

En resumen, vimos que una varianza mayor implica una mayor dispersión alrededor del valor esperado, mientras que una varianza menor conlleva a que los valores están más próximos al promedio. Es decir, la varianza es una medida de *volatilidad* o desviación de la variable.

## 2.2. Formalismo y elementos básicos de la teoría cuántica

### 2.2.1. Estados cuánticos

En la teoría cuántica, el comportamiento dinámico de los sistemas físicos es intrínsecamente estocástico [15], es decir, los observables físicos relacionadas son variables aleatorias. Con el objetivo de comprender mejor la teoría cuántica vamos a repasar resumidamente los conceptos más importantes.

Los sistemas físicos cuánticos están descritos por un *espacio de Hilbert*  $\mathcal{H}$  [16] y un *estado* que es un operador lineal acotado positivo y autoadjunto, con traza uno. El conjunto de estos estados se lo denota, habitualmente, como  $\mathcal{B}_1^+(\mathcal{H})$ . Matemáticamente, un espacio de Hilbert es un espacio vectorial completo con un producto interno complejo [17].

La regla de Born relaciona el elemento definido como estado cuántico con las magnitudes físicas: todo observable físico de un sistema cuántico está representado por un operador lineal autoadjunto  $O$ . Su valor de expectación, i.e. el promedio sobre infinitos experimentos iguales, está dado por  $\langle O \rangle = \text{Tr } O\rho$ , siendo  $\rho \in \mathcal{B}_1^+(\mathcal{H})$  el estado del sistema.

Por otro lado, los estados cuánticos están divididos en dos tipos; estados *puros* y *mixtos*.

- *Estados puros*: si  $\rho \in \mathcal{B}_1^+(\mathcal{H})$  es un estado puro, entonces existe un vector  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  tal que  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . De este modo,  $\text{Tr } \rho^2 = 1$ . Toda la descripción del sistema, en este caso, se puede realizar utilizando solamente  $|\psi\rangle$ .
- *Estados mixtos*: estos estados describen sistemas cuánticos que no pueden ser descritos con un único vector del espacio de Hilbert. Los estados mixtos son una combinación estadística de estados puros. En este caso, si  $\rho \in \mathcal{B}_1^+(\mathcal{H})$  es el estado mixto en cuestión,  $\text{Tr } \rho^2 < 1$ .

Adicionalmente, se puede demostrar que  $\text{Tr } \rho^2$  es una medida bien comportada de la *pureza* de un estado cuántico; en particular,  $\text{Tr } \rho^2 = 1$  si y sólo si  $\rho$  es un estado puro [18].

### 2.2.2. Sistemas de dos niveles y la esfera de Bloch

La esfera de Bloch es una representación geométrica utilizada para visualizar el estado de un qubit [19]. Esta representación es posible debido a que el estado de un qubit se encuentra en un espacio de Hilbert de dimensión dos, lo que permite establecer una correspondencia entre el espacio de operadores de densidad y la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ . Esto se logra utilizando las matrices de Pauli, ya que, junto con la matriz identidad  $\mathbb{1}$ , forman una base completa en dicho espacio. De esta manera, cualquier operador puede expresarse como una combinación lineal de estas matrices.

Un qubit es un sistema cuántico cuya configuración puede describirse como una superposición lineal de dos estados base,  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , por lo que su estado general se expresa como:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle,$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes complejos. En la representación de la esfera de Bloch, este estado se parametriza mediante coordenadas esféricas, obteniéndose la siguiente forma:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle,$$

donde los parámetros  $\theta$  y  $\phi$  tienen las siguientes interpretaciones geométricas:

- $\theta$ : Colatitud, el ángulo entre el eje  $z$  y el vector que representa el estado del qubit, con valores que varían entre 0 y  $\pi$ .
- $\phi$ : Longitud, el ángulo medido en el plano  $xy$  desde el eje  $x$  hasta la proyección del vector del estado sobre dicho plano, con valores que oscilan entre 0 y  $2\pi$ .

Además, también los estados mixtos pueden ser representados en la esfera de Bloch. La expresión general de una matriz densidad es:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (7)$$

donde:

- $\mathbb{1}$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ .
- $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = r(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ , es el vector de Bloch, que apunta desde el centro de la esfera hacia el punto que representa el estado cuántico.
- $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  son las matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.3. Entrelazamiento cuántico

El entrelazamiento cuántico es un fenómeno fundamental en la mecánica cuántica, en el que dos o más partículas comparten un estado cuántico conjunto. Esto significa que las

propiedades individuales de cada una de las partículas no pueden describirse de manera independiente respecto a las demás. En particular, cualquier medición realizada sobre una de las partículas afecta instantáneamente al estado de las demás, sin importar la distancia que las separe [18, 1].

Consideremos un sistema compuesto por dos partículas,  $A$  y  $B$ . El estado conjunto está descrito por un estado global, que puede ser una superposición de varios estados posibles. Si las partículas  $A$  y  $B$  están entrelazadas, el estado del sistema no puede expresarse como el producto de los estados individuales de cada partícula, lo que implica que hay correlaciones entre los subsistemas que la componen [17].

Para ilustrar este concepto, consideremos un ejemplo concreto: Supongamos que tenemos dos electrones que presentan entrelazamiento de espín. Al realizarse una medición del espín de cada partícula en alguna dirección, podemos obtener uno de dos resultados: “arriba” ( $\uparrow$ ) o “abajo” ( $\downarrow$ ). En este caso, un posible estado entrelazado del sistema sería:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_A \downarrow_B\rangle + |\downarrow_A \uparrow_B\rangle). \quad (8)$$

Este estado implica que, al medir el espín de cualquiera de los dos electrones, el estado del otro queda inmediatamente determinado. Por ejemplo, si al medir el electrón  $A$  se obtiene espín arriba ( $\uparrow_A$ ), sabemos con certeza que el electrón  $B$  tiene espín abajo ( $\downarrow_B$ ), y viceversa.

El estado en la Ec. (8), es uno de los conocidos como *estados de Bell* [20] y tienen la particularidad de que tienen entrelazamiento máximo. Para un conjunto de dos sistemas de dos niveles, cualesquiera los estados de Bell vienen dados por:

$$\begin{aligned} |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), & |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle), \\ |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), & |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned}$$

La matriz densidad de cada uno de los estados se puede reescribir como:

$$\rho_{Bell}^k = |\psi_{Bell}^k\rangle\langle\psi_{Bell}^k| = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_a \otimes \mathbb{1}_b + \sum_{i=1}^3 W_i^k \sigma_i \otimes \sigma_i \right). \quad (9)$$

En esta expresión,  $\{W^k\}_{k=1}^4$  son las matrices diagonales asociadas a cada estado de Bell, siendo estas:

$$W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad W^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad W^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

#### 2.2.4. Canales cuánticos

En la teoría de información cuántica, los canales cuánticos presentan un papel fundamental en el estudio de conceptos como coherencia, corrección de errores y capacidades de protocolos particulares [21].

Un canal cuántico se describe matemáticamente como un mapa  $\mathcal{E} : \mathcal{B}_1^+(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{B}_1^+(\mathcal{H}_B)$

entre operadores lineales, completamente positivo y que preserva la traza.

La importancia de estos objetos matemáticos es que permiten representar de forma físicamente consistente cualquier «cambio»<sup>4</sup> que un estado cuántico pueda exhibir.

Como se comentó anteriormente, los canales cuánticos requieren de dos requisitos indispensables relacionados con matrices densidad bien definidas; específicamente:

- *Positividad completa*: Esto implica que  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_n$  es una aplicación positiva para cualquier valor de  $n$ , lo que asegura que la evolución de un estado cuántico inicial a uno final nunca produce probabilidades negativas.
- *Conservación de la traza*: Se preserva la traza de los operadores, lo que quiere decir  $\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) = \text{Tr}(\rho)$  para cualquier estado  $\rho$ . Esto nos asegura que la normalización de la probabilidad no se altera cuando el estado evoluciona.

Uno de los objetivos últimos de la teoría de información cuántica es establecer cotas a cantidades físicas o de tipo informacionales, siendo una de las herramientas matemáticas básicas los mapas que representan los canales cuánticos.

### 2.2.5. Mediciones

El postulado de medición de la mecánica cuántica establece que, dado un sistema en un estado  $\rho \in \mathcal{B}_1^+(\mathcal{H})$ , la medición de una magnitud física  $\mathcal{A}$ , que puede tomar resultados  $\{a_k\}_k$ , puede representarse utilizando *operadores de medición*  $\{A_k\}_k$ , que actúan en el mismo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . De este modo, la probabilidad de obtener el resultado  $a_k$  en la medición de  $\mathcal{A}$  está dado por  $p_k = \text{Tr } A_k \rho A_k^\dagger$ , mientras que el estado *condicional* que ocupa el sistema luego de esta medición es:

$$\rho_k = \frac{A_k \rho A_k^\dagger}{p_k}. \quad (11)$$

El formalismo matemático más general para estos operadores es el de operadores no negativos ( $E_k \geq 0$ ), hermíticos ( $E_k = E_k^\dagger$ ) y que suman la identidad  $\sum_k E_k = \mathbb{1}$ , también conocido como POVMs<sup>5</sup>. Este conjunto de operadores es muy importante porque los operadores de medición pueden ser siempre generados a partir de una POVM y determinan unívocamente las probabilidades, es decir, la probabilidad de obtener el resultado  $k$ -ésimo es  $p_k = \text{Tr } E_k \rho$ . Sin embargo, para obtener los estados condicional, Ec. (11), necesitamos descomponer los elementos de la POVM como

$$E_k = A_k^\dagger A_k.$$

Dos aclaraciones importantes: La primera es que  $\{A_k\}$  no son necesariamente hermíticos y, por último, la descomposición anterior no es única, con lo cual, especificando únicamente la POVM, no podemos determinar los estados condicionales.

<sup>4</sup>Es decir, una evolución o un protocolo particular.

<sup>5</sup>Por sus siglas en inglés: Positive operator-valued measure.

## 2.3. Fidelidad

Con el propósito de evaluar la similitud entre dos estados cuánticos arbitrarios, existen diversas medidas que pueden emplearse, tales como la distancia de traza o la fidelidad. En el área de teleportación cuántica, la más utilizada es la fidelidad [22, 13, 10, 11].

La fidelidad entre dos estados cuánticos, representados por operadores densidad  $\rho$  y  $\sigma$ , se define mediante la siguiente expresión:

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{\rho^{\frac{1}{2}} \sigma \rho^{\frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

Es importante destacar que la fidelidad es simétrica respecto al orden en el que se comparan los estados, es decir,  $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$ . Además, está acotada entre 0 y 1, donde  $F(\rho, \sigma) = 0$  únicamente cuando existe una medición que nos permita distinguir perfectamente los estados, y  $F(\rho, \sigma) = 1$  cuando ambos estados coinciden, es decir, cuando  $\rho = \sigma$ . Aunque esta propiedad no es evidente a partir de la expresión anterior, puede derivarse directamente del teorema de Uhlmann [23].

### 2.3.1. Expresión simplificada para sistemas de dos niveles

Trabajar con la expresión de la fidelidad, Ec. (12), puede resultar complicado. Para el caso de sistemas de dos niveles, podemos simplificar la expresión usando vectores de Bloch, Ec. (7). Primero, definimos los estados a comparar:  $\rho(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma})$  y  $\sigma(\vec{s}) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma})$ .

Las matrices hermíticas son diagonalizables y las que además son definidas no negativas tienen una raíz cuadrada bien definida: Sea  $M$  una matriz  $2 \times 2$  de este tipo,

$$M = U_M M_d U_M^\dagger \implies \sqrt{M} = U_M \sqrt{M_d} U_M^\dagger,$$

donde  $M_d$  es una matriz diagonal y  $U_M$  es la unitaria que digonaliza a  $M$ . Además,

$$(\text{Tr} \sqrt{M})^2 = (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^2 = m_1 + m_2 + 2m_1 m_2,$$

con  $m_i$  los elementos de la diagonal de  $M$ . Por otro lado,

$$\text{Tr} M = m_1 + m_2 \quad \det M = m_1 m_2,$$

entonces

$$(\text{Tr} \sqrt{M})^2 = \text{Tr} M + 2 \det M,$$

Luego, la matriz  $\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}$  es una matriz hermítica y definida no negativa, porque  $\rho$  y  $\sigma$  son también de este tipo, entonces tomando  $M = \sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}$  hemos demostrado que,

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}[\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}] + 2 \det(\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}) = \text{Tr}[\rho \sigma] + 2 \det \rho \det \sigma.$$

Escribiendo los estados en función de los vectores de Bloch y desarrollando cada término, tenemos:

$$\text{Tr}[\rho \sigma] = \frac{1}{2} (1 + \vec{r} \cdot \vec{s}),$$

$$\det \rho = \frac{1 - r^2}{4}, \quad \det \sigma = \frac{1 - s^2}{4}.$$

Finalmente, hemos demostrado que la fidelidad entre dos estados cuánticos se puede escribir como:

$$F(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \left( 1 + \vec{r} \cdot \vec{s} + \sqrt{1 - r^2} \sqrt{1 - s^2} \right). \quad (13)$$

### 3. Protocolos de teleportación

El término *teleportación cuántica* surge en 1993, de la mano de Charles Bennett y sus colaboradores [24], quienes propusieron por primera vez el protocolo de teleportación ideal (o perfecto) para sistemas de dos niveles. Como señalamos anteriormente, este procedimiento consiste en la transmisión del estado cuántico de un sistema a otro, utilizando estados de Bell (entrelazamiento máximo) y comunicación clásica –este detalle es importante debido a que limita la velocidad de transmisión del estado a la velocidad de la luz.

Además del protocolo de teleportación cuántico perfecto, en la literatura se estudiaron diferentes variantes, siendo una muy importante el protocolo clásico. Este procedimiento supone que el emisor y el receptor del estado cuántico, usualmente denominados como *Alice* y *Bob*, respectivamente, están conectados solamente por un canal clásico, es decir, sólo puede enviarse bits información clásica. Por último, otra situación relevante toma lugar cuando Alice y Bob no pueden comunicarse, procedimiento que hemos denominado como *estrategia ingenua*. Cabe aclarar que la importancia de estos dos últimos protocolos es estudiar los límites de la teleportación, es decir, cuánto ruido puede admitir un protocolo cuántico antes de *comportarse peor* que estos protocolos que no hacen uso de ningún recurso cuántico.

En las secciones siguientes, veremos cómo definir y cuantificar el desempeño de los protocolos mencionados anteriormente para el caso de sistemas de dos niveles.

#### 3.1. Fidelidad de teleportación

Como señalamos anteriormente, la fidelidad de teleportación es la principal figura de mérito para cuantificar el desempeño de los protocolos en teleportación. La podemos definir como el promedio del rendimiento sobre una distribución aleatoria estados iniciales posibles. Específicamente, sea  $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma})$  el estado inicial a teleportar de un sistema cuántico y  $P$  un protocolo arbitrario de teleportación que, dado  $\rho$ , produce el estados cuántico condicional  $\rho_i = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{u}_i \cdot \vec{\sigma})$  con probabilidad  $p_i$ . El rendimiento  $\bar{F}$  se define como la fidelidad *a priori*:

$$\bar{F} = \sum_i p_i F(\rho, \rho_i). \quad (14)$$

La fidelidad de teleportación se calcula tomando el promedio de la cantidad anterior sobre una distribución de estados aleatoria  $D(\rho) = f(\vec{u})$ :

$$\langle F \rangle = \int d\rho D(\rho) F(\rho, \rho_i) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} dV f(\vec{u}) \left( 1 + \vec{u} \cdot \vec{u}_i + \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - u_i^2} \right), \quad (15)$$

siendo  $\mathcal{B}$  es la esfera de Bloch,  $f(\vec{u})$  la distribución de estados aleatorios parametrizada según el vector de Bloch  $\vec{u}$ , y donde hemos utilizado la Ec. (13) para la fidelidad.

En este punto surge la pregunta sobre cuál distribución de estados cuánticos considerar. Los protocolos de teleportación cuántica suponen máxima incertidumbre sobre el estado a teleportar, es decir, conocimiento previo mínimo. Ahora bien, si nos restringimos a estados puros iniciales se demuestra que la distribución que representa esta situación está dada por la «cáscara» uniforme sobre la superficie de la esfera de Bloch [14], dada por la Ec. (3), sin embargo, si se anula esta restricción, es decir, si permitimos que el protocolo toma como



estados de entrada cualquier estado cuántico, no existe una distribución de probabilidad que represente el conocimiento previo mínimo sobre los estados iniciales. Esto se debe a que existen diferentes formas de cuantificar qué tan diferentes son dos estados cuánticos, y cada una de ellas da lugar a una noción de aleatoriedad distinta. En este trabajo, como anticipamos en la Sec 2.1.1, vamos a utilizar dos distribuciones distintas de estados aleatorios mixtos dadas por las Ecs. (4) y (5). La primera está relacionada con la distancia Hilbert-Schmidt y la segunda con la distancia Bures, que son dos funcionales ampliamente utilizados y reconocidos como bien comportados en el área [25].

### 3.2. Protocolo clásico

Como introdujimos anteriormente, el protocolo de teleportación clásico consta de dos personas separadas a las que llamaremos Alice y Bob comunicadas por un canal clásico, es decir, sólo pueden enviarse bits de información clásica. El objetivo es, como siempre, transmitir el estado de un sistema cuántico  $A$  a otro sistema  $B$ . En un principio, Alice tiene un estado cuántico desconocido que podemos representar como

$$\rho(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}), \quad (16)$$

donde  $\vec{u}$  es el vector de Bloch del estado cuántico, ver por ejemplo Ec. (7). Además, cabe mencionar que sólo se tiene una copia del estado a teleportar, por lo que sólo se podrá realizar una medición para obtener información del mismo.

En el primer paso del protocolo clásico Alice realiza una medición dada por la POVM  $M_A = \{M_i\}_i$  sobre el estado  $A$ . La probabilidad de obtener el resultado  $i$ -ésimo es  $p_i = \text{Tr}[M_i \rho(\vec{u})]$ . Todo operador de medición  $M_i$  se puede escribir usando vectores de Bloch [13] como:

$$M_i = s_i^2 \rho_i,$$

siendo  $\rho_i$  un estado que viene dada por la expresión  $\rho_i(\vec{d}_i) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{d}_i \cdot \vec{\sigma})$ . Por completitud se tiene que cumplir que

$$\sum_i M_i = \sum_i s_i^2 \rho_i = \mathbb{1}_A,$$

lo que nos lleva a las siguientes dos propiedades:

$$\sum_i s_i^2 = 2, \quad \sum_i s_i^2 \vec{d}_i = 0. \quad (17)$$

La probabilidad de obtener el resultado  $i$ -ésimo resulta entonces,

$$p_i = \frac{s_i^2}{2} (1 + \vec{d}_i \cdot \vec{u}).$$

Una vez que Alice ha hecho la medición y ha obtenido el resultado  $i$ -ésimo se lo comunica a Bob utilizando el canal clásico, el cual prepara el estado final en el sistema  $B$  al que vamos

a expresar como

$$\tilde{\rho}_i(\vec{g}_i) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{g}_i \cdot \vec{\sigma}).$$

En este punto, surgen entonces dos preguntas: 1) ¿Qué debería medir Alice? Es decir, ¿cómo determinar la POVM óptima  $M_i$  ( $s_i$  y  $\vec{d}_i$ )?; y 2) ¿Qué debería preparar Bob? Es decir, ¿cómo tomar  $\vec{g}_i$ , dado el resultado  $i$  en la medición? La respuesta a estas preguntas las obtendremos optimizando la figura de mérito, es decir, la fidelidad de teleportación.

### 3.2.1. Fidelidad de teleportación clásica

Una vez hallada la expresión de la fidelidad con la que vamos a trabajar, Ec. (13), tendremos que sacar el rendimiento según la Ec. (14),

$$\begin{aligned} \bar{F}(\rho) &= \sum_i p_i F(\rho, \tilde{\rho}_i) = \frac{1}{4} \sum_i s_i^2 (1 + \vec{u} \cdot \vec{d}_i) (1 + \vec{u} \cdot \vec{g}_i + \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - g_i^2}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_i s_i^2 \left( 1 + \vec{u} \cdot \vec{g}_i + \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - g_i^2} + \vec{u} \cdot \vec{d}_i + \vec{u} \cdot \vec{d}_i \vec{u} \cdot \vec{g}_i + \vec{u} \cdot \vec{d}_i \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - g_i^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Siguiendo la Ec. (15), la fidelidad de teleportación es el promedio del rendimiento:

$$\begin{aligned} \langle \bar{F} \rangle &= \int f(\vec{u}) \bar{F}(\rho) dV = \int f(\vec{u}) \frac{1}{4} \sum_i s_i^2 (1 + \vec{u} \cdot \vec{g}_i + \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - g_i^2} + \\ &\quad \vec{u} \cdot \vec{d}_i + \vec{u} \cdot \vec{d}_i \vec{u} \cdot \vec{g}_i + \vec{u} \cdot \vec{d}_i \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - g_i^2}) dV. \end{aligned} \quad (19)$$

Podemos obtener la expresión analítica de la integral, desarrollando la integral de volumen en integrales de superficie y radial. Es importante destacar que esta separación se puede hacer ya que las densidades de probabilidad son isotrópicas  $f(\vec{u}) = f(u)$ . La separación en cuestión es, específicamente:

$$\int dV = \int_0^1 du u^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) = \int_0^1 du u^2 \int_S dS.$$

Veamos ahora cómo calcular cada uno de los términos de la integral Ec. (19).

1. Primer término:

$$\int f(u) u^2 4\pi du = 1. \quad (20)$$

Como vimos en nuestro marco teórico la densidad de probabilidad esta normalizada según la Ec. (2), por lo que nos permite calcular directamente nuestro primer término.

2. Segundo término:

$$\int f(u) \vec{u} \cdot \vec{g}_i dV = \int f(u) u^3 du \int \hat{u} \cdot \vec{g}_i dS, \quad (21)$$

donde hemos utilizado que  $\vec{u} = u\hat{u}$  siendo  $\hat{u}$  el vector normalizado. Como ya mencionamos en el marco teórico la densidades de probabilidad  $f(u)$  son isotrópicas, es por ello que podemos separar la integral en dos, la primera parte que integra los radios y la segunda que integra una superficie esférica, y operar cada una de ellas.

En este punto vamos a trabajar con la segunda integral sobre la superficie esférica, que calcularemos utilizando el teorema de la divergencia. Haremos el desarrollo una vez, para el resto de términos es análogo.

El teorema de la divergencia establece que dado un campo vectorial  $\vec{F}$  continuamente diferenciable en los límites de un volumen  $V \in \mathbb{R}^3$  compacto con un borde suave  $S$ , vale

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV,$$

En nuestro caso, si  $V$  es la bola unidad en  $\mathbb{R}^3$ , tenemos que  $d\vec{S} = dS\hat{u}$  y el campo vectorial es constante  $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{g}_i$ , por lo tanto:

$$\int \vec{g}_i \cdot \hat{u} dS = \int (\nabla \cdot \vec{g}_i) dV = 0. \quad (22)$$

Con lo cual, el segundo término, Ec. (21), es idénticamente nulo, al igual que el cuarto y sexto término.

3. Tercer término:

$$\int f(u) u^2 \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-g_i^2} dS du = \int f(u) u^2 4\pi \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-g_i^2} du. \quad (23)$$

Dado que la distribución de probabilidad no depende de las variables angulares, entonces sólo queda resolver la parte radial. Para ello hay que especificar la distribución  $f(u)$ .

4. Quinto término:

$$\int f(u) u^2 \vec{u} \cdot \vec{d}_i \vec{u} \cdot \vec{g}_i dS du = \int f(u) u^4 du \int \hat{u} \cdot \vec{d}_i \hat{u} \cdot \vec{g}_i dS. \quad (24)$$

En esta ocasión vamos a simplificar la integral de superficie para dejar únicamente dependencia con el radio; en lo que sigue, utilizaremos la convención de suma de Einstein. Sea  $\hat{x}$  un vector unitario,

$$(\hat{x} \cdot \vec{d}_i) (\hat{x} \cdot \vec{g}_i) = x_j d_i^j x_k g_i^k = x_j d_i^j g_i^k x_k = x_j (A_i^{jk} x_k) = \hat{x} \cdot A_i \hat{x},$$

donde  $A_i = \vec{d}_i \vec{g}_i^T$ . Por otro lado, utilizando una vez más el teorema de la divergencia y definiendo el campo vectorial como  $F(\vec{u}) = A\vec{u}$ , tenemos que vale en general:

$$\int A\hat{u} \cdot \hat{u} dS = \int (\nabla \cdot A\vec{u}) dV.$$

A su vez,

$$\nabla \cdot (A\vec{u}) = \frac{1}{\partial u_j} A^{jk} u_k = \sum_{j=1}^3 A^{jj} = \text{Tr } A,$$

y entonces

$$\int (\nabla \cdot A\vec{u}) dV = \frac{4\pi}{3} \text{Tr } A.$$

Volviendo a nuestro caso,  $A = \vec{d}_i \vec{g}_i^\top$ , por lo tanto,  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(\vec{d}_i \vec{g}_i^\top) = \vec{d}_i \cdot \vec{g}_i$ . Se sigue entonces que, el término en la Ec. (24) resulta:

$$\int f(u) u^2 (\vec{u} \cdot \vec{d}_i) (\vec{u} \cdot \vec{g}_i) dS du = \frac{4\pi (\vec{d}_i \cdot \vec{g}_i)}{3} \int f(u) u^4 du. \quad (25)$$

Utilizando las Ecs. (20), (22), (23) y (25), la fidelidad promedio resulta igual a,

$$\langle \bar{F} \rangle = \int_0^1 du f(u) \sum_i^n \pi u^2 s_i^2 \left( 1 + \frac{u^2}{3} (\vec{d}_i \cdot \vec{g}_i) + \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-g_i^2} \right). \quad (26)$$

Nótese que esta ecuación no puede ser resuelta sin conocer la expresión de la densidad de probabilidad de los vectores  $\vec{u}$ , por lo que vamos a introducir una simplificación para avanzar en el desarrollo, que viene dado por la siguiente expresión,

$$E_\alpha \equiv \int_0^1 du 4\pi u^2 f(u) \left( \frac{1-u^2}{4} \right)^\alpha \quad E_0 = 1. \quad (27)$$

Una vez implementamos la Ec. (27), podemos reescribir la fidelidad promedio como sigue

$$\langle \bar{F} \rangle = \sum_{i=0}^n \frac{1}{4} s_i^2 \left( 1 + \frac{1}{3} (1 - 4E_1) (\vec{d}_i \cdot \vec{g}_i) + 2E_{1/2} \sqrt{1-g_i^2} \right). \quad (28)$$

Para seguir con el desarrollo, tenemos que obtener los vectores que optimizan la expresión de la fidelidad (28). En el trabajo de Vidal [13], se demuestra que los vectores de Bloch óptimos de los estados condicionales (i.e. la estrategia de preparación) están relacionados a los operadores de la POVM según la expresión:

$$\vec{g}_i = \frac{(1 - 4E_1) \vec{d}_i}{\sqrt{36E_{1/2}^2 + (1 - 4E_1)^2 d_i^2}}$$

De esta manera lo que prepara Bob depende de la medida de Alice y de la densidad de probabilidad  $f(u)$ . Vamos ahora a sustituir en la expresión de la fidelidad promedio obteniendo

$$\langle \bar{F} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} s_i^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{36E_{1/2}^2 + (1 - 4E_1)^2 d_i^2} \right). \quad (29)$$

Como vemos obtenemos una expresión para la fidelidad de teleportación máxima que solo depende de  $f(u)$  y de los parámetros que definen la medición ( $s_i$  y  $d_i^2$ ). Estamos entonces en condiciones de obtener la medición óptima, optimizando la expresión anterior. Para cada resultado de la medición entonces vemos que  $d_i^2 = 1$  maximiza la Ec. (29), con lo cual, la POVM está compuesta por proyectores de rango uno. Luego, como  $\sum_i s_i^2 = 2$  por la Ec. (17), la expresión final para la fidelidad de teleportación clásica es:

$$\langle \bar{F} \rangle = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{36E_{1/2}^2 + (1 - 4E_1)^2} \right).$$

Vemos entonces que los elementos  $\{s_i\}$  y la cantidad de operadores de la POVM son parámetros libres y no afectan al promedio del rendimiento.

En este trabajo, nos concentraremos en el protocolo clásico óptimo *mínimo*, es decir, la POVM está compuesta por únicamente por dos proyectores porque es el protocolo más utilizado en la literatura [13]. En resumen, la POVM óptima mínima y la estrategia de preparación están dadas por:

$$\begin{aligned} s_i &= 1, & n &= 2, \\ \vec{g}_i &= g_{opt} \cdot \vec{d}_i, & \sum_i \vec{d}_i &= \vec{0}, \\ d_i^2 &= 1. \end{aligned} \tag{30}$$

siendo

$$g_{opt} = \frac{(1 - 4E_{1_p})}{\sqrt{36E_{1/2_p}^2 + (1 - 4E_{1_p})^2}} \tag{31}$$

el módulo de los vectores de Bloch de los estados que componen la estrategia de preparación. Este parámetro es determinado, en última instancia, por la distribución  $f(u)$ , entonces, el protocolo clásico *depende* de la noción de aleatoriedad considerada. Además,  $g_{opt}$  es el grado de pureza óptimo de los estados condicionales.

Vamos ahora a calcular las integrales que vienen dados por la Ec. (27) utilizando las densidades de probabilidad dadas en las Ecs. (3)–(5),

$$\begin{aligned} E_{1_p} &= \int_0^1 du 4\pi u^2 f_p(u) \left( \frac{1 - u^2}{4} \right) = 0, & E_{1/2_p} &= \int_0^1 du 4\pi u^2 f_p(u) \left( \frac{1 - u^2}{4} \right) = 0, \\ E_{1_m} &= \int_0^1 du 4\pi u^2 f_m(u) \left( \frac{1 - u^2}{4} \right) = \frac{1}{10}, & E_{1/2_m} &= \int_0^1 du 4\pi u^2 f_m(u) \left( \frac{1 - u^2}{4} \right) = \frac{3\pi}{32}, \\ E_{1_r} &= \int_0^1 du 4\pi u^2 f_r(u) \left( \frac{1 - u^2}{4} \right) = \frac{1}{16}, & E_{1/2_r} &= \int_0^1 du 4\pi u^2 f_r(u) \left( \frac{1 - u^2}{4} \right) = \frac{2}{3\pi}. \end{aligned}$$

Por otro lado vamos a calcular los últimos elementos que necesitamos para calcular la fidelidad

promedio:

$$\begin{aligned}
 g_{opt}(f_p) &= \frac{(1 - 4E_{1_p})}{\sqrt{36E_{1/2_p}^2 + (1 - 4E_{1_p})^2}} = 1, \\
 g_{opt}(f_m) &= \frac{(1 - 4E_{1_m})}{\sqrt{36E_{1/2_m}^2 + (1 - 4E_{1_m})^2}} \approx 0,32, \\
 g_{opt}(f_r) &= \frac{(1 - 4E_{1_r})}{\sqrt{36E_{1/2_r}^2 + (1 - 4E_{1_r})^2}} \approx 0,50.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Cabe destacar que cuando nos restringimos a teleportar estados aleatorios *puros*, el protocolo clásico da lugar consistentemente a la preparación también de estados puros; esto lo podemos ver en la Ec. (32). Cuando la distribución involucra estados aleatorios que podrían ser mixtos, la pureza de los estados finales en el protocolo clásico es considerablemente menor, sobre todo en el caso de la esfera de Bloch uniforme, Ec. (4).

Por otro lado, los valores de la fidelidad de teleportación clásica, según las distribuciones consideradas, son:

$$\langle \bar{F} \rangle_p = \frac{2}{3}. \tag{33}$$

$$\langle \bar{F} \rangle_m \approx 0,811.$$

$$\langle \bar{F} \rangle_r \approx 0,746. \tag{34}$$

Vemos entonces que, en principio, a medida que la distribución de estados iniciales involucra más estados mixtos, mayor es la fidelidad de teleportación alcanzada.

### 3.3. Protocolo cuántico

Para llevar a cabo el protocolo cuántico de teleportación, consideramos nuevamente a dos individuos: Alice, cuyo objetivo es enviar el estado  $\rho_a$  –escrito como en la Ec. (16)– de un sistema de dos niveles denominado como  $a$ , y Bob, el receptor de tal estado en el sistema  $B$ . En este caso, cambiamos la notación porque el protocolo cuántico hace uso de un sistema adicional  $A$ .

El protocolo cuántico de teleportación comienza preparando un estado *recurso*  $\rho_{AB}$  en el sistema  $AB$ . El siguiente paso consiste en la distribución del qubit  $A$  y  $B$  entre Alice y Bob, respectivamente. Por otro lado, en este protocolo también se supone que Alice y Bob mantienen un canal de comunicación clásico.

En resumen, Bob posee el qubit  $B$ , mientras que Alice tiene ahora dos qubits  $a$  y  $A$ . Es importante destacar dos cuestiones: 1) Alice desconoce por completo en el qubit  $a$ , el cual es el estado que se desea teleportar; 2) A diferencia del protocolo anterior, los pasos siguientes del protocolo cuántico están diseñados para utilizar las potenciales correlaciones en el estado recurso  $\rho_{AB}$  entre los qubits  $A$  y  $B$ .

El siguiente paso del protocolo consiste en que Alice realice una medición *conjunta* sobre el sistema compuesto por los qubits  $a$  y  $A$ , representada como  $\mathcal{M} = \{M_i^{aA}\}$ . Tras realizar la

medición, el estado del qubit  $B$  se altera debido al entrelazamiento, dando lugar a estados condicionales (al resultado de la medición) en el sistema  $B$  [1]:

$$\rho_{B|i} = \frac{\text{Tr}_{aA} \left[ \left( M_i^{aA} \otimes \mathbb{1}_B \right) (\rho_a \otimes \rho_{AB}) \right]}{p_i}, \quad (35)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados de las medidas  $M = \{M_i^{aA}\}$ , cuya expresión es:

$$p_i = \text{Tr} \left[ \left( M_i^{aA} \otimes \mathbb{1}_B \right) (\rho_a \otimes \rho_{AB}) \right]. \quad (36)$$

### 3.3.1. Protocolo de teleportación cuántico perfecto

El caso más sencillo y de mejores resultados, parte de tomar como medición  $\mathcal{M} = \{M_i^{aA}\}_i = \{\rho_i^{Bell}\}_i$  la base de Bell y preparar algún estado de Bell  $\rho_k^{Bell}$  como estado recurso del sistema  $AB$ . En este apartado demostraremos que la configuración anterior da lugar a la transmisión perfecta del estado  $\rho$  del qubit  $a$  al qubit  $B$ . En las ecuaciones siguientes haremos uso de la convención de suma de Einstein para simplificar el texto.

El primer paso es escribir los estados de Bell como en la Ec. (9):

$$\rho_k^{Bell} = \frac{1}{4} (\mathbb{1}_{AB} + W_k^\alpha \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha), \quad (37)$$

que es un estado de Bell escrito en la forma de Fano, donde los elementos  $W_k^\alpha$  son los elementos diagonales de las matrices de la Ec. (10).

Luego, la probabilidad de que Alice obtenga el resultado  $i$ -ésimo en la medición está dada por la Ec. (36) y usando la parametrización anterior, Ec. (37), tenemos que:

$$\begin{aligned} p_i &= \text{Tr} \left[ \left( M_i^{aA} \otimes \mathbb{1}_B \right) (\rho_a \otimes \rho_k^{Bell}) \right] = \frac{1}{32} \text{Tr} [(\mathbb{1}_{aAB} + w_i^{\alpha'} \sigma_{\alpha'} \otimes \mathbb{1}_B) \\ &\quad (\mathbb{1}_{aAB} + w_k^\alpha \mathbb{1}_a \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB} + w_k^\alpha \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha)] = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

La igualdad anterior se demuestra usando las propiedades de las matrices de Pauli, en particular, que  $\text{Tr} \sigma_i = 0$ .

Una vez hemos medido el subsistema  $aA$  y observado el resultado  $i$ -ésimo, al estar  $A$  y  $B$  entrelazados, hemos condicionado el estado de  $B$ , dado por la Ec. (35):

$$\begin{aligned} \rho_{B|i} &= \frac{\text{Tr}_{aA} [\rho_{aAB}]}{p_i} = \frac{4}{32} \text{Tr}_{aA} [(\mathbb{1}_{aAB} + w_i^{\alpha'} \sigma_{\alpha'} \otimes \mathbb{1}_B) \\ &\quad (\mathbb{1}_{aAB} + w_k^\alpha \mathbb{1}_a \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB} + w_k^\alpha \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha)], \end{aligned}$$

Aplicando la traza parcial [26] correspondiente vemos que sólo sobreviven los siguientes térmi-

nos,

$$\begin{aligned}\rho_{B|i} &= \frac{1}{8} (4 \mathbb{1}_B + 2w_i^{\alpha'} w_k^\alpha u_\alpha 2\delta_{\alpha\alpha'} \sigma_\alpha) = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_B + w_i^\alpha w_k^\alpha u_\alpha \sigma_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_B + \vec{u}_{B|i} \cdot \vec{\sigma}).\end{aligned}$$

El estado que hemos obtenido es muy parecido al estado a teleportar, Ec. (16) que teníamos en  $a$ . Específicamente:

$$\vec{u}_{B|i} = W_i W_k \vec{u} = R_i \vec{u},$$

donde cada  $W_i$  son las matrices ortogonales de  $\det = -1$  en las Ec. (10), por lo que el producto de  $W_i W_k = R_i$  es una matriz ortogonal de  $\det = 1$ , es decir, una rotación. Esto quiere decir que  $\vec{u}_{B|i}$  no es más que el vector de Bloch  $\vec{u}$  del estado  $\rho_a$  rotado por la acción de  $R_i$ , escrito de otro modo:

$$\vec{u}_{B|i} = R_i \vec{u} \rightarrow \vec{u} = R_i^\top \vec{u}_{B|i},$$

Por lo tanto, si Alice le envía a Bob el resultado  $i$  de su medición, este puede corregir el estado aplicando la rotación de corrección  $R_i^\top$ , obteniendo siempre como resultado el vector  $\vec{u}$  en el sistema  $B$ .

Para todo este proceso hemos estado supuesto condiciones ideales de ruido y sin pérdida de información. Veamos a continuación qué sucede si aplicamos un modelo de ruido al entrelazamiento entre los estados  $A$  y  $B$ .

### 3.3.2. Estado de Werner como recurso del protocolo cuántico

Como bien se introdujo al final de la anterior sección, vamos ahora a preparar nuestro estado inicial de manera distinta, preparando en el sistema  $AB$  un estado de Werner que viene definido por la siguiente expresión:

$$\rho_w^k = (1 - p) \rho_{Bell}^k + \frac{p}{4} \mathbb{1}_{AB}.$$

Estos estados son resultado de uno de los modelos de decoherencia más simples existentes en la literatura, y representan ruidos *locales* en los sistemas  $A$  y  $B$ .

De aquí en adelante, denotaremos por  $p$  al nivel de ruido que tenemos. Este estado tiene la particularidad de ser uno de los estados de Bell si el ruido es 0, lo que implica estar en el caso de la anterior sección, o  $1/4$  de la matriz identidad en caso de que el ruido sea máximo, es decir igual a 1; esto representa la menor información posible.

Como en el caso anterior, Alice precede a realizar la misma medición en la base de Bell  $\mathcal{M} = \{M_i^{aA}\}_i = \{\rho_i^{Bell}\}_i$  sobre el subsistema  $aA$ . En este caso, tenemos que

$$p_i = \text{Tr} \left[ \left( M_i^{aA} \otimes \mathbb{1}_B \right) \left( \rho_a \otimes \rho_w^k \right) \right],$$

donde,

$$\left( M_i^{aA} \otimes \mathbb{1}_B \right) = \frac{1}{4} (\mathbb{1}_{aAB} + w_i^{\alpha'} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_{\alpha'} \otimes \mathbb{1}_B).$$



De la misma forma vamos a desarrollar el segundo término obteniendo así:

$$\begin{aligned}
(\rho_a \otimes \rho_w^k) &= \frac{1}{8} [(\mathbb{1}_a + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \otimes ((1-p)\rho_{Bell}^k + p\mathbb{1}_{AB})] \\
&= \frac{1}{8} [(\mathbb{1}_a + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \otimes ((1-p)(\mathbb{1}_{AB} + w_k^\alpha \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha) + p\mathbb{1}_{AB})] \\
&= \frac{1}{8} [(1-p)(\mathbb{1}_{aAB} + \mathbb{1}_a w_k^\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB} + w_k^\alpha \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha) + \\
&\quad + p(\mathbb{1}_{aAB} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB})].
\end{aligned}$$

De este modo, las probabilidades resultan:

$$\begin{aligned}
p_i &= \text{Tr} [(M_i \otimes \mathbb{1}_B) (\rho_a \otimes \rho_w^k)] = \frac{1}{32} [(\mathbb{1}_{aAB} + w_i^{\alpha'} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_{\alpha'} \otimes \mathbb{1}_B) \\
&\quad [(1-p)(\mathbb{1}_{aAB} + \mathbb{1}_a w_k^\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB} + w_k^\alpha \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha) + p(\mathbb{1}_{aAB} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB})]] \\
&= \frac{1}{32} (8(1-p) + 8p) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Calculadas las probabilidades, los estados condicionales, Ec. (35), se obtienen de un modo análogo:

$$\begin{aligned}
\rho_{B|i} &= \frac{\text{Tr}_{aA} [(M_i \otimes \mathbb{1}_B) (\rho_a \otimes \rho_w^k)]}{p_i} = \frac{1}{8} \text{Tr}_{aA} [(\mathbb{1}_{aAB} + w_i^{\alpha'} \sigma_{\alpha'} \otimes \sigma_{\alpha'} \otimes \mathbb{1}_B) \\
&\quad [(1-p)(\mathbb{1}_{aAB} + \mathbb{1}_a w_k^\alpha \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB} + w_k^\alpha \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha) + p(\mathbb{1}_{aAB} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_{AB})]].
\end{aligned}$$

Si aplicamos la traza parcial sobre dicha expresión vemos que sólo sobreviven los siguientes términos,

$$\rho_{B|i} = \frac{1}{8} (4\mathbb{1}_B(1-p) + 4p\mathbb{1}_B + 4w_i^\alpha w_k^\alpha u_\alpha \sigma_\alpha(1-p)) = \frac{1}{2} [\mathbb{1}_B + (1-p)w_i^\alpha w_k^\alpha u_\alpha \sigma_\alpha].$$

Dicha expresión se puede reescribir contrayendo índices, obteniendo:

$$\rho_{B|i} = \frac{1}{2} [\mathbb{1}_B + (1-p)R_i \vec{u} \cdot \vec{\sigma}],$$

donde  $R_i$  es la matriz de rotación y  $\vec{u}$  es el vector de Bloch del estado a teleportar (16). Una vez Bob recibe el resultado de la medición de Alice, puede realizar la rotación dada por  $R_i^\top$  para obtener el estado final, siendo este:

$$\rho_B = \frac{1}{2} [\mathbb{1}_B + (1-p)\vec{u} \cdot \vec{\sigma}]. \quad (38)$$

En este caso, el estado final del protocolo no es el mismo al estado inicial, dado por la Ec. (16). Debido a esto tenemos que calcular la fidelidad entre estos dos estados como hicimos en la anterior sección.

Tras haber obtenido el estado que le resulta a Bob, Ec. (38), podemos calcular el rendi-

miento entre el estado inicial  $\rho_a$  y el estado final  $\rho_B$ , según la expresión (18),

$$\bar{F}(\rho_a, \rho_B) = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1-p) u^2 + \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-(1-p)^2 u^2} \right]. \quad (39)$$

Una vez que tenemos la expresión del rendimiento podemos calcular la fidelidad promedio según la Ec. (15) para las distintas distribuciones, Ecs. (3)–(5), obteniendo así las siguientes fidelidades medias:

$$\langle \bar{F}_p \rangle = \int d\Omega \int_0^1 u^2 \frac{1}{4\pi u^2} \lim_{u_0 \rightarrow 1} \delta(u - u_0) F(\rho_a, \rho_B) du = 1 - \frac{p}{2}, \quad (40)$$

$$\langle \bar{F}_m \rangle = \int d\Omega \int_0^1 u^2 \frac{3}{4\pi} F(\rho_a, \rho_B) du,$$

$$\langle \bar{F}_r \rangle = \int d\Omega \int_0^1 u^2 \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-u^2}} F(\rho_a, \rho_B) du. \quad (41)$$

La expresión analítica de las dos últimas integrales no son simples. En el apartado siguiente, las calculamos numéricamente en función del parámetro de ruido  $p$ .

## 4. Desviación de la fidelidad

El estudio de la desviación de la fidelidad es el objetivo principal de nuestro trabajo, debido a ello vamos a centrar esta sección en obtener la desviación para el protocolo clásico y para el protocolo cuántico. Además, representaremos gráficamente los resultados con el objetivo de entender la importancia de la desviación de la fidelidad en el estudio de la teleportación cuántica.

Para calcular la desviación de la fidelidad vamos a reescribir la Ec. (6) como sigue

$$\sigma^2 = \langle \bar{F}^2 \rangle - \langle \bar{F} \rangle^2. \quad (42)$$

Esta ecuación no es más que la diferencia entre el promedio del rendimiento al cuadrado y la fidelidad promedio al cuadrado.

Comenzaremos obteniendo la desviación de la fidelidad para el protocolo clásico óptimo mínimo desarrollado en la Sec. 3.2.

### 4.1. Desviación en el modelo clásico

En este apartado vamos a centrarnos en calcular la desviación de la fidelidad para el protocolo clásico, para ello vamos a seguir desarrollando la Ec. (42) donde sabemos que la expresión del rendimiento viene dado por la Ec. (18) y las fidelidades promedio las calculamos en las Ecs. (33)–(34).

Sustituyendo las condiciones del protocolo óptimo mínimo dadas por las Ecs. (30) y (31), en el rendimiento del protocolo clásico, Ec. (18), obtenemos la expresión simplificada:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\rho) &= \frac{1}{2} \left( 1 + g_{opt}(\vec{u} \cdot \vec{d}_i)^2 + \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - g_{opt}^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + g_{opt} u^2 \cos^2 \theta + \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - g_{opt}^2} \right). \end{aligned}$$

Luego, utilizando la ecuación anterior, la definición siguiente

$$\langle \bar{F}^2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \sin(\theta) \bar{F}^2(\rho) f(u) u^2 du d\theta d\phi,$$

y considerando las distribuciones de probabilidad correspondientes, resulta:

$$\begin{aligned} \langle \bar{F}_p^2 \rangle &= \frac{7}{15}, \\ \langle \bar{F}_m^2 \rangle &\approx 0,66, \\ \langle \bar{F}_r^2 \rangle &\approx 0,57. \end{aligned}$$

Habiendo obtenido los promedios anteriores, resulta directo calcular las varianzas del proto-

colo de teleportación clásico óptimo mínimo:

$$\sigma_{c,p}^2 = \frac{7}{15} - \frac{4}{9} = \frac{1}{45} = 0,0\bar{2}, \quad (43)$$

$$\sigma_{c,m}^2 \approx 0,668 - 0,657 \approx 0,01, \quad (44)$$

$$\sigma_{c,r}^2 \approx 0,569 - 0,557 \approx 0,013.$$

Podemos observar que la menor desviación se alcanza utilizando distribuciones de probabilidad de estados mixtos, mientras que el protocolo clásico presenta mayor estabilidad cuando los estados iniciales son puros.

## 4.2. Desviación en el modelo cuántico

De manera análoga a lo que sucedía al calcular la fidelidad promedio en el modelo cuántico, Ecs. (40)–(41), encontrar una expresión analítica para la desviación de la fidelidad en este modelo resulta muy complejo. Debido a esto, nos centraremos en obtener una solución numérica en función del parámetro de ruido  $p$ .

Al igual que en el modelo clásico, la desviación se calculará utilizando la Ec. (42). Como se mencionó previamente, el segundo término de dicha ecuación es elevar al cuadrado la fidelidad promedio obtenida en Ecs. (40)–(41).

Para calcular el promedio del rendimiento al cuadrado, utilizamos la expresión general:

$$\langle \bar{F}^2 \rangle = \int d\Omega \int_0^1 u^2 f(u) \bar{F}^2(\rho, \tilde{\rho}_i) du.$$

en la que debemos reemplazar la Ec. (39). Específicamente:

$$\begin{aligned} \langle \bar{F}_p^2 \rangle &= \int d\Omega \int_0^1 u^2 \frac{1}{4\pi u^2} \lim_{u_0 \rightarrow 1} \delta(u - u_0) \bar{F}(\rho_a, \rho_B)^2 du = \frac{p^2 - 4p + 4}{4}, \\ \langle \bar{F}_m^2 \rangle &= \int d\Omega \int_0^1 u^2 \frac{3}{4\pi} \bar{F}(\rho_a, \rho_B)^2 du, \\ \langle \bar{F}_r^2 \rangle &= \int d\Omega \int_0^1 u^2 \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1 - u^2}} \bar{F}(\rho_a, \rho_B)^2 du. \end{aligned}$$

Luego, se puede ver que la varianza del protocolo cuántico es nula cuando se considera la distribución sobre estados aleatorios puros; las varianzas para las distribuciones de estados mixtos serán ilustradas gráficamente en el apartado siguiente.

$$\sigma_p^2 = \frac{p^2 - 4p + 4}{4} - \frac{p^2 - 4p + 4}{4} = 0, \quad (45)$$

$$\sigma_m^2 = \langle \bar{F}_m^2 \rangle - \langle \bar{F}_m \rangle^2, \quad (46)$$

$$\sigma_r^2 = \langle \bar{F}_r^2 \rangle - \langle \bar{F}_r \rangle^2.$$

### 4.3. Gráficas

En este apartado vamos a realizar una comparación de los resultados obtenidos en el modelo clásico y el cuántico utilizando como recurso un estado de Werner. Las tres gráficas obtenidas, Fig. 1-3, representan la fidelidad promedio obtenido con cada una de las distribuciones de probabilidad con las que hemos trabajado, así como la desviación que presentan. El objetivo es evaluar cómo varían la fidelidad y la desviación de la fidelidad, para cada uno de los casos, en función al ruido existente, así como comparar el rendimiento de cada uno de los protocolos teniendo en cuenta no solo la fidelidad sino también su desviación.

A continuación, se presentan las gráficas que ilustran la evolución de la fidelidad en función del ruido para las tres densidades de probabilidad utilizadas durante el trabajo.

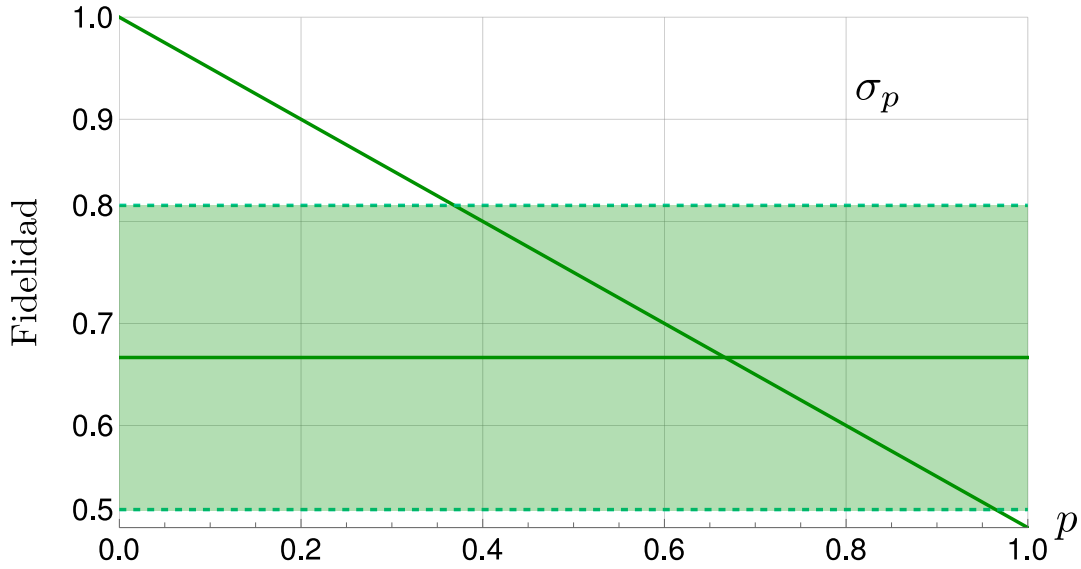


Figura 1: Fidelidad de teleportación y su desviación en el contexto de una densidad de probabilidad  $f_p(u)$ , Ec. (3), para los modelos clásico y cuántico.

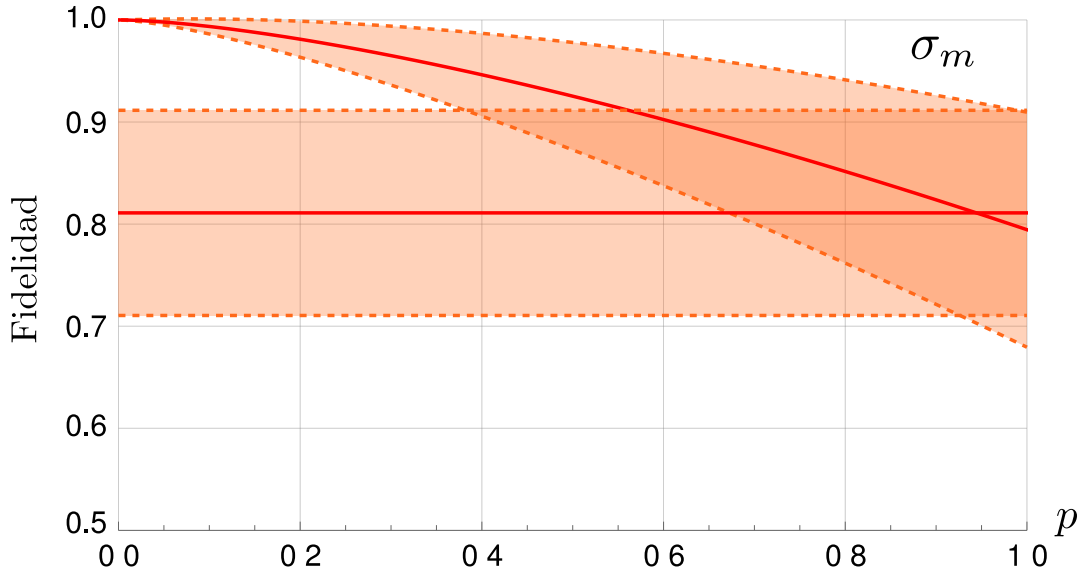


Figura 2: Comparación de la fidelidad de teleportación y su desviación para una distribución de probabilidad  $f_m(u)$ , Ec. (4), entre el modelo clásico y el modelo cuántico

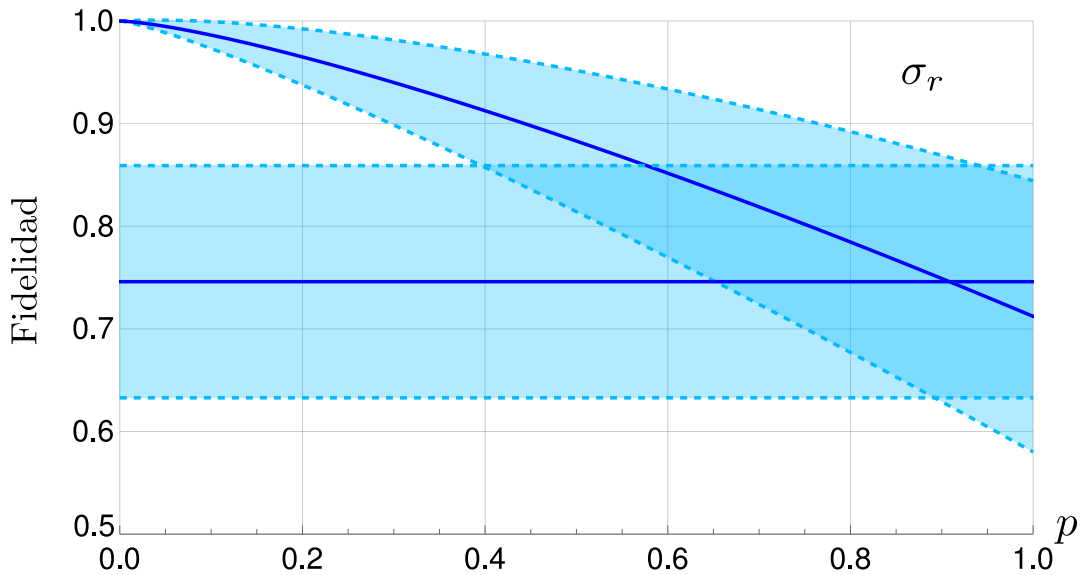


Figura 3: Fidelidad promedio y su desviación para una densidad de probabilidad  $f_r(u)$ , Ec. (5), en los protocolos clásico y cuántico con un ruido de tipo Werner.

En estas gráficas, podemos apreciar el valor que toma la fidelidad de teleportación clásica representadas por una línea horizontal continua, ya que en el modelo clásico la fidelidad promedio no depende del ruido del sistema. Del mismo modo, podemos observar los valores que toman las fidelidades promedio en el modelo cuántico, Ecs. (40)–(41), líneas continuas que toman valor 1 cuando el ruido es 0 y van decayendo según aumenta el ruido. Por otro lado, las líneas punteadas corresponden con la desviación de la fidelidad promedio para cada uno de los casos, las cuales corresponden con las Ecs. (43)–(44) para el protocolo clásico y las Ecs. (45)–(46) para el protocolo cuántico.

Como podemos apreciar, las fidelidades de los protocolos clásico y cuántico, la desviación juega un papel importante, pues el protocolo clásico cuenta con una desviación estándar considerable para todas las distribuciones utilizadas. Por otra parte, el protocolo cuántico para ciertos rangos de  $p$  y para distribuciones de estados aleatorias no restringidas a estados puros también presenta una variabilidad relevante.

## 5. Conclusiones

En este trabajo, hemos comparado el rendimiento de un protocolo cuántico bajo diferentes niveles de ruido frente al protocolo que sirve de referencia *clásica*, utilizando tres densidades de probabilidad distintas de estados cuánticos aleatorios.

En la Figura 1, correspondiente a las distribuciones de probabilidad de estado puros iniciales  $f_p(u)$ , observamos que el protocolo de teleportación cuántico ofrece en promedio mejores resultados que su contraparte clásica hasta que el nivel de ruido alcanza  $2/3$ .

Como mencionamos anteriormente, en la literatura relacionada, se certifica como *útil* o *cuántico* a todo protocolo de teleportación cuya fidelidad en promedio supere a la correspondiente del protocolo clásico.

No obstante, como se puede apreciar en la Figura 1, en el rango de ruido comprendido entre 0,36 y 0,96, la elevada desviación en el protocolo clásico permite cuestionar los límites previamente establecidos para determinar la utilidad del protocolo. A partir de 0,96, el modelo clásico comienza a demostrar un rendimiento superior. Por debajo de un nivel de ruido de 0,36, podemos concluir también que el protocolo cuántico es claramente más efectivo. Sin embargo, para los valores intermedios sería conveniente tener mayor información sobre cómo la fidelidad de teleportación se distribuye de acuerdo a la aleatoriedad de los estados iniciales.

De manera análoga, los resultados correspondientes a la densidad de probabilidad  $f_m(u)$ , mostrados en la Figura 2, indican que el protocolo cuántico proporciona mejores resultados hasta un valor de ruido de 0,38, similar a la distribución de estados puros. A partir de ese punto, la superposición de las desviaciones en ambos modelos no permite realizar afirmaciones concluyentes sobre cuál ofrece un mejor rendimiento.

Por otra parte, la Figura 3 muestra que el modelo cuántico supera claramente al clásico hasta que el nivel de ruido alcanza 0,39. A partir de ese valor, al igual que en el caso anterior, no resulta evidente cuál protocolo tiene un comportamiento superior. Se observa en la gráfica que cuando el ruido llega a 0,89, el rendimiento del protocolo clásico está por encima del cuántico.

De todas las densidades de probabilidad consideradas, la que permite mayores niveles de ruido para que el protocolo cuántico sea evidentemente útil es la tercera, mostrada en la Figura 3. Sin embargo, la segunda densidad de probabilidad, representada en la Figura 2, ofrece los mejores resultados en términos de fidelidad promedio. Por otro lado, la primera densidad, Figura 1, no presenta ninguna desviación, lo que la convierte en la opción que proporciona resultados más estables.

Como hemos podido observar, la desviación de la fidelidad desempeña un papel relevante al comparar ambos modelos, ya que proporciona información adicional de gran importancia para realizar una evaluación más rigurosa, y sugiere que en algunas situaciones sería conveniente calcular los demás momentos de la distribución estadística del rendimiento  $\bar{F}$ .

Otro punto destacable es que en la literatura el protocolo cuántico bajo el modelo de ruido que estamos considerando es destacado por tener desviación estándar nula. Sin embargo, si se elimina la restricción de estados puros iniciales, y se consideran distribuciones de estados más generales, podemos ver que la desviación estándar es una función del parámetro de ruido, alzando a superar la varianza del caso clásico. Esto es inquietante puesto que en el caso clásico ocurre lo contrario: la desviación estándar es menor cuando se toma la distribución  $f_p$  de estado puros mientras que aumenta con la mixtura media de los estados iniciales.



### Continuación de la línea de investigación:

- Considerar modelos de ruido más generales y experimentalmente relevantes;
- En este trabajo hemos notado que la fidelidad promedio (o fidelidad de teleportación) en el protocolo clásico, es independiente de la cantidad de operadores  $M_i$  –y de los números  $s_i$ – que definen a la POVM<sup>6</sup>. Ahora bien, todo parece indicar que la desviación sí depende de estos elementos; por este motivo, usualmente se utiliza el protocolo clásico más simple dado por el protocolo óptimo mínimo. Estudiar tal dependencia puede ser relevante para definir un *mejor* protocolo clásico.
- Otra posible cuestión de relevancia es analizar si, ante modelos de ruido particulares que afectan las correlaciones cuánticas en el estado recurso, cambiar la medición  $M_i$  habitualmente tomada como la base de Bell puede arrojar mejores resultados en promedio y en desviación del rendimiento  $\bar{F}$ .

---

<sup>6</sup>Esto fue señalado por primera vez en [13]

## Referencias

- [1] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum computation and quantum information* (Cambridge University Press, New York, 2010).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. it Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Physical Review* **47**, 777 (1935). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.47.777>
- [3] R. Valivarthi et al. *Teleportation Systems Toward a Quantum Internet*. *PRX Quantum* **1**, 020317 (2020). <https://journals.aps.org/prxquantum/abstract/10.1103/PRXQuantum.1.020317>
- [4] D. Bouwmeester et al. *Experimental quantum teleportation*. *Nature* **390**, 575 (1997). <https://www.nature.com/articles/37539>
- [5] H. Fan et al. *Quantum Cloning Machines and the Applications*. *Physics Reports* **544**, 241 (2014). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157314002099?via%3Dihub>
- [6] J.-G. Ren et al. *Ground-to-satellite quantum teleportation*. *Nature* **549**, 70 (2017). <https://www.nature.com/articles/nature23675>
- [7] J. Liu et al. *Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **53**, 1 (2020). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/ab5d4d>
- [8] S. Pirandola et al. *Advances in Quantum Teleportation*. *Nature Photonics* **9**, 641 (2015). <https://www.nature.com/articles/nphoton.2015.154>
- [9] J. Bang, J. Ryu and D. Kaszlikowski. *Fidelity deviation in quantum teleportation*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **51**, 135302 (2018). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/aaac35>
- [10] P. Horodecki, M. Horodecki and R. Horodecki. *General teleportation channel, singlet fraction and quasi-distillation*. *Physical Review A* **60**, 1888 (1999). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.60.1888>
- [11] A. Ghosal et al. *Fidelity deviation in quantum teleportation with a two-qubit state*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **53**, 145304 (2020). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/ab6ede>
- [12] D.G. Bussandri, M. Portesi and A.P. Majtey. *Revisiting maximal average fidelity of teleportation*. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **592**, 126853 (2022). <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378437121010037>
- [13] G. Vidal et al. *Optimal minimal measurements of mixed states*. *Physical Review A* **60**, 126 (1999). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.60.126>

- [14] M.J.W. Hall. *Random quantum correlations and density operator distributions*. Physics Letters A **242**, 123 (1998). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037596019800190X>
- [15] C. de Ronde. *Quantum Superpositions and the Representation of Physical Reality Beyond Measurement Outcomes and Mathematical Structures*. Foundations of Science **23**, 621 (2018). <http://link.springer.com/10.1007/s10699-017-9541-z>
- [16] J. Weidmann, J. Szücs and J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*. Graduate texts in Mathematics 68. (Springer, New York, 2013).
- [17] M.A. Nielsen and J. Kempe. *Separable states are more disordered globally than locally*. Physical Review Letters **86**, 5184 (2001). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.86.5184>
- [18] G. Jaeger. *Entanglement information and the interpretation of quantum mechanics* (Springer Verlag, Berlin, 2009).
- [19] P. Hu et al. *Student Understanding of the Bloch Sphere*. European Journal of Physics **45**, 025705 (2024). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/ad2393>
- [20] A. Hnilo. *The distinctive symmetry of Bell states*. <https://arxiv.org/abs/2308.07274>
- [21] L. Gyongyosi and S. Imre *Properties of the Quantum Channel*. <https://arxiv.org/abs/1208.1270>
- [22] S. Popescu. *Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality?*. Physical Review Letters **72**, 797 (1994). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.72.797>
- [23] K. Matsumoto. *Uhlmann's parallelism in quantum estimation theory*. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9711027>
- [24] C.H. Bennett et al. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Physical Review Letters **70**, 1895 (1993). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1895>
- [25] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of quantum states: An introduction to quantum entanglement*. (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [26] J. Maziero. *Computing partial traces and reduced density matrices*. International Journal of Modern Physics C **28**, 1750005 (2017). <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S012918311750005X>

## A. Apéndice

### A.1. Estrategia Ingenua

La estrategia ingenua es una estrategia que llevamos a cabo para entender los límites inferiores de la fidelidad de teleportación. Con ella vamos a preparar estados  $\tilde{\rho}_i$  de tal manera que no tengamos en cuenta el resultado de la medición de Alice. Por lo que el proceso es el siguiente, Alice una vez que tenga su estado preparado va a realizar una única medición sobre el estado  $\rho(\vec{u})$ , una vez hecha la medición va a comunicarle a Bob lo que obtuvo y a partir de ahí Bob va a proceder de tres maneras diferentes:

- Bob prepara siempre lo mismo, sin depender de Alice
- Bob prepara es estado ortogonal a Alice
- Bob prepara el estado opuesto a Alice

Vamos a dividir este aparatado en función de si el estado de Alice  $\rho(\vec{u})$  es un estado puro o uno mixto, en función de eso veremos para que caso nos ofrece peores resultados.

**Estados puros** Para este apartado vamos a considerar que el estado que Tiene Alice es un estado puro y que llevamos a cabo el protocolo óptimo mínimo. Teniendo esto en cuenta la expresión de la fidelidad queda

$$\bar{F}(\rho) = \frac{1}{4} \sum_1^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \vec{d}_i \cdot \vec{g}_i \right).$$

Una vez obtenida esta expresión tenemos que llevar a cabo las tres posibles estrategias que puede llevar a cabo Bob.

- Bob prepara siempre lo mismo, sin depender de Alice

Cuando llevamos a cabo esta estrategia estamos dando a entender que Bob prepara siempre el mismo estado  $\tilde{\rho}(\vec{g})$  independientemente de lo que le haya dicho Alice, por lo que siguiendo la expresión de la fidelidad promedio (29) obtenemos

$$\bar{F}(\rho) = \frac{1}{4} \left( 2 + \frac{1}{3} \sum_1^2 \vec{d}_i \cdot \vec{g} \right) = \frac{1}{2},$$

debido a seguir el protocolo óptimo mínimo la suma del producto de los vectores de Bloch se cancela, dejándonos únicamente el primer término.

- Bob prepara el estado ortogonal a Alice

En este procedimiento Bob toma la medida de alicia y prepara siempre un estado que sea ortogonal al que obtuvo Alice en su medición, de tal manera que  $\vec{d}_i \perp \vec{p}_i$  por lo que el producto vectorial entre esos dos vectores va a dar como resultado cero, esto conlleva que la fidelidad promedio tenga la siguiente expresión

$$\bar{F}(\rho) = \frac{1}{4} \left( 2 + \frac{1}{3} \sum_1^2 \vec{d}_i \cdot \vec{g}_i \right) = \frac{1}{2}.$$

- Bob prepara el estado opuesto a Alice

En este procedimiento Bob va a preparar el estado totalmente opuesto al que obtuvo Alice en su medición, debido a esto el producto vectorial entre ambos vectores de Bloch va a dar como resultado menos uno, por lo que la fidelidad promedio quedara reescrita como

$$\langle \bar{F}(\rho) \rangle = \frac{1}{4} \left( 2 + \frac{1}{3} \sum_1^2 \vec{d}_i \cdot \vec{g}_i \right) = \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

como observación rápida podemos ver que todas las opciones presentan una fidelidad menor que en anteriores casos sin embargo sorprende que tengan una fidelidad tan alta para el procedimiento que estamos realizando. También podemos ver que el peor de los casos posibles resulta cuando Bob resulta tomar como vector de Bloch el opuesto al que Alice midió.

**Estados mixtos** A diferencia que el apartado anterior aquí vamos a considerar que el estado que tiene Alice  $\rho(\vec{u})$  es un estado mixto, no obstante vamos a seguir utilizando el protocolo óptimo mínimo.

Por otro lado en este apartado únicamente vamos a considerar el caso en el que Bob prepara siempre el mismo estado  $\tilde{\rho}(\vec{g})$ , por lo que en este caso siguiendo la Ec. (26) obtenemos la siguiente expresión para la fidelidad promedio,

$$\langle \bar{F}(\rho) \rangle = \int_0^1 du f(u) \sum_1^2 \pi u^2 s_i^2 \left( 1 + \frac{u^2}{3} \vec{d}_i \cdot \vec{g} + \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-g^2} \right),$$

aplicando las condiciones que impone el protocolo óptimo mínimo vemos que podemos simplificar dicha expresión obteniendo así,

$$\langle \bar{F} \rangle (\rho) = \int_0^1 du f(u) 2\pi u^2 \left( 1 + \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-g^2} \right).$$

Para resolver esto nos haría falta la densidad de probabilidad por lo que vamos a utilizar las mismas que usamos en el apartado anterior, Ecs. (4)–(5). Vamos a sustituir cada uno de las densidades obteniendo así los siguientes resultados,

$$\begin{aligned} \langle \bar{F}_m(\rho) \rangle &= \int_0^1 du f_m(u) 2\pi u^2 \left( 1 + \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-g^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{32} \sqrt{1-g^2}, \\ \langle \bar{F}_r(\rho) \rangle &= \int_0^1 du f_r(u) 2\pi u^2 \left( 1 + \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-g^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3\pi} \sqrt{1-g^2}. \end{aligned}$$

A primer vistazo podemos ver en los dos casos que la fidelidad depende del modulo del vector de Bloch del estado que Bob prepara, g, siendo lo mejor que puede preparar Bob un estado máximamente mixto, es decir con modulo de g igual a cero. Por otro lado si Bob prepara un estado puro la fidelidad promedio nos saldría igual que en el apartado anterior.

En la siguiente gráfica representamos la solución previamente obtenida para los distintos valores del modulo de g

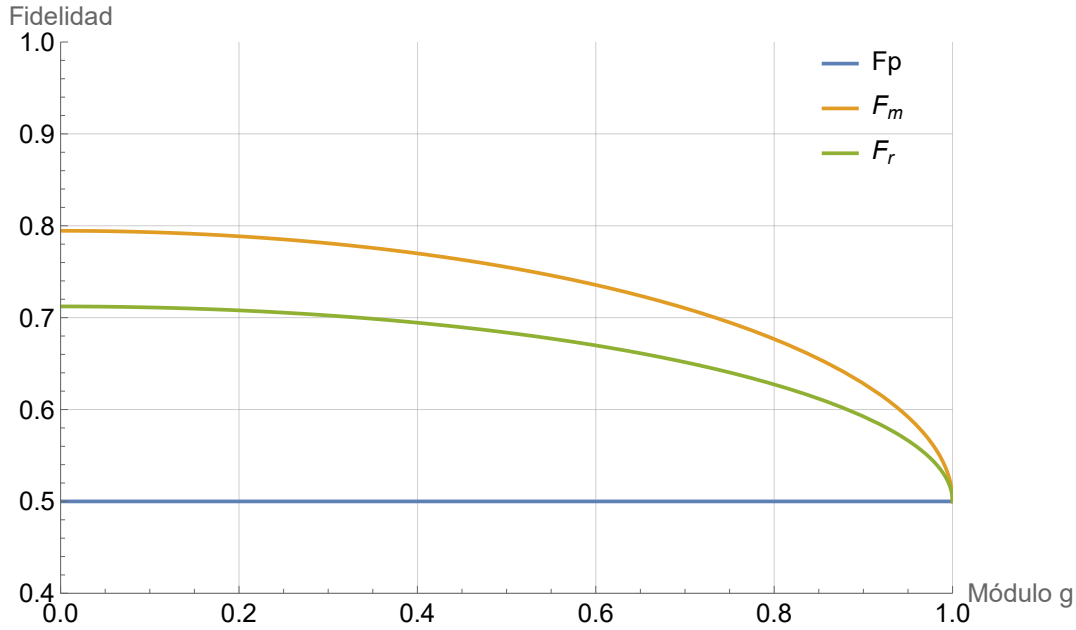


Figura 4: Fidelidades promedio para estados mixtos con densidad de probabilidad  $f_m(u)$  y  $f_r(u)$

Como ya mencionamos anteriormente lo mejor que puede hacer Bob en este caso es generar un estado máximamente mixto, es decir la identidad. Al comparar estos resultados con los obtenidos para el protocolo clásico, Figs. 1 - 3 destacan las siguientes cosas:

1. **Estados mixtos** Cuando trabajamos con estados mixtos la mejora que ofrece el protocolo clásico frente a la estrategia ingenua es casi despreciable siendo esta:
  - Para densidad  $f_m(u)$ : 0.795 para la estrategia ingenua y 0.811 para el protocolo clásico.
  - Para densidad  $f_r(u)$ : 0.712 para la estrategia ingenua y 0.746 para el protocolo clásico.
2. **Estados puros** Sin embargo cuando trabajamos con estados puros la mejora ofrecida por el protocolo clásico es muy destacable siendo esta 0.5 para la estrategia ingenua y  $2/3$  para el protocolo clásico.

En conclusión cuando los estados pueden ser mixtos el canal clásico extrae menos información mientras que si los estados son puros extrae más información.