Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Formalismo BF de la gravedad:

Trabajo Fin de Grado

Autor: Iván Navarro Obregón

Dirigido por: José Manuel Izquierdo Rodríguez

Fecha: Junio de 2025

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer ante todo a mis padres los cuales me han brindado no solo la oportunidad de cursar estos estudios que me apasionan, sino también por su apoyo incondicional. También quiero agradecer a mi hermano, que ha supuesto todo un ejemplo a seguir no solo en la carrera sino en la vida.

También quiero dedicar este trabajo a todos los compañeros de clase que he conocido durante la carrera, los cuales me han acompañado durante estos maravillosos años. También a los profesores que me han formado y ayudado a completar esta carrera.

Por otra parte, quiero agradecer a todos los amigos que me han apoyado y ayudado a que hoy esté en esta situación. En particular, quiero dar las gracias a Francisco, Beatriz, Laura, Miguel, Silvia y Nicolás. Sin vosotros no hubiera sido posible.

Por último, quiero agradecer a dos personas muy especiales para mi que llevo en el corazón, David y Paula. Vuestro apoyo y cariño es lo que me ha permitido seguir hacia delante. Sin vosotros nada de esto merecería la pena. Espero teneros a mi lado en todos mis próximos proyectos y vivencias.

Gracias a todos vosotros.

Capítulo 1

Introducción

"*Mire profundamente en la naturaleza, y entonces usted entenderá todo mejor.*"

Albert Einstein

1.1. Introducción histórica

La mecánica Newtoniana ha supuesto el marco teórico mas importante en la historia de la Física. A día de hoy, este formalismo sigue siendo de gran utilidad, en diferentes aspectos tanto teóricos como tecnológicos. Sin embargo, para poder describir correctamente el universo, se necesita ir mas allá de esta teoría, ya que hay situaciones en la que ya no se puede aplicar. Es así como nace la relatividad especial.

A principios del siglo XX, existían varios fenómenos que no se podían explicar. La más importante era la incompatibilidad entre las leyes de Newton y la electromagnetismo de Maxwell. Esto conllevaría a una de las mayores revoluciones dentro de la física

En 1905, Albert Einstein publicó una serie de artículos, entre los que se encontraba "On the Electrodynamics of Moving Bodies" el cual sentó las bases de la conocida relatividad especial. Einstein postuló que las leyes de la física son todas iguales para cualquier observador inercial. Además considero que la velocidad de la luz era una constante e independiente del observador. Esta teoría introdujo y reformuló conceptos como el espacio-tiempo o la simultaneidad.

Sin embargo, toda la teoría no tenía en cuenta las consecuencias que tenia considerar la gravedad. Así es como Einstein, durante los próximos 10 años, publicó una serie de artículos, en los que establecía la llamada relatividad general, que trataba el asunto de la gravedad dentro de la relatividad. Motivado por el principio de equivalencia, concibió una visión geométrica de la gravedad. Estableció la relación entre la masa y la energía y el espacio-tiempo o la equivalencia entre masa inercial y masa gravitacional. Estos razonamientos permitieron explicar el perihelio de Mercurio y la deflexión de la luz por la gravedad. También predijo las ondas gravitacionales o los agujeros negros.

La relatividad general supone una gran herramienta. Permite explicar toda la cosmología, la expansión del universo y otros muchos fenómenos. Sin embargo la teoría que estableció Einstein no es suficiente. Se necesitan hacer mejoras. Es así como nacen nuevas teorías que intentan mejorar el trabajo realizado por Einstein. Entre ellas encontramos teorías de campo modificadas de la gravedad, teorías unificadas que buscan unir todas las fuerzas elementales o teorías de gravedad cuántica, entre otros. Estas últimas son especialmente interesantes, ya que intentan unificar la relatividad general con la mecánica cuántica. Entre estas se encuentran la supergravedad, la gravedad cuántica de bucles o la teoría BF.

En este TFG vamos a tratar la teoría BF, comenzando con una serie de conceptos y formalismos previos a cerca de la relatividad general que nos va a permitir estudiar esta teoría. La parte matemática subyacente a la teoría se desarrollo bastante antes. Entre las décadas de 1970 y 1990, los trabajos de Plebanski y Ashtekar vieron su aplicación física. En 1977 Plebanski publicó un trabajo en el que discutía la posibilidad de describir el campo gravitatorio mediante un campo que representaba una variable fundamental. Resulta que la gravedad se puede entender como una formulación BF con restricciones al campo mencionado (o exacta si es el caso de 3D). Esto dota a la teoría de una dinámica local.

Ashtekar consideró nuevas variables para la gravedad, que permitía reformular la relatividad general como una teoría gauge. Simplificó la formulación hamiltoniana mediante el uso de variables canónicas complejas.

En 2011, Krasnov formuló esta teoría unicamente en función de conexiones. Esto le ha llevado a pensar que la acción de Plebanski puede generalizarse a las llamadas teorías de la gravedad no métricas.

1.2. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein son un conjunto de ecuaciones diferenciales, no lineales y acopladas, que caracterizan el modelo de interacción gravitatoria. Describen las relaciones entre la materia presente en el espacio-tiempo y curvatura del mismo.

Toda la geometría del espacio tiempo está contenida en el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, un tensor de segundo orden. Nos permite medir (longitudes, ángulos, etc.), definir trayectorias y calcular intervalos espacio-temporales. El tensor métrico debe poderse diagonalizar localmente en $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+---)$, la métrica de Minkowski. La geometría es pseudo-riemanniana por no ser la métrica definida positiva.

Las conexiones, $\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}$, se definen sobre variedades diferenciales. En un espacio curvo se puede definir un espacio tangente en cada punto. Existe una base coordenada e_α sobre un sistema de coordenadas x^α, definido por $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. La conexión muestra como cambia los vectores de la base al cambiar de punto en el espacio:

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, e_\mu \,. \tag{1.1}$$

Es importante aclarar que no es realmente una derivada parcial ordinaria, sino una derivación que queda determinada por la forma en que actúa sobre los campos vectoriales, quedando definida la conexión. Permiten definir la derivada covariante de un tensor. Además, las podemos relacionar con el tensor de curvatura.

En general, no tiene porque haber una relación entre el tensor métrico y la conexión. Las conexiones afines no necesitan una métrica. Sin embargo, en toda variedad existe una conexión, la conexión de Levi-Civita, la cual sí esta relacionada con la métrica mediante:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right). \tag{1.2}$$

Esta conexión cumple dos propiedades muy importantes:

1. Es simétrica: $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$, lo que conlleva que la torsión sea cero.
2. La denominada "*compatibilidad con la métrica*": $D_\mu g_{\nu\rho} = 0$.

A partir de la conexión, podemos definir un nuevo tensor, el tensor de curvatura. En general, al transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada, el vector trasportado no es igual al inicial. Esto indica que se trabaja sobre una variedad métrica curva. Este tensor muestra cuanta curvatura tiene la variedad. Se define como:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{1.3}$$

Existen muchas maneras de llegar a este resultado. Una de ellas es utilizando las derivadas contravariantes, las cuales vienen definidas por:

$$\nabla_\mu T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s} = \partial_\mu T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s} + \sum_{i=1}^{r} \Gamma^{\alpha_i}_{\mu\lambda} T^{\alpha_1 \ldots \lambda \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s} - \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta_j} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \lambda \ldots \beta_s}. \tag{1.4}$$

El conmutador de dos derivadas covariantes actuando sobre un vector genérico V^ρ nos dice como cambia un vector al ser trasportado primero en una dirección y después en otra con respecto al hacerlo en el sentido contrario. Si el vector cambia quiere decir que estamos en una variedad curva. Por lo tanto, esta operación nos da la expresión del tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ &= \left[\partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\right] V^\sigma = \\ &= R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Contrayendo 2 indices del tensor de curvatura se obtiene el tensores de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{1.6}$$

Utilizando la métrica, obtenemos la curvatura escalar:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Queda una última pieza para poder enunciar las ecuaciones de Einstein. EL tensor de energía momento describe la distribución de materia y energía y su flujo atreves del espacio-tiempo. En la teoría electromagnética, las fuentes del campo electromagnético son el tensor J^μ, formado por las cargas y las corrientes. En el caso gravitatorio, la fuente es $T_{\mu\nu}$, ya que contiene los términos de masa, energía, presión, momento lineal etc. Es el causante de la curvatura del espacio-tiempo. Recordando la celebre frase de Wheeler "*La materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse.*"

Con todo esto definimos las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \,, \tag{1.8}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein.

Esta ecuación fue publicada por Albert Einstein en 1915. Para llegar a ella tuvo en cuenta una serie de argumentos físicos para que fuera congruente con la física ya establecida. EL tensor energía momento debe de ser simétrico. Es decir, tenía que estar igualado a otro tensor simétrico. En un principio consideró igualarlo al tensor de Ricci. Sin embargo, esto no cumple la conservación de la energía y del momento. Para tener conservación de la energía, debe cumplirse que $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Para ello, la parte geométrica también debe de tener divergencia nula. Es decir, $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$. De esta manera, se llega a que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, cuya divergencia es nula.

Analicemos el caso particular cuando $T_{\mu\nu} = 0$, es decir, cuando estemos en el vació y no haya materia ni ningún tipo de fuente. Operando la expresión (1.8) se llega a que $R_{\mu\nu} = 0$. Lo que supone que estemos en un espacio-tiempo plano, al no haber curvatura. En esta situación la métrica es la métrica de Minkowski de forma global, y no solo localmente. Tiene consecuencias físicas importantes. En un mundo con espacio-tiempo plano, no existe la interacción gravitatoria. Esta regido por la relatividad especial. Las partículas describen lineas rectas, ya no son geodésicas curvas. El espacio de Minkowski es invariante bajo el grupo de Poincaré, dejando el intervalo $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ invariante. El grupo de Poincaré es un grupo de Lie, siendo el producto semidirecto de las traslaciones y las transformaciones de Lorentz.

1.3. La acción de Einstein-Hilbert

El principio de mínima acción es una pieza clave en el desarrollo de las teorías de campos. Permite analizar la situación física de distinta manera. Además, cuenta con una serie de herramientas matemáticas que lo dotan de gran utilidad en la Física moderna.

EL principio de mínima es la formulación mas general de las ecuaciones del movimiento. Este principio establece que de todas las trayectorias posibles, solo la que haga la acción extremal será la que suceda. La acción debe ser extremal, $\delta S = 0$. Realizando variaciones de la acción se obtienen las ecuaciones del movimiento. Los distintos modelos de la relatividad general parten de distintas acciones que reproducen las teorías correspondientes. En nuestro caso usaremos la acción estándar de Einstein-Hilbert. [1]

La acción de Einstein-Hilbert se define como:

$$S_{\mathrm{EH}}[g] = \frac{c^3}{16\pi G_N^{(d)}} \int_{\mathcal{M}} d^d x \, \sqrt{-g} \; R(g) \,, \tag{1.9}$$

donde M es la variedad d-dimensional, $G_N^{(d)}$ la constante de Newton d-dimensional y c la velocidad de la luz.

[1] la acción aparece también para calcular la integral de caminos, un elemento importante de la teoría cuántica de campos

Einstein y Hilbert presentaron coetáneamente esta fórmula. En palabras de Hilbert “I believe that [my paper] contains simultaneously the solution of the problems of Einstein and of Mie."

El tensor de curvatura tiene derivadas segundas de la métrica, por lo que la acción también depende de la derivada segunda de $g_{\mu\nu}$ Vamos a variar la acción. Para ello necesitamos un par de herramientas matemáticas:

1. La identidad de palatini, que muestra la variación del tensor de Ricci:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\rho_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \,. \tag{1.10}$$

2. La formula de Jacobi, que determina la derivada del determinante de una matriz:

$$\delta \det g = g \cdot g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} \,. \tag{1.11}$$

La variación de la acción será por tanto:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\mathcal{M}} d^dx\, \delta(\sqrt{|g|}\, R(g)) = \int_{\mathcal{M}} d^dx(\,\delta(\sqrt{|g|}\,)R \ + (\sqrt{|g|}\,)\delta R) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^dx(\,\delta(\sqrt{-g}\,)R \ + (\sqrt{-g}\,)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \ (\sqrt{-g}\,)\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})\,, \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde se ha utilizado la definición del tensor de Ricci (1.7).

Para obtener la variación de la raíz de la métrica se utiliza la ecuación (1.11) y la regla de la cadena:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g} \cdot g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} \,. \tag{1.13}$$

Usando la ecuación (1.10) y la compatibilidad con la métrica (para introducir la métrica dentro de la identidad de Palatini), obtenemos:

$$\int_{\mathcal{M}} d^dx(\,\frac{-1}{2}\sqrt{-g} \cdot g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} R \ + \ \sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\,(\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\alpha g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\nu\mu}))\,. \tag{1.14}$$

Agrupando terminos y sacando factor común:

$$\int_{\mathcal{M}} d^dx\sqrt{-g}((\,\frac{-1}{2} \cdot g_{\mu\nu}\, R \ + \ R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\alpha g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\nu\mu}))\,. \tag{1.15}$$

Esta expresión la igualamos a cero para cumplir el principio de mínima acción. Vemos que el primer término ya son las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto, el segundo término debe anularse. Será cero debido a que al ser una derivada exacta, el teorema de Stokes solo contribuirá el termino de frontera en el infinito el cual debe anularse por las condiciones de contorno. Veamos lo:

Podemos definir el segundo termino $\nabla_\alpha V^\alpha$como:

$$V^\alpha = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\nu\mu} \,. \tag{1.16}$$

Tenemos el elemento de volumen $d^dx\sqrt{-g}$ (ya que en una variedad curva la métrica afecta a las distancias, por lo que se necesita una corrección). El termino segundo queda por tanto $\int_{\mathcal{M}} d^dx\sqrt{-g}\,\nabla_\alpha V^\alpha$, que contiene una derivada exacta (ya que $\sqrt{-g}\nabla_\alpha V^\alpha \propto \partial_\alpha(\sqrt{-g}V^\alpha)$).

En esta expresión se puede aplicar el teorema de Stokes, quedando $\partial\mathcal{M}$ como región de integración. Es decir, obtenemos la integral de la función evaluada en el contorno, el cual se hace tender a infinito. Este termino debe hacerse cero para obtener las ecuaciones de Einstein. Pero no basta con fijar $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial V} = 0$ (para que las variaciones de la métrica se anulen en la frontera), también hay que fijar que su derivada también lo hace, $\partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu})|_{\partial V} = 0$. Anulando este término con las condiciones de contorno se obtiene:

$$\int_{\mathcal{M}} d^dx\sqrt{-g}((\frac{-1}{2}\cdot g_{\mu\nu}\, R \ + R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} = 0\,. \tag{1.17}$$

Como debe cumplirse para toda variación de la métrica, la igualdad nos lleva a la ecuación de Einstein (1.8) para $T_{\mu\nu} = 0$

Existen diferentes formas de lidiar con las condiciones de contorno, sin necesidad de tener que asumir ciertas condiciones. Lo más común es añadir los términos de frontera de Gibbons-Hawking-York. Esta forma consiste en añadir un nuevo término a la acción, que anula los términos de la derivada de la variación de la métrica. Por lo tanto solo hace falta fijar $\delta g^{\mu\nu} = 0$. Esta nueva acción tiene la forma:

$$S_{\text{EH}}[g] = \frac{1}{\chi^2}\int_{\mathcal{M}} d^dx\sqrt{|g|}\,R + (-1)^d\frac{2}{\chi^2}\int_{\partial\mathcal{M}} d^{d-1}x\,\Sigma\,\mathcal{K}\,, \tag{1.18}$$

donde χ es una constante de normalización y $\mathcal{K}$ la curvatura extrínseca en la frontera.

Para conseguir las ecuaciones de Einstein generales, debemos incluir en la acción un término de materia, $S_M = \int_{\mathcal{M}} L_M$, siendo L_M el lagrangiano de materia:

$$\int_{\mathcal{M}} d^dx\sqrt{-g}((\frac{-1}{2}\cdot g_{\mu\nu}\, R \ + R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\cdot L_M)}{\sqrt{-g}})\,. \tag{1.19}$$

Identificando con la ecuación (1.8), el tensor energía momento será:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}\frac{\delta(\sqrt{-g}\cdot L_M)}{\sqrt{-g}}\,. \tag{1.20}$$

1.4. Formalismo de Palatini

Como se dijo anteriormente, la conexión y la métrica pueden o no estar relacionados. El formalismo de Palatini establece la forma mas general de la conexión, en la que existe una independencia entre ambas. Recordemos que la conexión Levi-Civita viene dada por (1.2), es decir, en este formalismo la conexión no puede ser, en principio, Levi-Civita. Una de las propiedades de esta conexión es que la torsión era libre. Aunque no sea esta conexión, se asume que la torsión sigue siendo libre.

Con este formalismo, se obtendrá una ecuación que determina la ecuación de la conexión. Añadiendo ligaduras y condiciones, se pueden conseguir ciertas conexiones, incluida Levi-Civita. A pesar de que todas las conexiones que se pueden obtener son formalmente diferentes, todas pueden reproducen la misma física (en ciertos aspectos) y se pueden considerar igual de válidas en multitud de situaciones. La adicción de campos de materia no va a modificar este hecho.

Esto hace que en ocasiones, se pueda trabajar con la conexión Levi-Civita, como en el caso de la acción de Einstein-Hilbert. En otros casos, usar esta conexión supone añadir ligaduras extras que pueden afectar al marco teórico. Por ejemplo, al acoplar el campo de Dirac, en el que si existe torsión debido al espín.

Al ser la conexión y la métrica independientes, el tensor de Ricci depende solo de la conexión, luego toda la dependencia con la métrica es explícita. Solo hay derivadas (lineales) de la conexión. La variación de la acción respecto de la métrica y de la conexión nos dará dos ecuaciones de movimiento. Una de ellas será el equivalente de las ecuaciones de Einstein y la otra nos dará la forma de la conexión.

Ahora, la acción pasa a tener dos variables:

$$S[g_{\mu\nu,\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}] = \int d^d x \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)\,. \tag{1.21}$$

Ya no se puede aplicar el teorema de Stokes al ser la conexión una variable. Variamos la acción como antes, siguiendo los mismos pasos, pero ahora usamos la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \sqrt{|g|} \left\{ \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + g^{\mu\nu} \left[\nabla_\mu \delta\Gamma^{\rho}_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - T^{\sigma}_{\mu\rho} \delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} \right] \right\} \\ &= \sqrt{|g|} \int d^d x \left\{ \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + \nabla_\rho \left[(g^{\rho\nu} \delta^{\mu}_{\sigma} - g^{\mu\nu} \delta^{\rho}_{\sigma}) \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \right] \right. \\ &\qquad \left. + \left[\nabla_\sigma g^{\mu\nu} - g^{\lambda\nu} T^{\mu}_{\lambda\sigma} - \nabla_\rho g^{\rho\nu} \delta^{\mu}_{\sigma} \right] \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \right\}\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Integrando por partes y utilizando la definición de derivada covariante:

$$\begin{aligned} &\int d^d x \sqrt{|g|} \left\{ \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + T^{\alpha}_{\rho\alpha} \left[(g^{\rho\nu} \delta^{\mu}_{\sigma} - g^{\mu\nu} \delta^{\rho}_{\sigma}) \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \right] \right. \\ &\qquad \left. + \left[\nabla_\sigma g^{\mu\nu} - g^{\lambda\nu} T^{\mu}_{\lambda\sigma} - \nabla_\rho g^{\rho\nu} \delta^{\mu}_{\sigma} \right] \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \right\}\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ya tenemos la variación de la acción. Ahora la variamos con respecto a las variables:

1. En la variación con respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$ se obtiene el equivalente de la ecuación de Einstein si la conexión fuese Levi-Civita.

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = 0. \tag{1.24}$$

2. La variación con respecto de la conexión $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ da la forma funcional de la misma:

$$\sqrt{|g|}(\nabla_\alpha g^{\mu\nu} - \nabla_\rho g^{\rho\nu} \delta^{\mu}_{\alpha} - g^{\lambda\nu} T^{\mu}_{\lambda\alpha} + g^{\rho\nu} \delta^{\mu}_{\alpha} T^{\delta}_{\rho\delta} - g^{\mu\nu} T^{\delta}_{\alpha\delta}) = 0 \tag{1.25}$$

La conexión cumple que es invariante bajo un shift de un vector general, v_μ:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \to \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + v_\mu \delta^{\rho}_{\nu}\,. \tag{1.26}$$

En particular puedes poner que $v_\mu = -\frac{1}{d-1}T^{\sigma}_{\mu\sigma}$ y considerar una nueva conexión $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ que represente el shift realizado. Operando la expresión (1.25), sustituyendo la definición de derivada covariante de la métrica e introduciendo la expresión del shift se llega a una expresión en la que las trazas se han cancelado entre si:

$$\sqrt{|g|}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^{\delta}_{\sigma\mu} g_{\delta\nu} + g_{\mu\delta}\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\sigma\nu} - g_{\mu\nu}\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\sigma\delta}) = 0\,. \tag{1.27}$$

Contrayendo con $\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{|g|}}$ e introduciendo lo en la ecuación (1.27), se obtiene:

$$\partial_\sigma g_{\gamma\varphi} - \tilde{\Gamma}^{\nu}_{\sigma\gamma} g_{\nu\varphi} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\varphi\sigma} g_{\gamma\mu} = 0\,. \tag{1.28}$$

Esta ecuación nos permite relacionar la conexión con la métrica, a pesar de haber supuesto inicialmente que son independientes. Existen multitud de conexiones que cumplen esta relación. Como se menciono en la introducción al formalismo, una de las conexiones que cumple esta ecuación es precisamente la conexión Levi-Civita. Para obtenerla a partir de la ecuación (1.28), debemos añadir las ligaduras de que la métrica sea simétrica y la torsión sea nula (que conlleva $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ y recuperar la condición de compatibilidad métrica).

Este procedimiento se puede realizar también en distintos modelos. Por ejemplo, se puede usar para teorías de gravedad modificada, en el que el tensor de curvatura escalar se sustituye por una función del mismo, $f(R)$. En caso de añadir materia, el termino de acción correspondiente depende solo de la métrica y del campo de materia y no de la conexión.

1.5. Formalismo Tetrádico

Hasta ahora hemos estado trabajando en el espacio-tiempo. En cada punto $(\vec{x}, t)$ de la variedad diferenciable $\mathcal{M}$ podemos definir el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ (es un espacio vectorial). Este espacio es muy importante, ya que los vectores (velocidad, momento etc.) viven en este espacio. Aunque el espacio-tiempo sea curvo, el espacio tangente siempre es plano, por lo tanto, en el está definido la métrica de Minkowski (o cualquiera isomorfa a ella) [2]. Además, cuando se acopla física de partículas, como los espinores, también viven en el espacio tangente. Esto debido a que se pueden definir representaciones del grupo de Lorentz.

El formalismo tetrádico va a lidiar con ambos espacios, va a mapear cada punto del espacio-tiempo al espacio tangente. Los indices espacio-temporales son indices griegos y los del espacio tangente son latinos. Vamos a escoger una base del espacio tangente, $\{e_a\}$ definidos por $e_a = e^{\mu}_{a}\partial\mu$. Esta base esta formada por vectores d-veces contravariantes llamados vielbein[3] (en 4 dimensiones se les denomina vierbein o tetrada).

Hemos utilizado bases coordenadas, las cuales viven en el espacio tangente pero dependen de las coordenadas del espacio-tiempo. La base de vielbein por el contrario no es coordenada. Podemos expresar un vector en esta base $v = v^a e_a$, siendo v^a sus componentes. Podemos relacionar las componentes con la base coordenada:

$$v^\mu = v^a e^{\mu}_{a}\,. \tag{1.29}$$

[2]Recuerde el caso de una esfera, todos los espacios tangentes a ella son planos.

[3]Los vielbein matemáticamente son 1-formas.

Se define la base dual por:

$$< e^a|e_b >= \delta^a_b \,. \tag{1.30}$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, las componentes cumplen:

$$e^a{}_\mu \, e_b{}^\mu = \delta^a_b \quad \Rightarrow \quad e_a{}^\mu \, e^a{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \,. \tag{1.31}$$

Las componentes de los vielbein se utilizan para pasar de indices del espacio-tiempo a indices del espacio tangente y viceversa:

$$g_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu} \,. \tag{1.32}$$

Esto nos permite bajar y subir indices en la base de vielbein. La relación general entre la métrica y los vielbein esta dada por[4]:

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu \, \eta_{ab} \, e^b{}_\nu \,. \tag{1.33}$$

Dado una transformación de Lorentz Λ^a_b (es decir que deja invariante $\eta_{\mu\nu}$), existe otra solución de (1.33) dada por:

$$e^a{}_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^a{}_b \, e^b{}_\mu \,. \tag{1.34}$$

Los vielbein y las magnitudes geométricas obtenidas a partir de ellos deben de utilizarse de forma covariante ante la transformación. Las trasformaciones de Lorentz no son las mismas en un espacio-tiempo curvo que en el espacio plano de Minkowski. Los índices del espacio-tiempo (letras griegas) son inertes, solo se transforman los relacionados con el espacio tangente (letras latinas).

Cualquier vector tiene una expansión única en la base:

$$V^\mu = V^a e^\mu_a, \quad V^a = V^\mu e^a_\mu \tag{1.35}$$

$$V_\mu = V_a e^a_\mu, \quad V_a = V_\mu e^\mu_a \,. \tag{1.36}$$

La derivada covariante estándar actúa sobre el espacio-tiempo. Asegura que los tensores con índices de espacio-tiempo se transformen correctamente bajo cambios de coordenadas. Necesitamos una derivada covariante que actúe sobre los tensores que viven en el espacio tangente con índices latinos. Esta nueva derivada debe respetar las trasformaciones locales de $GL(d, R)$. Para que todo esto se cumpla, se necesita definir una nueva conexión, que actúa en el espacio tangente, w^{ab}_μ, llamada "*conexión de espín*" (llamada así por su actuación en los campos espinoriales). Su utilidad no se limita en este contexto, ya que es muy importante en teorías como la supergravedad, acoplo de espinores a la gravedad y teorías gauge de la gravedad.

Con todo esto podemos definir la derivada covariante que actúa en el espacio tangente:

$$D_\mu T^b_a = \partial_\mu T^b_a + \omega_\mu{}^a{}_c T^c_b - \omega_\mu{}_b{}^c T^a_c \,. \tag{1.37}$$

De manera análoga a lo expuesto en (1.4), se puede obtener la curvatura en función de la conexión de espín:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \, V^b &= \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu V^b - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu V^b \\ &= (2 \, \partial_{[\mu} \omega_{\nu]}{}^a{}_b - 2 \, \omega_{[\mu}{}^a{}_c \, \omega_{\nu]}{}^c{}_b) V^a = \\ &= R_{\mu\nu a}{}^b V^a. \end{aligned} \tag{1.38}$$

[4]Esta ecuación implica que las componentes se tienen que trasformar como un vector covariante bajo difeomorfismos

Podemos definir un tensor el cual nos va a ayudar bastante a compactar las expresiones, los coeficientes de rotación de Ricci $\Omega_{ab}{}^{c}$: [5]

$$\Omega_{ab}{}^{c} = e_a{}^{\mu}\, e_b{}^{\nu}\, \partial_{[\mu} e^{c}{}_{\nu]}\,. \tag{1.39}$$

En las expresiones (1.4) y (1.37) hemos utilizado o solo índices de espacio-tiempo o solo índices del espacio tangente. En caso de que un tensor tenga mezcla de índices, habrá tantas términos con conexión de espín y términos con conexión Levi-Civita como como indices latinos y griegos respectivamente. Por lo tanto, en el caso particular de la derivada covariante del vielbein, se cumple:

$$\mathcal{D}_\mu e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a{}_\nu + \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a{}_\rho - \omega_{\mu b}{}^{a} e^b{}_\nu\,. \tag{1.40}$$

Se introduce dos postulados que ayudan a relacionar ambos espacios geométricamente.

1. Primer postulado del vielbein. Este postulado busca la relación que existe entre la conexión de espín y la conexión Levi-Civita. Se quiere que las derivadas covariantes respeten la estructura del espacio. Partimos de la transformación de un vector en coordenadas a la base local $V^a = e^a{}_\nu V^\nu$. Tenemos dos formas de derivar este vector. Podemos primero derivar en coordenadas y luego proyectar lo al marco local o primero transformar a la base local y derivar con la conexión de espín. Ambas formas tiene que ser compatibles, $D_\mu V^a = e^a{}_\nu \nabla_\mu V^\nu$. Operando se llega a que:
$$\nabla_\mu e^a{}_\nu = 0\,. \tag{1.41}$$
Esto es lo que establece el primer postulando. Al igualar a cero la ecuación (1.40) se obtiene la relación entre las conexiones (multiplicando por la inversa de e^ν_b y usando ortogonalidad:
$$\omega_{\mu a}{}^{b} = e^b{}_\nu \left(\partial_\mu e^\nu{}_a + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} e^\lambda{}_a\right)\,. \tag{1.42}$$

2. El segundo postulado consiste en usar la condición de compatibilidad métrica y la ecuación (1.33) obteniendo:
$$0 = \nabla_\rho g_{\mu\nu} = \nabla_\rho \left(\eta_{ab}\, e^a{}_\mu\, e^b{}_\nu\right) = -\omega_{\rho ba} - \omega_{\rho ab}\,.$$
Implica que la conexión de espín es antisimetrica en sus indices latinos [a,b] (de esta manera la conexión es compatible con la geometría de Minkowski)
$$\omega_{\rho ab} = -\omega_{\rho ba}\,. \tag{1.43}$$

Con todo esto, podemos obtener diversos resultados interesantes. En primer lugar, podemos relacionar la curvatura dependiente de la conexión métrica con la curvatura dependiente de la conexión de espín. Usando el primer postulado del vielbein (1.42) se obtiene:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}(\Gamma) = e^a{}_\rho\, e_b{}^{\sigma}\, R_{\mu\nu a}{}^{b}(\omega)\,. \tag{1.44}$$

Si queremos expresar el tensor de curvatura completamente en el espacio tangente (todos los índices latinos):

$$R_{abc}{}^{d} = 2\partial_{[a}\omega_{b]c}{}^{d} - 2\omega_{[a|c}{}^{e}\omega_{|b]e}{}^{d} + 2\Omega_{ab}{}^{e}\omega_{ec}{}^{d}. \tag{1.45}$$

[5] La expresión se obtiene a partir del corchete de Lie de 2 vielbein $[e_a, e_b]$

El primer postulado también relaciona la torsión con el vielbein, tomando la parte antisimétrica de (1.41):

$$2\mathcal{D}_{[\mu}e^a_{\nu]} = -T^a_{\mu\nu} = 2(\partial_{[\mu}e^a_{\nu]} - \omega_{[\mu}{}^a{}_{\nu]})\,. \tag{1.46}$$

Si imponemos que la torsión sea cero, obtenemos una relación entre la conexión de espín y los vielbein:

$$\omega_\mu{}^{ab} = \frac{1}{2}e^{a\nu}\left(\partial_\mu e^b_\nu - \partial_\nu e^b_\mu\right) - \frac{1}{2}e^{b\nu}\left(\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu\right) - \frac{1}{2}e^{a\rho}e^{b\sigma}\left(\partial_\rho e_{c\sigma} - \partial_\sigma e_{c\rho}\right)e^c_\mu\,, \tag{1.47}$$

que identificando los terminos con los coeficientes de rotación de Ricci (1.39) se expresa como[6]:

$$\omega_{\mu\nu\rho}(e) = \frac{1}{2}\left(\Omega_{[\mu\nu]\rho} - \Omega_{[\nu\rho]\mu} + \Omega_{[\rho\mu]\nu}\right)\,. \tag{1.48}$$

De forma general, cuando hay torsión, se añade un término, llamado contorsión definido por:

$$K_{\mu[\nu\rho]} = -\frac{1}{2}(T_{[\mu\nu]\rho} - T_{[\nu\rho]\mu} - T_{[\rho\mu]\nu})\,, \tag{1.49}$$

con lo que la conexión de espín se expresa como:

$$\omega_{\mu[\nu\rho]} = \omega_{\mu[\nu\rho]}(e) + K_{\mu[\nu\rho]}\,. \tag{1.50}$$

Por último, el tensor de Ricci en la base local viene definido por:

$$R_{ab} = -\partial_a\omega_c{}^c{}_b - \partial_c\omega_{ab}{}^c + \omega_{cda}\omega^{dc}{}_b + \omega_{abd}\omega_c{}^{cd}\,. \tag{1.51}$$

1.6. Introducción a las formas diferenciales

Las formas diferenciales son objetos matemáticos de gran utilidad. Tienen gran utilidad en geometría y cálculo, generalizando muchos conceptos de estas áreas. Permiten definir integrales en dimensión n y hacer calculo diferencial en cualquier geometría, como por ejemplo una geometría curva. Es por ello por lo que es importante en relatividad general, dotando a la teoría de una estructura geométrica. El principal autor fue Elie Cartan, el cual introdujo la noción de derivada exterior de una forma diferencial y adoptando la notación diferencial.

Sea M una variedad y $\tau(M)$ su fibrado tangente. Sea x^i unas coordenadas locales, se define un vector covariante o uno-forma, ω, de M por:

$$\omega(x) = \omega_i(x)dx^i\,. \tag{1.52}$$

Una n-forma o un tensor antisimétrico de rango n que forma un espacio que llamamos $\Lambda^n(M)$, cuyos elementos se definen (expresando lo en las coordenadas locales x^i) como:

$$\omega(x) = \omega_{i_1\ldots i_n}(x)dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_n}\,, \tag{1.53}$$

[6] El corchete $[\mu\nu]$ indica que los indices son antisimétricos

donde las coordenadas $\omega_{i_1 \dots i_n}(x)$ son antisimétricas en todos sus índices [7] y $\otimes$ se refiere al producto tensorial de 1-formas, definido de la siguiente manera:

$$dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_n}(X_1, \dots X_n) = dx^{i_1}(X_1) \dots dx^{i_n}(X_n) \,. \tag{1.54}$$

EL símbolo de Levi-Civita es un objeto algebraico (no un tensor) el cual toma los siguientes valores:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ es una permutación par de } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{si hay índices repetidos} \end{cases} \tag{1.55}$$

La combinación de dos símbolos de Levi-Civita, $\epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n}$ da como resultado el símbolo de Kronecker totalmente antisimétrico $\epsilon^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n}$ (implica que $dx \wedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx$)

De esta manera, podemos escribir la n-forma de otra manera:

$$\omega(x) = \frac{1}{n!} \omega_{i_1 \dots i_n}(x) \epsilon^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_n} \,. \tag{1.56}$$

El producto exterior (o producto cuña) permite medir volúmenes orientados en el espacio. Este producto es la manera natural de combinar las n-formas. Es el antisimetrizador del producto tensorial. Es por ello por lo que $\epsilon^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_n} = dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_n}$, lo que nos permite escribir la n-forma como:

$$\omega(x) = \frac{1}{n!} \omega_{i_1 \dots i_n}(x) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_n} \,. \tag{1.57}$$

El producto exterior tienen dos propiedades fundamentales:

1. El producto exterior es antisimétrico:
$$dx^i \wedge dx^j = -dx^i \wedge dx^j \,. \tag{1.58}$$
2. Es bilineal para escalares a y b:
$$(a\omega + b\sigma) \wedge \gamma = a(\omega \wedge \gamma) + b(\sigma \wedge \gamma). \tag{1.59}$$

Sea $\omega \in \Lambda^n(M)$ y $\sigma \in \Lambda^m(M)$, entonces el producto exterior $\omega \wedge \sigma \in \Lambda^{n+m}(M)$ viene dado por:

$$\omega \wedge \sigma = \frac{1}{n!m!} \omega_{i_1 \dots i_n} \sigma_{j_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_n} \wedge dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_m} \,. \tag{1.60}$$

La derivada exterior es una operación que lleva una n-forma a una (n+1)-forma. Actúa de la siguiente forma:

$$d\omega = \frac{1}{n!} \frac{\omega_{i_1 \dots i_n}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_n} \,. \tag{1.61}$$

Esta derivada tiene varias propiedades:

[7] Cuando todos los índices son antisimétricos se le denomina “totalmente antisimétrico"

1. Linealidad:
$$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta\,. \tag{1.62}$$
2. Regla de Leibniz: Si ω es una n-forma y η es una q-forma:
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^n \omega \wedge d\eta\,. \tag{1.63}$$
3. Aplicar dos veces la derivada exterior da siempre cero:
$$d(d\omega) = 0\,. \tag{1.64}$$

La derivada exterior de una 0-forma es el diferencial usual $d\psi = \partial_\mu \psi dx^\mu$.

Otra operación importante es el producto interior de una n-forma con un campo vectorial. Sea X un campo vectorial y ω una n-forma, el producto interior de ω, $i_X\,\omega$ es la (n-1)-forma:
$$i_X\,\omega = \frac{1}{(n-1)!} X^j \omega_{j i_2 \ldots i_n} dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}\,. \tag{1.65}$$

La regla del producto se expresa como:
$$i_X\,(\omega \wedge \alpha) = (i_X\,\omega) \wedge \alpha\, + (-1)^n \omega \wedge (i_X\,\alpha)\,. \tag{1.66}$$

En un espacio de dimensión N, hay una relación entre una n-forma y una (N-n)-forman por tener el mismo número de componentes. Existe una operación, el dual de Hodge, que utiliza esta relación:
$$\star\omega_{(n)} = \frac{\sqrt{|g|}}{n!(N-n)!}\, \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{N-n}}{}^{\nu_1 \ldots \nu_n}\, \omega_{\nu_1 \ldots \nu_n}\, dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{N-n}}. \tag{1.67}$$
La expresión depende de la métrica, por lo tanto, no es una operación puramente topológica, ya que la operación cambia al cambiar la métrica, por lo que depende de como se midan distancias y no solo de la forma del espacio (por ejemplo, el numero de agujeros o de componentes conexas depende solo de la topología). El operador es su propio inverso. Además, combinando lo con la derivada exterior permite definir la divergencia de la n-forma.

Como se dijo en la introducción, las formas diferenciales son esenciales en la integración. Para que una integral de un espacio N-dimensional esté bien definida si el integrando tiene una n-forma:
$$\int f(x)\sqrt{|g|}\, d^N x = \frac{1}{N!} \int f(x)\sqrt{|g|}\, \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_N}\, dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_N}\,. \tag{1.68}$$

La integral de una n-forma ω se calcula como:
$$\int_M \omega = \int d^n x\, \omega_{1 \cdots n}(x)\,. \tag{1.69}$$

Se puede reescribir el teorema de Stokes en términos de formas diferenciales. Recordemos que una (n-1)-forma tiene por diferencial una n-forma. De esta manera, el teorema se puede formular por:
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega\,. \tag{1.70}$$

Habiendo definido las formas diferenciales, vamos a ver como se expresa la relatividad general en terminos de ellas. Tanto los vielbein como la conexión de espín son uno-formas:

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu \tag{1.71}$$

$$\omega_a{}^b = \omega_{\mu a}{}^b dx^\mu \,. \tag{1.72}$$

El tensor de curvatura y la torsión por el contrario son una 2-forma:

$$R_a{}^b = \frac{1}{2} R_{\mu\nu a}{}^b dx^\mu dx^\nu = d\omega_a{}^b - \omega_a{}^c \wedge \omega_c{}^b \tag{1.73}$$

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \,. \tag{1.74}$$

1.7. El formalismo de Palatini en términos del vielbein

El formalismo de Palatini se puede expresar en la base local. De esta forma, la acción de Einstein-Hilbert depende de los vielbein y de la conexión de espín. Expresado de esta forma, el formalismo establece la independencia entre la conexión de espín y los campos de referencia. Anteriormente se ha visto una relación entre ambos, al igual que pasaba con la conexión métrica y la métrica. Volvemos a aplicar el formalismo de Palatini para encontrar una relación general y ver que conexiones de espín la cumplen. Este cambio es útil para acoplar fermiones a la gravedad. También permite definir otras acciones como la de Holst o la de Plebanski. Esta última será particularmente útil en la teoría BF de la gravedad.

En primer lugar vamos a escribir la acción de Einstein-Hilbert en la base local. Para ello, debemos saber que:

$$e = \det e^a_\mu = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \,. \tag{1.75}$$

Usando las ecuaciones (1.33), (1.38), podemos reescribir la acción como:

$$S[e,\omega] = \frac{1}{2\kappa} \int d^n x \, e \, e^\mu_a e^\nu_b R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) \,, \tag{1.76}$$

donde la κ es la constante de newton de dimensión n (su valor depende de la normalización que se le quiera dar)

La variación con respecto a la conexión nos dará la relación que debe cumplir esta. Por el contrario, al variar respecto del vielbein, se obtiene las ecuaciones de Einstein.

Esta acción se puede expresar de otra manera más "topológica", la cual es bastante útil para generalizarlo a otras teorías como Chern-Simons o la supergravedad:

$$S[e^a_\mu, \omega^{ab}_\mu] = \frac{(-1)^{d-1}}{2 \cdot (d-2)!} \int d^d x \, R_{\mu_1\mu_2}{}^{a_1 a_2}(\omega) \, e^{a_3}_{\mu_3} \cdots e^{a_d}_{\mu_d} \, \epsilon_{a_1 \cdots a_d} \, \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \,. \tag{1.77}$$

Veamos que, efectivamente, las acciones son equivalentes. la segunda expresión tiene dos símbolos de Levi-Civita, uno del espacio tangente y el otro del espacio-tiempo. Recordemos que el producto de dos Levi-Civita se puede expresar como determinantes de Kronecker:

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}\epsilon_{a_1a_2\cdots a_d} = -\sum_{\sigma\in S_d} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\delta^{\mu_1}_{a_{\sigma(1)}}\delta^{\mu_2}_{a_{\sigma(2)}}\cdots\delta^{\mu_d}_{a_{\sigma(d)}}\,. \tag{1.78}$$

Al multiplicar la ecuación (1.78) por los vielbein, se obtiene:

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d}\epsilon_{a_1\cdots a_d}e^{a_3}_{\mu_3}\cdots e^{a_d}_{\mu_d} = -(d-2)!\,e\,(e^{\mu_1}_{a_1}e^{\mu_2}_{a_2} - e^{\mu_1}_{a_2}e^{\mu_2}_{a_1})\,, \tag{1.79}$$

donde se han contraído (d-2) índices (quedan libres 2 índices para acompañar al tensor de curvatura), por lo que hay $(d-2)!$ formas de permutar los índices con subíndices de 3 a d.

$$S = \frac{(-1)^d}{2}\int d^dx\,e\,R_{\mu_1\mu_2}{}^{a_1a_2}\left(\delta^{\mu_1}_{a_1}\delta^{\mu_2}_{a_2} - \delta^{\mu_1}_{a_2}\delta^{\mu_2}_{a_1}\right)\,. \tag{1.80}$$

Recordando que el tensor de curvatura es antisimétrico en los indices a y b e intercambiando indices

$$R_{\mu_1\mu_2}{}^{a_1a_2}\left(\delta^{\mu_1}_{a_1}\delta^{\mu_2}_{a_2} - \delta^{\mu_1}_{a_2}\delta^{\mu_2}_{a_1}\right) = 2R^{ab}_{\mu\nu}\,. \tag{1.81}$$

Introduciendo lo en acción, finalmente se obtiene (renormalizando, es decir, añadir κ) la expresión (1.76).

Vamos a variar la acción (1.77). En la variación del tensor de curvatura, volvemos a aplicar la identidad de Palatini pero con la conexión de espín:

$$\delta R^{ab}_{\mu\nu} = 2D_{[\mu}\delta\omega^{ab}_{\nu]} \qquad , \qquad D_\mu\delta\omega^{ab}_\nu = \partial_\mu\delta\omega^{ab}_\nu - \omega^{ac}_\mu\delta\omega_{\nu c}{}^b - \omega^{bc}_\mu\delta\omega_\nu{}^{ac}, \tag{1.82}$$

Haciendo la variación de la acción y sustituyendo la variación del tensor de curvatura obtenemos:

$$\delta S = \frac{(-1)^{d-1}}{2\cdot(d-2)!}\int d^dx\Big[2D_{\mu_1}\delta\omega^{a_1a_2}_{\mu_2}e^{a_3}_{\mu_3}e^{a_4}_{\mu_4}\cdots e^{a_d}_{\mu_d}\epsilon_{a_1\cdots a_d}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} \tag{1.83}$$

$$+\,(d-2)R_{\mu_1\mu_2}{}^{a_1a_2}\delta e^{a_3}_{\mu_3}e^{a_4}_{\mu_4}\cdots e^{a_d}_{\mu_d}\epsilon_{a_1\cdots a_d}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d}\Big]. \tag{4.134}$$

Vamos a volver a usar el paso (1.79) pero para distintos indices. Para ello vamos a generalizar la formula expuesta:

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d}\epsilon_{a_1\cdots a_d}e^{a_i}_{\mu_i}\cdots e^{a_d}_{\mu_d} = -(d-i+1)!\,(i-1)!e\,e_{a_1a_2\ldots a_{i-1}}{}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{i-1}}\,. \tag{1.84}$$

El primer término de (1.83) se integra por partes utilizando (1.84):

$$\begin{aligned} &2D_{\mu_1}\delta\omega^{a_1a_2}_{\mu_2}e^{a_3}_{\mu_3}\cdots e^{a_d}_{\mu_d}\epsilon_{a_1\cdots a_d}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} \\ &= (-1)^{d-1}12(d-2)!e\left(e^{\mu_1}_{a_1}e^{\mu_2}_{a_2}e^{\mu_3}_{a_3}D_{\mu_2}\delta\omega^{a_1a_2}_{\mu_2}e^{a_3}_{\mu_3}\right) \\ &\quad + \partial_{\mu_1}\left[(-1)^{d-1}4(d-2)!e\delta\omega^{a_1a_2}_{\mu_2}e^{\mu_1}_{a_1}e^{\mu_2}_{a_2}\right]. \end{aligned} \tag{1.85}$$

El segundo término se reescribe con (1.84):

$$
\begin{aligned}
&(d-2)R_{\mu_1\mu_2}{}^{a_1a_2}\delta e^{a_3}_{\mu_3}e^{a_4}_{\mu_4}\cdots e^{a_d}_{\mu_d}\epsilon_{a_1\cdots a_d}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d}\\
&=(-1)^{d-1}3!(d-2)!eR_{\mu_1\mu_2}{}^{a_1a_2}\delta e^{a_3}_{\mu_3}e^{\mu_1}_{a_1}e^{\mu_2}_{a_2}e^{\mu_3}_{a_3}\\
&=(-1)^{d}4(d-2)!eG_a{}^{\mu}\delta e^a_{\mu}.
\end{aligned} \tag{1.86}
$$

Realizando variaciones respecto a la métrica se obtiene las ecuaciones de Einstein $G_a{}^{\mu}$. Variando Respecto de la conexión de spin $D_{[\mu}e^a_{\nu]}=0$.

Otra forma de expresar la acción es usando formas diferenciales:

$$
S[e^a,\omega^{ab}]=\frac{(-1)^{d-1}}{(d-2)!}\int R^{a_1a_2}(\omega)\wedge e^{a_3}\wedge\cdots\wedge e^{a_d}\,\epsilon_{a_1\cdots a_d}\,. \tag{1.87}
$$

Para reescribir la acción, recordamos como se expresa el tensor de curvatura como una 2-forma, (1.73). Para completar el cambio a formas diferenciales utilizamos la propiedad:

$$
e^{b_1}\wedge\cdots\wedge e^{b_d}=d^dx\cdot\sqrt{|g|}\,\epsilon^{b_1\cdots b_d}\,. \tag{1.88}
$$

De esta manera, podemos poner el tensor de curvatura en función de los vielbein:

$$
R^{a_1a_2}=\frac{1}{2}R_{b_1b_2}{}^{a_1a_2}e^{b_1}\wedge e^{b_2}\,. \tag{1.89}
$$

Cuando acoplamos materia bosónica, no es necesario introducir términos dependientes del espín. Sin embargo, con materia fermiónica si es necesario añadir los, cambiando las ecuaciones de Einstein. Además, generan torsión, por lo que la conexión de espín cumple (1.50), volviéndose importante en teorías como la supergravedad.

Capítulo 2

Formalismo BF

La teoría BF es una teoría cuántica de campos. Es de gran importancia en la física moderna y en matemáticas. Su importancia radica en que la gravedad se puede reformular como una teoría BF con una ligadura. Se usa en gravedad cuántica de bucles, espuma de espín o teorías gauge. Ademas, conduce a la acción de Plebanski. De hecho, fue Plebanski quien comenzó con la idea de expresar la gravedad como una teoría BF, considerando al campo B como la descripción de la gravedad. Por último, también se parece a las teorías Yang-Mills.

El nombre proviene del uso del uso del campo B y la curvatura F. La acción se puede escribir como:

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\,(B \wedge F)\,, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{M}$ es la variedad, B es un campo y F es la curvatura asociada a la conexión A. Al ser la curvatura una 2-forma, el campo B debe de ser una (D-2)-forma para poder ser integrada. La traza se toma sobre los indices del álgebra de Lie del grupo de simetría correspondiente. Este grupo suele ser típicamente (como en la gravedad formulada como una teoría gauge) el grupo SO(D), cuando nos encontramos en un espacio euclídeo. Este se define por las matrices A que cumplen:

$$\{A \in M_{D\times D}\ : AA^t = I\,, det(A) = 1\}\,. \tag{2.2}$$

Si nos encontramos en un espacio lorentziano, el grupo correspondiente es SO(D-1,1), en el que se incluye los boosts. Se necesita la traza para que $Tr(B \wedge F)$ sea un escalar. Se puede escribir la acción mostrando explícitamente las indices de las n-formas correspondientes:

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ}\,, \tag{2.3}$$

o en componentes (usando bivectores):

$$S = \int d^D x\, B^{\mu\nu}_{ij}\, F^{ij}_{\mu\nu}\,. \tag{2.4}$$

Obtengamos las ecuaciones de movimiento, utilizando la expresión (2.1):

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_M \mathcal{L} \\ &= \int_M \mathrm{tr}(\delta B \wedge F + B \wedge \delta F) \\ &= \int_M \mathrm{tr}(\delta B \wedge F + B \wedge d_A \delta A) \\ &= \int_M \mathrm{tr}(\delta B \wedge F + (-1)^{n-1} d_A B \wedge \delta A) \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde hemos utilizado $\delta F = d_A \delta A$ y la definición de derivada exterior covariante:

$$d_A \psi \equiv d\psi + A \wedge \psi \,. \tag{2.6}$$

Haciendo variaciones respecto de B se obtiene $F = 0$, es decir la conexión A es plana. Si es respecto de A tenemos por resultado $d_A B = 0$, es decir, que el campo B es covariantemente cerrado. Esto muestra que es una teoría topológica y parece que las soluciones son iguales localmente. Esto parece decir que no hay grados de libertad locales.

Es importante resaltar que es una teoría topológica. Esto será importante en dimensiones más altas, ya que para poder adaptar la teoría BF a la gravedad, se perderá esta condición (la teoría debe de tener dinámica local). En 3 dimensiones, la gravedad es exactamente la teoría BF. No es necesario modificar el formalismo. En concreto se puede entender como una teoría topológica de Chern-Simons. En cambio, para dimensión D>3 necesitamos introducir restricciones que nos determina como tiene que ser el campo B. Veremos que dicho campo debe provenir de los vielbein, lo que provoca, por (1.33), que la acción dependa explícitamente de la métrica y deje de ser una teoría topológica. Ademas, por añadir la ligadura, ciertas simetrías gauge se perderán.

2.1. Formalismo BF en $3D$

Como se ha mencionado, hay una relación entre la teoría BF en 3D con la teoría de Chern-Simons. Es una teoría cuántica de campos, introducida por Edward Witten. Es útil para la teoría de nudos o el efecto hall cuántico. Se emplea una conexión A, siendo esta una 1-forma (toma valores en el álgebra de Lie de un grupo de gauge).

En tres dimensiones se puede escribir la acción, utilizando el símbolo de Levi-Civita y la procedencia del campo gauge del vielbein:

$$S = \int \epsilon_{abc} R^{ab} \wedge e^c \,. \tag{2.7}$$

Cuando consideramos el grupo de Lorentz la formula $R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$ se puede poner de forma matricial si tomamos R y ω como matrices de índices a y b, $R = d\omega + \omega \wedge \omega$.

Sin embargo, cuando utilizamos el grupo de Poincaré completo, no podemos ponerlo en forma matricial. Esto se debe a que $T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b$ no se puede poner matricialmente.

En el primer caso, la teoría de Chern-Simons se puede expresar de la siguiente forma. Se define sobre una variedad tridimensional $\mathcal{M}$, quedando la acción como:

$$S_{\mathrm{CS}}(A) = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) , \tag{2.8}$$

donde K es el llamado nivel.

Variando la acción se obtienes las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{k}{2\pi}(dA + A \wedge A) = \frac{k}{2\pi} F = 0 \, . \tag{2.9}$$

Es decir, la curvatura del campo de gauge es nula. Esto nos lleva a un universo plano y a conexiones planas sobre la variedad $\mathcal{M}$.

La teoría BF en tres dimensiones es equivalente a una teoría de Chern-Simons, es decir no aporta física distinta de Chern-Simons. Este es el caso en que no podemos ponerlo en forma matricial (si se añade una constante cosmológica y luego la anulas si que se podría). Para demostrar esta afirmación, basta con ver que la teoría BF es invariante gauge, ya que implica que su acción es localmente la diferencia entre dos acciones de Chern–Simons. Para ver la invarianza gauge necesitamos demostrar que la derivada exterior de la acción solo depende de la curvatura. Como la acción es un escalar Lorentz, la derivada exterior es igual a la derivada exterior covariante (se diferencian cuando se aplica sobre un tensor). Para ello, recordamos dos resultados importantes:

$$DR^{ab} = 0 \tag{2.10}$$

$$De^a = T^a \, . \tag{2.11}$$

Con estas condiciones, calculamos la derivada exterior de la acción:

$$d\left(\epsilon_{abc} R^{ab} \wedge e^c\right) = D\left(\epsilon_{abc} R^{ab} \wedge e^c\right)$$

$$= \epsilon_{abc} DR^{ab} \wedge e^c + \epsilon_{abc} R^{ab} \wedge De^c = 0 + \epsilon_{abc} R^{ab} \wedge T^c \, . \tag{2.12}$$

Es importante resaltar que esta equivalencia solo se da en dimensión 3. De hecho, la forma de Chern-Simons solo existe para dimensión impar, al contrario de la teoría BF que se puede formular en cualquiera. En el resto de dimensiones impares tampoco se da esta identificación, ya que se necesita que las formas que se utilizan tengan el mismo grado y que sea igual a la dimensión. Mientras que en la teoría BF el campo B va cambiando su grado para sumar con la curvatura (que siempre una 2-forma), en Chern-Simons no lo hace.

2.2. Formalismo BF para $D > 3$

En dimensiones mas altas, podemos expresar la gravedad como una deformación de la teoría BF añadiendo restricciones. Esto es un resultado inesperado, ya que la gravedad posee grados de libertad propagantes. En cambio, la teoría BF no, debido a su carácter topológico (y la condición (2.9)). En concreto, las restricciones son cuadráticas en el campo B. Por lo tanto, la acción se escribe como:

$$S[A, B, \lambda] = \int_M \mathrm{Tr}(B \wedge F) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B \wedge \phi(B))\,, \tag{2.13}$$

donde $\phi(B)$ es un campo multiplicador de Lagrange y una 2-forma. La ligadura es cuadrática en B en toda dimensión. Esta acción es compatible con la relatividad general y las soluciones de Einstein se cumplen también aquí. La descripción dada por la acción se puede cuantizar, en la cual el campo B se vuelve un operador derivativo que actúa sobre las redes de espín.

Otra forma de expresar la acción es considerar B como un bivector, es decir un tensor covariante antisimétrico de rango dos densitizado. La expresión del bivector es:

$$\tilde{B}^{\mu\nu}_{ij} = \frac{1}{(D-2)!}\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha_1\ldots\alpha_{D-2}} B_{\alpha_1\ldots\alpha_{D-2}ij}\,, \tag{2.14}$$

donde $\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha_1\ldots\alpha_{D-2}}$ es la densidad Levi-Civita. Este debe de ser, a priori, independiente de la métrica. Luego se verá que la restricción impone que si dependa, pero no debemos asumirlo en un inicio. Este objeto es antisimétrico en bajo el intercambio de μ y ν. La tilde sobre B y ϵ indican que tiene peso de densidad 1. Por lo tanto la acción se escribe, en términos de bivectores como:

$$S[A, \tilde{B}, \underset{\sim}{\Phi}] = \int d^D x\, \tilde{B}^{\mu\nu}_{ij} F^{ij}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\Phi}{}^{ijkl}_{\mu\nu\rho\sigma}\, \tilde{B}^{\mu\nu}_{ij}\tilde{B}^{\rho\sigma}_{kl}\,. \tag{2.15}$$

La tilde debajo de los multiplicadores de Lagrange indican que tiene peso menor que uno. Ademas, estos deben de ser antisimétricos en los índices griegos y anularse cuando se antisimetrizan los índices latinos (puedes intercambiar los papeles, hay libertar de elección).

Para que el campo B provenga de los vielbein se necesita que el multiplicador de Lagrange debe cumplir la propiedad:

$$\underset{\sim}{\phi}{}^{ijkl}_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{[m]ijkl}\tilde{\phi}_{[m]\mu\nu\rho\sigma}\,. \tag{2.16}$$

Es importante recalcar que el recíproco no es cierto en general. La condición (2.16) no implica que el campo B provenga de los vielbein, ya que entra en juego otras propiedades como que B sea no degenerada.

Teniendo en cuenta las expresiones (2.16) y (2.14) podemos escribir la acción de dos formas distintas:

$$S[A,B,\Phi] = \int d^D x\, \tilde{B}^{\mu\nu}_{ij} F^{ij}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_{[m]\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{[m]ijkl}\tilde{B}^{\mu\nu}_{ij}\tilde{B}^{\rho\sigma}_{kl} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} S[A,B,\Phi] = \frac{1}{2!(D-2)!}\int d^D x\, B_{\beta_1\ldots\beta_{D-2}\,ij} F^{ij}_{\mu\nu}\tilde{\epsilon}^{\beta_1\ldots\beta_{D-2}\mu\nu} \\ + \frac{1}{2} B_{\beta_1\ldots\beta_{D-2}\,ij}\Phi^{ij}_{\mu\nu}(B)\tilde{\epsilon}^{\beta_1\ldots\beta_{D-2}\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $\Phi^{ij}_{\mu\nu}(B) = \underset{\sim\mu\nu\rho\sigma}{\Phi^{ijkl}}\, B^{\rho\sigma}_{kl}$

Variando la acción respecto del multiplicador de Lagrange se obtiene, para ciertos coeficientes $\tilde{c}^{[m]}_{[\alpha]}$, con indices α y m totalmente antisimétricos:

$$\epsilon^{[m]ijkl}\,\tilde{B}^{\mu\nu}_{ij}\,\tilde{B}^{\rho\sigma}_{kl} = \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}\,\tilde{c}^{[m]}_{[\alpha]}\,. \tag{2.19}$$

Cuando el campo B proviene de vielbein, se cumple la ecuación (2.19). El recíproco (bajo estas condiciones) también se cumple. Es decir, en dimensión mayor que 4, el campo B proviene de los vielbein si y solo si cumple la ecuación (2.19). En concreto, la expresión del campo debe de ser:

$$\tilde{B}^{\mu\nu}_{ij} = \pm|e|e^{[\mu}_{i}e^{\nu]}_{j}\,. \tag{2.20}$$

Existe una solución extra en cuatro dimensiones dada por:

$$B^{\mu\nu}_{ij} = \pm|e|\,\epsilon_{ij}{}^{kl}\,e^{[\mu}_{k}\,e^{\nu]}_{l}\,. \tag{2.21}$$

También se puede expresar la condición utilizando el operador de Hodge:

$$B = *(e\wedge e)\,. \tag{2.22}$$

Para que se cumplan estas condiciones, el campo B debe de ser no degenerado. Se debería de volver a hacer cálculos para considerar el caso de que B sea degenerado.

Hemos visto que en 3D no es necesario añadir una ligadura para hacer compatible la relatividad general con la teoría BF. Esto parecería indicar que los casos de dimensión D=4 y D>4 son iguales. Sin embargo, hay ciertas diferencias entre ambas situaciones. En primer lugar, en cuatro dimensiones, el número de multiplicadores de Lagrange es igual al numero de restricciones independientes. Por el contrario, en dimensiones mayores, los multiplicadores superar por mucho al número de restricciones independientes. A pesar de esta diferencia, no añade, en principio, ningún problema ni al nivel clásico ni al cuántico (por lo menos a nivel de la espuma de espín).

La otra diferencia importante es el sector topológico. En en apéndice (A) hemos demostrado que el sector topológico esta presente en cuatro dimensiones, además del gravitatorio. Sin embargo, en dimensiones mayores se pierde esta propiedad a favor del sector gravitatorio, ya que solo existen las soluciones de las restricciones de simplicidad. En 3 dimensiones, al tener los dos sectores, es posible que se cuantice el sector topológico en vez del gravitatorio. En dimensiones mayores esto no sucede.

2.3. Formalismo BF en términos de formas diferenciales

Como habíamos mencionado, escribir una teoría en el lenguaje de formas diferenciales puede llegar a ser muy útil. En el caso de la teoría BF, o bien no se suele escribir con formas diferenciales o en caso de hacerlo se usa el operador de Hodge definido en (1.67). El problema de utilizar dicho operador es el conocimiento previo de la métrica. Pero esto es contradictorio porque la métrica no está entre los campos que definen el modelo BF sino que aparece (a través de la referencia Lorentz e^a) al resolver la ligadura. En esta sección vamos a expresar la teoría BF de la gravedad de Einstein para cualquier dimensión D, escrita exclusivamente en términos de formas diferenciales, sin usar el operador de Hodge. Se propone el siguiente lagrangiano:

$$\begin{aligned} L &= \mathcal{A}_{ab} \wedge R^{ab} + \mathcal{A}_{ab} \wedge \mathcal{B}_{cd}\phi^{abcd} + \mathcal{B}_{ab} \wedge \mathcal{B}_{cd} \wedge f^{abcd} \\ &+ \phi^{ab}{}_{ab}\lambda + f^{abcd} \wedge \Lambda_{abcd} \ , \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde R^{ab} es la curvatura de la conexión de espín, $\mathcal{A}_{ab}$ son $(D-2)$-formas, $\mathcal{B}_{ab}$ son 2-formas, ϕ^{abcd} son cero-formas, f^{abcd} son $(D-4)$-formas, λ es una D-forma y Λ^{abcd} es antisimétrico en los índices y son 4-formas.

Ahora vamos a mostrar que esta acción es (clásicamente) equivalente a la de la gravedad de Einstein: Las ecuaciones de λ y Λ^{abcd} implican que $\phi^{ab}{}_{ab} = 0$ y $f_{[abcd]} = 0$ respectivamente. La ecuación de f^{abcd} es:

$$\mathcal{B}_{ab} \wedge \mathcal{B}_{cd} = \Lambda_{abcd} \ . \tag{2.24}$$

por un proceso análogo al expuesto en el apéndice (A), se llega a que la solución de esta ecuación es, para $D > 4$, que existen D 1-formas diferenciales e^a:

$$\mathcal{B}_{ab} = he_a \wedge e_b \ , \tag{2.25}$$

donde h es una función arbitraria. Cuando $D = 4$, ademas de esta solución hay otra dada por:

$$\mathcal{B}_{ab} = h\epsilon_{abcd}e^c \wedge e^d \ . \tag{2.26}$$

Nosotros nos centraremos en la solución (2.25). Si ahora introducimos esa solución en la ecuación de ϕ_{abcd}, resulta

$$h\mathcal{A}_{ab} \wedge e_c \wedge e_d = -\lambda\eta_{a[c}\eta_{b]d} \ , \tag{2.27}$$

donde el paréntesis recto indica antisimetrización con peso 1. Ahora escribimos las formas diferenciales en la base e^a,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ab} &= \frac{1}{(D-2)!}\mathcal{A}_{ab}{}^{u_1 \ldots u_{D-2}}\, e_{u_1} \wedge \cdots \wedge e_{u_{D-2}} \\ \lambda &= \frac{1}{D!}\lambda u_1 \ldots u_D\, e_{u_1} \wedge \cdots \wedge e_{u_D} \ . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Entonces (2.28) implica

$$\mathcal{A}_{ab}{}^{u_1 \ldots u_{D-2}} \epsilon_{u_1 \ldots u_{D-2} cd} = \mu \lambda \eta_{a[c} \eta_{b]d} \ , \tag{2.29}$$

donde μ es una función cuya forma explícita no es importante. Si contraemos esta expresión con $\epsilon_{v_1 \ldots v_{D-2} cd}$ llegamos a

$$\mathcal{A}_{ab}{}^{v_1 \ldots v_{D-2}} \propto \epsilon_{ab}{}^{v_1 \ldots v_{D-2}} \ , \tag{2.30}$$

lo que a su vez implica, una vez cambiamos la escala de e^a convenientemente, que

$$\mathcal{A}_{ab} = \pm \epsilon_{ab v_1 \ldots v_{D-2}} e^{v_1} \wedge \cdots \wedge e^{v_{D-2}}. \tag{2.31}$$

(Nótese que en dimensión impar el signo menos también se puede eliminar). Sustituyendo (2.31) resulta la acción equivalente:

$$L' = \pm \epsilon_{ab v_1 \ldots v_{D-2}} R^{ab} \wedge e^{v_1} \wedge \cdots \wedge e^{v_{D-2}} \ , \tag{2.32}$$

como se quería probar.

Capítulo 3

Simetrías gauge

3.1. Introducción a las Simetrías gauge

Una de las piezas mas importantes de la física teórica son las simetrías gauge. Estamos acostumbrados a trabajar con simetrías definidas sobre el espacio-tiempo. Por ejemplo tenemos las simetrías de traslación espacial y temporal ó de rotación. Estas simetrías indican la invarianza de las leyes de la física al trasladar tu sistema temporal y espacialmente y bajo cambios de direcciones:

$$\begin{aligned} t &\to t + \tau \\ \vec{x} &\to \vec{x} + \vec{a} \\ \vec{x} &\to R\vec{x}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Estas transformaciones dejan invariante al sistema. Por el teorema de Noether, existirá una carga conservada para cada simetría continua y rígida. Estas simetrías pueden ser globales o locales. En las globales, el parámetro de transformación (τ, a, R) es el mismo en todos los puntos del espacio. En cambio en las simetrías locales, dichos parámetros cambian en cada punto del espacio-tiempo $[\tau(\vec{x}, t), a(\vec{x}, t), R(\vec{x}, t)]$.

Todas estas simetrías se llaman externas, ya que se definen sobre el espacio-tiempo. Existen otro tipo, incluso mas importantes, las simetrías internas. Estas son transformaciones sobre los grados de libertad internos de un campo, no sobre las coordenadas espacio-temporales. Actúa sobre propiedades intrínsecas del campo, como por ejemplo la carga eléctrica o el color. Estas también pueden ser globales o locales. Las simetrías internas más habituales son U(1) (electrodinámica cuántica) ,SU(2), SU(3) (simetría de color)

Un ejemplo típico es la ecuación de Schrödinger. La transformación interna consiste en añadir un factor de fase global a la función de onda. Veamos que esa operación deja invariante la ecuación de Schrödinger:

$$H\Psi(\mathbf{r}) = [-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})\,. \tag{3.2}$$

Hacemos la transformación $\Psi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha}\Psi(\mathbf{r})$:

$$H\Psi'(\mathbf{r}) = He^{i\alpha}\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\alpha}[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = Ee^{i\alpha}\Psi(\mathbf{r})\,. \tag{3.3}$$

Vemos que las $e^{i\alpha}$ se simplifican y queda la misma ecuación. ¿Pero que sucede si la simetría es local? Las simetrías internas y locales son las llamadas simetrías gauge. Hay simetrías globales que al hacerlas locales, pierden la invarianza bajo esa transformación. Veamos lo en el ejemplo. Hacemos la transformación $\Psi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(r)}\Psi(\mathbf{r})$:

En este caso la ecuación de Schrödinger no va a ser invariante bajo esta transformación local:

$$H\Psi'(\mathbf{r}) = He^{i\alpha(r)}\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(r)}[-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2 + i\nabla\alpha(r)) + U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = Ee^{i\alpha(r)}\Psi(\mathbf{r})\,. \tag{3.4}$$

Como podemos ver, el gradiente de α impide que se mantenga la relación establecida. Sin embargo, podemos recuperar la ecuación original si hacemos un cambio. Consideramos un nuevo operador nabla: $\nabla \to \nabla - i\vec{A}(r)$ donde A es un campo general que se añade. Debe de transformarse como: $A' \to A + \nabla\alpha$. Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger se ve que ahora si es invariante bajo la transformación. Por lo tanto la nueva ecuación de será:

$$H\Psi(\mathbf{r}) = [-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2 - iA(r)) + U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})\,. \tag{3.5}$$

Hemos tenido que añadir un campo para conservar la simetría al volverla local. Este campo se denomina campo de gauge. Por lo tanto, cuando tenemos simetrías internas y locales, debemos añadir campos de gauge para mantener la simetría global. Resulta que el gradiente de este campo A genera una fuerza, la fuerza electromagnética. De hecho, A es el potencial electromagnético (si lo consideramos como un tensor A^μ). También existe una libertad gauge. Tenemos la libertad de escoger el A^μ

Por lo tanto, cuando obligas a una simetría global ser local, se debe añadir un campo gauge (para recuperar la invarianza) el cual genera una fuerza. Es importante resaltar que no estamos imponiendo que exista una fuerza, sino que surge de manera natural al obligar a que sea invariante. De esta manera, las fuerzas elementales surgen de simetrías $(U(1), SU(2), SU(3))$.

Estos campos gauge se pueden cuantizar, y al hacerlos surgen las partículas que median las interacciones (fotón, W^+, W^-, Z^0 y gluones), los cuales se denominan bosones gauge. Puede suceder que las soluciones físicas tengan menor simetría que el hamiltoniano. Esto produce una ruptura espontánea de simetría. Un ejemplo clásico es el ferromagnetismo, en el cual el hamiltoniano es invariante bajo rotación pero los espines se alinean en una dirección y rompe la simetría rotacional. Otro caso importante es el mecanismo de Higgs, por el cual las partículas obtienen masa.

La teoría BF también tiene simetrías gauge que dejan invariante el lagrangiano. Pero, al introducir la ligadura cuadrática, una de ellas se pierde, las traslaciones. Necesitaremos añadir una pieza a la variación de la conexión de espín para recuperar la.

3.2. Simetrías gauge de la teoría BF

Como hemos mencionado, la teoría BF presenta 3 simetrías gauge. Estas simetrías son de gran importancia. Tenemos la simetría de Lorentz local, la invarianza bajo difeomorfismos (no es una simetría gauge estrictamente) y las traslaciones del vielbein. Esta última no se tendrá cuando se considere la ligadura en dimensión mayor que 3.

El grupo de Poincaré consiste en añadir las traslaciones al grupo de Lorentz. El grupo de Lorentz tiene asociado a la conexión de espín. Los campos de gauge asociados a las traslaciones son precisamente los vielbein, e^a. La torsión se relaciona con las traslaciones mediante 2.11. Supone la medida de como se curvan las traslaciones.

Las traslaciones si se consideran invariantes gauge para BF en 3 dimensiones (por ser topológica). Las traslaciones del campo (no son traslaciones en el espacio-tiempo, sino a una simetría interna del espacio de campos) vienen dadas por:

$$B \mapsto B + D_A \eta \,, \tag{3.6}$$

donde η es un escalar (en 3 dimensiones) y $D_A\eta = d\eta + [A, \eta]$.

Veamos que deja la acción invariante:

$$S'_{BF} = \int \mathrm{Tr}\left((B + D_A\eta) \wedge F\right) = \int \mathrm{Tr}(B \wedge F) + \int \mathrm{Tr}(D_A\eta \wedge F) \,. \tag{3.7}$$

Desarrollando la derivada covariante se obtiene:

$$\mathrm{Tr}(D_A\eta \wedge F) = d\,\mathrm{Tr}(\eta \wedge F) - \mathrm{Tr}(\eta \wedge D_A F) \,. \tag{3.8}$$

Usando la identidad de Bianchi $D_A F = 0$:

$$S'_{BF} = S_{BF} + \int d\,\mathrm{Tr}(\eta \wedge F) \,. \tag{3.9}$$

El segundo término es una integral de una derivada total, la cual se anula si se imponen condiciones de borde, con lo que quedaría demostrada su invarianza. En 4 dimensiones, sin embargo, la ligadura cuadrática que se añade conlleva que el campo B ya no sea independiente. Esto conduce a la perdida de la invarianza gauge de las traslaciones (el campo B ya no cumple la condición de simplicidad).

Por otra parte está la simetría de Lorentz local. Las trasformaciones infinitesimales de Lorentz de parámetro ϵ_{IJ} son:

$$\delta_\epsilon A_{IJ} = D\epsilon_{IJ}$$

$$\delta_\epsilon B^{IJ} = -\epsilon^I{}_K B^{KJ} - \epsilon^J{}_K B^{IK} \,. \tag{3.10}$$

Estas transformaciones dejan invariante la acción:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon S_{BF} &= \int \mathrm{Tr}(\delta_\varepsilon B \wedge F + B \wedge \delta_\varepsilon F) \\ &= \int \mathrm{Tr}([B, \varepsilon] \wedge F + B \wedge [F, \varepsilon]) = 0 \,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Esta se tiene en cualquier dimensión porque la ligadura cuadrática depende de objetos que son invariantes bajo transformaciones de Lorentz.

Aunque los difeomorfismos no son estrictamente simetrías gauge, hay un paralelismo entre ambas. Los difeomorfismos pueden escribirse como combinaciones de transformaciones gauge internas y de traslación del campo B ,es decir, son equivalentes a ciertas trasformaciones gauge. La teoría BF tiene invarianza bajo difeomorfismos.

Capítulo 4

Conclusiones y proyecciones a futuro

En este capítulo vamos a realizar un análisis de lo que se he expuesto en este trabajo. Además vamos a destacar las cosas que faltarían por estudiar para completar la teoría BF, así como los siguientes pasos que se deben de dar y el paradigma actual en la comunidad científica.

1. El objetivo de este trabajo era realizar una introducción a la teoría BF, entenderla desde un punto de vista general. Para ello hemos realizado un viaje de preámbulos físicos y matemáticos. Hemos comenzado estableciendo las ecuaciones de Einstein, que son la base de toda la relatividad general y como se obtienen a partir de los tensores de curvatura.

   Después, hemos visto la forma mas efectiva de obtener las ecuaciones de Einstein, que es mediante el uso de la acción, ya que realizar variaciones de esta (o las ecuaciones de Euler-Lagrange) da como resultado las ecuaciones de movimiento. Estas ecuaciones, en muchas de las teorías vigentes dan como resultado las ecuaciones de Einstein.

   Una vez visto esto, se ha intentado ver el caso mas general, el cual es el formalismo de palatini ya que no se asume, en principio, ninguna dependencia entre la conexión y la métrica. De esta forma hemos obtenido que ecuación deben de cumplir las métricas dentro de las teorías (y ver que si que dependen la una de la otra).

   Un estudio exhaustivo de la relatividad general ha requerido la introducción del formalismo tetrádico. Hemos introducido el espacio tangente y con ello nuevos tensores expresados en este espacio. Es así como hemos tratado a partir de aquí con los vielbein, la conexión de espín y las operaciones expresadas en función de estos, como la derivada covariante o el tensor de curvatura $R(\omega)$.

   También hemos tenido que introducir el lenguaje de las formas diferenciales, ya que es bastante útil para nuestro trabajo. También hemos considerado distintas operaciones que se pueden realizar sobre las formas diferenciales. Esto nos ha permitido expresar todo lo anterior expuesto (como el formalismo de Palatini) en terminos de formas diferenciales.

   Con todo esto hemos podido describir el formalismo BF de la gravedad. Hemos visto la acción que introduce la teoría y como sus ecuaciones del movimiento describen una conexión plana ($F = 0$) y un campo B que es covariantemente cerrado. Es decir, la teoría pura es una teoría topológica.

   En 3D, se ha comprobado que la gravedad es exactamente una teoría BF (no hay que introducir ninguna ligadura). Además es una teoría de Chern-Simons, (no aporta nueva física). Esto lo hemos demostrado viendo que la teoría BF es invariante gauge, es decir que la derivada exterior de la acción solo depende de la curvatura. En dimensiones mayores hemos visto que se debe añadir unas restricciones cuadráticas en B a la acción para que pueda describirlo. Estas restricciones han impuesto que el campo B tenga que provenir del vielbein.

Además, hemos introducido, de forma novedosa, la teoría BF en términos de formas diferenciales sin la necesidad de usar el operador de Hodge como normalmente se hace.

Por último, se ha analizado las simetrías gauge de la teoría BF. Se ha demostrado que la introducción de las restricciones en dimensión mayor que cuatro provocan la pérdida de una de las simetrías presentes, la traslación del vielbein. Por el contrario, la simetría de Lorentz local y la invarianza bajo difeomorfismos sigue vigente en toda dimensión.

2. Ahora vamos a comentar como podemos seguir mejorando la teoría y que cosas quedarían por hacer.

   En primer lugar, en el desarrollo expuesto en (A), se usa como hipótesis que el campo B es no degenerado. Los resultados que se obtienen se deben precisamente a esa asunción. Por lo tanto puede resultar interesante tener en cuenta el caso en el que el campo B sea degenerado. En el estudio descrito, al ser clásico, no ha sido necesario plantear esta situación ya que clásicamente los campos no pueden ser degenerados. Por el contrario, puede ser de gran importancia cuando se considera el caso cuántico. Los sectores degenerados son una vía para seguir mejorando esta teoría. Para una descripción en mayor detalle, diríjase a Ref [x]

   Por otra parte, vamos a considerar la teoría cuántica. Para cuantizar la teoría BF, se utiliza la bien conocida integral de caminos:

$$Z[J] = \int D\phi e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}B\, e^{i\int_M \mathrm{Tr}(B\wedge F + B\wedge J)}\,. \tag{4.1}$$

   En la formulación de Feynman, esta integral representa la probabilidad de que un sistema evolucione entre dos estados tomando todos los caminos posibles. Supone una de las herramientas mas importantes de la teoría cuántica de campos. Presenta la ventaja de no depender de una métrica de fondo (algo importante para la gravedad cuántica).

   Se cuantiza la teoría mediante “Spin Foam”. Este enfoque generaliza la idea de "spin networks", las cuales son estructuras matemáticas que describen los estados cuánticos del espacio en gravedad cuántica de bucles. Son grafos donde las caras están etiquetadas por representaciones del grupo de gauge, las aristas y los vértices codifican como se combinan estas representaciones y las interacciones respectivamente. El espacio-tiempo se descompone en una triangulación.

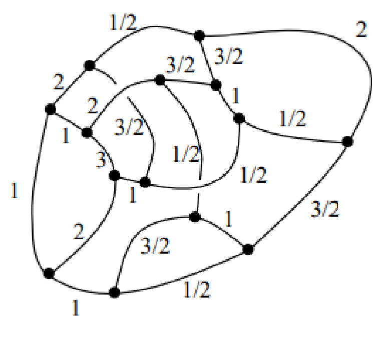

Figura 4.1: grafo del modelo Spin Foam

También se puede considerar incluir el parámetro de Immirzi. Es una constante libre que aparece en distintos formalismos de la relatividad general. Su importancia también radica en la cuantización del espacio-tiempo.

Apéndice A

Relación entre el campo B y el vielbein

En este apéndice vamos a demostrar detalladamente el teorema sobre la procedencia del campo B del vielbein. La ecuación (2.19) impone unas restricciones, las cuales desembocan en la mencionada procedencia del campo de los vielbein. Estas restricciones se pueden clasificar en tres tipos. Estas son:

simplicidad

$$\tilde{B}^{\mu\nu}_{ij}\tilde{B}^{\rho\sigma}_{kl} = 0 \quad \text{para } \mu, \nu \text{ distintas} \tag{A.1}$$

Intersección:

$$\tilde{B}^{\mu\nu}_{ij}\tilde{B}^{\nu\rho}_{kl} = 0 \quad \text{para } \mu, \nu, \rho \text{ distintas} \tag{A.2}$$

Normalización:

$$\tilde{B}^{\mu\nu}_{ij}\tilde{B}^{\rho\sigma}_{kl} = \tilde{B}^{\mu\rho}_{ij}\tilde{B}^{\nu\sigma}_{kl} \quad \text{para } \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ distintas}\,. \tag{A.3}$$

Si B_{ij} es una 2-forma, la condición de simplicidad implica que, si B_{ij} no es nula, sea simple o lo que es lo mismo que sea el producto exterior de dos uno-formas:

$$B_{ij} = u \wedge v = u_i v_j - v_i u_j = u_{i[}v_{j]}\,. \tag{A.4}$$

Guarda estrecha relación con las relaciones de Pluecker. Demostremos la condición (A.4). La condición necesaria y suficiente es que B_{ij} sea un producto antisimetrizado de uno-formas, es decir $B_{[ij}B_{kl]} = 0$.

Si B no es nulo, se puede encontrar ciertos vectores a^i y b^j tal que $B_{ij}a^i b^j = 1$ (es parecido a normalizar el vector con respecto de esos vectores). Se considera también las uno-formas $u_i = B_{ij}a^j$ y $v_i = B_{ij}b^j$. Con estas condiciones, se llega a que el campo debe de poder expresarse como producto de uno-formas:

$$\begin{aligned} u_i v_j - v_i u_j &= (B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk})a^k b^l \\ &= B_{ij}B_{kl}a^k b^l \\ &= B_{ij}\,, \end{aligned} \tag{A.5}$$

donde en la segunda igualdad se ha usado la normalización del bivector. Otra condición que los bivectores deben de cumplir es que dos B distintas tengan un factor (una uno-forma) en común. La condición suficiente que deben de cumplir para ello es la condición de intersección: $B_{[ij}B'_{kl]} = 0$

Dicha expresión se anula si B y B' son proporcionales. Como no lo son, se puede encontrar vectores $\{a^i, b^i, c^i\}$ que cumplan:

$$v_i := B_{i[j}B'_{kl]} \neq 0\,. \tag{A.6}$$

Este vector v_i divide a B_{ij} ya que, utilizando la condición de simplicidad:

$$B_{[ij}v_{k]} = B_{[ij}B_{k][l}B'_{mn}a^l b^m c^n = 0\,. \tag{A.7}$$

Si este vector v_i también es divisor de B'_{ij} quiere decir que B'_{ij} y B_{ij} tienen esa 1-forma en común. Veamos que también es divisor de B' usando la relación de Pluecker, la cual muestra que el papel de los dos bivectores son intercambiables:

$$0 = B_{[ij}B'_{kl]} = B_{i[j}B'_{kl]} + B'_{i[j}B_{kl]}\,. \tag{A.8}$$

Por lo que si ambos cumplen la condición de intersección, se tiene $B_{ij} = u_i v_j$ y $B'_{ij} = v_i w_j$

Nos falta la condición de normalización. Tenemos 4 bivectores constituidos por las mismas 4 uno-formas y factores N y linealmente independientes. Esta condición, $B_{[ij}B'_{kl]} = B''_{[ij}B'''_{kl]}$ implica que $NN' = N''N'''$.

Estas son las tres consecuencias que tiene la ecuación (2.19). Ya tenemos todos los ingredientes para demostrar (2.20). Vamos a hacerlo para 4 dimensiones. Consideramos B^{12}_{ij}, B^{13}_{ij} y B^{14}_{ij}, los cuales son genéricos, se descomponen en uno-formas y comparten un factor común dos a dos (u_i, v_i, w_i). Puede haber 3 posibilidades:

1. Las 3 uno-formas son independientes, es decir forman una estructura no degenerada. Representa el sector topológico (los B están formado por 3 uno-formas distintas). En dimensiones mayores esta caso no es posible porque hay mas combinaciones que los que pueden formar las 3 uno-formas.
2. Dos uno-formas son iguales. Esto esta prohibido en todas las dimensiones ya que haría que dos bivectores sean proporcionales y hemos asumido que tiene que ser generales.
3. Las 3 uno-formas son iguales, por lo que todas los bivectores tiene el mismo factor en común. Esto representa el sector gravitatorio, en el que dejas un segundo vector libre. En dimensión $D > 4$, es el único caso posible.

Como el único caso posible es el tercero, los tres bivectores deben de tener el mismo vector en común u_i. De esta manera,existe una uno-forma $e_i'^{\mu}$ que divide a cada $B_{ij}^{\mu\nu}$ para todo ν. Si se hace de forma genérica, se llega a la siguiente conclusión:

$$\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} = \pm e e_i^{[\mu} e_j^{\nu]} \,. \tag{A.9}$$

Esta resultado permite reescribir la acción (2.4) como la acción de Palatini, sin mas que sustituir (A.9).

$$S[A, \tilde{B}(e)] = \pm \int d^D x |e| e_i^{[\mu} e_j^{\nu]} F_{\mu\nu}^{ij} \,. \tag{A.10}$$

Bibliografía

[1] T. Ortín, *"Gravity and Strings"*, **2nd ed.**, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2015).

[2] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *"Supergravity"*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2012).

[3] I. Bengtsson, *"BF Description of Higher-Dimensional Gravity Theories"*, Adv.Theor.Math.Phys. **3**, arXiv:hep-th/9901069 (1999). [DOI]

[4] M. Celada, D. González and M. Montesinos,*"BF gravity"*, Class.Quant.Grav. **33**, 213001 (2016) [DOI]

[5] T. Jacobson, *"1+1 Sector of 3+1 Gravity"*, Class.Quant.Grav.**13**, L111-L116,1996; Erratum-ibid.**13**, 3269, 1996, [DOI]

[6] B. Janssen, *"Teoría de la Relatividad General"*, apuntes del curso de 4º de Física, Universidad de Granada (2013).

[7] A. Pais, *"Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein"*, Oxford University Press, Oxford (1982).

[8] S. M. Carroll, *"Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity"*, Addison-Wesley, San Francisco (2004).

[9] A. Jiménez Cano, *"Formalismo de Palatini y sus implicaciones en la teoría Einstein-Hilbert libre y acoplada"*, Trabajo Fin de Máster, Universidad (2016).

[10] J. Tola Pasquel, *"La noción de formas diferenciales sobre IR^n"*, Pro Mathemorica, Vol. **1**, No. 1 (1987).

[11] C. Rovelli, *"Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)"*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[12] A. Schwarz, *"Topological Quantum Field Theories"*, arXiv:hep-th/0011260v1 (2000). [DOI]

[13] J. C. Baez, *"Spin Foam Models, Department of Mathematics*, University of California, Riverside, Class.Quant.Grav. **15** (1998) 1827-1858 (1997). [DOI]

[14] J. Muniain, J. Baez, *"Gauge Fields, Knots* & *Gravity"* (Series on Knots & Everything, Vol. **4**), World Scientific, (1994)

[15] J. M. F. Labastida, *"Chern-Simons Gauge Theory: Ten Years After"*, arXiv:hep-th/9905057v1 (1999). [DOI]

[16] N. Ikeda, *“Chern-Simons Gauge Theory coupled with BF Theory”*, Ritsumeikan University, Kusatsu, Shiga and Setsunan University, Int.J.Mod.Phys.A**18**, 2689-2702, 2003 [DOI]

[17] E. Witten, *“Chern-Simons Gauge Theory as a String Theory”*, Princeton, Prog.Math.**133**, 637-678,1995, arXiv:hep-th/9207094v2. (2003) [DOI]

[18] J. C. Baez, *“An Introduction to Spin Foam Models of BF Theory and Quantum Gravity”*, University of California, Lect. Notes Phys. **543** (2000) 25-94, arXiv:gr-qc/9905087 (1999). [DOI]

[19] A. Molgado, A. Rodríguez-López, *“Covariant momentum map for non-Abelian topological BF field theory”*, arXiv:1907.01152 [gr-qc] (2019) [DOI]

[20] E. Álvarez, *“Loops versus Strings”*, Universidad autonoma de Madrid España, arXiv:gr-qc/0307090 (2003). [DOI]

[21] M. Mondragón, M. Montesinos, *“Covariant canonical formalism for four-dimensional BF theory”*, J.Math.Phys. **47** (2006) 022301 [DOI]

[22] T. Lancaster, S. J. Blundell, *“Quantum Field Theory for the Gifted Amateur”*, Oxford University Press, Oxford (2014).

[23] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey, *“Gauge Theories in Particle Physics”*, CRC Press, Boca Raton (**4th ed.**, 2003–2004).

[24] K. Huang, *“Quantum Field Theory: From Operators to Path Integrals”*, **2nd ed.**, Wiley-VCH, Weinheim (2010).

[25] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, *“Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics, Cambridge Monographs on Mathematical Physics”*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[26] A. DeBenedictis, *“Integration in General Relativity”*, arXiv:physics/9802027 [math-ph] (1998). [DOI]

[27] S. M. Carroll, *“Lecture Notes on General Relativity”*, arXiv:gr-qc/9712019v1 (1997). [DOI]

[28] Zakharov, A.F., Zinchuk, V.A. & Pervushin, V.N. *“Tetrad formalism and reference frames in general relativity”*. Phys. Part. Nuclei **37**, 104–134 (2006). [DOI]

La figura (4.1) se puede encontrar en: J. C. Baez, *“An Introduction to Spin Foam Models of BF Theory and Quantum Gravity”*, University of California, Lect. Notes Phys. **543** (2000) 25-94, arXiv:gr-qc/9905087 (1999). [DOI]