Universidad de Valladolid

Máster en Profesor de Educación Secundaria y Bachillerato,

Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad: Matemáticas

FUNCIONES

en

Educación Secundaria

Obligatoria

Junio 2014

Autor: Paloma Martínez García

Tutor: Mª Carmen Martínez Martínez

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO.

1.1. Introducción.

El presente Trabajo Fin de Máster se basa en la impartición y enseñanza de las Funciones en Educación Secundaria Obligatoria. El motivo de haber elegido esta unidad didáctica es porque considero que es una unidad didáctica muy útil y práctica para la vida cotidiana. Esto hace que sea una de las unidades más importantes en la Educación Secundaria Obligatoria. Prueba de ello es el hecho de que se empieza a tratar en el primer año de Educación Secundaria Obligatoria y se repite todos los cursos, repasando los conceptos aprendidos en cursos anteriores y ampliando cada curso algún concepto nuevo o completando otros conceptos ya tratados previamente.

Lo que se pretende es que los alumnos entiendan e interioricen los distintos conceptos y que no se limiten a resolver ejercicios y problemas de una forma mecánica y repetitiva, sino que sea un aprendizaje significativo.

Lo más importante es que los alumnos aprendan a pensar. Con la experiencia que he tenido dando clase durante las Prácticas y la que ya tenía de dar clases particulares, la conclusión a la que se llega es que hoy en día los alumnos no saben pensar. En cuanto se les pone un ejercicio que cambia en algo (aunque sea mínimo) con respecto al tipo de problemas y ejercicios que han estado practicando y que han visto previamente, ya no saben seguir, se bloquen. La gran mayoría no saben pensar. Es muy importante leer detenidamente el enunciado, tantas veces como haga falta para saber identificar qué me están pidiendo y de qué datos dispongo para llegar a la solución.

Una prueba evidente de las afirmaciones que he realizado previamente son los resultados obtenidos en las Pruebas PISA en general en España. Es una prueba a nivel internacional (los mismos ejercicios para todos los países participantes) que se realiza a alumnos de 15 años (3º ESO). Son problemas aplicados, es decir, situaciones que nos podemos encontrar por la calle.

La capacidad para afrontar eficazmente estos problemas es fundamental para la competencia matemática. Los resultados obtenidos en estas pruebas en España demuestran que muchos adolescentes de hoy en día no saben pensar.

Los profesores de matemáticas presentan carencias formativas en psicología, pedagogía, sociología de la educación, epistemología, historia y didáctica de la matemática. Quizá sea porque quien va a ser profesor de matemáticas tiene un origen académico dispar y diverso:

matemáticos, ingenieros, arquitectos…, pero el Máster tiene precisamente esa función: transmitir actitudes (que no aptitudes), contenidos y una urdimbre didáctico-educacional.

El Máster, precisamente, nos orienta hacia la enseñanza de las matemáticas y cómo influir y ayudar al aprendizaje personal del alumno y al desarrollo de sus capacidades.

El concepto de límite lo he incluido porque ayuda a entender de una forma más clara algunos de los conceptos explicados durante la Educación Secundaria Obligatoria como la continuidad. Otra de las razones de haber incluido el concepto de límites de forma muy superficial es que, a pesar de no encontrarse en el Currículum de la Normativa para la ESO (como veremos más adelante), una de las editoriales, concretamente SM en su edición Pitágoras, lo incluye en 4º curso de la ESO para la opción B.

Durante las prácticas en el Centro Educativo no me ha coincidido el tema de funciones durante el tiempo que he estado, pero me ha servido para poder hacer las afirmaciones anteriores.

1.2. Objetivo.

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es analizar los conceptos relativos a Funciones a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria.

- Primero se estudia algunos de los matemáticos más importantes que han influido en esta rama de las matemáticas, indicando sus aportaciones a la notación y concepto de función.
- En segundo lugar, aparece la normativa relacionada con este tema y se analizan diferentes editoriales para ver su adecuación a esta normativa.
- A continuación se estudia la evolución de los diferentes conceptos en los sucesivos cursos de Secundaria, viendo cómo se amplían a lo largo de los cursos y se profundiza en las ideas.
- Para terminar, se proponen dos actividades para realizar en el aula.
    - La primera actividad es con el programa GeoGebra y trata de motivar a los alumnos en el estudio de las matemáticas con el uso del ordenador. Permite ver de forma muy gráfica las transformaciones de funciones.
    - La segunda actividad está basada en la evaluación de funciones. Con ella pretende motivar al alumno a utilizar las matemáticas, pensar y realizar cálculos rápidos.

2. HISTORIA.

2.1. Historia de las funciones.

El concepto de función se ha ido desarrollando con el paso del tiempo. Su significado ha ido cambiando, ganando en precisión con el paso de los años.

El antecedente más antiguo que conocemos de lo que hoy se entiende por *función* se remonta a la **época mesopotámica**. De este periodo se conservan diversas tablillas de arcilla en las que se recogen series de números relacionados entre sí: con los cuadrados, los cubos y los inversos de los números naturales. Estas tablillas definen funciones, aunque los babilonios no conocieran el concepto de función. Conocían y manejaban funciones concretas, pero no el concepto abstracto de función.

En el **antiguo Egipto** también aparecen funciones particulares, así como en la **Grecia clásica** (en cuanto a la relación entre los elementos de dos conjuntos, y no sólo de la fórmula), aunque siguieran sin comprender el concepto abstracto de función.

Nicole Oresme hizo una primera aproximación al concepto de función al describir las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes. .Fue el primero en usar diagramas para plasmar magnitudes variables en un plano.

En el **siglo XVI**, los científicos centraron su atención en los fenómenos de la naturaleza, en las relaciones ente las variables que determinaban dichos fenómenos. Era necesario comparar las variables, relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas en algún sistema geométrico.

La <u>irrupción del concepto real de función</u> pudo acontecer sólo tras el paso de una matemática de magnitudes consideradas de forma estática a una matemática de las variables, es decir, sólo después de que, en el tránsito **del siglo XVI al siglo XVII**, **Vieta, Fermat y Descartes** distinguieran de manera consciente entre magnitudes constantes y variables.

Puede afirmarse que la idea de función está implícita en los trabajos de los matemáticos franceses **R. Descartes y P. de Fermat. Descartes** desarrolló las ideas que se habían usado los anteriores siglos para representar en el plano relaciones entre magnitudes.

El nacimiento de la geometría analítica contribuyó también directamente a la formación del concepto de función.

Engels: ***"El punto de inflexión en las matemáticas fue la magnitud variable de Descartes".***

En Descartes, estas variables aparecían sólo en expresiones algebraicas, pero posteriormente se impuso la concepción de las magnitudes *fluyentes* que constituirá el trasfondo para la formación del concepto de función

No obstante, el estudio de las funciones como relación de dependencia entre magnitudes no comenzó a abordarse de forma rigurosa hasta el **s. XVII.**

Hubo que esperar a la publicación en **1638** del *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* del astrónomo y matemático italiano **G. Galilei,** para que los modelos funcionales se aplicaran decididamente en las ciencias experimentales, en especial al estudio de las leyes del movimiento. Entre las funciones que estudió Galileo Galilei destaca la función "uno a uno" $n \to n^2$ (hay tantos números naturales como cuadrados perfectos).

El **uso de la palabra función** (del latín: functio que significa "llevar a cabo, cumplir con una obligación), **se debe a Leibniz.**
Una nueva etapa en el proceso de formación del concepto de función se inició con la correspondencia entre Leibniz y Johann Bernoulli entre 1694 y 1698. Bernoulli, de acuerdo con Leibniz, hablaba de *"magnitudes que se construyen de alguna manera a partir de magnitudes constantes e indeterminadas".*
Leibniz estableció los conceptos de constante, variable, coordenadas, parámetro y ecuación algebraica casi en el mismo sentido que se usa actualmente.

Más tarde, ya en el **s. XVIII,** el estudio de las funciones se desarrolló gracias, sobre todo, a los trabajos de los diversos matemáticos de la familia **Bernoulli.**

Una **primera definición del concepto de función procede de Johann Bernoulli** en el año 1.718: "*Se llama función de una magnitud variable a una magnitud que, de alguna manera, se compone de esta misma magnitud variable y de constantes".*

Bernoulli también utilizaba la letra φ como signo de función y, si era una función de variable x, escribía φ x.

La "*Introductio in analysin infinitorum" (Introducción al análisis de las magnitudes infinitamente pequeñas)* de **Leonhard Euler** se puede considerar la piedra angular del nuevo análisis. Desde este importante tratado en dos volúmenes de 1748, **la idea de "función" pasó a ser la idea fundamental del análisis**. En él se define con mayor precisión el concepto de función ya introducido por Bernoulli:
"Una función de una magnitud variable es una expresión analítica construida, de alguna manera, con esta magnitud variable y con números o magnitudes constantes".
Otra definición encontrada en otro libro: "Una función de una cantidad variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes".

La definición de función que dio, presidió el desarrollo de las matemáticas durante más de un siglo. Hoy en día esta definición es inaceptable, ya que no queda explicado qué es una "expresión analítica". Euler, de hecho, poco después , tuvo que precisar su definición:

"Si algunas cantidades dependen de otras de tal modo que si estas últimas cambian, también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas"

Después de esto seguían quedando muchas preguntas sin aclarar o en el aire: ¿Cómo es esa dependencia?, ¿cómo expresarla, calcularla o representarla?, ¿cuántas variables pueden intervenir?
Leonhard Euler introdujo la notación *f(x)* *–tanto el uso de la letra f como de los paréntesis* -que hoy utilizamos.

El concepto de función ha ido evolucionando y perfilándose a lo largo del tiempo. ¿Qué requisitos se le ha ido exigiendo a dicho concepto?
- Una función relaciona dos variables.
- Las funciones describen fenómenos naturales.
- Las funciones pueden ser representadas gráficamente.

Muchos matemáticos trabajaron en dar una definición precisa de función. Se pasaron casi dos siglos puliendo poco a poco el concepto hasta que, en el **S. XX, Edouard Goursat** dio en 1923 la definición que aparece en la mayoría de los libros de texto:

"Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación y=f(x)".

2.2. Principales pensadores matemáticos que estudiaron sobre el concepto de función.

o **Nicole Oresme (1323(apr)-1382) :** matemático de Normandía (francés) del siglo XIV. Afirmó en 1350 que las leyes de la naturaleza son relaciones de dependencia entre "dos cantidades". Puede considerarse una primera aproximación al concepto de función.

o **Galileo Galilei (1564-**1642): (finales del siglo XVI) Utiliza por primera vez la experimentación cuantitativa (diseña, experimenta, mide, anota) para establecer relaciones numéricas que describan fenómenos naturales

o **Renè Descartes** (1596-1650): Filósofo y matemático francés del siglo XVII que con su algebrización de la geometría, propicia que las funciones puedan ser representadas

gráficamente. Introduce la geometría analítica. Desarrolló las ideas que se habían usado los anteriores siglos para representar en el plano relaciones entre magnitudes.
El nacimiento de la geometría analítica contribuyó también directamente a la formación del concepto de función. De esta forma, cualquier curva del plano podía ser expresada en términos de ecuaciones y cualquier ecuación que relacionase dos variables podía representarse geométricamente en el plano.
Influyó notablemente en el pensamiento de su época y en el de siglos posteriores.

Durante toda su vida tuvo una salud delicada. Por eso, en el colegio donde estudió interno se le permitió estudiar acostado. Esto se convirtió en hábito, de modo que una gran parte de su obra la elucubro e incluso la elaboro en la cama. Y en la cama se le ocurrió su **sistema de coordenadas**: un día se entretuvo siguiendo el vuelo de una mosca e imaginó cómo se designaría su posición en cada instante mediante la distancia a la que se encontrara de cada pared.

Aunque esta idea no era del todo original, pues ya para entonces se manejaban las coordenadas geográficas, longitud y latitud, la invención de Descartes le permitió expresar las curvas mediante ecuaciones que ligan sus coordenadas. Esta ha sido una de las mayores aportaciones al mundo de la ciencia.

Como en aquella época los científicos escribían en latín, Descartes era conocido por la forma latina de su nombre: Cartesius. De ahí vienen las expresiones pensamiento cartesiano o coordenadas cartesianas”. (***3º ESO.Editorial Anaya).***

o **Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).** Nació en Alemania. Estudió leyes y filosofía, se licenció en derecho y ejerció la política, que le llevó a recorrer Europa. Esto y su inquietud por todas las facetas del saber le permitieron tomar contacto con universidades y científicos de distintos países y adquirir vastos conocimientos en otros campos, com o la biología, la física y las matemáticas. Hizo importantes aportaciones en cálculo y lógica
Descubrió a la vez que Newton y de forma independiente el cálculo de funciones moderno. <u>Fue quien utilizó por primera vez, en 1673, el *término función*</u> con el significado que hoy le damos en matemáticas, antes de que Euler lo precisara. <u>Introdujo</u> en el lenguaje matemático algunas de las <u>notaciones y términos</u> que se usan en la actualidad (por ejemplo: <u>constante, variable y parámetro</u>. Además inventó el sistema binario en el que, actualmente, están basados todos los procesos informáticos. También hizo importantes aportaciones a la Física, la Biología y la Tecnología. En filosofía fue uno de los precursores de la manera de pensar racionalista. ***3º ESO.Editorial Anaya.***

o **Johann Bernoulli** (1667-1748). Nació en Basilea (Suiza). Sus estudios abarcan la Física, la Química, y la Astronomía, aparte de la Matemática. Intentó desarrollar trigonometría y la teoría de logaritmos desde un punto de vista analítico y experimentó con varios tipos de notaciones para representar una función de x, de la que la más parecida a la moderna era Φx. Una <u>primera definición explícita del concepto de función</u> que recoge los diferentes aspectos del concepto que se estaba fraguando procede de este pensador en el año 1718. Su idea más bien vaga de lo que era una función venía expresada como “una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias”. En Francia se convirtió en defensor de Leibniz en la polémica que mantenía con Isaac Newton, por deslindar quién había sido el primero en enunciar los principios del cálculo infinitesimal. ***Carl B. Boyer. "Historia de la Matemática". Alianza Universidad Textos).***

Johann Bernouilli Leonhard Euler

- **Leonhard Euler** (1707-1783). Nació en la ciudad suiza de Basilea. Recibió una formación muy completa ya que al estudio de la matemática se unió el de la teología, la medicina, la astronomía, la física y lenguas orientales. Publicó en 1748, la *Introductio in analysin infinitorum,* importante tratado en dos volúmenes. Es la piedra angular del nuevo análisis. Desde ese momento, la idea de "función" pasó a ser la idea fundamental del análisis.

Ya estaba implícita en la geometría analítica de Descartes y, sobre todo, en la de Fermat, así como en el cálculo de Newton y Leibniz. En dicho tratado se define una función de una cantidad variable como: "Función es cualquier expresión analítica formada con cantidades variables y con cantidades constantes". Hoy en día esta definición es inaceptable, ya que no queda explicado qué es una "expresión analítica".

Entre 1748 y 1755, fue perfilando el concepto, al que dio precisión y generalidad, admitiendo, finalmente, que una relación entre dos variables puede ser función aunque no haya una expresión analítica que la describa.

Se le considera uno de los pilares de las Matemáticas, junto a Gauss, Newton, Arquímedes... y pocos más.

Fue, sin duda, uno de los científicos más prolíficos y polifacéticos de la historia, como demuestran sus trabajos en física, arquitectura, ingeniería, astronomía... y, especialmente, en matemáticas.

Contribuyó al desarrollo del lenguaje matemático, aportando notaciones que se siguen usando en la actualidad en geometría, en álgebra, en trigonometría y en análisis.

Por ejemplo: el uso de las letra minúsculas a, b, c para los lados de un triángulo y las correspondientes letras mayúsculas A,B,C para los ángulos respectivamente opuestos a ellos, así como la adopción de las letras r, R y s para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y el semiperímetro del triángulo, respectivamente, la notación lx para el logaritmo de x, el uso tan familiar hoy de la Σ para representar una suma y, quizá **la más importante de todas, la notación f(x) para una función de x,** utilizada en los *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (Revista de investigación publicada por la Academia* de San Petersburgo de 1734-1735). Nuestro sistema de notaciones matemáticas es hoy lo que es debido más a Euler que a ningún otro matemático a lo largo de la historia.

La "*Introductio in analysin infinitorum" (Introducción al análisis de las magnitudes infinitamente pequeñas)* de Euler se puede considerar la piedra angular del nuevo análisis. Desde este importante tratado en dos volúmenes de 1748, la idea de "función" pasó a ser la idea fundamental del análisis. En él se define con mayor precisión el concepto de función ya introducido por Bernoulli:

"Una función de una magnitud variable es una expresión analítica construida, de alguna manera, con esta magnitud variable y con números o magnitudes constantes".

El párrafo cuarto de la *Introductio* define una función de una cantidad variable como "cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes".

Las conocidas identidades de Euler:

$$sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

De la suma de las dos anteriores:

$$e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$$

Esta última identidad se verifica para todos los ángulos, *x*, medidos en radianes y, en particular, para $x = \pi$ se obtiene la famosa **"igualdad de Euler", $e^{i\pi}+1=0$,** igualdad que relaciona los números irracionales trascendentes *e* y π con la unidad imaginaria y los enteros 0 y 1. Utilizando notación logarítmica, la igualdad de Euler adquiere la forma $ln(-1)=i\pi$ y, por tanto, **los logaritmos de los números negativos tienen sentido en $\mathbb{C}$** y son complejos y no números reales.

Las identidades de Euler se publicaron por primera vez en la *Introductio*. Las funciones elementales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales, parecen escritas y consideradas de forma prácticamente idéntica a como las tratamos hoy. Las notaciones abreviadas sin. , cos., tang., cot., sec. y cosec. que usa Euler en su *Introductio* publicada en latín se parecen más a las formas actuales en inglés que a las abreviaturas correspondiente en los idiomas latinos. Por otra parte, Euler fue de los primeros en tratar los logaritmos como exponentes, de la manera que nos es hoy tan familiar.

"Historia de la Matemática". Carl B. Boyer. Alianza Universidad Textos.

3. NORMATIVA (BOE Y BOCYL).

Los libros de texto que se han analizado están editados conforme a las normativas de la LOE (Ley Orgánica de Educación) y el correspondiente Decreto Autonómico. Recientemente se ha aprobado una nueva ley de educación, la LOMCE (Ley Orgánica 8/2013 para la Mejora de la Calidad Educativa) y se publicó en el BOE de 9 de diciembre de 2013, pero todavía no se ha podido trabajar con libros que se ajusten a esta nueva ley. De hecho, el próximo curso 2014-15 será el primero donde los alumnos trabajen con libros adaptados a la nueva Ley en los cursos impares de Educación Primaria (1º, 3º y 5º) y en el primer curso de los ciclos de Formación Profesional Básica. Las editoriales están trabajando en ello. Se irá instalando progresivamente en el resto de cursos.

ESO. Normativa aplicable.

- *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*
- *Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.*

La Normativa Regional se ha establecido en base a la Nacional, es decir, que los contenidos que se reflejan en la Normativa Regional son, como mínimo los que vienen reflejados en la Normativa Nacional. En algún caso, si cada Gobierno Regional ha considerado que es conveniente incluir algún concepto a mayores o algún matiz con respecto a la Normativa publicada en el BOE, lo ha hecho.

Por esta razón, en el estudio del cumplimiento de los libros de texto de las Normativas, en cuanto a los contenidos, lo vamos a centrar en la NORMATIVA REGIONAL.

En 4º curso de la ESO se ha analizado sólo el currículo de la opción B porque es más completo que el de la opción A. Las diferencias que existen entre ambas opciones, en cuanto al tema de funciones, se pueden resumir del siguiente modo:

- Los conceptos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetría y periodicidad que se ven en la opción A pero no en la B, son conceptos que ya se estudiaron en 3º de ESO. Es un repaso y afianzamiento de conceptos.
- En cambio, en la opción B se estudian las funciones definidas a trozos y las funciones logarítmicas a mayores de la opción A.

4. CONTENIDOS.

4.1. Coordenadas cartesianas en el plano.

1º ESO Y 2º ESO

Según la normativa, el contenido que hay que tratar en primero y segundo de la ESO en cuanto a coordenadas cartesianas en el plano es lo siguiente:

	BOE	BOCYL
1º ESO	"Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados". "Identificación de puntos a partir de sus coordenadas".	*"El plano cartesiano. Ejes de coordenadas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas".*
2º ESO	--------------------	*"Coordenadas cartesianas"*

Como se irá viendo a través del trabajo, la normativa Regional (BOCYL) es más amplia y siempre incluye los contenidos de la normativa Estatal (BOE). En ocasiones el BOCYL amplía algún concepto con respecto a lo que incluye el BOE.
Vemos cómo se plantea en los libros de texto.

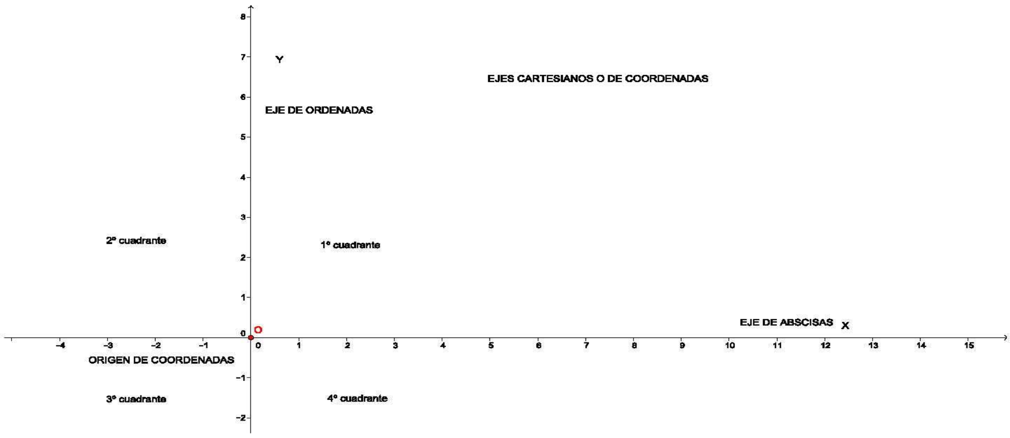
- **Los ejes cartesianos. Representación de un punto.**

Los ejes cartesianos:

Para representar puntos en el plano se utilizan dos rectas perpendiculares y graduadas, una horizontal y otra vertical, que se llaman ejes cartesianos o ejes de coordenadas.

- El eje horizontal se llama eje de abscisas y representa la coordenada x, por eso se suele llamar eje X.
- El eje vertical se llama eje de ordenadas y representa la coordenada y, por eso se suele llamar eje Y.
- El punto de corte de los dos ejes se llama origen de coordenadas y se representa por O.

Los ejes cartesianos dividen el plano en cuatro cuadrantes: 1º, 2º, 3º y 4º (en el sentido contrario a las agujas del reloj).



<u>Representación de un punto:</u>

El plano tiene dos dimensiones y cualquier punto que se encuentre en el plano viene determinado por esas dos dimensiones.

Los dos números que determinan la posición de un punto en el plano se llaman coordenadas y se representan mediante en par ordenado:

P(x,y)

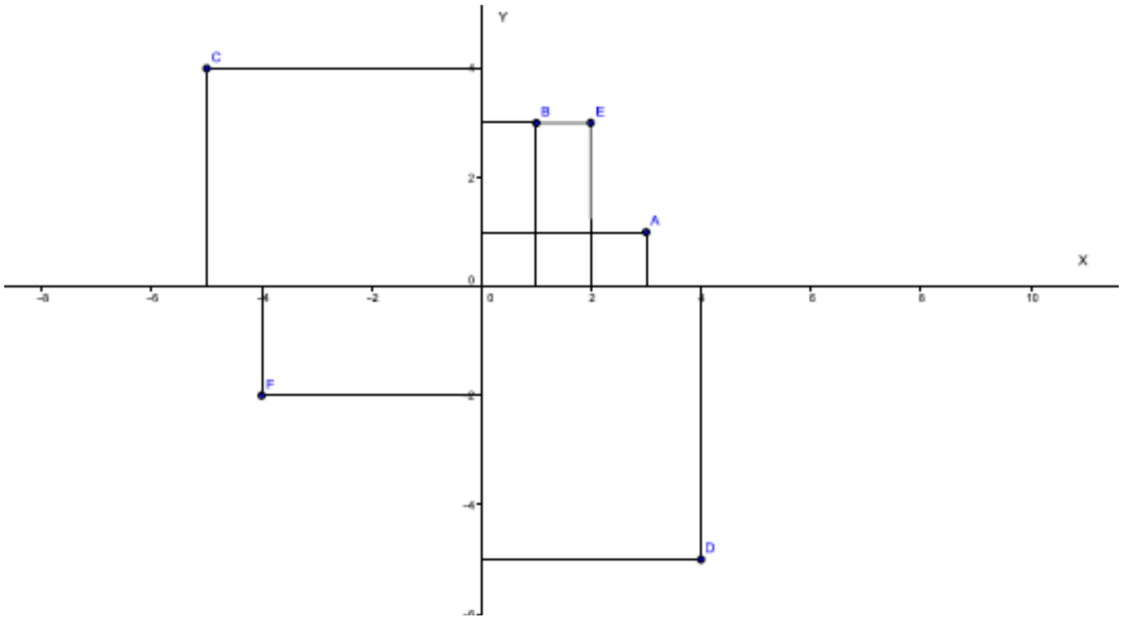
- La primera coordenada se mide sobre el eje horizontal y se denomina abscisa del punto: x.
- La segunda coordenada se mide sobre el eje vertical y se denomina ordenada del punto: y.

Para representar un punto debemos saber lo siguiente:

- En el eje de abscisas: lo que está a la derecha del origen de coordenadas es lo positivo y lo que está a la izquierda es lo negativo.
- En el eje de ordenadas: lo que está por encima del origen de coordenadas es lo positivo y lo que está por debajo es lo negativo.

No es lo mismo A (3, 1) que B (1, 3) ni C(-5,4) que D(4,-5). 2º y 4º cuadrantes.

Representar también los puntos E (2,3) y F (-4,-2).



Todos los libros analizados cumplen la normativa en cuanto al contenido.

4.2. Formas de expresar una relación.

	BOE	BOCYL
1º ESO	"Organización de datos en tablas de valores". "Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores". "Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales". "Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas". "Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica".	"Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores o de su gráfica. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales". "Identificación de otras relaciones de dependencia sencillas". "Interpretación y lectura de tablas de valores y gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información".

2º ESO	“Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica”. “Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla”. “Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos”.	“Tablas de valores y gráficas cartesianas Elaboración de una gráfica a partir de una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla que relacione dos variables”. “Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica” “Construcción de tablas y gráficas a partir de la observación y experimentación en casos prácticos”. “Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información”.
3º ESO	“Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias”. “Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica”. “Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados”. “Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica”.	Construcción de tablas de valores a partir de enunciados, expresiones algebraicas o gráficas sencillas.
4ª ESO (OPCION B)	“Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados”.	“Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión algebraica. Análisis de resultados utilizando el lenguaje matemático adecuado”. “Interpretación, lectura y representación de gráficas en la resolución de problemas relacionados con los fenómenos naturales y el mundo de la información”

<u>**3º ESO**</u>

Una correspondencia entre dos conjuntos es cualquier **relación** que se establece entre los elementos de esos conjuntos.

En una correspondencia se llama **conjunto inicial** al conjunto de partida, y conjunto final, al **conjunto de llegada**.

En una correspondencia, los elementos del conjunto inicial pueden tener relación con varios, uno o ningún elemento del conjunto final, e igual les sucede a los del conjunto final respecto de los del inicial.

Dos **conjuntos o magnitudes son dependientes entre si** cuando los valores del primero determinan los valores que toma el segundo y viceversa.

En matemáticas, cuando existe una relación de dependencia entre dos magnitudes se dice que **se puede expresar una magnitud en función de la otra.**

Existen muchas situaciones en las que intervienen dos magnitudes que presentan dependencia entre ellas. Así, el ángulo interior de un polígono depende del número de lados del polígono, el coste de una llamada telefónica depende del tiempo que dure la llamada, y el precio de unas manzanas depende de la cantidad que se compre.

Estos ejemplos de relación entre magnitudes tienen en común dos condiciones:

- Intervienen dos magnitudes.
- Cualquier valor de la primera magnitud está relacionado con un solo valor de la otra magnitud.

4.2.1. <u>Mediante tablas.</u>

<u>**1º ESO**</u>

Para expresar la relación que existe entre dos magnitudes, empleamos una tabla de valores.

En una tabla, a cada valor de la primera magnitud le corresponde un valor de la segunda. Esta última magnitud está en función de la primera o depende de ella.

<u>Ejemplo 1</u>:

Nº CHURROS / PRECIO(€)										
Cantidad	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Precio	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1.0**	**1.2**	**1.4**	**1.6**	**1.8**	**2.0**

Nos está informando de cuanto pagaremos dependiendo de la cantidad de churros que compremos: (1,0.2), (2,0.4), (3,0.6)…….(10,2.00).

Esta tabla se podría haber puesto igual en forma de columna, en lugar de en forma de fila.

<u>Ejemplo 2</u>: Un estudio ginecológico muestra cómo aumenta la longitud del feto cada mes de la

gestación en el vientre de su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

A cada edad le corresponde una longitud determinada. La longitud del feto depende o ésta en función del mes de gestación.

De las tablas de valores podemos obtener información sobre la relación de las magnitudes:

- Entre el cuarto y el quinto mes es cuando más crece el feto: 9cm.
- Durante el periodo de gestación, el feto aumenta en más de 10 veces su tamaño: de 4cm a 42cm.

Ejemplo 3: La tabla muestra el consumo medio de electricidad de una vivienda a distintas horas del día:

Horas del día	**Consumo (kWh)**
0.00	40
2.00	40
4.00	50
8.00	62
12.00	58
16.00	55
20.00	68

a) ¿A qué hora se produce el mayor consumo? El mayor consumo se produce a las 20.00.

b) ¿Hay momentos en los que no varía el consumo? Sí, desde las 0.00 hasta las 2.00, el consumo no varía.

c) ¿En qué franja horaria se incrementa más el consumo? Se incrementa más el consumo entre las 16.00 y las 20.00.

También podemos construir una tabla a partir de un conjunto de pares de puntos.

Por ejemplo, tenemos los pares que representan la edad y el peso medio de los niños entre 12 y 18 años:

(12, 55), (13, 56), (14, 58), (15, 61), (16, 65), (17, 70), (18, 75)

La tabla sería:

Edad	12	13	14	15	16	17	18
Peso	55	56	58	61	65	70	75

4.2.2. Mediante gráficas.

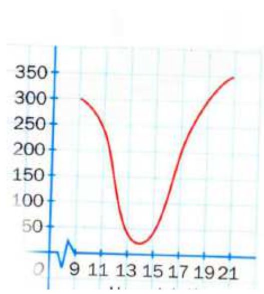
1º ESO

No cabe duda de que las imágenes informan de manera más directa que los números, por ello en muchas ocasiones es conveniente trasladar a gráficas la información que recibimos en forma de tablas, para poder resumir todo el mensaje que aportan los datos con un solo vistazo.

En una **gráfica** que representa la relación entre dos magnitudes se asocia cada eje a una magnitud, y a cada valor de la magnitud del eje de abscisas le corresponde un valor del eje de ordenadas. La magnitud del eje de ordenadas depende o está en función de la primera.

Ejemplo 1: En el cuaderno de campo de Pedro aparece esta gráfica para mostrar la variación de la longitud de la sombra de un árbol en un día.

Longitud sombra árbol (cm)



Hora del día

Fuente: Libro 1º ESO. Editorial SM. Pítágoras. Tema 8.

Observando la gráfica podemos concluir que la sombra disminuye a lo largo de la mañana y, a partir de una hora, empieza a aumentar casi al mismo ritmo con el que disminuye.

Escalas

Los **ejes** deben estar **graduados** cada uno con su escala, de modo que se puedan cuantificar los valores de las dos variables.

Las escalas en los ejes nos permiten no solo describir cualitativamente el comportamiento, sino también cuantificarlo.

En la **descripción cualitativa** se atiende a como varía una variable respecto a la otra.

En la **descripción cuantitativa** se puede precisar cuánto varían las variables.

Errores frecuentes a la hora de representar una función gráficamente.

- En ocasiones, las funciones no se representan por líneas que unen los distintos puntos, sino mediante puntos. Ejemplo: el precio pagado en función de los churros comprados. En este caso, no tiene sentido unir los puntos porque no podemos comprar “medios churros “o un “tercio de churro”.

o Otro error común es pensar que las escalas de los dos ejes tienen que ser iguales. La escala que se utiliza en el eje de ordenadas puede ser distinta a la del eje de abscisas. Esto lo podremos hacer cuando la relación entre los valores que toman las variables independiente y dependiente sea muy distinta.

4.2.3. Mediante fórmulas o expresión analítica.

1º ESO

Hemos dado la información tanto con una tabla como con una gráfica, pero existe otra posibilidad: mediante una **expresión analítica.**

Llamemos P al precio final y C al número de churros que compramos. El precio final es igual al precio de cada churro por el número de churros que compramos, es decir:

$$P= C\cdot 0'20$$

Una fórmula, en este caso, es una igualdad en la que a partir de los valores de x de una magnitud, se obtienen los valores de y de la otra.

Ejemplo 1: Tenemos una máquina que opera de esta forma: al introducirle un número entero, lo multiplica por 2, le suma 1 y, luego, nos devuelve el resultado.

Construimos la siguiente tabla:

Número Introducido	-2	0	1	..	**X**
Número devuelto	2(2)+1=3	2·0+1=1	2·1+1=3	..	**2·x+1=y**

Si designamos con *x* el número introducido y con y el número devuelto, la fórmula que relaciona ambas magnitudes es:

$$y= 2x+ 1$$

2º ESO

La relación entre dos magnitudes expresada mediante una tabla o una gráfica no siempre puede expresarse mediante una fórmula.

3º ESO

La expresión analítica de una función *es* una ecuación que relaciona algebraicamente las dos variables que intervienen.

4.2.4. Mediante un enunciado.

3º ESO

Ejemplos:

Un coche arranca en el instante t = 0 segundos, aumenta su velocidad de manera uniforme hasta 10 m/s en t = 30 segundos, mantiene esta velocidad desde t = 30 segundos hasta t = 70 segundos, y frena en 20 segundos, disminuyendo su velocidad hasta pararse.

Hoy había mucho atasco. Rocío ha salido de casa y ha tardado 30 minutos en recorrer 10 km. Después, ha parado durante 40 minutos para hacer unas compras, y ha tardado 20 minutos en regresar a casa.

Si representásemos la gráfica que relaciona el tiempo (en segundos) con la velocidad (en m/s) en el primer caso y el tiempo (en minutos) con la distancia a su casa (en km) en el segundo caso, veríamos que las dos gráficas anteriores son iguales, aunque están representando casos muy distintos

En este apartado de formas de expresar una relación, también los libros cubren todos los contenidos que fija la Normativa. En el caso de 3º de ESO, es la primera vez que se introduce la forma de enunciado como otra forma de expresión de una relación. De hecho, en el BOE no aparece esta forma de expresión, sólo aparece en el BOCYL.

Por lo general, en los libros aparecen los contenidos más estructurados, más ordenados. En la Normativa, en ocasiones, los conceptos vienen expresados de una forma ambigua aunque siempre tratan de hacer referencia a casos prácticos, vida cotidiana, fenómenos naturales, etc…

4.3. Concepto de función.

La expresión *"estar en función de"* se utiliza en el lenguaje cotidiano y viene a significar *"depende de".* Por ejemplo: la ropa de abrigo que te pones está en función del frio que hace….o la distancia a la que cae la flecha, suponiendo constante la tensión del arco, está en función de la inclinación del tiro.

1º ESO

“Se denomina **función** a la relación que existe entre cada elemento de un conjunto, llamado inicial, con un elemento de otro conjunto, denominado final, con la única condición de que cada elemento del conjunto inicial solo se pueda corresponder con un único valor en el conjunto final”.

“Una **función** es una relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor, x, de la primera le corresponde un único valor, y, de la segunda. Este valor también se designa por f(x) y se conoce como imagen”.

Actividad:

Indica si son o no son funciones las siguientes relaciones.

a) Relacionamos cada número natural con su anterior y con su posterior. NO: Son 2 imágenes.

b) Asociamos cada número entero con su opuesto. SI

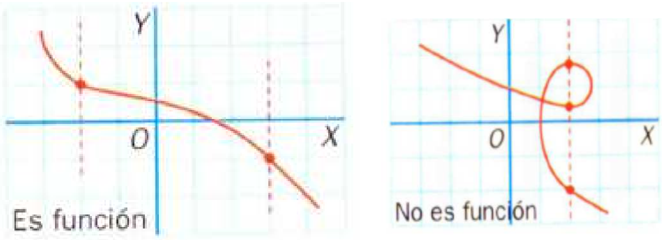
c) Hacemos corresponder cada número de dos cifras con los dígitos que lo forman. NO: 35 y 53.

d) Asociamos cada número entero de dos cifras con su cifra de las decenas. SI

e) Asignamos a cada número su doble. SI

2º ESO

Un criterio para reconocer si una gráfica representa una función es comprobar que cualquier recta vertical corta la gráfica, coma máximo, en un punto.



Fuente: Libro 1º ESO. Editorial SM. Pítágoras. Tema 8.

"Una función es una relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la variable independiente le corresponde, como máximo, un único valor de la variable dependiente, que llamamos imagen".

3º ESO

En tercero de la ESO no se añade ningún concepto a mayores, en cuanto a la definición de función, con respecto a lo impartido en 2º de ESO.

Las funciones sirven para describir fenómenos físicos, económicos, biológicos, sociológicos... o, simplemente, para expresar relaciones matemáticas:

El *camino recorrido* por un móvil al pasar el *tiempo.*

La *temperatura* del aire al variar la *altura.*

El *área* de un cuadrado al variar la *longitud de su lado.*

4º ESO

Función real de variable real: Es una correspondencia que asocia a cada elemento de un determinado conjunto de números reales un único número real que se designa como *f(x).*

Una función es inyectiva si cada elemento del conjunto imagen tiene un solo elemento original en el dominio, o lo que es lo mismo, una función es inyectiva cuando las imágenes de dos elementos cualesquiera del dominio son distintas.

Ejemplos:
o La función *f(x)=*x^2 no es inyectiva, ya que puntos diferentes del dominio tienen la misma imagen: f(1)=f(-1)=1.
o La función *f(x)=*x^3 si es inyectiva, ya que la raíz cúbica de un número real es única.

En este apartado es un claro ejemplo de cómo, a medida que avanzan los cursos, se van repitiendo los conceptos, pero se van añadiendo pequeños matices. En primero y segundo de la ESO sólo se hace referencia a cada valor de x, le corresponde un único valor de y. En tercero de la ESO se añade el matiz de que a cada valor de x le corresponde como máximo un solo valor de y. Esto significa que puede que haya valores de x a los que no les corresponda ningún valor de y. En cualquier caso, también se cumple la Normativa, incluso con más conceptos como la función inyectiva, en 4º ESO.

4.4. Formas de expresión de una función.

Con respecto a la Normativa aplicable, se entiende que es exactamente lo mismo que lo dicho en formas de expresar una relación, pero en este caso, con la condición adicional que supone que sea una función, no cualquier relación.
Con respecto a lo anterior, se podría añadir en 4º de ESO:

BOE: Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
BOCYL: Funciones. Estudio gráfico de una función (4º ESO, sólo OPCIÓN A).

Como hemos visto que las funciones relacionan dos magnitudes y que dos magnitudes se relacionan mediante tablas, gráficas y fórmulas, podemos deducir que **las funciones pueden venir dadas por tablas, gráficas, fórmulas y enunciado.**

Tanto para el estudio de las matemáticas como para otras ciencias o en la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con funciones.

4.4.1. Mediante una gráfica.

La gráfica de una función es la representación de los pares de puntos asociados a valores relacionados.
Una función se puede determinar por medio de su **representación gráfica** en un sistema de referencia cartesiano, formado por dos rectas perpendiculares graduadas que se llaman **ejes cartesianos** o **ejes de coordenadas.**

La gráfica de una función ofrece una **información más rápida y directa** de la función que cualquiera de las otras representaciones. La gráfica de una función permite apreciar su comportamiento global con un simple golpe de vista. Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.

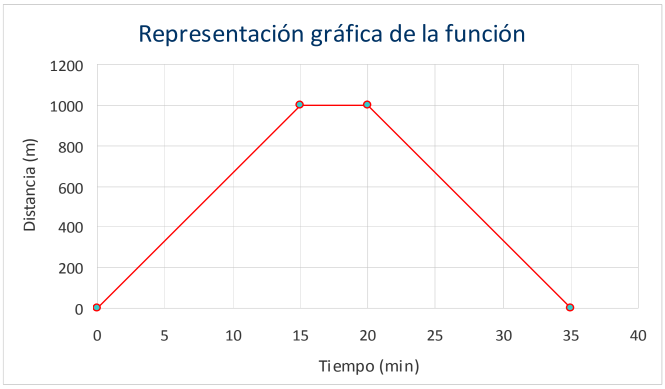
Ejemplo 1: Ana ha salido a la calle para ir a comprar el periódico al quiosco que se encuentra a 1000 metros de su casa. Ha tardado 15 minutos a la ida y se ha entretenido 5 minutos hablando con el vendedor. El camino de vuelta también lo ha hecho en 15 minutos.

Representamos esta situación mediante una gráfica.

1° Construimos una tabla con los datos que tenemos.

Tiempo (min)	0	15	20	35
Distancia (m)	0	1000	1000	0

2° Representamos los puntos obtenidos colocando el tiempo en el eje horizontal, y la distancia a la casa en el eje vertical.

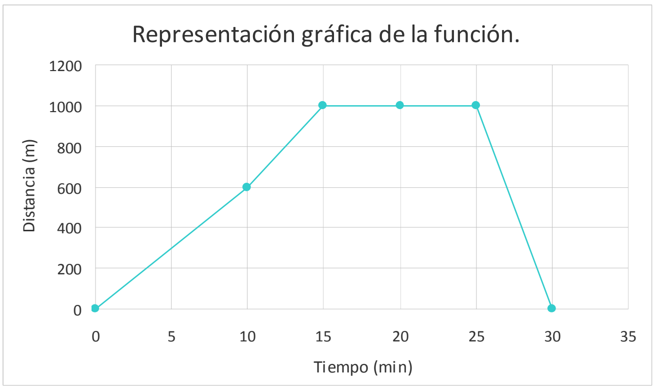


3° Estudiamos si tiene sentido unir los puntos.
En este caso, como el tiempo pasa de forma continua, los puntos se pueden unir.

Ejemplo 2: Sara sale de su casa para dar un paseo en bici. La distancia a la que se encuentra de su casa en cada momento este reflejada en esta tabla.

Tiempo (min)	0	10	15	20	25	30
Distancia (m)	0	600	1000	1000	1000	0

1° Representamos los puntos obtenidos colocando el tiempo en el eje horizontal, y la distancia a la casa en el eje vertical y (2º ESO) estudiamos su dominio y recorrido.



El dominio de la función es el tiempo que está paseando, el conjunto de valores entre t=0 y t=30 minutos.
El recorrido de la función se corresponde con los distintos valores de la distancia a la que se encuentra, es decir, entre 0 y 1000 metros.
De estos dos conceptos se hablará en el apartado Características de una función.

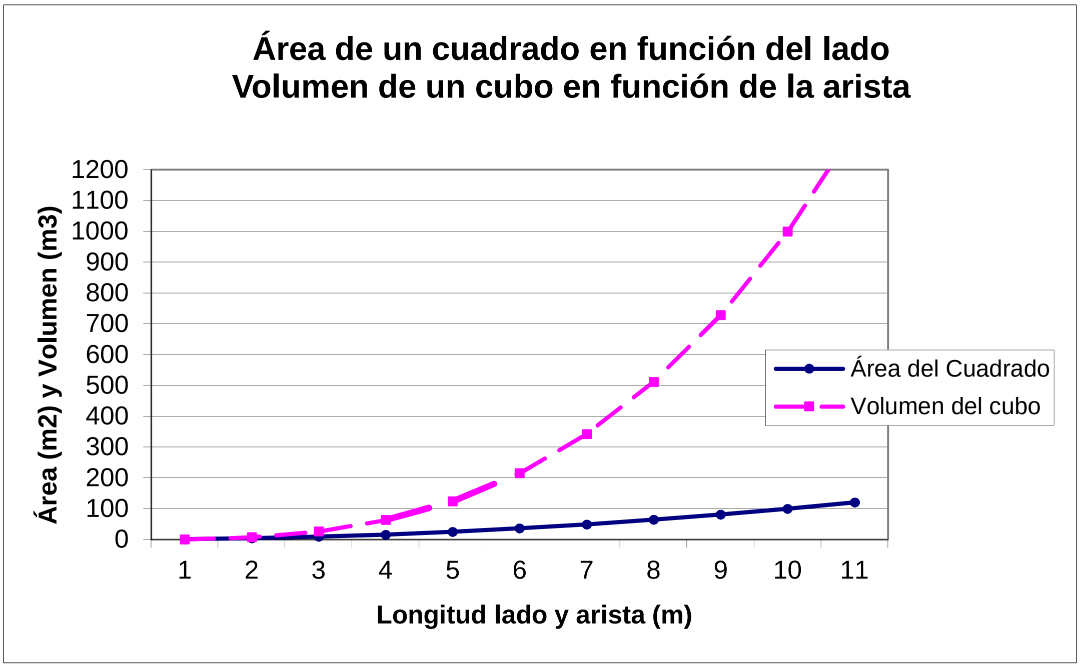
Actividad para que realicen los alumnos:
Para realizar llamadas desde el extranjero, un operador móvil tiene la siguiente oferta:
– Establecimiento de llamada: 0,75 euros.
– Coste de llamada: 1,15 euros por minuto,
Representa la gráfica de esta función.

Otros ejemplos:

La fórmula de la función que relaciona el área de un cuadrado con su lado es $A=l^2$ o la del volumen de un cubo con su arista es $V=a^3$.

- ✓ Variable independiente: longitud del lado (para el área) y arista (para el volumen).
- ✓ Variable dependiente: área del cuadrado o volumen del cubo.
- ✓ Expresiones analíticas de la funciones: $A=l^2$; $V=a^3$.

Al dar valores intermedios a la longitud del lado se obtienen valores intermedios del área o del volumen; así, tiene sentido unir los puntos.



La gráfica de la superficie del cuadrado crece más lentamente que la del volumen del cubo.

<u>2º ESO</u>

<u>De la tabla a la gráfica:</u>

Si la relación entre dos magnitudes viene dada por una tabla, se representa cada par de valores sobre unos ejes de coordenadas y se obtienen los puntos con los que se va a formar la gráfica.

Es importante comprobar si se pueden unir los puntos, lo que depende de la existencia de valores intermedios de las variables.

<u>De la fórmula a la gráfica</u>:

Para representar gráficamente una función:

1° Construimos una tabla

2° Representamos los puntos obtenidos colocando los valores de la variable independiente sobre el eje de abscisas, y los valores, de la variable dependiente, sobre el eje de ordenadas.

3° Estudiamos si tiene sentido unir los puntos.

4.4.2. <u>Mediante una tabla de valores.</u>

Una función se puede determinar a través de una **tabla de valores;** es decir, un conjunto de pares de valores de las variables dependiente *e* independiente, que se obtienen de la siguiente forma:

Se dan valores arbitrarios a la variable *x* y se obtienen sus correspondientes imágenes, los valores de *y.*

4º ESO

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos, hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca, como en el siguiente ejemplo:

La siguiente tabla de valores permite calcular lo que cada persona debe pagar a Hacienda un cierto año (cuota íntegra) en función de lo que gana (base liquidable). (Fuente: Libro 4º ESO.Editorial Anaya. T4).

BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	CUOTA ÍNTEGRA EUROS	RESTO BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	TIPO APLICABLE %
0	0	4.000	15
4.000	600	10.000	25
14.000	3.000	12.000	28
26.000	6.360	20.000	37
46.000	13.760	en adelante	45

o Alguien que gane 32 500 €: Se sitúa en la 4.ª fila.

Por los primeros 26.000 € paga 6.360 €, y por el resto, el 37%, es decir:
32.500€-26.000€=6.500€
37% de 6.500€=6.500·0,37=2.405€
Por tanto, paga 6.360€ + 2.405€=8.765€
Es decir, si gana 32 500 €, ha de pagar 8.765€.

o Obtener la cuota que corresponde a cada una de las siguientes bases liquidables:

a) 3.278 €

Esta cantidad corresponde a la primera línea:

15% de 3. 278€ = 3 278 • 0,15 = 491,70 €--> Cuota: 491,70 €

b) 14.000 €

La cuota correspondiente a esta cantidad se encuentra directamente, sin cálculos, en **la** fila 3ª --> Cuota: 3.000 €

c) 41.293,85 €

Nos situamos en la 4ª fila:

41.293,85€ - 26.000€ = 15.293,85 €

26.000€ → 6.360€

37% de 15 293,85€ = 5. 658,72€

Cuota correspondiente a 41.293,85 €: 6 .360€ + 5 .658,72 € = 12.018,72 €

d) 80.000 €

Nos situamos en la 5.ª fila: 80.000€ - 46.000€ = 34.000€

46.000€ → 13.760€

45% de 34. 000€ = 15.300€

Cuota correspondiente a 80 000 €: 13.760€+ 15. 300€ = 29.060 €

4.4.3. Mediante una expresión algebraica.

Una función se puede determinar mediante una expresión algebraica, que asocia a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente.

La expresión analítica es la forma más precisa y operativa de dar una función.

Por ejemplo, la función que asocia a cada valor del lado de un cuadrado su área viene dada por la expresión algebraica:

$$y = x^2 \text{ o } f(x) = x^2$$

Para hallar la imagen de un valor en una función, se sustituye la variable *x* de la expresión anterior por ese valor y se realizan los cálculos indicados.

Así, la imagen del valor $x = 3$ en la función anterior será:

$$f(3) = 3^2 = 9$$

La expresión algebraica determina la función de una **forma precisa**, ya que con ella es posible obtener **todos los valores que se deseen.**

4º ESO

4.4.4. Mediante un enunciado.

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa. Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada.

En el caso de las formas de expresar las funciones, los libros de texto también cumplen la Normativa, al menos en los libros que he analizado de distintas editoriales, pero siempre utilizando como base la editorial SM que, en líneas generales, considero más completa.

4.5. Características de una función.

En lo que respecta a la normativa de las características de una función, estos son los conceptos que marca dicha Normativa:

	BOE	BOCYL
1º ESO	----------	------
2º ESO	“Aportaciones del estudio grafico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos”.	“Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos absolutos o relativos”.
3º ESO	“Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte”.	“Elaboración de gráficas continuas o discontinuas a partir de un enunciado, una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla”. “Estudio gráfico de una función: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, continuidad y periodicidad. Análisis y descripción de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano”. “Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y sobre su expresión algebraica”.
4º ESO (OPCIÓN B)	“La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales”.	“Funciones: expresión algebraica, variables, dominio y estudio gráfico. “Características de las gráficas: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad”. “La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales”.

<u>**1º ESO**</u>

4.5.1. Variables que intervienen.

o <u>Variable independiente</u>: En una función f, los elementos del conjunto inicial forman la variable independiente, que se representa con una tetra como x, t...Se llama así porque no depende de otra variable; se suele representar con la letra «x» y se corresponde con el eje de abscisas de los ejes cartesianos. Es la primera magnitud y se fija previamente.

- Variable dependiente: Los elementos del conjunto final forman la variable dependiente, que se representa por la letra y o por la notación *f(x)*.Depende de la variable x, se suele representar con la letra «y» y se corresponde con el eje de ordenadas de los ejes cartesianos. Es la segunda magnitud y se deduce de la variable independiente.

2º ESO

4.5.2. Signo.

- Una función es positiva cuando su gráfica se encuentra por encima del eje de abscisas.
- Una función es negativa cuando su gráfica se encuentra por debajo del eje de abscisas.

4.5.3. Dominio y recorrido.

- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente (originales). Se representa con Dom (f) ó D(f).

Un intervalo cerrado [a, b] está formado por los números *x* tales que:

$$a \leq x \leq b$$

Un intervalo abierto (a, *b)* está formado por los números *x* tales que:

$$a < x < b$$

- La **imagen o recorrido** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente (imágenes). Se representa con Im (f), I(f) ó R(f).

4º ESO

Si una función viene dada por su gráfica, el dominio y la imagen se determinan proyectando ortogonalmente los puntos de la gráfica sobre el eje *X* y sobre el eje Y.

Si una función viene dada por su expresión algebraica, el dominio se determina buscando los números reales para los que se puede hallar su imagen a través de la función.

Se llama **dominio de definición** de una función, *f* y se designa por *Dom f* al conjunto de valores de *x* para los cuales existe la función.

El dominio de definición de una función, *Dom f,* puede quedar restringido por una de las siguientes causas:

- *Imposibilidad de realizar alguna operación.* Esto ocurre si en *f(x)* hay:

- *Denominadores.* Los valores que hacen cero un denominador no están en el dominio de definición.

Por ejemplo: Para $f(x) = \frac{1}{x+3}$, el dominio es el conjunto de todos los reales salvo x=-3. Es decir

Dom (f) = (-∞, -3) U (-3, +∞).

-*Raíces cuadradas*. No están en el dominio de definición los valores que hacen que la expresión bajo la raíz sea negativa.

Por ejemplo: Para $f(x) = \sqrt{x-2}$, los valores x<2 no están en el dominio de definición. Por tanto, Dom (f) = [2, +∞).

• *Contexto real del cual se ha extraído la función.*

Por ejemplo, si $A = l^2$ representa el área de un cuadrado en función del lado, el dominio es (0,+∞), pues la longitud del lado ha de ser un número positivo.
Cuando no se dice lo contrario, el dominio de definición es tan amplio como permitan las operaciones que componen la expresión analítica de la función.

• *Voluntad de quien propone la función.*
Así, podemos referirnos a la función y = 2x definida en (0, 4] sin más razón que el hecho de que queramos hacerlo.

La imagen es el conjunto de números reales que constituyen todas las imágenes anteriores.
Se llama **recorrido** de *f* al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuales hay un *x* tal que *f(x) = y.*

Ejemplo: Determinar el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

a) f *(x)* = 2x + 1 *b)* f (x) = $+\sqrt{x}$
a) Debemos analizar para que números reales se pueden realizar las operaciones de multiplicar un número por 2 y sumar 1 al resultado. Como estas operaciones se pueden efectuar con cualquier número real, el dominio de la función es todo el conjunto de los números reales: D (f) = R
La imagen o recorrido de la función son todos los números reales, porque el resultado de duplicar un número se puede hacer tan grande o tan pequeño como se quiera: Im (f) = R
b) El dominio de la función es todo el conjunto de los números reales positivos, porque no se pueden calcular raíces de números negativos: D (f) = [0 , +∞).
La imagen de cualquier valor es un número positivo porque lo impone la función.

4.5.4. Puntos de corte con los ejes.

Para conocer mejor como es la gráfica de una función, resulta muy útil hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
• Los **puntos de corte con el eje de abscisas o eje X** se obtienen resolviendo la ecuación que resulta al igualar a cero la expresión algebraica de la función. Tienen la segunda coordenada igual a cero. Son de la forma **(a, 0).**
Al contrario de lo que ocurre con el eje *de* ordenadas, puede existir más de un punto

de corte con el *eje* de abscisas.

Los puntos de corte de una función con el eje *X* se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \qquad f(x) = 0$$

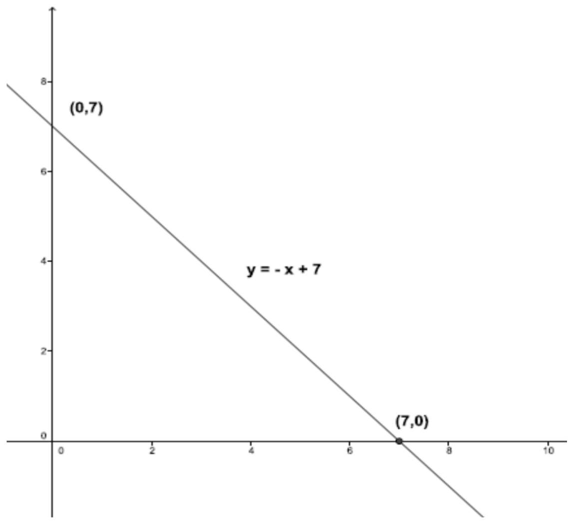
• Los **puntos de corte con el eje de ordenadas o eje Y** se obtienen hallando la imagen del valor *x* = 0 en la función. Tienen la primera coordenada igual a cero. Son de la forma **(0, b).**

Sólo existe un punto de corte con el eje de ordenadas, porque para un valor de la variable dependiente (x = 0) únicamente puede existir un valor de la variable independiente.

Los puntos de corte de una función con el eje Y se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \qquad y = f(0)$$

Es decir, se trata de calcular la imagen del valor 0 en la función.



Hay funciones que cortan al eje Y y no al X, o que cortan al eje X en varios puntos o que no cortan ni al eje X ni al Y.

4.5.5. Tasa de variación.

3º ESO

La **tasa de variación, TV**, de una función f(x) en un intervalo [a, b] es el aumento o disminución que experimenta el valor de la función al pasar la variable independiente del valor *a* al valor *b.*

TV [a, b] = f(b) - f(a)

4.5.6. Continuidad y discontinuidad.

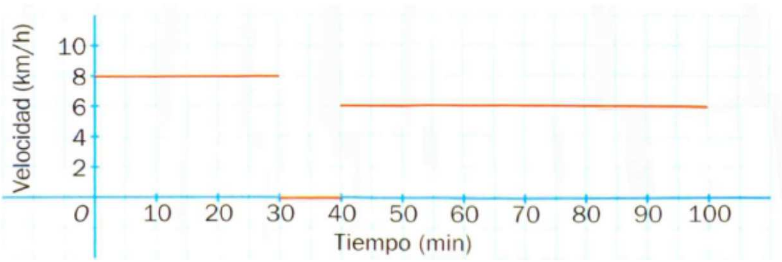
2º ESO

Una función es **continua** si su gráfica no presenta interrupciones ni saltos.
Una función es continua si su gráfica se puede realizar en un único trazado.

Los puntos donde la función presenta saltos se llaman **puntos de discontinuidad.**

"Las gráficas de las funciones continuas se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel".

Ejemplo 1: Los compañeros de Ana han ido a hacer senderismo. Durante la primera media hora han caminado a una velocidad de 8 kilómetros por hora; después han descansado 10 minutos y han proseguido la marcha a 6 kilómetros por hora durante una hora más. La gráfica que representa la situación es esta:



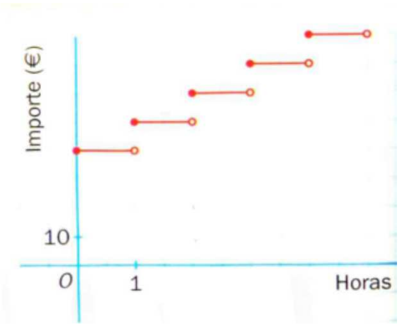
Fuente: Libro 2º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 8.

La función salta de unos tramos a otros. Estos puntos de salto corresponden a los momentos en los que Ana y sus amigos han pasado de la marcha al reposo y del reposo al movimiento; son puntos de discontinuidad, por lo que es una función discontinua.

3º ESO

- Una función es continua en los puntos de un intervalo si su gráfica no presenta saltos ni interrupciones en dicho intervalo.
- Los puntos donde la gráfica de una función presenta saltos **o interrupciones** se llaman puntos de discontinuidad.

Ejemplo 2: Un servicio técnico cobra 30 euros por el desplazamiento y 10 euros por cada hora o fracción que dure la reparación. Discontinua



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pítágoras. Tema 9.

Ejemplo 3: La relación entre la presión atmosférica en un punto y su altitud con respecto al nivel del mar. Continua.

Ejemplo 4: Un representante de ordenadores recibe cada mes 1 000 € fijos más 50 € por cada aparato vendido. Discontinua.
La variable independiente solo tiene sentido para los valores 0, 1, 2, 3, 4, ... y no para los intermedios, pues no se puede vender un número fraccionario de ordenadores.

4º ESO

Una función es **continua si** su gráfica se puede realizar de un solo trazado, es decir, presenta transiciones suaves entre puntos muy próximos. Esto equivale a decir que la gráfica de la función no presenta saltos ni agujeros en dicho punto.
Una función es **continua en un intervalo** [a, b] si no presenta ninguna discontinuidad en él.

Aunque la forma correcta de definir función continua sería con el concepto de límite, solamente el libro de SM de 4º de la ESO lo hace así puesto que es el único que ha introducido dicho concepto en meritado curso.

Nos acercaremos al concepto de continuidad usando el concepto de limite; para eso estudiaremos la función $y = x^2 + 1$.

Analizamos la continuidad para un valor cualquiera de la variable independiente; por ejemplo,

$x= 1$, correspondiente al punto P (1, 2). Los puntos de su entorno se pueden expresar como

Q (1 + h, f (1 + h)), y debemos analizar si estos puntos se acercan a P (1, 2).

- Si h toma valores positivos cada vez más pequeños, los puntos Q se aproximan cada vez más al punto P por la derecha:

h	1	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001	h→0
Q	(2,5)	(1,5,3.35)	(1,25,2,56)	(1,1,2,21)	(1,01,2,02)	(1,001,2,002)	Q→(1,2)

La función $x^2 + 1$ tiende a 2 cuando *x* tiende a 1 por la derecha.

- Y si h toma valores negativos cada vez menores, los puntos Q se aproximan cada vez más al punto P por la izquierda:

h	-1	-0,5	-0,25	-0,1	-0,01	-0,001	h→0
Q	(0,1)	(0,5,1.25)	(0,75,1,56)	(0,9,1,81)	(0,99,1,98)	(0,999,1,998)	Q→(1,2)

Se dice que la función $x^2 + 1$ tiende a 2 cuando *x* tiende a 1 por la izquierda.

Por tanto, como las dos aproximaciones (límites laterales) son iguales, la función es continua para el valor *x*= 1.

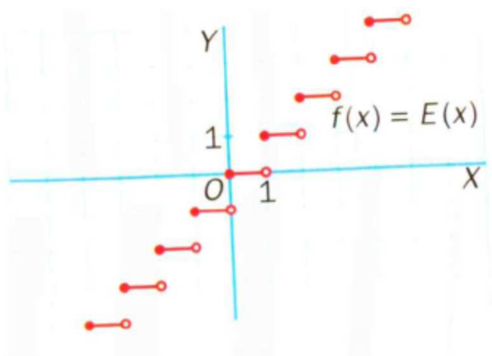
Una función f(x) **es continua** en el punto *x=a* de su dominio si se verifica que:

- Existe el límite de la función *f(x)* en *x=a.*
- La función está definida en *x=a;* es decir, existe f(a).
- Los dos valores anteriores coinciden.

$$f\ continua\ en\ x = a \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Una función es continua en un intervalo cuando es continua en todos los puntos del mismo.

La función Ent *(x),* que toma la parte entera de cada número real, presenta discontinuidades en diversos puntos.



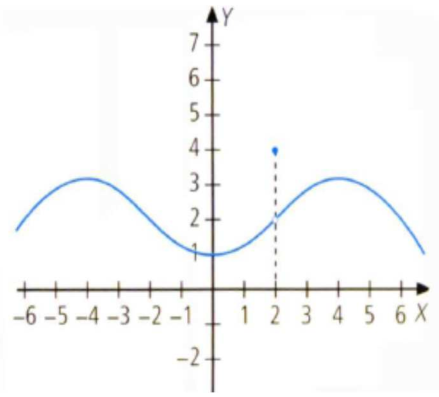
Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pítágoras. Tema 9.

4.5.6.1. *Tipos de discontinuidad.*

Las discontinuidades de una función pueden ser de dos tipos:

• Discontinuidad evitable.
Una función tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando existe el límite de la función en el punto, pero no coincide con el valor de la función en el mismo o no está definida.
Por tanto, en su gráfica existe «un hueco» en ese punto.
La función representada en la figura tiene una discontinuidad evitable en el punto $x = 2$, ya que si la imagen de este valor fuera f(2)=2 en lugar de ser f(2) = 4, se evitaría el «hueco» y la función se convertiría en continua.

"



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Edelvives. Tema 9.

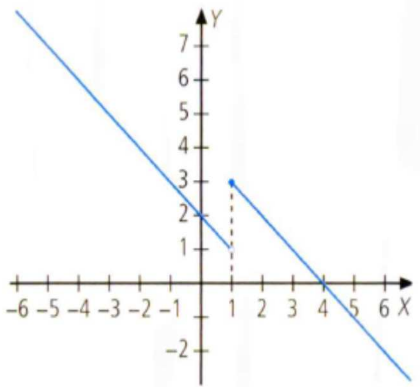
• Discontinuidad de salto (o inevitable).
Existe una discontinuidad de salto o inevitable si al menos uno de los límites laterales en el punto es infinito o bien cuando ambos son finitos, pero distintos.
Se llama salto de la función a la diferencia entre los límites laterales. El salto puede ser finito o infinito.

Existen dos tipos de discontinuidades inevitables o de salto, según sea su magnitud:

- **Discontinuidad de salto finito.**

Una función tiene una discontinuidad de salto finito en $x = a$ si la gráfica presenta un salto de longitud finita en ese punto, es decir, la diferencia de los valores que toma la función a la derecha y la izquierda del punto es un número finito.

La gráfica tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$, y el salto tiene una longitud igual al valor absoluto de la diferencia entre los valores que toma la función a la derecha y a la izquierda del valor $x = 1$:



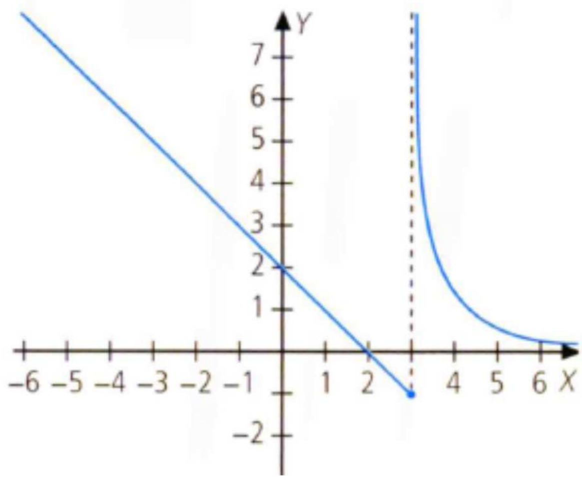
Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Edelvives. Tema 9.

Por tanto, el salto es de longitud 2.

- **Discontinuidad de salto infinito.**

Una función tiene una discontinuidad de salto infinito en x= a si la gráfica presenta un salto de longitud infinito en ese punto; es decir, la diferencia de los valores que toma la función a la derecha y la izquierda del punto es infinito.

La función inferior tiene una discontinuidad de salto infinito en *x* = 3, porque el valor que la función toma a la derecha de *x*= 3 es infinito **y,** por tanto, la magnitud del salto también es infinita.



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Edelvives. Tema 9.

4.5.7. Crecimiento y decrecimiento.

2º ESO

En el caso de la Editorial Editex, estos conceptos los introduce en 1º de ESO, cuando según la normativa no hay que introducirlos hasta 2º de ESO. Esto es otra prueba de que, en algunos casos, los libros de texto introducen más contenidos de lo que se obliga en la normativa.

Observando una gráfica nos damos cuenta de que hay intervalos en los que la función crece y otros en los que la función decrece. Esto es lo que llamamos **crecimiento y decrecimiento de una función.**

- Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar los valores de la variable independiente (eje x), también aumentan los valores de la variable dependiente (eje y).
- Una función es **decreciente** en un intervalo cuando al aumentar los valores de la variable independiente (eje x), descienden los valores de la variable dependiente (eje y).
- Una función es **constante** en un intervalo cuando al aumentar los valores de la variable independiente (eje x), los valores de la variable dependiente (eje y) toman siempre el mismo valor.

3º ESO

Una función es **creciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la tasa de variación es positiva.

TV $[x_1, x_2]>0$. Función creciente en [a,b].

$$x_1, x_2 \in [a,b]$$

Los valores que toma la función son cada vez mayores.

Una función es **decreciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la tasa de variación es negativa.

TV $[x_1, x_2]<0$. Función decreciente en [a,b].

$$x_1, x_2 \in [a,b]$$

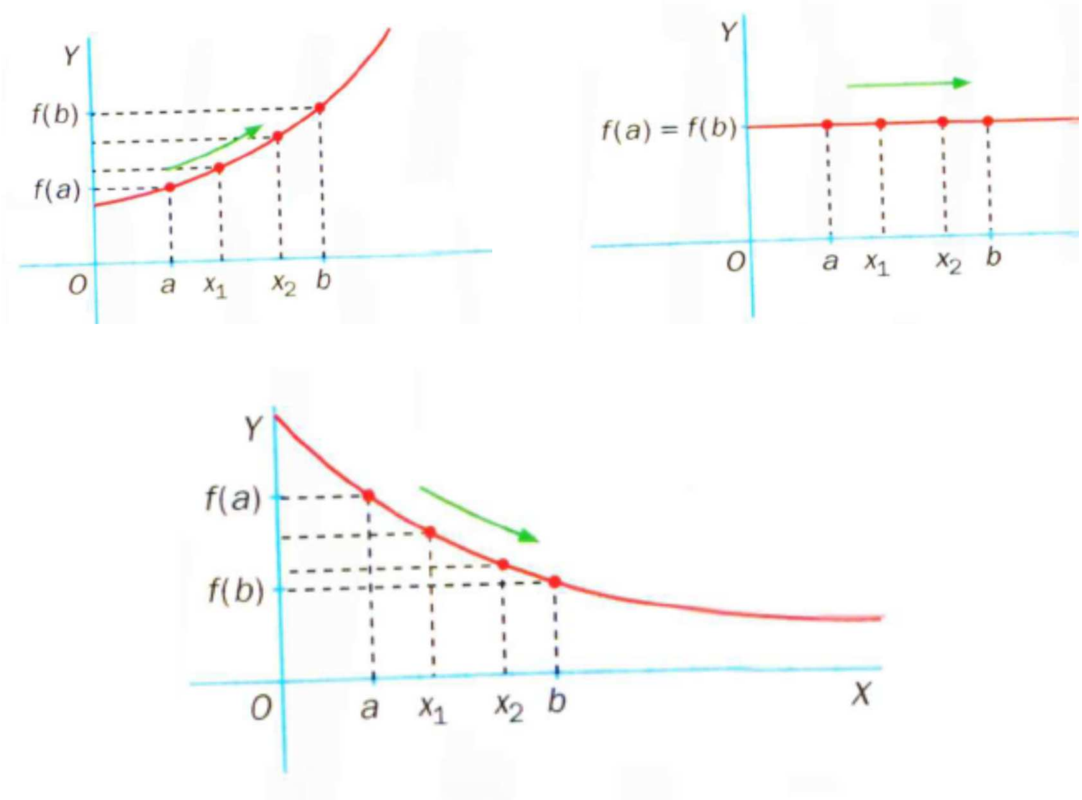
Los valores que toma la función son cada vez menores.

Una función es **constante** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la tasa de variación es nula.

TV $[x_1, x_2]=0$. Función constante en [a,b].

$$x_1, x_2 \in [a,b]$$

Los valores que toma la función son iguales.



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pítágoras. Tema 9.

4º ESO

Una función es <u>creciente en un intervalo de su dominio</u> si, tomando dos valores de ese intervalo, a y b, se **verifica que:**

$$\boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{a} < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

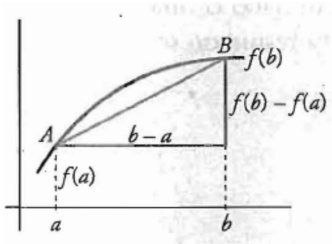
Una función es <u>decreciente en un intervalo</u>

$$\boldsymbol{si}\ \boldsymbol{a} < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

Para medir la variación (aumento o disminución) de una función en un intervalo, se utiliza la **tasa de variación media.**

Se llama tasa de variación media de la función f en el intervalo [a, *b]* al cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo.

$$\text{T.V.M. de } f \text{ en } [a,\, b] = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$$



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Anaya. Tema 4.

La T.V.M. de *f* en [a, *b]* es la pendiente del segmento *AB.*

4.5.8. Máximos y mínimos.

2º ESO

Teniendo en cuenta los conceptos de crecimiento y decrecimiento y de continuidad, se define lo siguiente:

- Una función continua presenta un **máximo relativo** en un punto del dominio cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos del dominio que lo rodean.

El **máximo absoluto** de una función es el mayor valor que toma la función **en todo su dominio.**

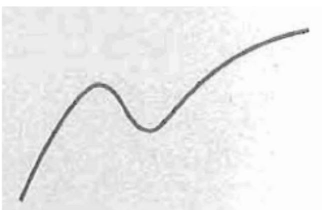
(Otra definición incorrecta: Un punto es máximo de una función cuando en dicho punto la función pasa de ser creciente a decreciente. No hace ninguna mención a que tenga que ser continua. Editex).

- Una función continua presenta un **mínimo relativo** en un punto del dominio cuando su ordenada es menor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

El **mínimo absoluto** de una función es el valor menor *que* toma la función en todo su dominio.

(Otra definición incorrecta: Un punto es mínimo de una función cuando en dicho punto la función pasa de ser decreciente a creciente. Editex).

La función puede tomar en otros puntos valores mayores que un máximo relativo y menores que un mínimo relativo.

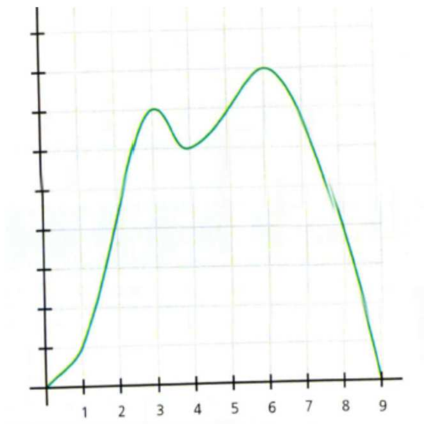


Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Anaya. Tema 4.

Al mayor y al menor valor que toma una función **en un intervalo** se les llama, respectivamente, **máximo y mínimo absolutos de la función en dicho intervalo.**

Si existen, el máximo y el mínimo absolutos coinciden con un máximo o un mínimo relativos o bien se sitúan en un extremo del intervalo.

Ejemplo 1: La siguiente gráfica representa la velocidad que alcanza una atracción en un parque de atracciones. Contesta a las siguientes cuestiones:



Fuente: Libro 1º ESO. Editorial Editex. Tema 4.

a) ¿Qué velocidad tiene cuando arranca en el instante 0? En el arranque la velocidad es 0.
b) ¿Cuándo alcanza la máxima velocidad? En el instante 6 alcanza la velocidad máxima.
c) ¿Dónde es creciente? La velocidad es creciente desde el instante 0 al 3 y desde el 4 hasta el 6.
d) ¿Dónde es decreciente? Es decreciente desde el 3 hasta el 4 y desde el 6 hasta el final?.

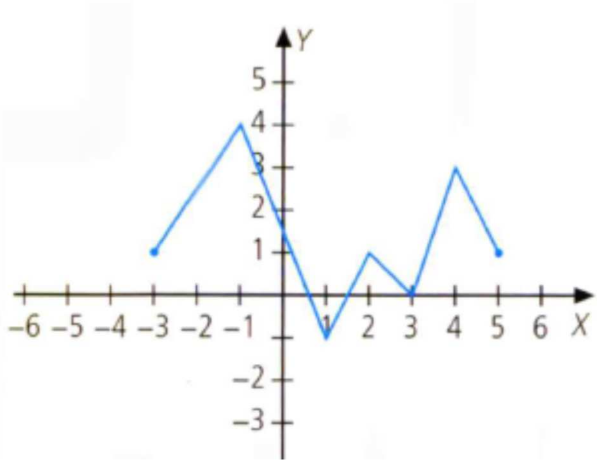
4º ESO

En este curso a los máximos y mínimos los llama **PUNTOS EXTREMOS.**

Los máximos son puntos en los *que* varía el crecimiento de la función, pasando de ser creciente a decreciente.
En los puntos mínimos, la función pasa de decreciente a creciente.

- Una función tiene un máximo relativo en x= c cuando su imagen f (c) es mayor o igual que el resto de imágenes de su entorno: f (c) ≥ f (x) si x está próximo a c.
- Una función tiene un mínimo relativo en *x*= c cuando su imagen f (c) es menor o igual que el resto de imágenes de su entorno: f (c) ≤ f (x) si *x* está próximo a c.

Una función puede tener varios máximos y mínimos relativos. El mayor de los máximos relativos es el máximo absoluto y el menor de los mínimos relativos es el mínimo absoluto.
También una función puede tener varios máximos y mínimos absolutos.



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Edelvives. Tema 9.

Los puntos (-1, 4), (2, 1) y (4 , 3) son máximos, mientras que los puntos (1 , -1) y (3 , 0) son mínimos

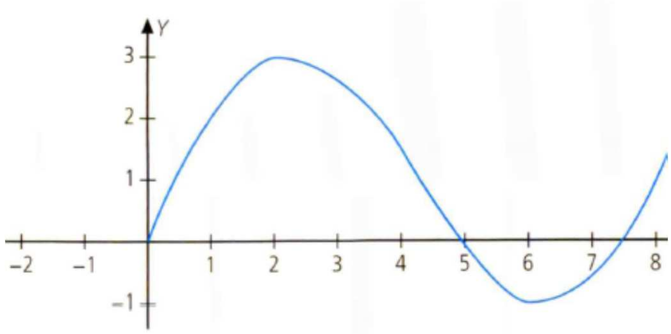
La función tiene un máximo absoluto en *x* = -1 y un mínimo absoluto en *x* = 1.

4.5.9. Curvatura y puntos de inflexión.

Estos conceptos no figuran en la Normativa aplicable. No se hace referencia a ellos. La única editorial que lo aborda es Edelvives en 4º de ESO. Ni SM ni Anaya introducen estas características de las funciones.

4.5.9.1. Curvatura:

La **curvatura de una función** nos indica si la gráfica de la función es una recta o una curva, y en este último caso, la forma de la curva.



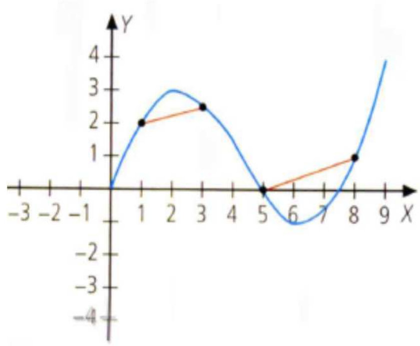
Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Edelvives. Tema 9.

Concavidad

Concavidad es un término matemático ambiguo, porque muchos autores lo definen como convexidad.

Para evitar esta confusión, a veces se definen los términos *cóncavo y convexo* como cóncavo hacia arriba y convexo hacia abajo.

- Una función es cóncava en un intervalo si, al tomar dos puntos cualesquiera de ese intervalo, el segmento que los une está situado por encima *de* la gráfica de la función.
- Una función es convexa en un intervalo si, al tomar dos puntos cualesquiera *de* ese intervalo, el segmento que los une está situado por debajo de la gráfica de la función.



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Edelvives. Tema 9.

En la gráfica anterior podemos comprobar que en el intervalo (4, 9) la función es cóncava porque, al unir, por ejemplo, los puntos (5, 0) y (8, 1), el segmento obtenido queda por encima de la gráfica de la función.

En la gráfica del margen podemos comprobar que en el intervalo (0, 4) la función es convexa porque, al unir, por ejemplo, los puntos (1, 2) y (3, 2,5), la recta obtenida queda por debajo de la gráfica de la función.

4.5.9.2. Puntos de inflexión.

Los puntos en los que la función varía de curvatura y pasa de ser cóncava a ser convexa, o viceversa se denominan puntos de inflexión.

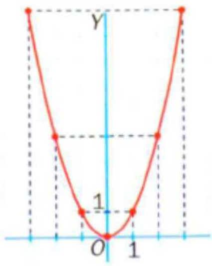
4.5.10. Simetría, tendencia y periodicidad.

3º ESO

4.5.10.1. Simetría:

Una función *f* es **simétrica respecto al eje de ordenadas o par** cuando para cualquier valor x de su dominio se verifica:

$$f(-x) = f(x)$$

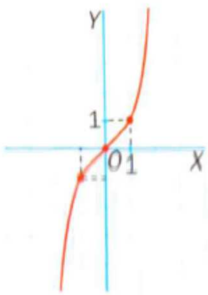


$f(-x) = f(x)$

Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 9

Una función f es simétrica respecto del origen o impar cuando para cualquier valor x de su dominio se verifica:

$$f(-x) = -f(x)$$



$f(-x) = -f(x)$

Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 9

4º ESO

Los dos tipos de simetrías que existen:

- la simetría axial, respecto a un eje, y
- la simetría puntual, respecto a un punto.

Una función es par si cualquier punto y su opuesto tienen la misma imagen, *siempre que ambos puntos pertenezcan al dominio de la función:*

$$f(-x) = f(x)$$

Una función es impar si cualquier punto y su opuesto tienen imágenes opuestas, siempre que ambos puntos pertenezcan al dominio de la función:

$$f(-x) = -f(x)$$

Las funciones impares son simétricas respecto del origen de coordenadas.

Hay funciones que no son pares ni impares; se llaman **asimétricas.**

En las funciones pares, el grado de todos los términos de su expresión algebraica (si es polinómica o racional) es par, y en las funciones impares, el grado de todos los términos es impar.

4.5.10.2. Tendencia.

3º ESO y 4º ESO

Hay funciones en las que, aunque sólo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia muy clara.**

Ejemplo: Dejamos enfriar una olla de agua hirviendo en una habitación a 20 °C.

Es claro que, al pasar el tiempo, la temperatura del agua se acerca a la temperatura ambiente, 20 °C. Decimos que la temperatura del agua **tiende** a 20 °C con el transcurso del tiempo.

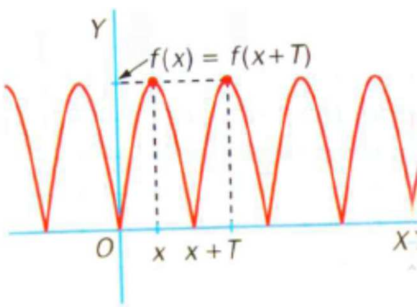
4.5.10.3. Periodicidad.

3º ESO Y 4º ESO

A veces, aunque solo conozcamos un trozo de curva, podemos saber cómo *se* comporta la función fuera de ese tramo.

Una función f es **periódica** cuando los valores que toma se van repitiendo cada cierto intervalo, que se llama **período.**

Una función periódica cumple que ***f(x) +T= f(x),*** donde ***T*** es el **periodo.**



$f(x + T) = f(x)$,
T es el período

Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 9

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un tramo correspondiente a un periodo.

4º ESO

Existen muchos fenómenos que se desarrollan como una reiteración de una acción, como, por ejemplo, el movimiento de las ruedas de un coche, la oscilación de un péndulo o el giro de una noria.

La gráfica de estas funciones se caracteriza por el hecho de que se construye repitiendo un tramo de gráfica.

El periodo T es el menor valor para el que se verifica la igualdad f *(x+* T)=f (x).
Por tanto, para representar gráficamente una función periódica se representa el tramo correspondiente al periodo, y el resto de la gráfica se obtiene trasladando este tramo hacia la derecha y hacia la izquierda.
El estudio de las características de una función periódica solamente se realiza en su periodo.

4.5.11. Acotación.

4º ESO

Una función *f(x)* está **acotada inferiormente** si existe un número real *k* tal que, para todo *x, f(x) ≥ k.* El número *k* se llama **cota inferior.**

Una función *f(x)* está **acotada superiormente** si existe un número real *k'* tal que, para todo x, *f(x) ≤ k'.* El número *k'* se llama **cota superior.**

Una función *f(x)* está **acotada** si lo está superior e inferiormente.

Este último concepto de "acotación" no aparece en ninguna de las Normativas.
Sólo aparece en una de las editoriales: SM.

En general, se tratan en los libros de texto todos los conceptos que figuran en las Normativas, excepto uno: la monotonía. Este es un caso excepcional ya que aparece en la Normativa estatal en 3º de ESO, pero no aparece en la Normativa Regional en ninguno de los cursos de ESO.

4.6. Tipos de funciones.

La Normativa, con respecto a los tipos de funciones, introduce los siguientes conceptos que hay que impartir en los distintos cursos de Educación Secundaria:

	BOE	BOCYL
1º ESO	-------------	-------
2º ESO	“Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales”.	“Identificación de magnitudes directamente o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores o de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales”.
3º ESO	----------------	“Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines. Distintas formas de representar la ecuación de una recta”. “Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica”.
4º ESO (OPCIÓN B)	“Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales”. “Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico”.	“Estudio y representación gráfica de las funciones polinómicas de primer o segundo grado, de proporcionalidad inversa y de las funciones exponenciales y logarítmicas sencillas. Aplicaciones a contextos y situaciones reales”. “Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales”.

4.6.1. Funciones de proporcionalidad directa.

1º ESO

Las funciones cuyas gráficas son rectas que pasan por el origen de coordenadas se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. La fórmula es de la forma **y = m·x** con m ≠ 0, donde m es la razón de proporcionalidad. Relacionan dos magnitudes directamente proporcionales: los cocientes entre cada **valor** de la variable dependiente, y, y su correspondiente valor de la variable independiente, *x,* son constantes.

A la *razón o constante de proporcionalidad m* también se le llama *pendiente* porque cuanto mayor es m, más inclinada es la recta de la gráfica.

Ejemplo: Las magnitudes peso y precio de algo que compremos son magnitudes directamente proporcionales.

Si "x" representa el peso en kilogramos e "y" el precio en euros y un kilogramo cuesta K euros, la función será: y= K · x.

Se podrán unir los puntos porque el peso varía de forma continua.

En este caso, como no hay pesos negativos, el dominio de la función son números positivos.

Las gráficas de las funciones de proporcionalidad directa son rectas:

- Que pasan por (0, 0).
- Crecientes si m >0.
- Decrecientes si m< 0.

3º ESO

Representación gráfica a partir de la fórmula: Para representarla, como sabemos que pasa por el origen de coordenadas (0,0), solo falta obtener otro punto. Esto se consigue dándole un valor a *x* y obteniendo el correspondiente valor de y.
Ecuación a partir de la gráfica. Obtención de la pendiente:

La pendiente de una recta y= *mx* es el coeficiente de la *x* cuando esta despejada la y.

La función y = 0 es, también, de proporcionalidad. Su pendiente es 0.

La **pendiente** (coeficiente de la *x)* es la variación (positiva o negativa) que experimenta la y cuando la *x* aumenta una unidad. Para hallarla, *se* divide la variación de la y por la variación de la *x* entre dos de sus puntos

4.6.2. Funciones afines.

2º ESO

Las funciones de la forma **y = m·x + n** con m ≠ 0 se llaman afines.
Son rectas que no pasan necesariamente por el origen de coordenadas.
Las funciones de proporcionalidad directa son funciones afines con n=0.

Pendiente y ordenada en el origen:
En las funciones y = m·x + n, la m se denomina pendiente de la recta e indica su inclinación.

- Si m> 0, la función es creciente.
- Si m < 0, la función es decreciente.

La n se denomina **ordenada en el origen** e indica el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas: (0, n), es decir x=0.

3º ESO

La ecuación y = *mx* + *n* se representa por una recta con estas características:

Su **pendiente** es *m* (la pendiente es el coeficiente de la *x* en la ecuación y = *mx* + *n).*

Representa la variación de y por cada unidad de *x.*

Su **ordenada en el origen** es *n.* Es decir, si x = 0, entonces y = *n.* Por tanto, corta al eje Y en el punto (0, *n).*

Cuando la pendiente es m = 0, la recta y = *n* es paralela al eje *X* Se llama **función constante** porque y siempre vale lo mismo *(n)* aunque varíe la x.

Ejemplo: El precio de la comida de un restaurante es constante, porque no depende de la cantidad que nos sirvan.

La recta y = 0 coincide con el eje X

Las funciones de la forma:

y = [parte proporcional] + [parte fija]

son funciones del tipo y = *mx* + n, donde *mx* es la parte proporcional y *n* es la parte fija. Son muy habituales en economía, medicina, física, química, geología y astronomía.

4.6.2.1. *Ecuación de la recta de la que se conoce un punto y su pendiente.*

Supongamos que de una recta conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente, m.
Entonces, su ecuación puede ponerse así:

$$y = y_0 + m\,(x - x_0) \quad \textbf{ECUACIÓN PUNTO – PENDIENTE}$$

Las ecuaciones $y = y_0 + m(x - x_0)$ pueden simplificarse hasta adoptar la forma y = mx + n.

4.6.2.2. *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.*

Si de una recta conocemos dos puntos, podemos obtener su pendiente a partir de ellos y, después, con la pendiente y uno de los puntos, hallar su ecuación.

Obtención de la pendiente: Para hallar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos conocidos, se puede proceder gráficamente, midiendo (o contando cuadraditos) la variación de la x y la variación de la y.

Pero también se obtiene (más rápida y eficazmente) mediante este cálculo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Operando, cualquier ecuación de una recta puede ponerse en la forma **ax + by = c.** Por eso se llama **forma general de la ecuación de la recta.**

- Cuando a ≠0 y *b* = 0, la recta es paralela al eje Y y no corresponde a la gráfica de una función.
- Cuando *b* ≠ 0, en todos los casos, la recta corresponde a una función. Todas ellas se llaman funciones lineales.

Para representar una recta dada en forma general, podemos:

- Obtener dos puntos suyos, dando valores a las variables.
- Despejar y para obtener una expresión de la forma y = *mx* + *n.*

4.6.2.3. Aplicaciones de la función afín.

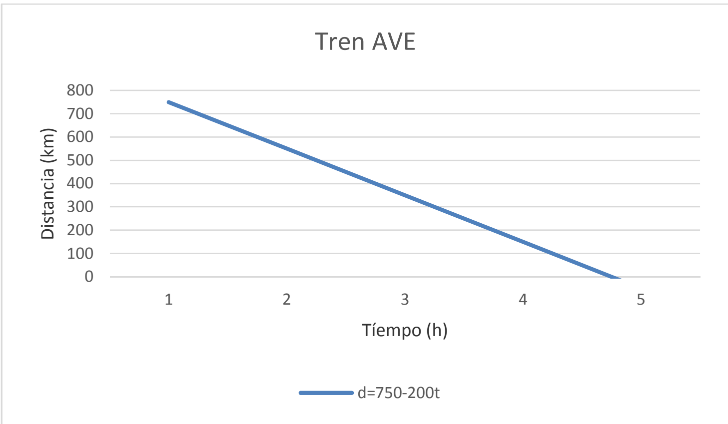
Las funciones extraídas de situaciones cotidianas requieren la utilización de números grandes o muy pequeños. En tales casos, para que la representación gráfica sea razonable, conviene elegir escalas adecuadas en los ejes coordenados.

Ejemplo 1**: Un tren AVE acaba de salir de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Expresar mediante una ecuación la distancia a la que *se* encontraría de nosotros dentro de *t* horas**.

El espacio recorrido por el tren en *t* horas es 200t. Por tanto, la distancia a la que está de nosotros se va acortando en esa cantidad:

d = 750 — 200t

Esta es la ecuación de la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia a la que se encuentra el tren de nosotros.



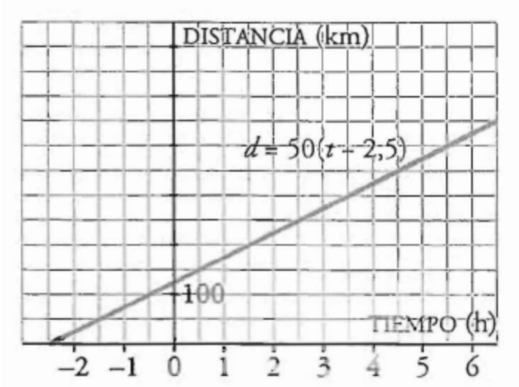
Ejemplo 2: **Un tren de mercancías salió de nuestra ciudad hace dos horas y media y va a 50 km/h. Obtener la ecuación que relaciona la distancia a la que está de nosotros con el tiempo**

transcurrido a partir de ahora.

Dentro de t horas, el tren llevará t + 2,5 horas de viaje. Por tanto, la distancia recorrida (a la que se encuentra de nosotros) es:

$$d = 50(t + 2,5)$$

Observa que, en la gráfica, el punto (-2.5, 0) indica que hace dos horas y media la distancia a la que estaba de nosotros era 0 km.



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial Anaya. Tema 8

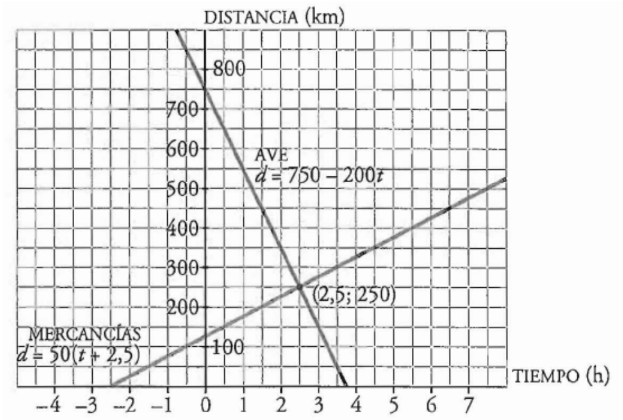
4.6.2.4. ***Estudio conjunto de dos funciones.***

Para estudiar conjuntamente dos funciones, representamos las dos rectas sobre los mismos ejes. Las coordenadas del punto de corte se hallan resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones.

Ejemplo 3: **En los ejemplos anteriores hemos estudiado los movimientos de dos trenes: un AVE y un mercancías. El primero se acerca a nosotros, y el segundo se aleja. Suponiendo que circulen por vías paralelas, nos preguntamos dónde y cuándo se cruzarán.**

En el momento en que se cruzan, están en el mismo lugar (a la misma altura).

Esa coincidencia, tanto de tiempo como de posición, nos lleva a resolver el problema obteniendo el punto en el que se cortan las rectas con las que se describen las dos funciones.



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial Anaya. Tema 8

Gráficamente vemos que este punto es (2,5; 250). Esto significa que:

Los trenes se cruzarán dentro de 2 horas y media a 250 km de aquí.

Para hallar las coordenadas del punto de corte sin recurrir a la representación gráfica, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} d = 750 - 200t \\ d = 50(t + 2{,}5) \end{cases} \rightarrow 750 - 200t = 50(t + 2{,}5) \rightarrow \ t = 2{,}5\,;d = 250$$

<u>Propuesta de actividad:</u>

Juan quiere contratar una póliza a todo riesgo para su vivienda. Estudia dos ofertas.

La compañía *A* le cobraría 400 € el primer año, con un descuento de 50 € por año durante los cinco siguientes y, a partir de ahí la cuota seria fija.

La compañía *B* le cobraría 300 € el primer año, con un descuento de 25 € por año, hasta el cuarto y, a partir de este, no habría más reducciones.

Juan quiere investigar que oferta le es más ventajosa para los próximos 10 años.

a) Construye las tablas que relacionan el tiempo transcurrido, *t,* con el coste de la póliza, *C,* para los próximos 10 años. Dibuja las gráficas para ambos casos, en los mismos ejes.

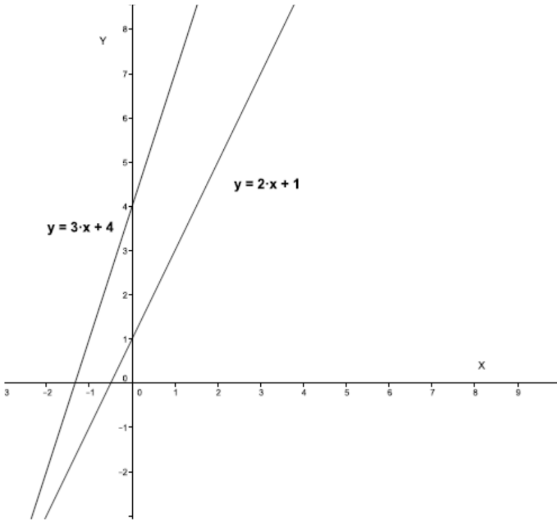
b) Encuentra la expresión analítica que relaciona *t* con C en ambos casos. ¿En qué momento se igualan ambas cuotas?

c) Calcula cuanto pagaría Juan durante los 10 primeros años en cada compañía. ¿Cuál debe elegir?

Ejemplos de estudio de rectas según su gráfica o su pendiente. Casos contextualizados.

<u>Ejemplo 1</u>: En la siguiente gráfica están dibujadas las rectas:

- y=3x+4
- y= 2x+1



y=3x+4 está más inclinada que y=2x +1

En la recta y=2x+ 1, cada vez que avanzamos una unidad en el eje X, subimos 2 en el eje Y.

En la recta y=3x+4, cada vez que avanzamos una unidad en el eje X, subimos 3 en el eje Y.

El coeficiente de la x nos da la inclinación de la recta.

La recta y= 2x+ 1 corta el eje en el punto (0,1).

La recta y=3x+4 corta el eje en el punto (0,4).

<u>Ejemplo 2</u>: Escribe la fórmula de una recta que tenga la misma pendiente que y= —2x+ 5 y la misma ordenada en el origen que y= 7x+ 1.

Pendiente de y= —2x+ 5 —> *m*= —2.

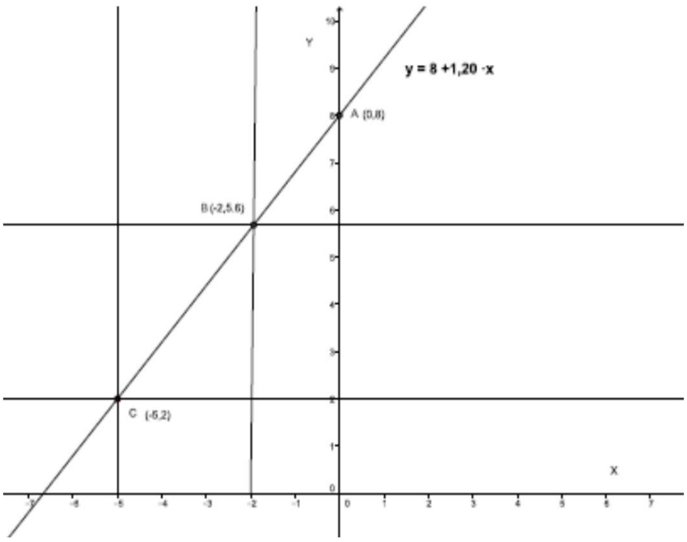
Ordenada en el origen de y= 7x + 1 —>n=1

La recta buscada es y= —2x+ 1.

<u>Ejemplo 3</u>: El gasto de agua caliente de una comunidad de vecinos es de 8 euros fijos más 1,20 euros por cada metro cúbico consumido.
La expresión que permite obtener el gasto mensual de agua, y, en función de los metros cúbicos consumidos, x, es: y= 8 + 1,20x.

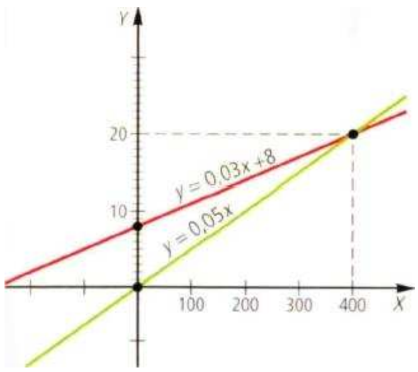
Formamos la tabla de valores y representamos gráficamente la función.

x	0	-1	-2	-3	-5	1	2
y	8	6,8	5,6	4,4	2	9,2	10,4



<u>Ejemplo 4</u>: Una empresa de autobuses está estudiando determinar el precio del billete según dos modalidades. En una de las modalidades, el viajero pagaría por cada kilómetro recorrido, a 5 céntimos el precio de cada kilómetro. En la otra modalidad, pagaría una cantidad fija de 8 € mas 3 céntimos por kilómetro recorrido.
Si realizamos con esta empresa un viaje de 400 km, ¿qué modalidad nos interesa?

Para analizar la situación vamos a representar gráficamente cada una de las dos modalidades.



Fuente: Libro 2º ESO. Editorial Edelvives. Tema 8

En primer lugar, obtenemos las expresiones algebraicas correspondientes a cada modalidad. Para eso, consideramos como variable independiente, *x,* el número de kilómetros que se recorren en el trayecto y como variable dependiente, y, el precio final del viaje.
Además, todas las cantidades deben estar expresadas en la misma unidad; por ejemplo, en euros:

— Modalidad **A:** y = 0,05x
— Modalidad **B:** y = 0,03x + 8

Observando la representación gráfica de estas funciones, que aparecen anteriormente, se puede apreciar que un viaje de 400 km costaría lo mismo con cualquiera de las dos modalidades, porque ese punto coincide con la intersección de ambas rectas.

Gracias a estas gráficas se puede apreciar de una forma clara y rápida que modalidad interesa en función de los kilómetros que se vayan a recorrer. Así, se comprueba que*, para viajes con un recorrido inferior a 400 km, interesa que se establezca la primera modalidad, mientras que si el viaje supera los 400 km, la segunda modalidad es más ventajosa.*

4.6.2.5. Rectas paralelas y secante.

1º ESO

Las rectas que no se cortan en ningún punto son rectas paralelas.

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

- *Rectas paralelas a los ejes coordenados*:
- Las ecuaciones del tipo y = a son rectas paralelas al eje de abscisas. Las rectas paralelas al eje de abscisas son funciones constantes.
- Las ecuaciones del tipo x = b son rectas paralelas al eje de ordenadas. Las rectas paralelas al eje de ordenadas no son funciones, ya que a un valor de x le corresponden infinitos valores de y.

3º ESO

Dos rectas que tienen la **misma pendiente** son paralelas y, recíprocamente, si son paralelas es que tienen la misma pendiente.

Dos rectas son **secantes** si tienen **distinta pendiente.**

Las rectas y =-2x e y=-2x + 4 son paralelas porque tienen la misma pendiente, *m* = -2.

Las rectas y=x+1 e y=*-2x+*4 son secantes porque no tienen la misma pendiente. Se cortan en P (1, 2), la solución del sistema de ecuaciones formado por las dos rectas.

4.6.3. Funciones de proporcionalidad inversa.

4º ESO

Las funciones que relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales se llaman **funciones de proporcionalidad inversa.**

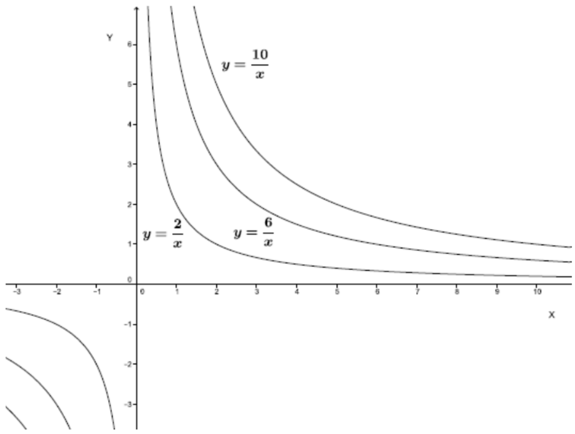
Su fórmula es de la forma:

$$x \cdot y = k, \text{ o bien } y = \frac{k}{x} \text{ donde } k \neq 0$$

El valor de k corresponde a la **constante de proporcionalidad inversa**.

La representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una curva que se denomina *hipérbola.*

En una función de proporcionalidad inversa, cuanto mayor es k, mas separada de los ejes se encuentra la función.



La función $y = \frac{k}{x}$ no está definida para x=0.

Su dominio y su recorrido es todo R, salvo el 0.

Si *x* se acerca a 0 por la izquierda o por la derecha, y toma valores cada vez más grandes (los valores de y tienden a ∞ en valor absoluto). Por eso decimos que el **eje Y es una asíntota.**

Si *x* toma valores cada vez más grandes, y se acerca a 0. Por eso **el eje *X* es asíntota.**

Esta curva se llama hipérbola. Sus asíntotas son los ejes coordenados.

Su dominio de definición está formado por los tramos (-∞, 0) y (0, +∞).

Si $k > 0$, la función es decreciente, y si $k < 0$, creciente.

Las funciones de la forma $y = a + \frac{k}{x-b}$ son trasladadas de $y = \frac{k}{x}$, verticalmente en a unidades y horizontalmente en b unidades.

Ejemplo 1: Un cliente ha encargado a Laura una moqueta rectangular de 16 metros cuadrados.

Isabel se da cuenta de que puede cortar la pieza de varias maneras distintas, siempre que consiga un rectángulo de 16m^2. Si representamos por x la base y por y la altura de los distintos rectángulos, se verifica que:

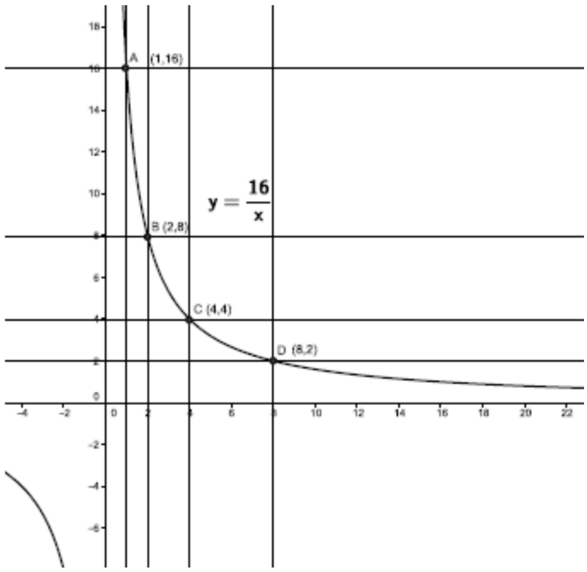
$$x \cdot y = 16 m^2 \quad \text{o bien} \quad y = \frac{16}{x} \text{ m}$$

Representamos la función para estudiar sus propiedades:

1º Formamos una tabla de valores:

Base (m)	1	2	4	5	8	10
Altura (m)	16	8	4	3,2	2	1,6
Área (m^2)	16	16	16	16	16	16

2º Hacemos la representación gráfica:

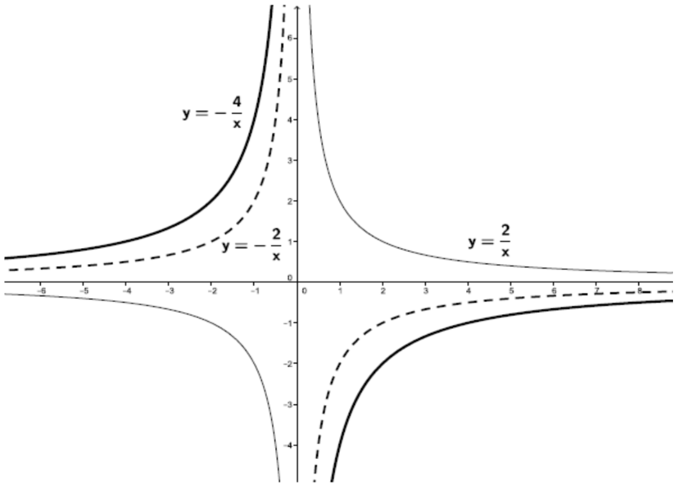


Podemos unir los puntos, pues la longitud de los lados varía de forma continua.

- La gráfica de la función es decreciente.
- La función no corta a ninguno de los ejes.
- Si le damos valores a x cada vez mayores, la gráfica se va acercando al eje X, sin llegar a cortarlo.
- Si le damos valores a x cada vez más cercanos a 0, la gráfica se va acercando al eje Y, sin llegar a cortarlo.

Ejemplo 2: Representa en la misma gráfica las funciones:

$$y=\frac{2}{x} \qquad y=-\frac{2}{x} \qquad y=-\frac{4}{x}$$



¿Cómo va a ser la gráfica según el valor y el signo de la constante de proporcionalidad inversa?

- Las gráficas son hipérbolas que se alejan más de los ejes de coordenadas cuanto mayor sea el valor de k.
- Si el signo de k es positivo, la hipérbola se representa en el 1º y 3º cuadrante.

  Si el signo de k es negativo, la hipérbola se representa en el 2º y 4º cuadrante.

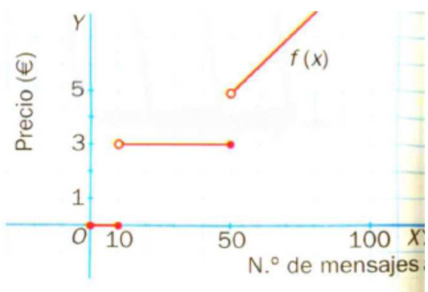
4.6.4. Funciones definidas a trozos.

4º ESO

Mientras que algunas funciones están definidas por una única fórmula, otras se describen aplicando diferentes fórmulas a diferentes partes de su dominio. Estas funciones se dice que están **definidas a trozos.**

Ejemplo: Una compañía de telefonía propone a los nuevos clientes la siguiente oferta para SMS. Los 10 primeros mensajes del mes son gratis; pueden mandar hasta 50 pagando 3 euros y, si envían más de 50, cada uno costarla 10 céntimos. La función que representa esta situación es:

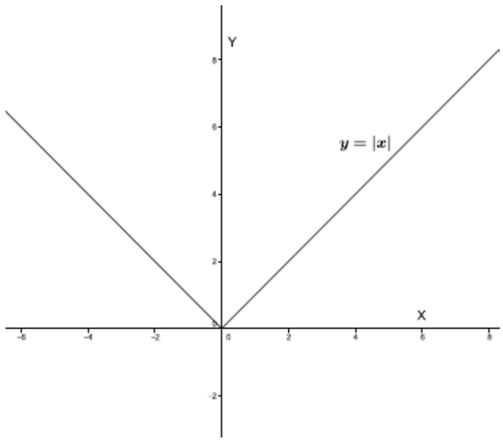
$$y = f(x)\begin{cases} 0 & si\ 0 < x < 10 \\ 3 & si\ 10 < x \leq 50 \\ 0{,}1\,x & si\ x > 50 \end{cases}$$



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 9

La **función valor absoluto** es una función a trozos, ya que tiene una expresión diferente según el signo de su argumento, esto es, la expresión de dentro del valor absoluto.

$$f(x) = \text{Ix-4I}= \begin{cases} x+4 & si\ x+4>0 \Leftrightarrow x>-4 \\ -x-4 & si\ x+4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -4 \end{cases}$$



Representación de la función y=IxI

4.6.5. Funciones cuadráticas o de segundo grado.

4º ESO

La editorial Edelvives trata las funciones cuadráticas en 2º de ESO y la editorial SM en 3º de ESO a pesar de que, según la normativa, se introducen en 4º de ESO. Anaya lo trata por primera vez en 4º de ESO.

La expresión algebraica de una función cuadrática o de segundo grado es

$$y = ax^2 + bx + c,$$

siendo a ≠ 0. El valor c indica el punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas.

La **parábola** aparece en multitud de situaciones: la trayectoria de los saltos, un balón cuando se lanza a canasta, los lanzamientos de las bolas de golf, las fuentes ornamentales, las antenas parabólicas, los faros de los coches, etc.
La función cuya gráfica es una parábola se llama **función cuadrática** y su ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.
Ejemplos de funciones que se representan mediante parábolas:

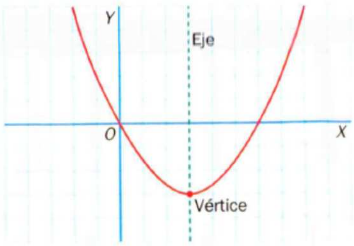
- El área de un cuadrado en función de su lado ($A = l^2$) o la de un círculo en función de su radio ($A = \pi r^3$).

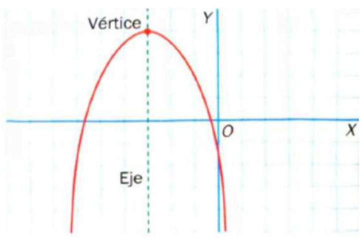
- La altura a la que se encuentra una piedra que lanzamos hacia arriba en función del tiempo transcurrido desde que se lanzó:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Las funciones cuadráticas tienen la siguiente gráfica:

- $a > 0$: la parábola está **abierta hacia arriba.**
- $a < 0$: la parábola está **abierta hacia abajo**.

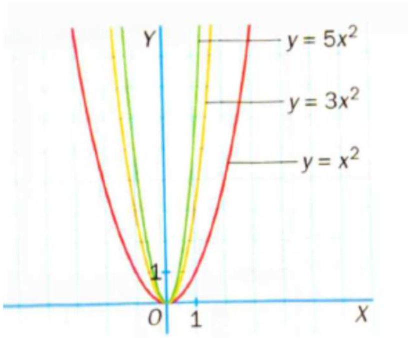




a > 0 **a < 0**

Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 10

Cuanto mayor es el valor absoluto de *a,* más cerrada es la parábola**.**



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 10

El punto más bajo o el más alto de la gráfica se llama **vértice de la parábola.**

La recta que pasa por el vértice de la parábola y es perpendicular al eje *X,* es el eje de simetría de la gráfica y se llama **eje de la parábola.**

4.6.5.1. Estudio y representación de funciones cuadrática.

El estudio de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ consiste en determinar sus elementos principales:

- sentido de las ramas,
- corte con los ejes,
- vértice y
- eje de parábola.

Una vez conocidos estos es posible esbozar su gráfica de forma muy aproximada.

4.6.5.1.1. Sentido de las ramas.

- $a > 0$: la parábola está **abierta hacia arriba.**
- $a < 0$: la parábola está **abierta hacia abajo**.

4.6.5.1.2. Cortes con los ejes.

La parábola puede tener dos, uno o ningún punto de corte con el eje *X.*

- Corte con el eje Y: x = 0.
- Cortes con el eje X: y= 0. Soluciones de la ecuación: $y = ax^2 + bx + c$

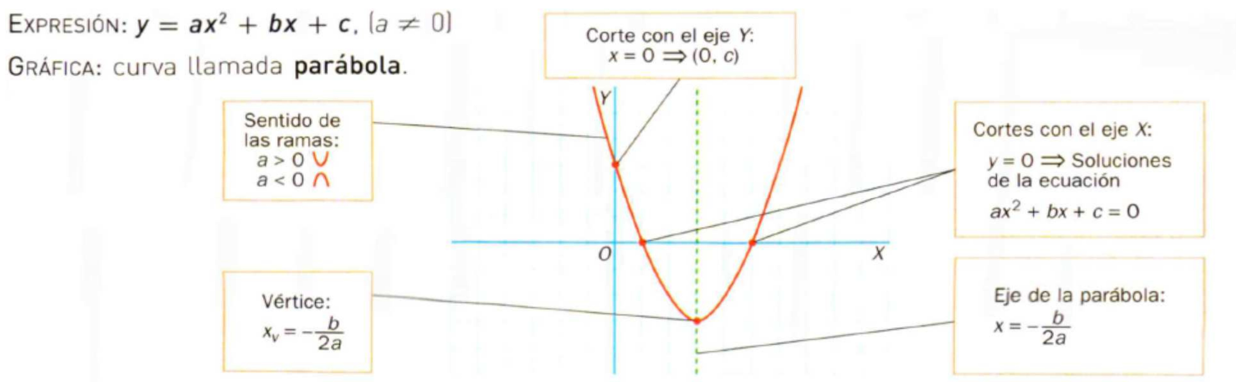
4.6.5.1.3. Vértice.

$$\text{Vértice: } x_v = -\frac{b}{2a}$$

4.6.5.1.4. Eje de la parábola.

$$X = -\frac{b}{2a}$$

Las parábolas no se suelen representar utilizando tablas de valores, aunque en ocasiones, tras hallar sus elementos, resulta útil complementar la información obtenida con una tabla que proporcione algunos puntos para ayudar a realizar la representación gráfica.



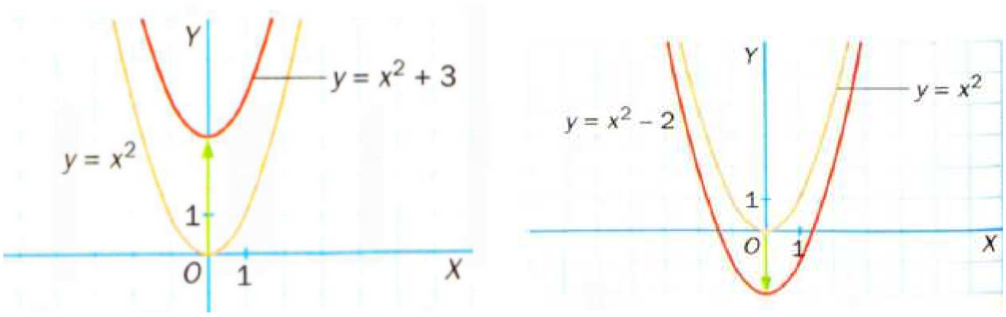
Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 10

4.6.5.2. *Construcción de parábolas por traslación.*

A partir de la gráfica de la función ***y = x²*** se pueden obtener las gráficas de otras parábolas por traslación.

4.6.5.2.1. Traslación vertical.

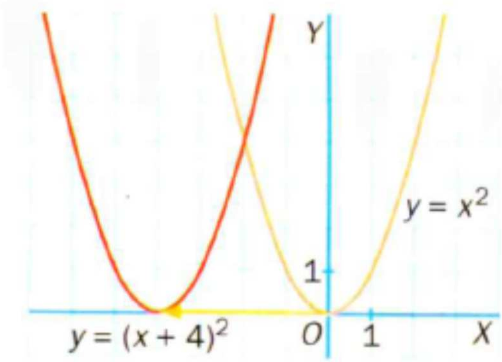
Para representar funciones de la forma **y=** $x^2 + q$, donde *q* es un número, basta trasladar verticalmente el vértice de la parábola *q* unidades hacia arriba, si *q* es positivo, o hacia abajo, si *q* es negativo.



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 10

4.6.5.2.2. Traslación horizontal.

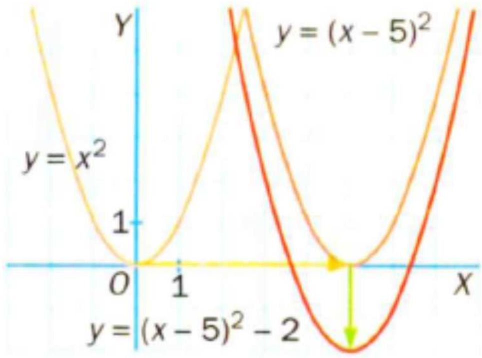
Para representar funciones de la forma $y=(x-p)^2$, donde p es un número, basta trasladar horizontalmente el vértice de la parábola p unidades hacia la derecha, si p es positivo, ó hacia la izquierda, si p es negativo.



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 10

4.6.5.2.3. Traslación vertical y horizontal.

Para representar funciones de la forma $y= (x - p)^2 + q$, se combinan las dos traslaciones vistas anteriormente.



Fuente: Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 10

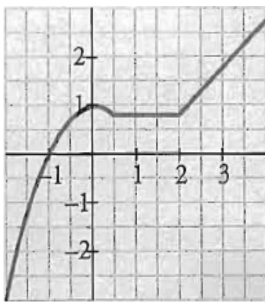
La función $y = (x - p)^2 + q$ se puede desarrollar como $y = x^2 + (-2p)\,x + (p^2 + q)$ recuerda a la forma $y = ax^2 + bx + c$.

4.6.5.3. Estudio conjunto de funciones.

En algunos problemas tendremos que hacer un estudio conjunto de una función lineal y otra cuadrática, o bien de dos cuadráticas. Para ello, algunas veces habrá que resolver un sistema de segundo grado, cuyas soluciones (dos, una o ninguna) serán los puntos de corte de las dos gráficas. En algunas funciones a trozos también aparecerán las rectas y las parábolas conjuntamente.

Ejemplo:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 1 & si\ x < 1/2 \\ \dfrac{3}{4} & si\ 1/2 < x < 2 \\ x - \dfrac{5}{4} & si\ x > 2 \end{cases}$$



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial Anaya. Tema 5

- El primer tramo de la función corresponde a un trozo de parábola y solo está definido para $x \leq 1/2$. El vértice está en el punto (0, 1), corta al eje X en (-1, 0) [el punto (1, 0) no lo consideramos, pues ha de ser $x \leq 1/2$], y pasa por los puntos (1/2, 3/4) y (-2, -3).
- El segundo tramo corresponde a un trozo de recta horizontal que empieza en (1/2, 3/4) y termina en (2, 3/4).

- El último tramo es un trozo de recta que parte del punto (2, 3/4) y pasa por (3, 7/4).

4.6.5.4. Catenaria y arco.

Si sostienes una cuerda por sus extremos, se forma una curva. Es la misma curva que puede verse en los tendidos eléctricos, en los cables que suministran electricidad a los trenes y en las guirnaldas de las fiestas populares .

Todas las curvas imaginables corresponden a la gráfica de una función o a la combinación de varias. Pero, ¿a qué función corresponde la curva que forma la cuerda **suspendida y sometida únicamente a su propio peso?**

Su nombre es **catenaria**. En el siglo XVII, Galileo observó que la curva de la cuerda colgante parecía una parábola, pero no lo era. Tuvieron que pasar más de cincuenta años hasta dar con la función correcta de la catenaria:

$$y = \frac{h}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right)$$

Al dibujar una catenaria invertida aparece una curva que tiene una propiedad fundamental: es la forma ideal para un arco que se soporta a si mismo, sin necesidad de construir gruesos muros o pilares para sostenerlo.

Desde la Antigüedad, los arquitectos construían intuitivamente arcos muy parecidos a la catenaria.

Parece ser que las primeras construcciones en las que se utiliza el arco proceden de Mesopotamia, aunque también se tiene constancia de construcciones con arcos en el antiguo Egipto.

A lo largo de la historia ha sido utilizado con gran profusión y variedad de formas: arcos románicos, árabes, visigóticos, ojivales, de tres centros, etc. En el último siglo, fundamentalmente dos grandes arquitectos españoles, Antoni Gaudi y Santiago Calatrava, han utilizado el arco en catenaria, pero, sin duda, el arquitecto que más ha usado esta curva, y de forma más espectacular, ha sido el catalán Antoni Gaudí.

En muchas de sus construcciones, como la casa Batlló, la casa Milá la cripta de la colonia Güell e incluso en la Sagrada Familia, aparece la catenaria ejerciendo su función de soporte y maravillando al observador por su belleza.

Para trabajar con los arcos necesitarás conocer estos términos:

- Flecha: altura del arco desde su base.
- Luz: anchura del arco.
- Esbeltez: relación entre la flecha y la luz.

Fuente: Libro 4º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 9.

<u>Interpretación de situaciones reales mediante gráficas:</u>

Muchas situaciones de la vida cotidiana vienen representadas mediante gráficas. Su estudio nos permite interpretar y conocer dichas situaciones.

¿Cómo asignamos una función a una situación real?

1º. Los datos que representan las variables se colocan en una tabla de forma que su interpretación sea más fácil.

2.° Se representan los datos en una gráfica. Así podremos saber qué tipo de relación hay entre ellos. Si son una función, si guardan una relación de proporcionalidad directa o inversa, si es creciente, si es continua...

3.° Si la relación entre los datos es una función, tratamos de establecerla.

4.° Comprobamos que esta función es la indicada. Para ello damos nuevos valores a la función y comprobamos que están en nuestra tabla de datos reales.

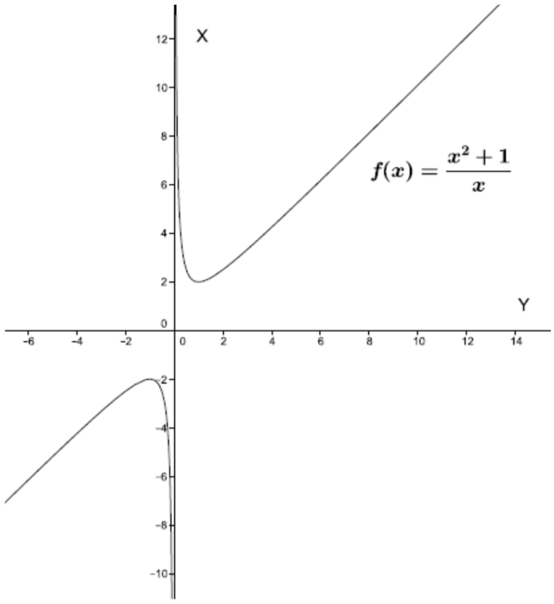
4.6.6. Funciones racionales.

Las funciones de la forma $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde *P(x)* y *Q(x)* son polinomios con Q(x) ≠ 0, se denominan **funciones racionales.**
El dominio de una función racional es toda la recta real, excepto los valores de *x* que anulan el denominador.
Las funciones de proporcionalidad inversa y las polinómicas son casos particulares de funciones racionales cuando el numerador y el denominador son constantes, respectivamente.
Las funciones racionales son continuas en su dominio. Consideradas en R, presentan tantas discontinuidades como ceros tenga el denominador.

Asíntotas.

Este concepto, como tal, de asíntotas sólo se ven en la Editorial SM en 4º de ESO. No figura en las Normativas.
Una **asíntota** de una función es una recta hacia la que se aproxima una parte de longitud ilimitada de la función cuando el valor de la variable *x* o el de la función y tiende a -∞ o a +∞.
La distancia entre los valores de la función y los de la asíntota tiende al valor 0, tanto más cuanto más nos alejamos sobre la curva.

Ejemplo: En la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ se puede comprobar que tiene cuatro partes con longitud ilimitada que se acercan a las asíntotas hasta prácticamente confundirse con ellas.



- Si $x \to -\infty$ ó $x \to +\infty$, la función se aproxima a la asíntota y=x.
- Si $x \to 0^-$ ó $x \to 0^+$, la función se aproxima a la asíntota x=0.

- **Asíntotas horizontales:**

Una función f(x) tiene una asíntota horizontal ***y = h*** *si:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = h \;\; o\ bien \;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = h$$

Si estos límites son dos números reales diferentes, la función posee dos asíntotas horizontales.

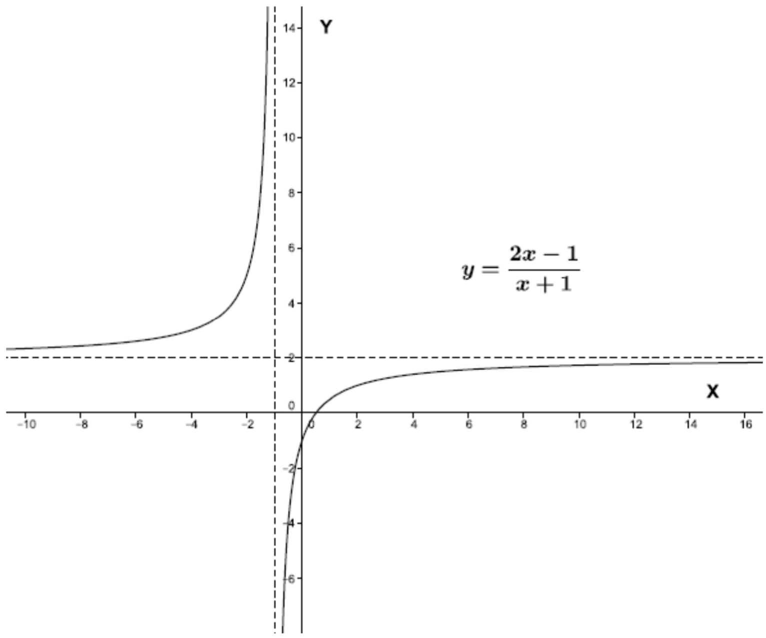
- **Asíntotas verticales:**

Una función *f(x)* tiene una asíntota vertical ***x = k*** si:

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = \pm\infty \;\; o\ bien \;\; \lim_{x\to k^+} f(x) = \pm\infty$$

Una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales. Las funciones racionales presentan siempre asíntotas verticales para los valores de *x* que anulan el denominador, pero no el numerador.

Ejemplo: En la función $y = \frac{2x-1}{x+1}$, si x se aproxima a -1 por la izquierda, la variable y tiende a $+\infty$, mientras que si se acerca a -1 por la derecha, la variable y tiende a $-\infty$. La recta x= - 1 es una asíntota vertical de la función y.



• **Asíntotas oblicuas.**

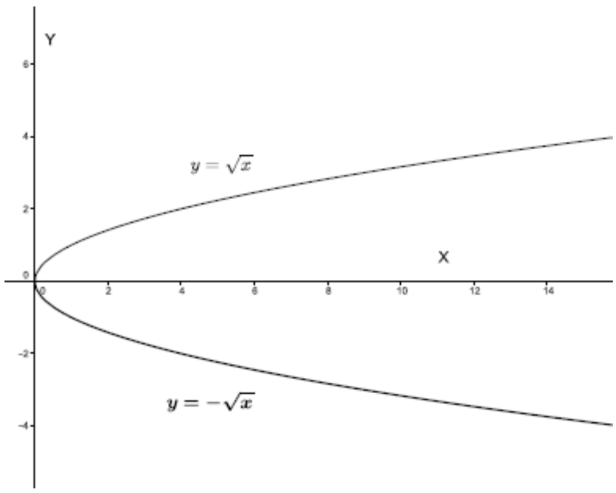
Una función f(x) tiene una asíntota oblicua y=mx+n si cuando $x \to \pm\infty$ se verifica que $f(x) \to mx + n$.

Una función puede tener, a lo sumo, dos asíntotas oblicuas: una cuando $x \to +\infty$, y otra cuando $x \to -\infty$.

Una función racional presenta una asíntota oblicua si el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

4.6.7. Funciones radicales.

Las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ se pueden representar punto a punto y dan lugar a las gráficas de abajo. Son mitades de parábola y juntas describen una parábola idéntica a y = x^2, pero con su eje sobre el eje *X*.

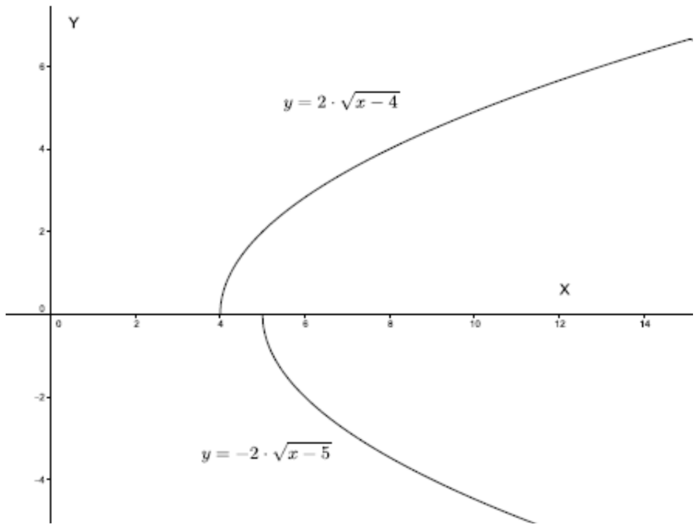


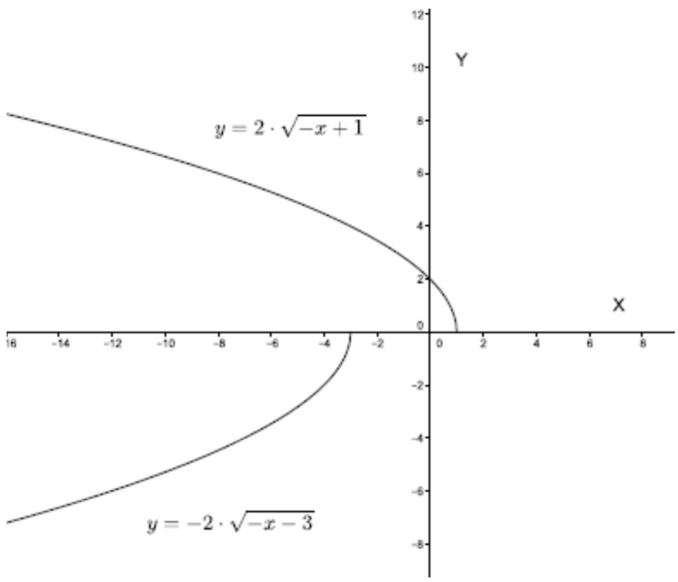
El dominio de definición de estas funciones es [0, +∞).

La función $y = \sqrt{x}$ está definida y es continua en [0, +∞). Y es creciente, aunque cada vez crece más despacio.

Análogamente, $y = -\sqrt{x}$ está definida y es continua en [0, +∞). Y es decreciente.

Las siguientes curvas son de la misma familia:





Las funciones $y = a \cdot \sqrt{x+b}$, y $y = a \cdot \sqrt{-x+b}$, se representan mediante medias parábolas. Sus dominios de definición son, respectivamente:

[-b, +∞) y (-∞, b]

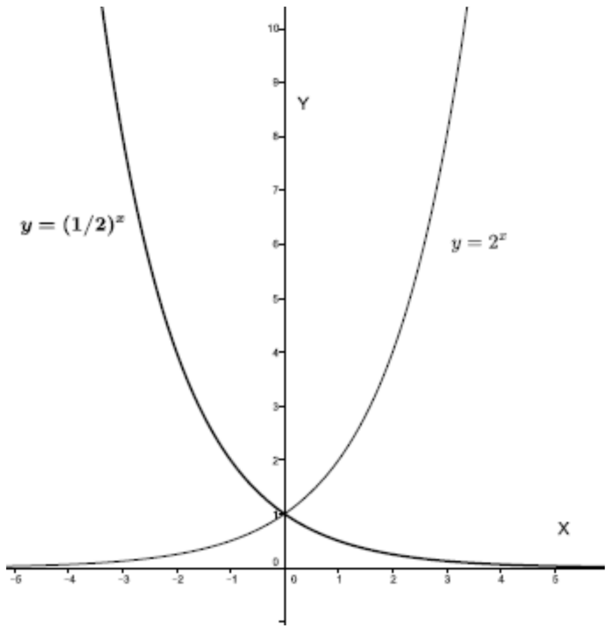
4.6.8. Funciones exponenciales.

Se llaman **funciones exponenciales** a las que tienen la ecuación $y = a^x$, siendo la **base** *a* un número real positivo distinto de 1.
Su dominio es toda la recta real R, y su recorrido, los números reales positivos. Estas funciones son continuas en todo su dominio.

Propiedades de las funciones exponenciales:

- Las gráficas pasan por los puntos (0, 1) y (1, a) ya que $a^0=1$ y $a^1=0$.
- Si $a > 1$, son crecientes en todo el dominio *y* crecen tanto más rápidamente cuanto mayor sea *a.*
- Si $0 < a < 1$, son decrecientes en todo el dominio y decrecen tanto más rápidamente cuanto menor sea *a* (más próximo a 0).
- Para estas funciones, la recta y=0 es una asíntota horizontal en $-\infty$ si $a> 1$, y en $+\infty$ si $0 <a < 1$.

Vamos a representar, dando valores a *x,* las funciones $y = 2^x$ e $y= (1/2)^x$.



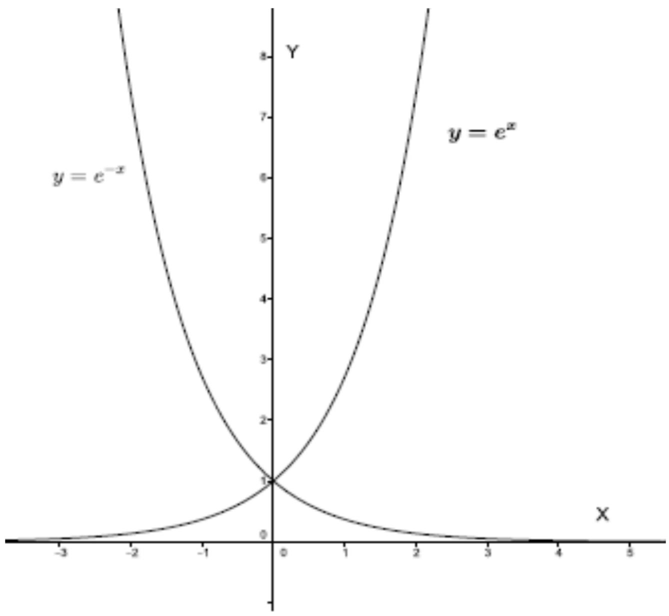
Estas dos curvas son simétricas respecto del eje Y, porque una y otra toman el mismo valor en puntos de abscisas *k* y - *k,* respectivamente, simétricos respecto del eje de ordenadas .

También son exponenciales las funciones de la forma $y = a^{kx}$, *pues* $a^{kx} = (a^k)^x$ es exponencial de base a^k.

<u>Las **funciones exponenciales** $y = e^x$ *y* $y = e^{-x}$.</u>

La función $y = e^x$ es una exponencial especialmente importante porque aparece en múltiples procesos naturales, como el crecimiento de poblaciones de

microorganismos. Lo mismo sucede con la función $y = e^{-x}$ que describe procesos como las desintegraciones radiactivas.
Para dibujar sus gráficas, se forman sus tablas de valores.

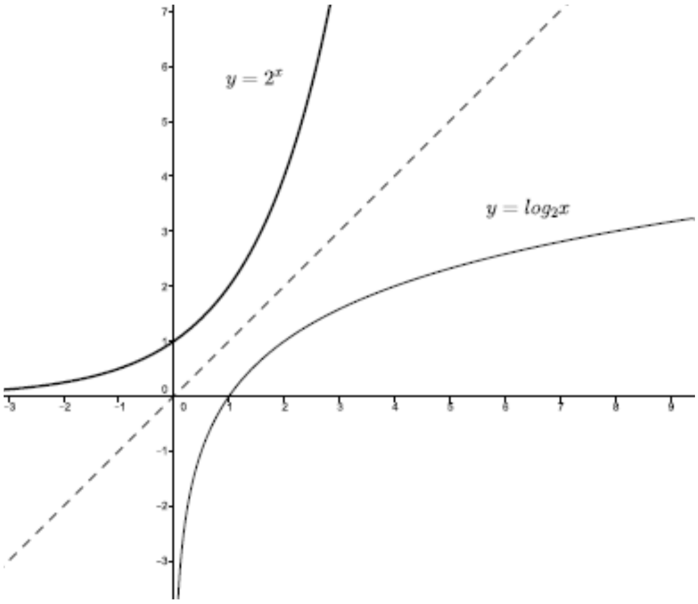


La **función exponencial** $y = 10^{x}$.
Las funciones del tipo $y=10^x$ son exponenciales que se aplican también en muy diversas situaciones prácticas. En general, se utilizan para medir magnitudes que tienen un rango de variación muy grande, como la energía de un terremoto.
Al igual que la función $y = e^{x}$, la exponencial $y = 10^{x}$ describe multitud de procesos naturales.
Para ambas funciones, el dominio es **R,** y el recorrido, **R^+** . Ambas son continuas y crecientes en todo el dominio.

Las calculadoras tienen una tecla para cada una de las funciones exponenciales 10^x y e^x . Para las demás se usa la tecla x^y.

4.6.9. Funciones logarítmicas.

La curva dibujada en trazo más fuerte es la gráfica de **$y = 2^x$.**
Con trazo más flojo he dibujado la otra curva, simétrica de la anterior respecto a la recta $y = x$. Estas dos curvas se relacionan analíticamente del siguiente modo:
(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16)... son puntos de la primera.
(1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3), (16, 4)... son puntos de la segunda.
En general, si el punto *(a, b)* es de la primera, entonces *(b, a)* es de la segunda. Por eso, decimos que la función descrita por la segunda es la **inversa** de la primera.
La función descrita por la gráfica de trazo más flojo se llama **función logarítmica** de base 2, y se designa así: $y = \log_2 x$.



La **<u>función logarítmica f(x) = $\log_a x$</u>** asocia a cada número real positivo x el valor de su logaritmo en base a, $\log_a x$.

Es creciente, pero, al aumentar *x,* su velocidad de crecimiento disminuye, haciéndose muy pequeña.
Se llama **logaritmo en base *a* de *P,*** y *se* escribe $log_a P$, al exponente al que hay que elevar la base *a* para obtener *P.*

$$\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

Los logaritmos en base 10 se llaman **<u>logaritmos decimales</u>** y son los más utilizados. Por eso, la tecla log de las calculadoras es para el cálculo de logaritmos decimales.
(También en el uso habitual podemos poner log en lugar de $\log_{10}$. Cuando el logaritmo es decimal, a=10, se omite el subíndice).

$2^3 = 8$ $\log_2 8 = 3$ (logaritmo en base 2 de 8 es 3)
$2^{-1} = ½$ $\log_2 1/2 = -1$ (logaritmo en base 2 de 1/2 es -1)

Las funciones logarítmicas presentan las siguientes <u>propiedades:</u>
Su dominio se encuentra formado por los números reales positivos, $\mathbf{R}^+$ es decir (0, +∞) y su recorrido, por todos los números reales.

- Son continuas en todo su dominio.
- Si a > 1, la función es negativa para valores de *x* menores que 1 y positiva para valores de *x* mayores que 1, y es creciente en todo su dominio.

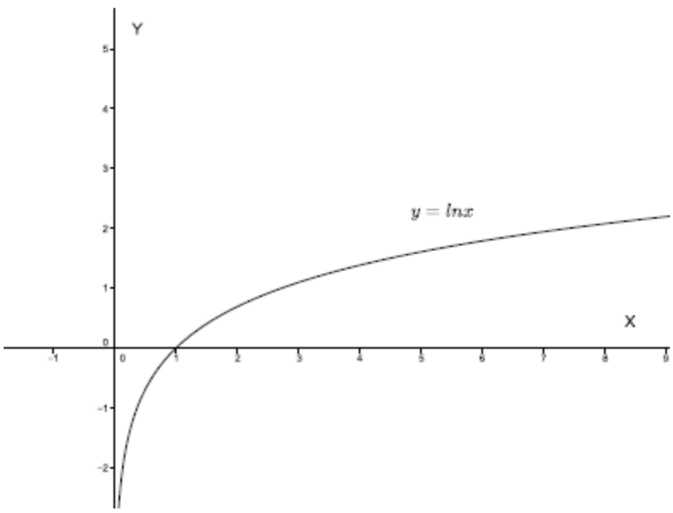
- Si a < 1, la función es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$, y es decreciente en todo su dominio.
- Tienen como asíntota vertical la recta x = 0.
- Siempre pasan por los puntos (1, 0) y (a, 1).

La función logaritmo neperiano:

El logaritmo que tiene por base el número *e* se denomina **logaritmo neperiano** o natural, y se representa como ln *x*.

$$\ln x = \log_e x = y \Longleftrightarrow e^y = x$$

La función **f(x)= ln *x*** asocia a cada número real positivo *x* el valor de su logaritmo neperiano, ln x.

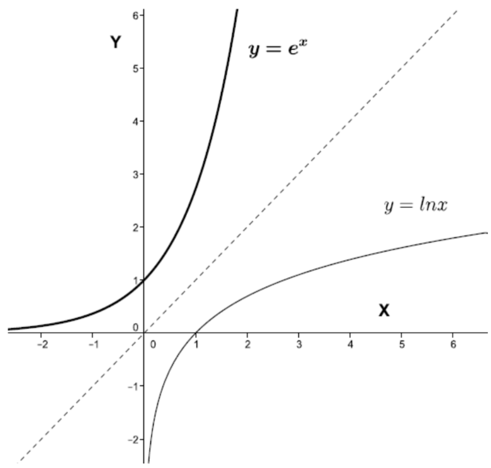


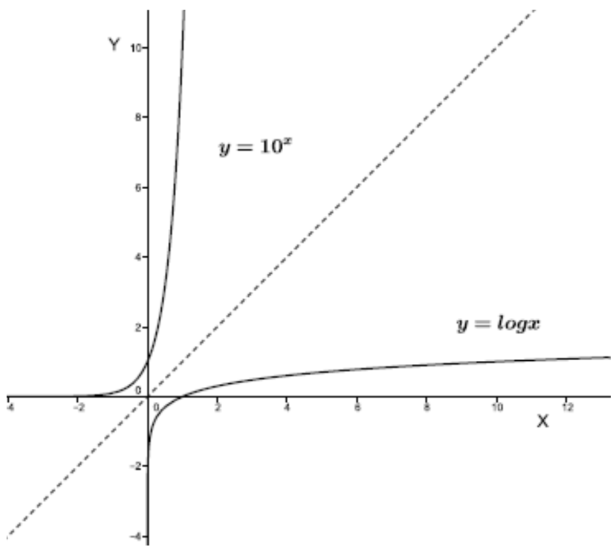
Relación entre las funciones exponenciales y logarítmicas:

La función logarítmica $y = \log_a x$ con a > 1 es la inversa de la exponencial $y = a^x$.

Las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\ln x$ son inversas, *y* sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Del mismo modo, las funciones $y=10^x$ e $y= \log x$ son inversas y, por tanto, sus gráficas son simétricas respecto de *y=x*.



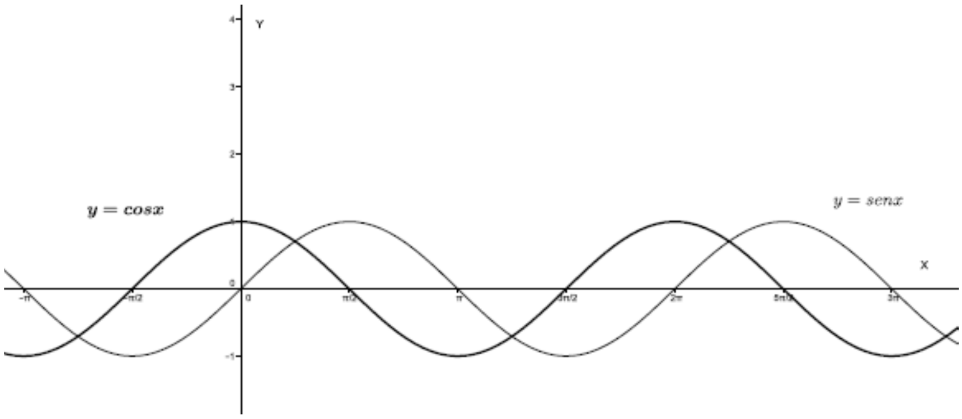


En general, la función exponencial *y=a* ^{x} *(a > 0, a≠1)* es la inversa de la función logarítmica de la misma base, y= $\log_a x$, por lo que sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

4.6.10. Funciones trigonométricas.

4.6.10.1. La función seno y coseno.

Las funciones trigonométricas seno, y=sen *x, y* coseno, y= cos *x,* asignan a cada valor del ángulo *x,* dado en radianes, su seno y su coseno.



Los valores de las funciones se repiten para valores de *x* que difieren en 2π.
Las funciones trigonométricas seno y coseno son periódicas, de periodo igual a 2π.

sen (x ± 2π)=sen x cos(x±2π)=cos x

Las funciones seno y coseno tienen las siguientes propiedades.

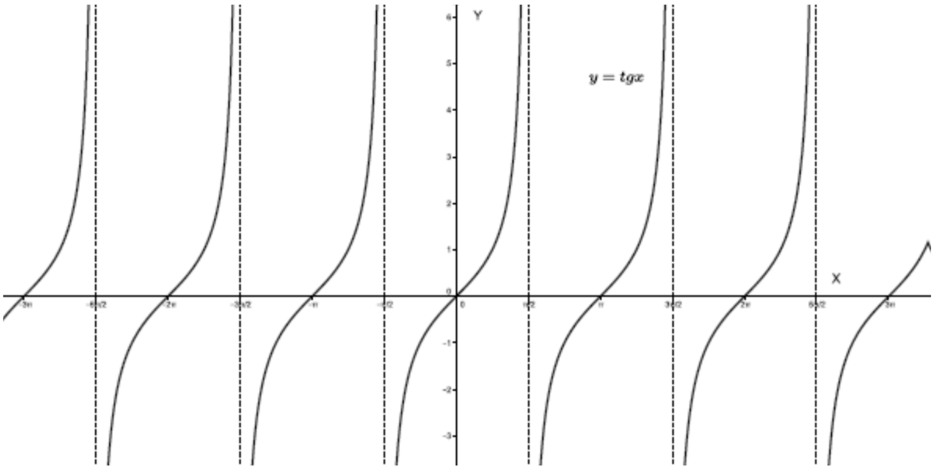
- Su dominio es todo **R,** y su recorrido, el intervalo [-1, 1].
- Son funciones continuas en todo su dominio.
- Al ser periódicas de periodo 2π, basta con estudiarlas en [0, 2π].
- Su crecimiento y decrecimiento son:

0 π/2 π 3π/2 2π				
sen x	crec	decrec	decrec	crec
cos x	decrec	decrec	crec	crec

- El seno alcanza un máximo en [π/2, 1] y un mínimo en [3π/2, -1].
- El coseno alcanza un mínimo en [π, -1] y máximos en [0, 1] y [2π, 1].
- La función sen x es simétrica respecto del origen (tiene simetría impar), ya que sen(-x)=-senx.
- La función cos x es simétrica respecto del eje Y (tiene simetría par), porque
- cos(-x)=cosx.

4.6.10.2 La función tangente.

La función tangente, tg *x,* asigna a cada valor del ángulo *x,* dado en radianes, su tangente.



Los valores de la función se repiten para valores de *x* que difieren en π.
La función trigonométrica tangente es periódica, de periodo π .

$$tg(x+\pi)=tg\ x$$

La función tangente presenta las siguientes propiedades:

- Su dominio es todo **R** excepto los múltiplos impares de π/2
- Al ser periódica de periodo π, es suficiente con estudiarla en [0, π).
- Tiene asíntotas verticales cuando *x* es cualquier múltiplo impar de π/2.
- No presenta máximos ni mínimos y es siempre creciente.
- Es simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que tg (—x)=—tg x.

4.7. Operaciones con funciones.

Las funciones, igual que los números, se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir.

4.7.1. Adicción y sustracción de funciones.

Si f *(x)* y g *(x)* son dos funciones, **la suma de f y g** se define en todos los puntos que pertenezcan a ambos dominios como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

A cada *x* dominio común de ambas funciones le hace corresponder el valor ***f (x) + g (x)***

De la misma forma, **la resta de las funciones f y g** se define para todos los puntos que pertenezcan a ambos dominios como:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

A cada x dominio común de ambas funciones le hace corresponder el valor ***f (x) - g (x)***

Si sumamos y restamos las funciones f $(x) = x^2 + 3x - 4$ y g $(x) = x^3 + 5x + 6$, la expresión algebraica de la función suma es:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 3x - 4) + (x^3 + 5x + 6) = x^3 + x^2 + 8x + 2$, y la expresión algebraica de la función resta es:

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 3x - 4) - (x^3 + 5x + 6) = -x^3 + x^2 - 2x - 10$

A partir de las tablas de valores de las funciones anteriores obtenemos la tabla de valores de la función suma y de la función resta:

4.7.2. Función opuesta.

Si f *(x)* es una función, la **función opuesta** de f se define en el dominio de f como:

$$(-f)(x) = -f(x)$$

La función opuesta es la que resulta de cambiar de signo las imágenes de f *(x).* Por tanto, si $f(x) = x - 1$, la expresión algebraica de función opuesta es:

$(-f)(x) = -f(x) = -(x - 1) = -x + 1$

La **representación gráfica** de la función opuesta se obtiene aplicando una simetría respecto al eje de abscisas a la gráfica de la función f *(x).*

La sustracción de dos funciones también se puede definir como la adición de la primera función con la opuesta de la segunda:

$$(f - g)(x) = f(x) + (-g)(x)$$

4.7.3. Multiplicación de un número por una función.

Si f *(x)* es una función y k es un número real, el **producto de k y f** se define en el dominio de f como:

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

Si $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $k = 2$, la expresión algebraica de la función $2 \cdot f$ es:

$$(2 \cdot f)(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 2$$

La función producto de una función y un número consiste en multiplicar cada imagen de f *(x)* por dicho número. Asocia a cada x, k veces el valor de f(x).

Gráficamente se observa que las imágenes de (2 f) *(x)* son el doble que las imágenes de f *(x).*

4.7.4. Multiplicación y división de funciones.

Si f *(x)* y g *(x)* son dos funciones, la **multiplicación de f por g** se define en todos los puntos que pertenezcan a ambos dominios como.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

A cada *x* dominio común de ambas funciones le hace corresponder el valor ***f (x) · g (x)***

Análogamente, la **división de f entre g** se define para todos los puntos que pertenezcan a ambos dominios, excepto para aquellos puntos que anulen a g *(x)* como:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

A cada *x* dominio común de ambas funciones, con g(x)≠0 le hace corresponder el valor

f (x) / g (x).

Si f $(x) = x^2$ -8x + 15 y g (x) = 2x + 1, la función producto es.

(f · g) (x) = f (x) - g (x) = $(x^2 - 8x + 15) \cdot (2x + 1) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 15$

Y la función cociente es:

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-8x+15}{2x+1}$. No está definida en

4.7.5. Composición de funciones.

La **composición de una función g con una función f**, consiste en aplicar el valor de la imagen de la función g a la función f.

Si f (x) y g (x) son dos funciones, la composición de g con f se define como:

$$(f \circ g)(x) = f\,[g(x)]$$

Para que se pueda realizar la composición de funciones la imagen de la función g debe estar incluida en el dominio de la función f. La función g compuesta con f es igual al valor de g calculado en el valor g(x).

Aunque se aplique en primer lugar la función g(x) y después f (x), g compuesta de f escribe de derecha a izquierda (en la composición de funciones, la función que primero se aplica se escribe a la derecha):

$$(f \circ g)(x)$$

La composición de funciones no es conmutativa, es decir, el orden de la composición determina resultados distintos.

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Halla la composición de las funciones f *(x) = x²* + 1 y $g(x) = \sqrt{x+1}$

(f ∘ g) (x)=f [g (x)]= $f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 + 1 = x + 1 + 1 = x + 2$

(g∘ f) (x)=g [f(x)] = g(x^2+1) $= \sqrt{x^2+1+1} = \sqrt{x^2+2}$

4.7.6. Función inversa.

Una función hace corresponder a un valor de la variable independiente *x* un único valor de la variable dependiente y, pero ¿existirá una función que, conocido el valor de la variable dependiente, permita hallar su correspondiente valor de la variable independiente?

La respuesta es afirmativa si se cumplen algunas condiciones, y esa función se denomina función inversa.

La función inversa *de f (x)* se denota por f^{-1} y cumple que:

$$(f^{-1})(y)=x$$

Dos **funciones *f y g* son** inversas si se verifica que:

$$(g \circ f)(x)=(f \circ g)(x)= x.$$

Aunque la función inversa de *f* se represente como f^{-1} eso no significa que f^{-1} (x) sea igual a $\frac{1}{f(x)}$.

Las gráficas de *f y* de *g* son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante. Para hallar la inversa de *f(x)* basta con despejar la variable *x* e intercambiar los nombres de *x* e y.

Ejemplo: Halla la función inversa de la función f *(x)= x²* - 3.

La función f hace corresponder a todo valor *x* la imagen y= x^2 - 3. Se trata de encontrar una expresión que facilite la variable *x* en función del valor de y. Para ello se despeja la variable *x* de la ecuación:

$$y = x^2 - 3 \rightarrow y + 3 = x^2 \rightarrow x=\sqrt{y+3}$$

Después se intercambian las variables para expresar la función inversa en función de *x.*

Por tanto: **(f^{-1}) (x)=** $\sqrt{x+3}$

La composición de dos funciones inversas da la función identidad, que es I*(x) = x,* es decir:

$$(f \circ f^{-1})(x)= I(x) = x$$

Una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Obtención de gráficas de funciones a partir de otras más sencillas:

A partir de las gráficas de las funciones elementales se pueden obtener las de funciones más complejas utilizando transformaciones.

- *Traslación vertical*: *f(x)+k.* Si a la función *f(x)* se le suma un número real *k,* su gráfica se desplaza verticalmente *k* unidades hacia arriba (si *k>0)* o hacia abajo (si *k <0).*
- *Traslación horizontal*: *f(x+k).* Si en la función *f(x)* se remplaza la variable *x* por *x+k,* con *k* un número real, su gráfica se desplaza k unidades a la izquierda (si *k*>0) o a la derecha (si *k* < 0).
- *Dilatación o contracción vertical*: *k · f(x).* Si se multiplica la función por un número real *k* > 0, las ordenadas de su gráfica se dilatan (si k > 1) o contraen (si *k* < 1) por el factor *k.*
- *Dilatación o contracción horizontal*: *f(k·x).* Si se multiplica el argumento de la función *f(x)* por un número real *k*> 0, las abscisas de su gráfica se dilatan (Si k < 1) o contraen (si *k*> 1). En las funciones trigonométricas, el periodo se dilata o contrae exactamente al factor *k.*
- *Simetría respecto del eje X: (-1)· f(-x). Al* multiplicar la función por -1, su gráfica se refleja respecto del eje *X.*
- *Simetría respecto del eje Y: f(-x).* Si en la función *f(x)* se remplaza la variable *x* por *-x,* su gráfica se refleja respecto del eje Y.

4.8. Límite de una función en un punto.

El concepto de límite no figura en las normativas para la Educación Secundaria Obligatoria. Sólo una de las editoriales, SM, lo incluye en 4º de ESO para, posteriormente, explicar la continuidad de las funciones.
En el resto de editoriales se empieza a explicar en 1º de Bachillerato. A pesar de esto, lo he incluido porque considero que es importante y necesario para explicar la continuidad de forma correcta, aunque sin profundizar demasiado en el tema: simples pinceladas.

4.8.1. Tendencia de una función.

En muchas ocasiones interesa conocer cuál es el comportamiento de una función cuando la variable independiente tiende a valores determinados, esté la función definida o no en ellos.

4.8.2. Límite de una función en un punto.

Una función f(x) tiene por límite en el punto x_0 el valor L si, a medida que x se acerca a x_0, tanto con valores mayores como menores, se verifica que sus imágenes, f(x), se acercan a L tanto como se desee.

Esto se expresa como:

$$\lim_{x \to x_0} (x) = L$$

Si una función tiene límite ***L*** cuando ***x*** tiende a ***x₀,*** quiere decir que ***x*** puede tomar cualquier valor tan próximo a x_0 como se desee, sin llegar a tomar el valor ***x₀.*** En dicho punto, la función no tiene por qué valer ***L;*** puede no estar definida o tomar cualquier otro valor.

Por ejemplo:

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ y, en cambio, la función no está definida en *x* = 1.

4.8.3. Límites laterales.

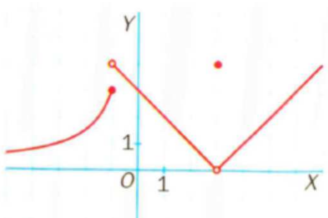
El **limite lateral por la izquierda de una función** *f* cuando *x* se acerca a x_0 es el valor *L* si, a medida que *x* se acerca a x_0 con valores menores que x_0, se verifica que sus transformados, *f(x),* se acercan a *L* tanto como se quiera. Se expresa como:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

De forma análoga se define el **límite lateral por la derecha:** $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

El límite de una función en un punto, si existe, es **único** y coincide con los laterales. Si no coinciden, no existe.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



Fuente: Libro 4º ESO. Editorial SM. Pitágoras. Tema 10

- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 4$ $\Rightarrow$ No existe $\lim_{x \to -1} f(x)$ aunque f (-1)=3.

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$ aunque f (3)=4.

4.8.4. Límites infinitos y en el infinito.

4.8.4.1. Límites infinitos.

Una **función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a x_0** si a medida que *x* toma valores próximos a x_0 por ambos lados, los valores de *f(x)* correspondientes se hacen arbitrariamente grandes y positivos.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Igualmente se definen $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ y los límites laterales:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

4.8.4.2. Límite en el infinito.

En ocasiones interesa conocer el comportamiento de una función cuando la variable independiente toma valores muy grandes en valor absoluto.

Una función *f(x)* tiene por **límite en $+\infty$** el valor *L* si, a medida que x toma valores cada vez mayores, se verifica que sus imágenes, *f(x),* se acercan a *L* tanto como se desee. Se expresa como:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L}$$

Igualmente, se define:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = L}$$

4.8.4.3. Propiedades de los límites.

Para calcular un límite no es necesario, generalmente, construir una tabla y observar la tendencia de la función, sino que basta con sustituir en la expresión de la función el valor de *x* en el que quiere encontrarse el límite.

$$\lim_{x\to 1}(x^2+2) = 1^2+2 = 3$$

Los límites de funciones tienen propiedades análogas a los límites de sucesiones numéricas.
Si las funciones *f* y *g* tienen límite real en $x=x_0$ y *c* es un número real cualquiera, se verifican las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot g)(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x \to x_0} c = c$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} f(x)} \quad \left(si \ \lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} f\,[g(x)] = f \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(si \ \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(si \ \lim_{x \to x_0} f(x) > 0\right)$$

4.8.4.4. Expresiones indeterminadas.

Cuando al calcular un límite se obtiene una expresión que no tiene sentido en **R,** se dice que el **límite es indeterminado.**

Los **diferentes casos de expresiones indeterminadas** que se pueden dar son:

$$\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{0}} \qquad \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \mathbf{0} \cdot \infty \qquad \infty - \infty \qquad \mathbf{1}^{\infty} \qquad \infty^{\mathbf{0}} \qquad \mathbf{0}^{\mathbf{0}}$$

Que aparezca una expresión indeterminada no significa que el límite no se pueda hallar, sino que hay que manipular la expresión del límite para obtener otra equivalente en la que no exista la indeterminación.

Los diferentes métodos para resolver las distintas indeterminaciones son los siguientes:

• **Límites de funciones racionales:**

Las expresiones indeterminadas que se pueden dar son de tres tipos:

$$\frac{k}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Para resolver la indeterminación $\boldsymbol{\frac{k}{0}}$.

Para la indeterminación $\frac{k}{0}$ se calculan los límites laterales.

Si son iguales, la función tiene límite +∞ o —∞; en otro caso no existe límite.

Ejemplo: Para calcular

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 5}{x + 2}$$

Primero se sustituye la variable por 2, y así se llega -1/0. Aunque esta expresión siempre tiende a ∞, es necesario averiguar su signo.

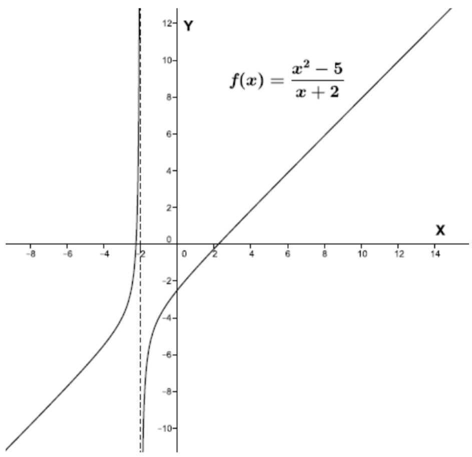
Para ello se toman valores próximos a -2 y se estudia cómo es el valor correspondiente de f(x).

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2-5}{x+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 5}{x + 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe límite.

La gráfica correspondiente a la función es:



Para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ dividen numerador y denominador por la máxima potencia de x que contenga la fracción.

Los límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ para funciones racionales $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ pueden dar:

- 0 si grado (P) < grado (Q).
- ±∞ si grado (P) > grado (Q)
- El cociente de los coeficientes de mayor grado de P y de Q si grado(P)=grado(Q).

Ejemplos de cada caso:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+1}=\frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x^2-1}=0$$

Para resolver la indeterminación $\mathbf{\frac{0}{0}}$.

Para resolver la indeterminación 0/0, se descomponen en factores el numerador y el denominador y se simplifica la función racional.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Para resolver la indeterminación: $\infty-\infty$.

Para resolver las indeterminaciones del tipo∞-∞ se opera la expresión algebraica.

Si f(x)= x y $g(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{x^2+2x+1}{x})=\lim_{x\to+\infty}(x)-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x}=\infty-\infty$$

Para resolver la indeterminación se opera antes de tomar el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+2x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{x}=-2$$

Para resolver la indeterminación: $\mathbf{1}^{\infty}$

Para resolver la indeterminación $\mathbf{1}^{\infty}$ se transforma la función hasta obtener una expresión asociada al límite que define el número **e.**

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$ o de forma más general, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=e$ con:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

5. ACTIVIDADES PARA PROPONER A LOS ALUMNOS.

5.1. Introducción.

Según la normativa vigente, tanto en el BOE como en el BOCYL, se establece en el currículum de diferentes cursos el uso de las nuevas tecnologías para la representación y análisis de las funciones.

Se indica de la siguiente manera en las normativas vigentes:

	BOE	BOCYL
1º ESI	-----------------------	------------------------
2º ESO	"Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas".	"Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas".
3º ESO	"Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas".	"Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones".
4º ESO (OPC B)	---------------------------	"Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico".

En todos los libros, sobre todo en los últimos años y, por regla general al final de cada unidad didáctica, se proponen diferentes programas informáticos para la investigación y aprendizaje de las funciones.

Algunos ejemplos de esto son los siguientes:

- En el libro de 1º ESO de Editex: "Matemáticas con Microsoft Excel". Explica cómo hacer, a partir de una fila con los valores iniciales, otra fila con los valores x^2 . En la primera celda de la segunda fila, se pone (=A1 ^2). Luego hay que marcar la esquina inferior derecha y arrastrar el cursor a lo largo de la fila.
  En el apartado "Amplía con…" propone "Ojo Matemático", el programa 2: "Ecuaciones y fórmulas" y el Programa 4 "Gráficas".
- En los libros de SM Pitágoras existen en cada unidad didáctica apartados que se llaman "En la red": Son enlaces que permiten ampliar conocimientos, proponen actividades. Algunos ejemplos de estas referencias son:

  - www.e-sm.net/1esoz36: Representación gráfica de funciones que se escriban.
  - www.e-sm.net/1esoz42: Aprender más de puntos de discontinuidad.
  - www.e-sm.net/2esoz41: Construcción de más funciones.
  - www.e-sm.net/3esoz05: Representa parábolas de forma interactiva.
  - www.e-sm.net/4esoz35: Haz operaciones simples con funciones y números reales con GeoGebra.
  - www.e-sm.net/4esoz36: Construye y visualiza funciones a trozos con GeoGebra.
  - www.e-sm.net/4esoz43: Representa funciones polinómicas hasta cuarto grado con GeoGebra.
- En los libros de SM Pitágoras figura también, en varias ocasiones en cada unidad, una referencia: LIBROSVIVOS.NET, indicando posteriormente la unidad donde hay que buscar, interactivos. Aquí se proponen actividades complementarias.
- En los libros de SM también hay un apartado que se llama “Con calculadora”. En él se explica el uso de calculadora, dibujando las teclas que hay que utilizar y los pasos que hay que dar. Por ejemplo, para calcular:

  $2^{1,3}$ se hace: 2 (tecla x^y) 1,3 (tecla =)

  $e^{2,54}$ se hace: e (tecla e^x) 2,54 (tecla =)

La experiencia que he tenido en los meses de Prácticas es que, aunque todo esto está muy bien, a la hora de la verdad, los profesores no tienen tiempo de aplicar estos recursos tecnológicos y se limitan a las tradicionales clases magistrales y luego a poner los ejercicios y problemas de siempre.

5.2. Uso de herramientas TIC´s para el estudio y análisis de funciones.

Con esta actividad se pretende trabajar la obtención de gráficas de funciones a partir de otras más sencillas, como aparece en el apartado 4.7.

La actividad que se propondría para el estudio y análisis de funciones sería la siguiente: (Hay que realizarla en el Aula de Informática y los ordenadores deben tener instalado el Programa GeoGebra, que es gratuito).

1. A los alumnos se les facilita un listado de funciones f(x).
2. En la sala de ordenadores, con el programa GeoGebra, del que previamente han visto breves nociones del funcionamiento, se les propone dibujar las funciones del listado entregado. Sobre cada una de las funciones del listado, deben hacer transformaciones del estilo f(x+a), f(x)+a, f(ax), af(x), |f(x)|….., que “jueguen”, que cambien distintos parámetros y vayan observando lo que sucede para,

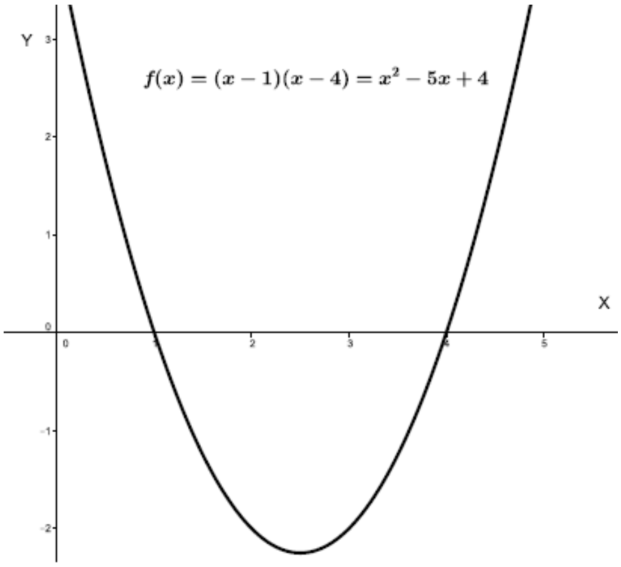
finalmente, llegar a conclusiones teóricas.

Unos ejemplos de estas funciones podrían ser:

Representar las funciones que se indican, siendo

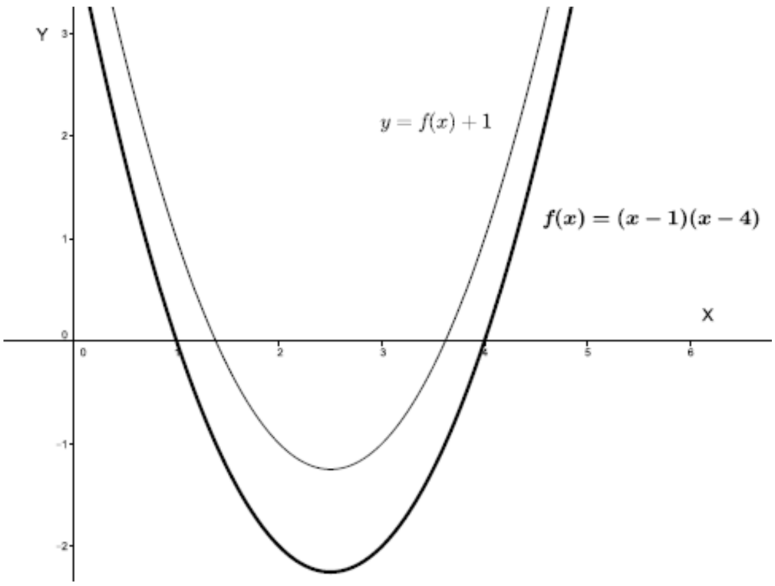
$$f(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$$

1. $y = f(x)$



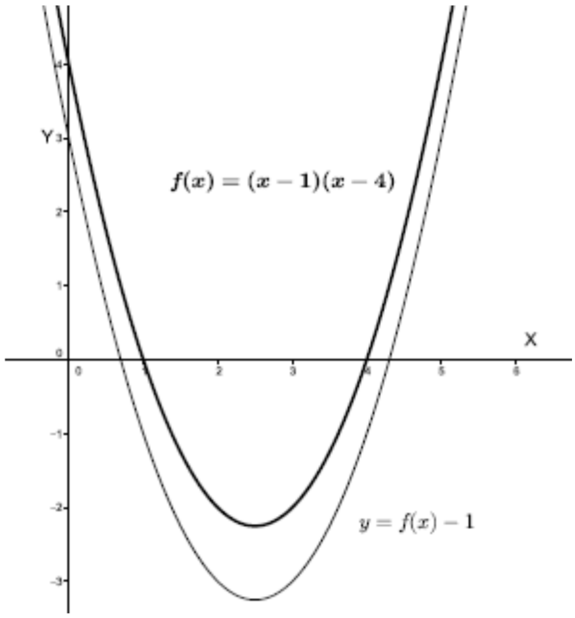
2. $y = f(x) + 1$

La gráfica se desplaza en 1 unidad hacia arriba.



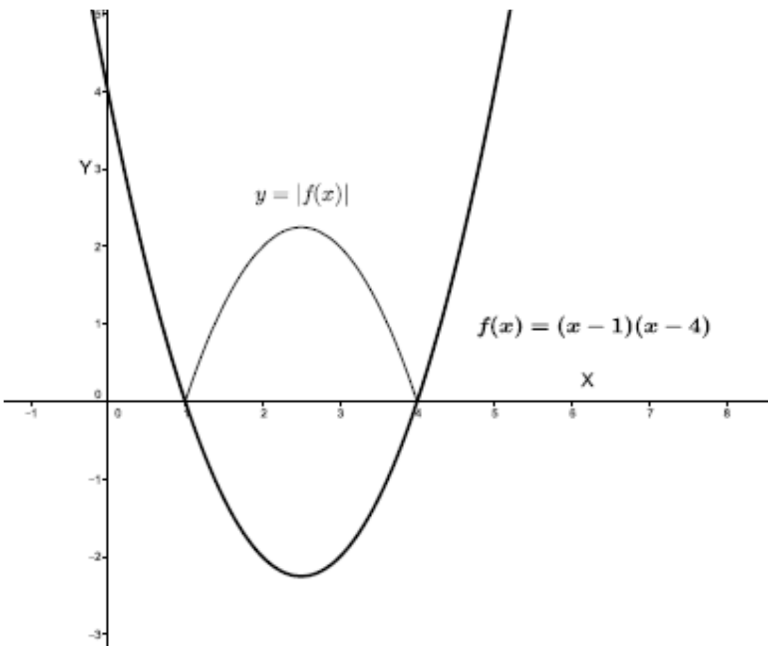
3. $y = f(x) - 1$

La gráfica se desplaza en 1 unidad hacia abajo.



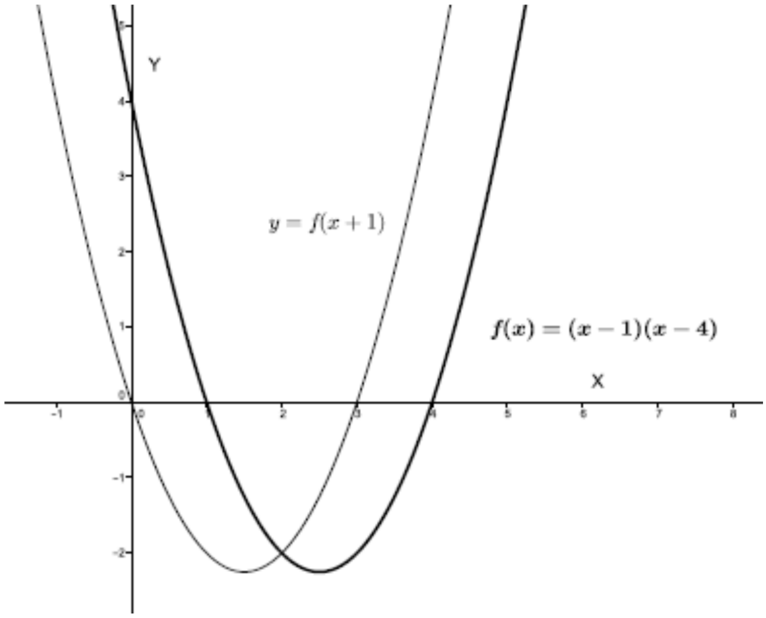
4. $y = |f(x)|$

La gráfica resultante transforma los valores negativos en positivos, de forma simétrica respecto del eje de abscisas y los valores positivos los deja como estaban.



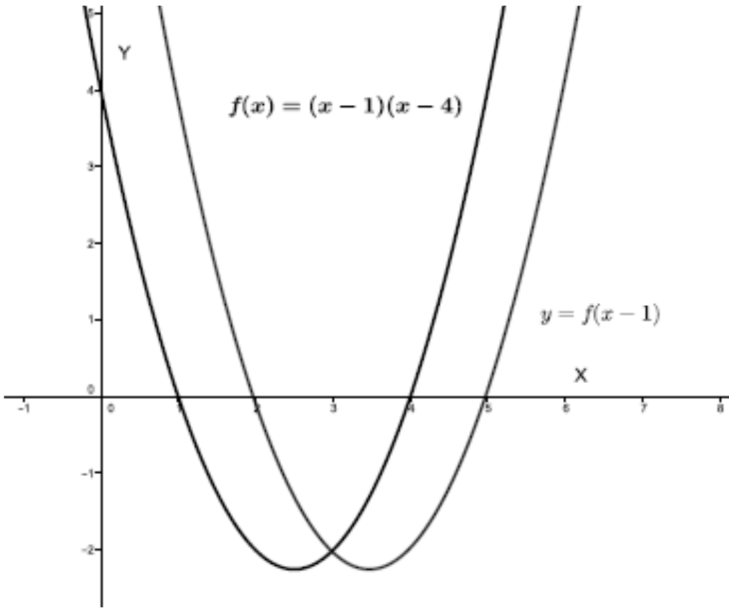
5. $\boldsymbol{y = f(x+1)}$

Se desplaza 1 unidad hacia la izquierda.



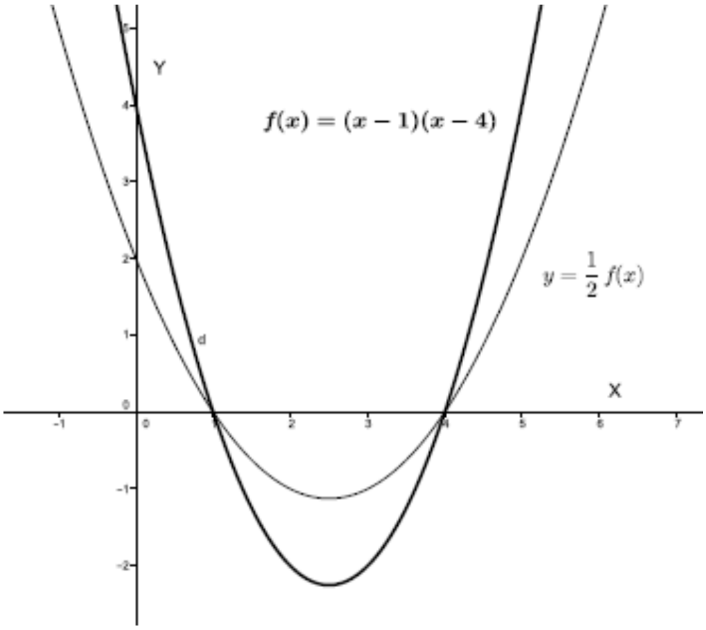
6. $\boldsymbol{y = f(x-1)}$

Se desplaza 1 unidad hacia la derecha.



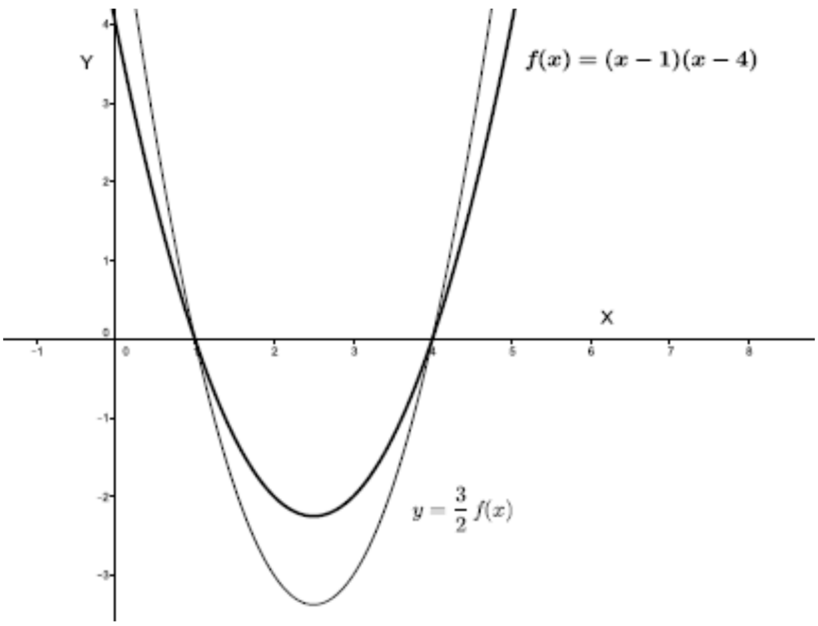
7. $\boldsymbol{y = \frac{1}{2} f(x)}$

La gráfica se “abre” en proporción ½ y conserva las raíces.



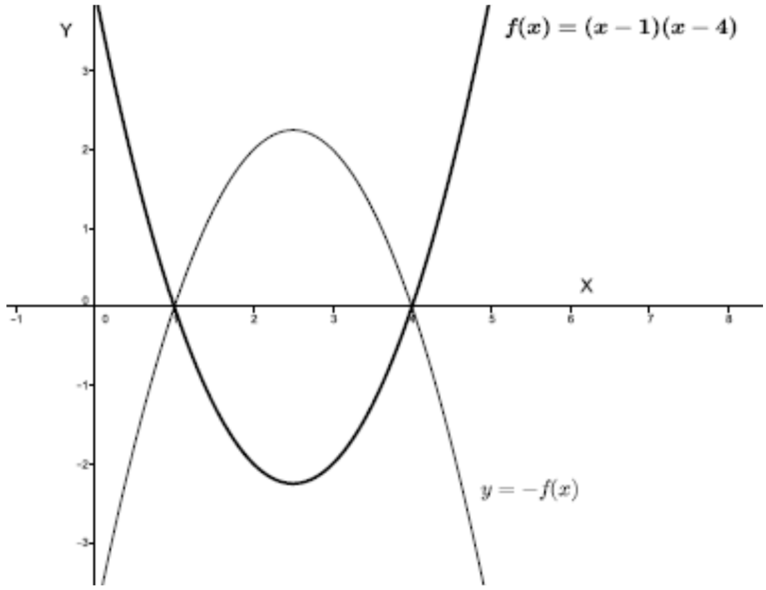
8. $\boldsymbol{y = \frac{3}{2} f(x)}$

La gráfica se “cierra” en proporción 3/2 y conserva las raíces.



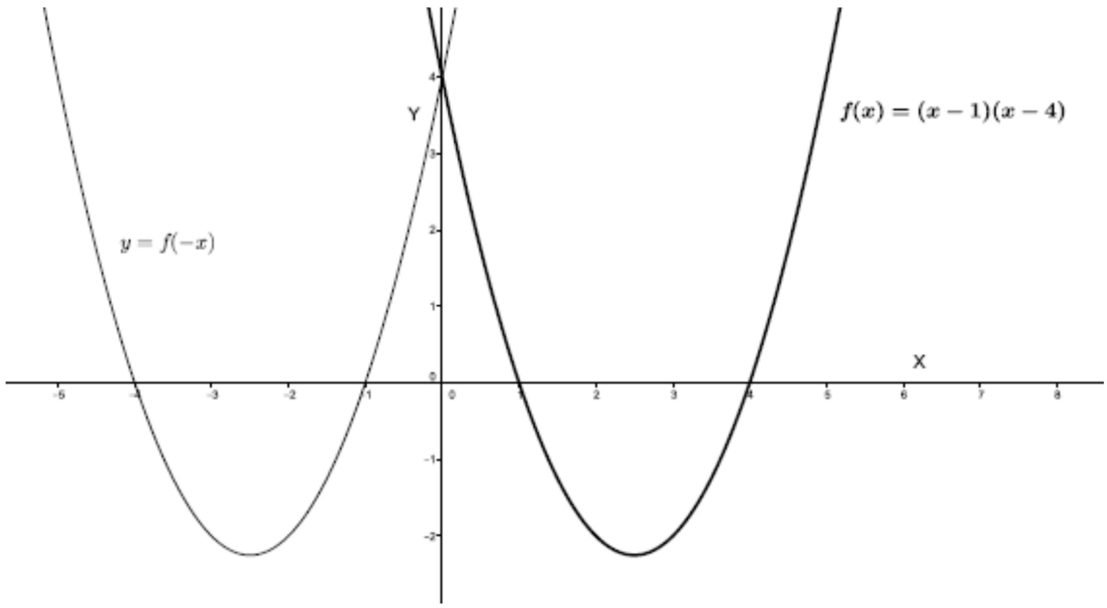
9. $\boldsymbol{y = -f(x)}$

Gráfica simétrica a f(x) respecto al eje de abscisas.



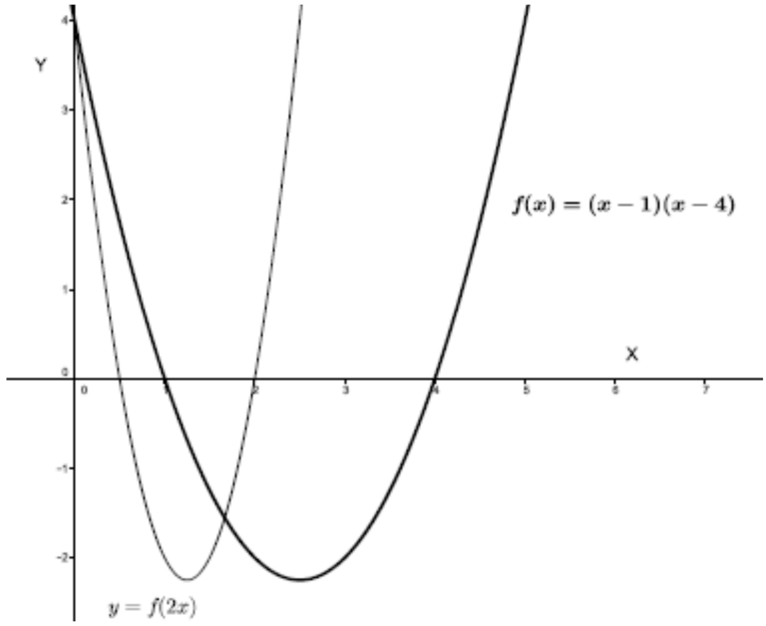
10. $\boldsymbol{y = f(-x)}$

Gráfica simétrica a f(x) respecto al eje de ordenadas.



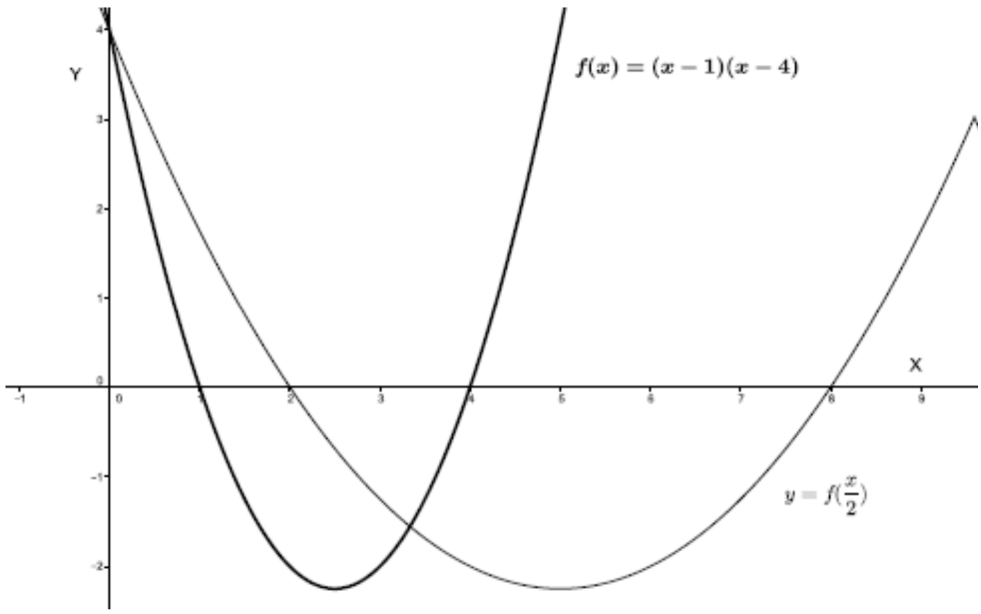
11. $y = f(2x)$

La abscisa del vértice es la mitad que la de f(x) desplazándose hacia la izquierda. La parábola se cierra a la mitad. Se conserva la ordenada en el origen. El valor de las raíces es la mitad de las anteriores.



12. $y = f(\frac{x}{2})$

La abscisa del vértice es el doble que la de f(x) desplazándose a la derecha. La parábola se "abre" al doble. Se conserva la ordenada en el origen. El valor de las raíces es el doble de las anteriores.



3. Una vez sacadas las conclusiones teóricas, se propondrá a los alumnos unos ejercicios combinados de los anteriores y deberán dibujar las gráficas correspondientes, pero ya con bolígrafo y papel.

   Por ejemplo:

   f (2x-3)

   f (1/4x)+4

   |f (3x+2)|

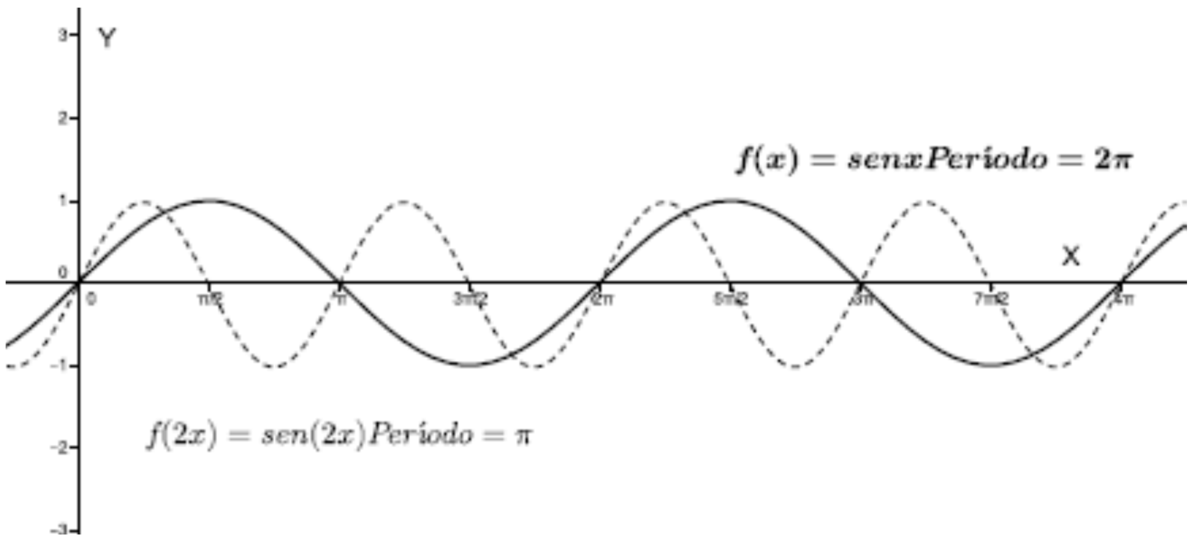
4. Con la experiencia del programa Geogebra en las funciones anteriores, los alumnos deberán rellenar la siguiente tabla de funciones trigonométricas sin necesitad de dibujar las gráficas.
5.

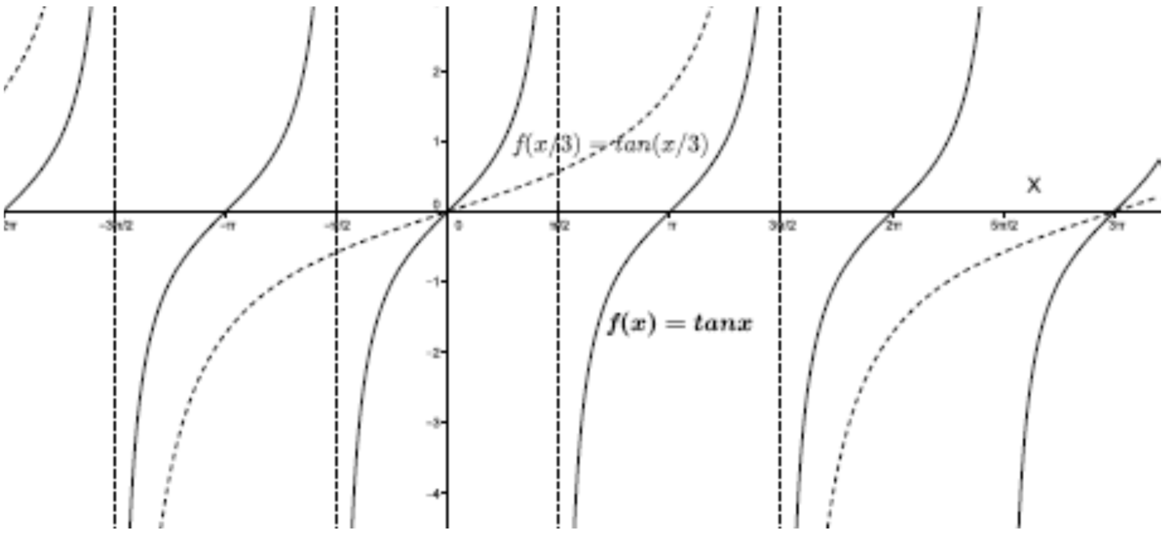
función	**g(x)=sen (2x)**	**g(x)=tan(x/3)**	**g(x)=cos( )**	**g(x)= sen ( )**
período			4π	2

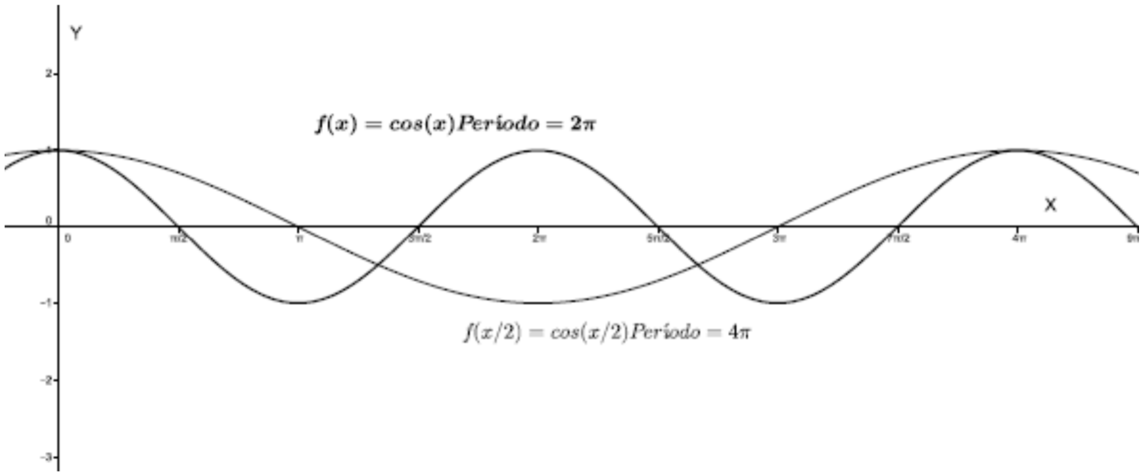
La propiedad a la que han llegado, que será aplicable a las funciones trigonométricas, será la siguiente:

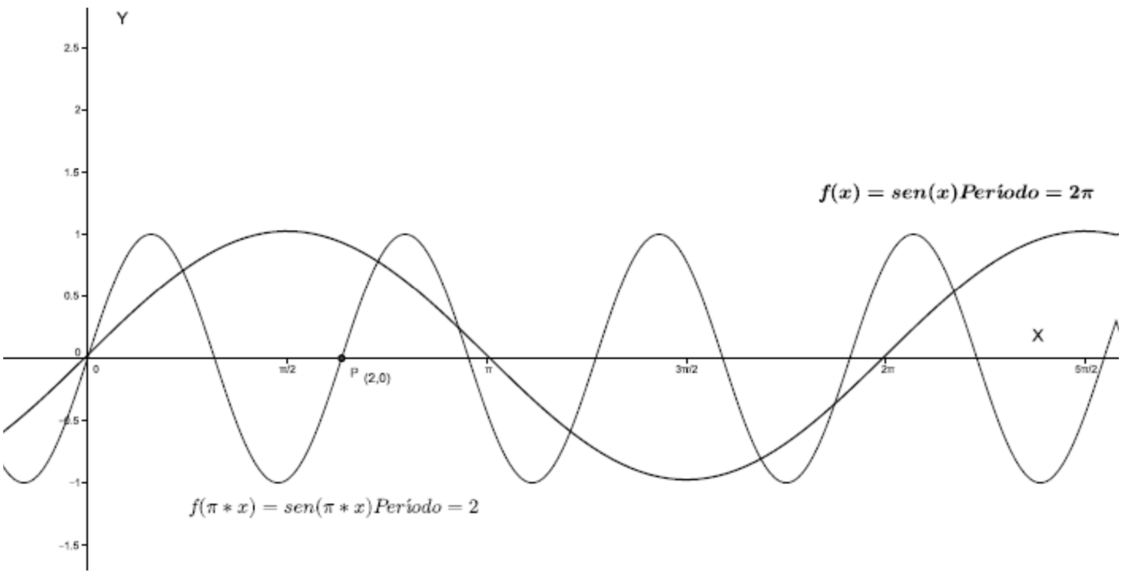
<u>“Si f es una función periódica de período T, entonces g(x)=f(ax) es una función periódica de período T/a”.</u>

Deberán dibujar las dos gráficas para poder hacer la comparación, de la siguiente forma:




$f(x/3) = tan(x/3)$
$f(x) = tanx$
X


Y
$f(x) = cos(x)Período = 2\pi$
X
$f(x/2) = cos(x/2)Período = 4\pi$


Y
$f(x) = sen(x)Período = 2\pi$
X
P (2,0)
$f(\pi * x) = sen(\pi * x)Período = 2$

Luego irán a la sala de ordenadores a comprobar que, efectivamente, se cumple lo experimentado y estudiado previamente**,** tanto para las funciones primeras como para las trigonométricas.

5.3. Juegos para aprender a evaluar funciones en un punto.

Basado en la propuesta que se hace en "Las matemáticas en ESO y Bachillerato a través de los juegos" de Mauricio Contreras (4. Juegos algebraicos), que a su vez está extraído del libro "Ideas y actividades para enseñar Álgebra" de la Editorial Síntesis.

http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS6.pdf

El juego consistirá en lo siguiente:

- Se harán grupos en la clase de 4 alumnos cada grupo.
- Cada miembro del grupo partirá de cada una de las casillas con flecha.
- Se trata de comer las fichas de los jugadores contrarios, es decir, del resto de jugadores. Ganará el último jugador que tenga ficha.
- ¿Cómo se juega? Muy sencillo.

1) Se meterán en una bolsa tarjetas con funciones diferentes a ambos lados de la tarjeta.

2) Al jugador que le toque, meterá la mano en la bolsa y sacará una de las tarjetas al azar.

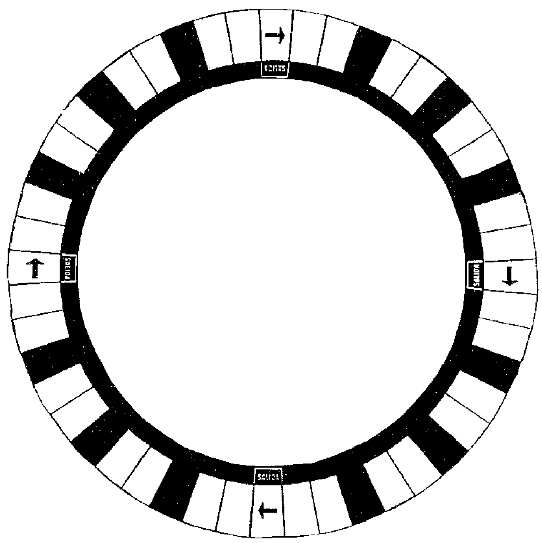
3) Mirará las dos funciones que tiene la tarjeta y tiene que pensar con qué función y para qué valor (para qué número entre -10 y +10) obtiene el número que quiere sacar para "comer" a otro jugador.

4) En caso de que no pueda comer, puede pensar en un número para caer en una de las casillas negras. Si un jugador está en una casilla negra está a salvo de que le coman.

Las funciones que se van a poner en las fichas van a ser:

Anverso de tarjeta	**Reverso de tarjeta**
$y = \frac{5(x^2+2x+1)}{x+1}$	$y = \frac{4(x^2-1)}{x-1}$
$2y = 4(x+6)$	$y = \frac{8(x^2-2x+1)}{x-1}$
$3y = 6(3x+1)$	$y = -5x+8$
$y = \frac{x^2-4}{x+2}$	$y = \frac{3x^2+3x}{x+1}$

$y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$	$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$
$4y = 16(x - 2)$	$y = -3x + 4 + 7x$
$y = 6(x - 4)$	$y = x + 10$
$y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$	$y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$



Tablero

De esta forma, el juego depende de la suerte al sacar la tarjeta (unas funciones son más fáciles que otras) y de la destreza en evaluar una función en un punto.

6. CONCLUSIONES.

Después del estudio realizado sobre los contenidos de funciones en Educación Secundaria Obligatoria, la conclusión que he sacado es que las distintas editoriales, en general, cumplen perfectamente lo que marcan las Normativas vigentes, tanto la estatal como la regional. Incluso alguna mete algún concepto que no es obligatorio por normativa como es el caso del concepto de curvatura, (en Edelvives en 4º de ESO), la acotación y los límites (en SM en 4º de ESO).

Lo que sí que es cierto es que tratan de poner ejercicios y problemas que se adaptan a situaciones reales, que se pueden dar en la vida cotidiana. Este es uno de los objetivos que se marcan claramente en las normativas. Es lo que se denomina problemas contextualizados.

Desde el punto de vista didáctico, se hace de una forma muy poco atractiva y motivadora para los alumnos. Resulta muy arduo e incluso aburrido.

Para evitar esto, se pueden incluir en las clases otro tipo de actividades para hacer que estos temas sean más atractivos, los alumnos los estudien con ganas y, como consecuencia de lo anterior, el aprendizaje sea más significativo, se interiorice .

Algunas de estas propuestas podrían ser las siguientes:

- Hacer algún juego de funciones, de forma que los alumnos aprendan la materia y, a la vez, disfruten haciéndolo.
- Poner algún video que hay en Internet sobre el tema como por ejemplo: "Bailando con Funciones" (http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.es/2012/07/bailando-con-funciones.html) donde con la forma de los brazos con respecto al cuerpo, se representan las distintas funciones.
- Enseñar en clase el manejo de algunas aplicaciones y programas que permiten la representación gráfica de funciones, por ejemplo el GeoGebra. Este programa permite meter deslizadores, que son variables que pueden ir cambiando y se puede ir viendo cómo varía la gráfica a medida que cambian las variables.

7. BIBLIOGRAFÍA.

- "Historia de la Matemática". Carl B. Boyer. Alianza Universidad Textos. Madrid. 1986 (1ª Edición), 1987 (1ª Reimpresión).
- "Lecciones de Historia de las Matemáticas", Han Wussing. Edición: Siglo XXI de España Editores, S.A., Madrid, marzo, 1998.
- http://www.geogebra.org/en/upload/files/ruben/lec_BreveHistoriaFunciones_profe.pdf
- Libro 1º BACHILLERATO. Editorial EDEBÉ.1998. Reimpresión: 2001.
- REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.
- Libro 1º ESO. Editorial SM. Pitágoras.2010.
- Libro 1º ESO. Editorial Editex.
- Libro 1º ESO. Editorial Edelvives.2007.
- Libro 2º ESO. Editorial SM. Pitágoras.2010
- Libro 2º ESO. Editorial Edelvives. 2008.
- Libro 3º ESO. Editorial SM. Pitágoras.2010.
- Libro 3º ESO. Editorial Anaya.2011.
- Libro 4º ESO. Editorial Edelvives.2008.
- Libro 4º ESO. Editorial Anaya.2012.
- Libro 4º ESO. Editorial SM. Pitágoras.2010.
- http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.es/2012/07/bailando-con-funciones.html
- http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS6.pdf