Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

# El significado grupo teórico del espín


**Autora**
Elena Ruiz Ramos

**Dirigido por**
Dr José María Muñoz Castañeda
Dr Mariano Antonio del Olmo Martínez


**Curso**
2023/24

*A mi familia y amigos*

# Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a todas las personas que han hecho posible la realización de este trabajo.

En especial a mis tutores José María Muñoz Castañeda y Mariano Antonio del Olmo Martínez por la implicación y la ayuda que me han prestado durante estos últimos meses. Gracias a sus explicaciones que me han permitido completar y comprender los conocimientos plasmados en este trabajo de fin de grado.

También agradecer a todas las personas que me han acompañado a lo largo de estos cuatro años de carrera, apoyándome tanto académicamente como personalmente. Agradecer a mi familia por apoyarme a lo largo de toda mi trayectoria universitaria, en especial a mi hermano por haber sido un gran ejemplo a seguir, aconsejándome y transmitiéndome su experiencia en esta misma carrera hace unos pocos años. Habéis sido mi mayor soporte tanto en los buenos, como en los malos momentos, siempre animándome a seguir adelante.

Por último, agradecer a mis amigos y compañeros de carrera por hacer mi experiencia universitaria más fácil y por el apoyo mutuo que nos hemos dado estos últimos años. Por tantas alegrías y tristezas que hemos compartido, que me han permitido desahogarme en los momentos de mayor estrés.

# Abstract

Spin is an intrinsic property of particles, existent only in the context of quantum mechanics. It's effects were first discovered in 1922 in an expertiment carried out by the scientists Otto Stern and Walther Gerlach, being firstly introduced as an angular momentum associated to the rotation of the electrons, until Wolfgang Pauli proposed a more abstract interpretation as a ”classically non describable two-valuedness”[10].

While the notion of the spin as an angular momentum associated to a spatial rotation has long been disproved, spin is still often refered as an intrisic angular momentum because of the similarities in their behavior. The objective of this thesis is to provide a faithful representation of the behaviour of spin and orbital angular momentum in relativistic and not relativistic situations, emphasizing the differences between them and indicating the inconsistencies that arise from considering the spin as an intrinsic angular momentum.

# Índice general

# 1. Introducción

El espín es una de las propiedades intrínsecas de las partículas elementales. Su definición a menudo viene dada cómo un momento angular intrínseco de valor fijo y en un principio se planteó como la rotación de la partícula, considerada esférica, alrededor de un eje propio. Esta descripción no es posible debido a que las partículas elementales son consideradas puntuales, y por tanto no es posible considerar su rotación sobre sí mismas.

Desde la perspectiva de la mecánica cuántica, la interpretación y comportamiento del espín se equipara a la del momento angular orbital, permitiendo incluso definir el momento angular total como la suma de ambos. Esto podría inducir a pensar en el espín se comporta como un momento angular asociado a una rotación espacial. No obstante, esto implicaría que, al restringir la partícula a una única dimensión desaparecería el espín, al igual que lo hace el momento angular orbital. Sin embargo, como propiedad intrínseca de las partículas, el momento angular intrínseco asociado al espín sigue existiendo para partículas cuyo movimiento está restringido a una dimensión.

Puesto que en una dimensión es imposible que la partícula efectúe ningún tipo de rotación, se tiene que el espín no puede ser considerado verdaderamente como un momento angular. Se trata de una magnitud física cuántica, sin análogo en la mecánica clásica.

En este trabajo de fin de grado se ha buscado ejemplificar y analizar la naturaleza del espín, a partir del estudio de las propiedades del espín relativista de una partícula restringida a una dimensión desde la perspectiva de la teoría de grupos.

## 1.1. Primeras evidencias de la existencia del espín

### 1.1.1. Espectroscopía

El concepto de espín fue introducido por primera vez en el contexto del espectro de emisión de metales alcalinos.

Antes del descubrimiento de la existencia del espín, la estructura fina del hidrógeno obtenida a partir de la espectroscopia no se correspondía con los modelos teóricos desarrollados a partir de la idea de que las partículas elementales estaban únicamente bajo la influencia de un momento angular orbital. Es por eso que surgió la necesidad de definir un nuevo número cuántico, el espín, que pudiese explicar el desdoblamiento de las líneas espectrales.

En el año 1924, el físico Wolfgang Pauli propuso la existencia de una nueva propiedad cuántica del electrón, con el fin de explicar el efecto Zeeman anómalo y la multiplicidad de los espectros atómicos. Definió que esta propiedad tomaba dos valores posibles, y no era describible clásicamente[10]. Más tarde, en el año 1925 el físico Ralph Kronig planteó la existencia de un momento angular intrínseco a los electrones de valor fijo 1/2 de la constante de Plank producido por una autorrotación del electrón como explicación física de esta propiedad. Sin embargo, este razonamiento implica una violación del principio de invarianza de la velocidad de la Luz, como veremos más adelante.

### 1.1.2. El experimento de Stern-Gerlach

La primera evidencia experimental de la existencia de espín se consiguió a partir de los descubrimientos de los físicos Otto Stern y Walther Gerlach obtenidos en el llamado experimento de Stern-Gerlach[11].

En el año 1922, los científicos Otto Stern y Walther Gerlach llevaron a cabo un experimento que pretendía demostrar la cuantización de la dirección del momento angular orbital teorizada por del modelo de Bohr-Sommerfield. Para ello, utilizaron un haz de átomos de plata que atravesase un campo magnético no uniforme dispuesto perpendicularmente a la trayectoria del haz, de manera que cada átomo se desviase de su trayectoria.

Desde el punto de vista del electromagnetismo, cada átomo estaría provisto de un momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ que generase una energía de interacción $U$ de valores

$$\vec{\mu} = \frac{-|e|}{2m}\vec{L} \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{1.1}$$

por lo que la desviación de cada átomo dependería de la posición relativa del campo magnético con respecto a su momento angular orbital $\vec{L}$. En la creación del momento dipolar solo intervienen los electrones de la capa de valencia del átomo, ya que son los que determinan la distribución de carga que lo generan, es por eso que se utilizaron átomos de plata, que solo tienen un electrón de valencia.

Desde un punto de vista clásico, los átomos tendrían sus momentos angulares orbitales dispuestos de manera aleatoria y continua, provocando que cada átomo se desviase en distintos ángulos, en la dirección del campo magnético. Por eso, se esperaba encontrar una distribución continua de átomos en el detector. Sin embargo, los resultados experimentales que se obtuvieron demostraron que todos los átomos se agrupaban en dos lugares. Todos tomaban únicamente dos posibles trayectorias de deflexión, se veían desviados hacia arriba o hacia abajo con el mismo ángulo de desviación. Esto se debe a que el efecto observado no fue producido por un momento angular clásico, sino por el espín electrónico, el cual toma, al ser proyectado sobre una dirección cualquiera, valores de $+\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$, siendo $\hbar$ la constante reducida de Plank, produciendo desviaciones discretas en dos ángulos iguales de sentidos opuestos.

A pesar de que inicialmente se desconocía que esta desviación era producida por el espín, ni se conocía el significado físico que este implica, y en su lugar se le atribuía al momento angular orbital, este experimento implicó la primera demostración empírica inequívoca de la existencia de momentos angulares cuantizados . De esta manera, el experimento de Stern-Gerlach se convirtió en una de las bases fundamentales de la mecánica cuántica.

## 1.2. Incongruencias del espín como momento angular

Uno de los primeros significados físicos teorizados para explicar la existencia del espín fue, como se ha mencionado anteriormente, que este fuese un momento angular producido por una rotación de los electrones sobre su propio eje. Sin embargo, esta hipótesis es insostenible, ya que implica una serie de contradicciones con las leyes fundamentales de la física.

Por un lado, la autorrotación del electrón no está bien definida, ya que este se considera puntual en el modelo estándar. La longitud de onda de Compton de una partícula representa la escala en la que los efectos cuánticos de una partícula son significativos. En el caso del electrón esta es de $\lambda_C = 2{,}43 \times 10^{-12}$ metros y se utiliza para establecer la precisión máxima con la que se puede conocer la posición de un electrón

$$\Delta x \geq \frac{1}{2}\lambda_C \tag{1.2}$$

Más aún, si bien no es posible considerar el "tamaño"de un electrón, ya que este no está localizado sino que tiene una cierta probabilidad de encontrarse en una cierta región del espacio, se ha podido acotar su extensión como menor que una esfera de diámetro del orden de $10^{-18}$ metros, lo que equivale a un attómetro.

El momento angular clásico asociado a una esfera rotando sobre un eje propio se puede definir como

$$|\vec{L}| = \frac{2}{5}mr^2\omega \tag{1.3}$$

Tomando la cota superior como una superficie hipotética del electrón, y considerando la masa del electrón de $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kilogramos, tenemos que para producir un momento angular clásico de valor $\frac{\hbar}{2}$, siendo $\hbar$ la constante reducida de Plank de valor $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$, a partir de una rotación alrededor de un eje propio, la partícula tendría que girar con una velocidad lineal más de cien mil veces mayor que la velocidad de la luz.

Esto es una clara violación del postulado de la invarianza de la velocidad de la luz, que establece que ninguna partícula puede moverse a velocidades mayores que esta. Por tanto, podemos concluir que el espín es una nueva propiedad intrínseca de la partícula, la cual es independiente de su movimiento o posición.

## 1.3. La teoría de grupos en la representación del momento angular

La teoría de grupos juega un papel fundamental en la descripción del momento angular en la mecánica cuántica. El grupo especial ortogonal $SO(3)$, representa las transformaciones de rotación en un espacio tridimensional, por lo que se utiliza para describir sistemas que presentan simetría esférica. En la mecánica cuántica, el momento angular orbital está cuantizado, y viene caracterizado por el número cuántico $l$, que toma valores enteros positivos y se utiliza para describir los posibles estados cuánticos del electrón. Cuando un sistema presenta simetría esférica, los autovalores del hamiltoniano cuántico estarán degenerados. Considerando $n$ como el número cuántico que indexa los diferentes autovalores de la energía, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de estados del sistema puede escribirse como la suma directa

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n} W_n + \text{espectro continuo} \tag{1.4}$$

donde la suma directa de subespacios $W_n$ representan el espectro discreto de estados ligados. En esta formula los $W_n$ son los distintos espacios de dimensión finita cuyas bases componen conjuntos de autoestados de la misma energía. De la misma manera, cada uno de los subespacios $W_n$ se descompone en una suma directa

$$W_n = \bigoplus_{l=0}^{n-1} W_{n,l} \tag{1.5}$$

donde cada $W_{n,l}$ es un espacio vectorial de dimensión finita que resulta ser una representación irreducible del grupo $SO(3)$ de dimensión $(2l+1)$. Esta dimensión refleja la degeneración del número cuántico $l$ debido a los distintos valores que puede tomar el número cuántico magnético $m$ entre $l$ y $-l$. Este proceso de descomposición en suma directa es también válido cuando se trata con funciones de onda del espectro continuo.

Uno de los ejemplos más sencillos que se puede estudiar como sistema de simetría esférica es el átomo de hidrógeno. El hamiltoniano del átomo de hidrógeno se define como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{1.6}$$

y debido a su simetría esférica, se sabe que conmuta con los operadores de momento angular, lo que permite diagonalizar simultáneamente los operadores $H$, $L^2$ y $L_z$, cada uno de los cuales se relaciona con un número cuántico, $n, l$ y $m$ respectivamente. Además, para el átomo de hidrógeno se tiene que las soluciones de la ecuación de Schrödinger se pueden expresar en términos de armónicos esféricos, los cuales se corresponden con los autoestados de las representaciones del grupo SO(3). Los armónicos esféricos son funciones ortogonales entre si etiquetados por los valores $l$ y $m$ como $Y_l^m(\theta, \phi)$ y representan la parte angular de las funciones de onda.

El objetivo llevado a cabo en este trabajo es extender y detallar el estudio del momento angular orbital cuántico y el espín y su relación con la teoría de grupos para señalar las diferencias en el comportamiento de ambos. Para ello se estudiará su comportamiento en situaciones no relativistas y relativistas, y restringidos a una única dimensión.

# 2. Teoría de grupos

En este capítulo se pretenden definir algunas de las bases fundamentales de la teoría de grupos que se emplearán más adelante para la determinación de las representaciones irreducibles del espín. La bibliografía consultada para esta sección han sido los libros [3] [7] [5] [2] [9] [6] [4]

## 2.1. Definición y propiedades de los grupos

**Definición 2.1** *Un grupo es un conjunto G dotado de una operación interna*

$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto g \cdot h$$

*que cumpla las siguientes propiedades*

- *Asociativa:* $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \forall f, g, h \in G$
- *Elemento neutro: existe un elemento* $e \in G$ *tal que* $g \cdot e = e \cdot g = g, \forall g \in G$
- *Inversa: Para cada elemento* $g \in G$ *existe un elemento* $g^{-1} \in G$ *tal que* $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Diremos que un grupo $G$ es abeliano si para todo par de elementos $g_1, g_2 \in G$ se cumple $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$.

Vamos a denotar el grupo de matrices complejas de dimensión $m \times n$ como $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ y el grupo de matrices complejas invertibles de dimensión n×n como grupo general lineal $GL(n, \mathbb{C})$. Los grupos matriciales serán aquellos que se pueden definir en términos de subgrupos del $GL(n)$.

**Definición 2.2** *Sean G y H dos grupos. Una aplicación* $\varphi : G \to H$ *es un homomorfismo de grupos si se cumple* $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ *para todo* $g_1, g_2 \in G$. *Si además* $\varphi$ *es una aplicación biyectiva, se dice que es un isomorfismo, y si es una aplicación de un grupo sobre sí mismo* $\varphi : G \to G$ *se dice que es un automorfismo.*

Para un homomorfismo dado $\varphi : G \to H$ podemos definir el núcleo de homomorfismo $ker(\varphi)$ como

$$ker(\varphi) \equiv \{g \in G \mid \varphi(g) = e\} \tag{2.1}$$

### 2.1.1. Subgrupos

**Definición 2.3** *Sea H un subconjunto del grupo G. Se dice que H es un subgrupo de G si también forma un grupo junto a la operación* $H \times H \to H$.

Un subgrupo $H$ de $G$ se considera un subgrupo normal de $G$ si para cualquier elemento $g \in G$ se cumple

$$gHg^{-1} = H \tag{2.2}$$

**Definición 2.4** *Sea $H$ un subgrupo del grupo $G$ y $g$ un elemento de $G$. Una clase lateral izquierda de $H$ se define como el subconjunto*

$$gH = \{gh \quad | \quad h \in H\}$$

*Mientras que una clase lateral derecha se define como el subconjunto*

$$Hg = \{hg \quad | \quad h \in H\}$$

Para un subgrupo normal $N$ de $G$, se tiene que las clases laterales izquierda y derecha para un elemento $g \in G$ son iguales, ya que se cumple $gN = Ng$. El conjunto de las clases laterales de un subgrupo normal $N$ del grupo $G$ se denomina el grupo cociente $G/N$ y se define como

$$G/N = \{gN \quad | \quad g \in G\} \tag{2.3}$$

## 2.2. Grupos de Lie

**Definición 2.5** *Un grupo $G$ es un grupo de Lie si es una variedad diferenciable tal que la operación de grupo $(a,b) \in G \times G \to ab^{-1} \in G$ es una función diferenciable de $G \times G$ sobre $G$.*

Esta definición implica que un grupo de Lie $G$ es matricial si es un subgrupo cerrado del grupo GL(n,$\mathbb{C}$).

### 2.2.1. Álgebra de Lie

**Definición 2.6** *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial junto a la operación interna $[\cdot,\cdot]$ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ conocida como corchete de Lie que cumple las propiedades:*

- *Bilinealidad:* $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$
- *Antisimetría:* $[A, B] = -[B, A]$ , $\forall A, B \in \mathfrak{g}$
- *Identidad de Jacobi:* $[A, [B, C]] + [B, [C.A]] + [C, [B, A]] = 0$

*Para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y $A, B, C \in \mathfrak{g}$ Para un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que $\mathfrak{g}$ es un álgebra compleja de Lie, y para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que $\mathfrak{g}$ es un álgebra real de Lie.*

**Proposición 2.7** *Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, entonces el conmutador de $A$ y $B$*

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

*es un corchete de Lie*

Para definir un álgebra de Lie matricial se usará el conmutador como corchete de Lie. Dadas dos matrices $A$ y $B$, diremos que estas conmutan si su conmutador es nulo.

**Proposición 2.8** *Sean $A$ y $B$ dos matrices. Existe una base de autovectores común a ambas matrices si y solo si estas conmutan.*

El método general para construir el álgebra de Lie asociado a un grupo de Lie matricial será a partir de las propiedades que caracterizan al grupo y de la aplicación exponencial de las matrices del grupo.

**Definición 2.9** *Sea G un grupo de Lie matricial conexo*[1]*. Se define su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como:*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \ \mid \ e^{tX} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{2.4}$$

**Definición 2.10** *Sea $A$ una matriz de dimensión $n \times n$, se tiene que la exponencial de una matriz $A$ es la aplicación $exp : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$.*

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \tag{2.5}$$

Dada la definición del álgebra de Lie de un grupo, podemos ver que un método general para determinar los generadores del álgebra de Lie de un grupo será a partir de los elementos del grupo infinitesimalmente próximos a la identidad. Tenemos que un elemento cercano a la identidad se puede expresar como

$$e^{\delta t X} = I + \delta t X + \mathcal{O}(\delta t^2) \tag{2.6}$$

donde $\mathcal{O}(t^2)$ es el resto de términos de orden en $\delta t$ mayor de 2. Expresado de esta manera, podemos ver que los generadores del álgebra de Lie de un grupo son combinaciones lineales de los vectores que generan el espacio tangente a la identidad.

Considerando un grupo de Lie $G$ de dimensión $n$ que dependa de los parámetros $\{x_1, ...x_n\}$, una matriz de transformación infinitesimal $A \in G$ es una matriz cercana a la identidad que se puede expresar como

$$A(\delta x_1, ...\delta x_n) \simeq I + \sum_{i}^{n} \delta x_i X_i \qquad \delta x_i \to 0 \tag{2.7}$$

Y las matrices $\{X_1, ..., X_n\}$ formarán una base del álgebra de Lie de $G$.

**Definición 2.11** *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ un subconjunto de $\mathfrak{g}$. Se dice que $\mathfrak{h}$ es un subálgebra de $\mathfrak{g}$ si cumple*

$$[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{h}$$

*para todo* $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}$.

[1]Cuando el grupo de Lie no es conexo, la exponencial únicamente genera la componente conexa que contiene el elemento identidad. Esta componente conexa es siempre un subgrupo normal del grupo.

*Un subálgebra $\mathfrak{h}$ se llama un ideal del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ si se cumple*

$$[Y, X] \in \mathfrak{h} \tag{2.8}$$

*para todo $Y \in \mathfrak{h}$ , $X \in \mathfrak{g}$.*

**Proposición 2.12** *Diremos que un álgebra de Lie es simple si no es abeliana, y no tiene ideales no triviales. Un álgebra de Lie es semisimple si puede expresarse como suma directa de álgebras de Lie simples.*

Se dice que un grupo de Lie es simple si su álgebra de Lie es simple, y que es semisimple si su álgebra de Lie es semisimple.

**Definición 2.13** *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie. Un homomorfismo entre álgebras de Lie es una aplicación $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que el corchete de Lie satisface*

$$[\varphi(g_1), \varphi(g_2)] = \varphi([g_1, g_2])$$

*Para todo par de elementos $g_1$ y $g_2$ de $G$*

Diremos que dos grupos $G$ y $H$ tienen el mismo álgebra de Lie si el homomorfismo $\varphi$ que relaciona sus álgebras de Lie asociadas $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ es un isomorfismo. Dos grupos de Lie no isomorfos pueden tener álgebras de Lie isomorfas. Esto implica que las representaciones del álgebra de Lie de un grupo no tienen correspondencia uno a uno con las representaciones del grupo. Como veremos más adelante, uno de los ejemplos importantes para la física son los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$, los cuales sin ser isomorfos tienen álgebras de Lie isomorfas,

A continuación plantearemos algunas de los conceptos necesarios para definir las representaciones del álgebra de de un grupo. Estos son el elemento de Casimir y los coeficientes de estructura.

### 2.2.2. Constantes de estructura

**Definición 2.14** *Sea $G$ un grupo de Lie de dimensión finita con un álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ de dimensión $n$. Dada una base de $\mathfrak{g}$ denotada como $\{X_1, X_2, ...X_n\}$, cada conmutador de dos elementos $X_i$ y $X_j$ puede escribirse en la forma:*

$$[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{k} c_{ijk} X_k$$

*donde los coeficientes $c_{ijk}$ se conocen como constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ respecto de la base.*

Las constantes de estructura definen la acción del corchete de Lie sobre el álgebra de Lie por lo que se puede caracterizar por completo el álgebra de Lie de un grupo, a partir de las constantes de estructura de su álgebra.

### 2.2.3. Operador de Casimir

Un operador de Casimir de un grupo, es aquel que conmuta con todos los demás elementos del grupo . Para representaciones irreducibles de álgebras semisimples se tiene que todo operador Casimir debe ser un operador proporcional a la identidad.

Esto quiere decir que cada representación irreducible está caracterizada por el autovalor $\lambda$ del operador de Casimir $C = \lambda I$.

## 2.3. Teoría de representaciones

### 2.3.1. Representación del álgebra de un grupo

**Definición 2.15** *Sea $G$ un grupo matricial de Lie y $V$ un espacio vectorial complejo. Una representación compleja de dimensión finita de $G$ es un homomorfismo*

$$\Pi : G \to GL(V)$$

*Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $V$ un espacio vectorial complejo. Una representación compleja del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es un homomorfismo:*

$$\pi : \quad \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \tag{2.9}$$

*donde $\mathfrak{gl}(V)$ es el espacio de endomorfismos de $V$.*

Se tiene que cualquier representación $\pi$ del álgebra de un grupo,

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(V) \\ X &\mapsto \pi(X) \end{aligned}$$

por ser un homomorfismo entre álgebras de Lie (2.13) debe cumplir que para todo par de elementos $X, Y \in \mathfrak{g}$ :

$$[\pi(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]) \tag{2.10}$$

Diremos que dos representaciones $\pi_1$, $\pi_2$ son equivalentes si existe alguna matriz de cambio de base $P \in \mathfrak{gl}(V)$ tal que para todo elemento $X \in \mathfrak{g}$ se cumple

$$\pi_2(X) = P\pi_1(X)P^{-1} \tag{2.11}$$

### 2.3.2. Representaciones irreducibles

**Definición 2.16** *Sea $\pi$ una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie $G$ sobre un espacio vectorial $V$. Se dice que un subespacio $W$ de $V$ es invariante respecto a $\pi$ si $\pi(x)w \in W$ para todo $w \in W$ y $x \in \mathfrak{g}$. Se dice que una representación $\pi$ es irreducible si no tiene subespacios invariantes no triviales.*

Se tiene que las representaciones de cualquier álgebra de Lie semisimples pueden expresarse como combinación lineal de representaciones irreducibles.

### 2.3.3. El producto tensorial de representaciones

**Definición 2.17** *Sean $\pi_V$ y $\pi_W$ dos representaciones de un grupo $G$ sobre los espacios vectoriales $V$ y $W$ respectivamente. Puede definirse una nueva representación $\pi_{(V\otimes W)}$ sobre el espacio vectorial $V \otimes W$ como*

$$\Pi_{(V\otimes W)}(g) = (v \otimes w) = \Pi_V(g)v \otimes \Pi_W(g)w$$

*para todo elemento $v \in V$, $w \in W$, $g \in G$.*

Para saber cómo generar una representación tensorial de un grupo a partir de su álgebra de Lie, vamos a ver como es la representación $\pi_{(V\otimes W)}$ que genera la representación $\Pi_{(V\otimes W)}$

$$\pi_{(V\otimes W)}(X)(v \otimes w) = \frac{d}{dt}\Pi_{(V\otimes W)}(e^{tX})(v \otimes w)\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}(\Pi_V(e^{tX})v \otimes \Pi_W(e^{tX})w)\Big|_{t=0} = (\pi_V(X)v) \otimes w + v \otimes (\pi_W(X)w)$$

De manera que la representación $\pi_{(V\otimes W)}$ está definida como

$$\pi_{(V\otimes W)}(X) = \pi_V(X) \otimes I_W + I_V \otimes \pi_W(X) \tag{2.12}$$

### 2.3.4. Carácter de una representación

**Definición 2.18** *Sea $\pi$ un representación del grupo matricial $G$. Se define el **carácter** $\chi$ de la representación como la función*

$$\chi_\pi(g) = Tr(\pi(g))$$

Se tiene que dos representaciones equivalentes $\pi_1$ y $\pi_2$ tienen el mismo carácter, ya que la traza de una matriz no varía bajo cambios de base.

**Proposición 2.19** *Sea $G$ un grupo de Lie y $\rho_1$, $\rho_2$ dos representaciones irreducibles de caracteres $\chi_1$ y $\chi_2$ respectivamente. Definiendo el producto interno de ambos caracteres como*

$$(\chi_1|\chi_2) = \int_G \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)^* du(g)$$

*Siendo $du$ el elemento de volumen del grupo, se tiene que*

$$(\chi_1|\chi_2) = \begin{cases} 0 & si\ \rho_1\ y\ \rho_2\ son\ equivalentes \\ 1 & si\ \rho_1\ y\ \rho_2\ no\ son\ equivalentes \end{cases}$$

*Se dice que dos caracteres de representaciones irreducibles son ortogonales si estas no son equivalentes.*

A partir de las definición de carácter, podemos concluir que para dos representaciones $\Pi_V$ y $\Pi_W$ de un grupo $G$, el carácter de su producto tensorial será

$$\chi_{(V\otimes W)} = \chi_V \chi_W \tag{2.13}$$

# 3. Espín no relativista en tres dimensiones

En este capítulo se pretende demostrar que las representaciones del espín no relativista en tres dimensiones vienen dadas por las representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$ mientras que las representaciones del momento angular orbital se relacionan con las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones $SO(3)$. También se establecerán las similitudes y diferencias entre ambas representaciones, así como sus implicaciones físicas.

Los contenidos de este capítulo se han fundamentado en los libros [7] [9] [4] [2]

## 3.1. El grupo SU(2)

### 3.1.1. Definición

El grupo unitario especial de segundo orden, $SU(2)$, es el grupo formado por las matrices unitarias de dimensión 2×2 cuyo determinante es la unidad.

$$SU(2) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \ A \cdot A^{\dagger} = \mathbb{I} \ \ det(A) = 1\}$$

Es un grupo de Lie real de dimensión 3, no abeliano, compacto, y simplemente conexo. Se trata del espacio recubridor universal del grupo de rotaciones en tres dimensiones, el grupo especial ortogonal SO(3), por lo cual ambos grupos tienen el mismo álgebra de Lie.

Las representaciones irreducibles de este grupo vienen indexadas por un número entero positivo $m$, de manera que la dimensión de las matrices sea $m+1$. Podemos distinguir entre valores de $m$ pares e impares, definiendo el valor $j = m/2$, el cual representará valores enteros de espín cuando $m$ sea par, y representar.a valores semienteros de espín cuando $m$ sea impar.

Esta distinción entre valores enteros y semienteros de $j$ es de gran importancia en la correspondencia entre el grupo $SU(2)$ y $SO(3)$.

### 3.1.2. Álgebra de Lie

Las matrices pertenecientes al grupo $SU(2)$ son las matrices unitarias de determinante 1 y dimensión 2×2. A partir de estas condiciones podemos expresar las matrices del grupo en la forma

$$SU(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} r_0 + ir_3 & r_2 + ir_1 \\ -r_2 + ir_1 & r_0 - ir_3 \end{pmatrix} \quad r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \quad r_i \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.1}$$

Reescribiendo la componente $r_0$ como $r_0 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}$ se tiene que cada matriz del grupo viene unívocamente definida en función de los parámetros reales

$(r_1, r_2, r_3)$. Podemos definir un elemento infinitesimal cercano a la identidad en función de los parámetros $\delta r_i$ como

$$A = \begin{pmatrix} 1 + i\delta r_3 & \delta r_2 + i\delta r_1 \\ -\delta r_2 + i\delta r_1 & 1 - i\delta r_3 \end{pmatrix} \qquad \delta r_i \to 0 \tag{3.2}$$

Las matrices del grupo, por ser matrices unitarias, son necesariamente diagonalizables. Para matriz en $SU(2)$ existe una base en la que puede ser expresada como

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Donde $e^{\pm i\theta}$ son los autovalores de la matriz.

Denotaremos el álgebra del grupo $SU(2)$ como $\mathfrak{su}(2)$. El álgebra de Lie del grupo debe cumplir

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \ \mid \ e^{tX} \in SU(2) \ \ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{3.4}$$

A partir de las propiedades del grupo $SU(2)$ tenemos que las matrices $X$ deben satisfacer las condiciones

$$(e^{tX})^{\dagger} = (e^{tX})^{-1} \qquad det(e^{tX}) = 1 \tag{3.5}$$

Y puesto que el determinante de la aplicación exponencial de una matriz tiene valor

$$det(e^{tX}) = e^{Tr(tX)} \tag{3.6}$$

dónde $Tr(tX)$ denota la traza de la matriz.

Podemos definir el álgebra de Lie del grupo $SU(2)$ como

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \ \mid \ X^{\dagger} = -X \ \ Tr(X) = 0\} \tag{3.7}$$

Es decir, como las matrices de dimensión 2x2 antihermíticas y de traza nula.

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} \ \ x_i \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.8}$$

Si asociamos cada componente $x_i$ a una matriz hermítica de traza nula, se puede definir una base del álgebra de Lie del grupo $SU(2)$ como $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ donde las matrices $\sigma_i$ son las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

De esta manera, cada matriz del álgebra de Lie puede ser expresada como

$$X = \sum_{k=1}^{3} ix_i\sigma_i \quad x_i \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

Las matrices de esta base siguen las reglas de conmutación

$$[i\sigma_i, i\sigma_j] = \sum_{k=1}^{3} -2\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{3.11}$$

Donde $\epsilon_{ijk}$ es el símbolo de Levi-Civita.

Utilizando las matrices de Pauli, vemos que podemos expresar las matrices $A \in SU(2)$ como $A = r_0 I + i\sum_{i=1}^{3} r_i\sigma_i$ bajo la restricción $\sum_{i=0}^{3} r^2 = 1$. Podemos entonces redefinir la parametrización del grupo $SU(2)$ como

$$A = cos(\beta)I + isen(\beta)\hat{n}\cdot\vec{\sigma} \tag{3.12}$$

donde se tiene $\beta \in [0, \pi)$. En esta fórmula $\hat{n}$ representa un vector direccional unitario y $\vec{\sigma}$ es $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Esta nueva parametrización será de utilidad para establecer la relación entre los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$.

### 3.1.3. Operador de Casimir

Un operador Casimir de un grupo, es aquel que conmuta con todos los demás elementos del grupo [5]. A partir de las relaciones de conmutación definidas anteriormente podemos establecer que un elemento de Casimir de este grupo es el elemento cuadrático

$$C = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \tag{3.13}$$

Así como cualquier operador proporcional a este.

**Proposición 3.1** *Sea $\pi$ una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, el operador cuadrático*

$$C_\pi = \pi(\sigma_1)^2 + \pi(\sigma_2)^2 + \pi(\sigma_3)^2 \quad [C_\pi, \pi(\sigma_i)] = 0 \tag{3.14}$$

*Es un operador de Casimir de la representación.*

La proposición anterior es consecuencia directa de las propiedades de las representaciones del álgebra de un grupo (2.10)

En la mecánica cuántica, este operador se corresponderá con el operador cuadrático del momento angular $J^2$ y su autovalor $(2j+1)$ depende del valor del número cuántico $j$.

### 3.1.4. Representaciones irreducibles de SU(2)

Para obtener las representaciones irreducibles del álgebra de lie $\mathfrak{su}(2)$ partiremos de las constantes de estructura definidas para los generadores del álgebra.

Se tiene que cualquier base de una representación de $\mathfrak{su}(2)$ formada por las representaciones de los generadores $\{\pi(i\sigma_1), \pi(i\sigma_2), \pi(i\sigma_3)\}$ debe cumplir las mismas relaciones de conmutación que la base del álgebra $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$

$$[\pi(i\sigma_i), \pi(i\sigma_j)] = \sum_{k=1}^{3} -2\epsilon_{ijk}\pi(i\sigma_k) \tag{3.15}$$

Redefinimos una nueva base de las representaciones irreducibles como

$$J_+ = \frac{1}{2i}[\pi(i\sigma_1) + i\pi(i\sigma_2)] \quad J_- = \frac{1}{2i}[\pi(i\sigma_1) - i\pi(i\sigma_2)] \quad J_3 = \frac{1}{2i}\pi(i\sigma_3) \tag{3.16}$$

donde $J_\pm$ son los operadores escalera, los cuales también pueden verse en estudio del oscilador armónico cuántico. Las constantes de estructura pasan a ser

$$[J_+, J_-] = 2J_3 \quad [J_3, J_+] = J_+ \quad [J_-, J_3] = J_- \tag{3.17}$$

Donde podemos definir un operador de Casimir de esta representación como

$$J^2 = J_+J_- - J_3 + J_3^2 = J_-J_+ + J_3 + J_3^2 \tag{3.18}$$

Puesto que los generadores del álgebra son antihermíticos las representaciones de los generadores deben de cumplir la misma condición $\pi(i\sigma_i)^\dagger = -\pi(i\sigma_i)$. Aplicando estas condiciones a la nueva base de las representaciones se tienen las relaciones

$$J_+^\dagger = J_- \quad J_-^\dagger = J_+ \quad J_3^\dagger = J_3 \tag{3.19}$$

Como se ha mencionado anteriormente, cada representación viene caracterizada por un valor $j$ tal que la dimensión de la representación es igual a $2j+1$. Este valor se denomina el peso de la representación.

Dada una representación de peso $j$ , tenemos que el operador $J_3$ tiene $2j+1$ autovalores distintos de valores $k = \{j, j-1, ..., -j+1, -j\}$.

Utilizando las reglas de conmutación que hemos determinado anteriormente vamos a calcular la manera en la que actúan los operadores $J_+$ y $J_-$ al conjunto de autovectores de $J_3$.

**Proposición 3.2** *Sea $\{|k\rangle\}$ el conjunto de autovectores normalizados del operador $J_3$, siendo $k$ el autovalor de cada uno de ellos ($J_3|k\rangle = k|k\rangle$), los operadores $J_+|k\rangle$ y $J_-|k\rangle$ son autovectores de $J_3$ de autovalores $k+1$ y $k-1$ respectivamente.*

Para demostrarlo, partiendo de las reglas de conmutación definidas anteriormente tenemos

$$\begin{gathered}[J_3, J_+]|k\rangle = (J_3J_+)|k\rangle - (J_+J_3)|k\rangle = J_+|k\rangle \Rightarrow \\ J_3(J_+|k\rangle) = (k+1)J_+|k\rangle\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}[J_-, J_3]|k\rangle = (J_-J_3) - (J_3J_-)|k\rangle = J_-|k\rangle \Rightarrow \\ J_3(J_-|k\rangle) = (k-1)J_-|k\rangle\end{gathered} \tag{3.21}$$

A partir de estas relaciones podemos concluir que el vector $J_+|k\rangle$ es proporcional al vector $|k+1\rangle$ y el vector $J_-|k\rangle$ es proporcional al vector $|k-1\rangle$. Esto quiere decir que los operadores $J_+$ sube el índice $k$ y $J_-$ baja el índice $k$ de los autovectores de $J_3$.

Como tenemos que la base de vectores es finita, siendo $j$ el valor máximo de $k$ y

$-j$ el valor mínimo, podemos afirmar

$$J_+|j\rangle = 0 \qquad J_-|-j\rangle = 0 \tag{3.22}$$

Ya que no hay autovectores de $J_3$ de autovalores $(j+1)$ ni $(-j-1)$.

Por otro lado, ya que el operador $J^2$ conmuta con $J_3$ por ser un operador de Casimir, tenemos que la base de autovectores de $J_3$ es común a $J^2$. Puesto que $J^2$ es un múltiplo de la identidad, $J^2 = \lambda I_{2j+1}$, solo tiene un único autovalor $\lambda$ de degeneración $2j+1$. Aplicando el operador $J^2$ al autovector de $J_3$ de mayor autovalor tenemos

$$J^2|j\rangle = (J_-J_+ + J_3 + J_3^2)|j\rangle = (j+j^2)|j\rangle \tag{3.23}$$

Por lo que podemos deducir que el autovalor de $J^2$ es $\lambda = j(j+1)$.

Para saber la proporcionalidad entre $J_+|k\rangle$ y $|k+1\rangle$, a la que designaremos como $\alpha_k^+$, y entre $J_-|k\rangle$ y $|k-1\rangle$, designada como $\alpha_k^-$, partiremos de la expresión dada para el operador $J^2$ (3.18). Podemos concluir

$$\begin{aligned} J_-J_+|k\rangle &= (J^2 - J_3 - J_3^2)|k\rangle \Rightarrow \\ \alpha_k^+\alpha_{k+1}^- &= j(j+1) - k(k+1) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la expresión de los operadores conjugados transpuestos $J_\pm^\dagger = J_\mp$, podemos deducir que la relación entre los coeficientes $\alpha_k^+$ y $\alpha_{k+1}^-$, para $k \neq j$ es de

$$\alpha_k^+ = \langle k+1|J_+|k\rangle = \langle k+1|J_-^\dagger|k\rangle = \alpha_{k+1}^- \tag{3.25}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que los coeficientes $\alpha_k^+$ y $\alpha_k^-$ tienen la forma

$$\alpha_k^+ = \sqrt{j(j+1) - k(k+1)} \qquad \alpha_k^- = \sqrt{j(j+1) - k(k-1)} \tag{3.26}$$

De manera que, de forma general, podemos expresar una base de las representaciones irreducibles del álgebra de $SU(2)$ de peso $j$ en la base de autovectores de $J_3$ como

$$J_+^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{j-1}^+ & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{j-2}^+ & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_{-j+1}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \alpha_{-j}^+ \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$J_-^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_j^- & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{j-1}^- & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha_{-j+2}^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_{-j+1}^- & 0 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

$$J_3^{(j)} = \begin{pmatrix} j & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -j+1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -j \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Para recuperar la representación de los generadores del álgebra, bastaría con usar las correspondencias

$$\pi(i\sigma_1) = i(J_+ + J_-) \qquad \pi(i\sigma_2) = (J_+ - J_-) \qquad \pi(i\sigma_3) = 2iJ_3 \tag{3.30}$$

Todas las representaciones construidas de esta manera son irreducibles. Para demostrarlo bastaría con probar que no existen subespacios no triviales invariantes respecto a $\pi$.

A partir de ahora denotaremos la representación irreducible de peso $j$ como $\pi_j$. Podemos definir una nueva base de las representaciones irreducibles de peso $j$ del álgebra de Lie como

$$J_1^{(j)} = \frac{1}{2}(J_+^{(j)} + J_-^{(j)}) \quad , \quad J_2^{(j)} = \frac{1}{2i}(J_+^{(j)} - J_-^{(j)}) \quad , \quad J_3^{(j)} \tag{3.31}$$

la cual emplearemos más adelante en la construcción de las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz.

**Proposición 3.3** *Todas las representaciones irreducibles de $\mathfrak{su}$(2) de la misma dimensión son equivalentes.*

Podríamos obtener las representaciones del grupo $SU(2)$ a partir de las representaciones de su álgebra de Lie como

$$\Pi_j(e^X) = e^{\pi_j(X)} \quad X \in \mathfrak{su}(2) \tag{3.32}$$

## 3.2. El grupo SO(3)

### 3.2.1. Definición

El grupo especial ortogonal $SO(3)$ es el grupo de matrices reales ortogonales de dimensión 3×3 y determinante unidad. Puede definirse formalmente como

$$SO(3) = \{R \in SL(3, \mathbb{R}) \;\mid\; R \cdot R^T = 1 \;\; det(R) = 1\} \tag{3.33}$$

Es un grupo de Lie no abeliano compacto y doblemente conexo de dimensión 3.

El grupo $SO(3)$ representa el grupo de rotaciones en un espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Tomando las componentes espaciales como $(x_1, x_2, x_3)$ podemos diferenciar tres tipos de rotaciones cada una restringida en un plano formado por dos ejes de referencia $(x_1, x_2)$, $(x_1, x_3)$ y $(x_2, x_3)$.

Tomando por ejemplo las rotaciones restringidas al plano $(x_2, x_3)$ alrededor del eje $x_1$ y denotando el ángulo de rotación como $\theta_1$ podemos definir las rotaciones alrededor del eje $x_1$ como

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sen(\theta) \\ 0 & sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Tomando una rotación infinitesimal alrededor del eje $x_1$ tenemos el generador de rotaciones infinitesimales:

$$R_1(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\delta\theta) & -sen(\delta\theta) \\ 0 & sen(\delta\theta) & cos(\delta\theta) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\theta \\ 0 & -\delta\theta & 1 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Análogamente podemos definir los generadores de rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes $x_2$, $x_3$ como

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{pmatrix} \quad R_2(\delta\theta) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3(\delta\theta) \simeq \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Con estos tres tipos de rotaciones pueden descomponerse cada elemento del grupo $SO(3)$ como el producto

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_3(\theta_3) R_2(\theta_2) R_1(\theta_1) \tag{3.38}$$

O bien utilizando los ángulos de Euler $(\alpha, \beta, \gamma)$, cada rotación puede descomponerse como el producto de dos rotaciones alrededor del eje $Z$ y de una rotación alrededor del eje $X$ en la forma

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha) R_1(\beta) R_3(\gamma) \tag{3.39}$$

### 3.2.2. Álgebra de Lie

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ del grupo $SO(3)$ puede definirse como

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \;\; | \;\; e^{tX} \in SO(3) \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{3.40}$$

A partir de las propiedades definidas para el grupo $SO(3)$ podemos ver que las matrices pertenecientes al álgebra de Lie deben satisfacer las condiciones

$$det(e^{tX}) = 1 \quad e^{tX^T} \cdot e^{tX} = 1 \tag{3.41}$$

De manera que podemos definir que el álgebra de Lie del grupo $SO(3)$ como

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \ \mid \ X^T = -X \ \ Tr(X) = 0\} \tag{3.42}$$

Tenemos que una posible base del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ serían las matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Dadas por los generadores infinitesimales de rotaciones en el grupo $SO(3)$. Cada generador del álgebra se relaciona con un generador de rotaciones uniparamétrico en la forma $R_i = e^{\theta J_i}$.

Tenemos que los corchetes de Lie de los generadores cumplen la relaciones:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} J_k \tag{3.44}$$

Es inmediato ver que las constantes de estructura de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ son proporcionales. Si cambiásemos la base del álgebra de $\mathfrak{su}(2)$ a la base $\{-\frac{i}{2}\sigma_i\}$ tendríamos las mismas relaciones de conmutación. Esto se debe a que las álgebra de Lie de ambos grupos son isomorfas, por lo que diremos tienen el mismo álgebra de Lie.

### 3.2.3. Relación entre el grupo SO(3) y SU(2)

Para ver que el grupo $SU(2)$ es el doble recubridor del grupo $SO(3)$, demostraremos que se puede establecer un homomorfismo entre ambos grupos. Para ello estableceremos la representación unitaria del grupo $SO(3)$ como matrices de dimensión $2 \times 2$.

$$\rho : SO(3) \to SU(2) \tag{3.45}$$

Para hacer esta correspondencia, veremos que a cada matriz de rotación alrededor de uno de los ejes principales $R_i(\theta)$ se le pueden asignar dos matrices unitarias de dimensión $2 \times 2$ en la forma

$$\rho(R_i(\theta)) = \pm \left[ I \cdot cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sigma_i \cdot sen(\tfrac{\theta}{2}) \right] \tag{3.46}$$

Donde $I_2$ es la matriz identidad de dimensión $2 \times 2$ y el conjunto $\{I_2, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ forma una base del grupo matricial $SU(2)$.

Tenemos que las representaciones de las matrices $R_1(\theta)$ y $R_3(\theta)$ vienen dadas por las expresiones

$$\rho(R_3(\theta)) = \pm \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad \rho(R_1(\theta)) = \pm \begin{pmatrix} cos(\frac{\theta}{2}) & isen(\frac{\theta}{2}) \\ isen(\frac{\theta}{2}) & cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

Tomando la expresión de las rotaciones en función de los ángulos de Euler, tenemos que la representación de una matriz $R \in SO(3)$ cualquiera viene dada por

$$\rho(R(\alpha,\beta,\gamma)) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\frac{\beta}{2}) & isen(\frac{\beta}{2}) \\ isen(\frac{\beta}{2}) & cos(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\rho(R(\alpha,\beta,\gamma)) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}cos(\frac{\beta}{2}) & ie^{i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}}sen(\frac{\beta}{2}) \\ ie^{-i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}}sen(\frac{\beta}{2}) & e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}cos(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Donde los ángulos toman valores dentro de los límites $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [0, \pi)$, $0 \leq \gamma \in [0, 4\pi)$.

Una manera de ver que a cada elemento del grupo $SO(3)$ necesariamente le corresponden dos elementos del grupo $SU(2)$ sería partiendo de la propiedad de las rotaciones $R(\theta + 2\pi) = R(\theta)$. Tomando $\rho(R_i(\theta)) = \left[I \cdot cos(\frac{\theta}{2}) + i\sigma_i \cdot sen(\frac{\theta}{2})\right]$ como una representación de $R_i(\theta)$, tenemos que la representación del ángulo $\theta + 2\pi$ tiene la forma $\rho(R_i(\theta + 2\pi)) = -\rho(R_i(\theta))$, por lo que ambas representaciones corresponden a $R_i(\theta)$. Esta correspondencia dos a uno entre elementos del grupo $SU(2)$ y $SO(3)$ demuestra que el grupo $SU(2)$ es el doble recubridor del grupo $SO(3)$.

De manera inversa podemos ver que puede establecerse un homomorfismo $\varphi : SU(2) \to SO(3)$ de núcleo $\{I_2, -I_2\}$, y por tanto el grupo cociente $SU(2)/\{\pm I_2\}$ es isomorfo al grupo $SO(3)$.

### 3.2.4. Representaciones irreducibles de SO(3)

En las secciones anteriores hemos determinado las representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$, y encontrado un homomorfismo $\rho$ de $SO(3)$ sobre $SU(2)$. A partir de ambas funciones, podemos afirmar que las representaciones del grupo $SO(3)$ vienen dadas por $\Pi'_j = \Pi_j \circ \rho$.

Es decir, para cualquier elemento $R \in SO(3)$, una representación irreducible de peso $j$ y dimensión $2j + 1$ es

$$\Pi'_j(R) = \Pi_j(\rho(R)) \tag{3.49}$$

Sin embargo, puesto que $\rho$ no es un isomorfismo, y cada representación de $SO(3)$ en $SU(2)$ tiene dos imágenes posibles, la representación $\Pi'_j$ no está siempre univaluada. Denotando las dos representaciones posibles como $\rho_+$ y $\rho_-$ de manera que $\rho_- = -I_2 \cdot \rho_+$ podemos deducir

$$\Pi'_j(R) = \Pi_j(\pm I_2 \cdot \rho_+(R)) = \Pi_j(\pm I_2) \cdot \Pi_j(\rho_+(R)) \tag{3.50}$$

Donde tenemos que solo las representaciones en las que tengamos $\Pi_j(-I_2) = \Pi_j(I_2) = I_2$ son verdaderas representaciones. Las representaciones verdaderas serán aquellas en las que $j$ sea un número entero, mientras que las de $j$ semientero están bivaluadas.

## 3.3. Representación matricial del espín

Habiendo definido los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ y sus respectivas álgebras de Lie, vamos a ver su relación con el espín, y el momento angular orbital.

### 3.3.1. Representación del espín no relativista

En el caso del espín, su descripción vendrá dada por las representaciones irreducibles del álgebra del grupo $SU(2)$. Tendremos que para una partícula de espín $s$, los operadores de espín vienen dados por la representación de $\mathfrak{su}(2)$ de peso $j = s$. En la base de autoestados de $S_z$ $\{ \, |m_s\rangle : m_s = s, s-1, ..., -s \, \}$ los operadores de espín vienen dados por

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(J_+ + J_-) \quad S_y = \frac{\hbar}{2i}(J_+ - J_-) \quad S_z = \hbar J_3 \tag{3.51}$$

$$\vec{S} = S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z} \quad S^2 = s(s+1)I_{2s+1} \tag{3.52}$$

Los valores posibles de $s$ pueden ser números enteros o semienteros positivos. En el caso de que $s$ sea entero, se tratará de una partícula bosónica, mientras que un $s$ semientero se corresponde a una partícula fermiónica. Las diferencias entre ambos tipos de partículas se encuentran en la estadística de Fermi-Dirac, la cual exige que las funciones de onda de los fermiones sean antisimétricas, mientras que las funciones de onda de los bosones son completamente simétricas. Puesto que las representaciones de espín entero tienen la misma forma que las representaciones del momento angular orbital, se tiene que el espín de los bosones se comporta como un momento angular orbital.

### 3.3.2. Representación del momento angular orbital

La descripción del momento angular orbital $L$, vendrá dada por las representaciones irreducibles del grupo $SO(3)$. El significado físico de esta correlación es más intuitivo que en el caso el espín, ya que el momento angular orbital de una partícula está asociado a las rotaciones espaciales.

Al igual que en el caso del espín, los operadores de una partícula de número cuántico orbital $l$ vienen dados por las representaciones irreducibles de $\mathfrak{so}(3)$ de peso $j = l$. En la base de autoestados de $L_z$ $\{ \, |m_l\rangle : m_l = l, l-1, ..., -l \, \}$ vienen dados por

$$L_x = \frac{\hbar}{2}(L_+ + L_-) \quad L_y = \frac{\hbar}{2i}(L_+ - L_-) \quad L_z = \hbar L_3 \tag{3.53}$$

$$\vec{L} = L_x\hat{x} + L_y\hat{y} + L_z\hat{z} \quad L^2 = l(l+1)I_{2l+1} \tag{3.54}$$

A diferencia de las representaciones del espín, para que una representación del grupo $SO(3)$ sea verdadera los valores de $l$ deben ser enteros positivos. En situaciones no relativistas, esta es la diferencia principal entre el momento angular orbital y el espín.

# 4. Espín relativista en tres dimensiones

Al pasar a situaciones relativistas, las representaciones irreducibles del espín no vienen dadas por el grupo $SU(2)$ sino por uno de los grupos que lo contiene, el grupo $SL(2,\mathbb{C})$. El grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$ es el grupo de recubrimiento del subgrupo del grupo de Lorentz $SO^+(1,3)$ que genera las representaciones irreducibles del momento angular orbital relativista en tres dimensiones. En este capítulo se pretenden estudiar las representaciones irreducibles de ambos grupos y resaltar las similitudes y diferencias entre el momento angular y el espín relativistas.

Para redactar este capítulo, se han consultado los libros [7], [4], [9] y [8].

## 4.1. El grupo SO$^+$(1,3)

### 4.1.1. El grupo de Lorentz

Para poder estudiar el grupo de Lorentz, es necesario primero plantear las bases de la teoría de la relatividad especial de Einstein.

Tenemos que los primeros postulados de la relatividad especial son

- Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
- La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.

La posición de una partícula viene definida por un cuadrivector contravariante $x^\mu$ al que llamaremos **evento**. Este se expresa, utilizando el convenio de índices de Einstein, como

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathrm{x}) \tag{4.1}$$

donde el índice $\mu$ toma valores $0, 1, 2, 3$. Para que se cumpla el segundo principio, tenemos que toda pareja de eventos debe cumplir

$$(ct)^2 - (\mathrm{x})^2 = (ct')^2 - (\mathrm{x}')^2 \tag{4.2}$$

Definiendo el cuadrivector covariante como $x_\mu \equiv (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\mathrm{x})$ podemos expresar de manera más compacta la condición anterior como

$$x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu \tag{4.3}$$

**Definición 4.1** *El espacio de Minkowski es el espacio de curvatura nula de cuatro dimensiones cuya métrica viene dada por la matriz diagonal*

$$\eta = diag(1, -1, -1, -1) \tag{4.4}$$

El grupo de Lorentz, $O(1,3)$, es el grupo formado por las transformaciones lineales que preservan la métrica del espacio de Minkowski.

$$O(1,3) = \{\Lambda \in GL(4,\mathbb{R}) \ \mid \ \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$$

**Proposición 4.2** *El grupo Lorentz $O(1,3)$ es un grupo de Lie real, no conexo, no compacto y no abeliano de seis dimensiones.*

El grupo $SO^+(1,3)$ es el subgrupo normal conexo del grupo de Lorentz que genera el álgebra de Lie del grupo. Está formado por las transformaciones de Lorentz propias y ortocronas. Las condiciones necesarias para que una transformación de Lorentz pertenezca a este grupo es que su determinante sea $+1$ y que no impliquen ninguna inversión temporal o espacial.

$$SO^+(1,3) = \{\Lambda \in GL(4,\mathbb{R}) \ \mid \ \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad det(\Lambda) = 1 \quad \Lambda^0_0 > 1\} \tag{4.5}$$

Donde $\Lambda^i_j$ es el elemento de la fila $i$ columna $j$ de la matriz $\Lambda$.

Definiendo los operadores de paridad $\mathcal{P}$ e inversión temporal $\mathcal{T}$ como los operadores

$$\mathcal{P} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \qquad \mathcal{T} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{4.6}$$

es posible obtener el grupo de Lorentz como el producto del grupo $SO^+(1,3)$ con el grupo discreto de las matrices de inversión temporal y espacial $\{I, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}$, donde $I$ representa el elemento de la identidad.

Podemos ver que el grupo de Lorentz está compuesto por cuatro componentes conexas disjuntas entre sí, cada una de las cuales se puede expresar como el producto del grupo de transformaciones propias $SO^+(1,3)$ con una de las componentes del subgrupo $\{\ I, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\ \}$. Las cuatro componentes conexas de $O(1,3)$ pueden renombrarse como $\{\ \mathcal{L}^\uparrow_+\ , \mathcal{L}^\uparrow_-, \mathcal{L}^\downarrow_-\ , \mathcal{L}^\downarrow_+\ \}$ y están definidas como

- $\mathcal{L}^\uparrow_+ = SO^+(1,3)$: Transformaciones ortocronas propias de Lorentz $det\Lambda = 1$ y $\Lambda^0_0 \geq 0$
- $\mathcal{L}^\uparrow_- = \mathcal{P} \cdot SO^+(1,3)$: Transformaciones ortocronas impropias de Lorentz $det\Lambda = -1$ y $\Lambda^0_0 \geq 0$
- $\mathcal{L}^\downarrow_- = \mathcal{T} \cdot SO^+(1,3)$: Transformaciones no ortocronas impropias de Lorentz $det\Lambda = -1$ y $\Lambda^0_0 \leq 0$
- $\mathcal{L}^\downarrow_+ = \mathcal{PT} \cdot SO^+(1,3)$: Transformaciones no ortocronas propias de Lorentz $det\Lambda = 1$ y $\Lambda^0_0 \leq 0$

### 4.1.2. Popiedades del grupo propio de Lorentz SO+(1,3)

A partir de la definición del grupo $SO^+(1,3)$, podemos interpretar las transformaciones propias de Lorentz como las rotaciones espacio-temporales de un campo vectorial de dimensión $\mathbb{R}^{1,3}$. De esta manera podríamos definir cada transformación a partir de los ángulos de giro que caracterizan las rotaciones en los planos formados por los ejes de referencia. Tomando la componente espacial asociada al eje de referencia temporal como $x_0 = ct$, y las componentes $x_1$, $x_2$ y $x_3$ como las componentes espaciales pertenecientes a los ejes $X$, $Y$, y $Z$, puede definirse un plano de rotación distinto para cada pareja de ejes de coordenadas espaciales $(x_1, x_2)$ , $(x_1, x_3)$ , $(x_2, x_3)$ , $(x_0, x_1)$ , $(x_0, x_2)$ y $(x_0, x_3)$.

Cada transformación de Lorentz estará unívocamente caracterizada por los seis ángulos de rotación correspondientes a cada uno de los seis planos, por lo cual se puede afirmar que existen seis grados de libertad para cada rotación, y el álgebra de Lie del grupo tiene dimensión seis.

Diferenciando entre las rotaciones puras espaciales y las rotaciones espacio-temporales, tenemos que existen dos tipos de transformaciones del grupo $SO^+(1,3)$.

- Rotaciones espaciales: Son las rotaciones restringidas a planos formados por dos coordenadas espaciales. Vienen definidas por tres parámetros libres reales $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Designaremos como $\Lambda_{Ri}(\theta)$ a la rotación espacial alrededor del eje $x_i$. Las rotaciones espaciales forman un subgrupo del grupo de Lorentz isomorfo al grupo especial ortogonal $SO(3)$.
- Boosts de Lorentz: Son las rotaciones espacio-temporales correspondientes a un cambio entre sistemas de referencia inerciales. Vienen caracterizadas por las tres componentes de la velocidad relativa entre los sistemas $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Denotaremos como $\Lambda_{Bi}$ al boost en la dirección $x_i$, que conforma las rotaciones espacio temporales restringidas al plano $(x_0, x_i)$ siendo $i = 1, 2, 3$. No forman un subgrupo, ya que la multiplicación de boosts no lineales implica una rotación espacial.

Se tiene que las matrices generadoras de rotaciones espaciales vienen dadas por las expresiones

$$\Lambda_{R1}(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_1(\theta) \end{array}\right) \quad \Lambda_{R2}(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_2(\theta) \end{array}\right) \quad \Lambda_{R3}(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_3(\theta) \end{array}\right) \tag{4.7}$$

Donde $R_i \in SO(3)$ es el generador de las rotaciones tridimensionales alrededor del eje $x_i$.

Por otro lado, las matrices generadoras de boosts en las direcciones de los ejes $x_1, x_2, x_3$ se pueden expresan en función de cosenos y senos hiperbólicos como

$$\Lambda_{B1}(\phi) = \begin{pmatrix} cosh(\phi) & senh(\phi) & 0 & 0 \\ senh(\phi) & cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_{B2}(\phi) = \begin{pmatrix} cosh(\phi) & 0 & senh(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ senh(\phi) & 0 & cosh(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{B3}(\phi) = \begin{pmatrix} cosh(\phi) & 0 & 0 & senh(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ senh(\phi) & 0 & 0 & cosh(\phi) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

donde el parámetro $\phi$ se relaciona con la velocidad relativa del cambio de referencia como

$$tanh(\phi) = \beta = \frac{|\vec{v}|}{c} \tag{4.9}$$

**Proposición 4.3** *Sea $\Lambda$ un boost de Lorentz en una dirección $\hat{n}$, existe una base en la que la que $\Lambda$ tiene la forma de un boost $\Lambda_{B3}$ en la dirección $x_3$. Dado el vector $\hat{n}$ en coordenadas esféricas como $\hat{n} = (sen(\theta)cos(\varphi), sen(\theta)sen(\varphi), cos(\theta))$, el cambio del sistema de referencia dado por la rotación $\Lambda_{R3}(\varphi)\Lambda_{R2}(\theta)$ alinea el eje $x_3$ con el vector $\hat{n}$, de manera que se tiene*

$$\Lambda_{B\hat{n}}(\phi) = (\Lambda_{R3}(\varphi)\Lambda_{R2}(\theta)) \cdot \Lambda_{B3}(\phi) \cdot (\Lambda_{R3}(\varphi)\Lambda_{R2}(\theta))^T \tag{4.10}$$

Podemos ver que las matrices de rotación cumplen la condición $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$ mientras que los boosts puros cumplen la condición $\Lambda^T = \Lambda$.

### 4.1.3. El álgebra de Lie de SO$^+$(1,3)

Como grupo de Lie, el grupo $SO^+(1,3)$ es un grupo simple, doblemente conexo y no compacto. El álgebra de Lie del grupo viene definido como

$$\mathfrak{so}^+(1,3) = \{X \in \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}) \ \mid \ e^{tX} \in SO^+(1,3) \ \ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{4.11}$$

A partir de las matrices infinitesimales de rotaciones espaciales $\Lambda_{Ri}$ definimos los generadores $L_i$, y a partir de las matrices infinitesimales de los boosts puros $\Lambda_{Bi}$ definimos los generadores $K_i$ como

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Tenemos que las relaciones de conmutación de esta base son

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k \quad , \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}L_k \quad , \quad [L_i, K_j] = \epsilon_{ijk}K_k \tag{4.14}$$

En estas expresiones se ha utilizado el convenio de suma de Einstein en el que se sobreentiende el sumatorio sobre $k$ para simplificar la forma de las relaciones. Si quisiéramos expresar los generadores anteriores de manera más compacta, los renombraremos como $M_{\mu\nu}$ donde se tiene

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}L_k \qquad M_{0i} = K_i \tag{4.15}$$

### 4.1.4. Representaciones irreducibles del grupo SO$^+$(1,3)

En el capítulo anterior hemos construido las representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$. Para determinar las representaciones de $\mathfrak{so}^+$(1,3) veremos que podemos utilizar los resultados obtenidos anteriormente y construirlas mediante productos tensoriales de representaciones de $\mathfrak{su}$(2).

Consideremos una representación genérica $\pi$ de $\mathfrak{so}^+(1,3)$ de base de representaciones $\{\pi(L_i), \pi(K_i)\}$, las cuales cumplen las mismas relaciones de conmutación que los generadores $\{L_i, K_i\}$.

Si elegimos una base de las representaciones de $\mathfrak{so}^+(1,3)$ como los operadores $N_i^{\pm}$ con las relaciones de conmutación siguientes

$$N_i^+ = \frac{1}{2}(\pi(L_i) + i\pi(K_i)) \quad N_i^- = \frac{1}{2}(\pi(L_i) - i\pi(K_i)) \tag{4.16}$$

$$[N_i^+, N_j^+] = \epsilon_{ijk}N_k^+ \quad [N_i^-, N_j^-] = \epsilon_{ijk}N_k^- \quad [N_i^+, N_j^-] = 0 \tag{4.17}$$

Donde vemos que cada conjunto de operadores $\{N_i^+\}$ y $\{N_i^-\}$ sigue las reglas de conmutación de la base del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ $\{\frac{1}{2i}\sigma_i\}$ y además conmutan entre ellos. Esto quiere decir que el álgebra $\mathfrak{so}^+(1,3)$ está generado por dos subálgebras $\mathfrak{su}(2)$ y podemos definir sus representaciones a partir de dos representaciones $\pi^j$ y $\pi^{j'}$ de $\mathfrak{su}(2)$ como

$$N_i^+ = J_i^{(j)} \otimes I_{(2j'+1)} \qquad N_i^- = I_{(2j+1)} \otimes J_i^{(j')} \tag{4.18}$$

donde $J_i^{(j)}$ es la base de las representaciones irreducibles definida en el capítulo anterior (ver 3.31). Los pesos $j$ y $j'$ de las representaciones pueden tomar valores enteros o semienteros positivos.

De esta manera podemos expresar las representaciones irreducibles matrices de la base del álgebra de Lie de $\mathfrak{so}^+(1,3)$ como

$$\pi^{(j,j')}(L_i) = N_i^+ + N_i^- \qquad \pi^{(j,j')}(K_i) = -i(N_i^+ - N_i^-) \tag{4.19}$$

donde la representación irreducible $\pi^{(j,j')}$ viene caracterizada por el par de valores $j$ y $j'$ y tiene dimensión $(2j+1)(2j'+1)$.

Revisitando la definición de producto tensorial de representaciones, podemos ver que $\pi^{(j,j')}$ es la representación de $\mathfrak{so}^+(1,3)$ que genera la representación del grupo de Lorentz $\Pi^j \otimes \Pi^{j'}$ donde $\Pi^j$ y $\Pi^{j'}$ son representaciones del grupo $SU(2)$.

Si quisiéramos recuperar las representaciones $\Pi^{(j,j')}$ del grupo $SO^+(1,3)$ bastaría con tomar el elemento del álgebra de Lie que lo genera y tomar la exponencial de su representación. Suponiendo un elemento $\Lambda$ de $SO^+(1,3)$ tal que

$$\Lambda = e^{(\theta_i L_i + \phi_i K_i)} \tag{4.20}$$

tenemos que una representación irreducible de pesos $(j,j')$ toma la forma

$$\Pi^{(j,j')}(\Lambda) = e^{\pi^{(j,j)}(\theta_i' L_i + \phi_i K_i)} = e^{((\theta_i - i\phi_i)N_i^+ + (\theta_i + i\phi_i)N_i^-} =$$

$$e^{\left((\theta_i - i\phi_i)J_i^{(j)} \otimes I_{(2j'+1)}\right)} e^{\left((\theta_i + i\phi_i)I_{(2j+1)} \otimes J_i^{(j')}\right)} = e^{(\theta_i - i\phi_i)J_i^{(j)}} \otimes e^{(\theta_i + i\phi_i)J_i^{(j')}} \tag{4.21}$$

Para que la representación $\Pi^{(j,j')}$ sea una representación de $SO^+(1,3)$ bien definida, la suma de los índices $j$ , $j'$ debe ser un número entero.

### 4.1.5. Operadores de Casimir

Habiendo determinado la forma de las representaciones irreducibles del álgebra $\mathfrak{so}^+$(1,3), podemos definir los operadores de Casimir de las representaciones. Estos operadores caracterizan las representaciones a través de sus autovalores.

El grupo de Lorentz $SO^+(1,3)$ es un grupo de Lie de rango 2, por lo que tiene dos operadores de Casimir independientes. A partir de las relaciones de conmutación que hemos dado para los operadores $N_i^+$ y $N_i^-$ tenemos que los operadores de Casimir de las representaciones de $\mathfrak{so}^+$(1,3) son

$$(N^+)^2 = (N_1^+)^2 + (N_2^+)^2 + (N_3^+)^2 \tag{4.22}$$

$$(N^-)^2 = (N_1^-)^2 + (N_2^-)^2 + (N_3^-)^2 \tag{4.23}$$

Cuyos autovalores son $j(j+1)$ para $(N^+)^2$ y $j'(j'+1)$ para $(N^+)^2$. Podemos ver que estos autovalores caracterizan por completo cada representación $\pi^{(j,j')}$.

## 4.2. El grupo SL(2,ℂ)

### 4.2.1. Definición

El grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$ es el grupo formado por las matrices complejas de dimensión 2×2 y determinante 1.

$$SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) \quad | \quad det(A) = 1\} \tag{4.24}$$

Es el grupo de doble recubrimiento del grupo restringido de Lorentz $SO^+(1,3)$ por lo que ambos grupos tienen el mismo álgebra de Lie.

A partir de la definición del grupo, podemos deducir que las matrices de este grupo tienen la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad ad - cb = 1 \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C} \tag{4.25}$$

Podemos expresar la matriz anterior en función de 6 parámetros libres reescribiendo uno de los parámetros en función de los otros 3. Para determinar las matrices infinitesimales consideremos una matriz de $SL(2,\mathbb{C})$ perteneciente a un entorno cercano a la identidad

$$A = \begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & 1+\delta d \end{pmatrix} \qquad \delta a, \delta b, \delta c, \delta d \to 0 \tag{4.26}$$

Calculando el determinante de la matriz y despreciando términos de segundo orden de los diferenciales se tiene

$$|A| \simeq 1 + \delta a + \delta d \tag{4.27}$$

Es decir, para pertenecer al grupo $SL(2,\mathbb{C})$ se debe cumplir $\delta a = -\delta d$.

### 4.2.2. Álgebra de Lie de SL(2,$\mathbb{C}$)

El grupo $SL(2,\mathbb{C})$ es un grupo de Lie de dimensión 6 simple, no compacto y simplemente conexo. Se define su álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ como

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \ \mid \ e^{tX} \in SL(2,\mathbb{C}) \ \ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{4.28}$$

Aplicando las propiedades del grupo se tiene que las matrices del álgebra deben tener traza nula

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \ \mid \ Tr(X) = 0\} \tag{4.29}$$

A partir del elemento diferencial del grupo puede definirse una base del álgebra de Lie como

$$\begin{gathered} T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ iT_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ , \ iT_+ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ iT_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{4.30}$$

Comparando estas matrices con la base del álgebra de Lie de $SU(2)$ podemos fijarnos en que se puede tomar una base de $\mathfrak{sl}$(2,$\mathbb{C}$) como

$$\begin{gathered} T_+ + T_- = \sigma_1 \ , \ i(T_+ - T_-) = \sigma_2 \ , \ T_3 = \sigma_3 \\ i(T_+ + T_-) = i\sigma_1 \ , \ T_+ - T_- = i\sigma_2 \ , \ iT_3 = i\sigma_3 \end{gathered} \tag{4.31}$$

Lo que nos indica que el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es isomorfa a la **complexificación** del álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Esto quiere decir que todo elemento $X$ perteneciente a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ puede expresarse como

$$X = A + iB \qquad A, B \in \mathfrak{su}(2) \tag{4.32}$$

Tomando la base de generadores del álgebra de Lie como $\{l_1, l_2, l_3, k_1, k_2, k_3\}$ donde los operadores $l_i$ y $k_i$ vienen dados por

$$l_i = \frac{1}{2i}\sigma_i \qquad k_i = \frac{1}{2}\sigma_i \tag{4.33}$$

Podemos ver que esta base tiene las mismas constantes de estructura que la base $\{L_i, K_i\}$ del grupo $SO^+(1,3)$

$$[l_i, l_j] = \epsilon_{ijk} l_k \quad , \quad [k_i, k_j] = -\epsilon_{ijk} l_k \quad , \quad [l_i, k_j] = \epsilon_{ijk} k_k \tag{4.34}$$

### 4.2.3. Relación entre el grupo SO(1,3) y SL(2,$\mathbb{C}$)

Como hemos mencionado anteriormente, el grupo $SL(2,\mathbb{C})$ es el doble recubridor del grupo $SO(1,3)$. Esto quiere decir, que al igual que entre los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$, podemos establecer un homomorfismo $\varphi$ que envíe los elementos de $SL(2,\mathbb{C})$ a $SO(1,3)$ con núcleo $ker(\varphi)$= $\pm I_2$. Puesto que tenemos que el grupo $SU(2)$ está contenido en $SL(2,\mathbb{C})$ y el grupo $SO(3)$ está contenido en $SO(1,3)$, el homomorfismo $\varphi$ debe cumplir $\rho(SU(2)) = SO^+(1,3)$

Para definir la aplicación $\rho$ que envía los elementos de $SO^+(1,3)$ a $SL(2,\mathbb{C})$

$$\rho : SO^+(1,3) \to SL(2,\mathbb{C}) \tag{4.35}$$

Tenemos que cada generador de rotaciones espaciales se corresponde con dos matrices de $SL(2,\mathbb{C})$ como

$$\rho(\Lambda_{Ri}(\theta)) = \pm \left[ I_2 \cdot cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sigma_i \cdot sen(\tfrac{\theta}{2}) \right] \tag{4.36}$$

Mientras que cada generador de boosts se corresponde con dos matrices de $SL(2,\mathbb{C})$

$$\rho(\Lambda_{Bi}(\phi)) = \pm \left[ I_2 \cdot cosh(\tfrac{\theta}{2}) + \sigma_i \cdot senh(\tfrac{\theta}{2}) \right] \tag{4.37}$$

### 4.2.4. Representaciones irreducibles del grupo SL(2,ℂ)

Al igual que hemos hecho para el grupo $SO^+(1,3)$, las representaciones irreducibles del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ vienen dadas por el producto tensorial de representaciones del grupo $SU(2)$. Ambos grupos tienen álgebras de Lie isomorfas, por lo que las representaciones de sus álgebras se construyen de la misma manera.

Dadas dos representaciones $\pi^j$ y $\pi^{j'}$ del grupo $SU(2)$, tenemos que el producto tensorial $\pi^j \otimes \bar{\pi}^{j'}$, donde $\bar{\pi}$ es la representación conjugada de la representación $\pi$, es una representación del grupo SL(2,ℂ) de dimensión $(2j+1)(2j'+1)$.

A diferencia de las representaciones del grupo $SO^+(1,3)$, los índices $j$ y $j'$ de las representaciones irreducibles $\Pi^{(j,j')}$ de $SL(2,\mathbb{C})$ pueden sumar tanto valores enteros como semienteros.

## 4.3. Representación del espín relativista

En el capítulo anterior pudimos establecer la relación intrínseca entre el grupo $SU(2)$ y las representaciones del espín no relativista. En el caso del espín relativista en tres dimensiones, vamos a ver que sus representaciones se relacionan con las representaciones del grupo $SL(2,\mathbb{C})$.

Para caracterizar las representaciones irreducibles del espín relativista definiremos unos nuevos operadores de Casimir que relacionen los estados de la partícula con su espín. Para definir estos operadores es necesario definir primero el cuadrimomento y el pseudovector de Pauli–Lubanski. Para simplificar las expresiones, utilizaremos el sistema de unidades naturales, en el que se tiene $c = 1$.

El cuadrimomento contravariante $p^\mu$ viene definido como el cuadrivector

$$p^\mu \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \mathrm{p}) \tag{4.38}$$

y el cuadrimomento covariante como

$$p_\mu \equiv (p^0, -p^1, -p^2, -p^3) = (E, -\mathrm{p}) \tag{4.39}$$

Tenemos que las transformaciones de Lorentz preservan las leyes fundamentales de la física, por lo que la energía de una partícula es $E^2 = \mathrm{p}^2c^2 + m^2c^4$ donde m representa la masa de la partícula. Por lo tanto el operador cuadrático dado por

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \mathrm{p}^2 = m^2 \tag{4.40}$$

es un elemento de Casimir de autovalor $m^2$.

Habiendo definido el cuadrimomento, vamos a ver un ejemplo de ecuación invariante bajo transformaciones de Lorentz, la ecuación de Dirac. La ecuación de Dirac es la ecuación que describe la dinámica de las partículas de espín $\frac{1}{2}$ en situaciones relativistas[1]. Partiendo de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$H\psi(x,t) = i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \tag{4.41}$$

puede llegarse a la ecuación de Dirac tomando el hamiltoniano como

$$H_D = \gamma_0(-i\vec{\gamma}\cdot\nabla + m) \tag{4.42}$$

donde $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y las matrices $\gamma_i$ son las matrices de gamma, o matrices de Dirac. Estas matrices pueden representarse en distintas formas, bajo la condición de que cumplan la relaciones

$$\gamma_0^2 = I, \qquad \gamma_i^2 = -I, \qquad \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0 \quad \forall i \neq j \tag{4.43}$$

para $i, j = 1, 2, 3$.

Sustituyendo el hamiltoniano que hemos definido en la ecuación de onda de Schrödinger y utilizando las propiedades de las matrices gamma, se llega a la ecuación de Dirac

$$(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi = 0 \tag{4.44}$$

Por otro lado, trabajando en el espacio de momentos podemos considerar la transformada de Fourier de la ecuación de onda y los autovalores del hamiltoniano como

$$\gamma_0(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m)\widetilde{\psi}(p) = E\widetilde{\psi}(p) \tag{4.45}$$

de manera que tomando el cuadrado del operador del hamiltoniano y utilizando las propiedades de las matrices gamma, se llega a

$$\begin{gathered}(\gamma_0(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m))^2 = \gamma_0(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m)\gamma_0(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m) = \\ (-\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m)(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m) = (\vec{\gamma}\cdot\vec{p})^2 + m^2 = |\vec{p}|^2 + m^2\end{gathered} \tag{4.46}$$

con lo que tenemos que las energías asociadas a las soluciones de la ecuación de Dirac tienen el valor que hemos definido anteriormente para la energía en situaciones relativistas. El hamiltoniano de la ecuación de Dirac tiene simetría rotacional, por lo que sabemos que conmuta con los operadores del momento angular $J_i$. Esto implica que podemos clasificar los estados cuánticos del sistema en el espacio de Hilbert indexándolos con los números cuánticos $n$ y $l$.

Por otra parte, el pseudovector de Pauli-Lubanski viene definido a partir de los generadores del álgebra de Lie de $SO^+(1,3)$ y de las componentes del cuadrimomento como

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}p^\sigma \tag{4.47}$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ representa el símbolo de levi civita en cuatro dimensiones. Puesto que este es antisimétrico, podemos establecer que el cuadrimomento y el pseudovector de Pauli-Lubanski cumplen la condición

$$W_\mu p^\mu = 0 \tag{4.48}$$

De manera que podemos definir un segundo operador de Casimir independiente del anterior dado por

$$W^2 = W_\mu W^\mu \tag{4.49}$$

A partir del valor del primer elemento de Casimir, podremos diferenciar entre tres tipos de partículas.

### 4.3.1. Partículas masivas

Se trata de partículas para las cuales se tenga $m \neq 0$ y $p^2 > 0$. Puesto que son partículas con masa, podemos considerar el sistema de referencia de la partícula en reposo $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, teniendo en cuenta que cualquier transformación de Lorentz del cuadrimomento debe preserva la relación

$$p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu = m^2 \tag{4.50}$$

Utilizando la ecuación 4.47 tenemos que los operadores $W_\mu$ tendrán la forma

$$W_0 = 0 \qquad , \qquad W_i = \frac{m}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} \tag{4.51}$$

Y sus corchetes de Lie serán

$$[W_i, W_j] = -im\epsilon_{ijk}W_k \tag{4.52}$$

A partir de las relaciones de conmutación, podemos ver que estos operadores están relacionados con los operadores de espín en la forma

$$S_i = \frac{1}{m}W^i \tag{4.53}$$

de manera que el operador de Casimir $W_\mu W^\mu$ tendrá un autovalor igual a $m^2 s(s+1)$. Esto implica que el número cuántico del espín es una propiedad intrínseca de las partículas, y permanecerá constante independientemente del sistema de referencia en el que se encuentre.

### 4.3.2. Partículas sin masa

Para partículas sin masa, podemos considerar un cuadrimomento cualquiera tal que el invariante $p^2$ sea nulo. Por simplicidad de los cálculos elegiremos $p^\mu =$

$(\omega, 0, 0, \omega)$ donde $\omega$ representa un número real no nulo cualquiera. Puesto que se trata de una partícula sin masa, no podemos llevarla a un sistema de referencia en la que se encuentre en reposo. Tenemos que los operadores de Pauli Lubanski serán

$$W_0 = \omega L_3 \tag{4.54}$$
$$W_1 = \omega(K_2 + L_1) \tag{4.55}$$
$$W_2 = \omega(-K_1 + L_2) \tag{4.56}$$
$$W_3 = -\omega L_3 \tag{4.57}$$

En el caso de las partículas sin masas, como no se puede considerar el sistema de referencia de reposo de la partícula, no se pueden definir el operador de espín como una cantidad vectorial. En su lugar, consideraremos una nueva propiedad de las partículas denominada **helicidad**.

Podemos definir el operador de la helicidad $h$ como la proyección del operador del espín en la dirección del momento lineal $\vec{p}$

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{4.58}$$

de manera que la helicidad representa los autovalores de este operadores. Los estados de helicidad bien definida, se representarán como $|\mathrm{p}, \lambda\rangle$, de manera que se tenga

$$h|\mathrm{p}, \lambda\rangle = \lambda|\mathrm{p}, \lambda\rangle \tag{4.59}$$

Puesto que el operador de la helicidad es una proyección del operador de espín, sus autovalores tomarán valores $\lambda = s, s-1, ..., -s+1, -s$, lo que nos permite determinar el valor del espín de una partícula a partir de la helicidad. En el caso de las partículas sin masa, los únicos estados de helicidad aceptables son los estados $\lambda = \pm s$, ya que el espín de una partícula moviéndose a la velocidad de la luz debe estar siempre orientado paralelo o antiparalelo a la dirección del momento lineal.

Para partículas sin masa, existen dos tipos de representaciones irreducibles en función del valor del Casimir $W^2$. Cuando este toma un valor no nulo, implicaría que la partícula tiene infinitos estado de helicidad, es decir, que se tratará de representaciones de **espín continuo**, las cuales tienen infinitas dimensiones. Estas representaciones se corresponderían con las representaciones inducidas por grupo Euclídeo en dos dimensiones $E(2)$, el cual está formado por las traslaciones espaciales y rotaciones en un espacio bidimensional. Cuando el Casimir es nulo, se trataría de las representaciones de la helicidad, las cuales vienen caracterizadas por la helicidad $\lambda$. Algunas de partículas que se representan mediante estados de helicidad son los fermiones de Weyl, que toman valores de helicidad de $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ o los fotones de helicidad $\lambda = \pm 1$. Se corresponderían exclusivamente con las representaciones inducidas por el grupo $SO(2)$, el cual está contenido en el grupo $E(2)$.

El grupo euclídeo $E(2)$ es el grupo de rotaciones y traslaciones en dos dimensiones por lo que los generadores de su álgebra de Lie son

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

Con las reglas de conmutación

$$[P_1, P_2] = 0 \qquad\qquad [J, P_i] = \epsilon_{ij} P_j \tag{4.61}$$

El operador de Casimir del grupo es

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 = p^2 \tag{4.62}$$

Las representaciones irreducibles del grupo $E(2)$ actuando sobre los estados $|p, m\rangle$ tienen la forma [1]

$$\langle p, m'|J|p, m\rangle = m\delta_m^{m'} \tag{4.63}$$

$$\langle p, m'|P_1|p, m\rangle = \frac{ip}{2}\delta_{m-1}^{m'} - \frac{ip}{2}\delta_{m+1}^{m'} \tag{4.64}$$

$$\langle p, m'|P_2|p, m\rangle = -\frac{p}{2}\delta_{m-1}^{m'} - \frac{p}{2}\delta_{m+1}^{m'} \tag{4.65}$$

### 4.3.3. Partículas superlumínicas

Los taquiones o partículas superlumínicas son partículas hipotéticas que se desplacen a velocidades superiores a la velocidad de la luz. Serían partículas cuyo Casimir $p^2$ tome valores negativos, lo que implicaría un valor de la masa imaginario.

Podríamos considerar cuadrimomentos para estas partículas $p^\mu = (0, 0, 0, \mu)$ o bien en el sistema de referencia de reposo de la partícula $p^\mu = (im, 0, 0, 0)$. Para el primer caso, se tiene que los operadores de Pauli-Lubanski son

$$W_0 = \mu L_3 \tag{4.66}$$

$$W_1 = \mu K_2 \tag{4.67}$$

$$W_2 = -\mu K_1 \tag{4.68}$$

$$W_3 = 0 \tag{4.69}$$

Estas representaciones no se corresponden con ninguna partícula observada experimentalmente.

### 4.3.4. Representación del vacío

Se trata del caso trivial en el que el cuadrimomento sea $p^\mu = 0$ y por tanto, los pseudovectores de Pauli-Lubanski son todos nulos. Se corresponde de la ausencia de partículas, también conocido como estado de vacío.

### 4.3.5. Ejemplos de representaciones de espín

Vamos a ver algunos ejemplos de representaciones de estados de espín y algunas de las partículas físicas que pueden representar.

[1] Las representaciones irreducibles del grupo E(2) se han tomado del capítulo 9 del libro [7]

### Espinores de Weyl

Son representaciones del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ de partículas sin masa y espín $\frac{1}{2}$. Etiquetando las representaciones irreducibles como $(j,j')$, se tiene que la representación $(\frac{1}{2},0)$ actúa sobre los espinores de Weyl levógiros (left-handed) donde los elementos vienen designados como $\psi_L$ y la representación $(0,\frac{1}{2})$ sobre los espinores de Weyl dextrógiro (right-handed) donde los elementos vienen designados como $\psi_R$.

Los espinores de Weyl se utilizan para describir partículas de masa nula y espín $\frac{1}{2}$ como pueden ser los neutrinos. El espinor levógiro representa estados de helicidad $-\frac{1}{2}$, mientras que el espinor dextrógiro representa estados de helicidad $\frac{1}{2}$.

La ecuación de onda relativista asociada a un fermión de Weyl viene dada por la ecuación de Weyl, la cual toma la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\sigma}\cdot\nabla\right)\psi_L=0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\sigma}\cdot\nabla\right)\psi_R=0 \tag{4.70}$$

siendo $\vec{\sigma}$ el vector de Pauli $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$.

### Espinores de Dirac

Se trata de la representación reducible $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ de $SL(2,\mathbb{C})$ que actúa sobre los espinores de Dirac. Se utilizan para describir partículas de espín $\frac{1}{2}$ y masa no nula, como pueden ser los electrones.

Los espinores de Dirac $\Psi$ son biespinores de cuatro componentes formados por un espinor de Weyl levógiro, y un espinor de Weyl dextrógiro. En la representación de Weyl, vienen dados por

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} \tag{4.71}$$

La ecuación de onda relativista asociada un fermión de Dirac viene dada por la ecuación de Dirac que hemos visto anteriormente (ver 4.44). En la representación de Weyl vamos a definir las matrices $\gamma$ como

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix} \qquad \gamma_j=\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ -\sigma_j & 0\end{pmatrix} \tag{4.72}$$

para $j = 1,2,3$. Estas matrices permiten escribir las representaciones de los generadores del álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$ como

$$\pi(l_i)=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k \qquad \pi(l_i)=\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_i \tag{4.73}$$

Para recuperar los espinores de Weyl que componen el espinor de Dirac, podemos definir una quinta matriz gamma como

$$\gamma_5=i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{4.74}$$

La cual permite proyectar los espinores de Dirac en espinores de Weyl aplicando

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\Psi = \psi_L \qquad \frac{1+\gamma_5}{2}\Psi = \psi_R \tag{4.75}$$

Definiendo en operador de Dirac como

$$\partial\!\!\!/ = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \nabla \tag{4.76}$$

Puede reescribirse la ecuación de Dirac como

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \tag{4.77}$$

### 4.3.6. Representación del momento angular relativista

Habiendo descrito las características de las representaciones del momento angular y el espín relativistas podemos ver que las diferencias entres ambos se acentúan respecto de su comportamiento en situaciones no relativistas.

Tenemos que el momento angular orbital, al ser una función que representa solamente el movimiento espacial de la partícula, sus autoestados no dependerán de la masa o velocidad de la partícula, mientras que las propiedades de los estados de espín dependen explícitamente de su masa. Para partículas masivas, los estados de espín solo están bien definidos en el sistema de referencia de la partícula en reposo y llegan a mezclarse bajo la acción de boosts de Lorentz, mientras que los estados que describen el momento angular, los esféricos harmónicos, no llegan a mezclarse. Para partículas sin masa, el momento angular orbital se sigue caracterizando por el número cuántico $l$, mientras que el espín deja de ser un buen número cuántico, pasando a usarse la helicidad.

Además, como hemos mencionado anteriormente, las diferencias entre el momento angular orbital y el espín no son iguales para fermiones y bosones. En el caso de los bosones, al tener un espín entero pueden ser descritos por representaciones simétricas. Esto implica que puede haber más de un bosón en el mismo estado cuántico, y que su función de onda es simétrica bajo intercambio de partículas. Sin embargo, las representaciones de espín semientero son siempre antisimétricas. Esto implica que, por el principio de exclusión de Pauli, no pueden existir dos fermiones en el mismo estado cuánticoextens y su función de onda es antisimétrica bajo intercambio de partículas. El comportamiento de los bosones se rige por la estadística de Bose-Einstein, mientras que el comportamiento de los fermiones viene determinado por la estadística de Fermi-Dirac.

Como ya hemos visto, las representaciones del momento angular orbital son simétricas bajo rotaciones, por lo que podría decirse que el espín de sistemas bosónicos se asemeja más al momento angular orbital que el espín de sistemas fermiónicos.

# 5. Espín relativista en una dimensión

Tras haber definido las propiedades del espín y el momento angular orbital en situaciones relativistas en el capítulo anterior, vamos a estudiar el resultado de restringir el movimiento la partícula a una única dimensión. Para estudiar las características del espín relativista en una dimensión, pasaremos de utilizar las representaciones irreducibles del grupo $SO^+(1,3)$ a las representaciones irreducibles del grupo $SO^+(1,1)$. Para encontrar las representaciones irreducibles del grupo $SO(2)$ se partirá de las representaciones irreducibles del grupo $SO(2)$.

Para desarrollar esta sección se han utilizado los resultados de los apartados anteriores, y se ha consultado los libros [7] y [13].

## 5.1. El grupo SO(2)

El grupo $SO(2)$ es el grupo formado por las matrices reales ortogonales de dimensión $2 \times 2$ de determinante unidad.

$$SO(2) = \{R \in SL(2, \mathbb{R}) \ \ | \ \ R^T = R^{-1} \ \ det(R) = 1\}] \tag{5.1}$$

Representa el grupo de rotaciones en un espacio bidimensional. Se trata de un grupo de Lie uniparamétrico, compacto y conexo.

Podemos representar cualquier matriz del grupo $SO(2)$ en función de un único parámetro $\theta$ en la forma

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Puesto que el grupo es abeliano, podemos ver que la multiplicación de rotaciones cumple $R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$.

Tomando un elemento infinitesimal del grupo cercano a la identidad

$$R(\delta\theta) \approx I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

De manera que el álgebra de Lie del grupo viene dada por el generador

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Puesto que el grupo SO(2) es un grupo abeliano uniparamétrico, veremos que sus representaciones irreducibles no triviales son relativamente sencillas.

### 5.1.1. Representaciones irreducibles de SO(2)

Puesto que el grupo $SO(2)$ es abeliano, sabemos que todas sus representaciones irreducibles son necesariamente unidimensionales. Nombrando las representaciones irreducibles de una rotación como $U(\theta)$, podemos imponer la condición $U(\theta + 2\pi) = U(\theta)$. Además, el elemento asignado a $\theta = 0$ debe cumplir $U(0) = 1$.

Esto implica que las representaciones deben ser periódicas, con la forma

$$\Pi_n(R(\theta)) = e^{in\theta} \tag{5.5}$$

donde el número $n$ que indexa las representaciones es la representación irreducible del generador $J$

$$\pi_n(J) = n \tag{5.6}$$

Podemos relacionar los grupos $SO(2)$ y $SO(1,1)$ considerando el grupo que preserva la métrica de la identidad $I_2$

$$R(\theta)^T I_2 R(\theta) = I_2 \tag{5.7}$$

## 5.2. El grupo SO(1,1)

El grupo $SO(1,1)$ es el grupo formado por las matrices de dimensión 2×2 que preservan la métrica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Se trata de un grupo de Lie uniparamétrico, no compacto y no conexo formado por los boost en una misma dirección. Su doble recubridor es el grupo $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Podemos definir formalmente el grupo como

$$SO(1,1) = \{M \in GL(2, \mathbb{R}) \ \mid \ M^T g M = g \quad det(M) = 1\} \tag{5.9}$$

A partir de la definición dada, y teniendo en cuenta las propiedades de la métrica $g$, tenemos que las matrices $M$ deben cumplir la condición $M^{-1} = gM^Tg$. Es inmediato ver que las matrices que cumplen esta condición y tienen determinante unidad pueden tener dos formas distintas

$$M_+(\theta) = \begin{pmatrix} cosh(\theta) & senh(\theta) \\ senh(\theta) & cosh(\theta) \end{pmatrix} \quad M_-(\theta) = \begin{pmatrix} -cosh(\theta) & senh(\theta) \\ senh(\theta) & -cosh(\theta) \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

El grupo $SO^+(1,1)$ será el comprendido por las matrices $\mathrm{M}_+(\theta)$, las cuales tienen autovalores $e^\theta$ y $e^{-\theta}$.

Podemos relacionar las matrices del rgupo $SO^+(1,1)$ con boosts de Lorentz utilizando la correspondencia

$$tanh(\theta) = \frac{|\vec{v}|}{c} \tag{5.11}$$

Podemos ver que al multiplicar las matrices expresadas en funciones hiperbólicas, la matriz resultante es

$$M_+(\theta) \cdot M_+(\varphi) = M_+(\theta + \varphi) \tag{5.12}$$

sin embargo al expresarlas en función de las velocidades $v$ y $w$, tenemos que la composición de boosts resulta en un boost de velocidad

$$|\vec{v}| = \frac{cv + cw}{c^2 + vw} \tag{5.13}$$

### 5.2.1. El álgebra de Lie de SO$^+$(1,1)

Puesto que se trata de un grupo uniparamétrico, es evidente que su álgebra de Lie tiene un único generador. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}$(1,1) puede expresarse como

$$\mathfrak{so}(1,1) = \{X \in \mathfrak{so}(1,1) \;\; | \;\; e^{tX} \in SO^+(1,1) \;\; \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.14}$$

Tomando un elemento de $SO^+(1,1)$ infinitesimal en un entorno cercano a al identidad tenemos

$$M(\delta\theta) \approx I_2 + \begin{pmatrix} 0 & \delta\theta \\ \delta\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Es decir que el generador del álgebra de Lie es la matriz

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

de manera que cualquier elemento del álgebra de Lie es directamente proporcional a esta matriz. El operador de Casimir del grupo será $C = K^2$.

Veremos que al igual que para el espín relativista en tres dimensiones, se pueden diferenciar distintos tipos de representaciones irreducibles unitarias no triviales.

### 5.2.2. Representaciones de serie principal

Las representaciones de series principales son representaciones irreducibles de dimensión infinita caracterizada por un parámetro continuo $\nu \in \mathbb{R}$. en específico, las representaciones de series principales del grupo $SO(1,1)$ se construyen como representaciones unitarias en la recta de los números reales.

Denotando la representación del álgebra de Lie $\mathfrak{so}$(1,1) indexada por $\nu$ como $\pi_\nu$, tenemos que esta actúa sobre funciones genéricas $f(x)$ como

$$\pi_\nu(K) f(x) = \nu \cdot f(e^\theta x) \tag{5.17}$$

de manera que las representaciones $\Pi_\nu$ de las matrices del grupo $SO^+(1,1)$ se expresarían como la exponencial

$$\Pi_\nu(M_+(\theta)) = e^{\nu\theta} \tag{5.18}$$

Y el operador de Casimir descrito anteriormente tendría el valor $C = \nu^2$.

Estas representaciones se corresponderían con las representaciones de espín continuo o infinito, las cuales como se vio anteriormente corresponden a partículas sin masa.

### 5.2.3. Representaciones de serie discreta

Al contrario que las representaciones de series principales, las representaciones de series discretas vienen caracterizadas por un conjunto discreto de parámetros. En el caso del grupo $SO^+(1,1)$, se tiene que el parámetro $n$ toma valores enteros. Las representaciones de serie discreta se construyen considerando como actúa el grupo $SO^+(1,1)$ en espacios vectoriales finitos .

La expresión matricial para una representación de serie discreta es

$$D_n = \begin{pmatrix} \cosh(n\theta) & senh(n\theta) \\ senh(n\theta) & \cosh(n\theta) \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

donde el operador de Casimir toma el valor $n^2$

Estas representaciones pueden relacionarse con las representaciones de espín de partículas masivas en una dimensión, siendo que las representaciones de valores de $n$ enteros se relacionan con la representación escalar de partículas de espín 0, o campos escalares mientras que las representaciones de $n$ semientero se pueden relacionar con fermiones, o campos fermiónicos de espín $n$.

### 5.2.4. Representaciones de serie complementaria

Las representaciones complementarias son representaciones unitarias caracterizadas por un parámetro continuo $\lambda$ en el intervalo (0,1). Estas representaciones abarcan las representaciones irreducibles de $SO(1,1)$ que no cubren las series principal y discreta.

Representan un espectro continuo de estados no asociados ni a partículas sin masa, ni masivas. El operador de Casimir tiene el autovalor $\lambda^2$

## 5.3. Representación del espín relativista restringido a una dimensión

En los capítulos anteriores, hemos podido ver que las representaciones del espín son similares a las representaciones del momento angular. Para espacios tridimensionales, tanto en situaciones relativistas como no relativista, los grupos a partir de los cuales se representan tienen álgebras de Lie isomorfas. Sin embargo, al estudiar el caso de partículas relativistas restringidas a una dimensión hemos podido comprobar que el espín sigue existiendo, mientras que el momento angular orbital, puesto que describe rotaciones espaciales, necesita de al menos dos dimensiones espaciales para poder definir un plano de rotación.

Esta diferencia fundamental radica en la naturaleza de ambas propiedades. El momento angular es una propiedad asociada al movimiento y rotación de una partícula, la cual depende su posición y momento. El espín es una propiedad intrínseca de las partículas, y no proviene ni depende del movimiento de la partícula en el espacio, por lo que puede existir en espacios unidimensionales.

Otra característica del espín que lo diferencia del momento angular orbital es su interacción con el campo eléctrico. Calculando el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ para el espacio de dimensión 1+1 tenemos el tensor antisimétrico

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

donde podemos ver que solo actúa el campo eléctrico. Esto se debe a que, al igual que el momento angular, el campo magnético necesita de al menos un plano de rotación para poder definirse. No obstante, en situaciones relativistas el acoplamiento de los campos espinoriales al campo electromagnético[1] implica una importante interacción entre el campo eléctrico y el espín.

A partir de las diferencias observadas entre el momento angular y el espín en situaciones relativistas y no relativistas puede concluirse que, si bien el espín es una propiedad de características similares a las de un momento angular intrínseco de la partícula, se trata de un fenómeno existente únicamente en el contexto de la mecánica cuántica que no depende ni de la posición, ni del movimiento de la partícula.

[1]Para ver en mayor detalle la interacción entre el campo eléctrico y el campo de Dirac se puede ver en el capítulo 4 del libro [12]

# 6. Conclusiones

El objetivo de este trabajo de fin de grado ha sido estudiar el significado del espín desde una perspectiva grupo teórica, demostrando e ilustrando las características que lo diferencian del momento angular cuántico. Tras el estudio del momento angular, el espín y de los grupos de Lie que los representan llevado a cabo, se ha llegado a las siguientes conclusiones.

Los espines enteros y semienteros se comportan de maneras distintas. El comportamiento de las partículas de espín entero (bosones) lo define la estadística de Bose-Einstein, según la cual su función de onda es simétrica bajo rotaciones. El espín entero, se comporta esencialmente como el momento angular orbital, el cual también toma valores enteros y es simétrico bajo rotaciones. Ambos tienen también las mismas representaciones irreducibles. Por otro lado el comportamiento de las partículas de espín semientero (fermiones) lo define la estadística de Fermi-Dirac, según la cual su función de onda es antisimétrica. Sus representaciones irreducibles no se corresponden con la representación de ningún momento angular orbital, ya que estos últimos vienen indexados únicamente por números enteros

En el contexto relativista, para las partículas de masa nula se redefine el concepto de espín. Puede diferenciarse entre dos tipos de partículas, las partículas de espín continuo y las partículas de espín discreto, como los fotones. Para las partículas de espín discreto, en vez del operador de espín, el cual no está bien definido, se utiliza su proyección en la dirección del cuadrimomento, la helicidad. La diferencia principal entre el operador de espín y el operador de la helicidad, es que este último solo toma dos autovalores posibles, $\lambda = \pm s$, mientras que el operador de espín no relativista tiene $(2s + 1)$ degeneraciones. El autovalor $\lambda$ se denomina la polarización de la partícula. Por otro lado, el momento angular orbital se sigue definiendo de la misma manera que en el contexto no relativista.

En el caso de las partículas masivas relativistas, los estados de espín solo están bien definidos en el sistema de referencia de la partícula en reposo. Bajo la acción de boosts de Lorentz, los estados de espín se mezclan, lo cual no ocurre con los autoestados del momento angular orbital.

El espín en una característica intrínseca de las partículas. Al contrario que el momento angular orbital, el espín no está asociado a un movimiento espacial real, y por tanto es independiente de la posición o movimiento de la partícula. Esto permite que el espín pueda ser no nulo en partículas cuyo movimiento se vea restringido, como podría ser una partícula en un espacio unidimensional, sin capacidad de rotar. Además, para partículas relativistas en un espacio unidimensional el tensor electromagnético solo tiene componentes de campo eléctrico, lo que implica la posibilidad de el campo eléctrico se acople a los campos espinoriales. Sin embargo, el momento angular orbital solo estará relacionado con las componentes de campo magnético, las cuales son rotacionales.

Las conclusiones a las que se ha llegado en este trabajo de fin de grado demuestran que el espín debe considerarse como una magnitud cuántica independiente del momento angular. Se trata de una propiedad física esencialmente diferente, sin análogo en la mecánica clásica.

# Bibliografía


[1] Paul A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, 3rd edition, 1947.

[2] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer, 2015.

[3] George R. Kempf. *Algebraic structures*. Wiesbaden: Vieweg, 1995. doi: 10.1007/978-3-322-80278-1.

[4] Anthony W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Springer, 2015.

[5] Arthur J. Mountain. Invariant tensors and casimir operators for simple compact lie groups. *Journal of Mathematical Physics*, 39:5601–5607, 1998. doi: 10.1016/S0550-3213(97)00609-3. URL https://doi.org/10.1016/S0550-3213(97)00609-3.

[6] Jean-Pierre Serre. *Linear Representations of Finite Groups*, volume 42. Springer-Verlag, 1977.

[7] Wu-Ki Tung. *Group Theory In Physics: An Introduction To Symmetry Principles, Group Representations, And Special Functions In Classical And Quantum Physics*. World Scientific Publishing Company, 1985.

[8] Christian Türk. Spin in quantum physics. Master's thesis, Luleå university of thecnology, 2003.

[9] Peter Woit. *Quantum Theory, Groups and Representations: An introduction*. Springer, 2017. doi: 10.1007/978-3-319-64612-1_14.

[10] Pauli Wolfgang. Exclusion principle and quantum mechanics. Nobel lecture, Diciembre 1946.

[11] Bretislav Friedrich y Dudley Herschbach. Stern and gerlach: How a bad cigar helped reorient atomic physics. *Physics Today*, 56:53–59, 2003. doi: 10.1063/1.1650229. URL https://doi.org/10.1063/1.1650229.

[12] Franz Mandl y Graham Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley, 2nd edition, 2010.

[13] Xavier Bekaert y Nicolas Boulanger. The unitary representations of the poincare group in any spacetime dimension, 2021. URL https://arxiv.org/abs/hep-th/0611263.