



---

# **Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Física**

**TÍTULO Poder estadístico de las desigualdades de Bell**

**Autor/a: Daniel Giraldo García**

**Tutores: Mateus Araujo, Luis Miguel Nieto Calzada**

**Año 2024**

# Índice general

---

<b>1. Resumen y abstract</b>	<b>2</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>3. Conceptos necesarios</b>	<b>4</b>
3.1. Cúbit . . . . .	4
3.2. Estados entrelazados . . . . .	4
3.3. Base computacional . . . . .	4
<b>4. Paradoja EPR y Teorema</b>	<b>6</b>
4.1. La Paradoja EPR . . . . .	6
4.2. Variables ocultas . . . . .	7
4.3. Teorema de Bell . . . . .	7
4.4. Demostración CHSH . . . . .	7
<b>5. Juegos no locales</b>	<b>9</b>
5.1. Comportamientos locales . . . . .	9
5.2. Comportamiento cuántico . . . . .	10
5.2.1. Búsqueda del juego CHSH . . . . .	11
5.3. Equivalencia con desigualdad CHSH . . . . .	11
5.3.1. Límite de Tsirelson . . . . .	12
5.4. Cota cuántica . . . . .	13
5.4.1. Representación de Collins-Gisin . . . . .	13
5.5. Entropía relativa . . . . .	14
<b>6. En busca de una comprobación experimental</b>	<b>15</b>
6.1. Experimento de Clauser y Freedman . . . . .	15
6.2. Experimento de Aspect . . . . .	15
6.3. Lagunas . . . . .	16
6.4. Experimentos libres de <i>loopholes</i> . . . . .	16
<b>7. Programa</b>	<b>18</b>
7.1. Creación de los tensores . . . . .	18
7.2. Máximo . . . . .	19
7.2.1. Trivial . . . . .	20
7.3. Límite de Tsirelson en primer orden . . . . .	21
7.4. Entropía relativa . . . . .	21
7.5. Calculo final de entropía . . . . .	21
7.6. Método see-saw . . . . .	22
<b>8. Resultados</b>	<b>23</b>
8.1. 2 preguntas y 2 respuestas . . . . .	23
8.2. 3 preguntas y 2 respuestas . . . . .	23
8.3. 2 preguntas y 3 respuestas . . . . .	24
<b>9. Conclusiones</b>	<b>26</b>

# 1 Resumen y abstract

---

## **Resumen:**

En este trabajo se buscarán los juegos locales con mayor poder estadístico, identificando aquellos con mayor entropía relativa. Para ello, se desarrollará un programa que generará todos los juegos posibles en cada escenario y evaluará sus cotas clásica y cuántica. Además, se buscarán los estados y POVMs que optimicen la cota cuántica en los mejores juegos.

## **Abstract:**

In this work, local games with the highest statistical power will be identified by focusing on those with the highest relative entropy. To achieve this, a program will be developed to generate all possible games for each scenario and evaluate their classical and quantum bounds. Additionally, for the best games, the states and POVMs that optimize the quantum bound will be sought.

## 2 Introducción

---

La mecánica cuántica nace a principios del siglo XX debido a la necesidad de explicar el comportamiento de las partículas subatómicas. A mediados de los años 20, se presentaron dos formulaciones de la mecánica cuántica que, a la postre, resultaron ser equivalentes: la formulación matricial de Heisenberg y la ondulatoria de Schrödinger. En 1927, durante el V Congreso de Solvay, se debatió acerca de estas dos formulaciones. Durante los últimos días del congreso, se produjo una batalla dialéctica entre Einstein y Bohr. El alemán proponía experimentos mentales que cuestionaban el principio de incertidumbre de Heisenberg, discípulo de Bohr, y en la siguiente sesión el danés encontraba algún fallo lógico en los experimentos mentales de Einstein. Tras este congreso, se adoptó la formulación de Heisenberg, en la posteriormente conocida como interpretación de Copenhague, donde el colapso de la función de onda tenía una naturaleza probabilística.

En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen formularon la paradoja EPR, que pretendía mostrar que la mecánica cuántica es una teoría incompleta y abría la puerta a la existencia de alguna teoría más general (de variables ocultas) que explicara la “acción fantasmal a distancia” del colapso de la función de onda. La mecánica cuántica siguió avanzando imparable y su interpretación se quedó en el debate filosófico. Hasta que, en 1964, Bell presentó la desigualdad de Bell, que demostraba que ninguna teoría de variables ocultas local podía describir la realidad de la misma manera que la mecánica cuántica. Desde principios de los años 70 hasta la actualidad, se han realizado numerosos experimentos exitosos para comprobar la violación de esta desigualdad. Por otro lado, las desigualdades de Bell pueden estudiarse desde los juegos locales, que son una rama de la teoría de la información cuántica, cosa que se hará en este trabajo.

En este trabajo, se buscarán los juegos locales con mayor poder estadístico [1], es decir, aquellos que se puedan verificar con mayor intervalo de confianza y menos intentos. Para ello, se creará un programa que genere todos los juegos locales binarios de cada escenario y evalúe su límite local y su límite cuántico. Este último límite se calculará utilizando la jerarquía NPA para ello. Con estos parámetros, se calculará la entropía relativa de cada juego para clasificar su poder estadístico. Por último, se utilizará el método de programación semidefinida see-saw para obtener el estado y los POVMs que dan la cota cuántica superior de los mejores juegos. Es importante destacar que, dado que el número de juegos crece exponencialmente con el número de preguntas y respuestas, para escenarios superiores al (2, 2, 2, 2) ha sido necesario reducir el número total de juegos aplicando condiciones de simetría.

Además de proporcionar conocimiento sobre la realidad, las desigualdades de Bell se utilizan en modelos de distribución de claves cuánticas, por lo que un mayor conocimiento sobre éstas será útil para el desarrollo de las comunicaciones cuánticas.

# 3 Conceptos necesarios

---

## 3.1 Cúbit

---

De igual manera que un bit es la unidad básica de información en computación clásica, un cúbit<sup>[2]</sup> es la unidad básica de información en computación cuántica. Se representa como la superposición de dos estados que forman una base ortonormal:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (3.1)$$

Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes complejos que cumplen la condición de normalización, es decir:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.2)$$

## 3.2 Estados entrelazados

---

Los estados entrelazados fueron introducidos por primera vez en la paradoja EPR. El estado de un sistema de  $n$  partículas que no interactúan cuyo estado en el espacio de Hilbert es:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (3.3)$$

con  $|\psi_i\rangle = c_i|i\rangle$ .

Si ahora estas partículas interactúan, por el principio de superposición se tendrá el siguiente estado entrelazado:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle, \quad (3.4)$$

donde  $\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  es el multiíndice, y

$$|\vec{i}\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \cdots \otimes |i_n\rangle,$$

y, en general, ya no se puede describir el estado como un producto de estados de subsistemas individuales:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (3.5)$$

Esto quiere decir que las medidas no se pueden describir de manera independiente para cada partícula. Por ejemplo, para  $N = 2$ :

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N c_{i_1, i_2} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle. \quad (3.6)$$

$$|\psi\rangle = c_{1,1}|1\rangle \otimes |1\rangle + c_{1,2}|1\rangle \otimes |2\rangle + c_{2,1}|2\rangle \otimes |1\rangle + c_{2,2}|2\rangle \otimes |2\rangle. \quad (3.7)$$

## 3.3 Base computacional

---

Si ahora se tienen 2 cúbits entrelazados, habrá 4 posibles estados:  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|11\rangle$ ,  $|10\rangle$ . Estos 4 pares forman la base computacional<sup>[2]</sup>, representada en la ecuación (3.7)

Serán especialmente interesantes los Estados de Bell, también conocidos como estados máximamente entrelazados o estados EPR (nombrados así en honor a Einstein, Podolsky y Rosen):

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (3.8)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (3.9)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \quad (3.10)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (3.11)$$

Estos estados se pueden condensar en la siguiente ecuación generalizada:

$$|\beta_{xy}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,y\rangle + (-1)^x|1,\bar{y}\rangle), \quad (3.12)$$

donde  $\bar{y}$  denota el complemento de  $y$  (es decir, si  $y = 0$ , entonces  $\bar{y} = 1$ , y viceversa).

Además, se utilizarán los observables  $X$  y  $Z$ . Su representación en la base computacional es:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ Z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por lo tanto,  $Z$  opera así:

$$Z|0\rangle = +1 \cdot |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -1 \cdot |1\rangle, \quad (3.14)$$

y  $X$  es la puerta cuántica NOT, que devuelve el estado opuesto al que mide:

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle. \quad (3.15)$$

# 4 Paradoja EPR y Teorema

---

## 4.1 La Paradoja EPR

---

La paradoja EPR [3] trata de mostrar que la mecánica cuántica no es una teoría completa porque, de serlo, no sería realista. Para entrar en materia, primero hay que introducir los siguientes términos:

- **Completitud:** una teoría física es completa si cada elemento de la realidad física tiene una contraparte en la teoría física.
- **Elemento de realidad:** corresponde a una cantidad física cuando podemos predecir con certeza su valor (con probabilidad igual a 1) sin perturbar el sistema.
- **Localidad:** en una teoría local nada puede transmitirse más rápido que la luz; en este caso, indica que una medición en la partícula  $A$  no puede afectar inmediatamente a la partícula  $B$  si están lo suficientemente separadas.

Para formular la paradoja, se comienza partiendo de la premisa que se quiere negar:

1. La función de onda describe completamente la realidad.

Y del principio de indeterminación:

2. Cuando dos operadores correspondientes a dos cantidades físicas no comutan, las dos cantidades no pueden tener una realidad simultánea.

Por simplicidad, se utilizará la versión de Bohm-Aharonov [4], que es equivalente a la paradoja EPR.

En este experimento mental, se parte de una molécula con espín total cero compuesta por dos átomos que en algún momento dejan de interaccionar y se separan de tal forma que no influya en el espín. Se envían los átomos a detectores muy alejados entre sí.

La función de onda del sistema será:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (4.1)$$

Dado que el espín total es 0, si se mide la componente  $\hat{S}_z$  del espín de la partícula  $A$ , se obtiene  $\frac{\hbar}{2}$ ; entonces el resultado de la componente  $\hat{S}_z$  del espín de la partícula  $B$  estará completamente definido:  $-\frac{\hbar}{2}$ . Si se obtiene  $-\frac{\hbar}{2}$  midiendo  $A$ , la componente de  $B$  estará completamente definida y será  $\frac{\hbar}{2}$ .

Este argumento se puede extender para la componente  $\hat{S}_x$ , teniendo completamente definida la componente  $\hat{S}_x$  de la partícula  $B$  si se mide la de la partícula  $A$ .

En la paradoja EPR se defiende que, como por localidad las mediciones en  $A$  no pueden afectar a  $B$ , ambas componentes de  $B$  han de estar definidas a la vez y, por lo tanto, son elementos de realidad. Esto no pasaría con las componentes de  $A$  porque, para medirlas, sí se perturba el sistema al colapsar la función de onda en uno de los dos estados.

La contradicción aparece porque  $\hat{S}_z$  y  $\hat{S}_x$  no comutan, por lo que, según el principio de incertidumbre, no se pueden conocer ambos elementos de realidad a la vez con total precisión. Esto ocurre para la partícula  $B$ , así que se concluye que o bien la mecánica cuántica no es una teoría completa y no puede predecir con certeza estos elementos de realidad, o bien no se cumple el principio de incertidumbre y la mecánica cuántica falla. Una tercera opción sería que se violara el principio de localidad, pero los autores de la paradoja consideraron esa idea inadmisible.

La publicación de la paradoja EPR provocó un revuelo mediático. Pocos meses después, Bohr [5] respondió a ella señalando que el concepto de elemento de realidad estaba vagamente definido y que las dos partículas, al estar entrelazadas, formaban un único sistema. Hasta el propio Einstein admitió, en correspondencia con Schrödinger, que había lagunas de lenguaje debidas a que Podolsky [6], el redactor del artículo, tenía el ruso como lengua materna. Pese a ello, esta paradoja ha sido pieza clave para el posterior descubrimiento del teorema de Bell, funcionando como reacción al progreso para hacer girar el motor de la historia.

## 4.2 Variables ocultas

---

Una de las posibles soluciones que proponían los detractores de la interpretación de Copenhague a los problemas de causalidad debidos al colapso de la función de onda y a la falta de determinismo debida a la naturaleza probabilística de la medida eran las variables ocultas. De esta forma, se plantea la existencia de unos elementos desconocidos que explicarían estos problemas de causalidad y determinismo. Un ejemplo de teoría de variables ocultas desvelada [7] fue la cinética de los gases de Boltzmann y Maxwell, que postulaba que las propiedades de los gases provenían del movimiento de unas partículas que los componían, las cuales se movían a velocidad constante y colisionaban entre ellas. Fue el propio Einstein, en 1905, quien comprobó la existencia de los átomos mediante su estudio del movimiento browniano en líquidos, desvelando así esa variable oculta y completando la teoría.

## 4.3 Teorema de Bell

---

En 1964, durante su año sabático en el CERN, el físico norirlandés John Bell desarrolló, a partir de la versión de Bohm de la paradoja EPR [8], una desigualdad que demuestra la incompatibilidad de las variables ocultas locales con las predicciones de la mecánica cuántica. A partir de la desigualdad de Bell, este problema filosófico se podría trasladar casi 30 años después al laboratorio.

En 1969, John Clauser, un joven físico experimental nacido en Berkeley, junto con Michael Horne, Abner Shimony y Richard Holt, recogió la propuesta de Bell para diseñar un montaje experimental que permitiera probar la desigualdad. Modificaron la desigualdad de Bell, planteando la desigualdad CHSH [9].

## 4.4 Demostración CHSH

---

La desigualdad CHSH es una versión más general de la desigualdad de Bell. La demostración [2] requiere de 3 participantes: Charlie, Alice y Bob.

Charlie prepara dos partículas y le envía una a Alice y otra a Bob. Alice recibe su partícula y puede medir dos magnitudes físicas,  $A_0$  o  $A_1$ . Sus mediciones,  $P_{A_0}$  y  $P_{A_1}$ , solo pueden tomar valores  $\pm 1$ . Alice mide aleatoriamente una de estas dos magnitudes al mismo tiempo que Bob hace lo mismo con su partícula, realizando una medición que solo puede dar  $\pm 1$  para una de las propiedades (también elegida aleatoriamente como Alice),  $P_{B_0}$  o  $P_{B_1}$ .

En este punto cabe destacar que se están haciendo las siguientes asunciones:

**Localidad:** Como Alice y Bob están separados a cierta distancia y hacen las medidas a la vez, la medida de Alice no puede interferir en la de Bob y viceversa.

**Realismo:** Todas las magnitudes están perfectamente definidas antes de ser medidas y no dependen de la medición.

Si se calcula:

$$A_1 B_0 + A_0 B_0 + A_0 B_1 - A_1 B_1 = (A_1 + A_0) B_0 + (A_0 - A_1) B_1 \quad (4.2)$$

donde  $A_0, A_1 = \pm 1$ , entonces se tiene que o bien  $(A_1 + A_0) = 0$  o  $(A_0 - A_1) = 0$ . Por lo tanto:

$$A_1 B_0 + A_0 B_0 + A_0 B_1 - A_1 B_1 = \pm 2. \quad (4.3)$$

Por lo que se tiene la siguiente desigualdad:

$$A_1 B_0 + A_0 B_0 + A_0 B_1 - A_1 B_1 \leq 2. \quad (4.4)$$

Se tiene una distribución de probabilidad  $p(a_1, a_0, b_0, b_1)$  de que el estado preparado por Charlie tenga los valores  $A_1 = a_1$ ,  $A_0 = a_0$ ,  $B_0 = b_0$  y  $B_1 = b_1$ , y esta distribución de probabilidad está sujeta a una condición de normalización:

$$\sum_{a_1, a_0, b_0, b_1} p(a_1, a_0, b_0, b_1) = 1. \quad (4.5)$$

(Si, por ejemplo, todas las magnitudes toman los valores  $\pm 1$  mediante una distribución equiprobable, habría una probabilidad de  $\frac{1}{16}$  para cada caso.)

Con esta distribución de probabilidad es posible calcular el valor medio:

$$\begin{aligned} E(A_1B_0 + A_0B_0 + A_0B_1 - A_1B_1) &= \sum_{a_1, a_0, b_0, b_1} p(a_1, a_0, b_0, b_1) (a_1b_0 + a_0b_0 + a_0b_1 - a_1b_1) \\ &\leq 2 \sum_{a_1, a_0, b_0, b_1} p(a_1, a_0, b_0, b_1) = 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Y como el valor medio de una suma es la suma de los valores medios, se llega finalmente a la desigualdad CHSH:

$$\langle A_1B_0 \rangle + \langle A_0B_0 \rangle + \langle A_0B_1 \rangle - \langle A_1B_1 \rangle \leq 2 \quad (4.7)$$

Para probar si esta desigualdad se mantiene en el mundo cuántico, Charlie prepara un estado máximamente entrelazado de 2 qubits y le envía uno a Alice y otro a Bob:

$$|\psi\rangle = \frac{|0_A1_B\rangle - |1_A0_B\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.8)$$

Utilizando los siguientes observables:

$$A_1 = Z_1, \quad A_0 = X_1, \quad B_0 = \frac{-Z_2 - X_2}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = \frac{Z_2 - X_2}{\sqrt{2}}, \quad (4.9)$$

Utilizando la representación en la base computacional de X y de Z (3.13) se pueden calcular los valores esperados de la expresión (4.7):

$$\langle A_1B_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle A_0B_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle A_0B_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle A_1B_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.10)$$

Por lo que se viola la desigualdad CHSH:

$$\langle A_1B_0 \rangle + \langle A_0B_0 \rangle + \langle A_0B_1 \rangle - \langle A_1B_1 \rangle = 2\sqrt{2} \not\leq 2. \quad (4.11)$$

## 5 Juegos no locales

---

Otra forma de ver las desigualdades de Bell son los juegos no locales [10]. En un juego por turnos, un referí enviará preguntas  $(x, y)$  con probabilidad  $\mu(x, y)$  a dos jugadores, Alice y Bob, y ellos devolverán respuestas  $(a, b)$  que serán evaluadas por el referí mediante unas reglas de juego  $V(a, b, x, y)$ , que para 2 preguntas y 2 respuestas re representan en el tensor V:

$$V = \left( \begin{array}{cc|cc} V(0, 0, 0, 0) & V(0, 1, 0, 0) & V(0, 0, 0, 1) & V(0, 1, 0, 1) \\ V(1, 0, 0, 0) & V(1, 1, 0, 0) & V(1, 0, 0, 1) & V(1, 1, 0, 1) \\ \hline V(0, 0, 1, 0) & V(0, 1, 1, 0) & V(0, 0, 1, 1) & V(0, 1, 1, 1) \\ V(1, 0, 1, 0) & V(1, 1, 1, 0) & V(1, 0, 1, 1) & V(1, 1, 1, 1) \end{array} \right) \quad (5.1)$$

donde  $V(a, b, x, y) \in \{0, 1\}$ .

Un escenario  $(k_a, k_b, n_a, n_b)$  se define por los jugadores  $(a, b)$  que lo forman, el número de preguntas  $(n_a, n_b)$  que se hacen a cada jugador y el número de respuestas  $(k_a, k_b)$  que devuelven cada jugador. Por ejemplo, para un escenario con 2 jugadores que reciben 2 preguntas y devuelven 2 respuestas cada uno, será un escenario  $(2, 2, 2, 2)$ . En un escenario con 2 jugadores a los que se les hacen 2 preguntas a cada uno y devuelven 3 respuestas cada uno, el escenario será  $(3, 3, 2, 2)$ .

Se utilizará la siguiente notación:

$$x \in X = \{1, \dots, k_a\}, \quad a \in A = \{1, \dots, n_a\}, \quad y \in Y = \{1, \dots, k_b\}, \quad b \in B = \{1, \dots, n_b\}$$

El comportamiento  $p(ab|xy)$  indica cómo van a responder Alice y Bob ante las preguntas que reciban. La probabilidad de victoria para comportamiento será:

$$p_{\text{win}} = \sum_{a,b,x,y} \mu(x, y) V(a, b, x, y) p(ab|xy) \quad (5.2)$$

Se define como límite el valor máximo que puede tomar la probabilidad de victoria de entre todos los comportamientos posibles:

$$L := \max_{p(ab|xy)} \sum_{a,b,x,y} \mu(x, y) V(a, b, x, y) p(ab|xy) \quad (5.3)$$

En este trabajo se estudiarán comportamientos locales y comportamientos cuánticos.

### 5.1 Comportamientos locales

---

Los comportamientos locales deben cumplir una serie de condiciones. En las siguientes líneas se hará una caracterización adaptada a la formulación de juegos no locales del teorema de Bell, con el fin de explicar cómo funcionan los comportamientos locales.

En primer lugar, se parte de la probabilidad condicionada de obtener  $(a, b)$  al medir una configuración  $(x, y)$  de un estado físico  $\lambda$  (Este estado físico  $\lambda$  no tiene por qué ser conocido, es decir, puede ser una variable oculta.). Como puede haber diferentes estados físicos para cada repetición, la probabilidad condicionada se escribirá de la siguiente manera:

$$p(ab|xy) = \sum_{\lambda} p(\lambda|xy) p(ab|xy, \lambda) \quad (5.4)$$

Para hacer ciencia es necesaria la hipótesis de no conspiración, es decir, que el sistema físico  $\lambda$  no esté relacionado con la configuración  $(x, y)$ . Esto significa que:

$$p(\lambda|xy) = p(\lambda) \quad (5.5)$$

Por otro lado, está la hipótesis del determinismo, es decir, que el valor de  $a$  y de  $b$  no dependa de la

medición. Esto permite factorizar la probabilidad, por lo que la ecuación queda de la siguiente forma:

$$p(ab|xy) = \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|xy, \lambda) p(b|xy, \lambda) \quad (5.6)$$

Finalmente, la hipótesis de no señalización implica que  $a$  no dependa de  $y$  ni  $b$  de  $x$ . Dado que las mediciones se realizan a la vez y están alejadas, por localidad, la medición de  $a$  no podrá modificar la de  $b$  y viceversa. Así, se llega a:

$$p(a, b|x, y) = \sum_{\lambda} p(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda). \quad (5.7)$$

Por ejemplo, para el escenario  $(2, 2, 2, 2)$  se puede construir ahora el tensor de comportamientos  $P$ :

$$P = \left( \begin{array}{cc|cc} p(00|00) & p(01|00) & p(00|01) & p(01|01) \\ p(10|00) & p(11|00) & p(10|01) & p(11|01) \\ \hline p(00|10) & p(01|10) & p(00|11) & p(01|11) \\ p(10|10) & p(11|10) & p(10|11) & p(11|11) \end{array} \right) \quad (5.8)$$

Cada celda muestra una pregunta  $(x, y)$  y sus 4 posibles respuestas  $(a, b)$ , por lo que habrá 16 comportamientos posibles construidos por 16 estrategias diferentes, que se condensan en la siguiente tabla:

Estrategia	Valor de $a$	Valor de $b$
1	0	0
2	0	$y$
3	0	$\neg y$
4	0	1
5	$x$	0
6	$x$	$y$
7	$x$	$\neg y$
8	$x$	1
9	$\neg x$	0
10	$\neg x$	$y$
11	$\neg x$	$\neg y$
12	$\neg x$	1
13	1	0
14	1	$y$
15	1	$\neg y$
16	1	1

Así, por ejemplo, para la primera estrategia se tendrá el comportamiento:

$$P = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (5.9)$$

Y el límite local será, por lo tanto:

$$W_L := \max_{p(ab|xy) \in \text{local}} \sum_{a,b,x,y} \mu(x, y) V(a, b, x, y) p(ab|xy) \quad (5.10)$$

## 5.2 Comportamiento cuántico

---

Por otro lado, si se pudieran utilizar las leyes cuánticas, Alice y Bob podrían recibir un estado entrelazado (por ejemplo, que Alice reciba un fotón que haya interactuado con el de Bob) y medirlo. Con esta nueva forma de trabajar de Alice y Bob, se define el comportamiento cuántico como:

$$p(ab|xy) = \text{tr} \left[ \left( M_A^{a|x} \otimes M_B^{b|y} \right) \rho \right] \quad (5.11)$$

donde  $\rho$  es la matriz densidad, que describe el estado cuántico de un sistema en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  (compuesto por los subespacios de Alice y Bob). Para estados mixtos, la matriz densidad se describe por:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (5.12)$$

y  $M_A^{a|x}$  y  $M_B^{b|y}$  son los POVMs (Positive Operator-Valued Measure) de Alice y Bob respectivamente. Por lo tanto, la cota cuántica será:

$$W_Q := \max_{p(ab|xy) \in \text{cuántico}} \sum_{a,b,x,y} \mu(x,y) V(a,b,x,y) p(ab|xy) \quad (5.13)$$

donde  $p(ab|xy)$  deben cumplir la ecuación (5.11).

Para entender estos nuevos conceptos introducidos, se buscará el juego no local que describa la desigualdad CHSH (4.7).

### 5.2.1 Búsqueda del juego CHSH

---

En la desigualdad CHSH, la correlación de 3 pares de observables suma, y la de un par de ellos resta. En este caso, habrá que buscar, por lo tanto, 3 pares correlacionados y uno no. Esto se da con la siguiente función:

$$V = \begin{cases} 1 & \text{si } a \oplus b = x \cdot y, \\ 0 & \text{si } a \oplus b \neq x \cdot y. \end{cases} \quad (5.14)$$

con  $\mu(x,y) = \frac{1}{4}$ .

En efecto, esta condición se cumple cuando  $a$  y  $b$  son iguales, salvo cuando  $x = y = 1$ . Es decir, gana 3 veces y pierde 1, como en el juego original del que se partía.

El tensor tiene, por lo tanto, la siguiente forma:

$$V = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (5.15)$$

Y usando la ecuación (5.10), el límite clásico es  $W_L = 0,75$ .

## 5.3 Equivalencia con desigualdad CHSH

---

A priori puede parecer que este juego no local no sea equivalente a la versión del CHSH demostrada en el apartado 2.2. Sin embargo, es muy sencillo ver que están describiendo la misma realidad:

En la desigualdad original, si dos medidas están correlacionadas suman 1 y si no lo están restan 1. Por lo tanto, la correlación entre dos observables arbitrarios se puede definir como:

$$\langle A_x B_y \rangle = p(00|xy) + p(11|xy) - p(01|xy) - p(10|xy) \quad (5.16)$$

Y sumando todas las correlaciones de la desigualdad CHSH (4.7) se tiene:

$$\begin{aligned} & [p(00|10) + p(11|10) - p(01|10) - p(10|10)] + [p(00|00) + p(11|00) - p(01|00) - p(10|00)] \\ & + [p(00|01) + p(11|01) - p(01|01) - p(10|01)] - [p(00|11) + p(11|11) - p(01|11) - p(10|11)] \leq 2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sumando a ambos lados todas las posibles respuestas para cada par  $(x,y)$ :

$$p(00|xy) + p(10|xy) + p(01|xy) + p(11|xy) = 1, \quad (\text{La probabilidad está normalizada}). \quad (5.18)$$

Operando se llega a:

$$2[p(00|00) + p(00|10) + p(00|01) + p(10|11) + p(11|00) + p(11|10) + p(11|01) + p(01|11)] \leq 6. \quad (5.19)$$

Y dividiendo entre 8 ambos lados:

$$\frac{1}{4} (p(00|00) + p(00|10) + p(00|01) + p(10|11) + p(11|00) + p(11|10) + p(11|01) + p(01|11)) \leq \frac{3}{4}. \quad (5.20)$$

Que representa la misma suma de probabilidades que el juego  $V$  (5.15), que también cuya cota superior (límite clásico) es  $W_L = \frac{3}{4}$ .

### 5.3.1 Límite de Tsirelson

---

Ahora se calculará el límite de Tsirelson[2], es decir, el valor máximo de correlación que se puede obtener utilizando la mecánica cuántica.

Se parte del operador  $S$  que expresa las correlaciones de la ecuación (4.7):

$$S = A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1. \quad (5.21)$$

Dado que los valores propios de  $A_i$  y  $B_j$  son  $+1$  o  $-1$ , se cumple:

$$A_i^2 = B_j^2 = I. \quad (5.22)$$

Al calcular  $S^2$ :

$$S^2 = (A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1)^2. \quad (5.23)$$

Expandiendo los términos, se tiene:

$$\begin{aligned} S^2 &= (A_0 \otimes B_0)^2 + (A_0 \otimes B_1)^2 + (A_1 \otimes B_0)^2 + (A_1 \otimes B_1)^2 \\ &\quad + 2(A_0 \otimes B_0)(A_0 \otimes B_1) + 2(A_0 \otimes B_0)(A_1 \otimes B_0) \\ &\quad + 2(A_0 \otimes B_0)(-A_1 \otimes B_1) + 2(A_0 \otimes B_1)(A_1 \otimes B_0) \\ &\quad - 2(A_0 \otimes B_1)(A_1 \otimes B_1) - 2(A_1 \otimes B_0)(A_1 \otimes B_1). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Usando la ecuación (5.22) y las propiedades básicas de conmutación, se llega a:

$$S^2 = 4I - [A_0, A_1] \otimes [B_0, B_1]. \quad (5.25)$$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$\|S^2\| \leq \|4I\| + \| [A_0, A_1] \otimes [B_0, B_1] \|.. \quad (5.26)$$

En mecánica cuántica, los conmutadores de  $A$  y  $B$  no son necesariamente cero; de hecho, es necesario que  $A$  y  $B$  no comuten para poder obtener una violación de la desigualdad de Bell. Estos conmutadores están acotados gracias a la desigualdad triangular:

$$\|[A_0, A_1]\| \leq 2\|A_0\|\|A_1\| \leq 2, \quad (5.27)$$

$$\|[B_0, B_1]\| \leq 2\|B_0\|\|B_1\| \leq 2. \quad (5.28)$$

Por lo que se obtiene finalmente

$$\|S^2\| \leq 8. \quad (5.29)$$

$$\|S\| \leq 2\sqrt{2} \quad (5.30)$$

Además, esta demostración proporciona una manera elegante de llegar a la cota clásica. En el caso clásico, los comutadores de  $A$  y  $B$  serán cero, y por lo tanto, sustituyendo en (5.26) se llega a:

$$\|S\| \leq 2 \quad (5.31)$$

## 5.4 Cota cuántica

---

Para calcular la cota cuántica, es necesario encontrar el valor máximo de la ecuación (5.13). Este cálculo es muy complejo y solo puede resolverse analíticamente para juegos simples, como el CHSH. Se trata de un problema no convexo de dimensión infinita. Sin embargo, utilizando la jerarquía NPA ([11]), el programa de Matlab MOMENT ([12]) puede proporcionar una cota superior para este límite cuántico. La jerarquía NPA produce una cota superior para cualquier número natural  $n$ , conocido como el orden de la jerarquía. A medida que  $n$  aumenta, la cota se vuelve más precisa, pero también requiere un mayor costo computacional para calcularla. Además, la convergencia al valor real de la cota no está garantizada. De este modo, obtenemos la siguiente sucesión de cotas:

$$W_Q^* \leq W_Q^\infty \leq \dots \leq W_Q^2 \leq W_Q^1 \quad (5.32)$$

Donde el superíndice de  $W$  indica el orden de la jerarquía NPA.

### 5.4.1 Representación de Collins-Gisin

---

La representación de V que se ha utilizado hasta ahora tiene elementos redundantes, estos elementos se pueden eliminar mediante la representación de Collins-Gisin [13]. El programa MOMENT utilizará esta representación para calcular las cotas. Reescribiendo el comportamiento de probabilidades independientes  $P(a | x)$  y  $P(b | y)$ , y fijando un valor de  $a$  o de  $b$ , se pueden obtener el resto de términos como probabilidades marginales gracias a las condiciones de normalización y de no señalización. Esta última permite escribir de forma independiente los pares  $(a, x)$  y  $(b, y)$ . Así, se tiene:

$$P_{CG} = \begin{pmatrix} & P(a=1 | x=1) & P(a=1 | x=2) \\ \hline P(b=1 | y=1) & P(1,1 | 1,1) & P(1,1 | 2,1) \\ P(b=1 | y=2) & P(1,1 | 1,2) & P(1,1 | 2,2) \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Como  $P(a=1 | x=2) + P(a=2 | x=2) = 1$ , entonces  $P(a=2 | x=2) = 1 - P(a=1 | x=2)$ , y así se pueden obtener los demás términos.

El tensor  $M_{CG}$  ha de ser tal que, para cada estrategia, el funcional de Bell  $M(a, b, x, y) = V(a, b, x, y)\mu(x, y)$ , multiplicado término a término por  $P_{CG}$ , dé el mismo resultado que en la ecuación ((5.2)).

Definiendo el producto de  $M$  y  $P$  como:

$$\langle M \cdot P \rangle = \sum_{a,b,x,y} M(a, b, x, y)P(a, b, x, y) \quad (5.34)$$

se tiene que:

$$\langle M_{CR} \cdot P_{CR} \rangle = \langle M_{CG} \cdot P_{CG} \rangle, \quad \forall p(ab | xy) \quad (5.35)$$

Donde el subíndice CR significa representación completa. Como hay las mismas estrategias locales que incógnitas y es posible resolver el problema algebraico, y obtener  $M_{CG}$ .

Para el caso de CHSH, se tiene:

$$M_{CG} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Para más preguntas y respuestas, será necesario fijar  $x, y$  hasta  $n$  y  $a, b$  hasta  $k - 1$ . Por ejemplo, para 3 preguntas y 3 respuestas:

	$P(a = 1   x = 1)$	$P(a = 2   x = 1)$	$P(a = 1   x = 2)$	$P(a = 2   x = 2)$	
$P(b = 1   y = 1)$	$P(1, 1   1, 1)$	$P(2, 1   1, 1)$	$P(1, 1   2, 1)$	$P(2, 1   2, 1)$	
$P(b = 2   y = 1)$	$P(1, 2   1, 1)$	$P(2, 2   1, 1)$	$P(1, 2   2, 1)$	$P(2, 2   2, 1)$	(5.37)
$P(b = 1   y = 2)$	$P(1, 1   1, 2)$	$P(2, 1   1, 2)$	$P(1, 1   2, 2)$	$P(2, 1   2, 2)$	
$P(b = 2   y = 2)$	$P(1, 2   1, 2)$	$P(2, 2   1, 2)$	$P(1, 2   2, 2)$	$P(2, 2   2, 2)$	

## 5.5 Entropía relativa

---

Como se ha mencionado anteriormente, hay un infinito zoo de juegos no locales, y para poder trabajar con ellos, es necesaria alguna forma de clasificarlos y evaluar qué tan buenos son. La diferencia entre  $W_L$  y  $W_Q$  es un buen candidato para esta clasificación; a mayor diferencia, más fácil será distinguir entre el caso clásico y el cuántico. Sin embargo, al estar tratando un problema probabilístico estudiado en laboratorio, el p-valor es un mejor candidato para evaluar el significado de los resultados.

El p-valor es la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como los datos observados, bajo la suposición de que la hipótesis nula es verdadera. En este caso, la hipótesis nula es que el mundo está descrito por variables ocultas locales, lo que implica que la probabilidad de victoria es  $W_L$ . Dado que no hay datos observados directamente, se calculará el riesgo estadístico de rechazar la hipótesis nula (LHV) cuando los datos experimentales se ajustan al modelo cuántico.

El p-valor para cualquier número de victorias es:

$$p(v, n) = \sum_{k=v}^n \binom{n}{k} W_L^k (1 - W_L)^{n-k}, \quad (5.38)$$

donde  $v$  es el número de victorias, y  $n$  es el número total de experimentos.

Si se evalúa este p-valor para  $v = \lceil n \cdot W_Q \rceil$  victorias, donde  $\lceil n \cdot W_Q \rceil$  es el valor entero más cercano mayor o igual a  $n \cdot W_Q$ , se obtiene:

$$p(\lceil n \cdot W_Q \rceil, n) = \sum_{k=\lceil n \cdot W_Q \rceil}^n \binom{n}{k} W_L^k (1 - W_L)^{n-k}, \quad (5.39)$$

No es conveniente trabajar con esta fórmula porque depende del número de experimentos  $n$ . Para manejar esta situación de manera eficiente, se utiliza el límite de Chernoff.[14]

$$F(v, n, p) \leq \exp\left(-nD_{\text{KL}}\left(\frac{v}{n} \parallel p\right)\right), \quad (5.40)$$

donde  $F(v; n, p)$  es la función de distribución acumulativa de una binomial, (5.38) y  $D_{\text{KL}}\left(\frac{v}{n} \parallel p\right)$  es la divergencia de Kullback-Leibler:

$$D_{\text{KL}}\left(\frac{v}{n} \parallel p\right) = \frac{v}{n} \cdot \log\left(\frac{\frac{v}{n}}{p}\right) + \left(1 - \frac{v}{n}\right) \cdot \log\left(\frac{1 - \frac{v}{n}}{1 - p}\right), \quad (5.41)$$

Para el caso  $v = \lceil n \cdot W_Q \rceil$  y  $p = W_L$ , se puede escribir la ecuación (5.40) como:

$$p(\lceil n \cdot W_Q \rceil, n) \leq \exp(-nD_{\text{KL}}(W_Q \parallel W_L)), \quad (5.42)$$

Por lo que, a mayor  $D_{\text{KL}}(W_Q \parallel W_L)$ , menor será el p-valor, es decir, a más entropía relativa, el juego tendrá un mayor poder estadístico.

# 6 En busca de una comprobación experimental

---

## 6.1 Experimento de Clauser y Freedman

El primer experimento relevante para la demostración de la violación de las desigualdades de Bell fue realizado por Clauser y Freedman en 1972 [15]. Este experimento medía la correlación en la polarización lineal entre dos fotones emitidos por decaimientos atómicos en cascada de átomos de Calcio excitados. En términos de momento angular, el proceso de decaimiento sigue el esquema  $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$ . Por conservación de momento angular, los fotones emitidos  $\nu_1$  y  $\nu_2$  se encuentran en un estado de entrelazamiento máximo:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle), \quad (6.1)$$

donde  $|1\rangle$  y  $|0\rangle$  representan los estados de polarización de los fotones.

Los resultados experimentales mostraron claramente la violación de la desigualdad de Freedman, una versión modificada de la primera desigualdad de Bell que tiene en cuenta los aspectos experimentales de los dispositivos. El mayor problema de este experimento es que los detectores estaban lo suficientemente cerca uno de otro como para que fuera posible que un detector "se comunicara" con el otro, lo que violaba la hipótesis de localidad.

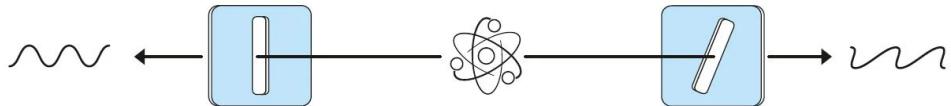


Figura 6.1: Esquema del experimento de Clauser y Freedman.

## 6.2 Experimento de Aspect

El siguiente gran avance experimental fue el experimento realizado por Alain Aspect, Jean Dalibard y Gérard Roger [16]. En este experimento, se utilizaron polarizadores variables temporales, capaces de cambiar entre diferentes canales de polarización en un intervalo de 10 ns. Dado que la vida media del nivel intermedio en la cascada atómica es de 15 ns (utilizando también átomos de Calcio excitados), el tiempo entre mediciones es suficientemente corto para superar los 40 ns que tarda la luz en recorrer los 6 metros que separan los detectores. Este ajuste temporal resuelve así la laguna de localidad.

En este experimento se podían hacer dos configuraciones de mediciones por cada detector, lo que permitió trabajar con una versión muy similar a la desigualdad CHSH:

$$-1 \leq S \leq 0,$$

donde

$$\begin{aligned} S = & \frac{N(\vec{a}, \vec{b})}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})} - \frac{N(\vec{a}, \vec{b}')}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})} + \frac{N(\vec{a}', \vec{b}')}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})} + \frac{N(\vec{a}', \vec{b})}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})} \\ & + \frac{N(\vec{a}, \vec{\omega})}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})} - \frac{N(\vec{a}', \vec{\omega})}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})} - \frac{N(\vec{\omega}, \vec{b})}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})} + \frac{N(\vec{\omega}, \vec{b}')}{N(\vec{\omega}, \vec{\omega})}. \end{aligned}$$

Aquí,  $N(\cdot, \infty)$  indica las mediciones cuando un polarizador se elimina de la configuración.

Los resultados experimentales de Aspect mostraron una clara violación de la desigualdad CHSH con un valor de  $S = 0,101 \pm 0,02$ , acercándose al valor teórico de  $S = 0,112$  que se predice para un sistema cuántico ideal.

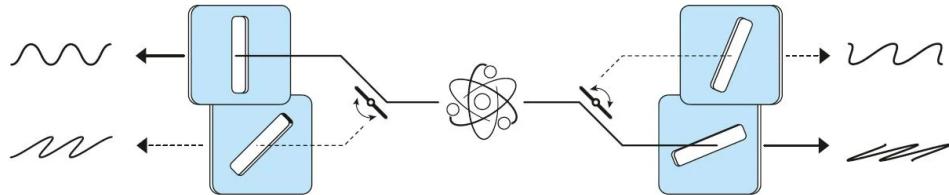


Figura 6.2: Esquema del experimento de Aspect.

### 6.3 Lagunas

---

Aunque el experimento de Aspect superó la laguna de localidad, aún permanecen otras lagunas (loopholes) experimentales. Las más importantes son la laguna de detección y la laguna de libre albedrío.

**Laguna de detección:** En este caso, los fallos de los detectores pueden alterar los resultados si se permite que los jugadores se abstengan de responder cuando no se detecta el fotón. Los jugadores podrían ponerse de acuerdo para no responder cuando les llegue una pregunta que les haga perder.

**Laguna de libre albedrío:** Esta laguna se refiere a la preocupación de que la elección de los ángulos de medición de Alice y de bob pueda estar correlacionada. Esta laguna se conoce como laguna del libre albedrío porque la forma de dar una disposición independiente de medidas sería utilizar el libre albedrío humano (asumiendo que tenemos libre albedrío) para generar estas disposiciones de medidas. Esta laguna es inevitable, siempre podrá existir la duda sobre si las disposiciones están correlacionadas pero puede ser acotada bajo hipótesis razonables.

### 6.4 Experimentos libres de *loopholes*

---

En 2015, tres experimentos [17][18][19] lograron finalmente salvar todos los *loopholes* importantes en las pruebas de las desigualdades de Bell. Estos experimentos utilizaron detectores de mayor precisión para superar la laguna de detección y separaron los detectores por distancias de hasta varios kilómetros para resolver la laguna de localidad. Además, se implementaron generadores cuánticos de números aleatorios para decidir de manera impredecible las configuraciones de medición de Alice y Bob, lo que evitaba que sus elecciones estuvieran correlacionadas.

En 2018, Zeilinger [20] publicó los resultados de un experimento en el que se utilizaron fotones emitidos por dos cuásares distantes para determinar las configuraciones de medición de Alice y Bob. Lo que representa una mejora respecto a los generadores cuánticos de números aleatorios, ya que las fuentes de datos que definen las disposiciones de medición son completamente independientes para ambos participantes. Por otro lado, el proyecto Big Bell Test [21] utilizó el libre albedrío de miles de personas que respondían preguntas en un videojuego para generar las configuraciones de medición.

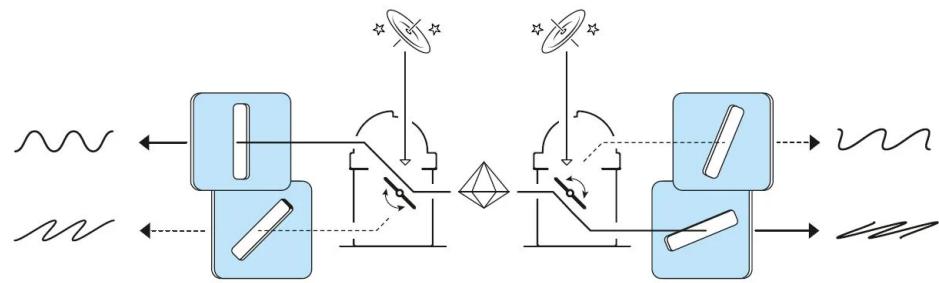


Figura 6.3: Esquema del experimento libre de *loopholes* de Zeilinger.

# 7 Programa

---

En esta sección se buscarán los mejores juegos no locales para cada escenario, creando todos los juegos posibles y evaluando su  $W_L$  y su  $W_Q$  para encontrar el de mayor entropía relativa. A continuación, se presenta el programa en Julia utilizado para ello:

## 7.1 Creación de los tensores

---

Para generar todos los tensores  $V(a, b, x, y)$  de un escenario de 2 jugadores,  $n$  preguntas y  $k$  respuestas, se necesitan  $2^{k^2n^2}$  iteraciones, una cantidad que, si se utiliza un ordenador convencional, sólo es viable para  $k = n = 2$ .

Para poder trabajar, es necesario eliminar candidatos (entre los cuales podría haber un mejor resultado). En este caso, se generarán solamente aquellos juegos simétricos respecto a las permutaciones entre jugadores (entre  $a$  y  $b$ ). Esto significa que las cajas de la diagonal serán simétricas internamente y las de fuera de la diagonal serán simétricas entre sí.

$$\left( \begin{array}{c|ccccc} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \cdots & M_{1,n} \\ \hline M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \cdots & M_{2,n} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & \cdots & M_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \cdots & M_{n,n} \end{array} \right) \quad (7.1)$$

Con las condiciones:

$$\begin{aligned} M_{i,i} &= M_{i,i}^T \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n, \\ M_{i,j}^T &= M_{j,i} \quad \text{para } i \neq j. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Ahora serán necesarios menos bits,  $\frac{k^2n^2+kn}{2}$  para ser exactos. En el programa se exponen explícitamente las condiciones que copian los valores generados para producir la simetría, como se muestra en el código.

```
1 num_bits_diag = k * (k + 1) ÷ 2 * n
2 num_bits_fuera = k^2 * (n * (n - 1) ÷ 2)
3 total_bits = num_bits_diag + num_bits_fuera
4
5 resultados = []
6 candidatos = 0
7
8 for bits in 0:(2^total_bits-1)
9     digitos = digits(bits, base = 2, pad = total_bits)
10
11    V = zeros(Int, k, k, n, n)
12    idx = 1
13
14    for a in 1:k
15        for b in a:k
16            for i in 1:n
17                V[a, b, i, i] = digitos[idx]
```

```

18         V[b, a, i, i] = V[a, b, i, i]
19         idx += 1
20     end
21 end
22
23 for a in 1:k
24     for b in 1:k
25         for i in 1:n
26             for j in i+1:n
27                 V[a, b, i, j] = digitos[idx]
28                 V[a, b, j, i] = V[a, b, i, j]
29                 idx += 1
30             end
31         end
32     end
33 end
34 end
35 end

```

---

Después de generar cada tensor, se llama a las siguientes funciones para tener los datos necesarios para obtener la entropía relativa:

```

1 W_L = Maximo(V, k, n)
2 T = Trivial(V, k, n)
3 no_trivial = n * n - T
4 W_L1 = W_L / no_trivial
5 M = fp2cg(V)
6 scenario = [k, k, n, n]
7 W_Q1 = tsirelson_bound_q1(M, scenario) / no_trivial

```

---

## 7.2 Máximo

---

La función máximo evalúa el máximo local de cada juego  $V(a, b, x, y)$ . Para ello compara todas las posibles estrategias de Alice y Bob guardando en cada iteración sólo aquella que de un mejor resultado que las anteriores:

```

1 function Maximo(V, k, n)
2     W_L = 0
3     for a in Base.Iterators.product(fill(1:k, n)...)
4         for b in Base.Iterators.product(fill(1:k, n)...)
5             W = 0
6             for x in 1:n
7                 for y in 1:n
8                     W += V[a[x], b[y], x, y]
9                 end
10            end
11            if W > W_L

```

---

```

12           W_L = W
13
14       end
15   end
16   return W_L
17

```

Como se puede ver en la función, para evaluar todas las estrategias se generan todas las posibles combinaciones de  $(a, b)$  para la dimensión  $k$  y van recorriendo  $(x, y)$  para la dimensión  $n$ . Para cada iteración, suma el valor del tensor en la posición  $V[a[x], b[y], x, y]$ . Esto selecciona un elemento de cada caja por lo que el valor máximo de esta función será el número de cajas,  $2n$ . Los caso con  $W_L = 2n$  no serán interesantes porque la cota inferior del límite cuántico es el clásico y al este ser máximo, ambos límites serán iguales.

### 7.2.1 Trivial

---

La función Trivial cuenta las cajas triviales de cada juego, es decir, aquellas cajas que sólo contengan ceros (o unos), para posteriormente dividir el límite local o cuántico entre las cajas no triviales. Esto se hace porque las cajas triviales no aportan información ya que la aportación a la cota local y cuántica de éstas será siempre la misma.

```

1 function Trivial(V, k, n)
2     T = 0
3     for x in 1:n
4         for y in 1:n
5             Suma = 0
6             for a in 1:k
7                 for b in 1:k
8                     Suma += V[a, b, x, y]
9             end
10            if Suma == 0
11                T += 1
12            end
13        end
14    end
15    return T
16
17
18

```

Se puede ver que la función sólo cuenta las cajas llenas de 0. Esto es suficiente porque se van a generar todos los juegos posibles y aquellas soluciones que resten las cajas triviales van a tener una mayor entropía. La motivación de esta omisión es que las cajas llenas de unos sí suman a los límites local y cuántico (suman siempre 1) por lo que si se restan estas cajas del divisor aportarían en el numerador pero restarían en el denominador. Para solventar este problema se podrían convertir las cajas llenas de unos en cajas llenas de ceros al generar los tensores pero esto no es necesario porque como se crean todos los tensores simétricos (respecto a la permutación de Alice y Bob) posibles las cajas llenas de ceros se generarán igualmente. Sólo sería útil si se almacenaran los tensores para luego evaluarlos (disminuiría los casos), pero al trabajar con tantísimos no es eficaz almacenarlos y se evalúan para cada iteración.

### 7.3 Límite de Tsirelson en primer orden

---

La función `tsirelson_bound_q1` (escrita por Mateus Araujo) da una cota superior del límite cuántico en primer orden para descartar directamente casos en los que la entropía relativa sea menor a la del CHSH. Esto se hace porque se calculará una aproximación de orden superior del límite de Tsirelson con Moment, un programa de MATLAB más complejo y preciso que tarda más en ejecutarse. Por lo tanto, disminuir las llamadas a este programa hará más rápido el cálculo.

Tanto esta función como Moment trabajan con el juego en la base combinada. Para hacer este cambio de base se utiliza `fp2cg`, una función del paquete Ket que transforma el tensor de la base completa a la base de Collins-Gisin. Además, hay que definir el escenario, es decir, las dimensiones del tensor que describe el juego en la base completa  $V(k, k, n, n)$ , siendo  $K$  y  $n$  el número de preguntas y respuestas respectivamente.

### 7.4 Entropía relativa

---

Una vez evaluadas las cotas local y cuántica (y divididas entre las cajas no triviales) es posible calcular su entropía relativa o divergencia de Kullback-Leibler.

$$D_{\text{KL}}(p \parallel q) = p \cdot \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1 - p) \cdot \log\left(\frac{1 - p}{1 - q}\right) \quad (7.3)$$

La función es sencilla pero hay que tratar cuidadosamente los ceros e infinitos para que al ejecutarlo no de error.

```

1 function kl_divergence(p, q)
2     if p > 0 && q > 0 && p < 1 && q < 1
3         return p * log(p / q) + (1 - p) * log((1 - p) / (1 - q))
4     elseif p == 0 || p == 1
5         return 0.0
6     else
7         return Inf
8     end
9 end

```

### 7.5 Calculo final de entropía

---

Finalmente se aplica la condición que descarta los tensores con entropía relativa menor al CHSH (en primer orden) y se calcula la entropía relativa otra vez usando ahora Moment para calcular la cota cuántica:

```

1 if W_L1 > 0 && W_L1 < 1
2     S1 = kl_divergence(W_Q1, W_L1)
3     if S1 > 0.032
4         candidatos += 1
5         W_Q = tsirelson_bound(M, scenario, 2) / no_trivial
6         S = kl_divergence(W_Q, W_L1)
7         push!(resultados, (V = V, S = S, W_L1 = W_L1, W_Q = W_Q))
8     end

```

```
9 end
```

```
10
```

---

Por último se ordena el archivo de resultados de mayor a menor entropía y se imprimen en pantalla los primeros:

```
1 sorted_resultados = sort(resultados, by = x -> x[:S], rev = true)
2 n_display = min(100, length(sorted_resultados))
3 for i in 1:n_display
4     resultado = sorted_resultados[i]
5     println("S = $(resultado[:S]), V = $(resultado[:V])")
6 end
```

---

## 7.6 Método see-saw

---

See-saw [22] es un método heurístico basado en programación semidefinida cuyo objetivo es encontrar el estado cuántico  $\rho$  y los POVMs  $\{A_x^a\}$  y  $\{B_y^b\}$  que maximicen la ecuación (??).

La función a optimizar no es lineal, sino un polinomio de grado 3. Si se fija una disposición aleatoria  $\{A_x^a\}$  y  $\rho$ , la maximización de  $\{B_y^b\}$  se convierte en un problema lineal. Luego, al tomar el valor optimizado de  $\{B_y^b\}$  y fijar  $\rho$  de manera aleatoria, se optimiza  $\{A_x^a\}$ , y así sucesivamente (de forma iterativa, como un balancín), hasta que  $W_Q$  de ganar deje de aumentar.

El método See-saw está implementado en el paquete Ket. Para ejecutar este método, es necesario pasar el tensor del juego a la representación de Collins-Gisin, e indicar el escenario y la dimensión. Para la dimensión, se comienza con el número de respuestas y se aumenta progresivamente si el resultado no coincide con el  $W_Q$  calculado con \*\*MOMENTt\*\* para el juego.

```
1 % Matriz V
2 V = [0 0 1; 0 1 1; 1 1 0; 1 1 0; 1 0 0; 0 0 1; 1 1 0; 1 0 0; 0 0 1; 0 1 0; 1 1 0;
3     0 0 1];
4
5 % Función fp2cg
6 M = fp2cg(V);
7
8 % Método seesaw
9 w, psi, A, B =seesaw(M, [2, 2, 3, 3], 3);
```

---

# 8 Resultados

---

## 8.1 2 preguntas y 2 respuestas

---

Para el caso de dos preguntas y 2 respuestas se analizaron todos los tensores y no sólo los simétricos respecto a las permutaciones entre  $a$  y  $b$ . Tanto el CHSH como su negación fueron los que mayor entropía relativa tuvieron. El estado que da la máxima violación es el singlete (4.8) con los observables dados en (4.9)

$$V(a, b, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \oplus b \neq x \cdot y, \\ 0 & \text{si } a \oplus b = x \cdot y. \end{cases} \quad (8.1)$$

$$S = 0,0321, \quad W_L = \frac{3}{4}, \quad W_Q = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

## 8.2 3 preguntas y 2 respuestas

---

Para este caso sí que hay que incluir la condición de simetría.

Se ha obtenido el siguiente tensor y las 24 permutaciones simétricas de sus cajas.

$$V = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (8.2)$$

Todos estos tensores son equivalentes al juego de Braunstein-Caves[23], que tiene las mismas cajas pero no cumplen la condición de simetría. En el juego de Braunstein-Caves se enviarán la siguiente distribución de preguntas

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2n} ([x = y] + [x = y + 1 \pmod{n}]) \quad (8.3)$$

y  $V(a, b, x, y)$  está definido la siguiente regla:

$$V(a, b, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \oplus b = \delta_{x0}\delta_{y0}, \\ 0 & \text{si no se cumple.} \end{cases} \quad (8.4)$$

Alice y Bob ganan si responden lo mismo que les preguntan salvo para  $x = y = 0$ , por lo que se puede ver simplemente que el límite local será

$$W_L = 1 - \frac{1}{2n}. \quad (8.5)$$

Por otro lado, la cota cuántica es

$$W_Q = \cos^2\left(\frac{\pi}{4n}\right), \quad (8.6)$$

se obtiene a partir de un estado singlete (4.8). Por otro lado, los POVMs [24] serán, para cualquier número de preguntas  $n$ :

$$X_a^x = |\varphi_a(\alpha_s)\rangle\langle\varphi_a(\alpha_s)|, \quad (8.7)$$

$$Y_b^y = |\varphi_b(\beta_t)\rangle\langle\varphi_b(\beta_t)|, \quad (8.8)$$

con

$$\alpha_x = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) y + \frac{\pi}{4n}, \quad (8.9)$$

$$\beta_x = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) y. \quad (8.10)$$

donde

$$|\varphi_0(\theta)\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle, \quad (8.11)$$

$$|\varphi_1(\theta)\rangle = -\sin(\theta)|0\rangle + \cos(\theta)|1\rangle. \quad (8.12)$$

Para 3 preguntas se tiene:

$$S = 0,0444, \quad W_L = \frac{5}{6}, \quad W_Q = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

### 8.3 2 preguntas y 3 respuestas

---

Para este caso y el siguiente, sí es necesario incluir la condición de simetría. Se ha encontrado un juego que no había sido estudiado anteriormente. Se tendrá la distribución de preguntas:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{4} \quad (8.13)$$

Y las reglas:

$$V = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (8.14)$$

Mediante el método heurístico seesaw del paquete de Julia ket se ha encontrado el estado entrelazado que da esa cota máxima:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & 0,6286054088982822|00\rangle \\ & + (-0,16334324864775843 + 0,07636803935461682i)|01\rangle \\ & + (-0,12961455709177175 - 0,004408040675746901i)|02\rangle \\ & + (-0,16334324864775843 - 0,07636803935461682i)|10\rangle \\ & + 0,29293441125779784|11\rangle \\ & + (-0,2654097815652861 - 0,13526431849558776i)|12\rangle \\ & + (-0,12961455709177175 + 0,004408040675746901i)|20\rangle \\ & + (-0,2654097815652861 + 0,13526431849558776i)|21\rangle \\ & + 0,4928510702990506|22\rangle. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Los POVMs de  $A$  son:

$$A[1][1] = \begin{bmatrix} 0,5075 & 0,0772 - 0,2345i & 0,4328 - 0,0409i \\ 0,0772 + 0,2345i & 0,1201 & 0,0847 + 0,1938i \\ 0,4328 + 0,0409i & 0,0847 - 0,1938i & 0,3725 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

$$A[1][2] = \begin{bmatrix} 0,1598 & 0,1113 + 0,3272i & -0,0408 - 0,1147i \\ 0,1113 - 0,3272i & 0,7474 & -0,2634 + 0,0036i \\ -0,0408 + 0,1147i & -0,2634 - 0,0036i & 0,0928 \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

$$A[2][1] = \begin{bmatrix} 0,0837 & 0,1725 - 0,0918i & -0,0474 + 0,1904i \\ 0,1725 + 0,0918i & 0,4563 & -0,3066 + 0,3405i \\ -0,0474 - 0,1904i & -0,3066 - 0,3405i & 0,4600 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

$$A[2][2] = \begin{bmatrix} 0,3387 & -0,1613 + 0,3464i & 0,1838 + 0,2101i \\ -0,1613 - 0,3464i & 0,4312 & 0,1274 - 0,2881i \\ 0,1838 - 0,2101i & 0,1274 + 0,2881i & 0,2301 \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

$$B[1][1] = \begin{bmatrix} 0,2987 & -0,2444 - 0,1084i & -0,0949 - 0,3592i \\ -0,2444 + 0,1084i & 0,2393 & 0,2079 + 0,2595i \\ -0,0949 + 0,3592i & 0,2079 - 0,2595i & 0,4619 \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

$$B[1][2] = \begin{bmatrix} 0,0634 & 0,1751 - 0,1108i & -0,1280 + 0,0008i \\ 0,1751 + 0,1108i & 0,6779 & -0,3553 - 0,2218i \\ -0,1280 - 0,0008i & -0,3553 + 0,2218i & 0,2588 \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

$$B[2][1] = \begin{bmatrix} 0,3018 & 0,0070 - 0,4346i & 0,1347 + 0,0604i \\ 0,0070 + 0,4346i & 0,6260 & -0,0839 + 0,1954i \\ 0,1347 - 0,0604i & -0,0839 - 0,1954i & 0,0722 \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

$$B[2][2] = \begin{bmatrix} 0,2510 & 0,1080 + 0,2227i & 0,2598 - 0,2434i \\ 0,1080 - 0,2227i & 0,2441 & -0,1042 - 0,3352i \\ 0,2598 + 0,2434i & -0,1042 + 0,3352i & 0,5049 \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

El método seesaw con dimensión 3 ha dado la misma  $W_Q$  que el programa Moment en orden 2.  
En este juego se tiene:

$$S = 0,039537209929330394, \quad W_L = \frac{3}{4}, \quad W_Q = 0,8641.$$

## 9 Conclusiones

---

Se ha cumplido el objetivo principal del trabajo, que era encontrar los mejores juegos no locales con simetría respecto a las permutaciones de cada escenario con reglas binarias. Por un lado, se han hallado dos juegos ampliamente conocidos y estudiados: el CHSH para el escenario  $(2, 2, 2, 2)$  y el de Braunstein-Caves para el escenario  $(3, 3, 2, 2)$ . Además, no hay literatura que indique que estos juegos sean los mejores de sus respectivos escenarios, por lo que estos son resultados nuevos.

Por otro lado, para el escenario  $(2, 2, 3, 3)$  se ha encontrado un juego que no había sido estudiado anteriormente, lo que abre la puerta a investigar sus propiedades.

Para los escenarios  $(2, 2, 3, 3)$  y  $(3, 3, 2, 2)$ , el programa ha dado cientos de miles de juegos con entropía nula. Esto se debe a que la jerarquía NPA de orden 1 sobreestima la cota superior de muchos juegos. Este puede ser un resultado interesante para el estudio de la jerarquía NPA.

Durante todo el trabajo se ha incidido en la condición de simetría, que se aplica debido a una intuición parcialmente basada en la experiencia, pero no demostrada formalmente. Existen infinitos casos en los que se rompe un patrón que se da por asumido. Con esta suposición se pierden la mayoría de los juegos, pero es necesaria para hacer el trabajo. Esto no hace que los resultados sean menos válidos; simplemente pertenecen a una categoría más restringida.

Hay varias vías para poder continuar con este trabajo aumentando el número de preguntas y respuestas. Estas pueden dividirse en dos categorías: optimización y eliminación de juegos.

## Optimización

---

- Optimizar el programa para que no cree juegos redundantes: Como las cotas se evalúan por cajas, todos los juegos que tengan las mismas cajas pero permutadas son realmente el mismo juego. Eliminar estos juegos redundantes aumentaría sensiblemente la velocidad del programa sin añadir restricciones adicionales [25].
- Optimizar el código de otras maneras y adaptarlo para que pueda trabajar con ordenadores de más hilos (optimización paralela).

## Reducción de juegos

---

- Tratar de encontrar matemáticamente alguna condición que tengan los juegos de mayor entropía relativa: esto podría ser la condición de simetría incluida en este trabajo u otra más o menos restrictiva. Esto permitiría centrar la investigación en un grupo de juegos más pequeño, con la certeza de no estar perdiendo ninguno relevante.
- Crear nuevas categorías con condiciones aún más restrictivas que eliminen más juegos: De esta manera, se podría evaluar un mayor número de preguntas y respuestas. Los tres resultados obtenidos tienen una condición adicional, y es que las cajas fuera de la diagonal, además de ser simétricas entre sí, tienen simetría interna. Estas cajas se presentan de la siguiente forma:

$$\left( \begin{array}{c|ccccc} A_1 & B_{1,2} & B_{1,3} & \cdots & B_{1,n} \\ \hline B_{2,1} & A_2 & B_{2,3} & \cdots & B_{2,n} \\ \hline B_{3,1} & B_{3,2} & A_3 & \cdots & B_{3,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{n,1} & B_{n,2} & B_{n,3} & \cdots & A_n \end{array} \right)$$

Con las condiciones:

$$A_i = A_i^T \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$B_i = B_i^T \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$B_{i,j} = B_{j,i} \quad \text{para } i \neq j.$$

Esto disminuiría la cantidad de bits eliminando  $\frac{k^2 - (k-1)^2}{2}$  de los  $\frac{(n-1)^2}{2}$  elementos fuera de la diagonal.

# Bibliografía

---

- [1] M. Araújo, F. Hirsch y M. T. Quintino, “Bell nonlocality with a single shot”, *Quantum* **4**, 353 (2020).
- [2] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 2nd (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [3] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777-780 (1935).
- [4] D. Bohm e Y. Aharonov, “Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky”, *Phys. Rev.* **108**, 1070-1076 (1957).
- [5] N. Bohr, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **48**, 696-702 (1935).
- [6] N. Harrigan y R. W. Spekkens, “Einstein, Incompleteness, and the Epistemic View of Quantum States”, *Foundations of Physics* **40**, 125–157 (2010).
- [7] M. Kumar, *Quantum: Einstein, Bohr y el gran debate sobre la naturaleza de la realidad* (Kairos, Barcelona, 2011).
- [8] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777-780 (1935).
- [9] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony y R. A. Holt, “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”, *Physical Review Letters* **23**, 880-884 (1969).
- [10] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani y S. Wehner, “Bell nonlocality”, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 419-478 (2014).
- [11] M. Navascués, S. Pironio y A. Acín, “A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations”, *New Journal of Physics* **10**, 073013 (2008).
- [12] A. J. P. Garner y M. Araújo, *Introducing Moment: A toolkit for semi-definite programming with moment matrices*, 2024, arXiv:2406.15559 [quant-ph].
- [13] D. Collins y N. Gisin, “A relevant two qubit Bell inequality inequivalent to the CHSH inequality”, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37**, 1775–1787 (2004).
- [14] W. Mulzer, “Five Proofs of Chernoff’s Bound with Applications”, *Bull. EATCS* **124** (2018).
- [15] S. J. Freedman y J. F. Clauser, “Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938-941 (1972).
- [16] A. Aspect, J. Dalibard y G. Roger, “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804-1807 (1982).
- [17] M. Giustina et al., “Significant-Loophole-Free Test of Bell’s Theorem with Entangled Photons”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250401 (2015).
- [18] L. K. Shalm et al., “Strong Loophole-Free Test of Local Realism”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250402 (2015).
- [19] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dréau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok, J. Ruitenberg, R. F. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellán et al., “Experimental loophole-free violation of a Bell inequality using entangled electron spins separated by 1.3 km”, *Nature* **526**, 682-686 (2015).
- [20] D. Rauch et al., “Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars”, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 080403 (2018).
- [21] “Challenging local realism with human choices”, *Nature* **557**, 212–216 (2018).
- [22] M. Janota, A. Morgado, J. F. Santos y V. M. Manquinho, “The Seesaw Algorithm: Function Optimization Using Implicit Hitting Sets”, en *CP* (2021), 31:1-31:16.
- [23] S. L. Braunstein y C. M. Caves, “Wringing out better Bell inequalities”, *Annals of Physics* **202**, 22-56 (1990).

- [24] R. Cleve, P. Hoyer, B. Toner y J. Watrous, *Consequences and Limits of Nonlocal Strategies*, 2010, arXiv:quant-ph/0404076 [quant-ph].
- [25] D. Rosset, J.-D. Bancal y N. Gisin, “Classifying 50 years of Bell inequalities”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47**, 424022 (2014).

# Fuentes de imágenes

---

- [1] Nobel Prize, “Image 1 Title or Description,” <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/popular-information/>, Accedido: 2024-11-17.
- [2] Nobel Prize, “Image 2 Title or Description,” <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/popular-information/>, Accedido: 2024-11-17.
- [3] Nobel Prize, “Image 3 Title or Description,” <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/popular-information/>, Accedido: 2024-11-17.