



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

**OBJETOS EXTENSOS EN TEORÍA CLÁSICA Y CUÁNTICA DE
CAMPOS**

Autora: Beatriz Gómez López

Tutor: J. M. Muñoz Castañeda

2025

Índice general

Resumen	III
Abstract	III
Introducción.	1
1. Teorías en una dimensión.	3
1.1. Teorías clásicas.	3
1.1.1. Modelo $\lambda\phi^4$	3
1.1.2. Modelo Sine-Gordon.	6
1.1.3. Índices topológicos.	9
1.2. Introducción de las fluctuaciones cuánticas.	10
1.2.1. Acción de las fluctuaciones.	11
1.2.2. Modelo $\lambda\phi^4$	13
1.2.3. Modelo Sine-Gordon.	13
1.3. Corrección cuántica a la masa al orden de un lazo.	14
1.4. Corrección al orden de un lazo. Funciones zeta espectrales.	16
1.4.1. Modelo $\lambda\phi^4$	17
1.4.2. Modelo Sine-Gordon.	18
1.5. Teorema de Derrick.	19
2. Teorías en dos dimensiones.	21
2.1. Teorías gauge: caso abeliano y caso no abeliano.	21
2.1.1. Caso abeliano: U(1).	23
2.1.2. Caso no abeliano: SU(2).	23
2.2. El modelo de Higgs abeliano en 2+1 dimensiones.	25
2.2.1. Caso abeliano: U(1).	25
2.2.2. Carga topológica.	26
2.2.3. Ecuaciones de Bogomolnyi.	27
2.2.4. Soluciones de las ecuaciones de Bogomolnyi.	29
2.3. Cuantización.	32
3. Caso de tres dimensiones: el monopol.	34
3.1. Estudio clásico.	34
3.2. Problema de la cuantización.	37
4. Conclusiones.	39
A. Demostración $\cos [4 \arctan(e^x)] = 1 - \frac{2}{\cosh^2(x)}$.	40
B. Cuantización del campo escalar libre.	41

Índice de figuras

1.1.	Densidad de la energía para soluciones estáticas en función de la posición y distintos valores de la constante para el modelo $\lambda\phi^4$	5
1.2.	Densidad de energía para soluciones estáticas en función de la posición y distintos valores de la constante para el modelo Sine-Gordon.	8
1.3.	$V(x)$ del modelo $\lambda\phi^4$	13
1.4.	$V(x)$ del modelo Sine-Gordon.	14
2.1.	$f(r)$ en función de r para distintos n . Imagen tomada de [2].	31
2.2.	$\epsilon(r)$ en función de r para distintos n . Imagen tomada de [2].	32
2.3.	$\epsilon(r)$ en función de r para $n=1$, $n=2$, $n=3$ y $n=4$. Imagen tomada de [2].	32

Resumen

Se analizan dos teorías en 1+1 dimensiones para introducir el concepto de defecto topológico: el modelo $\lambda\phi^4$ y el modelo de Sine-Gordon. En teorías de 1+1 dimensiones, estos defectos topológicos se conocen bajo el nombre de kinks. Se examinará su importancia y su estabilidad, introduciendo las fluctuaciones cuánticas en torno a los vacíos clásicos. También se calculará su energía sustituyendo los campos por osciladores armónicos desacoplados y mediante el uso de funciones zeta espectrales.

Además, como consecuencia del Teorema de Derrick, se utilizan teorías gauge para calcular estos defectos topológicos en más dimensiones. En 2+1 dimensiones se les conoce con el nombre de vórtices y se comprobará que estos no tienen solución analítica. En 3+1 dimensiones es el monopolo magnético. De este último, se discutirán los motivos que impulsan la esperanza de poder observar monopolos magnéticos en la naturaleza y los experimentos llevados a cabo hoy en día.

Abstract

Two theories in 1+1 dimensions are analyzed to introduce the concept of topological defect: the $\lambda\phi^4$ model and the Sine-Gordon model. In 1+1 dimensional theories, these topological defects are known as kinks. Their importance and stability will be examined by introducing quantum fluctuations around the classical vacua. Their energy will also be calculated by replacing the fields with decoupled harmonic oscillators and by using spectral zeta functions.

Furthermore, as a consequence of Derrick's Theorem, gauge theories are used to calculate these topological defects in higher dimensions. In 2+1 dimensions, they are known as vortices, and it will be shown that they have no analytical solution. In 3+1 dimensions, the topological defect is the magnetic monopole. For the latter, the reasons that support the hope of observing magnetic monopoles in nature and the experiments carried out today will be discussed.

Introducción.

En su aspecto más fundamental para la física, la teoría clásica de campos describe las interacciones fundamentales de la naturaleza. Hasta bien entrado el siglo XX, las dos teorías fundamentales eran la electrodinámica clásica y la gravedad (newtoniana y, posteriormente, einsteniana). Tras el establecimiento de la teoría cuántica, los trabajos seminales de Schwinger ([24]), Tomonaga ([28]) y Feynman ([11]) permitieron construir una teoría cuántica del campo electromagnético y su interacción con los electrones relativistas (descritos a través de la teoría de Dirac (ver [7])). Estos enormes progresos conllevaron la necesidad de la reinterpretación de las interacciones fundamentales a distancia: la interacción electromagnética entre dos partículas cargadas ocurre mediante un intercambio de fotones entre ambas. Así, el fotón, entendido como el cuanto fundamental del campo electromagnético cuántico, juega el rol de mediador de las interacciones electromagnéticas. Posteriormente, tras el descubrimiento de las otras interacciones fundamentales (débil y fuerte), pudo comprobarse que todas podían, en analogía a la electrodinámica cuántica, describirse mediante teorías de gauge con sus respectivas partículas mediadoras (bosones W y Z para la interacción débil y gluones para la fuerte).

Los solitones son soluciones propagantes de ecuaciones de onda no lineales atenuadas. Se encuentran en teorías como el modelo de Korteweg de Vries o los modelos clásicos en 1+1 dimensiones espacio-temporales expuestos en esta memoria, que son el modelo $\lambda\phi^4$ y el modelo Sine-Gordon (ver [8]). Estas dos últimas teorías tienen mayor importancia puesto que los solitones son defectos topológicos llamados kinks, al igual que en modelos de 2+1 dimensiones donde aparece el vórtice o en modelos de 3+1 dimensiones, el monopolio magnético. Un defecto topológico es una configuración del campo que no puede decaer sin romper alguna simetría o aportarle al sistema una energía infinita, que es lo que se conoce como la ruptura espontánea de simetría, también expuesta a lo largo de la memoria.

A pesar de ser los kinks, los vórtices y los monopolos todos defectos topológicos, no es válido el mismo desarrollo para los 3 casos puesto que, al tratar teorías de más de 1+1 dimensiones espacio-temporales es necesario introducir teorías gauge, como consecuencia del Teorema de Derrick.

Un campo cuántico surge de la cuantización de los campos clásicos a través de la cuantización canónica. Esto consiste en sustituir los campos por una colectividad gran canónica de osciladores armónicos desacoplados, cada uno de los cuales representa una colectividad de partículas con mismo momento y energía. La cuantización canónica implica promocionar las magnitudes clásicas a operadores en el espacio de Hilbert que, además, deben satisfacer las respectivas relaciones de conmutación establecidas en la mecánica cuántica. La cuantización de un campo clásico conduce a la aparición de partículas asociadas a dicho campo, como por ejemplo el fotón en el campo electromagnético o el electrón en el campo de Dirac.

Se encuentran campos cuánticos acoplados a campos clásicos en todas las ramas de la física:

física nuclear, física de partículas, física de la materia condensada, electrodinámica, gravedad... y también en el estudio de las pequeñas fluctuaciones alrededor de vacíos clásicos, lo que da información de si un vacío es estable o no (pudiendo en este caso producir una generación de pares partícula-antipartícula en cascada que da lugar al efecto Schwinger (véase [25])) y de si pueden aparecer fuerzas, como es el caso del efecto Casimir ([4]), en el que, dadas dos placas dieléctricas y debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío del campo electromagnético, aparece una fuerza atractiva entre ambas placas. Debido a esto, la teoría cuántica de campos resulta fundamental ya no solo en física teórica, si no en el resto de áreas.

Finalmente, cabe destacar el estudio del monopolio magnético. Es importante porque no se han observado monopolos en la naturaleza pero hay evidencias teóricas de que existen como la cuantización de la carga eléctrica (como concluyó Dirac en 1931, ver [20]) o los monopolos de 't Hooft ([14]) y Polyakov ([22]), aunque sean inestables bajo ciertas condiciones de momento angular desde un punto de vista clásico. Además, la condición de cuantización de Dirac surge de acoplar el campo cuántico asociado a una partícula como el electrón al campo clásico generado por un hipotético monopolio magnético.

El trabajo está estructurado en 3 capítulos bien diferenciados. En el primer capítulo, se estudiarán las teorías de campos en dimensión 1+1, en cuyos casos pueden tenerse soluciones clásicas topológicas sin necesidad de introducir un campo gauge. Seguidamente, el capítulo 2 está dedicado al estudio de la teoría más relevante con soluciones topológicas en dimensión 2+1: el modelo de Higgs abeliano, y los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen. Finalmente el capítulo 3 está dedicado al estudio clásico de la solución de monopolio descubierta por 't Hooft y Polyakov.

A lo largo de toda la memoria, se tomará un sistema de unidades en el cual $c = 1$ y $\hbar \neq 1$ con el objetivo de estudiar las correcciones cuánticas al orden de un lazo de magnitudes clásicas. Con esta elección de sistema de unidades se tiene $L = T \neq M$ por lo que únicamente habrá unidades de longitud (o tiempo) y masa. De igual forma, a lo largo de todo este trabajo se tomará para el espacio-tiempo el tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, \dots, -)$, como es usual en el ámbito de la teoría cuántica de campos.

Capítulo 1

Teorías en una dimensión.

1.1. Teorías clásicas.

1.1.1. Modelo $\lambda\phi^4$.

En teoría de campos escalares reales, la densidad lagrangiana del modelo $\lambda\phi^4$ es la siguiente:

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_\mu\psi)^2 - \frac{\lambda}{8}(\psi^2 - v^2)^2 \quad (1.1.1)$$

donde $\lambda > 0$ y $v \in \mathbb{R}$. El término de masa del campo en términos de las constantes es $-\frac{1}{2}\lambda v^2$.

Análisis dimensional. Las dimensiones de la acción son $[E]T$ que, en caso de tomar $c = 1$ y $\hbar \neq 1$, estas quedan como MT . Al tener el espacio-tiempo de dimensión 1+1, las dimensiones de la densidad lagrangiana son: $[\mathcal{L}] = ML^{-1}$.

Partiendo de esto, es sencillo deducir las dimensiones de los elementos que componen $\mathcal{L}$:

- **Dimensiones de los campos.** De la parte cinética de la densidad lagrangiana, se deduce que: $[\tilde{\partial}_t\psi]^2 = [\psi]^2 L^{-2} = [\mathcal{L}] = ML^{-1}$.
De este razonamiento se sigue que: $[\psi] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$.
- **Dimensiones de v .** Sin más que observar la densidad lagrangiana, se comprueba que las dimensiones de v son las mismas que las de ψ : $[v] = [\psi] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$
- **Dimensiones de λ .** Basta con darse cuenta de que $[\mathcal{L}] = [\lambda][\psi]^4$. Por tanto, las dimensiones de λ son: $[\lambda] = M^{-1} L^{-3}$

En virtud de lo anterior, es fácil ver que:

$$M = [v^3 \lambda^{\frac{1}{2}}]$$

$$L = [v \lambda^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

y, por tanto, las combinaciones entre corchetes anteriores definen una escala de energía y longitud típicas asociadas a la teoría de campos.

Para poder realizar desarrollos perturbativos, es necesario escribir la densidad lagrangiana en términos de cantidades sin dimensiones. Para ello, se expresan las variables con dimensiones en otras sin dimensiones,

$$y^\mu = 2(\lambda^{\frac{1}{2}}v)^{-1}x^\mu$$

$$\psi = v\phi$$

derivando, se obtiene que:

$$dy^\mu = 2(\lambda^{\frac{1}{2}}v)^{-1}dx^\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu} = \frac{\lambda^{1/2}v}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Introduciendo estos cambios, se llega a la expresión de la densidad lagrangiana en términos sin dimensiones:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{v^4\lambda}{4} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 \right] \quad (1.1.2)$$

En esta lagrangiana, la constante de acoplamiento sin dimensiones es 1. Ahora, la expresión de la acción y de la energía cambiarán, escribiéndose como la integral de la densidad lagrangiana descrita en la Ecuación 1.1.2 sobre las variables espacio-temporales sin dimensiones:

$$S = v^2 \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 \right] \quad (1.1.3)$$

De igual forma, para el funcional de la energía:

$$E = \frac{v^3\lambda^{1/2}}{2} \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 \right] \quad (1.1.4)$$

siendo la parte entre corchetes la densidad de energía $\mathcal{E}$.

Ecuaciones de campo. La densidad lagrangiana adimensional (omitiendo constantes) es la siguiente:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2 \quad (1.1.5)$$

Partiendo de la acción, se comprueba fácilmente que la energía del campo viene dada por la expresión:

$$E = \frac{1}{2} \int dx [(\partial_t\phi)^2 + (\partial\phi)^2 + (\phi^2 - 1)^2] = \int dx \mathcal{E} \quad (1.1.6)$$

siendo $\mathcal{E}$ la densidad de energía y ∂ la derivada sobre la componente espacial x . Se observa que el primer término es el correspondiente a la energía cinética y el resto a la energía potencial:

$$T = \frac{1}{2} \int dx (\partial_t\phi)^2 \quad (1.1.7)$$

$$V = \frac{1}{2} \int [(\partial\phi)^2 + (\phi^2 - 1)^2] \quad (1.1.8)$$

La ecuación de campo correspondiente a la densidad lagrangiana descrita en la Ecuación 1.1.5 se obtienen sin más que aplicar Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + 2\phi(\phi^2 - 1) = 0 \quad (1.1.9)$$

En el caso de 1+1 dimensiones, resulta:

$$\partial_t^2\phi - \partial^2\phi + 2\phi(\phi^2 - 1) = 0$$

Soluciones estáticas. Para el caso estático $\partial_t \phi = 0$, por lo que la ecuación del campo es:

$$\partial^2 \phi + 2\phi(\phi^2 - 1) = 0 \quad (1.1.10)$$

La solución de esta ecuación diferencial es la función elíptica de Jacobi $\text{sn}(x)$ dependiente de constantes de integración. Esta función es oscilatoria, pero para el caso estático eso no puede suceder. Observando el comportamiento de la función solución, se observa que, para la mayor parte de los valores de su argumento, la función elíptica de Jacobi $\text{sn}(x)$ tiene un comportamiento oscilatorio excepto si el argumento es igual a 1, lo que permite hallar el valor de una de las constantes de integración, que es la unidad. La solución es:

$$\phi_{\pm} = \pm \tanh(x - C)$$

Como las soluciones estáticas son invariantes bajo traslaciones, puede asumirse, sin pérdida de generalidad, que la segunda constante de integración es nula. La solución final es:

$$\phi_{\pm} = \pm \tanh(x) \quad (1.1.11)$$

De esta forma y tomando el valor positivo de la solución, se obtiene la fórmula para los lumps (también llamados kinks) de la teoría $\lambda\phi^4$. Tomando el signo negativo de la solución, se obtienen los antikinks.

Representación de la densidad de energía. Las soluciones estáticas no tienen energía cinética, por lo que la energía será únicamente potencial. La densidad de energía para este caso es:

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \partial \phi^2 + \frac{1}{2} (\phi - 1)^2$$

Teniendo en cuenta la solución obtenida en 1.1.11:

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \text{sech}(x - C)^2 + \frac{1}{2} [\tanh(x - C)^2 - 1]^2 \quad (1.1.12)$$

Representando la densidad de energía de las soluciones estáticas en función de la posición, se obtiene:

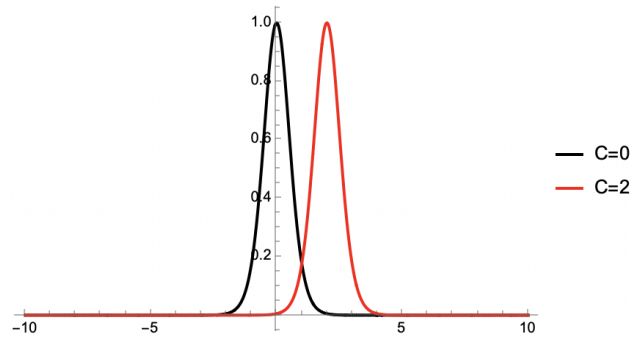


Figura 1.1: Densidad de la energía para soluciones estáticas en función de la posición y distintos valores de la constante para el modelo $\lambda\phi^4$.

De la Figura 1.1, se observa que la densidad de energía no está concentrada en un punto, si no que es similar a una partícula clásica extensa.

En el caso de no tomar $C = 0$ y que C sea un valor real arbitrario, se produce una traslación en la representación de la densidad de energía del kink, como queda ilustrado en la Figura 1.1.

Además, también puede tomarse $x = x - vt$ donde v es constante y t es el tiempo. La representación de la densidad de energía se interpretaría como una partícula clásica extensa desplazándose en el tiempo, es decir, el kink se desplazaría a velocidad constante.

1.1.2. Modelo Sine-Gordon.

La densidad lagrangiana para el modelo de Sine-Gordon tiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_\mu \psi)^2 - \frac{m^4}{\lambda} \left[1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \psi \right) \right] \quad (1.1.13)$$

donde $\lambda > 0$ y $m > 0$. El término de masas en este modelo es m .

Análisis dimensional. Una vez hecho el análisis dimensiones de la teoría $\lambda\phi^4$ es muy sencillo realizarlo para este modelo. Al no cambiar las dimensiones espacio-temporales, las dimensiones de la densidad lagrangiana y del campo son las mismas que para el otro modelo: $[\mathcal{L}] = ML^{-1}$ y $[\psi] = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$.

Para poder deducir cuáles son las dimensiones de m y λ , es necesario ver que: $[m]^4[\lambda]^{-1} = [\mathcal{L}]$ y $[\lambda]^{1/2}[m]^{-1} = [\psi]$.

Teniendo esto en cuenta, las dimensiones de m y de λ son: $[m] = L^{-1}$ y $[\lambda] = M^{-1}L^{-3}$.

Para adimensionalizar fácilmente, imitando lo que se ha hecho con el modelo $\lambda\phi^4$, se obtienen M y L en términos de las constantes m y λ :

$$L = [m]^{-1}$$

$$M = [\lambda]^{-1}[m]^3$$

En este caso, para adimensionalizar la densidad lagrangiana, se realizan estos cambios:

$$y^\mu = m^{-1} x^\mu$$

$$\psi = \frac{m}{\lambda} \phi$$

Igual que para el modelo $\lambda\phi^4$, derivando se obtienen los elementos de volumen.

Introduciendo estos cambios, se llega a la expresión de la densidad lagrangiana en términos sin dimensiones:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - (1 - \cos(\phi)) \right] \quad (1.1.14)$$

Ahora, la expresión de la acción y de la energía cambiarán, escribiéndose como la integral de la lagrangiana 1.1.14 sobre las variables espacio-temporales sin dimensiones:

$$S = \frac{m^2}{\lambda} \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - (1 - \cos(\phi)) \right] \quad (1.1.15)$$

De igual forma, para el funcional de la energía:

$$E = \frac{m^3}{\lambda} \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + (1 - \cos(\phi)) \right] \quad (1.1.16)$$

siendo de nuevo la parte entre corchetes la densidad de energía $\mathcal{E}$. El primer término es el correspondiente a la energía cinética y el resto a la energía potencial:

$$T = \frac{1}{2} \int dx (\partial_t \phi)^2 \quad (1.1.17)$$

$$V = \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + (1 - \cos(\phi)) \right] \quad (1.1.18)$$

donde ∂ vuelve a ser la derivada sobre la componente espacial x . Haciendo una aproximación a ángulos pequeños a segundo orden y simplificando, la expresión que se obtiene es:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2 \cdot 24}(\phi^2 - 6)^2 - \frac{3}{4}$$

Esta expresión, salvo constantes, coincide con la del modelo $\lambda\phi^4$.

Ecuaciones de campo. Las ecuaciones de campo a que da lugar la densidad lagrangiana anterior son:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \sin(\phi) = 0 \quad (1.1.19)$$

En el caso de 1+1 dimensiones, resulta:

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi + \sin(\phi) = 0$$

Soluciones estáticas. Para el caso estático $\partial_t\phi = 0$, por lo que la ecuación del campo es:

$$\partial_x^2\phi - \sin(\phi) = 0 \quad (1.1.20)$$

En este caso, la energía potencial (salvo constantes) corresponde a:

$$U(\phi) = 1 - \cos(\phi)$$

Para la resolución de esta ecuación se sigue el libro [23].

El modelo Sine-Gordon tiene más de un nivel fundamental de la energía potencial, pues $U(\phi)$ tiene más de un cero. En estos casos, siempre existirán soluciones no triviales independientes del tiempo que tengan una energía finita porque, de no ser así, la integral de la energía no converge. Para estas soluciones, ϕ se desplaza monótonamente desde un cero de $U(2n\pi)$ en $x \rightarrow -\infty$ a otro cuando $x \rightarrow \infty$. Si ese desplazamiento monótono de ϕ es creciente, se le conoce por el nombre de ‘lumps’ mientras que, si es decreciente, por ‘antilumps’. El número de ceros que haya entre los dos, corresponden al número de kinks que se tendrán en ese espacio topológico. Por este motivo, pueden hallarse las soluciones del problema haciendo que la energía de las partículas sea nula, lo que corresponderá a hallar las ecuaciones del campo. De esta forma, para hallar las soluciones estáticas:

$$\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - U(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + (\cos(\phi) - 1) = 0$$

Las condiciones de frontera exigen que las trayectorias sean de energía nula en $\pm\infty$. La energía se puede escribir como lo siguiente, de donde se deducen los solitones y antisolitones:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \sqrt{U(\phi)} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \sqrt{U(\phi)} \right) dx$$

Las ecuaciones para los solitones y antisolitones se obtienen igualando cada paréntesis a cero, donde, integrando, se obtiene la expresión para hallar la dependencia de ϕ con x :

$$x - x_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(\phi))}}$$

Esta integral puede simplificarse aún más si se usa la siguiente relación trigonométrica:

$$\sin^2(\phi) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\phi)]$$

Por tanto:

$$x - x_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{2 \sin(\phi/2)}$$

Resolviendo la integral y despejando ϕ se obtiene, para valores positivos, los lumps (o solitones para esta teoría) y, para los valores negativos, los antilumps (o antisolitones):

$$\phi(x) = \pm 4 \arctan[\exp(x - x_0)] \quad (1.1.21)$$

Este razonamiento podría haberse usado para resolver la teoría $\lambda\phi^4$ y se habría obtenido el mismo resultado. El hecho de tener una solución positiva y otra negativa se debe, en ambas teorías, a la simetría $\phi \leftrightarrow -\phi$.

Representación de la densidad de energía. Para todas aquellas configuraciones en las que la energía es finita, como es el caso de las soluciones estáticas, estas se pueden dividir en un número infinito de sectores topológicos caracterizados por los números enteros que hacen que la energía potencial se anule en más o menos infinito.

La expresión de la densidad de energía para el modelo Sine-Gordon es:

$$\mathcal{E}(x) = 2 \operatorname{sech}^2(x - x_0) + 1 - \cos(4 \arctan[\exp(x - x_0)]) \quad (1.1.22)$$

Representando la densidad de energía en función de x :

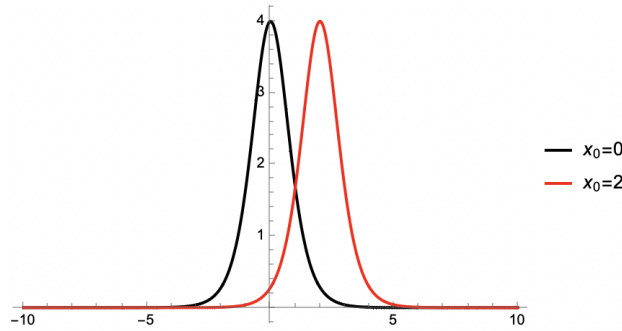


Figura 1.2: Densidad de energía para soluciones estáticas en función de la posición y distintos valores de la constante para el modelo Sine-Gordon.

En la Figura 1.2 se observa la representación de la densidad de energía para dos valores distintos de la constante de integración. Como en el modelo $\lambda\phi^4$, la energía no está concentrada en un punto, si no que es como la energía de partículas clásicas extensas.

De la misma forma que se observa en el modelo $\lambda\phi^4$, el cambio del valor de la constante x_0 únicamente produce un desplazamiento en la representación de la densidad de energía. La interpretación es la misma que para el modelo $\lambda\phi^4$.

1.1.3. Índices topológicos.

Es posible definir un índice topológico que se conserva a lo largo del tiempo y que, a diferencia de otras leyes de conservación como la de la energía, no es consecuencia de una simetría, si no que se debe a que, al tener una degeneración en el mínimo de energía para soluciones constantes (variedad de vacío, dada por el conjunto de los posibles mínimos), el espacio de configuraciones de la teoría clásica (dado por el conjunto de posibles campos con energía finita) resulta no ser un espacio conexo. Puede demostrarse que el número de componentes conexas del espacio de configuraciones está determinado por el primer grupo de homotopía de la variedad de vacío (ver [5]). Para discutir el significado y la importancia de estos índices, siguiendo [23], se toma un campo escalar $\phi(x, t)$ en 1+1 dimensiones y un potencial $U(\phi)$ con un número discreto de mínimos absolutos degenerados donde $U(\phi)$ se anula.

El estudio se centra en las soluciones no singulares de energía finita, que es el caso de los solitones. Estos campos deben tender a un mínimo de $U(\phi)$ en cualquier punto del infinito espacial, es decir, cuando $x \rightarrow \pm\infty$, para que la energía sea finita.

Se realiza el razonamiento para $x \rightarrow \infty$ pero, para el caso $x \rightarrow -\infty$ es análogo, pudiendo ser distinto el valor del campo en ambos límites. En un instante de tiempo t_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, t_0) \equiv \phi(\infty, t_0) = \phi_1 \quad (1.1.23)$$

siendo ϕ_1 un mínimo de $U(\phi)$. En cualquier otro instante de tiempo, $\phi(\infty, t)$ es una función continua en t y, como la energía se conserva y es finita, $\phi(\infty, t)$ es un mínimo de $U(\phi)$ para todo t . $\phi(\infty, t)$ se mantiene estacionario en ϕ_1 puesto que, como el campo en el infinito varía de forma continua con t , no se puede realizar un salto desde ϕ_1 hacia otro mínimo discreto del potencial. En definitiva, el valor del campo en el límite $x \rightarrow \infty$ es independiente del tiempo y un mínimo de $U(\phi)$.

Debido a esto, se puede dividir el espacio de todas las soluciones no singulares de energía finita en sectores no conexos, caracterizados por dos índices que son los valores del campo en los límites $x \rightarrow \pm\infty$. Como los sectores no son conexos, los campos de uno de los sectores no pueden transformarse en los de otro sector sin que dejen de tener energía finita. En el caso especial en el que $U(\phi)$ únicamente tenga un mínimo, solo existirá un valor posible e igual para $\phi(\infty)$ y para $\phi(-\infty)$, por lo que únicamente existiría un sector.

Como ejemplo, se toma el modelo $\lambda\phi^4$ por simplicidad. También sería posible aplicarlo al modelo Sine-Gordon pero, a diferencia del modelo $\lambda\phi^4$ que solo tiene dos mínimos degenerados del potencial, el modelo Sine-Gordon tiene infinitos mínimos. Como ya se ha mencionado, el modelo $\lambda\phi^4$ cuenta con dos mínimos degenerados en el potencial, que son $\phi = \pm 1$ (en el caso de tomar las ecuaciones adimensionalizadas). Existen cuatro sectores topológicos cuyos índices son $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$ y $(1, 1)$, que representan los valores de los campos en el infinito espacial. Los dos últimos sectores corresponden a la variedad de vacío, las soluciones constantes.

Se define la carga topológica como:

$$Q = \phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty) \quad (1.1.24)$$

que tiene una corriente asociada:

$$k^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (1.1.25)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es el tensor antisimétrico. Se cumple:

$$\partial_\mu k^\mu = 0 \quad (1.1.26)$$

y también puede darse una relación entre la carga y la corriente topológicas:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx k_0 \quad (1.1.27)$$

La definición de la carga topológica y de su corriente asociada tiene importancia en teorías gauge de más dimensiones por su relación con el flujo magnético, y es el análogo de los índices topológicos. Para definir un sector topológico, es necesario conocer los valores del campo en los infinitos espaciales pero, si las cantidades físicas únicamente dependen de diferencias de ϕ y no de sus valores absolutos, la carga topológica es el único índice topológico relevante.

El término ‘topológico’ es usado en ondas solitarias con $Q \neq 0$, que es el caso de los kinks y los antikinks. Si las ondas tienen $Q = 0$, entonces son ‘no topológicas’, como es el caso de las soluciones triviales. Para un campo escalar en 1+1 dimensiones, que es el caso estudiado hasta ahora, las soluciones estáticas no triviales son necesariamente topológicas. Es decir, aparecen soluciones topológicas cuando existe degeneración en el vacío clásico y estas unen asintóticamente dos vacíos. Como se ha mencionado antes, el espacio de configuraciones tendrá diferentes componentes conexas donde $E < \infty$.

En muchos casos, estos índices están relacionados con la ruptura de alguna simetría (cuando exista degeneración en el vacío clásico). Tomando el caso en el que hay sectores topológicos no triviales (es decir, necesariamente hay dos o más mínimos degenerados), permanece invariante el conjunto completo de mínimos bajo una transformación de simetría, pero cada mínimo no tiene por qué permanecer invariante y, además, cada uno está relacionado con las propiedades topológicas de la variedad de vacío. Un ejemplo de ello es el cambio $\phi \longleftrightarrow -\phi$, donde $U(\phi)$ permanece invariante pero los mínimos se intercambian entre ellos. Esto se conoce como la ruptura espontánea de simetría. En el caso en el que la teoría no posea esta ruptura espontánea de simetría, el espacio de configuraciones con $E < \infty$ únicamente tendrá una componente.

1.2. Introducción de las fluctuaciones cuánticas.

Para realizar un estudio de las fluctuaciones alrededor de soluciones clásicas, se parte de la acción:

$$S(\psi) = \int d^{D+1}\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 - U(\psi) \right]$$

La ecuación de las fluctuaciones se halla haciendo el desarrollo a orden 2 en η , siendo η la fluctuación de una solución clásica conocida ψ_o .

$$\begin{aligned} S(\psi_o + \eta) &= \int d^{D+1}\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu(\psi_o + \eta))^2 - U(\psi_o + \eta) \right] = \\ &= \int d^{D+1}\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \psi_o)^2 - (U(\psi_o) + \dots) \right] + \int d^{D+1}\mathbf{x} [\partial_\mu \psi_o \partial^\mu \eta - U'(\psi_o)\eta] + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^{D+1}\mathbf{x} [(\partial_\mu \eta)^2 - U''(\psi_o)\eta^2] + o(\eta^3) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$S(\psi_o + \eta) = S(\psi_o) + \int d^{D+1}\mathbf{x} [\partial_\mu \psi_o \partial^\mu \eta - U'(\psi_o) \eta] + \frac{1}{2} \int d^{D+1}\mathbf{x} [(\partial_\mu \eta)^2 - U''(\psi_o) \eta^2]$$

Se analiza cada uno de los sumandos.

1. **Primer sumando.** Corresponde a la acción de la solución clásica conocida, es una constante.
2. **Segundo sumando.** Es necesario desarrollar más la expresión.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} [\partial_\mu \psi_o \partial^\mu \eta - U'(\psi_o) \eta]$$

De esta integral, se integra por partes el primer término:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} (\partial_\mu \psi_o \partial^\mu \eta) = \eta \partial_\mu \psi_o \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} (\partial_\mu \partial^\mu \psi_o) \eta$$

El primer término es nulo puesto que las fluctuaciones en $-\infty$ y $+\infty$ se deben anular para así asegurar que la energía del sistema sea una cantidad finita. Por tanto, la integral inicial queda como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} [-\partial_\mu \partial^\mu \psi_o - U'(\psi_o)] \eta$$

El argumento de esta integral corresponde con las ecuaciones de Euler-Lagrange para la solución estática conocida multiplicada por η , por tanto, como ψ_o es solución, este término es nulo.

3. **Tercer sumando.** Es el término que rige la dinámica de las fluctuaciones al orden más bajo (cuadrático).

Finalmente, la acción correspondiente a las fluctuaciones a orden cuadrático es la suma de una constante y una función de η , de la cual se deduce la ecuación dinámica de las fluctuaciones.

$$S(\psi_o + \eta) = S(\psi_o) + \frac{1}{2} \int d^{D+1}\mathbf{x} [(\partial_\mu \eta)^2 - U''(\psi_o) \eta^2] + o(\eta^3) \quad (1.2.1)$$

1.2.1. Acción de las fluctuaciones.

Para poder hallar la ecuación de las fluctuaciones, es necesario que la variación de la acción $S(\psi_o + \eta)$ se anule. Para ello, se realiza el siguiente cálculo, donde únicamente se manipula el término de la integral de la Ecuación 1.2.1, ya que el resto de términos se desprecian o son constantes.

$$\delta S = \int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} [(\partial_\mu \eta)(\partial_\mu \delta \eta) - U''(\psi_o) \eta \delta \eta]$$

Integrando por partes el primer término:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} [(\partial_\mu \eta)(\partial_\mu \delta \eta)] = \delta \eta \partial_\mu \eta \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} (\partial_\mu \partial^\mu \eta) \delta \eta$$

El primer sumando de esta integral por partes se anula porque las fluctuaciones en $-\infty$ y $+\infty$ son nulas (este argumento ya se usó para hallar la acción $S(\psi_o + \eta)$). Por tanto, la variación de la acción es:

$$\delta S = - \int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}\mathbf{x} [\partial_\mu \partial^\mu \eta + U''(\psi_o) \eta] \eta$$

Finalmente, se halla la ecuación de las fluctuaciones aplicando el principio de Hamilton, es decir, haciendo $\frac{\delta S}{\delta \eta} = 0$.

$$\partial_\mu \partial^\mu \eta + U''(\psi_o) \eta = 0 \quad (1.2.2)$$

Para seguir con el estudio de las fluctuaciones, η puede escribirse de la siguiente forma:

$$\eta = \sum a_\omega e^{i\omega t} f_\omega(x) \quad (1.2.3)$$

En caso de que no sea una suma discreta, η puede escribirse como una integral en lugar de una suma. Al sustituir η por esta expresión en la Ecuación 1.2.2 y, teniendo en cuenta que los coeficientes y funciones en los que se escribe η son lineales, resulta:

$$-f''_\omega(x) + U''(\psi_o) f_\omega(x) = \omega^2 f_\omega(x)$$

que es una ecuación en autovalores. Renombrando $V(x) = U''(\psi_o)$, la ecuación anterior puede escribirse como una ecuación de Schrödinger.

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] f_\omega(x) = \omega^2 f_\omega(x) \quad (1.2.4)$$

Esta ecuación en autovalores, que puede tener como solución un espectro discreto o continuo, es la que hay que resolver para cada potencial y, así, llevar a cabo el estudio de las fluctuaciones. Se estudian las fluctuaciones para los dos modelos estudiados hasta ahora: el modelo $\lambda\phi^4$ y el modelo Sine-Gordon. En ambos casos, para las soluciones estáticas se toman constantes nulas sin pérdida de generalidad.

Potencial de Poschl-Teller modificado.

El potencial de Poschl-Teller es de la forma:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh^2(x)} \quad (1.2.5)$$

La resolución de la ecuación de Schrödinger en una dimensión para este potencial es conocida, y se encuentra explicada detalladamente en [3].

Se escribe la ecuación de Schrödinger como:

$$\psi''(x) + e\psi(x) = g \operatorname{sech}^2(x) \psi(x)$$

donde g es una constante. Puede relacionarse $e = k^2$, para obtener el valor de k usado en las soluciones. Deben estudiarse las soluciones de la ecuación para energías positivas (scattering) y para energías negativas (estados ligados).

Para energías positivas, las soluciones de scattering son:

$$\psi(x) = \frac{ik \pm \tanh(x)}{ik + 1} e^{ikx}$$

Para energías negativas, estas están cuantizadas. Denotando $k = i\kappa$, los autoestados son:

$$\psi(x) = \frac{-\kappa \pm \tanh(x)}{1 - \kappa} e^{-\kappa|x|} \quad (1.2.6)$$

Los autovalores para energías negativas son:

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} (\lambda - 1 - n)^2; \quad n \leq \lambda - 1 \quad (1.2.7)$$

1.2.2. Modelo $\lambda\phi^4$.

En primer lugar, se halla la expresión de $V(x)$. Como ya se ha realizado el estudio para los casos estáticos del modelo, esta expresión será la derivada segunda de la energía potencial evaluada en las soluciones estáticas.

$$V(x) = 6 \tanh^2(x) - 2$$

La función queda representada en la Figura 1.3.

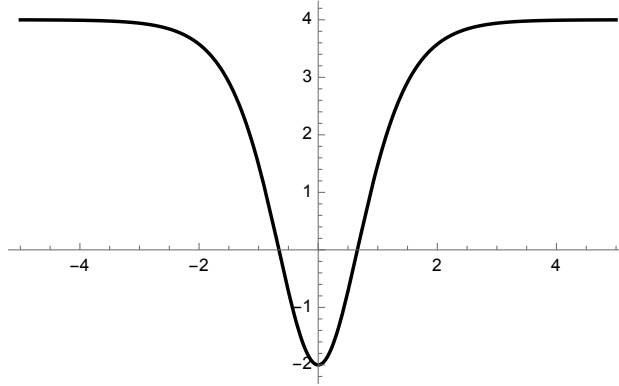


Figura 1.3: $V(x)$ del modelo $\lambda\phi^4$.

Reescribiendo la expresión de $V(x)$, se llega a un potencial de Poschl-Teller modificado:

$$V(x) = 6 \tanh^2(x) - 2 = 4 + 6(-1 + \tanh^2(x)) = 4 - \frac{6}{\cosh^2(x)} \quad (1.2.8)$$

Una vez expresado el potencial $V(x)$ de esta forma, pueden calcularse los autovalores y autofunciones para la Ecuación 1.2.4, basándose en el cálculo del potencial de Poschl-Teller. En este caso, en la Ecuación 1.2.5, se toma $\alpha = 1$, $\lambda = 3$ y $k^2 = \omega^2 - 2^2$.

Los autoestados para energías negativas son los expresados en la Ecuación 1.2.6 y, adaptando el cálculo del potencial de Poschl-Teller al potencial del modelo $\lambda\phi^4$, los autovalores de la energía son:

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} (2 - n)^2; \quad n \leq 2$$

por lo que se tendrán tres autovalores para $n=0, 1, 2$.

Como ya se ha explicado en el desarrollo del potencial de Poschl-Teller, también aparecen estados de energía positiva que son ondas de scattering, pero lo que interesa son los autoestados para energías negativas que serán los que presenten estados ligados de energía. Lo mismo ocurre para el modelo de Sine-Gordon.

1.2.3. Modelo Sine-Gordon.

Siguiendo los mismos pasos que para el modelo $\lambda\phi^4$, se halla la expresión de $V(x)$ para el modelo Sine-Gordon.

$$V(x) = \cos[4 \arctan(e^x)] \quad (1.2.9)$$

La función queda representada en la Figura 1.4.

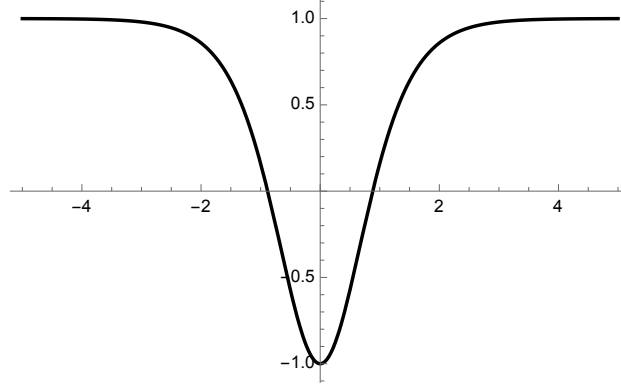


Figura 1.4: $V(x)$ del modelo Sine-Gordon.

Se demuestra en el Apéndice A que este potencial $V(x)$ puede reescribirse como un potencial de Poschl-Teller modificado:

$$V(x) = 1 - \frac{2}{\cosh^2(x)} \quad (1.2.10)$$

Como en el caso del modelo $\lambda\phi^4$, las autofunciones y autovalores se calculan de la misma forma, donde solo cambian los coeficientes. Ahora en la Ecuación 1.2.5 se toma $\alpha = 1$, $\lambda = 2$ y $k^2 = \omega^2 - 1^2$. Los valores de la energía son:

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} (2 - n)^2; \quad n \leq 2$$

por lo que se tendrán dos autovalores para $n=0, 1$.

1.3. Corrección cuántica a la masa al orden de un lazo.

Dada una acción cuadrática de la forma:

$$S(\phi) = \int d^{D+1}\mathbf{x} \phi(\partial_t^2 + \hat{K})\phi \quad (1.3.1)$$

donde $\hat{K}$ es el operador hallado al calcular la acción de las fluctuaciones (es decir, un operador de tipo hamiltoniano de Schrödinger no relativista), cuya expresión es:

$$\hat{K} = -\partial_j \partial_j + V(x) \quad (1.3.2)$$

En este tipo de acciones, el campo no interacciona consigo mismo, si no que únicamente interactúa con el potencial $V(x)$. Bajo esta condición, el campo cuántico es una colectividad gran canónica de osciladores cuánticos desacoplados donde sus frecuencias son el espectro de $\hat{K}$, que deberá calcularse para cada modelo puesto que varía el potencial en cada uno. Un sistema gran canónico corresponde a un sistema abierto isoterma con volumen fijo que permite intercambiar energía en forma de calor y masa. La justificación de por qué se puede realizar esta equivalencia se encuentra en [26] y, en resumen, es porque se puede realizar un cambio de base ortonormal para transformar el hamiltoniano en uno de la forma del oscilador armónico. Esto se conoce como la cuantización canónica de acciones cuadráticas (ver [5]).

Al sustituirse por osciladores cuánticos desacoplados, cada uno representa una colectividad de partículas con la misma energía y momento. La energía está dada por el siguiente hamiltoniano, expresado como una suma a las diferentes frecuencias para cada oscilador cuántico:

$$\mathbb{H} = \sum_{\omega} \hbar \omega \left(\hat{N}_{\omega} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.3.3)$$

Teniendo en cuenta que puede haber una parte del espectro que sea discreta (estados ligados), el hamiltoniano puede escribirse como una suma de los osciladores armónicos desacoplados con las frecuencias de los estados ligados y el resto de frecuencias. Si se denota ω_b para las frecuencias de los estados discretos y ω para el resto de frecuencias, el hamiltoniano puede reescribirse como:

$$\mathbb{H} = \sum_{\omega_b} \hbar \omega_b \left(\hat{N}_{\omega_b} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\omega} \hbar \omega \left(\hat{N}_{\omega} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.3.4)$$

La segunda suma de la Ecuación 1.3.4 puede ser sustituida por una integral dependiendo del sistema que se estudie.

La interpretación física de este cambio es similar al de los fonones, donde también se realiza la misma operación pero con coordenadas en lugar de campos. Dado el estado del sistema $|1\omega_1, 2\omega_2, \dots\rangle$, cada número indica el número de partículas que vibran a frecuencia ω_i y tienen una energía de $\hbar\omega_i$. La energía total del sistema viene dada por el valor esperado del hamiltoniano de la Ecuación 1.3.4 en el estado en el que se encuentre, caracterizado cada uno por una frecuencia. Las partículas de cada estado siguen la estadística de Bose puesto que son capaces de coexistir en el mismo estado cuántico.

El estado fundamental en teoría cuántica de campos, también denominado vacío cuántico, no cuenta con partículas reales al igual que en teoría clásica de campos pero, a diferencia de esta, el principio de incertidumbre energía-tiempo permite la existencia de pares de baja energía (debido a las fluctuaciones cuánticas) creándose y destruyéndose, que son partículas virtuales. Este estado se denota como:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \quad (1.3.5)$$

La energía del sistema para el estado fundamental se calcula de la siguiente forma:

$$E_0 = \langle 0 | \mathbb{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\omega_b} \hbar \omega_b + \frac{1}{2} \sum_{\omega} \hbar \omega = \frac{1}{2} \hbar \text{Tr}(\hat{K}^{1/2}) \quad (1.3.6)$$

Al igual que en la Ecuación 1.3.4, la segunda suma se puede sustituir por una integral dependiendo del sistema. Como las frecuencias vienen dadas por el espectro de $\hat{K}$, si se diagonaliza la matriz de dicho operador, en su diagonal aparecerá el cuadrado de cada frecuencia y, como la traza no depende de la base, se puede calcular la última igualdad de la Ecuación 1.3.6. Este espectro puede o no ser finito, lo que haría que la energía del estado fundamental sea infinita también por tener una suma infinita de frecuencias positivas. Para evitar esta divergencia, es necesario elegir un punto cero de la energía que, como definición, se toma el siguiente:

$$\langle 0 | \mathbb{H}^{(0)} | 0 \rangle \equiv 0 \quad (1.3.7)$$

donde $\mathbb{H}^{(0)}$ representa el hamiltoniano de ese punto cero de energía. Por tanto, la energía finita del estado fundamental se escribe como:

$$E_o^{fin} = \frac{1}{2} \hbar \text{Tr}(\hat{K}^{1/2} - (\hat{K}^{(0)})^{1/2}) \quad (1.3.8)$$

Se debe elegir un punto cero de energías y medir las energías respecto de ese punto cero ya que no se pueden medir las energías internas absolutas de un sistema, si no el cambio de dicha energía.

1.4. Corrección al orden de un lazo. Funciones zeta espectrales.

En la sección anterior se ha comprobado que se puede escribir la energía del estado fundamental como:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \text{Tr}(\hat{K}^{1/2}) \quad (1.4.1)$$

Realmente, lo que tiene significado físico es la diferencia de energías entre la energía de un estado y un punto cero fijado. Para hallar esa energía, se recurre a las funciones zeta espectrales para poder regularizar la solución, es decir, estudiar la divergencia que se produce; y la renormalización, eliminar dicha divergencia. Todo este desarrollo se encuentra explicado en [17], [23], [19], [12] y [18].

Como se conoce el espectro de forma analítica en teorías de 1+1 dimensiones, se desarrollarán los cálculos para este caso por simplicidad. En 2+1 dimensiones también se puede calcular la corrección al orden de un lazo a pesar de no conocer de forma analítica el espectro (como se comprueba en la sección 2.1). El conocimiento explícito del espectro de fluctuaciones cuánticas no es necesario, en general, cuando se usa la regularización por funciones zeta. En el caso de solo conocer la ecuación trascendente del espectro, el uso de la derivada logarítmica permite sumar a todo el espectro usando teoremas fundamentales de variable compleja.

El operador $\hat{K}$ es conocido porque se halló al calcular la acción de las fluctuaciones:

$$\hat{K} = -\frac{d^2}{dx^2} + U''(x) \quad (1.4.2)$$

Además, también se dedujo su espectro para el modelo $\lambda\phi^4$ y el modelo Sine-Gordon, puesto que es un potencial de Poschl-Teller modificado para estos casos.

También se discutió la expresión de la variación de energía, que es lo que tiene significado físico, en la sección anterior:

$$\Delta E_0 = \frac{1}{2} \hbar \text{Tr}(\hat{K}^{1/2} - (\hat{K}^{(0)})^{1/2}) \quad (1.4.3)$$

Para estudiar las correcciones al orden de un lazo, lo primero que hay que realizar es escribir las trazas de los operadores como funciones zeta espectrales:

$$\xi_{\hat{K}}(s) = \sum_{\omega_n} (\omega_n(\hat{K}))^{-s} \quad (1.4.4)$$

Con el fin de recuperar la igual de la Ecuación 1.4.3 con las funciones zeta, basta con tomar $s \rightarrow -1/2$, por lo que este valor para s será el que tenga significado físico. A continuación, se presenta la definición de las funciones zeta en términos de las funciones gamma de Euler.

$$\xi_{\hat{K}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int d\beta \beta^{s-1} \text{Tr} e^{-\beta \hat{K}} \quad (1.4.5)$$

Esta es la transformada de Mellin de $\text{Tr}(e^{-\beta \hat{K}})$. Se utiliza esta definición puesto que, al ser $\hat{K}$ definido positivo, se introduce la definición general de núcleo de calor $G_{\hat{K}}(\vec{x}, \vec{y}; \beta)$ (a partir de la ecuación de calor generalizada) para hallar explícitamente la función zeta.

$$\left[\frac{\partial}{\partial \beta} \mathbb{I}_N + \hat{K}_{\vec{x}} \right] G_{\hat{K}}(\vec{x}, \vec{y}; \beta) = 0 \quad (1.4.6)$$

$$G_{\hat{K}}(\vec{x}, \vec{y}; \beta = 0) = \mathbb{I}_N \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.4.7)$$

donde $\hat{K}_{\vec{x}}$ es la acción de $\hat{K}$ en $\vec{x}$. Cumple la siguiente igualdad:

$$\text{Tr}(e^{-\beta\hat{K}}) = \text{Tr} \int d^n \mathbf{x} G_{\hat{K}}(\vec{x}, \vec{x}; \beta) \quad (1.4.8)$$

Para 1+1 dimensiones, la función zeta espectral en términos del núcleo de calor es:

$$\xi_{\hat{K}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \text{Tr} \int dx d\beta G_{\hat{K}}(x, x; \beta) \beta^{s-1} \quad (1.4.9)$$

En estos cálculos, es necesario introducir el sistema en un intervalo de longitud finita L sin dimensiones, lo que proporciona una ecuación que fija los momentos (o el número de onda) discretos:

$$k \frac{mL}{\sqrt{2}} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.4.10)$$

Se debe multiplicar cada integral por la densidad espectral del operador $\hat{K}_0$ para normalizarlo, que es:

$$\rho_{\hat{K}_0}(k) = \frac{dn}{dk} = \frac{1}{2\pi} \frac{mL}{\sqrt{2}} \quad (1.4.11)$$

Cuando se calculan las integrales para el operador $\hat{K}$, es necesario añadir el desfase $\delta(k)$ sumando en la Ecuación 1.4.10, que se tomarán de [12] para cada teoría.

Por tanto, se expresa la dependencia de la energía regularizada con las funciones zeta espectrales.

$$\Delta^{(1)} E_0 = \frac{1}{2} \hbar [\xi_{\hat{K}}(s) - \xi_{\hat{K}(0)}(s)] \quad (1.4.12)$$

Debe tenerse en cuenta que esta ecuación está dada en magnitudes sin dimensiones (a excepción de $\hbar$), en acuerdo con lo desarrollado hasta ahora.

Para calcular la diferencia de energías en el punto cero, basta con conocer el espectro de $\hat{K}$ y luego tomar el límite $s \rightarrow -1/2$.

Finalmente, para eliminar el último polo que aparece, debe añadirse la contribución de la lagrangiana de contraterminos resultantes de la renormalización al orden de un lazo, cuya expresión es la siguiente multiplicada por una constante dada por las reglas de Feynman:

$$I(4) = -\frac{1}{L} \cdot \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} \cdot \xi_{\hat{K}(0)}(s+1) \quad (1.4.13)$$

1.4.1. Modelo $\lambda\phi^4$.

Primero se calcula la función zeta espectral del operador $\hat{K}_0$ usando las ecuaciones deducidas antes con las correspondientes condiciones de normalización.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta\hat{K}_0}) &= \frac{mL}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-\beta(k^2+4)} = \frac{mL}{\sqrt{8\pi\beta}} \cdot e^{-4\beta} \\ \xi_{\hat{K}_0}(s) &= \frac{mL}{\sqrt{8\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^{+\infty} d\beta \beta^{s-3/2} e^{-4\beta} = \frac{mL}{\sqrt{8\pi}} \cdot \frac{1}{2^{2s-1}} \cdot \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \end{aligned}$$

En el cálculo de la función zeta del operador $\hat{K}$, se eliminan las contribuciones de los modos cero del operador $\hat{K}$ y se tiene en cuenta el desfase $\delta(K) = -2 \arctan \left[\frac{3k}{2-k^2} \right]$.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta\hat{K}}) &= e^{-3\beta} + \frac{mL}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-\beta(k^2+4)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{d\delta(k)}{dk} e^{-\beta(k^2+4)} = \\ &= \frac{mL}{\sqrt{8\pi\beta}} \cdot e^{-4\beta} + e^{-3\beta}(1 - \text{Erfc}(\sqrt{\beta})) - \text{Erfc}(2\sqrt{\beta}) \end{aligned}$$

$$\xi_{\hat{K}}(s) = \xi_{\hat{K}_0}(s) + \frac{1}{3^s} - \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1 + {}_2F_1(1/2, 1, s+1, -3)}{4^s s \sqrt{\pi}}$$

donde ${}_2F_1$ son las funciones hipergeométricas (ver [21]) y $\text{Erfc}(x)$ es la función error complementaria ($= 1 - \text{Erf}(x)$).

Para calcular ΔE , basta con restar las dos funciones zeta obtenidas y tomar el límite $s \rightarrow -1/2$. Para ello, se calcula la serie de Laurent alrededor de $s = -1/2$ a orden 0.

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{3^s} - \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1 + {}_2F_1(1/2, 1, s+1, -3)}{4^s s \sqrt{\pi}} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{2}} \left[-\frac{3}{(s+1/2)} + \left[\sqrt{3} - {}_2F_1^{(0,0,1,0)}(1/2, 1, 1/2, -3) \right] \right] \end{aligned}$$

Esta expresión sigue teniendo un polo, por lo que todavía presenta una divergencia. Para eliminarla, se calcula la contribución de la lagrangiana de los contratérminos, de la cual también interesa la misma serie de Laurent.

$$I(4) = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{1}{2^{2s+1}} \cdot \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}(s+1/2)} - \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}$$

La contribución obtenida debe multiplicarse por $6\hbar$ (ver [17]). Finalmente, se obtiene la corrección para la masa del kink al orden de un lazo:

$$\Delta E + 6\hbar I(4) = -0,0142535 \hbar \quad (1.4.14)$$

1.4.2. Modelo Sine-Gordon.

Se hace el mismo desarrollo que para el modelo $\lambda\phi^4$.

Primero se calcula la función zeta espectral del operador $\hat{K}_0$ usando las ecuaciones explicadas antes (Ecuaciones 1.4.8 y 1.4.9) con las correspondientes condiciones de normalización, al igual que se hizo para el modelo $\lambda\phi^4$.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta\hat{K}_0}) &= \frac{mL}{\sqrt{8\pi\beta}} \cdot e^{-\beta} \\ \xi_{\hat{K}_0}(s) &= \frac{mL}{\sqrt{8\pi}} \cdot \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \end{aligned}$$

En el cálculo de la función zeta del operador $\hat{K}$, se eliminan las contribuciones de los modos cero del operador $\hat{K}$, y se tiene en cuenta el desfase $\delta(K) = -2 \arctan \left[\frac{1}{k} \right]$.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta\hat{K}}) &= e^{-2\beta} + \frac{mL}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-\beta(k^2+1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{d\delta(k)}{dk} e^{-\beta(k^2+1)} = \\ &= \frac{mL}{\sqrt{8\pi\beta}} \cdot e^{-\beta} + e^{-2\beta} + \text{Erfc}(\sqrt{\beta}) \end{aligned}$$

$$\xi_{\hat{K}}(s) = \xi_{\hat{K}_0}(s) + \frac{1}{2^s} + \frac{\Gamma(s+1/2)}{s\sqrt{\pi}\Gamma(s)}$$

Para calcular ΔE , basta con restar las dos funciones zeta obtenidas y tomar el límite $s \rightarrow -1/2$. Para ello, se calcula la serie de Laurent alrededor de $s = -1/2$ a orden 0.

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{3^s} - \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1 + {}_2F_1(1/2, 1, s+1, -3)}{4^s s \sqrt{\pi}} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{(s+1/2)} + \sqrt{2} + \ln(4) \right] \end{aligned}$$

Esta expresión, sigue teniendo un polo, por lo que se tiene una divergencia. La misma proviene de los diagramas divergentes de un lazo de la teoría de campos. La lagrangiana de contraterminos obtenida de la renormalización al orden de un lazo produce una contribución a la traza funcional de la forma:

$$I(4) = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}(s+1/2)} - \frac{1 - \ln(2)}{2\pi\sqrt{2}}$$

Esta contribución debe multiplicarse por $\hbar$ (ver [17]). Finalmente, se obtiene la corrección final para la masa del kink al orden de un lazo:

$$\Delta E + \hbar I(4) = \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} - 1 - \ln(2) \right] = -0,403464 \hbar \quad (1.4.15)$$

1.5. Teorema de Derrick.

Para enunciar el Teorema de Derrick, se sigue el libro [5].

Teorema de Derrick. Sea ϕ un conjunto de campos escalares en el espacio-tiempo $D+1$ (siendo 1 la dimensión temporal y D las dimensiones espaciales). La dinámica de estos campos está definida por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi)$$

y sea $U(\phi)$ no negativa e igual a cero en los niveles fundamentales. Entonces, para $D \geq 2$ las únicas soluciones de energía finita independientes del tiempo son los estados fundamentales.

Demostración. Se define la energía potencial como la suma de los dos siguientes términos:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int d^D \mathbf{x} (\nabla \phi)^2$$

$$V_2 = \int d^D \mathbf{x} U(\phi)$$

donde tanto V_1 como V_2 son no negativos e iguales a cero únicamente para los estados fundamentales. Se considera $\phi(\mathbf{x})$ una solución independiente del tiempo y se toma una parametrización de dicha solución:

$$\phi(\mathbf{x}; \lambda) \equiv \phi(\lambda \mathbf{x})$$

con $\lambda > 0$. Para esta familia, la energía potencial total es:

$$V(\lambda) = \int d^D \mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\tilde{\partial}_\mu \phi(\lambda \mathbf{x}))^2 + U(\phi(\lambda \mathbf{x})) \right] = \int \lambda^{-D} d^D(\lambda \mathbf{x}) \left[\frac{1}{2} (\lambda \partial_\mu \phi(\lambda \mathbf{x}))^2 + U(\phi(\lambda \mathbf{x})) \right]$$

$$V(\lambda) = \lambda^{2-D} V_1 + \lambda^{-D} V_2$$

El valor de λ para el cual es estacionario se calcula por el principio de Hamilton. Imponiendo que se cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange para la parametrización, el único valor posible para que sea estacionario es que $\lambda = 1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \lambda \partial \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi)} \right) = 0$$

Se calculan los extremos de la función energía potencial tomando $\lambda = 1$, puesto que corresponderán con las posibles soluciones.

$$\frac{dV(\lambda)}{d\lambda} = 0 = (D - 2)V_1 + DV_2$$

Si $D \geq 2$, tanto V_1 como V_2 deberán anularse (estados fundamentales) y quedará demostrado el teorema. Para $D = 2$, V_2 debe anularse y, aplicando el principio de Hamilton, V_1 también debe anularse. El teorema queda demostrado.

Este teorema prohíbe la existencia de soluciones independientes del tiempo que no sean las soluciones constantes, pero no afirma nada sobre las soluciones dependientes del tiempo.

Para poder construir teorías de campos que posean soluciones topológicas en más de una dimensión, es necesaria la introducción del campo de gauge. Esto es, como se explica más adelante y en el marco del trabajo desarrollado, imponer que la densidad lagrangiana sea invariante bajo transformaciones locales de distintos grupos, entre ellos el grupo $U(1)$, que es el grupo de los números complejos de módulo unidad. Para mantener la invariancia local, hay que introducir fuerzas reales.

Capítulo 2

Teorías en dos dimensiones.

2.1. Teorías gauge: caso abeliano y caso no abeliano.

Con el fin de poder seguir desarrollando el trabajo en más dimensiones, como se comprueba en el Teorema de Derrick, es necesaria la introducción de la teoría de los campos de gauge.

La introducción de las teorías gauge es esencial para conseguir invariancia ante transformaciones de simetría locales. Al igual que ocurre en la gravitación einsteniana, la imposición de la invariancia local requiere de la introducción de nuevos campos mediadores de interacciones fundamentales: los campos de gauge. Las teorías gauge y el Principio de Invariancia de Einstein (todas las leyes físicas son las mismas para todos los observadores localmente inerciales) guardan relación, puesto que en ambos se tiene una invariancia local de las teorías físicas introduciendo fuerzas adicionales; del mismo modo, se establece una relación similar con el Principio de Equivalencia de Einstein, que exige que, localmente, exista un sistema de referencia en el que todas las leyes de la física sean las del espacio de Minkowski.

Para entender la introducción de la teoría de los campos gauge, se considera por simplicidad un multiplete de campos escalares Φ en un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial V de dimensión n :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{D+1} \rightarrow V$$

La acción que gobierna la dinámica de los campos es:

$$S(\Phi) = \int d^{D+1}\mathbf{x} \mathcal{L}(\Phi)$$

Existe un grupo de Lie compacto y conexo G , al que se le llama grupo gauge (véase [17], [5] y [10]) tal que V es una representación irreducible de G . La transformación gauge es una transformación de campos escalares definida como:

$$g(x) : \phi \mapsto g(x)\phi(x) \tag{2.1.1}$$

donde $g(x)$ es una función que relaciona elementos del espacio-tiempo con los de G . A su vez, $g(x)$ se entiende como una representación unitaria de n dimensiones de G , ya que se identifica al grupo G con la representación. Se cumple que $S(g\Phi) = S(\Phi)$, es decir, G deja invariante la acción.

Los generadores de la representación T^a son un conjunto de matrices hermíticas ortonormales de $n \times n$ dimensiones. Estas matrices cumplen las siguientes propiedades:

$$[T^a, T^b] = ic^{abc}T^c \quad (2.1.2)$$

$$tr(T^a T^b) = -2i\delta^{ab} \quad (2.1.3)$$

En la Ecuación 2.1.2, las constantes c^{abc} son las constantes de estructura del álgebra de Lie.

En analogía con la gravedad einsteniana, que aparece naturalmente al exigir invariancia para todo observador localmente inercial (en caída libre) y no solo globalmente, aparece el campo de gauge A_μ^a al exigir que la acción sea invariante bajo transformaciones locales de $G_{gauge} = \{maps\ g(x) : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow G\}$. En concreto, las derivadas parciales pasan a ser derivadas covariantes (descritas posteriormente). La transformación de gauge del campo vectorial A_μ^a es:

$$A_\mu^a(x)T^a \rightarrow g(x)A_\mu^a(x)T^a g(x)^{-1} + ie^{-1}\partial_\mu g(x)g(x)^{-1} \quad (2.1.4)$$

donde e es la constante (real) de acoplamiento gauge que, en el caso en el que G no sea simple (no tiene subgrupos normales propios excepto los triviales y no son abelianas) pueden existir varias constantes de acoplamiento, pero el desarrollo de la teoría se realizará ignorando esta existencia. Estos campos vectoriales toman valores de la representación g y operan con la representación escogida sobre Φ . En sí mismos operan por la adjunta, por lo que su transformación de gauge también es a través de la adjunta (por eso aparecen $g(x)$ y $g(x)^{-1}$ en su transformación).

Se define la derivada covariante del campo escalar como:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieA_\mu^a T^a \phi \quad (2.1.5)$$

y los campos de fuerzas como:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - ec^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.1.6)$$

Las propiedades de las transformaciones gauge son:

$$D_\mu \rightarrow g(x)D_\mu \quad (2.1.7)$$

$$F_{\mu\nu}^a(x)T^a \rightarrow g(x)F_{\mu\nu}^a(x)T^a g(x)^{-1} \quad (2.1.8)$$

Teniendo en cuenta todo lo definido para la teoría gauge, la densidad lagrangiana, que es un invariante gauge, tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - U(\phi) \quad (2.1.9)$$

donde $U(\phi)$ es una función invariante bajo el grupo rígido de simetrías y, como se ha definido hasta ahora, es igual o mayor que cero (e igual a cero para los estados fundamentales).

Para expresar de forma sencilla la energía, se impone la condición del gauge temporal (ver [5]), que indica que siempre es posible elegir una transformación gauge tal que:

$$A_0^a = 0 \quad (2.1.10)$$

Con esta elección del gauge, el campo de fuerzas y la derivada covariante del campo escalar resultan:

$$F_{0i}^a = \partial_0 A_i^a \quad (2.1.11)$$

$$D_0\phi = \partial_0\phi \quad (2.1.12)$$

La energía es:

$$E = T + V \quad (2.1.13)$$

donde

$$T = \int d^D \mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\partial_0 A_i^a)^2 + \partial_0 \phi^\dagger \cdot \partial_0 \phi \right] \quad (2.1.14)$$

$$V = \int d^D \mathbf{x} \left[\frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 + D_i \phi^\dagger \cdot D_i \phi + U(\phi) \right] \quad (2.1.15)$$

No importa la elección del gauge para la definición de la energía puesto que esta debe permanecer invariante independientemente de la elección hecha, es decir, es un invariante gauge.

2.1.1. Caso abeliano: $U(1)$.

El caso abeliano más sencillo es tomando $G = U(1)$, donde los campos escalares $\phi(x)$ son los potenciales eléctricos que deben transformarse como

$$\phi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad (2.1.16)$$

En este caso, el campo de gauge es el vector potencial magnético $A_\mu^a(x)T^a = iA_\mu(x)$ y la transformación gauge es la transformación gradiente:

$$iA_\mu(x) = i\partial_\mu \alpha(x) + iA_\mu(x) \quad (2.1.17)$$

Entonces $\nabla_\mu \phi$ se transforma como

$$(\partial_\mu - iA_\mu)\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu - iA_\mu(x)]\phi(x) \quad (2.1.18)$$

Al cambiar la fase local de ϕ , aparece un potencial vector magnético. Esto es análogo al principio de equivalencia débil en la teoría de la gravedad de Einstein (ver [10]) donde, al cambiar de sistema de referencia, aparece un campo gravitatorio adicional.

Para que los campos descritos anteriormente para el electromagnetismo describan una misma situación física, las ecuaciones de campo con derivadas covariantes son las únicas posibles por el principio de relatividad en el espacio de las cargas de Weyl (véase [10]), cuya generalización conduce a la teoría de Yang-Mills, que es una teoría gauge no abeliana.

2.1.2. Caso no abeliano: $SU(2)$.

El desarrollo de las teorías gauge para grupos G no abelianos como $SU(2)$ o $SU(3)$ conducen a las teorías de Yang-Mills. La acción de los campos de Yang-Mills es:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^D \mathbf{x} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.1.19)$$

A continuación, se realiza la deducción de las ecuaciones del campo de Yang-Mills. Para ello, resulta conveniente expresar la acción en términos de la representación, para lo que se utiliza la Ecuación 2.1.3:

$$S = \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})$$

Se quiere aplicar el Principio de Mínima Acción, por lo que se reescribe la acción como una suma de la acción inicial de la Ecuación 2.1.19 y su variación, que se calcula realizando el cambio

$$\hat{A}_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \delta a_\mu^a$$

Este cambio hace que los campos de fuerza se escriban de la misma forma, que, despreciando variaciones a orden superior a uno, es:

$$\hat{F}_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a + \delta f_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^a + [\partial_\mu \delta a_\nu^a - \partial_\nu \delta a_\mu^a - ec^{abc}(A_\mu^b \delta a_\nu^c + A_\nu^c \delta a_\mu^b)]$$

La nueva acción es:

$$\hat{S} = \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (\hat{F}_{\mu\nu}^a \hat{F}^{a\mu\nu}) = \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) + i \int d^D \mathbf{x} (F_{\mu\nu}^a \delta f^{a\mu\nu}) = S + \delta S$$

Por el Principio de Hamilton, la segunda integral debe anularse. Desarrollando el producto, δS es la suma de tres integrales.

$$\delta S = 0 = \int d^D \mathbf{x} F_{\mu\nu}^a \partial^\mu \delta a^{a\nu} - \int d^D \mathbf{x} F_{\mu\nu}^a \partial^\nu \delta a^{a\mu} - \int d^D \mathbf{x} F_{\mu\nu}^a ec^{abc}(A^{b\mu} \delta a^{c\mu} + A^{c\nu} \delta a^{b\mu})$$

Haciendo una integración por partes del primer sumando, y de forma análoga con el segundo:

$$\int d^D \mathbf{x} F_{\mu\nu}^a \partial^\mu \delta a^{a\nu} = F_{\mu\nu}^a \delta a^{a\nu} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int d^D \mathbf{x} \partial^\mu F_{\mu\nu}^a \delta a^{a\nu}$$

El primer término de esta integral por partes se anula porque las fluctuaciones en $-\infty$ y $+\infty$ son nulas.

Usando la propiedad de antisimetría del campo de fuerzas y las relaciones entre las constantes de acoplamiento c^{abc} (véase [6]):

$$\delta S = 0 = 2 \int d^D \mathbf{x} [\partial^\mu F_{\mu\nu}^a - ec^{abc} A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c] \delta a^{a\nu}$$

El integrando debe anularse. Teniendo en cuenta de nuevo las relaciones entre las constantes de acoplamiento y la Ecuación 2.1.2 de la representación, y recordando la definición de derivada covariante (aplicado en este caso a un campo de fuerzas y no a un campo escalar):

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + ie[A^\mu, F_{\mu\nu}] = D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.20)$$

En el caso de que los campos de fuerzas se encuentren acoplados con campos escalares, la acción es

$$S = \int d^D \mathbf{x} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - U(\phi) \right] \quad (2.1.21)$$

Al aplicar el principio de mínima acción, aparece una corriente J_μ en las ecuaciones de campo.

$$(D^\mu F_{\mu\nu})^a = J_\mu^a = ie[(D_\mu \phi)^\dagger T^a \phi - T^a \phi^\dagger (D_\mu \phi)] \quad (2.1.22)$$

Las ecuaciones del campo escalar son:

$$D^\mu D_\mu \phi + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (2.1.23)$$

El ejemplo más común del caso no abeliano es el grupo $SU(2)$, también por su importancia en la descripción de la interacción débil del Modelo Estándar. Para este grupo, los generadores de las representaciones fundamentales son las matrices de Pauli normalizadas para que se cumplan las relaciones 2.1.2 y 2.1.3.

2.2. El modelo de Higgs abeliano en 2+1 dimensiones.

En el caso de 2+1 dimensiones espacio-temporales, aparecen los defectos topológicos llamados vórtices. Estos son similares a los defectos en 1+1 dimensiones; consisten en soluciones de los campos que no coinciden con el vacío y no decaen a él mediante una evolución temporal.

Se tratan dos tipos de teorías de campos (ver [17]):

- Teorías de campos escalares reales sin campos de gauge.
- Teorías de campos escalares reales con acoplamiento a campos de gauge.

Las expresiones generales de ambas teorías se han ido escribiendo a lo largo de todo el documento. En ambas, aparece el término de autointeracción $U(\phi)$. Este debe cumplir que sea una función sobre los reales y que esté inferiormente acotada. Por esto, puede suponerse siempre que $U_{min} = 0$. También se supone que $U(\phi)$ es polinómica en ϕ , lo que obliga, junto con el requerimiento anterior, a que sea de grado par y que el término de grado mayor tenga un coeficiente positivo (véase [17]). En las teorías de campos escalares reales con acoplamiento a campos gauge, también debe imponerse que $U(\phi)$ sea invariante bajo las transformaciones del grupo gauge.

Al igual que en el caso de 1+1 dimensiones, las soluciones de los campos son las que hacen que el funcional de la energía sea estacionario y finito. Y, siguiendo lo mismo, si el espacio de configuraciones donde están contenidas las soluciones tiene varias componentes conexas donde en cada una hay al menos una solución, estas serán distintas al vacío y estables (no pueden decaer a él), son los defectos topológicos.

Como, además, la energía debe ser finita, aparecen nuevas condiciones que restringen aún más las teorías de campos en el marco del acoplamiento a campos de gauge:

$$D_i \phi|_\infty = 0 \Rightarrow ieA_i(\infty) = \partial_i \phi|_\infty \quad (2.2.1)$$

$$F_{ij}F_{ij}|_\infty = 0 \Rightarrow A_i(\infty) = (\partial_i g(\mathbf{x}))g(\mathbf{x})^{-1}|_\infty \quad (2.2.2)$$

Reescribiendo las condiciones en coordenadas esféricas y eligiendo el gauge radial ($A_r = 0$), resulta:

$$\partial_r \phi|_\infty = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\partial_\theta \phi|_\infty = ie \left[\lim_{r \rightarrow \infty} (r A_\theta) \right] \phi(\infty) \quad (2.2.4)$$

donde $\phi(\infty)$ es una aplicación continua de S^1 en G/H por la condición de finitud de la energía para soluciones. De estas expresiones se deduce que $\phi|_\infty$ no depende de r y la dependencia de θ con $\phi(\infty)$ no es trivial.

2.2.1. Caso abeliano: $U(1)$.

En este caso, las configuraciones de vacío para el campo escalar vienen dadas por la condición $\phi^* \phi = 1$ (ver [17]). Además, $1 \in U(1)$ es la única transformación del grupo que deja invariante un vacío, por lo que $G/H \cong U(1) \cong S^1$. Con esto, la aplicación $\phi(\infty)$ es:

$$\begin{aligned} \phi(\infty) : S^1 &\rightarrow S^1 \\ e^{i\theta} &\rightarrow e^{i\sigma(\theta)} \end{aligned}$$

Por esta definición, debe cumplirse también que la aplicación de los reales sobre los reales σ cumpla:

$$\sigma(\theta + 2\pi) = 2\pi n + \sigma(\theta)$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, el espacio de configuraciones tiene infinitas componentes conexas que cumplen que:

- Para $n = 0$ se tiene el vacío.
- Para $n \neq 0$ se tienen componentes conexas con estados estables que no son el vacío, pero que están dotados de naturaleza topológica.

2.2.2. Carga topológica.

La condición de finitud de la energía da lugar a una discretización clásica del flujo magnético (ver [17] y [5]).

La definición de flujo magnético es:

$$\phi_M = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{x} F_{12} \quad (2.2.5)$$

Usando el teorema de Stokes, reescribiendo en coordenadas polares y eligiendo el gauge radial, la integral resultante es:

$$\phi_M = \lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{2\pi} d\theta A_\theta(\infty)$$

Para el caso de $U(1)$ donde se cumple que $\phi^*\phi = 1$ y teniendo en cuenta la relación 2.2.2, la integral anterior puede reescribirse como:

$$\phi_M = -i \int_0^{2\pi} d\theta \phi^*(\infty) \frac{d\phi(\infty)}{d\theta}$$

Esta integral es fácil de resolver puesto que, por las relaciones vistas para el caso abeliano, por cómo es la aplicación $\phi(\infty)$, podemos tomar que este sea igual a $e^{in\theta}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Teniendo en cuenta las unidades y resolviendo la integral, se obtiene que:

$$\phi_M = \frac{2\pi n}{e} \quad (2.2.6)$$

siendo e la constante de acoplamiento entre el campo escalar y el campo gauge que, debido a la dualidad onda-partícula de la mecánica cuántica (haciendo un tratamiento clásico no se puede llegar a esta conclusión) se relaciona con la carga eléctrica (ver [5])

$$\hbar e_{\text{acoplamiento}} = e_{\text{carga}} \quad (2.2.7)$$

Al flujo magnético se le llama también carga topológica porque, como puede observarse de la Ecuación 2.2.6, este es constante para cada $n \in \mathbb{Z}$, es decir, en cada componente conexa donde se defina $\phi(\infty)$.

2.2.3. Ecuaciones de Bogomolnyi.

Para estudiar los mínimos locales de las componentes conexas, se hallan las ecuaciones de Bogomolnyi. Esto se hace a partir de la primera variación del funcional de la energía. Por el mismo razonamiento que se usó para encontrar las soluciones estáticas en el modelo de Sine-Gordon basado en la finitud de la energía, se puede escribir un sistema de ecuaciones de primer orden a partir del sistema de ecuaciones de segundo orden que se obtiene de hacer la primera variación de la energía. Esto se podrá hacer para un valor concreto de la constante de acoplamiento sin dimensiones del potencial con el campo.

La densidad lagrangiana de partida es:

$$\mathcal{L}(\psi) = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\psi)(D^\mu\psi)^* - \frac{\lambda}{8}[\psi\psi^* - v^2]^2 \quad (2.2.8)$$

Donde el potencial es el potencial de Higgs. Como ya se hizo para las teorías clásicas, es necesario expresar esta lagrangiana en términos sin dimensiones. Para ello, primero realiza el análisis dimensional.

Análisis dimensional. Las dimensiones de la acción son $[E]T$ que, en caso de tomar $c = 1$ y $\hbar \neq 1$, estas quedan como MT , donde además ya se sabe que $L = T$. Al tener el espacio-tiempo de dimensión 2+1, las dimensiones de la densidad lagrangiana son: $[\mathcal{L}] = ML^{-2}$.

Partiendo de esto, es sencillo deducir las dimensiones de los elementos que componen $\mathcal{L}$:

- **Dimensiones de los campos.** De la parte cinética de la densidad lagrangiana, se deduce: $[\tilde{\partial}_\mu\tilde{A}^\nu]^2 = [\tilde{\partial}_t\psi]^2 = [\psi]^2L^{-2} = [\tilde{A}_\mu]^2L^{-2} = [\mathcal{L}] = ML^{-2}$. De este razonamiento se sigue que: $[\psi] = [\tilde{A}_\mu] = M^{\frac{1}{2}}$
- **Dimensiones de v .** Sin más que observar la densidad lagrangiana, se comprueba que las dimensiones de v son las mismas que las de ψ : $[v] = [\psi] = M^{\frac{1}{2}}$
- **Dimensiones de λ .** Basta con darse cuenta de que $[\mathcal{L}] = [\lambda][\psi]^4$. Por tanto, las dimensiones de λ son: $[\lambda] = M^{-1}L^{-2}$
- **Dimensiones de e .** Si se desarrolla el primer sumando de la densidad lagrangiana en términos de $\tilde{A}_\mu$ y la constante de acoplamiento, se observa que $[e^2\tilde{A}_\mu^4] = [\mathcal{L}]$, de lo que se deduce que: $[e] = M^{-\frac{1}{2}}L^{-1}$

Se pueden definir las dimensiones M y L en términos de las dimensiones de las constantes v y e (se escribe en términos de estas dos constantes porque las dimensiones de λ son las mismas que las de e^2):

$$M = [v^2]$$

$$L = [e^{-1}v^{-1}]$$

Para expresar las variables con dimensiones en otras sin dimensiones, se realizan los siguientes cambios:

$$y^\mu = (ev)^{-1}x^\mu$$

$$\psi = v\phi$$

$$\tilde{A}_\mu = v A_\mu$$

Introduciendo estos cambios, se llega a la expresión de la densidad lagrangiana en términos sin dimensiones:

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{v}{e} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi) (D^\mu \phi)^* - \frac{\beta}{8} [\phi \phi^* - 1]^2 \right] \quad (2.2.9)$$

En esta lagrangiana, la constante de acoplamiento sin dimensiones es β . Ahora, la expresión de la acción y de la energía cambiarán, reescribiéndose como la integral de la densidad lagrangiana descrita en la Ecuación 2.2.9 sobre las variables espacio-temporales sin dimensiones. Como ya se hizo al presentar las teorías gauge, se elige el gauge temporal o gauge de Weyl ($A_0 = 0$) para simplificar las expresiones.

$$S = \frac{1}{ev} \int dt [T - V] \quad (2.2.10)$$

donde

$$T = v^2 \int d^2 \mathbf{x} [(\partial_0 A_i^a)^2 + \partial_0 \phi^* \cdot \partial_0 \phi] \quad (2.2.11)$$

$$V = v^2 \int d^2 \mathbf{x} \left[\frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 + \frac{1}{2} (D_i \phi)^* (D_i \phi) + \frac{\beta}{8} [\phi \phi^* - 1]^2 \right] \quad (2.2.12)$$

siendo $E = T + V$.

Ecuaciones de campo. Las ecuaciones de campo en el gauge temporal se hallan aplicando el principio de mínima acción.

$$\frac{1}{2} [D_i D_i \phi - \partial_0^2 \phi] = \phi (\phi \phi^* - 1) \quad (2.2.13)$$

$$\partial_j F_{ij} - \partial_0^2 A_i = \frac{i}{2} [\phi^* (D_i \phi) - \phi (D_i \phi)^*] \quad (2.2.14)$$

Si se restringe el cálculo al caso estático, el cambio que hay que hacer es que las ∂_0 se anulan.

Como se ha mencionado anteriormente, reescribiendo el funcional de la energía que, para las soluciones estáticas es $E = V$ simplemente, el sistema de ecuaciones que se obtendrá es de primer orden (ver [17]).

Para ello, primero hay que tener en cuenta lo siguiente.

$$\frac{1}{2} (D_i \phi)^* (D_i \phi) = \frac{1}{2} |D_1 \phi \pm i D_2 \phi|^2 \pm \text{Im}[(D_1 \phi)^* (D_2 \phi)]$$

donde

$$\text{Im}[(D_1 \phi)^* (D_2 \phi)] = \frac{1}{2i} (i F_{12} + \partial_j (\epsilon_{jk} \phi^* D_k \phi))$$

siendo ϵ_{ij} el símbolo de Levi-Civita. Si se sustituyen estos términos en la Ecuación 2.2.12 y se anulan los sumandos correspondientes debido a la condición de finitud de energía ($D_k \phi|_\infty = 0$), se obtiene la expresión del funcional de la energía en la forma de Bogomolnyi:

$$E = \frac{v^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \left[|D_1 \phi \pm D_2 \phi|^2 + [F_{12} \pm \frac{1}{2} (\phi \phi^* - 1)]^2 \pm F_{12} + \frac{\beta - 1}{4} (\phi \phi^* - 1)^2 \right] \quad (2.2.15)$$

El carácter topológico lo posee el tercer sumando, tal y como se vio en el cálculo de la carga topológica. De esta expresión, también puede observarse que, en función del valor de β , se pueden dar tres casos diferentes.

- **Caso $\beta < 1$.** La contribución del último término es negativa, por lo que aparece un potencial atractivo. Los vórtices se atraen.
- **Caso $\beta > 1$.** La contribución del último término es positivo, por lo que aparece un potencial repulsivo, al contrario del caso anterior. Los vórtices se repelen.
- **Caso $\beta = 1$.** La contribución del último término es nulo, por lo que los vórtices se encuentran en equilibrio neutro. En este caso, la energía de Bogomolnyi es:

$$E = \frac{v^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \left[|D_1\phi \pm D_2\phi|^2 + [F_{12} \pm \frac{1}{2}(\phi\phi^* - 1)]^2 \pm F_{12} \right] \quad (2.2.16)$$

Los dos primeros términos son siempre positivos, por lo que el mínimo de energía está dado por el último término que es el que tiene carácter topológico y, al ser $\beta = 1$ y eliminar la contribución atractiva o repulsiva entre los vórtices, el término dominante es la fuerza cuántica de vacío en régimen BPS debido a que no hay fuerza clásica. El término topológico es una etiqueta que clasifica el número de vórtices del sistema. Los estados BPS son aquellos en los que las fuerzas clásicas se anulan y los objetos se encuentran en equilibrio; al estudiar sus fluctuaciones cuánticas, podrá observarse si ese equilibrio permanece o, por el contrario, se vuelven inestables. Un ejemplo de los estados BPS es el efecto Aharonov-Bohm (véase [1]) donde, a pesar no existir fuerzas clásicas, se produce una modificación en la fase de la función de onda que describe una partícula que no está inmersa en un campo electromagnético; este efecto puede observarse como un desplazamiento del patrón de difracción de electrones. La solución de la integral del primer término es la expresión 2.2.5. Teniendo en cuenta las constantes del funcional de la energía, el mínimo se encuentra en $e^{-1}v^2\pi|N|$ con $N \in \mathbb{Z}$. Para que sea un mínimo, también debe cumplirse que los dos primeros sumandos sean cero:

$$D_1\phi \pm iD_2\phi = 0 \quad (2.2.17)$$

$$F_{12} \pm \frac{1}{2}(\phi\phi^* - 1) = 0 \quad (2.2.18)$$

donde, por analogía con las teorías clásicas en 1+1 dimensiones, el término positivo hace referencia a las componentes topológicas dadas por los enteros positivos, y los signos negativos a las componentes topológicas dadas por los enteros negativos. Estas ecuaciones anteriores obtenidas de anular los cuadrados, son las ecuaciones de primer orden de Bogomolnyi y sus soluciones serán las soluciones de los campos para los cuales la energía es mínima en cada componente topológica (véase [17])

El caso a estudiar será el $\beta = 1$ puesto que es el único caso en el que se tienen soluciones de N vórtices estáticos, en los otros dos casos se atraerán o repelerán.

2.2.4. Soluciones de las ecuaciones de Bogomolnyi.

Para resolver las ecuaciones de Bogomolnyi, debe hacerse de forma numérica debido a que las soluciones no tienen forma analítica. El método numérico para llevar a cabo su resolución se encuentra en [17] y [30]. Para la hallar las soluciones, se distinguen dos casos:

- **Caso con simetría esférica.** Todos los vórtices tienen el mismo centro.
- **Caso sin simetría esférica.** Se proporciona una solución general a partir del método variacional de Jacobs y Rebba descrito en [15]. Este método cuenta con dos pasos: proponer como solución campos de prueba dependientes de un parámetro variacional y la deformación de los mismos. Un ejemplo de estos es el caso de dos vórtices no superpuestos.

Únicamente se realizará el desarrollo para hallar soluciones con simetría esférica. Tomando coordenadas esféricas y teniendo en cuenta que $F_{r\theta} = rF_{12}$, las ecuaciones de primer orden de Bogomolnyi pueden reescribirse como:

$$D_r\phi \pm \frac{i}{r}D_\theta\phi = 0 \quad (2.2.19)$$

$$\frac{1}{r}F_{r\theta} \pm \frac{1}{2}(\phi\phi^* - 1) = 0 \quad (2.2.20)$$

donde

$$\begin{aligned} D_r &\equiv \partial_r - iA_r \\ D_\theta &\equiv \partial_\theta - irA_\theta \end{aligned}$$

Como este sistema de ecuaciones es invariante bajo transformaciones de gauge independientes del tiempo (véase [17]) se puede tomar el gauge radial ($A_r = 0$) para simplificar el problema. Este gauge se puede escoger siempre que exista regularidad en el origen, es decir, siempre que se cumpla que $\phi(r=0) = A_r(r=0) = 0$. Con esta elección, la derivada covariante de la coordenada r y el campo de fuerzas resultan:

$$\begin{aligned} D_r &= \partial_r \\ F_{r\theta} &= A_\theta + r\partial_r A_\theta \end{aligned}$$

Por tanto, trabajando en el gauge radial, se pueden volver a reescribir las ecuaciones de Bogomolnyi en términos de los campos de la siguiente manera:

$$\partial_r\phi \pm (A_\theta\phi + \frac{i}{r}\partial_\theta\phi) = 0 \quad (2.2.21)$$

$$\partial_r A_\theta + \frac{1}{r}A_\theta \pm \frac{1}{2}(\phi\phi^* - 1) = 0 \quad (2.2.22)$$

Basta con estudiar las soluciones para las componentes topológicas con $N > 0$ puesto que las soluciones para $N < 0$ pueden obtenerse a partir de la componente topológica caracterizada por $|N| > 0$, tal y como se demuestra en [17]. Por tanto, solo se tomarán los signos positivos de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \partial_r\phi + (A_\theta\phi + \frac{i}{r}\partial_\theta\phi) &= 0 \\ \partial_r A_\theta + \frac{1}{r}A_\theta + \frac{1}{2}(\phi\phi^* - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Como se están estudiando únicamente las soluciones con simetría esférica y A_θ es real, no puede depender de θ , por lo que $A_\theta = A_\theta(r)$. Por el mismo motivo, únicamente tendrá sentido físico el módulo de ϕ , así que el campo escalar puede depender de θ por una fase.

Teniendo en cuenta el comportamiento de los campos en S_∞^1 bajo estas condiciones (ver [27]), estos se reescriben como:

$$\phi(r, \theta) = f(r)e^{in\theta} \quad (2.2.23)$$

$$rA_\theta(r) = n\alpha(r) \quad (2.2.24)$$

con $n \in \mathbb{N}$. Estas funciones deben cumplir las condiciones para aplicar el gauge radial y, además, condiciones de S_∞^1 , por lo que deben verificar (ver [17] y [2]):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = 1 \quad (2.2.25)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r) = 0 \quad (2.2.26)$$

Reescribiendo las ecuaciones de Bogomolnyi en términos de $f(r)$ y $\alpha(r)$ puesto que son conocidas sus condiciones tanto en el infinito como en el origen:

$$f'(r) + \frac{n}{r} f(r)(\alpha(r) - 1) = 0 \quad (2.2.27)$$

$$\frac{n}{r} \alpha'(r) + \frac{1}{2} (f(r)^2 - 1) \quad (2.2.28)$$

Se ha usado “ ’ ” para denotar la derivada respecto de r . Estas ecuaciones pueden desacoplarse fácilmente si se despeja $\alpha(r)$ o $f(r)$ en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. A continuación, se presentan las ecuaciones desacopladas donde, para simplificar la ecuación de $\alpha(r)$ se ha tomado la igualdad $h(r) = \alpha(r) - 1$.

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{f'(r)^2}{f(r)} = \frac{1}{2} f(r)(f(r)^2 - 1) \quad (2.2.29)$$

$$h''(r) + \frac{2n}{r} h(r)h'(r) = h(r) + \frac{1}{r} h'(r) \quad (2.2.30)$$

Ambas son ecuaciones diferenciales de segundo orden que se resuelven a partir de los métodos analítico-numéricos descritos en [17] y [30]. En ambas referencias también se muestra el comportamiento de las soluciones para $f(r)$ y $\alpha(r)$.

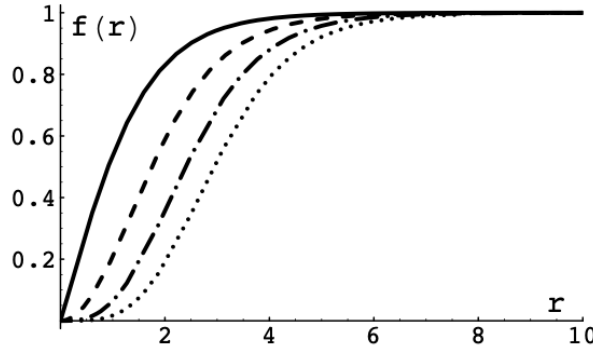


Figura 2.1: $f(r)$ en función de r para distintos n . Imagen tomada de [2].

En la Figura 2.1, se muestra el comportamiento de $f(r)$ para distintos n . El comportamiento de $\alpha(r)$ es muy similar a este, pero con las funciones para los distintos n más concentradas entre ellas. Las representaciones son para $n=1$ (línea continua), $n=2$ (trazo discontinuo), $n=3$ (trazo discontinuo-punteado) y $n=4$ (trazo punteado).

Sin más que sustituir las expresiones 2.2.23 y 2.2.24 en el funcional de la energía, también se puede observar el comportamiento de la densidad de energía en función de su distancia al origen, para lo que es necesario resolverlo también por el método numérico.

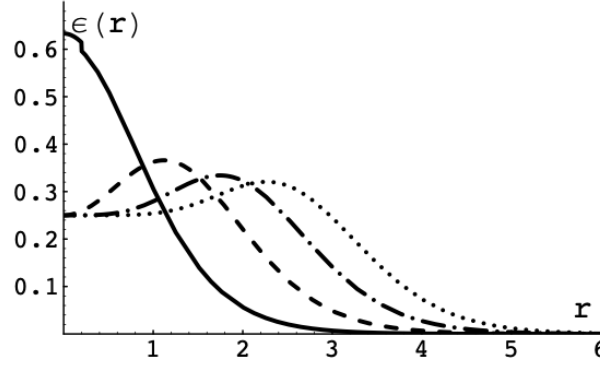


Figura 2.2: $\epsilon(r)$ en función de r para distintos n . Imagen tomada de [2].

En la Figura 2.2 se representa la densidad de la energía para distintos valores de n . Las representaciones son para $n=1$ (línea continua), $n=2$ (trazo discontinuo), $n=3$ (trazo discontinuo-punteado) y $n=4$ (trazo punteado).

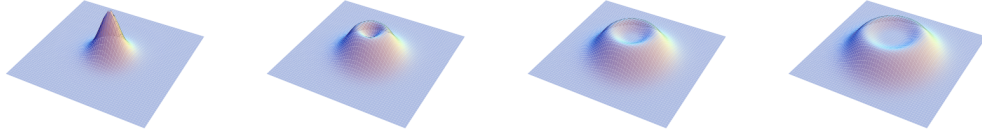


Figura 2.3: $\epsilon(r)$ en función de r para $n=1$, $n=2$, $n=3$ y $n=4$. Imagen tomada de [2].

En la Figura 2.3 se representa la densidad de la energía para distintos valores de n en 3D con el fin de observar con mayor claridad su distribución espacial y poder deducir las siguientes conclusiones.

Se extraen dos conclusiones de las soluciones de los vórtices en el caso de tener simetría esférica.

- La distribución energética en el espacio está concentrada entorno al origen, lo que conduce a que las soluciones de los vórtices se interpreten como partículas extensas al igual que pasaba en 1+1 dimensiones con los kinks. Si la solución se halla para $n \geq 0$, se interpreta como n vórtices centrados en el origen.
- En el caso de tener un único vórtice ($n=1$), se obtiene un máximo en la distribución energética en el origen. Si se tiene más de un vórtice, se obtiene un mínimo local en el origen de la distribución energética.

2.3. Cuantización.

En el caso del vórtice, no se puede conocer el espectro del operador $\hat{K}$ (distinto que para 1+1 dimensiones) de forma analítica, pues no se conocen analíticamente sus soluciones y, por tanto, tampoco es posible calcular el potencial de las fluctuaciones. Por ello, no es trivial realizar la normalización al orden de un lazo del M.H.A₂₊₁, y se requiere de fantasmas de Faddeev y Popov para no perder la invariancia gauge (ver [9]).

En esta sección, únicamente se calculará la forma del operador $\hat{K}$ al introducir las teorías gauge para el caso más sencillo, que es el de la teoría de Yang-Mills sin un campo acoplado.

Interesa expresar la segunda variación de la acción al añadir una fluctuación a un campo conocido.

$$S = \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})$$

Posteriormente, se añade una variación al campo gauge:

$$\hat{A}_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \delta a_\mu^a$$

Esta vez interesa calcular las variaciones de orden 2, por lo que $F_{\mu\nu}^a$ toma la forma:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu}^a &\rightarrow F_{\mu\nu}^a + \delta f_{\mu\nu}^a + \delta^{(2)} f_{\mu\nu}^a = \\ &= F_{\mu\nu}^a + [\partial_\mu \delta a_\nu^a - \partial_\nu \delta a_\mu^a - ec^{abc}(A_\mu^b \delta a_\nu^c + A_\nu^c \delta a_\mu^b)] + [-ef^{abc} \delta a_\mu^b \delta a_\nu^c] \end{aligned}$$

Se puede reescribir $\delta f_{\mu\nu}^a$ usando la derivada covariante:

$$\delta f_{\mu\nu}^a = (D_\mu \delta a_\nu - D_\nu \delta a_\mu)^a$$

La acción resultante, teniendo en cuenta la segunda variación es:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (\hat{F}_{\mu\nu}^a \hat{F}^{a\mu\nu}) = \\ &= \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) + i \int d^D \mathbf{x} (F_{\mu\nu}^a \delta f^{a\mu\nu}) + \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (2F_{\mu\nu}^a \delta^{(2)} f^{a\mu\nu} + \delta f_{\mu\nu}^a \delta f^{a\mu\nu}) = \\ &= S + \delta S + \delta^{(2)} S \end{aligned}$$

El primer sumando es un término constante y el segundo sumando da lugar a las ecuaciones de campo al aplicar el principio de mínima acción y, como se están estudiando las fluctuaciones alrededor de una solución, será un término nulo. Por tanto, solo es necesario aplicar el principio de mínima acción al tercer sumando para hallar el operador de las fluctuaciones para una teoría de Yang-Mills. Esto es lo que se hace a continuación.

$$\delta^{(2)} S = \frac{i}{2} \int d^D \mathbf{x} (2F_{\mu\nu}^a \delta^{(2)} f^{a\mu\nu} + \delta f_{\mu\nu}^a \delta f^{a\mu\nu}) = 0$$

Al estar igualado a cero, se eliminan las constantes y se escribe explícitamente el valor de cada término. El primer sumando, volviendo a usar las relaciones de las constantes de acoplamiento de [6], es muy fácil de reescribir puesto que $f^{abc} = f^{cab}$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} S &\int d^D \mathbf{x} (2F_{\mu\nu}^a \delta^{(2)} f^{a\mu\nu} + \delta f_{\mu\nu}^a \delta f^{a\mu\nu}) = \\ &= \int d^D \mathbf{x} (-2ef^{abc} F_{\mu\nu}^c \delta a_\mu^a \delta a_\nu^b + \delta f_{\mu\nu}^a \delta f^{a\mu\nu}) \end{aligned}$$

Estudiando el segundo término por separado, si se realiza el producto de las derivadas covariantes y se renombran los índices, resulta:

$$\begin{aligned} \int d^D \mathbf{x} \delta f_{\mu\nu}^a \delta f^{a\mu\nu} &= \int d^D \mathbf{x} (D_\mu \delta a_\nu - D_\nu \delta a_\mu)^a (D^\mu \delta a^\nu - D^\nu \delta a^\mu)^a = \\ &= 2 \int d^D \mathbf{x} [-(D_\mu \delta a_\nu^a)(D^\mu \delta a^{a\nu}) + (D_\mu \delta a_\nu^a)(D^\nu \delta a^{a\mu})] \end{aligned}$$

Solo falta integrar por partes para hallar la ecuación deseada. Juntando esta expresión con el primer término ya calculado, el operador $\hat{K}$ para las fluctuaciones de campos con teorías gauge es:

$$\hat{K} = \delta^{ab} \eta_{\mu\nu} D_\mu D^\mu - \delta^{ab} D^\mu D^\nu + ef^{abc} F^{c\mu\nu} \quad (2.3.1)$$

Capítulo 3

Caso de tres dimensiones: el monopol.

3.1. Estudio clásico.

Dirac establece la teoría de los monopolos magnéticos en 1931 (véase [20]) pero nunca se ha llegado a observar un monopol experimentalmente. No se introducían en el desarrollo de teorías hasta que 't Hooft y Polyakov probaron que los monopolos aparecen de forma natural en algunas teorías de campos gauge como las teorías de Yang-Mills cargadas, en particular, para las Teorías de Gran Unificación en las que se intenta unificar las interacciones que gobiernan el Modelo Estándar. En esta sección se desarrollará el cálculo de la solución de los monopolos magnéticos (ver [23]).

Lo que se pretende es encontrar soluciones estáticas para teorías de 3+1 dimensiones, que son las que reciben el nombre de monopolos magnéticos.

Las soluciones de las ecuaciones del campo electromagnético libre, que son teorías gauge del grupo $U(1)$, no dan lugar a solitones, puesto que estas soluciones se disipan. Para que aparezcan, el campo electromagnético debe estar acoplado a campos escalares cargados. Este es el caso de los campos de Yang-Mills acoplados a campos escalares. Como ya se mencionó en secciones anteriores, los campos de Yang-Mills son invariantes gauge bajo el grupo $SU(2)$ y, sus soluciones estáticas (estudiadas por 't Hooft y Polyakov en 1974) son los monopolos magnéticos.

Se toma un conjunto de campos escalares $\phi^a(\mathbf{x}, t)$ (llamados campos de Higgs) y vectoriales $A_\mu^a(\mathbf{x}, t)$ (llamados campos gauge) en 3+1 dimensiones, donde $a = 1, 2, 3$. La densidad lagrangiana a estudiar es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - W^2)^2 \quad (3.1.1)$$

donde $G_{\mu\nu}^a$ es el campo de fuerza descrito en la Ecuación 2.1.6 (no se nombra como $F_{\mu\nu}^a$ para diferenciarlo del campo de fuerza para el campo electromagnético) y $g, \lambda > 0$ y W^2 parámetros de este modelo.

La densidad lagrangiana descrita en 3.1.1 es invariante bajo transformaciones gauge del grupo $SU(2)$ que son:

$$\phi^a \rightarrow [U(\mathbf{x}, t)]_{ab}\phi^b \quad (3.1.2)$$

$$(L^a A_\mu^a)_{bc} \rightarrow U_{bd}[L^a A_\mu^a + (i/e)\mathbb{I}\partial_\mu](U^{-1})_{ec} \quad (3.1.3)$$

$$[U(\mathbf{x}, t)]_{bc} = \exp(-iL^a\theta^a(\mathbf{x}, t))_{bc} \quad (3.1.4)$$

Siendo los generadores de $SU(2)$ matrices 3×3 y $(L^a)_{bc} = if_{abc}$. Al estar trabajando en 3+1 dimensiones, habrá 15 ecuaciones no lineales de campos acoplados.

Las ecuaciones de campo son:

$$D_\mu G^{a\mu\nu} = ef^{abc}(D^\nu \phi^b)\phi^c \quad (3.1.5)$$

$$D_\mu D^\mu \phi^a = -\lambda(\phi^b \phi^c)\phi^a + \lambda W^2 \phi^a \quad (3.1.6)$$

Las ecuaciones de campo de las soluciones estáticas fijado el gauge de Weyl ($A_0^a = 0$) son:

$$D_i G^{a\,ij} = ef^{abc}(D^j \phi^b)\phi^c \quad (3.1.7)$$

$$D_i D^i \phi^a = -\lambda(\phi^b \phi^c)\phi^a + \lambda W^2 \phi^a \quad (3.1.8)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ que son índices puramente espaciales.

Como interesan las soluciones estáticas de energía finitas (se pueden conseguir soluciones que no sean estáticas a partir de las que lo son mediante transformaciones gauge, se tiene la misma energía y carga topológica), primero es necesario calcular los vacíos clásicos de energía nula, ya que estos proporcionan las condiciones de frontera de las soluciones de energía finita. La ecuación de la energía para el caso estático y fijado el gauge de Weyl es:

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{4} G_{ij}^a G^{a\,ij} + \frac{1}{2} (D_i \phi^a)(D^i \phi^a) - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - W^2)^2 \right] \quad (3.1.9)$$

Si se impone que $E = 0$, el mínimo se da si:

$$A_i^a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\phi^a(\mathbf{x})\phi^a(\mathbf{x}) = W^2 \quad (3.1.11)$$

Juntando las expresiones 3.1.8 y 3.1.10, se deduce que $D_i \phi^a = 0 \rightarrow \partial_i \phi^a = 0$. Debido a las transformaciones gauge, existe una familia de soluciones degenerada con $E = 0$. En cada una, $\{\phi^a\}$ fija la magnitud W , que puede apuntar a cualquier dirección del espacio que sea independiente de x . Como consecuencia de la simetría gauge local del grupo $SU(2)$, aparece una simetría interna rotacional para los campos escalares ϕ . Esta hace que la familia de soluciones con $E = 0$ esté relacionada con cualquier otra familia, al igual que ocurre con el vórtice.

Para encontrar soluciones de energía finita y no nula, es necesario que la energía se anule cuando $r \equiv |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. De esto se sigue que:

$$r^{3/2} D_i \phi \rightarrow 0 \quad (3.1.12)$$

$$\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \rightarrow W^2 \quad (3.1.13)$$

Al reescribir estas condiciones en coordenadas esféricas, se comprueba que los valores permitidos de ϕ^a son aquellos que se encuentran en la superficie de una esfera de radio W^2 , por lo que debe introducirse la carga y la corriente topológica al igual que se hizo para el vórtice.

La corriente topológica viene dada en este caso por:

$$k_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{f_{abc}}{|\phi|^3} \partial^\nu \phi^a \partial^\rho \phi^b \partial^\sigma \phi^c \quad (3.1.14)$$

Como $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es antisimétrico, $\partial^\mu k_\mu = 0$.

Se define la carga topológica como:

$$Q = \int d^3x k_0 \quad (3.1.15)$$

En las ecuaciones de Maxwell que se derivan de las teorías gauge $U(1)$, la corriente magnética se introduce ad hoc:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu \quad (3.1.16)$$

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = 0 \quad (3.1.17)$$

Pero, si se trabaja en teorías gauge del grupo $SU(2)$, se ha comprobado que aparece naturalmente. Como $U(1)$ es subgrupo de $SU(2)$, 't Hooft se dio cuenta de que, definiendo:

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\phi^a}{|\phi|} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e} \frac{f^{abc}}{|\phi|^3} \phi^a D_\mu \phi^b D_\nu \phi^c \quad (3.1.18)$$

que, cuando $\phi^a = (0, 0, 1)$ entonces la Ecuación 3.1.18 resulta ser un campo electromagnético, ya que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$ del electromagnetismo.

Operando, se tiene que:

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{4\pi}{e}k_\mu \quad (3.1.19)$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene el monopolo. Si se compara esta con la Ecuación 3.1.16, la corriente magnética viene dada por k_μ/e .

El campo magnético resulta:

$$B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} \quad (3.1.20)$$

y su divergencia es:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{e}k_\mu \quad (3.1.21)$$

La solución del monopolo resulta ser:

$$\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{r^3} \quad (3.1.22)$$

siendo g un número real que se denomina carga magnética. Esta ecuación resulta familiar puesto que es análoga a la del monopolo eléctrico. La expresión para el monopolo eléctrico o el magnético también pueden obtenerse de hacer un desarrollo multipolar y quedarse con el primer término de este desarrollo. En electromagnetismo, el término monopolar del campo magnético es nulo al ser su divergencia cero (no tiene ni fuentes ni sumideros) pero, en este caso, aparece de forma natural.

Finalmente, se puede escribir la carga total del monopolo magnético como:

$$g = \int d^3x \frac{k_0}{e} = \frac{Q}{e} \quad (3.1.23)$$

Que es muy similar a la condición de cuantización de Schwinger $ge = \hbar n$, siendo en este caso e la carga del electrón que, debido a la dualidad onda-partícula de la mecánica cuántica, $\hbar e_{acoplamiento} = e_{carga}$. En la sección siguiente se tratará mejor el tema de las condiciones de cuantización que surgen del monopolo magnético.

3.2. Problema de la cuantización.

Los monopolos magnéticos tienen importancia por proporcionar información sobre el universo temprano y/o los fenómenos físicos a escalas subatómicas. Además, algunos de los monopolos que surgen de las teorías de gran unificación poseen campos de gluones, es decir, campos de mediadores de la interacción fuerte que poseen cargas de color. También se conocen las condiciones en las que los monopolos pueden cuantizarse sin encontrar ninguna singularidad.

La condición de cuantización de Dirac es:

$$eg = 0, \pm 1/2, \pm 1... \quad (3.2.1)$$

y surge de exigir que la función de onda de una partícula cuántica cargada siga siendo única y bien definida en presencia de un monopolo magnético. Es decir, de imponer que un campo cuántico generado por una partícula como el electrón pueda acoplarse al campo clásico generado por un monopolo magnético. Tanto g como e no pueden hacerse arbitrariamente pequeñas debido a esta condición.

El mismo resultado se obtiene partiendo de una teoría gauge abeliana, donde no se puede encontrar un campo generado por un monopolo magnético debido a las divergencias de este a menos que se defina el potencial que sí sea capaz de hacerlo excepto por una línea que se extiende desde el monopolo hasta el infinito conocida como la cuerda de Dirac (ver [20]). Haciendo el desarrollo calculístico pertinente, si se cumple la relación descrita en 3.2.1, la cuerda de Dirac no se puede observar y, por tanto, desaparece la divergencia del campo del monopolo magnético.

De igual forma, si se realiza la construcción de Wu-Yang en la que se usan potenciales vector para las distintas regiones del espacio y se exige que ambos describan la misma situación física bajo la transformación gauge, se obtiene de nuevo la condición de cuantización de Dirac.

Es decir, la condición de cuantización de Dirac surge de imponer que las singularidades del monopolo no sean observables.

Esta condición de cuantización proporciona varias conclusiones. En primer lugar, sí que se ha observado que la carga eléctrica posee cuantización, es decir, cualquier carga eléctrica es un múltiplo entero de e . Esto se explica con la existencia del monopolo magnético puesto que, de existir al menos uno, cualquier carga eléctrica debe estar cuantizada (el grupo $U(1)$ que describe la electrodinámica debe estar contenido en otro grupo semisimple que sufra una ruptura espontánea de simetría). Tanto la cuantización de la carga eléctrica como la existencia de monopolos magnéticos son consecuencia de una ruptura espontánea de una simetría semisimple.

A su vez, se puede demostrar que la condición de cuantización obliga a que cualquier partícula cargada magnéticamente tenga carga eléctrica fraccionaria.

La condición de cuantización de Dirac puede ser también consecuencia de los campos de las teorías de Yang-Mills, que son teorías gauge no abelianas.

A día de hoy, los monopolos magnéticos (como objetos fundamentales) no han sido observados, y se siguen esperando observar. Los motivos principales son las altísimas energías requeridas en los aceleradores para su producción. Actualmente hay en CERN un experimento activo, el experimento MoEDAL (Monopole and Exotics Detector at the LHC), que trata de buscar la observación de monopolos magnéticos a través del efecto Schwinger: se espera que si se produce una ruptura de vacío a muy altas energías (colisiones entre fotones e iones pesados), pueda observarse la creación de pares de monopolos (en analogía con los pares partícula antipartícula que se crean en cascada

en el efecto Schwinger) en el correspondiente efecto Schwinger. Desde un punto de vista teórico se intuye que estos objetos deben existir necesariamente, ya que la mínima unidad de carga observada en la naturaleza es e (la magnitud de carga del electrón, ya sea con signo positivo o negativo) y esta condición de cuantización sólo puede explicarse desde primeros principios mediante la existencia de monopolos magnéticos. No obstante, estos objetos son aún hoy en día un problema abierto en muchos aspectos, también teóricos.

En el caso que nos ocupa, un aspecto de importancia central aún no resuelto es la corrección cuántica al orden de un lazo de la masa del monopolo de 't Hooft-Polyakov. Desde un punto de vista teórico, este cómputo ha podido llevarse a cabo en el caso de generalizaciones supersimétricas de la teoría. En estas teorías no existen divergencias en la teoría al orden de un lazo ya que las divergencias de los sectores bosónicos de la teoría son cancelados por sus análogos del sector fermiónico, lo que hace que el cálculo pueda incluso llevarse a cabo de forma analítica. No obstante; como es bien sabido, los resultados obtenidos por CERN en las últimas décadas parecen indicar que la naturaleza no es supersimétrica y, por tanto, el modelo más realista de monopolo sigue siendo el descubierto por 't Hooft y Polyakov en la teoría gauge no abeliana con grupo $SU(3)$. En este caso las correcciones cuánticas a la masa al orden de un lazo aún no han sido calculadas ni numérica y ni analíticamente, esto por tanto es un problema abierto. La cuestión clave en esta teoría, cuya lagrangiana de partida es formalmente la misma que la del vórtice en el caso 2D, es que la renormalización al orden de un lazo de la teoría al incluir los fantasmas de Faddeev y Popov no se pueden introducir de forma tan sencilla como en los casos presentados en este trabajo. Más aún, las cancelaciones que producen en el caso del vórtice tanto la lagrangiana de contratérminos al orden de un lazo como la de los campos de los fantasmas parecen no ocurrir en el caso del monopolo. Ello hace que el desarrollo computacional análogo al ya hecho para el vórtice no sea factible en el caso del monopolo, a pesar de que la solución del monopolo es conocida de forma analítica. El interés en conocer la corrección cuántica al orden de un lazo para la masa del monopolo es claro: permite establecer un umbral de energía para la posible observación de éstos en aceleradores. Debe tenerse en cuenta, que en los grandes aceleradores como CERN las contribuciones cuánticas no pueden ser obviadas.

Capítulo 4

Conclusiones.

El estudio entre campos clásicos y cuánticos permite elucidar muchos fenómenos físicos relevantes a escalas inusualmente altas para la física cuántica. Unos ejemplos de esto son:

- Efecto Schwinger: creación de pares electrón-positrón debido a la presencia de un campo eléctrico intenso.
- Efecto Casimir: aparición de una fuerza atractiva entre dos placas dieléctricas debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío del campo electromagnético.
- Monopolos de 't Hooft y Polyakov.
- Radiación de Hawking (ver [13]): emisión de partículas por un agujero negro debido a efectos cuánticos en las proximidades del horizonte de eventos.

El papel que juegan los objetos extensos de naturaleza topológica en la física fundamental está aún por explorar puesto que no se han observado (como es el caso del monopolito). Esto se debe a que en los experimentos realizados, como los experimentos de choque en aceleradores de partículas, se observan las interacciones entre las fluctuaciones cuánticas de los campos (las partículas), pero no se puede predecir con exactitud la teoría clásica de la que provienen. Otra de las complicaciones de estos experimentos es lograr la energía suficiente para que puedan producirse lo que, sumado a la dificultad de conocer la teoría clásica de la que provienen, hace que sea extremadamente complicado poder observar estos objetos extensos en la naturaleza.

El estudio de las fluctuaciones cuánticas acopladas a lumps permite estudiar la estabilidad de estos a nivel cuántico. Uno de los ejemplos presentados en la memoria son los estados BPS de los vórtices, donde se anulan las fuerzas clásicas y el carácter topológico de la solución toma un valor importante. En este caso, al anularse las fuerzas clásicas, el sistema se encuentra en equilibrio pero el estudio de las fluctuaciones cuánticas alrededor de estas soluciones permite conocer si estos objetos son realmente estables.

Todavía existen muchos aspectos sobre los objetos extensos en teoría clásica y cuántica de campos sin desarrollar como por ejemplo:

- Cuantización del monopolito en caso de que este no sea supersimétrico.
- Estudio de los skyrmiones, que son objetos topológicos importantes en la física del estado sólido y en superconductores.
- Estudio de las fuerzas cuánticas de vacío entre los lumps.

Apéndice A

Demostración

$$\cos [4 \arctan(e^x)] = 1 - \frac{2}{\cosh^2(x)}.$$

Se define $\theta = \arctan(e^x)$. Entonces $\tan(\theta) = e^x$. Se deduce que el cateto opuesto es e^x y el cateto contiguo es 1. De esta forma, se define la hipotenusa $h^2 = 1 + e^{2x}$.

Mediante el uso de la siguiente fórmula y manipulando la Expresión 1.2.9, se obtiene el potencial descrito en la Ecuación 1.2.10.

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

Con esta fórmula, se calcula $\cos(4\theta)$ y, con el uso de la misma fórmula, se calcula $\cos(2\theta)$, resultado necesario para hallar $\cos(4\theta)$.

Apéndice B

Cuantización del campo escalar libre.

La acción del campo escalar libre es:

$$S_0(\phi) = \int d^4\mathbf{x} \mathcal{L} = \int d^4\mathbf{x} \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \quad (\text{B.0.1})$$

Para calcular el hamiltoniano, es necesario hallar el momento conjugado $\pi(\mathbf{x})$:

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi(\mathbf{x}))} = \partial_0\phi(\mathbf{x})$$

Una vez calculado $\pi(x)$ es inmediato conocer el hamiltoniano, que es la integral de la densidad lagrangiana. Se obtiene la siguiente expresión:

$$H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} (\pi \partial_0\phi - \mathcal{L}) = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{1}{2}((\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2) + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \quad (\text{B.0.2})$$

A partir de este momento, se realizará un tratamiendo en 1+1 por simplicidad en los cálculos, pero para realizarlo en más dimensiones se sigue el mismo procedimiento. La acción y el hamiltoniano anterior se adaptarán a estas dimensiones. Además, como es un cálculo realizado dentro del marco de la mecánica cuántica, es necesario cambiar las magnitudes por operadores, tanto el campo y el momento como también los operadores de aniquilación y creación que se usarán en el desarrollo de la sección. Los cambios a realizar son:

$$\phi, \phi, a, a^* \longrightarrow \hat{\phi}, \hat{\pi}, a, a^\dagger$$

Dado el operador de campo escalar $\hat{\phi}(x)$ y su operador momento conjugado $\hat{\pi}(x)$, se establecen las siguientes relaciones de conmutación, dadas por los postulados fundamentales de la mecánica cuántica:

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0 \quad (\text{B.0.3})$$

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\hbar\delta(x-y) \quad (\text{B.0.4})$$

Puede verse que tanto $\hat{\phi}$ como $\hat{\pi}$ no dependen del tiempo ya que se está trabajando en la imagen de Schrödinger, por lo que su evolución temporal vendrá dada por la ecuación de Schrödinger.

Calcular el espectro de energía resulta difícil porque hay infinitos grados de libertad. Pero para las teorías libres se puede escribir la dinámica como si cada grado de libertad evolucionara independientemente del resto. En las teorías de campos libres, las densidades lagrangianas son cuadráticas, por lo que las ecuaciones de campo son lineales.

Escrita la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (p^2 + m^2)\right)\phi(p, t) = 0$$

se define

$$\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2} \quad (\text{B.0.5})$$

Para cuantizar el campo escalar libre, se aplica la misma cuantización que para el oscilador armónico con los operadores creación y aniquilación, por ello es necesaria la expresión de ω_p , ya que se incluye en la definición de dichos operadores. Como solo hay una dimensión espacial, solo habrá un momento asociado. Tanto el campo como el momento pueden escribirse de la siguiente forma usando la descripción de la transformada de Fourier:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_p}} (a_p e^{ipx} + a_p^\dagger e^{-ipx}) \quad (\text{B.0.6})$$

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} (-i) \sqrt{\frac{\hbar\omega_q}{2}} (a_q e^{iqx} - a_q^\dagger e^{-iqx}) \quad (\text{B.0.7})$$

El índice p se usa para indexar el campo y el momento del campo asociado al momento p . Se siguen manteniendo las relaciones de conmutación de la Ecuación B.0.3 y de la Ecuación B.0.4 ya que, como se ha comentado anteriormente, son un postulado fundamental de la mecánica cuántica.

Se definen los operadores aniquilación (a_p) y creación ($a_p^\dagger$):

$$a_p = \int dx \frac{e^{-ipx}}{2\sqrt{\pi\hbar}} \left(\hat{\pi}(x) - i\hat{\phi}(x) \right) \quad (\text{B.0.8})$$

$$a_p^\dagger = \int dx \frac{e^{ipx}}{2\sqrt{\pi\hbar}} \left(\hat{\pi}(x) + i\hat{\phi}(x) \right) \quad (\text{B.0.9})$$

Las relaciones de conmutación que siguen estos operadores son las siguientes:

$$[a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0 \quad (\text{B.0.10})$$

$$[a_p, a_q^\dagger] = \delta(p - q) \quad (\text{B.0.11})$$

Para probar que es correcta la descripción de los operadores de esta forma, se realiza el siguiente cálculo, comprobando que se cumplen las relaciones de conmutación definidas anteriormente. El cálculo se hace para la relación de conmutación B.0.11, puesto que la otra es un cálculo más sencillo y prácticamente idéntico al que se realiza a continuación:

$$\begin{aligned} [a_p, a_q^\dagger] &= a_p a_q^\dagger - a_q^\dagger a_p = \\ &= \int dx dy \frac{\exp(i(qy - px))}{4\pi\hbar} \left[(\hat{\pi}(x) - i\hat{\phi}(x))(\hat{\pi}(y) + i\hat{\phi}(y)) - (\hat{\pi}(y) + i\hat{\phi}(y))(\hat{\pi}(x) - i\hat{\phi}(x)) \right] = \\ &= \int dx dy \frac{\exp(i(qy - px))}{4\pi\hbar} \left([\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] + [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] - i[\hat{\phi}(y), \hat{\pi}(x)] - i[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] \right) = \\ &= \int dx dy \frac{\exp(i(qy - px))}{4\pi\hbar} \{-i[2i\hbar\delta(x - y)]\} = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{i(q-p)x} = \delta(p - q) \end{aligned}$$

Una vez descritos los operadores y sus relaciones de conmutación, se escribe el hamiltoniano del sistema para el campo escalar libre en función de los operadores a_p y $a_p^\dagger$:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dx \left[\hat{\pi}(x)^2 + (\nabla \hat{\phi}(x))^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2} \int \frac{dx dp dq}{2\pi} \left[-\frac{\sqrt{\omega_p \omega_q}}{2} (a_p e^{ipx} - a_p^\dagger e^{-ipx})(a_q e^{iqx} - a_q^\dagger e^{-iqx}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2\sqrt{\omega_p \omega_q}} (a_p e^{ipx} + a_p^\dagger e^{-ipx})(a_q e^{iqx} + a_q^\dagger e^{-iqx}) - \frac{pq}{2\sqrt{\omega_p \omega_q}} (a_p e^{ipx} - a_p^\dagger e^{-ipx})(a_q e^{iqx} - a_q^\dagger e^{-iqx}) \right] \end{aligned}$$

Al hacer el producto e integrar en la variable x , aparecen $\delta(p \pm q)$ multiplicando cada término, por lo que se puede resolver también la integral en la variable q . Además, teniendo en cuenta que $\omega_p = \omega_{-p}$, la expresión anterior puede escribirse como:

$$H = \frac{\hbar}{4\omega_p} \int \frac{dp}{\omega_p} \left[(-\omega_p^2 + m^2 + p^2)(a_p a_{-p} + a_p^\dagger + a_{-p}^\dagger) + (\omega_p^2 + m^2 + p^2)(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) \right]$$

Usando la expresión de ω_p , el primer término es nulo y el segundo puede reescribirse como $2\omega_p^2$. Se puede manipular el último paréntesis teniendo en cuenta las relaciones de conmutación de los operadores creación y aniquilación.

Finalmente, se llega a la expresión:

$$H = \frac{\hbar}{2} \int dp \omega_p (a_p^\dagger a_p + \delta(0)) \quad (\text{B.0.12})$$

Pero esta expresión cuenta con divergencias necesarias de eliminar, para lo cual se usa la renormalización.

Siguiendo el mismo desarrollo que hasta ahora que es el del oscilador armónico (ver [29]), se define el vacío $|0\rangle$ como:

$$a_p |0\rangle = 0 \quad \forall p \quad (\text{B.0.13})$$

Por esta definición, la energía $H|0\rangle$ en este vacío es infinita debido a la delta evaluada en 0. La aparición de esta divergencia es porque el espacio es infinitamente largo, por lo que se puede extraer este infinito suponiendo que todo se encuentra contenido en una caja con lados de longitud L para imponer condiciones periódicas a los campos (véase [29]) y, posteriormente, se hace el límite donde $L \rightarrow \infty$. Otra forma más práctica de eliminar este infinito es definiendo la diferencia de energías en lugar de la energía absoluta, lo cual es más práctico porque es lo que tiene significado físico. Si se sigue esta forma de eliminar la divergencia, basta con redefinir el hamiltoniano como:

$$H = \hbar \int \frac{dp}{2} \omega_p a_p^\dagger a_p \quad (\text{B.0.14})$$

De esta manera, se eliminan las divergencias.

Bibliografía

- [1] Y. Aharonov y D. Bohm (1959). *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*. Phys. Rev. **115** (3) 485-491.
- [2] A. Alonso Izquierdo, W. García Fuertes, M. de la Torre Mayado y J. Mateos Guilarte (2005). Phys. Rev. **D71** 125010.
- [3] Luis J. Boya (2008). *Quantum-mechanical scattering in one dimension*, Rivista del Nuovo Cimento **31** Vol. 2. Capítulo 5, 108-109.
- [4] H. B. G. Casimir (1948). *On the attraction between two perfectly conducting plates*. Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51** 793-795.
- [5] S.F. Coleman (1985). *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press. Capítulo 6.
- [6] S.F. Coleman (2018). *Quantum Field Theory*, World Scientific. Capítulo 46.
- [7] P. A. M. Dirac (1928). *The quantum theory of the electron*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. **117** (778). 610-624.
- [8] P. G. Drazin y R. S. Johnson (1983). *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press.
- [9] L. D. Faddéev y V. N. Popov (1967). *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*. Physics Letters B. **25** (1) 29-30
- [10] L. D. Faddéev y A.A. Slavnov (1999). *Introducción a la Teoría Cuántica de los Campos Gauge*, Editorial URSS. 8-18. Original publicado en 1988.
- [11] R. P. Feynman (1949). *Space-Time approach to quantum electrodynamics*. Phys. Rev. **76** (6) 769-789.
- [12] N. Graham, M. Quandt y H. Weigel (2009). *Spectral Methods in Quantum Field Theory*. Springer.
- [13] S. W. Hawking (1975). *Particle creation by black holes*. Communications in Mathematical Physics. **43** (3) 199-220.
- [14] G. 't Hooft (1974). *Magnetic monopoles in unified gauge theories*. Nuclear Physics B. **79** (2) 276-284.
- [15] L. Jacobs y C. Rebbi (1979). Phys. Rev. **B19** 4486.
- [16] A. Jaffe y C. H. Taubes (1980). *Vortices and monopoles*. Birkhauser.

- [17] J.M. Muñoz Castañeda (2005). *Vórtices cuánticos de Abrikosov-Nielsen-Olesen*, (Tesina de grado no publicada). Universidad de Salamanca.
- [18] J. M. Muñoz Castañeda, J. Mateos Guilarte y A. Moreno Mosquera (2013). Phys. Rev. **D87** 105020.
- [19] Klaus Kirsten (2019). *Spectral Functions in Mathematics and Physics*. CRC Press.
- [20] S.F. Coleman (1983). *The magnetic monopole fifty years later*, Plenum Press.
- [21] F. W. J. Olver, D.W. Lozier, R. F. Boisvert y C. W. Clark (2010). *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press.
- [22] A. M. Polyakov (1974). *Particle spectrum in quantum field theory*. JETP Letters **20 (6)** 194-195.
- [23] R. Rajaraman (1987). *Solitons and Instantons*, North Holland.
- [24] J. Schwinger (1948). *On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron*. Phys. Rev **73(4)** 416-417.
- [25] J. Schwinger (1951). *On gauge invariance and vacuum polarization*. Phys. Rev. **82 (5)** 664-679.
- [26] M. Talagrand (2022). *What is a Quantum Field Theory?*, Cambridge University Press. 161-163.
- [27] A. Jaffe y C. H. Taubes (1980). *Vortices and monopoles*. Birkhauser.
- [28] S. Tomonaga (1946). *On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields*. Progress of Theoretical Physics. **1(2)** 27-42.
- [29] D. Tong (2007). *Quantum Field Theory* [PDF]. Universidad de Cambridge. 21-25.
- [30] H. J. Vega y F. A. Schaposnik (1976). Phys. Rev. **D14** 1100.