



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Órbitas alrededor de agujeros negros

Autor

Óscar Pascual Pérez

Tutor

Dr Diego Sáez Gómez

Curso

2024/2025

Agradecimientos

Quiero mostrar mi agradecimiento a todas las personas que han hecho posible la elaboración de este trabajo.

A mi tutor Diego Sáez Gómez por su labor y ayuda. A mi familia, en especial a mis padres y a mis abuelos, por apoyarme a lo largo de estos cinco años de carrera. Y a mis amigos por todos los buenos momentos que han hecho de mi trayectoria universitaria una mejor experiencia.

Abstract

Black holes in the Schwarzschild geometry have been widely studied in detail, as well as particle orbits around them. However, there is no complete classification of these orbits based on the effective potential produced by the black hole and the orbit's energy, which would be more intuitive and result in an overall better understanding of the orbits as a whole.

Also, there exists a set of geometries that give rise to black holes with no essential singularities, called regular black holes. In particular, the Simpson-Visser geometry stands out as a simple and elegant variation of Schwarzschild's, which also incorporates the description of traversable wormholes. Yet, orbits in this geometry lack any proper classification, on top of massive particle orbits being underrepresented in research, compared to massless particle orbits.

The objective of this thesis is to create a comprehensive and intuitive classification of massive and massless particle orbits, and give a qualitative description of their movement along said orbits, both in the Schwarzschild and Simpson-Visser geometries.

Índice general

1	Introducción	1
2	Conceptos introductorios	3
2.1	Órbitas keplerianas	3
2.2	Geometría Riemanniana	3
2.3	Relatividad General	4
2.4	Movimiento geodésico	4
3	Métrica de Schwarzschild	6
3.1	Descripción de la métrica	6
3.2	Ecuaciones geodésicas en Schwarzschild	6
3.3	Órbitas de partículas masivas	9
3.3.1	Ecuaciones para partículas masivas	9
3.3.2	El potencial efectivo	9
3.3.3	Clasificación de las geodésicas	11
3.3.4	Órbitas permitidas en los casos especiales del potencial efectivo	17
3.3.5	Precesión del Periastro	19
3.4	Órbitas de partículas sin masa (luz)	20
3.4.1	Ecuaciones para partículas con masa nula	20
3.4.2	El potencial efectivo	20
3.4.3	Clasificación de las órbitas	22
3.4.4	Deflexión de la trayectoria	25
4	Métrica de Simpson-Visser	26
4.1	Descripción de la métrica	26
4.2	Órbitas de partículas masivas	27
4.2.1	El potencial efectivo	27
4.2.2	Geodésicas radiales	28
4.2.3	Geodésicas circulares y el ISCO	29
4.2.4	Diferencias en las órbitas	30
4.3	Órbitas de partículas sin masa	32
4.3.1	El potencial efectivo	32
4.3.2	Geodésicas radiales	33
4.3.3	Geodésicas circulares	34
4.3.4	Diferencias en las órbitas	34
4.3.5	Deflexión de la trayectoria	36
5	Conclusiones	37
A	Apéndice	42
A.1	Conversión unidades geométricas	42
A.2	Programa para el cálculo de las órbitas	42
	Bibliografía	43

1. Introducción

En 1915, Albert Einstein presentó la Relatividad General, una nueva teoría fruto de su búsqueda por introducir el campo gravitatorio al marco teórico de la Relatividad Especial. Esta teoría resultó en un cambio de paradigma en la forma de entender la Gravedad, pasando de ser vista como una fuerza entre objetos con masa, a ser la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de masa y energía.

Unos meses más tarde, en 1916, el físico y matemático alemán Karl Schwarzschild presentó la primera solución exacta y no trivial de las ecuaciones de campo de Einstein, la cual describe el espacio-tiempo en el exterior de un objeto masivo con simetría esférica, estático y sin carga, al cual se le dio el nombre de espacio-tiempo de Schwarzschild.

Resultó que esta solución permite la existencia de unos objetos extraordinariamente densos, capaces de generar una gravedad tan extrema que ni siquiera la luz es capaz de escapar de los mismos. Hoy en día se conoce a estos objetos por el nombre de agujeros negros, usado por primera vez por el astrónomo John Wheeler en 1967.

En un inicio se pensaba que los agujeros negros solo eran un resultado matemático y que no podían formarse en el universo. Sin embargo, en 1964 se encontró un objeto desconocido al que llamaron Cygnus X-1 (Cyg X-1 de forma abreviada), el cual es una de las fuentes más brillantes de rayos X en el cielo, pero su posición no coincidía con ninguna fuente brillante de luz visible ni infrarroja en particular. La naturaleza de Cyg X-1 fue un enigma, hasta que en 1970 la NASA lanzó su satélite Uhuru, con el cual en 1971 se logró localizar Cyg X-1 en un sistema binario formado por una estrella y un objeto que no emite luz visible, el cual se calculó que poseía 15 veces la masa solar, solo posible si fuera un agujero negro, consolidando a Cyg X-1 como el primer agujero negro detectado.

Desde entonces, la evidencia de que existen los agujeros negros no ha dejado de crecer, y en la actualidad, se sabe que los agujeros negros son extremadamente comunes, además de necesarios para la formación galáctica, existiendo un agujero negro supermasivo en el centro de la gran mayoría de galaxias. Finalmente, de todas las detecciones de agujeros negros, caben destacar la primera detección de ondas gravitacionales por el observatorio LIGO en 2016, habiendo sido producidas por una colisión de dos agujeros negros, y la obtención de imágenes directas por el proyecto EHT, primero del agujero negro en el centro de la galaxia Messier 87, en 2019 y posteriormente, en 2022, de Sagitario A* , el agujero negro localizado en el centro de la Vía Láctea.

Una de las características de los agujeros negros de Schwarzschild es que poseen una singularidad de curvatura en su centro, la cual está cubierta por un horizonte de sucesos.

Sin embargo, la existencia de esta singularidad no es deseada, ya que en la misma no se cumplen las leyes de la física. Esto resultó en la búsqueda de geometrías que produjeran objetos sin ninguna singularidad, los llamados agujeros negros regulares.

De todas las geometrías regulares que existen, en este TFG se estudiará la presentada por Alex Simpson y Matt Visser en 2019 [1], la cual modifica la geometría de Schwarzschild añadiendo un parámetro que dicta la naturaleza del agujero negro regular producido. Teniendo una cualidad especial, para ciertos valores del parámetro la geometría describe un agujero de gusano transitado de Thorne-Morris [2]. Estos son objetos que no poseen singularidades, ni horizontes de sucesos, pero que presentan una garganta la cual conecta dos espacio-tiempos asintóticamente planos.

Este trabajo tendrá como foco central el concepto de las geodésicas, las cuales son la generalización de las líneas rectas en una geometría no euclidiana, haciendo que estas mismas describan las trayectorias de las partículas libres, es decir, sus órbitas, en un espacio-tiempo curvo. Además, el estudio de las geodésicas es de gran importancia en la Relatividad General por dos razones principales: primero, permite deducir la mayoría de características de un espacio-tiempo dado, y segundo, el estudio de las geodésicas forma un pilar fundamental en el desarrollo de temas más complejos, como los sistemas binarios y colisiones de objetos masivos, los discos de acreción o las lentes gravitacionales.

La geometría de Schwarzschild ha sido estudiada de forma extensiva durante este último siglo, sin embargo, en la bibliografía sobre la Relatividad General no es común encontrar una clasificación detallada de las geodésicas, exceptuando la ideada por Subrahmanyan Chandrasekhar [3], siendo esta la clasificación más completa, centrándose en las raíces polinómicas de la ecuación del movimiento radial para permitir la resolución exacta de las ecuaciones geodésicas, resultando en una presentación poco intuitiva y que deja de lado el estudio de los diferentes fenómenos. En el caso de la geometría de Simpson-Visser no existe ninguna clasificación equivalente en el momento de escritura de este TFG, y algunos detalles de las geodésicas no han sido estudiados en profundidad, principalmente para las partículas con masa.

Entonces, el objetivo de este trabajo de fin de grado es construir una clasificación que, usando la de Chandrasekhar como base, tome el potencial efectivo, la energía de las órbitas y los efectos de precesión del periastro y deflexión de la trayectoria como las herramientas centrales para catalogar los distintos tipos de órbitas de una forma rigurosa a la vez que intuitiva. Y explicar el movimiento de las partículas en dichas geodésicas de forma cualitativa, sin recurrir a las soluciones exactas. Esto se hará para las geometrías de Schwarzschild y Simpson-Visser, además de completar el estudio de las geodésicas de Simpson-Visser en un nivel fundamental.

El procedimiento del estudio de la geometría de Schwarzschild será el siguiente: primero se obtendrán las ecuaciones relevantes. Entonces, se estudiarán en detalle las geodésicas más simples (radiales y circulares), para seguidamente clasificar los casos más generales y deducir su comportamiento de forma cualitativa, haciendo uso, principalmente, del potencial efectivo y de las representaciones de dichas órbitas, explicando a su vez los fenómenos más relevantes para esta clasificación.

Para la geometría de Simpson-Visser se encontrará que admite los mismos tipos de geodésicas que en Schwarzschild, por lo que se seguirá un procedimiento similar, pero con un espíritu más comparativo, en el que se estudiarán las diferencias en la clasificación y en el comportamiento de las geodésicas en esta nueva geometría respecto a las de Schwarzschild.

En ambas geometrías será necesaria la distinción entre partículas masivas y sin masa, realizando estudios similares para ambos tipos de partículas.

En especial, se ha elegido estudiar agujeros negros en lugar de otro tipo de objetos debido a que su alta densidad les confiere un tamaño lo suficientemente pequeño para que se permita la existencia de todo tipo de órbitas, al contrario que objetos de densidades menores, para los cuales una partícula colisionaría con el objeto antes de experimentar ciertos tipos de órbita.

Por ejemplo, para un agujero negro de Schwarzschild de masa M , cuyas dimensiones (por unidad de masa, $\tilde{r} = r/M$) son $\tilde{r}_S = 2G/c^2 = 1,49 \times 10^{-27}$ m/kg (r siendo la coordenada radial esférica), la esfera de fotones (región del espacio donde la luz sigue órbitas circulares) ocurre en $\tilde{r} = 3G/c^2 = 2,23 \times 10^{-27}$ m/kg, encontrándose en el exterior del agujero negro. En cambio, teniendo ahora en cuenta el Sol, sus dimensiones son $\tilde{r}_\odot = 3,49 \times 10^{-22}$ m/kg, las cuales son 5 órdenes de magnitud mayores que las dimensiones de la esfera de fotones, localizándose en el interior de la estrella, resultando en que este no posea una esfera de fotones.

2. Conceptos introductorios

Para esta sección se han consultado los libros [4], [5] y [6].

2.1 Órbitas keplerianas

En la teoría de la gravitación de Newton, el problema de los dos cuerpos se puede reducir a un problema unidimensional equivalente descrito por un potencial efectivo, llamando M a la masa del objeto central, m a la masa de la partícula de prueba y tomando $M \gg m$:

$$V_{eff} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2Mr^2} \quad (2.1)$$

Este potencial produce las órbitas keplerianas. Si $E < 0$, las órbitas son elipses con el objeto masivo central en uno de los focos, degenerando en una circunferencia en el mínimo, $E = V(r_{min})$. Si $E \geq 0$, las órbitas vienen descritas por hipérbolas, excepto en el caso $E = 0$ que son parábolas.

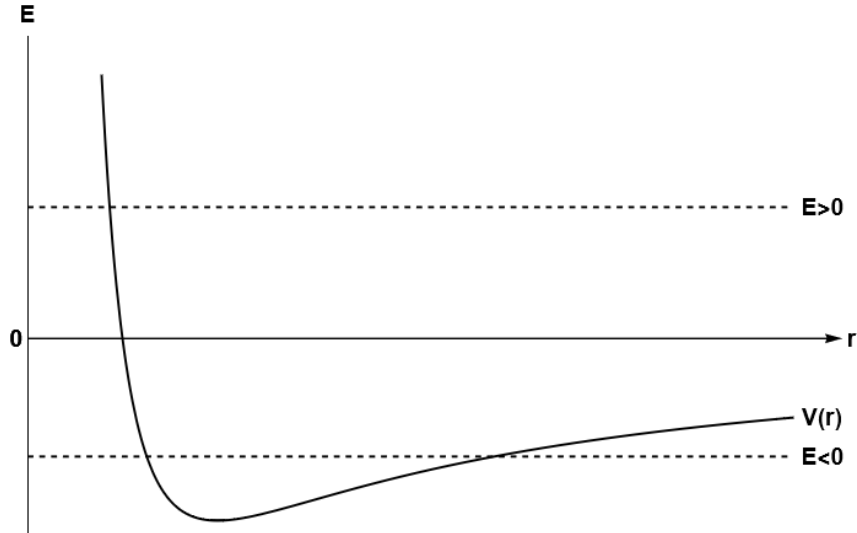


Figura 2.1: Potencial efectivo de Newton.

2.2 Geometría Riemanniana

Una geometría Riemanniana se define mediante su métrica, la cual representa la distancia entre dos puntos infinitesimalmente separados. Dados dos puntos P y Q con coordenadas x^μ y $x^\mu + dx^\mu$, respectivamente, la distancia entre ambos puntos es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

Esta es la forma general de una métrica de Riemann, donde $g_{\mu\nu}(x)$ son las componentes del llamado tensor métrico g , y ds^2 el intervalo invariante, el cual puede ser mayor, igual o menor que cero.

Mediante el tensor métrico, se define la conexión Riemanniana de la métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\mu}) \quad (2.3)$$

En este tipo de geometrías aparece el tensor de curvatura de Riemann, el cual determina la curvatura de la variedad, y viene definido en función del tensor métrico y sus primeras y segundas derivadas:

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} \quad (2.4)$$

Si el tensor de Riemann es nulo en alguna región de la variedad, entonces esa región tiene que ser plana.

Además, el tensor de curvatura acepta dos contracciones independientes:

1. Contrayendo el primer y último índice se obtiene el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\sigma}^{\sigma} \quad (2.5)$$

2. Contrayendo una vez más se obtiene el escalar de Ricci, o de curvatura:

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} \quad (2.6)$$

2.3 Relatividad General

La Relatividad General de Einstein es una teoría geométrica que explica la interacción gravitatoria. Esta teoría surge de la idea de que todos los objetos se comportan de la misma forma bajo la influencia de un campo gravitatorio. Idea que Einstein generalizó, llevándole a obtener el Principio de Equivalencia: *en una región pequeña del espacio-tiempo, todas las leyes físicas toman la misma forma que en la relatividad especial.*

La primera consecuencia de este principio es que la única métrica posible es la Riemanniana. Además, este principio implica que la gravedad no es una fuerza, sino la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, la cual es producida por la presencia de masa. Esta afirmación lleva a las ecuaciones de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2}T^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Donde $T^{\mu\nu}$ el tensor energía-momento, y $G^{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, el cual se define de la siguiente forma:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (2.8)$$

En este trabajo se van a estudiar exclusivamente regiones del espacio-tiempo vacío, siendo $T_{\mu\nu} = 0$, lo cual reduce 2.7 a las ecuaciones de campo en el vacío:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.9)$$

2.4 Movimiento geodésico

Otra consecuencia del Principio de Equivalencia es que toda partícula en caída libre seguirá una geodésica, esto es una curva, con componentes $x^{\mu}(\lambda)$, que extremizan la longitud medida por la métrica entre dos puntos, $L = \int_P^Q |g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}|^{1/2} d\lambda$. Donde λ es un parámetro afín, el cual asegura que $\frac{d\vec{t}}{d\lambda} = 0$, siendo $\vec{t}$ el vector tangente a $x^{\mu}(\lambda)$. Además, cualquier combinación lineal de un parámetro afín también lo será. La elección de un parámetro afín simplifica la ecuación de las geodésicas, obteniendo:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \quad (2.10)$$

Existen tres tipos de curvas geodésicas:

- Geodésicas de tipo tiempo: son curvas de longitud positiva, cumplen que $|\vec{t}| = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu > 0$. Las partículas masivas siguen este tipo de geodésicas debido a que su velocidad tiene que ser menor que la de la luz, c . En este caso la longitud s es un parámetro afín, sin embargo, es usual tomar el tiempo propio, $c^2 d\tau^2 = ds^2$, como parámetro afín.
- Geodésicas nulas: son curvas de longitud nula, cumplen que $|\vec{t}| = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$. Las partículas de masa nula seguirán este tipo de geodésicas debido a que su velocidad tiene que ser c . Como ahora $s = 0$ no se puede usar como parámetro, y se toma un parámetro afín cualquiera, λ , cuya única condición es que su valor varíe a lo largo de la curva, no siendo necesario especificarlo.
- Geodésicas de tipo espacio: son curvas de longitud negativa, cumplen que $|\vec{t}| = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu < 0$. Toda partícula que siga este tipo de geodésica lo hace con una velocidad mayor a c , por lo que no serán objeto de estudio en este trabajo.

Además, estas geodésicas se pueden describir según su relación con el cono de luz, el cual está definido para cada observador, teniendo que todo evento en el espacio-tiempo que se encuentre en el interior del cono estará causalmente conectado con el observador.

Las geodésicas nulas son las que generan el propio cono, las de tipo tiempo son las que se encuentran en su interior, y las de tipo espacio son las que están en el exterior del cono.

Para el cálculo de las ecuaciones geodésicas es más conveniente el uso del formalismo Lagrangiano. Tomando el siguiente Lagrangiano para una partícula en caída libre:

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad (2.11)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.12)$$

Se recupera la ecuación 2.10.

Además, se hará uso de las cantidades conservadas para la obtención de las ecuaciones geodésicas. La más importante de estas es la conservación de la cuadvirvelocidad:

$$\dot{s}^2 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \alpha \quad (2.13)$$

Donde $\alpha = c^2$ para las partículas masivas, y $\alpha = 0$ para las partículas de masa nula.

Otra forma de obtener cantidades conservadas es mediante la dependencia del Lagrangiano con las variables,

$$\text{Si } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = cte \quad (2.14)$$

3. Métrica de Schwarzschild

Para el desarrollo de esta sección se ha consultado la bibliografía: [3], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13] y [14].

3.1 Descripción de la métrica

En todo el documento se va a tomar el convenio de signos usado en [5], siendo este $(+, -, -, -)$.

La métrica de Schwarzschild describe el espacio-tiempo en el exterior de un objeto compacto, con simetría esférica y masa M . Lo cual genera una métrica estática e isotrópica, dada por la siguiente expresión:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

El tiempo coordenado, t , representa el tiempo medido por un observador en el infinito. Las coordenadas angulares ϕ y θ representan los ángulos sobre una esfera, de forma similar a un espacio plano. Y la coordenada radial r mide el área de una esfera, $r = (A/4\pi)^{1/2}$; sin embargo, r en general no representa el radio de dicha esfera en un espacio-tiempo curvo.

Se van a utilizar las unidades geométricas, de forma que la constante gravitatoria y la velocidad de la luz sean igual a la unidad $G = 1$, $c = 1$, simplificando 3.1:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.2)$$

Esta métrica presenta dos singularidades, una en el denominado radio de Schwarzschild $r_S = 2M$, la cual es una consecuencia de la elección de las coordenadas, y denota la posición del horizonte de sucesos del agujero negro. La otra singularidad se encuentra en $r = 0$, siendo esta una singularidad real, y sería necesario excluir dicho punto en el estudio de la métrica, sin embargo, vamos a estudiar las geodésicas exteriores al horizonte de sucesos, por lo que la singularidad real no consta ninguna complicación.

También es importante remarcar que la métrica de Schwarzschild es asintóticamente plana, es decir, cuando $r \rightarrow \infty$ la métrica tiende a la de Minkowski expresada en coordenadas esféricas, dicho de otra forma, tiende a un espacio-tiempo plano:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

3.2 Ecuaciones geodésicas en Schwarzschild

Para obtener las geodésicas en la métrica Schwarzschild se aplica el formalismo Lagrangiano, usando 2.11 se encuentra el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (3.3)$$

Primero, se encuentra que el Lagrangiano cumple las condiciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \text{ y } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

A partir de las cuales se obtienen las ecuaciones relacionadas a t y θ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = k \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = h \quad (3.5)$$

Donde k y h son las cantidades conservadas. k se relaciona con la energía por unidad de masa, y h con el momento angular por unidad de masa.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.12, para las otras dos coordenadas:

$$\text{Ecuación de } r: \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ddot{r} + \frac{M}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 - r \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) \quad (3.6)$$

$$\text{Ecuación de } \theta: \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (3.7)$$

Mediante la conservación de la cuadrivelocidad se obtiene la integral primera:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) = \alpha \quad (3.8)$$

Donde $\alpha = 0, 1$, dependiendo del tipo de partícula con el que se trabaje. Esta ecuación reemplazará 3.6, simplificando el estudio, obteniendo finalmente las ecuaciones geodésicas:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = k \quad (3.9)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = h \quad (3.10)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) = \alpha \quad (3.11)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (3.12)$$

Ahora, teniendo en cuenta las condiciones iniciales $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_0 = 0$, e introduciéndolas en 3.12 se encuentra que $\ddot{\theta} = 0$, causando que la partícula se encuentre restringida en el plano ecuatorial. Debido a la simetría esférica de la métrica, mediante una rotación, toda órbita es equivalente a una órbita en el plano ecuatorial, pudiendo afirmar que las órbitas siempre van a estar confinadas en un mismo plano. Pudiendo entonces simplificar las ecuaciones geodésicas:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = k \quad (3.13)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h \quad (3.14)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = \alpha \quad (3.15)$$

Ahora se van a introducir las ecuaciones que se van a usar en este estudio, derivadas de las ecuaciones geodésicas.

Primero se busca una ecuación que relacione la coordenada radial con las cantidades conservadas, para ello se sustituyen 3.13 y 3.14 en 3.15 para eliminar las primeras derivadas de t y θ :

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\alpha + \frac{h^2}{r^2}\right) = k^2 \quad (3.16)$$

Desarrollando los términos multiplicados y reorganizando, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{M}{r}\alpha + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{Mh^2}{r^3} = \frac{k^2 - \alpha}{2} \quad (3.17)$$

Siendo esta la ecuación que describe el movimiento equivalente a una partícula con energía orbital $\frac{1}{2}(k^2 - \alpha)$, dentro de un potencial efectivo dado por:

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{r}\alpha + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{Mh^2}{r^3} \quad (3.18)$$

Este potencial presenta un término adicional, comparado con el Newtoniano 2.1, proporcional a $\frac{1}{r^3}$, el cual, para valores pequeños de r domina sobre la barrera centrífuga $\frac{h^2}{2r^2}$, cambiando de signo la energía centrífuga y atrayendo a la partícula hacia el agujero negro, en vez de repelerla.

Ahora derivando 3.17 respecto al parámetro afín:

$$\ddot{r} = -\frac{M}{r^2}\alpha + \frac{h^2}{r^3} - \frac{3Mh^2}{r^4} \quad (3.19)$$

Esta ecuación será útil para las simulaciones de las órbitas.

Ahora se busca la ecuación que relaciona las coordenadas radial y angular; para ello, es necesario tener en cuenta que:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi} \frac{h}{r^2}$$

Sustituyendo en 3.17 y reorganizando:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{h^2} \left(\frac{2M}{r}\alpha - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2Mh^2}{r^3} + (k^2 - \alpha)\right) \quad (3.20)$$

Tomando la raíz y el recíproco de 3.20:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{h}{r^2} \left(\frac{2M}{r}\alpha - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2Mh^2}{r^3} + (k^2 - \alpha)\right)^{-1/2} \quad (3.21)$$

El signo positivo describe el movimiento si la partícula se aleja del agujero negro, y el signo negativo si se acerca.

Definiendo $u \equiv 1/r$, de forma análoga al estudio Newtoniano de las órbitas, y aplicando el cambio de variable en 3.20:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2Mu}{h^2}\alpha - u^2 + 2Mu^3 + \frac{k^2 - \alpha}{h^2} \quad (3.22)$$

Derivando esta ecuación respecto a ϕ se obtiene, finalmente, la ecuación de la forma:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{h^2}\alpha + 3Mu^2 \quad (3.23)$$

Esta ecuación determina la geometría de las geodésicas en el plano. La solución completa de la geodésica se consigue añadiendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{1}{hu^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{k}{hu^2(1 - 2Mu)} \quad (3.25)$$

3.3 Órbitas de partículas masivas

3.3.1 Ecuaciones para partículas masivas

Las partículas masivas representan el caso $\alpha = 1$, entonces las ecuaciones toman las siguientes formas.

Ecuaciones geodésicas:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = k \quad (3.26)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h \quad (3.27)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1 \quad (3.28)$$

Ecuaciones 3.17 y 3.18:

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{k^2 - 1}{2} \quad (3.29)$$

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{Mh^2}{r^3} \quad (3.30)$$

Además, será útil definir la energía de la órbita en el potencial como:

$$E_{orb} = \frac{k^2 - 1}{2} \quad (3.31)$$

Ecuación 3.19:

$$\ddot{r} = -\frac{M}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} - \frac{3Mh^2}{r^4} \quad (3.32)$$

Ecuaciones 3.21 y 3.23:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{h}{r^2} \left(\frac{2M}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2Mh^2}{r^3} + (k^2 - 1) \right)^{-1/2} \quad (3.33)$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{h^2} + 3Mu^2 \quad (3.34)$$

Estas serán las ecuaciones necesarias para el estudio de una partícula masiva en caída libre alrededor de un agujero negro.

3.3.2 El potencial efectivo

El potencial efectivo es la magnitud que explica el movimiento radial de la partícula para cada valor de E_{orb} , de forma que la partícula no podrá tomar valores de la coordenada radial para los cuales $E_{orb} < V_{eff}(r)$; estas son las denominadas zonas prohibidas.

Los puntos de retorno son aquellos en los que la velocidad radial de la partícula es nula, $\dot{r} = 0$, siendo entonces solución de $V_{eff}(r) = E_{orb}$. Y representando los límites de las zonas prohibidas. Estos puntos reciben el nombre de periastro, r_p , y apoastro, r_a . El periastro es el punto de acercamiento máximo, en el cual el signo de la velocidad radial cambia de negativo a positivo. Y el apoastro es el punto de alejamiento máximo, en el cual el signo de la velocidad radial cambia de positivo a negativo.

Primero se estudian los extremos de 3.30, para ello se calculan la primera y segunda derivada del potencial:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{M}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{3Mh^2}{r^4} \quad (3.35)$$

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = -\frac{2M}{r^3} + \frac{3h^2}{r^4} - \frac{12Mh^2}{r^5} \quad (3.36)$$

Tomando 3.35 e igualándolo a 0 se encuentran dos extremos:

$$r_{\pm} = \frac{h}{2M} \left(h \pm \sqrt{h^2 - 12M^2} \right) \quad (3.37)$$

Sustituyendo 3.37 en 3.36 se encuentra que r_+ se corresponde con un mínimo y r_- con un máximo. Renombrándolos, $r_+ = r_{min}$ y $r_- = r_{max}$.

Estudiando 3.37 se puede observar que el potencial no tiene extremos para valores del momento angular tales que $h^2 < 12M^2$. Para el valor límite $h^2 = 12M^2$, o de forma equivalente $h = 2\sqrt{3}M \approx 3,464M$, ambos extremos se vuelven el mismo, siendo ahora un punto de inflexión situado en $r = 6M$.

Para el caso $h^2 > 12M^2$ se encuentra que la posición del mínimo cumple que $r_{min} > 6M$, y el valor del potencial en el mínimo siempre cumple que $V_{eff}(r_{min}) < 0$.

En el mismo caso, el máximo solo puede tomar valores en el intervalo $3M < r_{max} < 6M$, y el valor del potencial en este punto cumple las siguientes condiciones:

1. $V_{eff}(r_-) > 0$ si $h > 4M$
2. $V_{eff}(r_-) = 0$ si $h = 4M$
3. $V_{eff}(r_-) < 0$ si $h < 4M$

Entonces, se llega a la conclusión de que existen 5 casos para el potencial efectivo en función del momento angular:

Caso 1: $h > 4M$, este es el caso más general, permitiendo la existencia de todos los tipos de órbitas, y al que se hará referencia en la mayoría del texto. Existen ambos extremos y $V_{eff}(r_{max}) > 0$.

Caso 2: $h = 4M$, existen ambos extremos y $V_{eff}(r_{max}) = 0$.

Caso 3: $2\sqrt{3}M < h < 4M$, existen ambos extremos y $V_{eff}(r_{max}) < 0$.

Caso 4: $h = 2\sqrt{3}M$ solo existe un extremo en $r = 6M$.

Caso 5: $h < 2\sqrt{3}M$ no existe ningún extremo.

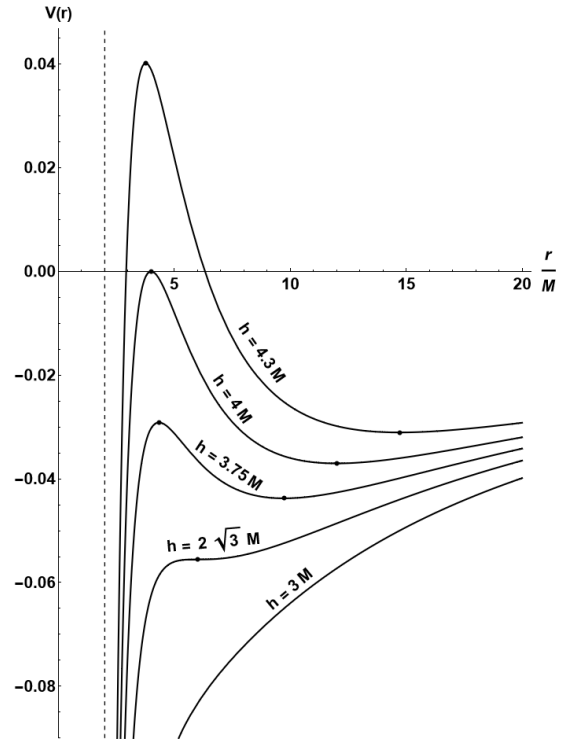


Figura 3.1: Representación de los 5 casos de $V_{eff}(r)$. Los puntos marcan la posición de los extremos. La línea vertical denota la posición del horizonte de sucesos, $r_s = 2M$.

3.3.3 Clasificación de las geodésicas

Ahora se van a estudiar, de forma cualitativa, los distintos tipos de geodésicas que pueden aparecer debido al potencial efectivo 3.30.

Antes de comenzar, es necesario introducir unas definiciones importantes para la clasificación de las geodésicas:

- Acotadas: Una órbita es acotada si $k < 1$, o de forma equivalente $E_{orb} < 0$.
- No acotadas: Una órbita es no acotada si $k \geq 1$, o de forma equivalente $E_{orb} \geq 0$.
- Primer tipo: Las geodésicas del primer tipo son aquellas para las que existe un periastro, este siempre cumple $r_p \geq r_{max}$, siendo imposible que una partícula siguiendo este tipo de geodésicas caiga en el agujero negro. Además, solo existen para $E_{orb} \leq V(r_{max})$.
- Segundo tipo: Las geodésicas del segundo tipo son aquellas en las que no existe un periastro, pero si un apoastro. Provocando que toda partícula siguiendo estas geodésicas caiga inevitablemente al agujero negro.
- De captura: Las geodésicas de captura son aquellas en las que no existe ningún punto de retorno.

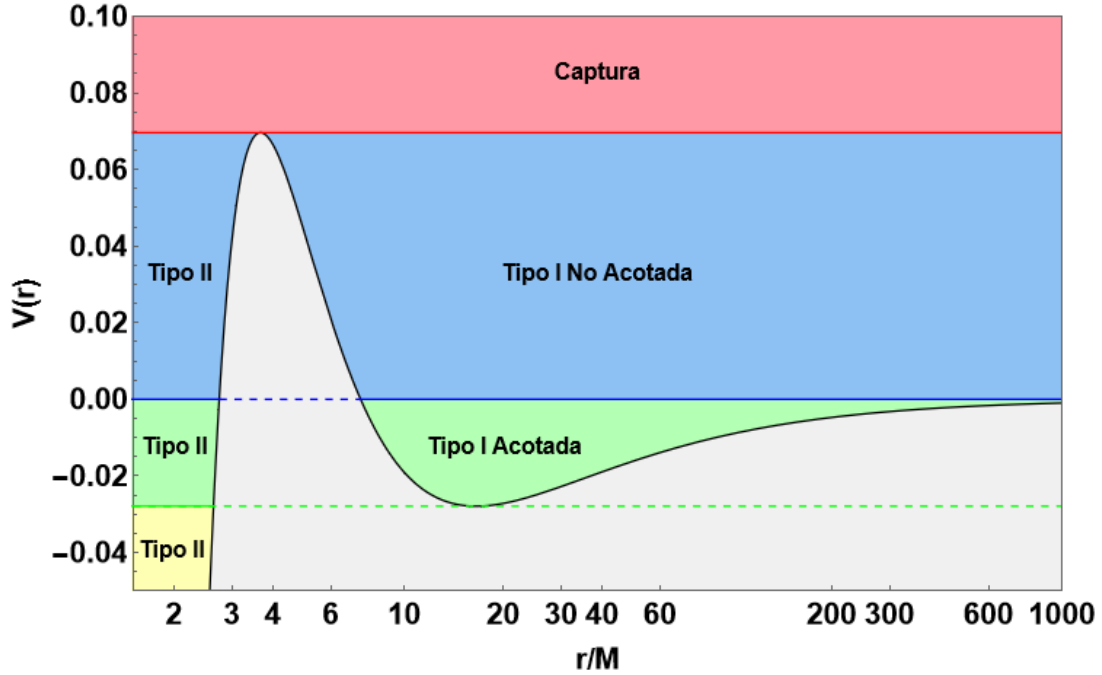


Figura 3.2: Clasificación de las geodésicas en función de la energía de la órbita, para $h = 4,5M$. El área de color gris representa la zona prohibida, el resto de áreas de colores representan las diferentes zonas energéticas para cada tipo de órbita, en el área roja órbitas de captura, en las áreas azules para órbitas no acotadas, las áreas verdes y amarilla para órbitas acotadas, siendo esta última una zona donde solo existen órbitas de segundo tipo.

a) Radiales

Las geodésicas radiales cumplen que $\phi = cte$, lo cual implica que $h = 0$ mediante 3.14. Reduciendo 3.29 a:

$$\dot{r}^2 = (k^2 - 1) + \frac{2M}{r} \quad (3.38)$$

Tomando una partícula que cae al agujero negro desde un radio inicial R , con una velocidad inicial nula, se encuentra que:

$$k^2 = 1 - \frac{2M}{R}$$

Por simplicidad, se supone que $R \rightarrow \infty$, entonces $k = 1$, obteniendo las ecuaciones que determinan la geodésica:

$$\frac{dr}{d\tau} = - \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \quad \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}$$

Reorganizando ecuaciones anteriores, y expresando el tiempo coordenado y el tiempo propio como funciones de la coordenada radial:

$$\frac{d\tau}{dr} = - \left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} \quad (3.39)$$

$$\frac{dt}{dr} = - \left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \quad (3.40)$$

Integrando 3.39, tomando que $\tau = 0$ en $r = r_i$, se obtiene:

$$\tau = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{r_i^3}{2M}} - \sqrt{\frac{r^3}{2M}} \right) \quad (3.41)$$

Se encuentra que la partícula atravesará el horizonte de sucesos y llegará a la singularidad en cantidades de tiempo propio finitas. Las cuales son:

$$\tau_h = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{r_i^3}{2M}} - 1 \right) \text{ y } \tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r_i^3}{2M}}$$

De forma equivalente, se integra 3.40 tomando $t = 0$ en $r = r_i$,

$$t = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{r_i^3}{2M}} - \sqrt{\frac{r^3}{2M}} \right) + 4M \left(\sqrt{\frac{r_i}{2M}} - \sqrt{\frac{r}{2M}} \right) + 2M \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{r}{2M}} + 1}{\sqrt{\frac{r}{2M}} - 1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{r_i}{2M}} - 1}{\sqrt{\frac{r_i}{2M}} + 1} \right| \quad (3.42)$$

A partir de esta ecuación se encuentra que $t \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 2M$. Este es un comportamiento muy diferente al observado para el tiempo propio, e implica que para un observador en el infinito, una partícula que describe una geodésica de tipo tiempo nunca alcanzará el horizonte de sucesos.

Finalmente, cabe destacar que estos comportamientos también se pueden encontrar en 3.39 y 3.40, teniendo que $\frac{dt}{dr} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 2M$, mientras que $\frac{d\tau}{dr} \neq 0$ para todo $r \neq 0$.

b) Circulares

Las geodésicas circulares se caracterizan por tener una coordenada radial constante, $r = r_c = cte$, entonces $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Y tomando $u = \frac{1}{r} = cte$ en la ecuación de la forma 3.34 se obtiene:

$$h^2 = \frac{Mr_c^2}{r_c - 3M} \quad (3.43)$$

Ahora se consigue la expresión del radio de la órbita circular en función del momento angular despejando en 3.43:

$$r_c = \frac{h}{2M} \left(h \pm \sqrt{h^2 - 12M^2} \right) \quad (3.44)$$

La expresión obtenida es igual a 3.37, por lo que las órbitas circulares ocurren en los extremos del potencial efectivo. Esto implica que las órbitas serán estables si ocurren en el mínimo, $r_c = r_{min}$, e inestables si ocurren en el máximo, $r_c = r_{max}$. Además, teniendo en cuenta las características de los extremos vistas en 3.3.2, se encuentra que no existen órbitas circulares para $r_c < 3M$, y que no puede haber órbitas estables para $r_c < 6M$.

A partir de la ecuación 3.29, y utilizando la expresión anterior para el momento angular 3.43, se obtiene:

$$k = \frac{1 - 2M/r_c}{(1 - 3M/r_c)^{1/2}} \quad (3.45)$$

Como se ha visto, una órbita es acotada si $k < 1$, o de forma equivalente $E_{orb} < 0$. Entonces, mediante 3.45, o teniendo en cuenta que en este caso $E_{orb} = V_{eff}(r_c)$ y comparando con los valores del potencial en los extremos, se encuentra que las órbitas circulares son acotadas si $r_c > 4M$.

Manipulando las ecuaciones 3.26 y 3.27, e introduciendo los resultados 3.43 y 3.45, se obtienen las ecuaciones que relacionan t y τ con ϕ :

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = \frac{M}{r_c^3} \left(1 - \frac{3M}{r_c} \right)^{-1} \quad (3.46)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{M}{r_c^3} \quad (3.47)$$

Integrando la primera ecuación para una revolución completa, se encuentra el periodo medido en el sistema de referencia propio de la partícula:

$$\tau_c = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{M}} \left(1 - \frac{3M}{r_c} \right)^{1/2} \quad (3.48)$$

Integrando ahora la segunda ecuación para una revolución completa, se encuentra el periodo medido por un observador en el infinito:

$$t_c = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{M}} \quad (3.49)$$

Esta última expresión tiene la misma forma que su equivalente Newtoniano; sin embargo, no se puede asegurar que r sea el radio del círculo, como se ha explicado antes.

Finalmente, se introduce la órbita circular estable más interna, o ISCO (Innermost Stable Circular Orbit) por sus siglas en inglés. Esta se da solamente en el caso $r_c = 6M$ y $h^2 = 12M^2$, es decir, cuando el potencial solo contiene un extremo, en el cual se situará la partícula. Para este caso se obtiene:

$$k_{ISCO} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (3.50)$$

c) Órbitas homoclínicas

Las órbitas homoclínicas existen siempre que $h \geq 2\sqrt{3}$, y su constante k siempre coincide con la órbita circular inestable.

Este tipo de órbitas puede ser tanto del primer como del segundo tipo. Una partícula siguiendo una trayectoria homoclínica del primer tipo cae desde el infinito si es no acotada, o desde un apoastro si es acotada, hasta alcanzar el radio de la órbita circular inestable, a la cual tiende de forma asintótica, describiendo un número infinito de giros alrededor del círculo con $r_c = r_{max}$, causando que nunca vuelva al infinito, o al apoastro, respectivamente.

Las órbitas del segundo tipo aceptan dos clases de movimientos. La partícula tiende de forma asintótica al círculo desde su interior. O como r_c representa el periastro para las órbitas del primer tipo, y el apoastro para las del segundo tipo, se puede considerar que estas últimas son una continuación de las del primer tipo, girando un número finito de veces cerca del círculo en r_c para, finalmente, caer hacia el agujero negro.

El estudio de este tipo de órbitas va a ser esencial para entender algunas características del resto de geodésicas, debido a que representan la órbita de mayor energía para la cual existen órbitas del primer y segundo tipo simultáneamente.

Para $h \geq 4M$ estas serán las órbitas no acotadas con mayor energía. De forma equivalente, serán las órbitas acotadas de mayor energía para $h < 4M$.

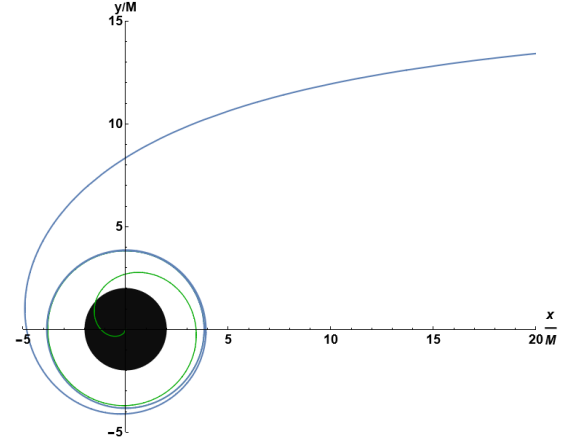


Figura 3.3: Dos órbitas homoclínicas con parámetros $h = 4,2M$ y $E_{orb} = 0,0261954M$. La órbita azul es del primer tipo, y la órbita verde es del segundo tipo.

d) Primer tipo

i. Acotadas

Las órbitas acotadas del primer tipo existen solamente si $h \geq 2\sqrt{3} M$. En este tipo de órbitas, las partículas se encuentran dentro del pozo de potencial, describiendo un movimiento radial periódico delimitado por el periastro y el apoastro.

Antes de empezar con la descripción de estas órbitas, es importante introducir el concepto de la precesión del periastro; esto se refiere al desplazamiento angular que sufre la posición del periastro al completar una rotación. Este fenómeno se estudiará con más detalle en Sec.3.3.5.

Para obtener una descripción más completa de estos tipos de órbitas se distinguen tres casos de valores de h , dependiendo de los posibles valores que puede tomar la precesión.

Órbitas con precisiones del orden de minutos de arco, este tipo corresponde con valores altos del momento angular, $h \gtrsim 35M$. Las partículas describen órbitas keplerianas, es decir, elipses, que precesan, esto es, que la posición angular del eje mayor de la elipse se desplaza junto al periastro al completar una rotación. La magnitud de las precesiones será, como máximo, del orden de minutos. Las órbitas planetarias, generalmente, son de este tipo.

Órbitas con precesiones tales que $1^\circ \gtrsim \delta\phi \gtrsim 360^\circ$, tomando valores de momento angular intermedios, $4M \gtrsim h \gtrsim 35M$. En este caso, las partículas describen cuasi-elipses, que precesan.

El último caso viene definido por valores pequeños del momento angular, $h \lesssim 4M$, existiendo órbitas con una precesión $\delta\phi > 360^\circ$. Las partículas son capaces de describir uno o más giros completos cerca del agujero negro, llamados whirls, describiendo trayectorias cuasi-circulares, antes de volver al apoastro. El número de whirls aumenta cuanto mayor sea k , debido a que la órbita tiende a la homoclínica, la cual presenta un número infinito de whirls.

Ahora no existen órbitas del tipo kepleriano, imposibilitando una descripción basada en elipses. La caracterización más completa de estas órbitas se da mediante tres parámetros. La cantidad de hojas descritas por la partícula, esto es, la parte de la trayectoria en la que se aleja hasta llegar al apoastro y volver. El número de whirls, es decir, giros completos que describen las partículas cerca del periaastro. Y los vértices, el orden en el que se trazan las hojas. La descripción en detalle de este sistema es mucho más extensa, y viene explicada [12].

La existencia de precesiones mayores a 360° se interpreta como una precesión entre 0 y 360 grados, más un múltiplo entero de 360, cuya proporción con 360 indica el número de whirls realizados por la partícula.

Finalmente, cabe destacar que las órbitas circulares con $r_c > 4M$ estudiadas en 3.4.3.b son casos especiales de las órbitas acotadas de primer tipo.

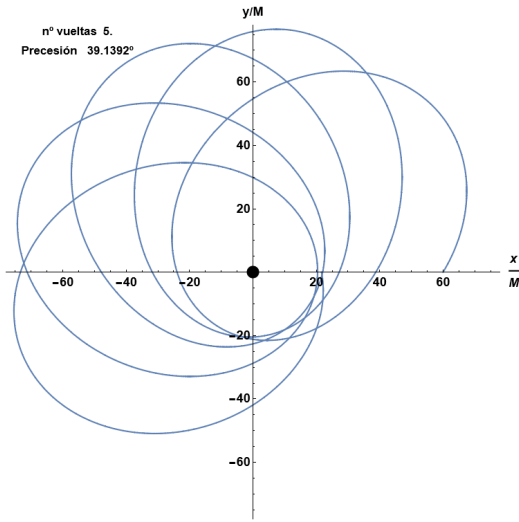


Figura 3.4: Órbita acotada del primer tipo con parámetros $h = 6M$ y $E_{orb} = -0,01M$, caso de momento angular intermedio.

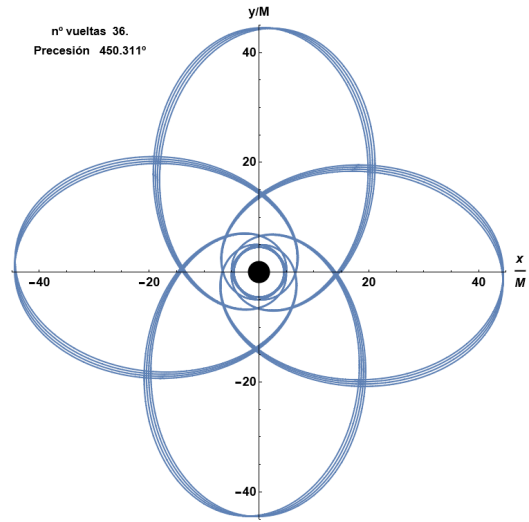


Figura 3.5: Órbita acotada del primer tipo con parámetros $h = 3,85M$ y $E_{orb} = -0,0189M$, caso de momento angular bajo. Presenta 4 hojas que precesan, y describe 1 whirl.

ii. No acotadas

Este tipo de geodésicas solo existen para $h > 4M$, y son el equivalente de las órbitas keplerianas hiperbólicas, tendiendo a éstas cuando $r_p \gg M$.

En general, una partícula siguiendo este tipo de órbitas llega desde el infinito, alcanza el periaastro, y es dispersada por el agujero negro, volviendo al infinito. Además, el ángulo de dispersión puede tomar cualquier valor, incluso haciendo que la partícula vuelva en la dirección inicial.

Igual que ocurre con las órbitas acotadas del primer tipo, una partícula en una órbita no acotada del primer tipo también puede describir uno o más whirls antes de volver al infinito, aumentando el número de los mismos cuanto más cercana sea la energía de la órbita a la homoclínica.

Finalmente, las órbitas circulares inestables, con $r_c < 4M$, son casos especiales de estas órbitas.

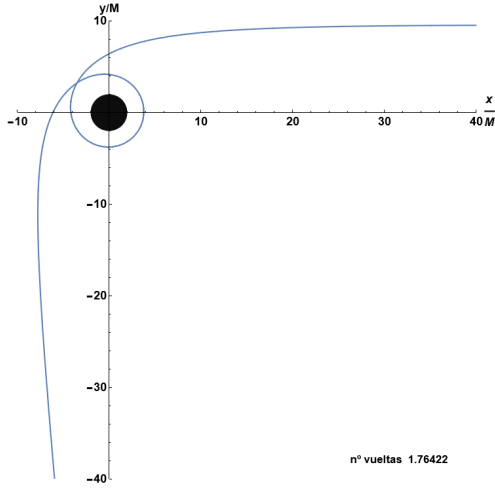


Figura 3.6: Órbita no acotada del primer tipo con parámetros $h = 4,7M$ y $E_{orb} = 0,1M$. Describe 1 whirl antes de volver al infinito.

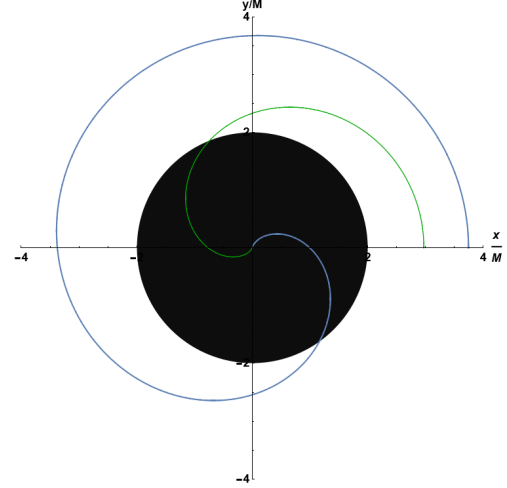


Figura 3.7: Dos órbitas del segundo tipo con $h = 4,2M$. La órbita azul es no acotada, con $E_{orb} = 0,026M$. La órbita verde es acotada con $E_{orb} = -0,01M$.

e) Segundo tipo

Este tipo de órbitas no tiene ningún análogo kepleriano y aparecen debido a que la barrera cinética del potencial tiene una altura finita.

Las partículas siguiendo una órbita del segundo tipo comienzan en un apoastro, para seguidamente caer de forma inevitable al agujero negro, describiendo espirales que terminan en el centro $r = 0$. Este tipo de órbita existe para todo valor de h ; sin embargo, para $h < 4M$ solo serán acotadas. Además, la única diferencia entre las órbitas del segundo tipo acotadas y las no acotadas es el valor de su energía.

f) Órbitas de captura

Existen dos posibilidades para las partículas que siguen este tipo de órbitas: comienzan en el infinito y caen al agujero negro, o se generan cerca del agujero negro y escapan al infinito; un ejemplo de las últimas es la radiación de Hawking. En ambos casos, las partículas describen espirales en las inmediaciones del agujero negro y siguen trayectorias rectilíneas en las regiones alejadas del mismo.

Si la energía de la órbita es cercana a la homoclínica, las partículas pueden realizar varios giros mientras caen o se alejan.

Estas órbitas son no acotadas, y ocurren para valores de k tales que $0 > k > V_{eff}(r_{max})$.

Se puede definir el parámetro de impacto aparente,

$$b^2 = \frac{h^2}{v^2} = \frac{h^2 k^2}{k^2 - 1} \quad (3.51)$$

el cual representa la distancia entre la dirección inicial de la partícula en el infinito y una recta paralela a esta dirección que cruza por el centro del agujero negro.

El parámetro de impacto crítico, b_c , se corresponde con el parámetro de impacto de la homoclínica, y cualquier partícula con un $b < b_c$ seguirá una órbita de captura. Usando 3.44, 3.45 y

3.51, se expresa el parámetro de impacto crítico en función de h :

$$b_c^2 = h^2 \frac{h(h^2 + 36M^2) + (h^2 - 12M^2)^{3/2}}{h(h^2 - 18M^2) + (h^2 - 12M^2)^{3/2}} \quad (3.52)$$

Finalmente, se define la sección eficaz,

$$\sigma = \pi b_c^2 = \pi h^2 \frac{h(h^2 + 36M^2) + (h^2 - 12M^2)^{3/2}}{h(h^2 - 18M^2) + (h^2 - 12M^2)^{3/2}} \quad (3.53)$$

Para $h = 4M$, $b_c \rightarrow \infty$, y para valores $h < 4M$, b_c es imaginario, debido a que el valor del máximo es menor que cero, o no existe; sin embargo, esto no representa un problema si se toma $b_c \rightarrow \infty$ para estos valores, representando que toda partícula no acotada con $h \leq 4M$ seguirá una órbita de captura.

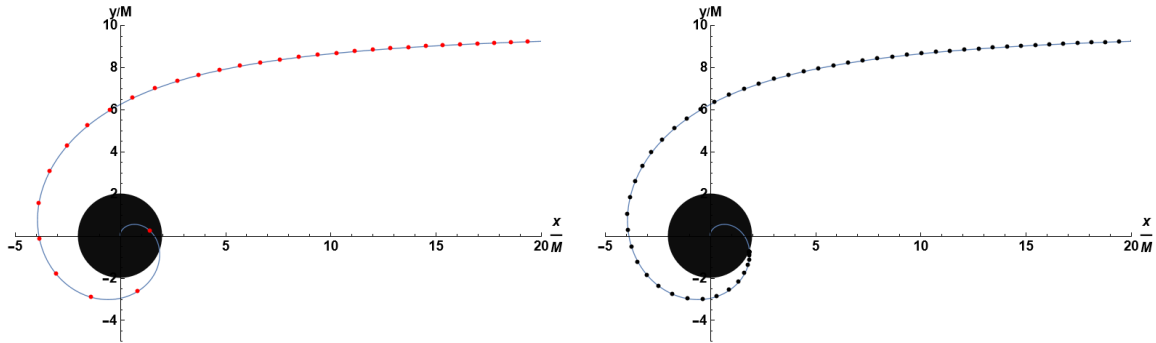


Figura 3.8: Órbita de captura con $h = 4.5M$ y $E_{orb} = 0.09M$. Los puntos rojos en la imagen de la izquierda se corresponden con intervalos de tiempo propio $\Delta\tau = 1.5M$, y los puntos negros en la imagen de la derecha se corresponden con intervalos de tiempo coordenado $\Delta t = 1.5M$.

3.3.4 Órbitas permitidas en los casos especiales del potencial efectivo

i. Caso 2

Este caso, $h = 4M$, representa el valor del momento angular más bajo para el que existe, al menos, una órbita no acotada del primer o segundo tipo, siendo la homoclínica con $E_{orb} = 0$. El resto de órbitas no acotadas son de captura.

ii. Caso 3

Para $2\sqrt{3}M < h < 4M$, no existe ninguna órbita no acotada del primer o segundo tipo, causando que cualquier partícula que venga del infinito caiga inevitablemente en el agujero negro.

Ahora el potencial en el máximo siempre es menor que cero, permitiendo la existencia de órbitas del segundo tipo con $E_{orb} > V(r_{max})$. La única diferencia con el resto de órbitas del segundo tipo es que la distancia del apoastro siempre es mayor que $4M$.

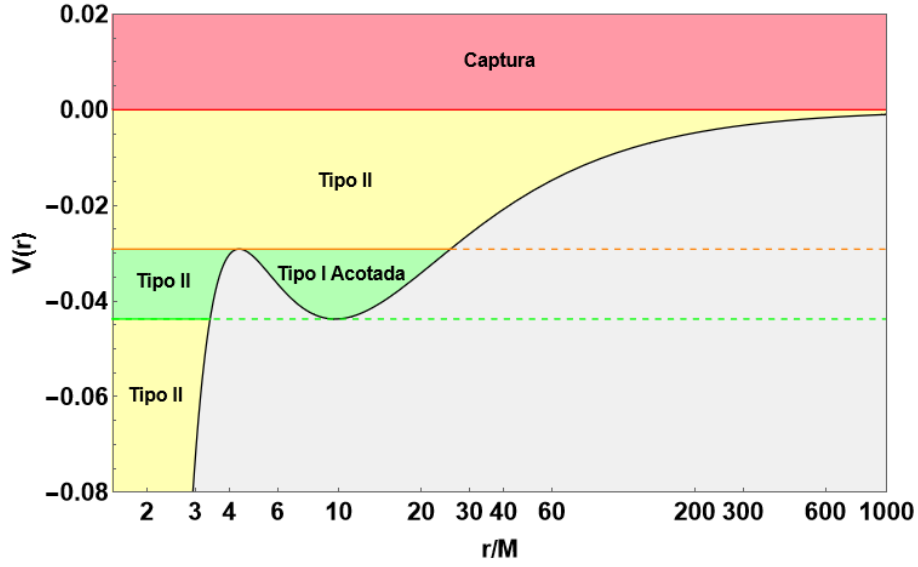


Figura 3.9: Clasificación de las geodésicas en función de la energía de la órbita en el caso 3, para $h = 3,75M$. Los colores tienen la misma interpretación que en Fig.3.2.

iii. Caso 4

En el caso $h = 2\sqrt{3}M$, la única órbita del primer tipo permitida es el ISCO, el cual también tiene su órbita del segundo tipo correspondiente, la cual resulta ser una homoclínica.

iv. Caso 5

Para $h < 2\sqrt{3}M$, el potencial no posee ningún extremo, causando que no existan órbitas del primer tipo, causando que toda partícula caiga de forma irremediable al agujero negro.

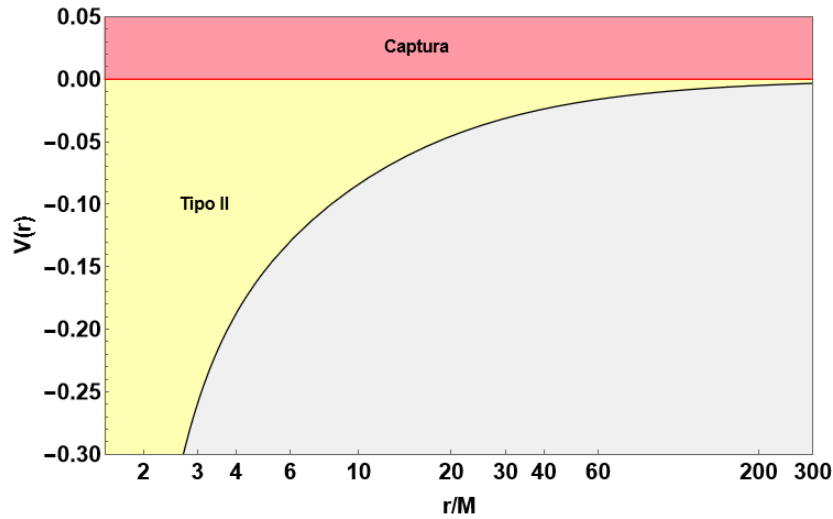


Figura 3.10: Clasificación de las geodésicas en función de la energía de la órbita en el caso 5, para $h = 3M$. Los colores tienen la misma interpretación que en Fig.3.2.

3.3.5 Precesión del Periastro

Siguiendo la breve descripción vista en 3.3.3.d.I, se define la precesión del periastro,

$$\delta\phi_{per} = 2|\Delta\phi| - 2\pi \quad (3.54)$$

Donde $\Delta\phi$ es el ángulo total recorrido entre los puntos de retorno, se obtiene integrando 3.33 desde el periastro al apoastro:

$$\Delta\phi_{per} = \phi(r_a) - \phi(r_p) = \int_{r_p}^{r_a} \frac{h}{r^2} \left((k^2 - 1) + \frac{2M}{r} - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right)^{-1/2} dr \quad (3.55)$$

Tomando la aproximación de grandes distancias, $M/r \ll 1$, la expresión del ángulo de precesión se simplifica:

$$\delta\phi_{per} = 3\pi M \left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_a} \right) \quad (3.56)$$

Recuperando las constantes, y definiendo el semilatus rectum $\frac{1}{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_a} \right)$:

$$\delta\phi_{per} = \frac{6\pi GM}{c^2 l} \quad (3.57)$$

Tabla de precesiones para algunos objetos del Sistema Solar:

Objetos	l (au)	<u>Revoluciones</u> Siglo	Precesión teórica (arcseg/siglo)	Precesión medida (arcseg/siglo)
Mercurio	0.37	416	43.03	$43,1 \pm 0,5$
Venus	0.72	161	8.6	$8,0 \pm 5,0$
Tierra	1	100	3.8	$5,0 \pm 1,0$
(1566) Ícaro	0.34	89	10.3	$10,0 \pm 1,0$

Tabla 3.1: Valores de la precesión del perihelio para algunos objetos del sistema solar. Datos provenientes de [5] y [8].

3.4 Órbitas de partículas sin masa (luz)

3.4.1 Ecuaciones para partículas con masa nula

Las partículas de masa nula representan el caso $\alpha = 0$; sin embargo, la energía y el momento angular por unidad de masa no están bien definidos, k y h , respectivamente, por lo que es necesario introducir el parámetro de impacto aparente:

$$b = \frac{h}{k} \quad (3.58)$$

También es necesario reescalar el parámetro afín para poder expresar todas las ecuaciones en función de b , $\lambda \rightarrow h\lambda$. Teniendo todo esto en cuenta, se obtienen las siguientes ecuaciones.

Ecuaciones geodésicas:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = \frac{1}{b} \quad (3.59)$$

$$r^2 \dot{\phi} = 1 \quad (3.60)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 0 \quad (3.61)$$

Ecuaciones 3.17 y 3.18:

$$\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{b^2} \quad (3.62)$$

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{1}{r^2} - \frac{2M}{r^3} \quad (3.63)$$

Ecuación 3.19:

$$\ddot{r} = \frac{1}{r^3} - \frac{3M}{r^4} \quad (3.64)$$

Ecuaciones 3.21 y 3.23:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right)^{-1/2} \quad (3.65)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2 \quad (3.66)$$

Estas serán las ecuaciones necesarias para el estudio de una partícula de masa nula en caída libre alrededor de un agujero negro.

3.4.2 El potencial efectivo

En este caso, el potencial efectivo viene dado por 3.63, definiendo el movimiento radial para cada valor del parámetro de impacto, siendo las zonas prohibidas tales que $b^{-2} < V_{eff}(r)$. En este caso, es más útil hablar en términos del parámetro de impacto, en vez de definir una energía de la órbita como se hacía para las partículas masivas.

Los puntos de retorno cumplen $\dot{r} = 0$, por lo que trabajando con 3.62 se obtiene la ecuación de los mismos:

$$r_{ret}^3 - b^2 (r_{ret} - 2M) = 0 \quad (3.67)$$

Cuya solución es:

$$r_{ret} = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{3\sqrt{3}M}{b} \right) + \frac{2n\pi}{3} \right]; \quad n = 0, 1, 2 \quad (3.68)$$

Antes de explicar en más detalle los puntos de retorno, es necesario estudiar los extremos de 3.63 como se hizo previamente para las partículas masivas,

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\frac{2}{r^3} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) \quad (3.69)$$

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = \frac{6}{r^4} \left(1 - \frac{12M}{r} \right) \quad (3.70)$$

Igualando 3.69 a 0 se encuentra un único extremo:

$$r_{ext} = 3M \quad (3.71)$$

Mediante 3.70 se encuentra que r_{ext} es un máximo.

Como V_{eff} no depende del parámetro de impacto, su forma no varía para los distintos valores de b , al contrario del caso de las partículas masivas. Haciendo que la altura del máximo también sea constante, $V_{eff}(3M) = (27M^2)^{-1}$. Además, se encuentra que para $r > 2M$, $V_{eff}(r) > 0$, siendo exactamente cero en el horizonte de sucesos.

Volviendo a los puntos de retorno, estos solo existirán si $b^{-2} \leq V_{eff}(3M)$, sin embargo, para $n = 1$ siempre tiene un valor negativo, por lo que no será un punto de retorno. En el caso $n = 0$, el punto de retorno se identifica con un periastro, y si $n = 2$ se identifica con un apoastro.

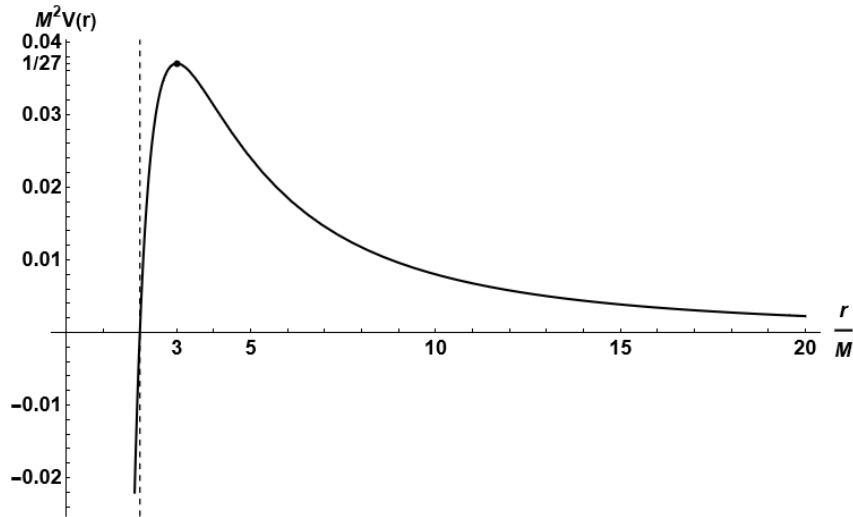


Figura 3.11: Representación de $V_{eff}(r)$. El punto marca la posición del máximo, y su valor está representado en la ordenada. La línea vertical denota la posición del horizonte de sucesos, $r_s = 2M$.

3.4.3 Clasificación de las órbitas

a) Radiales

Para partículas sin masa, el parámetro afín λ no tiene significado físico. Así que solo se estudiará el comportamiento del tiempo coordenado.

Como se vio antes, las geodésicas radiales cumplen $\phi = cte$, mediante 3.61 se obtiene:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (3.72)$$

Integrando, se encuentra la relación entre el tiempo coordenado y el radio:

$$t = \pm r \pm 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + cte \quad (3.73)$$

El signo positivo representa una partícula entrante, que cae hacia el agujero negro, y el signo negativo, una partícula saliente, la cual se aleja.

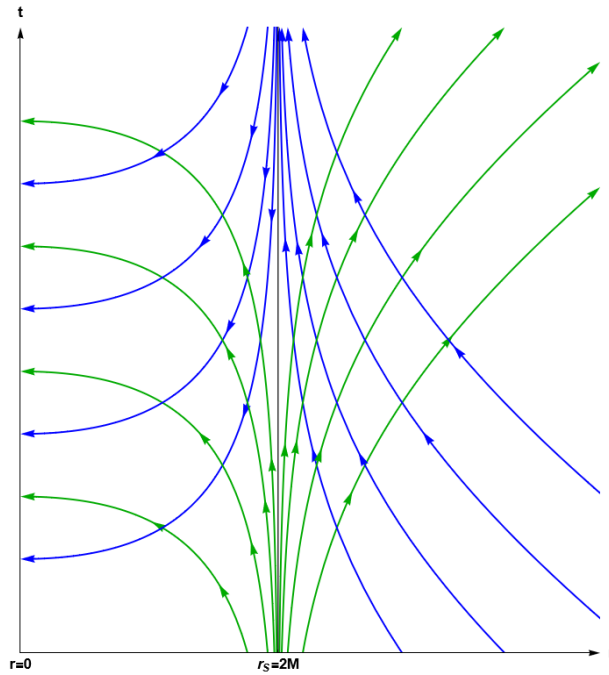


Figura 3.12: Diagrama (t, r) del espacio-tiempo de Schwarzschild. Las curvas representan geodésicas nulas radiales entrantes (azules) y salientes (verdes). La línea vertical negra en $r_S = 2M$ representa el horizonte de sucesos.

b) Circulares

Para las geodésicas circulares, $r = r_c = cte$, y $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Tomando $u = \frac{1}{r}$ en 3.66, se encuentra:

$$r_c = 3M \quad (3.74)$$

Llegando a la conclusión de que las geodésicas circulares ocurren en el máximo, haciéndolas inestables.

Ahora se puede definir la esfera de fotones, siendo esta la región donde las partículas sin masa pueden seguir órbitas circulares, en la esfera con $r = 3M$.

El parámetro de impacto de este tipo de órbitas se le llama parámetro de impacto crítico, y se obtiene sustituyendo $r_c = 3M$ en 3.62:

$$b_c = 3\sqrt{3} M \quad (3.75)$$

c) Órbitas críticas

Estas órbitas las siguen partículas cuyo parámetro de impacto es el parámetro de impacto crítico $b = b_c = 3\sqrt{3} M$.

Son el equivalente a las órbitas homoclínicas, con la principal diferencia de que el círculo al que tienden las órbitas críticas siempre está situado en $r_c = 3M$, la esfera de fotones.

Las partículas siguiendo órbitas críticas del primer tipo siempre caen desde el infinito, y tienden al círculo en $r_c = 3M$, describiendo un número infinito de whirls.

Las órbitas críticas del segundo tipo también admiten dos tipos de movimiento. La partícula comienza cerca del horizonte de sucesos y tiende a la esfera de fotones desde su interior. O, la partícula comienza en un apoastro y describe un número finito de giros cerca de $r_c = 3M$, para seguidamente caer al agujero negro.

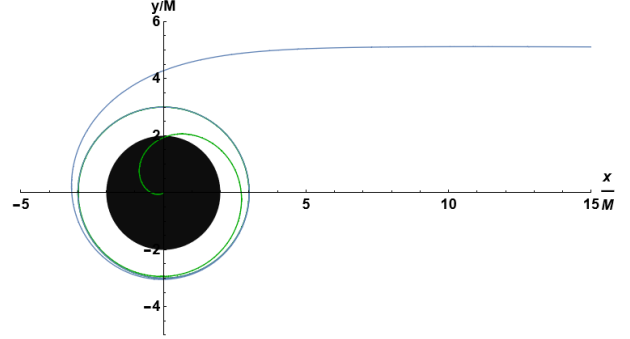


Figura 3.13: Dos órbitas críticas con $b = b_c$. La órbita azul es del primer tipo, y la órbita verde es del segundo tipo.

d) Primer tipo

Como se ha visto antes, el potencial siempre es positivo en el exterior del horizonte de sucesos, por lo que solo existen órbitas no acotadas. Además, este tipo de órbitas las seguirá toda partícula que provenga del infinito con un parámetro de impacto $b \geq b_c$.

Es necesario introducir el concepto de deflexión de la trayectoria. Siendo esta la desviación angular que sufre la trayectoria, respecto a aquella en la ausencia del objeto masivo. Este concepto se estudia con más detalles en Sec.3.4.4.

Entonces, una partícula que sigue una geodésica del primer tipo cae desde el infinito hasta alcanzar el periastro, para seguidamente volver al infinito, en la dirección dada por la deflexión. El valor del periastro viene dado por 3.68 con $n = 0$, el cual cumple $r_p \geq 3M$. Además, las partículas también pueden describir whirls, apareciendo para valores del ángulo de deflexión mayores a 360° , de forma equivalente a las partículas masivas. Aumentando el número de estos cuanto más cercano sea el parámetro de impacto al parámetro crítico, aproximándose a la órbita crítica.

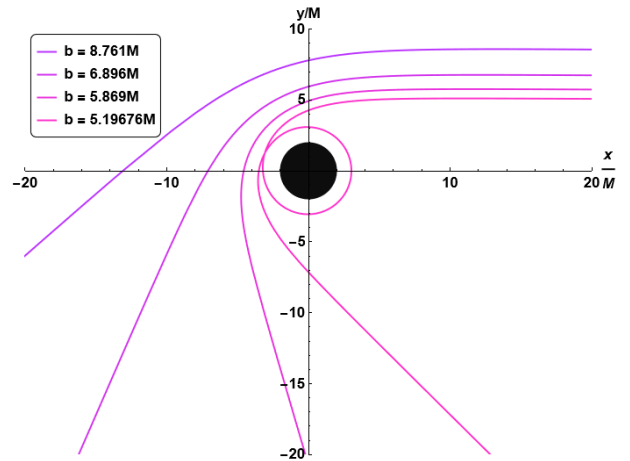


Figura 3.14: Cuatro órbitas del primer tipo con parámetros, $b = 5,19676M$, $5,869M$, $6,896M$, $8,761M$, respectivamente.

e) Segundo tipo

Al igual que las órbitas del primer tipo, las del segundo tipo ocurren para $b \geq b_c$.

Las partículas que describen órbitas del segundo tipo comienzan en un punto cerca del horizonte de sucesos, se alejan hasta alcanzar el apoastro y finalmente caen en el agujero negro siguiendo una espiral. El valor del apoastro viene dado por 3.68 con $n = 2$, el cual cumple $r_a \leq 3M$.

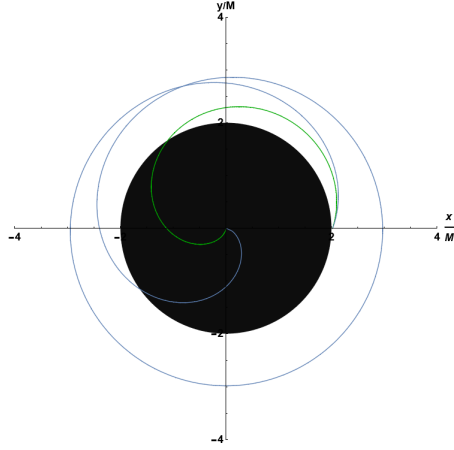


Figura 3.15: Dos órbitas del segundo tipo. La órbita azul con $b = 5,1964M$. La órbita verde con $b = 6M$.

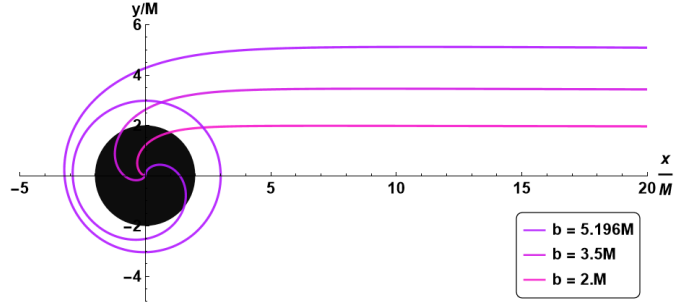


Figura 3.16: Tres órbitas de captura, con parámetros $b = 5,196M$, $3,5M$, $2M$, respectivamente.

f) Órbitas de captura

Este tipo de órbitas las sigue toda partícula con $b < b_c$, existiendo dos posibilidades. La partícula parte del infinito y cae en el agujero negro, describiendo una espiral en las inmediaciones del mismo. O la partícula se genera cerca del horizonte de sucesos y escapa al infinito.

Ahora, mediante el parámetro de impacto crítico $b_c = 3\sqrt{3}$, se puede calcular la sección eficaz,

$$\sigma = \pi b_c^2 = 27\pi M^2 \quad (3.76)$$

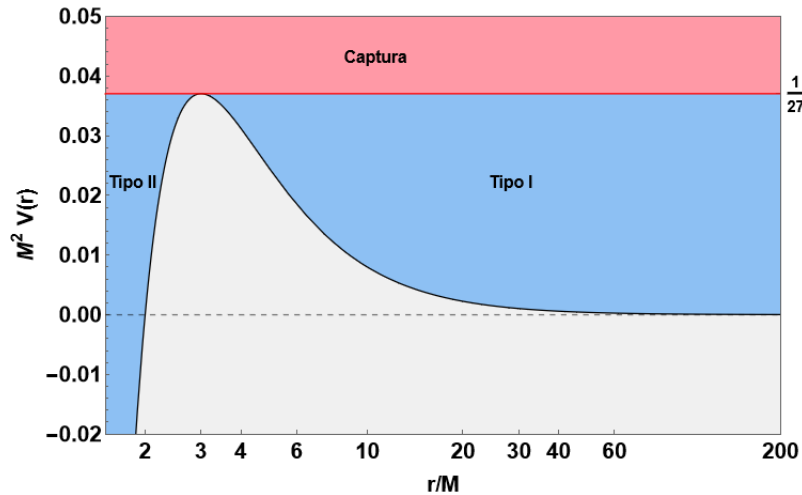


Figura 3.17: Clasificación de las geodésicas en función del parámetro de impacto aparente de la órbita para partículas de masa nula. Los colores tienen la misma interpretación que en Fig.3.2.

3.4.4 Deflexión de la trayectoria

Siguiendo la definición de deflexión de la trayectoria dada en el apartado 3.4.3.d), se define el ángulo de deflexión:

$$\delta\phi_{def} = \Delta\phi - \pi \quad (3.77)$$

Donde $\Delta\phi$ es el ángulo total recorrido por la partícula, es decir, dos veces el ángulo recorrido desde el infinito hasta el periastro:

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_p) - \phi_\infty| = 2 \left| \int_{r_p}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-1/2} dr \right| \quad (3.78)$$

Tomando la aproximación de distancias grandes, $M/r \ll 1$, la expresión del ángulo de deflexión se simplifica:

$$\delta\phi_{def} = \frac{4M}{r_p} \quad (3.79)$$

Recuperando las constantes, y teniendo en cuenta que en la aproximación tomada $b \simeq r_p$,

$$\delta\phi_{def} = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (3.80)$$

Este fenómeno es la base de las lentes gravitacionales, permitiendo que las trayectorias de la luz generada detrás de objetos muy masivos se curven y sean capaces de llegar a la Tierra.

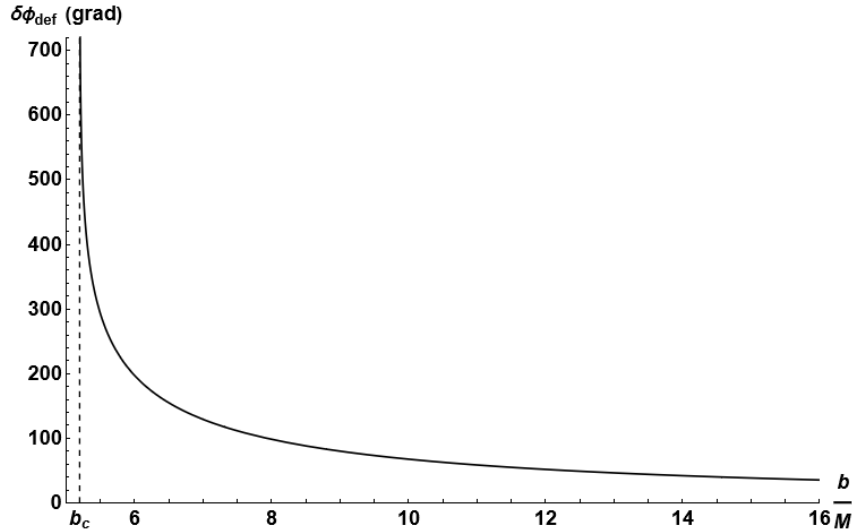


Figura 3.18: Representación del ángulo de deflexión en función del parámetro de impacto. Se observa que diverge cuando $b \rightarrow b_c$, como se esperaba, ya que se aproxima a la órbita crítica.

4. Métrica de Simpson-Visser

Para el desarrollo de esta sección se han consultado los papers [1], [15], [16] y [17].

4.1 Descripción de la métrica

Esta métrica es una generalización de la métrica de Schwarzschild 3.2, y es introducida por Alex Simpson y Matt Visser con el fin de describir agujeros negros regulares, aquellos en los que no existe ninguna singularidad real. Para ello, se modifican los componentes del tensor métrico de Schwarzschild, realizando el cambio de variable $r \rightarrow \rho(r) = (r^2 + a^2)^{1/2}$, donde a es un parámetro, obteniendo la siguiente métrica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1} dr^2 - (r^2 + a^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

Se puede observar que para $a = 0$ se recupera la métrica de Schwarzschild, la cual ya ha sido estudiada, y además es el único valor de a en el que la métrica no es regular. Esta métrica también posee las simetrías $r \rightarrow -r$ y $a \rightarrow -a$. Por estas razones, y para simplificar la exposición, se impone la restricción $a > 0$, y el estudio se centrará en valores positivos de r . Además, esta métrica sigue teniendo simetría esférica, pudiendo restringir el estudio al plano ecuatorial, igual que en Schwarzschild.

La regularidad de la métrica permite que las partículas puedan cruzar a valores negativos de la coordenada radial, teniendo ahora $r \in (-\infty, \infty)$. Las consecuencias de esta propiedad se explicarán más adelante.

Dependiendo del valor del parámetro, la métrica puede representar:

1. Para $a < 2M$, un agujero negro regular, con una garganta unidireccional, llamada rebote, de tipo espacio en el origen ($ds^2|_{r=0} < 0$). Además, aparecen dos horizontes de sucesos en las coordenadas $r_H^\pm = \pm \sqrt{(2M)^2 - a^2}$.
2. Para $a = 2M$, un agujero de gusano unidireccional con una garganta nula en el origen ($ds^2|_{r=0} = 0$).
3. Para $a > 2M$, un agujero de gusano transitable bidireccional con una garganta de tipo tiempo en el origen ($ds^2|_{r=0} > 0$).

Teniendo que la garganta se encontrará en $r = 0$.

La mayoría de las ecuaciones geodésicas para la métrica de Simpson-Visser toman la misma forma que las obtenidas para la métrica de Schwarzschild, Sec.3.2, haciendo la sustitución $r \rightarrow \rho(r) = (r^2 + a^2)^{1/2}$. Excepto las ecuaciones 3.19 y 3.23, transformándose, respectivamente, a:

$$\ddot{r} = \frac{r}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \left[-\frac{M}{r^2 + a^2} \alpha + \frac{h^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3Mh^2}{(r^2 + a^2)^2} \right] \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{h^2} \alpha + 3Mu^2 - a^2 u \left[\frac{3M\alpha}{h^2} - 2u^2 + 5Mu^3 + \frac{k^2 - \alpha}{h^2} \right] \quad (4.3)$$

Donde $u = \rho^{-1} = (r^2 + a^2)^{-1/2}$.

Finalmente, es necesario remarcar que el área de una esfera localizada en r será $A(r) = 4\pi\rho^2(r)$, teniendo que el radio mínimo que se puede medir para cualquier esfera es $\rho = a$, siendo este el radio de la garganta.

4.2 Órbitas de partículas masivas

4.2.1 El potencial efectivo

El estudio del potencial efectivo es similar al caso de Schwarzschild Sec.3.3.2. En este caso, el potencial viene dado por:

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{(r^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{h^2}{2(r^2 + a^2)} - \frac{Mh^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (4.4)$$

La energía de la órbita sigue estando definida por 3.31, y los puntos de retorno siguen siendo aquellos que $V_{eff} = E_{orb}$. Sin embargo, debido a la simetría de cambio de signo en r , por cada punto de retorno mayor que cero, también existirá otro punto de retorno con el mismo valor en negativo.

Para el estudio de los extremos se obtienen las derivadas del potencial:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{r}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \left[\frac{M}{(r^2 + a^2)} - \frac{h^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{3Mh^2}{(r^2 + a^2)^2} \right] \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{dV_{eff}}{dr} + \frac{r^2}{(r^2 + a^2)} \left[-\frac{2M}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{3h^2}{(r^2 + a^2)^2} - \frac{12Mh^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right] \quad (4.6)$$

Igualando 4.5 a 0 se encuentran 5 extremos, los cuales mediante 4.6 se identifica si son máximos o mínimos:

$$r_{min}^{\pm} = \pm \left[h^2 \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - 12M^2}}{2M} \right)^2 - a^2 \right]^{1/2} \quad (4.7)$$

$$r_{max}^{\pm} = \pm \left[h^2 \left(\frac{h - \sqrt{h^2 - 12M^2}}{2M} \right)^2 - a^2 \right]^{1/2} \quad (4.8)$$

$$r_{ext0} = 0 \quad (4.9)$$

El extremo en el origen de coordenadas r_{ext0} puede ser un máximo o un mínimo dependiendo de los valores de h y a , y siempre será un extremo. Para valores de momento angular $h < 2\sqrt{3}M$ el potencial solo tendrá un extremo, r_{ext0} . El comportamiento de los extremos respecto al parámetro a viene recogido en la siguiente tabla:

	$a \leq 3M$	$3M < a < 6M$	$a \geq 6M$
Mínimos	Siempre existen		Existen si $h^2 > \frac{a^2 M}{a-3M}$
Máximos	Siempre existen	Existen si $h^2 < \frac{a^2 M}{a-3M}$	Nunca existen
Origen	Es un mínimo	Es un mínimo si $h^2 < \frac{a^2 M}{a-3M}$, es un máximo si $h^2 \geq \frac{a^2 M}{a-3M}$	Es un mínimo si $h^2 \leq \frac{a^2 M}{a-3M}$, es un máximo si $h^2 > \frac{a^2 M}{a-3M}$

Tabla 4.1: Comportamiento de los extremos de 4.4 en función del parámetro a , tomando $h \geq 2\sqrt{3}M$. Debido a la simetría en r , ambos mínimos tienen las mismas condiciones de existencia, al igual que los dos máximos.

Se encuentra que el valor del potencial en los máximos y mínimos, cuando existen, solamente depende del momento angular y son iguales que en el potencial de Schwarzschild. Teniendo que $V_{eff}(r_{min}^{\pm}) < 0$, y $V_{eff}(r_{max}^{\pm}) \leq 0$ si $h \leq 4M$.

El valor del potencial en el origen, $r_{ext0} = 0$, en general depende tanto de h como de a , cumpliendo que $V_{eff}(r_{ext0} = 0) < 0$ si $a \leq 2M$, en especial, para el valor $a = 2M$ se tiene que $V_{eff}(r_{ext0}) = -\frac{1}{2}$, independientemente del valor que tome el momento angular. Finalmente, para $a > 2M$ se tiene que $V_{eff}(r_{ext0}) \leq 0$ si $h^2 \leq \frac{2Ma^2}{a-2M}$, y $V_{eff}(r_{ext0}) > 0$ si $h^2 > \frac{2Ma^2}{a-2M}$.

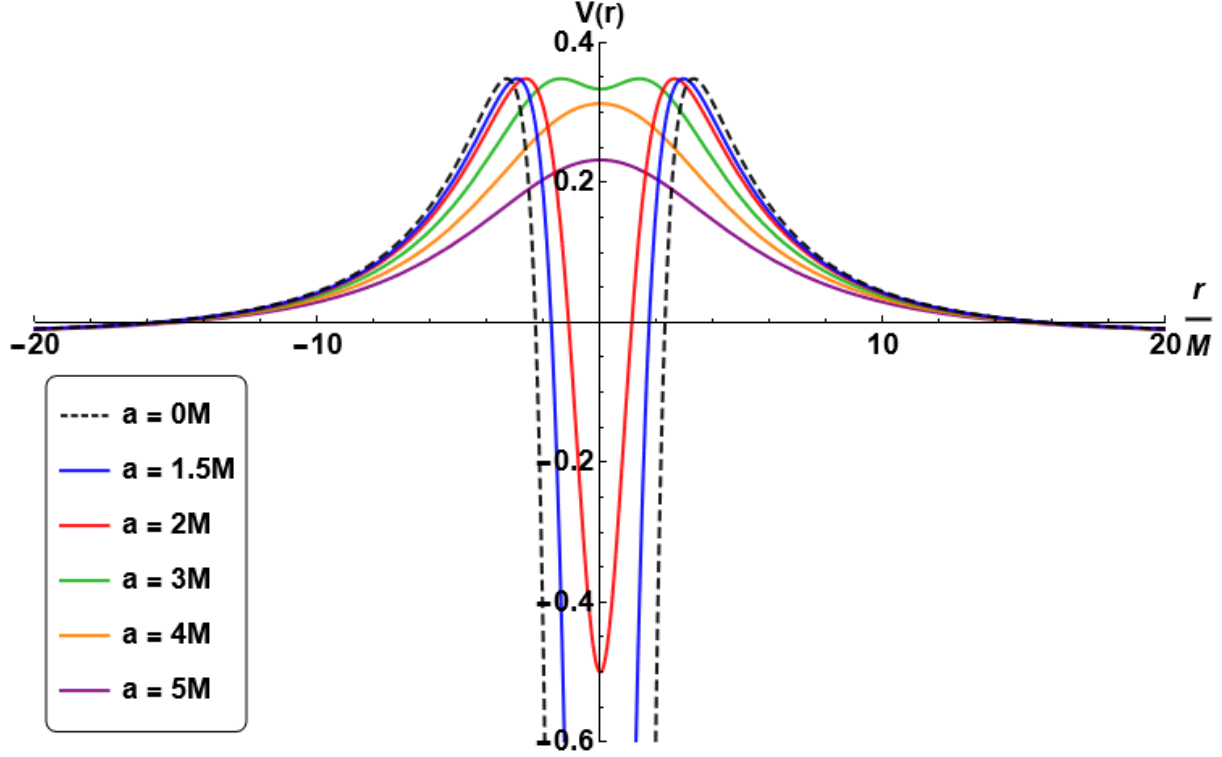


Figura 4.1: Potenciales efectivos con momento angular $h = 4,95M$, y parámetros $a = 0$ (Schwarzschild), $a = 1,5M$, $a = 2M$, $a = 3M$, $a = 4M$ y $a = 5M$, respectivamente.

4.2.2 Geodésicas radiales

Haciendo la sustitución $r \rightarrow \rho(r)$ en 3.39 y 3.40, se obtienen las ecuaciones de una partícula masiva que cae al agujero negro siguiendo una geodésica radial:

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{(r^2 + a^2)^{1/4}}{\sqrt{2M}} \quad (4.10)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{(r^2 + a^2)^{1/4}}{\sqrt{2M}} \left(1 - \frac{2M}{(r^2 + a^2)^{1/2}}\right)^{-1} \quad (4.11)$$

Como la solución de estas ecuaciones es demasiado complicada, se observa directamente el comportamiento de las ecuaciones diferenciales, encontrándose que cuando existe el horizonte de sucesos, si $(r^2 + a^2)^{1/2} \rightarrow 2M$ entonces $\frac{dt}{dr} \rightarrow 0$, mientras que $\frac{d\tau}{dr} \neq 0$ para todo valor de r , teniendo un comportamiento similar al de Schwarzschild, en el cual un observador en el infinito observará que la partícula nunca cruza el horizonte de sucesos, mientras que en un sistema de referencia que se mueve junto a la partícula sí verá cruzar el horizonte. Si no existe ningún horizonte, todo observador verá a la partícula caer hasta la garganta del agujero de gusano.

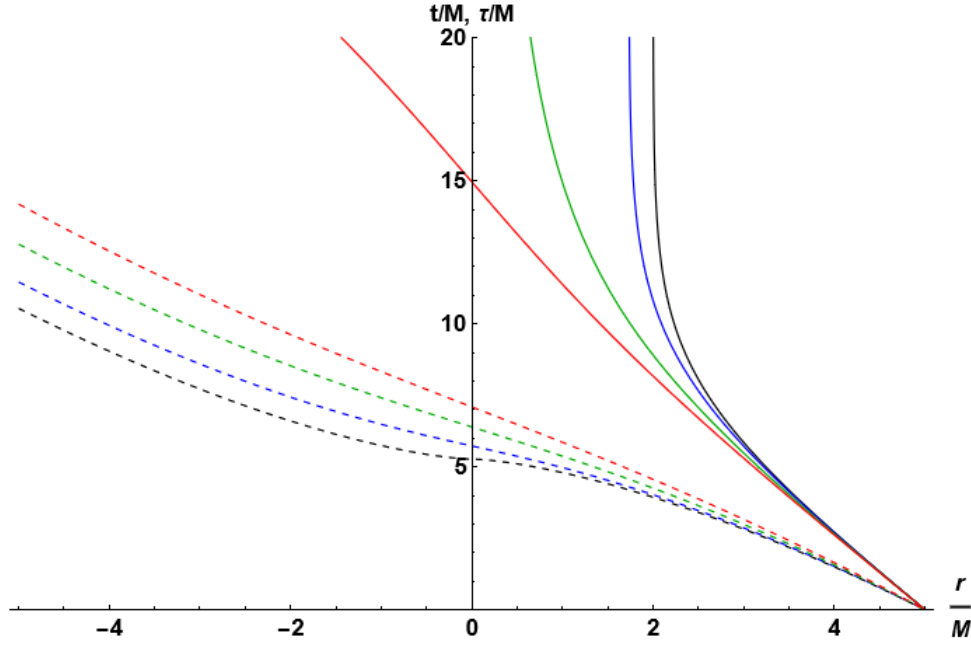


Figura 4.2: Representación del tiempo propio (líneas discontinuas) y del tiempo coordenado (líneas continuas), frente a la coordenada radial para geodésicas radiales de partículas masivas. Con parámetros $a = 0$ (Negro, Schwarzschild), $a = 1M$ (Azul), $a = 2M$ (Verde) y $a = 3M$ (Rojo), respectivamente.

4.2.3 Geodésicas circulares y el ISCO

Las órbitas circulares ocurren en los extremos, siendo inestables en $r_c = r_{max}^\pm$ y estables en $r_c = r_{min}^\pm$, teniendo las mismas condiciones de existencia que los respectivos extremos. Además, existirá otra órbita circular en el extremo de $r_c = r_{ext0} = 0$, la cual será estable cuando r_{ext0} sea un mínimo, e inestable cuando r_{ext0} sea un máximo.

Sustituyendo $r_c \rightarrow \sqrt{r_c^2 + a^2}$ en 3.43 y 3.45 se encuentra que las cantidades conservadas para estas geodésicas vienen dadas por:

$$h^2 = \frac{M(r_c^2 + a^2)}{\sqrt{r_c^2 + a^2} - 3M} \quad (4.12)$$

$$k = \frac{1 - 2M/\sqrt{r_c^2 + a^2}}{\left(1 - 3M/\sqrt{r_c^2 + a^2}\right)^{1/2}} \quad (4.13)$$

Haciendo la misma sustitución en 3.48 y 3.49 se encuentran los periodos en tiempo propio y coordenado:

$$\tau_c = 2\pi \sqrt{\frac{M(r_c^2 + a^2)^{3/2}}{M} \left(1 - \frac{3M}{\sqrt{r_c^2 + a^2}}\right)^{1/2}} \quad (4.14)$$

$$t_c = 2\pi \sqrt{\frac{M(r_c^2 + a^2)^{3/2}}{M}} \quad (4.15)$$

Finalmente, se encuentra que existen dos ISCOs, que ocurren en $r_c = \pm\sqrt{(6M)^2 - a^2}$, siempre que $h^2 = 12M^2$ y $a < 6M$. Obteniendo que $k_{ISCO} = 2\sqrt{2}/3$, igual que en Schwarzschild.

4.2.4 Diferencias en las órbitas

La clasificación de las geodésicas es la misma que en el caso de Schwarzschild, siendo muy similares las geodésicas en ambas métricas. Sin embargo, existen ligeras diferencias, las cuales se estudiarán en este apartado.

Las geodésicas homoclínicas tienen el mismo comportamiento siempre que existan los máximos. Sin embargo, cuando estos no existen, las homoclínicas coincidirán con la garganta, describiendo un número infinito de giros sobre la misma sin llegar a atravesarla.

En las geodésicas del primer tipo acotadas, se encuentra que para los mismos valores de h y k el valor de la precesión del periastro aumenta con a . Esto es debido a dos fenómenos, el primero siendo que la distancia entre periastro y apoastro es proporcional al valor de a . El segundo ocurre para valores de $a > 3M$ cuando no exista el máximo, en estos casos, la altura del potencial en r_{ext0} es inversamente proporcional al parámetro a , haciendo que al aumentar a la órbita se acerque más a la homoclínica, aumentando el valor de la precesión. Además, estas dejarán de existir cuando el mínimo no exista.

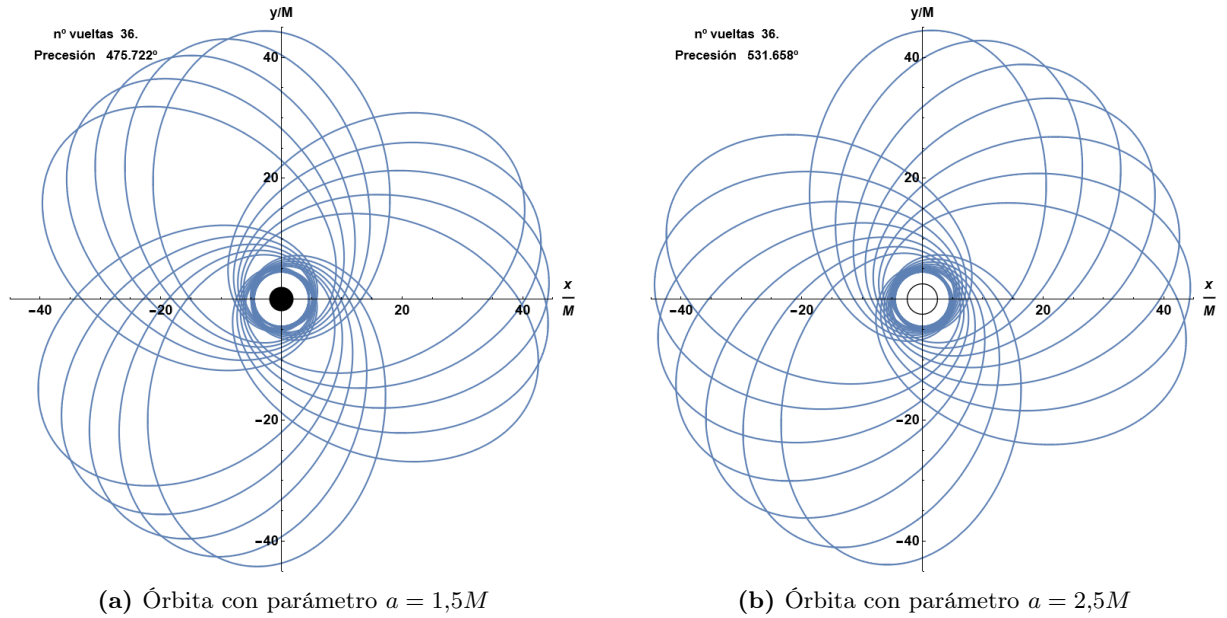
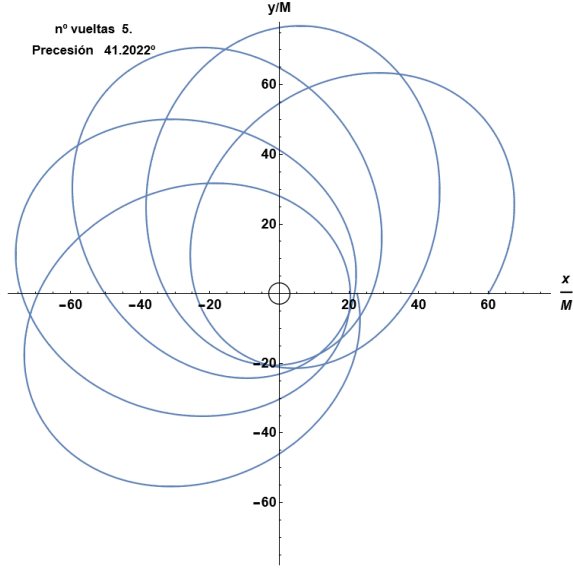


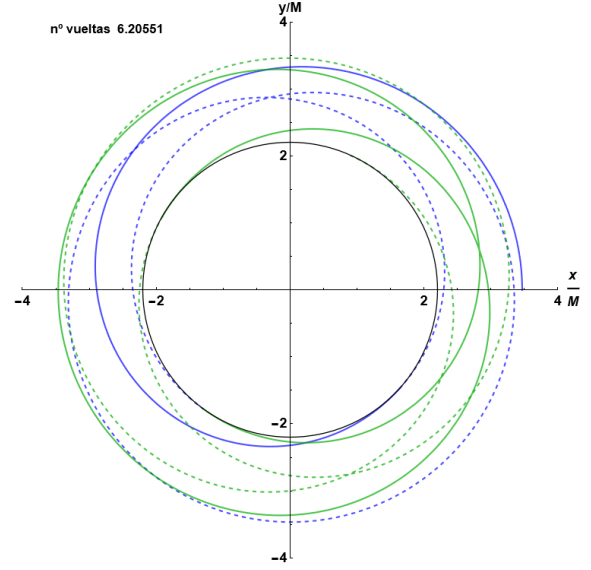
Figura 4.3: Dos órbitas acotadas del primer tipo, con los mismos parámetros h y E_{orb} que Fig.3.5, cambiando el parámetro a . La circunferencias en el centro de la segunda imagen representan la garganta del agujero de gusano, el círculo negro de la primera imagen representa el agujero negro. Se utiliza ρ como coordenada radial.

Para las geodésicas del primer tipo no acotadas, aumenta la desviación de la órbita cuanto mayor sea a , y dejarán de existir cuando el valor máximo del potencial (en r_{max} o en el origen, respectivamente) sea negativo.

La principal diferencia en las órbitas del segundo tipo es que para ciertos valores de a y h dejarían de existir, cuando el máximo no exista y el potencial en el origen sea un máximo. Además, si estas órbitas existen para $a > 2M$, las partículas oscilarán entre los dos apoastros, atravesando la garganta del agujero de gusano un número infinito de veces.



(a) Órbita acotada del primer tipo, con los mismos parámetros h y E_{orb} que Fig.3.4, y $a = 3M$. Se puede apreciar el aumento en el ángulo de precesión de $39,14^\circ$ a $41,20^\circ$.

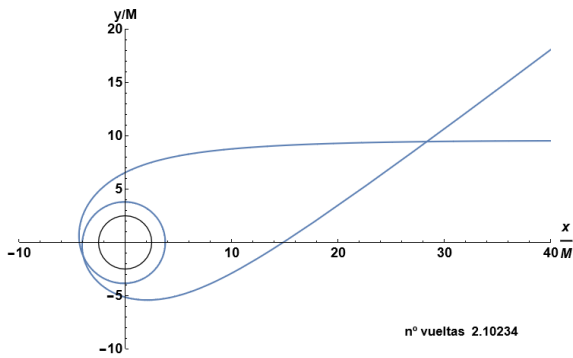


(b) Órbita del segundo tipo con $h = 4,3M$, $E_{orb} = 0,037M$, $a = 2,2M$. Las curvas discontinuas representan cuando la partícula toma valores negativos de r , y las continuas valores positivos. Las curvas azules representan la partícula antes de cruzar la garganta por segunda vez, y las verdes después de cruzarla por segunda vez.

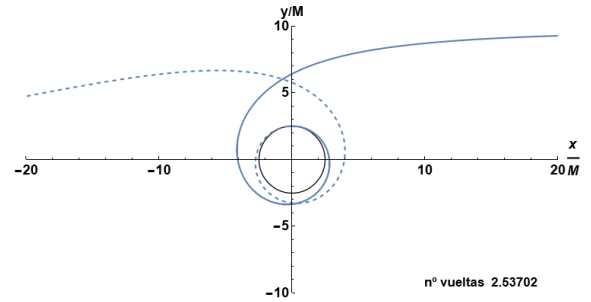
Figura 4.4: Órbita del primer tipo acotada y órbita del segundo tipo, respectivamente.

Finalmente, en las órbitas de captura, la principal diferencia es que para $a > 2M$ la partícula alcanza la garganta, atravesándola y alcanzando valores negativos de r . Además, se encuentra que la sección eficaz es la misma que en Schwarzschild, 3.53, si existe el máximo. En los casos en los que el máximo no existe, la sección eficaz será no nula si el potencial en el origen es mayor que cero, y vendrá dada por:

$$\sigma = \pi h^2 \left(1 - a^{-3} [2Ma^2 - h^2(a - M)]^{-1} \right) \quad (4.16)$$



(a) Órbita del primer tipo no acotada, con los mismos parámetros h y E_{orb} que Fig.3.6, y $a = 2,5M$.



(b) Órbita de captura con los mismos parámetros h y E_{orb} que Fig.3.8, y $a = 2,5M$. La curva discontinua representa la órbita en valores negativos de r .

Figura 4.5: Órbita del primer tipo no acotada y órbita de captura, respectivamente.

4.3 Órbitas de partículas sin masa

En esta métrica también es necesario definir el parámetro de impacto aparente, siendo definido de la misma forma que en Schwarzschild $b = h/k$, y reescalar el parámetro afín $\lambda \rightarrow h\lambda$. Obteniendo ecuaciones con la misma forma que en Sec.3.4.1 aplicando la sustitución $r \rightarrow \rho(r)$, exceptuando las ecuaciones 3.64 y 3.66,

$$\ddot{r} = \frac{r}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3M}{(r^2 + a^2)^2} \right] \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2 - a^2 u \left[5Mu^3 - 2u^2 + \frac{1}{b^2} \right] \quad (4.18)$$

4.3.1 El potencial efectivo

El estudio es también similar al caso de Schwarzschild Sec.3.4.2. Ahora, el potencial efectivo viene dado por:

$$V_{eff} = \frac{1}{r^2 + a^2} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \quad (4.19)$$

Los puntos de retorno cumplen $\dot{r} = 0$, obteniendo la siguiente ecuación:

$$(r_{ret}^2 + a^2)^{3/2} - b^2 [(r_{ret}^2 + a^2) - 2M] = 0 \quad (4.20)$$

Cuya solución es:

$$r_{ret}^{\pm} = \pm \left(\frac{4b^2}{3} \cos^2 \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{3\sqrt{3}M}{b} \right) + \frac{2n\pi}{3} \right] - a^2 \right)^{1/2}; \quad n = 0, 1, 2 \quad (4.21)$$

Donde $n = 0$ se identifica con dos periastrós y $n = 2$ con dos apoastrós. Para el caso $n = 1$ el interior de la raíz siempre es negativo, por lo que no será un punto de retorno.

Para el estudio de los extremos se obtienen las derivadas primera y segunda del potencial efectivo:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\frac{2r}{(r^2 + a^2)^2} \left(1 - \frac{3M}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \right) \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{dV_{eff}}{dr} + \frac{2r^2}{(r^2 + a^2)^3} \left(4 - \frac{15M}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \right) \quad (4.23)$$

Igualando 4.22 a 0 se encuentran tres extremos, usando 4.23 se identifica que dos de ellos siempre son máximos:

$$r_{max}^{\pm} = \pm \sqrt{(3M)^2 - a^2} \quad (4.24)$$

$$r_{ext0} = 0 \quad (4.25)$$

Los máximos encontrados solo existen para valores de $a < 3M$. El extremo en el origen siempre existe y será: un mínimo si $a < 3M$ o un máximo si $a \geq 3M$.

Se encuentra que el valor del potencial en los máximos es $V_{eff}(r_{max}^{\pm}) = (27M^2)^{-1}$, igual que en Schwarzschild, como era de esperar. En el origen se tiene que $V_{eff}(r_{ext0}) \leq 0$ si $a < 2M$, y $V_{eff}(r_{ext0}) > 0$ si $a > 2M$, en especial se tiene que el valor del potencial alcanza un máximo $V_{eff}(r_{ext0}) = (27M^2)^{-1}$ para $a = 3M$, disminuyendo la altura del potencial para $a > 3M$.

Además, $V_{eff}(r) > 0$ en el exterior del horizonte de sucesos, y es exactamente 0 en el propio horizonte, para $a \leq 2M$, y para $a > 2M$ se tiene que $V_{eff}(r)$ es positivo para todo valor de r .

Ahora se puede estudiar la existencia de los puntos de retorno. Los periaistros existen para todo valor de a si $b^{-2} \leq 27M^2$, para $a \leq 3M$, o $b^{-2} \leq V_{eff}(r_{ext0})$, para $a > 3M$. Los apoastros solo existirán si $a < 3M$ y $V_{eff}(r_{ext0}) < b^{-2} \leq 27M^2$.

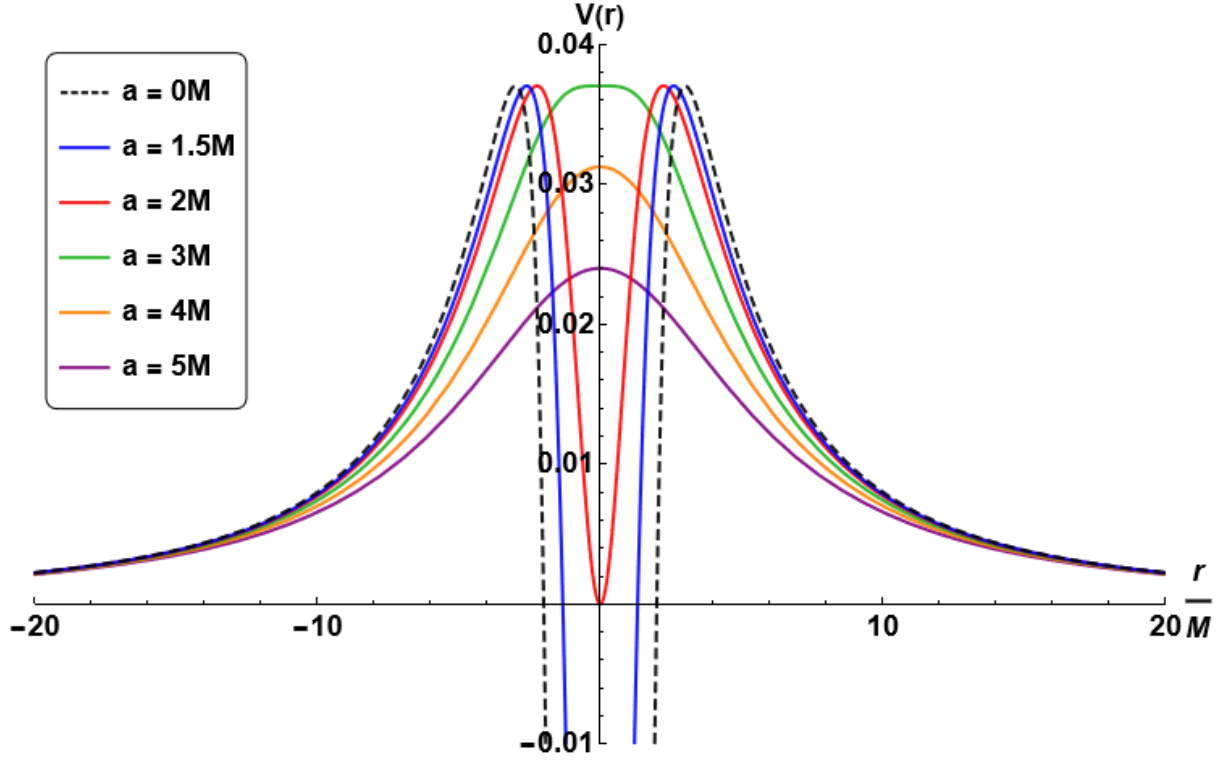


Figura 4.6: Potenciales efectivos con parámetros $a = 0$ (Schwarzschild), $a = 1,5M$, $a = 2M$, $a = 3M$, $a = 4M$, $a = 5M$, respectivamente. Se puede observar, como los máximos se aproximan el uno al otro al aumentar a , hasta que se juntan en el origen para $a = 3M$, y como disminuye el valor del potencial en el origen al aumentar a para $a > 3M$.

4.3.2 Geodésicas radiales

Haciendo la sustitución $r \rightarrow \rho(r)$ en 3.72, se obtienen las ecuaciones del movimiento radial de una partícula sin masa:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \right) \quad (4.26)$$

Donde, al igual que antes, el signo positivo es para partículas entrantes y el negativo para partículas salientes.

Integrando estas ecuaciones se obtienen las siguientes soluciones, dependiendo del valor de a :

$$t = \pm r \pm 2M \log \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + a^2}}{a} \right) \mp \frac{4M^2}{\sqrt{4M^2 - a^2}} \cdot \arctanh \left(\frac{r\sqrt{4M^2 - a^2} \left(2M + \sqrt{r^2 + a^2} \right)}{(4M^2 - a^2)\sqrt{r^2 + a^2} + 2Mr^2} \right) + cte \quad (4.27)$$

Si $a < 2M$:

$$\text{Si } a = 2M : t = \pm r \mp \frac{2M \left(\sqrt{r^2 + 4M^2} + 2M \right)}{r} \pm 2M \log \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + 4M^2}}{2M} \right) + cte \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } a > 2M : \\ t = \pm r \pm 2M \log \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + a^2}}{a} \right) \pm \frac{4M^2}{\sqrt{a^2 - 4M^2}} \cdot \\ \cdot \left[\arctan \left(\frac{r}{\sqrt{a^2 - 4M^2}} \right) + \arctan \left(\frac{2Mr}{\sqrt{(a^2 - 4M^2)(r^2 + a^2)}} \right) \right] + cte \end{aligned} \quad (4.29)$$

Encontrándose que para $a \leq 2M$ si $r \rightarrow \pm\sqrt{4M^2 - a^2}$ entonces $t \rightarrow \infty$ y $\frac{dr}{dt} \rightarrow 0$, y para un observador en el infinito, la partícula nunca atravesará el horizonte de eventos. En cambio, para $a > 2M$ el tiempo coordenado no diverge en ningún punto, y para un observador en el infinito, la partícula llegará a la garganta del agujero de gusano en un tiempo finito.

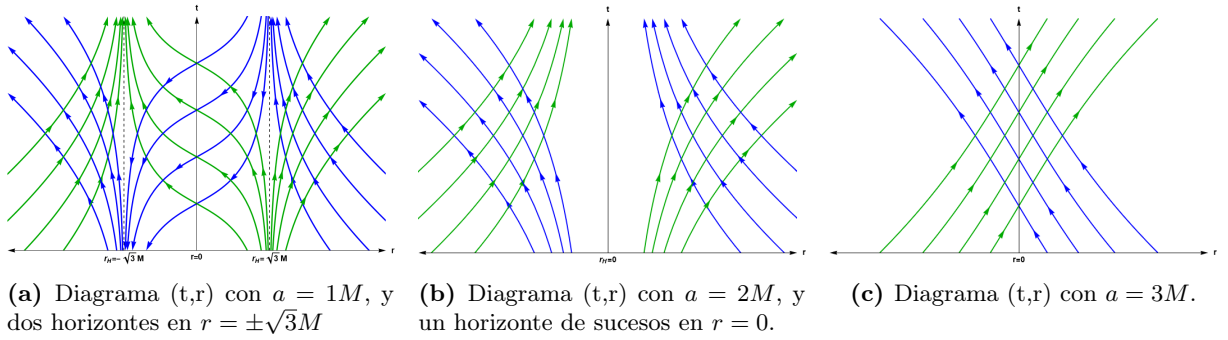


Figura 4.7: Diagramas (t,r) del espacio-tiempo de Simpson-Visser para distintos valores del parámetro a . Las curvas representan geodésicas radiales entrantes (azules) y salientes (verdes), respecto a un observador en valores positivos de r .

4.3.3 Geodésicas circulares

Como las órbitas circulares ocurren en los extremos, se tendrán órbitas inestables en $r_c = r_{max}^{\pm} = \sqrt{(3M)^2 - a^2}$ siempre que $a \leq 3M$. Además, aparece otra órbita circular en $r_c = r_{ext0} = 0$, coincidiendo con la garganta, y que será estable para $a < 3M$, e inestable para $a \geq 3M$.

Ahora, la esfera de fotones se encuentra en $r = \sqrt{(3M)^2 - a^2}$ siempre que $a \leq 3M$, coincidiendo con la garganta en $r = 0$ para $a \geq 3M$. Por lo que se denomina que para $r = 3M$ ocurre la última esfera de fotones.

En este caso, el parámetro de impacto crítico será el de las órbitas circulares inestables, obteniendo que:

$$b_c = \begin{cases} 3\sqrt{3}M & \text{si } a \leq 3M \\ \sqrt{\frac{a^3}{a-2M}} & \text{si } a > 3M \end{cases} \quad (4.30)$$

4.3.4 Diferencias en las órbitas

Siendo la clasificación similar al caso de Schwarzschild, se encuentra que existen diferencias sutiles entre ambos tipos de geodésicas, siendo estas las que se presentan a continuación.

Las órbitas críticas siguen el mismo comportamiento que en Schwarzschild para $a < 3M$, en cambio, para $a \geq 3M$ el círculo al que tienden las órbitas críticas coincide con la garganta, describiendo un número infinito de giros sin llegar a atravesarla.

En las geodésicas del primer tipo se observa que el ángulo de deflexión, para un mismo parámetro de impacto, es proporcional al parámetro a , siendo siempre superior a la deflexión en la métrica de Schwarzschild.

Las geodésicas del segundo tipo solo existirán para valores de $a < 3M$. Además, para $2M < a < 3M$ las partículas oscilarán entre los dos apoastros, atravesando la garganta del agujero de gusano un número infinito de veces, de forma similar a las partículas masivas.

La mayor diferencia para las órbitas de captura es que si $a > 2M$ la partícula atravesará la garganta alcanzando valores negativos de r . Además, el valor de la sección eficaz dependerá de a , siendo $\sigma = \pi b_c^2$, donde el parámetro de impacto crítico es el dado por 4.30.

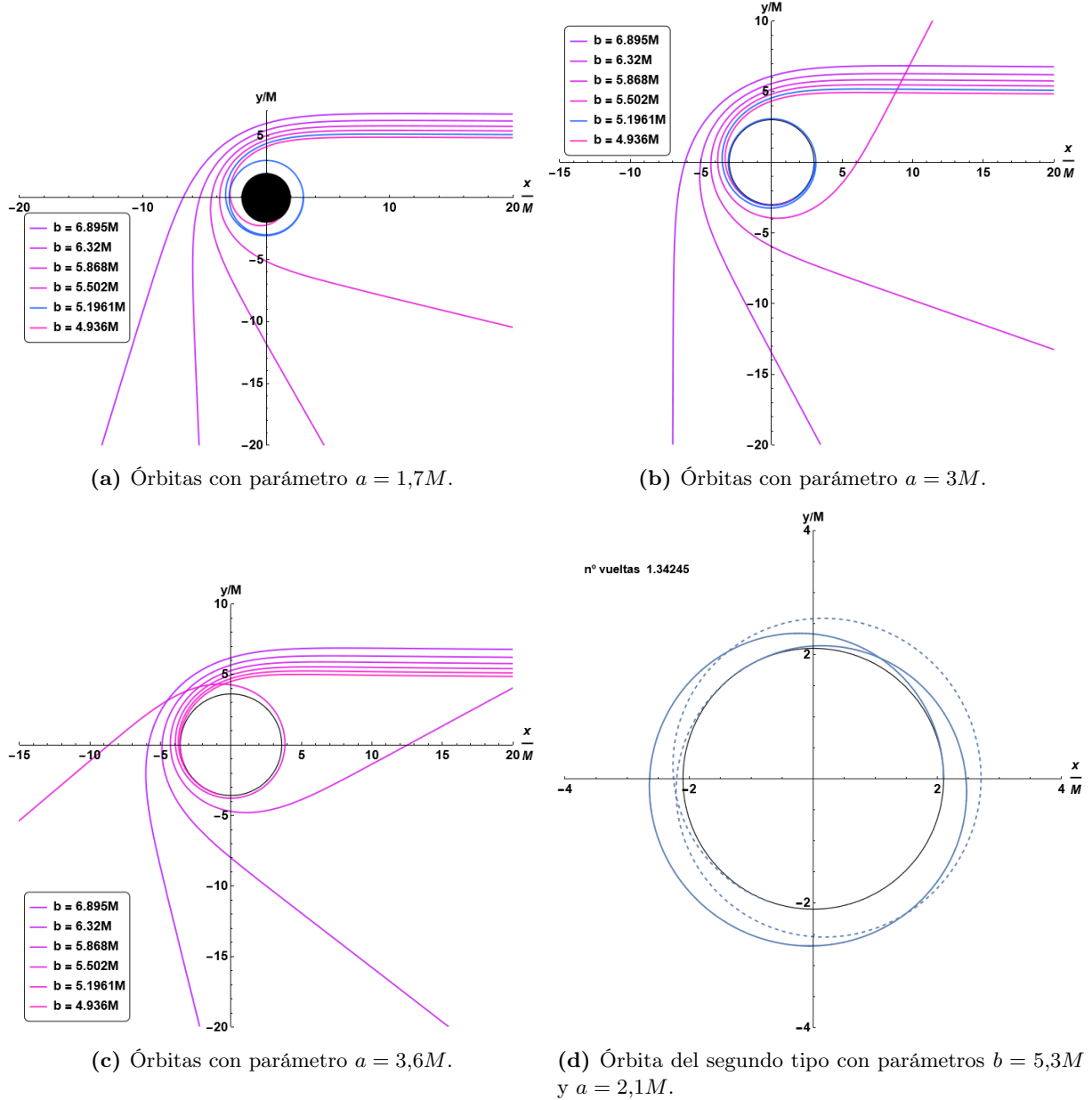


Figura 4.8: Órbitas de partículas sin masa en la métrica de Simpson-Visser. Las figuras (a), (b) y (c) presentan órbitas del primer tipo y de captura para distintos valores de a . Además, en (a) y (b) aparece una órbita crítica (curva azul). La figura (d) representa una órbita del segundo tipo.

4.3.5 Deflexión de la trayectoria

Haciendo la sustitución $r \rightarrow \rho(r)$ en 3.78, se obtiene la fórmula de la deflexión de la trayectoria de una partícula de masa nula en el espacio-tiempo de Simpson-Visser:

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_p) - \phi_\infty| = 2 \left| \int_{r_{per}}^{\infty} \frac{1}{r^2 + a^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2 + a^2} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right]^{-1/2} \right| \quad (4.31)$$

Tomando las aproximaciones $M/r \ll 1$ y $a/r \ll 1$ se obtiene la fórmula calculada en [17]:

$$\delta\phi_{def} = \frac{4M}{b} + \frac{a^2\pi}{4b^2} \quad (4.32)$$

Se puede observar que el primer término es el mismo que en el caso de Schwarzschild 3.79, por lo que la deflexión siempre será mayor que en dicho caso. Sin embargo, como el segundo término depende de a^2 y b^{-2} , la diferencia será imperceptible a efectos prácticos.

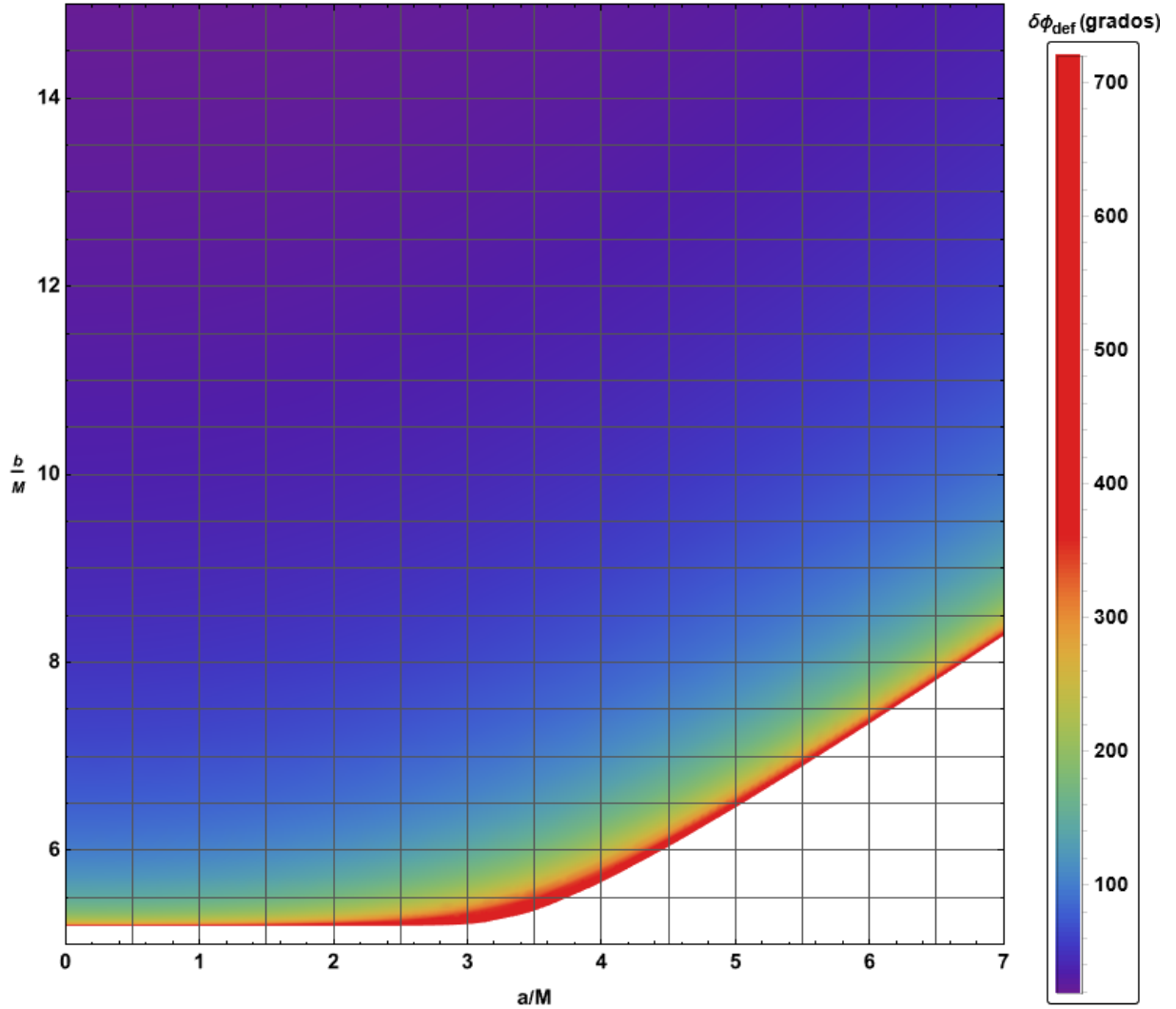


Figura 4.9: Ángulo de deflexión de la trayectoria en función de los parámetros a y b . La zona sin color se corresponde con valores de $b < b_c$, para los cuales no hay deflexión. Se puede observar que para un mismo valor de b el ángulo de deflexión es proporcional al parámetro a , como se había dicho antes. No se puede apreciar en el gráfico, sin embargo, cuando $b \rightarrow b_c$ el ángulo $\delta\phi_{def} \rightarrow \infty$.

5. Conclusiones

El objetivo principal de este TFG era construir una clasificación que explicara de forma intuitiva, basándose en el potencial efectivo y la energía de las órbitas, el comportamiento que presenta el movimiento de partículas en caída libre, en las geometrías de Schwarzschild y de Simpson-Visser, lo cual ha llevado a la siguiente definición de los tipos de órbita más generales: Órbitas acotadas del primer tipo, donde las partículas se encuentran en el pozo del potencial, oscilan entre el apoastro y el periaastro, y además se pueden clasificar con más detalle en función de los valores que puede tomar la precesión del periaastro, dependiendo del momento angular. Órbitas no acotadas del primer tipo, en las cuales las partículas provenientes del infinito llegan al periaastro y vuelven al infinito, teniendo que el movimiento está definido por la deflexión de la trayectoria. Órbitas del segundo tipo, las cuales poseen un apoastro y cualquier partícula con este tipo de trayectoria deberá caer al agujero negro. Órbitas de captura, en las cuales las partículas que provienen del infinito caen al agujero negro, para las cuales se ha encontrado la sección eficaz. Y finalmente, las órbitas homoclínicas, las cuales representan la frontera entre las órbitas del primer tipo y las órbitas que terminan dentro del agujero negro. Además, esta clasificación funciona tanto para partículas masivas como sin masa, con la peculiaridad de que para partículas sin masa no pueden existir órbitas acotadas del primer tipo.

Se ha encontrado que esta clasificación funciona en las dos geometrías estudiadas, variando ligeramente el comportamiento tanto del potencial como del movimiento de las partículas entre ambas geometrías.

En Schwarzschild el potencial efectivo para las partículas masivas depende únicamente del momento angular h , teniendo que para valores de $h < 4M$ desaparecen las órbitas del primer tipo no acotadas, y para $h < 2\sqrt{3}M$ no existen las acotadas del primer tipo. Y en el caso de las partículas sin masa, el potencial es independiente de cualquier parámetro.

Para el caso de Simpson-Visser al potencial de los dos tipos de partículas se le añade una dependencia en el parámetro a . Teniendo que para partículas masivas, en ciertos casos, además de poder no existir las órbitas del primer tipo, acotadas y no acotadas respectivamente, pueden no existir las órbitas del segundo tipo.

También se ha observado que los valores, tanto de la precesión del periaastro como de la deflexión de la trayectoria, siempre van a ser mayores en la geometría de Simpson-Visser que en la de Schwarzschild, para órbitas con los mismos parámetros h y k , o b , respectivamente. Y que sus valores también aumentan proporcionalmente al parámetro a .

Como parte de esta clasificación también se ha obtenido una explicación detallada de los potenciales efectivos en cada caso, en función de la existencia, posición y altura de los máximos. Además, se ha obtenido una fórmula explícita de la posición de los puntos de retorno para partículas sin masa, en ambas geometrías.

Mediante el uso de las órbitas radiales se ha podido explicar el efecto que tienen los horizontes de eventos sobre el movimiento de las partículas, evitando que escapen una vez que hayan atravesado el horizonte, y causando que un observador en el infinito nunca pueda ver a la partícula atravesar el horizonte. También se ha obtenido la estructura que forman las geodésicas radiales de las partículas sin masa en todo el espacio-tiempo de ambas geometrías.

En el estudio de las órbitas circulares se ha encontrado la existencia, en las dos geometrías, de la órbita estable más interna (ISCO) para las partículas masivas, que ocurre para el momento angular más pequeño en el que existen órbitas del primer tipo. Y de la esfera de fotones para las partículas sin masa, representando la única región del espacio donde estas partículas pueden

seguir una órbita estable (no caen en el agujero negro ni escapan al infinito).

También se ha descrito cómo varía la deflexión de la trayectoria en función del parámetro de impacto aparente b , y el parámetro a en el espacio-tiempo de Simpson-Visser. Haciendo uso de la resolución gráfica de las integrales para valores bajos de b , y obteniendo las fórmulas para grandes distancias. Además, solo en Schwarzschild, se ha calculado la fórmula de la precesión del periastro para grandes distancias.

Finalmente, se ha construido un programa en Mathematica para el cálculo y representación de las órbitas para los dos tipos de partículas y ambas geometrías, basándose en las ecuaciones de $\ddot{r}$, 3.32, 3.64, 4.2 y 4.17, y las ecuaciones geodésicas para las variables t y ϕ . Este ha sido el programa usado para generar todas las imágenes de las distintas órbitas. El enlace para descargar el programa y la explicación de su uso se encuentra en el apéndice A.2.

Lista de Figuras

2.1	Potencial efectivo de Newton.	3
3.1	Representación de los 5 casos de $V_{eff}(r)$. Los puntos marcan la posición de los extremos. La línea vertical denota la posición del horizonte de sucesos, $r_s = 2M$	10
3.2	Clasificación de las geodésicas en función de la energía de la órbita, para $h = 4,5M$. El área de color gris representa la zona prohibida, el resto de áreas de colores representan las diferentes zonas energéticas para cada tipo de órbita, en el área roja órbitas de captura, en las áreas azules para órbitas no acotadas, las áreas verdes y amarilla para órbitas acotadas, siendo esta última una zona donde solo existen órbitas de segundo tipo.	11
3.3	Dos órbitas homoclínicas con parámetros $h = 4,2M$ y $E_{orb} = 0,0261954M$. La órbita azul es del primer tipo, y la órbita verde es del segundo tipo.	14
3.4	Órbita acotada del primer tipo con parámetros $h = 6M$ y $E_{orb} = -0,01M$, caso de momento angular intermedio.	15
3.5	Órbita acotada del primer tipo con parámetros $h = 3,85M$ y $E_{orb} = -0,0189M$, caso de momento angular bajo. Presenta 4 hojas que precesan, y describe 1 whirl.	15
3.6	Órbita no acotada del primer tipo con parámetros $h = 4,7M$ y $E_{orb} = 0,1M$. Describe 1 whirl antes de volver al infinito.	16
3.7	Dos órbitas del segundo tipo con $h = 4,2M$. La órbita azul es no acotada, con $E_{orb} = 0,026M$. La órbita verde es acotada con $E_{orb} = -0,01M$	16
3.8	Órbita de captura con $h = 4,5M$ y $E_{orb} = 0,09M$. Los puntos rojos en la imagen de la izquierda se corresponden con intervalos de tiempo propio $\Delta\tau = 1,5M$, y los puntos negros en la imagen de la derecha se corresponden con intervalos de tiempo coordinado $\Delta t = 1,5M$	17
3.9	Clasificación de las geodésicas en función de la energía de la órbita en el caso 3, para $h = 3,75M$. Los colores tienen la misma interpretación que en Fig.3.2.	18
3.10	Clasificación de las geodésicas en función de la energía de la órbita en el caso 5, para $h = 3M$. Los colores tienen la misma interpretación que en Fig.3.2.	18
3.11	Representación de $V_{eff}(r)$. El punto marca la posición del máximo, y su valor está representado en la ordenada. La línea vertical denota la posición del horizonte de sucesos, $r_s = 2M$	21
3.12	Diagrama (t, r) del espacio-tiempo de Schwarzschild. Las curvas representan geodésicas nulas radiales entrantes (azules) y salientes (verdes). La línea vertical negra en $r_S = 2M$ representa el horizonte de sucesos.	22
3.13	Dos órbitas críticas con $b = b_c$. La órbita azul es del primer tipo, y la órbita verde es del segundo tipo.	23
3.14	Cuatro órbitas del primer tipo con parámetros, $b = 5,19676M$, $5,869M$, $6,896M$, $8,761M$, respectivamente.	23
3.15	Dos órbitas del segundo tipo. La órbita azul con $b = 5,1964M$. La órbita verde con $b = 6M$	24
3.16	Tres órbitas de captura, con parámetros $b = 5,196M$, $3,5M$, $2M$, respectivamente.	24
3.17	Clasificación de las geodésicas en función del parámetro impacto aparente de la órbita para partículas de masa nula. Los colores tienen la misma interpretación que en Fig.3.2.	24

3.18	Representación del ángulo de deflexión en función del parámetro de impacto. Se observa que diverge cuando $b \rightarrow b_c$, como se esperaba, ya que se aproxima a la órbita crítica.	25
4.1	Potenciales efectivos con momento angular $h = 4,95M$, y parámetros $a = 0$ (Schwarzschild), $a = 1,5M$, $a = 2M$, $a = 3M$, $a = 4M$ y $a = 5M$, respectivamente.	28
4.2	Representación del tiempo propio (líneas discontinuas) y del tiempo coordinado (líneas continuas), frente a la coordenada radial para geodésicas radiales de partículas masivas. Con parámetros $a = 0$ (Negro, Schwarzschild), $a = 1M$ (Azul), $a = 2M$ (Verde) y $a = 3M$ (Rojo), respectivamente.	29
4.3	Dos órbitas acotadas del primer tipo, con los mismos parámetros h y E_{orb} que Fig.3.5, cambiando el parámetro a . La circunferencias en el centro de la segunda imagen representan la garganta del agujero de gusano, el círculo negro de la primera imagen representa el agujero negro. Se utiliza ρ como coordenada radial.	30
4.4	Órbita del primer tipo acotada y órbita del segundo tipo, respectivamente.	31
4.5	Órbita del primer tipo no acotada y órbita de captura, respectivamente.	31
4.6	Potenciales efectivos con parámetros $a = 0$ (Schwarzschild), $a = 1,5M$, $a = 2M$, $a = 3M$, $a = 4M$, $a = 5M$, respectivamente. Se puede observar, como los máximos se aproximan el uno al otro al aumentar a , hasta que se juntan en el origen para $a = 3M$, y como disminuye el valor del potencial en el origen al aumentar a para $a > 3M$	33
4.7	Diagramas (t,r) del espacio-tiempo de Simpson-Visser para distintos valores del parámetro a . Las curvas representan geodésicas radiales entrantes (azules) y salientes (verdes), respecto a un observador en valores positivos de r	34
4.8	Órbitas de partículas sin masa en la métrica de Simpson-Visser. Las figuras (a), (b) y (c) presentan órbitas del primer tipo y de captura para distintos valores de a . Además, en (a) y (b) aparece una órbita crítica (curva azul). La figura (d) representa una órbita del segundo tipo.	35
4.9	Ángulo de deflexión de la trayectoria en función de los parámetros a y b . La zona sin color se corresponde con valores de $b < b_c$, para los cuales no hay deflexión. Se puede observar que para un mismo valor de b el ángulo de deflexión es proporcional al parámetro a , como se había dicho antes. No se puede apreciar en el gráfico, sin embargo, cuando $b \rightarrow b_c$ el ángulo $\delta\phi_{def} \rightarrow \infty$	36

Lista de Tablas

3.1	Valores de la precesión del perihelio para algunos objetos del sistema solar. Datos provenientes de [5] y [8].	19
4.1	Comportamiento de los extremos de 4.4 en función del parámetro a , tomando $h \geq 2\sqrt{3}M$. Debido a la simetría en r , ambos mínimos tienen las mismas condiciones de existencia, al igual que los dos máximos.	27
A.1	Comparación de magnitudes entre el Sistema Internacional y las Unidades Geométricas	42

A. Apéndice

A.1 Conversión unidades geométricas

A continuación, se presenta una tabla con el análisis dimensional de las magnitudes relevantes en este documento, sin geometrizar y geometrizadas. Además de la conversión entre las Unidades Geométricas, UG, y el Sistema Internacional, SI.

Magnitud	Dimensiones sin geometrizar	Dimensiones geometrizadas	Conversión UG $\rightarrow$ SI
Longitud	L	L	1
Masa	M	L	c^2/G
Tiempo	T	L	c^{-1}
Energía	L^2T^2M	1	c^4/G
Velocidad	LT^{-1}	1	c
Momento angular	$L^2T^{-1}M$	L^2	c^2/G

Tabla A.1: Comparación de magnitudes entre el Sistema Internacional y las Unidades Geométricas

A.2 Programa para el cálculo de las órbitas

El acceso al programa está en [este enlace](#).

Este programa contiene diferentes secciones divididas por geometría, tipo de partícula y si el cálculo es de órbitas individuales o de un conjunto de las mismas.

Será necesario tener instalado el programa Wolfram Mathematica. Para usar los programas, solo hay que editar el valor de los parámetros y las condiciones iniciales de la órbita, que se encuentran en la parte superior de cada sección junto a una breve explicación del significado de cada variable, y evaluar la sección del programa que se esté usando, pulsando Shift + Enter.

Bibliografía

- [1] A. Simpson y M. Visser, «Black-bounce to traversable wormhole», *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2019, n.º 02, pág. 042, 2019.
- [2] M. S. Morris y K. S. Thorne, «Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity», *American Journal of Physics*, vol. 56, n.º 5, págs. 395-412, 1988.
- [3] S. Chandrasekhar y K. S. Thorne, *The mathematical theory of black holes*, 1985.
- [4] J. R. Taylor, *Classical mechanics*. University science book, 2005.
- [5] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou y A. N. Lasenby, *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [6] K. S. Thorne, C. W. Misner y J. A. Wheeler, *Gravitation*. Freeman San Francisco, 2000.
- [7] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons, 2013.
- [9] L. Bombelli y E. Calzetta, «Chaos around a black hole», *Classical and Quantum Gravity*, vol. 9, n.º 12, pág. 2573, 1992.
- [10] R. Grossman y J. Levin, «Dynamics of black hole pairs. II. Spherical orbits and the homoclinic limit of zoom-whirliness», *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, vol. 79, n.º 4, pág. 043 017, 2009.
- [11] U. Kostić, «Analytical time-like geodesics in Schwarzschild space-time», *General Relativity and Gravitation*, vol. 44, págs. 1057-1072, 2012.
- [12] J. Levin y G. Perez-Giz, «A periodic table for black hole orbits», *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, vol. 77, n.º 10, pág. 103 005, 2008.
- [13] L. Morgovsky, «Direct and Exact Description of Null Geodesics in Schwarzschild Spacetime», *Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology*, vol. 9, n.º 1, págs. 234-244, 2022.
- [14] Y. Wang, X. Liu, N. Yang, J. Liu y J. Jia, «Escape, bound and capture geodesics in local static coordinates in Schwarzschild spacetime», *General Relativity and Gravitation*, vol. 52, n.º 2, pág. 16, 2020.
- [15] M. V. de S. Silva y M. E. Rodrigues, «Orbits around a black bounce spacetime», *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 63, n.º 4, pág. 101, 2024.
- [16] M. Guerrero, G. J. Olmo, D. Rubiera-Garcia y D. S.-C. Gómez, «Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk», *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2021, n.º 08, pág. 036, 2021.
- [17] A. Övgün, «Weak deflection angle of black-bounce traversable wormholes using Gauss-Bonnet theorem in the dark matter medium», *Turkish Journal of Physics*, vol. 44, n.º 5, págs. 465-471, 2020.