



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

SISTEMAS COMPLEJOS Y ENTROPÍAS GENERALIZADAS

Autor: Adrián Peña de la Fuente
Tutores: Luis Fernando Hevia de los Mozos,
José Carlos Cobos Hernández
2025

*Agradecer a Luis Fernando Hevia
y José Carlos Cobos
el tiempo y la dedicación empleados
para la elaboración de este trabajo.
De la misma manera, agradecer a mi familia
y amigos el apoyo moral
durante toda mi trayectoria universitaria.*

Resumen

El trabajo aborda el estudio de los sistemas complejos desde una perspectiva científica, con especial énfasis en su relación con la entropía, el orden, el desorden y la información. En concreto, se profundiza en qué es un sistema complejo, cómo se define, qué características presenta y qué herramientas existen para su estudio.

En primer lugar, se presenta el concepto de complejidad, abordando su origen interdisciplinar (matemáticas, filosofía, física) y señalando que no existe una definición única aceptada universalmente. Los sistemas complejos se caracterizan por estar formados por múltiples elementos interconectados que generan comportamientos colectivos no predecibles a partir del comportamiento individual de sus partes. Se destacan conceptos clave (propios de la complejidad) como fenómenos emergentes, redes y leyes de potencia.

En el segundo capítulo del trabajo se inspeccionan algunos tratamientos cuantitativos de los sistemas complejos, tratando de extender herramientas de la física estadística y la termodinámica. Para ello, se revisan los tres papeles distintos que juega la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon en sistemas simples (como entropía termodinámica, como entropía de información y como herramienta para inferencia estadística). Además, se expone el modelo de orden, desorden y complejidad propuesto por Landsberg. En la segunda parte del capítulo, se estudia cómo en sistemas complejos puede convenir usar otras entropías para representar cada uno de los tres papeles anteriores.

Por último, el trabajo explora el campo de la econofísica, hablando sobre la posibilidad de aplicar los métodos y enfoques desarrollados al estudio de sistemas económicos, que también pueden entenderse como sistemas complejos debido a sus múltiples elementos, interacciones y fenómenos emergentes.

Es importante dejar claro que el objetivo de este trabajo no es clarificar qué debe entenderse universalmente por sistema complejo o realizar una revisión completa y exhaustiva de la ciencia de la complejidad (pues sería inabordable), sino sólo presentar algunas de las propuestas existentes analizando la coherencia de las mismas desde el punto de vista de la física estadística conocida. En conjunto, el trabajo muestra cómo la física, y en particular la física estadística, proporciona herramientas que, adecuadamente adaptadas, son útiles para describir, cuantificar y analizar sistemas complejos, desde fenómenos naturales hasta sistemas sociales y económicos.

ÍNDICE

Introducción	9
1. La complejidad	13
1.1. Origen del concepto	13
1.2. Sistemas complejos	14
1.2.1. Enfoques de la teoría de la complejidad	16
1.3. Fenómenos emergentes	17
1.4. Redes	18
1.5. Leyes de potencia	20
2. Sistemas complejos en física	23
2.1. Sistemas complejos desde el punto de vista físico	23
2.1.1. Definición física de sistema complejo	25
2.2. Física estadística en sistemas simples	26
2.2.1. Sobre la entropía. Axiomas de Shannon-Khinchin.	26
2.2.2. Orden, desorden y complejidad según Landsberg	27
2.2.2.1. Ejemplo: el problema de los 2 niveles con degeneración	30
2.3. Sobre sistemas simples y sistemas complejos	31
2.4. Física estadística en sistemas complejos	32
2.4.1. Axiomas de Shannon-Khinchin para sistemas complejos	33
2.4.2. Entropía y sistemas complejos	34
2.4.2.1. Casos especiales	35
2.4.2.2. Otros casos	36
2.4.3. Consecuencias para la entropía al abandonar los sistemas simples	38
3. Sistemas complejos en economía y econofísica	39
3.1. ¿Qué es un sistema complejo en economía?	39
3.2. Origen de la econofísica	40
3.3. Fundamentos de la econofísica	41
3.3.1. Similitudes con la física	42
Conclusiones	45
Bibliografía	47

Introducción

Muchas disciplinas científicas, y muy particularmente la física, suelen abordar los problemas dividiéndolos en sus componentes más pequeños y, a partir del análisis del comportamiento de estos y de las interacciones entre ellos, intentan comprender y describir el sistema en su totalidad. Esto es lo que se conoce como hipótesis reduccionista. Un ejemplo de este enfoque es el uso de la física estadística para estudiar un gas ideal o un cristal, pero el ejemplo más básico es la tabla periódica, que es el reflejo más extremo de esta forma de proceder. Pero, podemos plantearnos, ¿son estos tipos de procedimientos aplicables a todos los fenómenos de interés existentes en el mundo, o hay casos en los que esto no funciona?

El 4 de agosto de 1972 se publicó en la revista *Science* un artículo titulado “More Is Different” escrito por Philip W. Anderson, físico estadounidense que ganó el premio Nobel de Física en 1977. En el mismo, Anderson criticó la hipótesis reduccionista basada en subdividir un problema. El artículo comienza como sigue [1]:

“La hipótesis reduccionista puede seguir siendo un tema de controversia entre los filósofos, pero entre la gran mayoría de los científicos activos, creo que es aceptada sin cuestionamiento...”

Y más adelante continúa:

“La principal falacia en este tipo de pensamiento es que la hipótesis reduccionista no implica de ninguna manera una hipótesis construccionista: la capacidad de reducir todo a leyes fundamentales simples no implica la capacidad de partir de esas leyes y reconstruir el universo...”

En otras palabras, en el artículo se criticaba que la comunidad científica estaba descomponiendo en exceso los problemas y que reconstruirlos posteriormente sería una tarea sumamente complicada, dado que en algunos sistemas aparecen nuevas cualidades que surgen cuando las partes interactúan en conjunto (propiedades emergentes) y, en general, las propiedades dependen del tamaño del sistema (no invariancia de escala).

Resulta que, en muchos casos, las interacciones dentro de un sistema son demasiado complejas para que esta metodología criticada por Anderson sea efectiva. Esto ocurre, por ejemplo, en sistemas alejados del equilibrio, donde hay propiedades que no pueden explicarse únicamente a partir del conocimiento de la estructura del sistema y de las relaciones entre sus elementos individuales. Si analizar la naturaleza hasta sus leyes fundamentales no nos lleva a comprender algunos fenómenos, ¿qué opción nos queda? La solución parece evidente: en lugar de descomponer, debemos enfocarnos en “el todo”, observando el sistema en su totalidad. Es aquí donde encontramos la motivación para buscar un nuevo campo que englobe todos esos sistemas no estudiados a partir de entes más básicos, y este es el de los sistemas complejos.

Los sistemas complejos están presentes en numerosos aspectos de la vida cotidiana, desde el tráfico en una ciudad hasta el comportamiento de los ecosistemas o los mercados financieros. Un ejemplo claro de un sistema complejo es una colonia de hormigas [2]. Aunque cada hormiga sigue reglas simples y no tiene una visión global del sistema, el comportamiento colectivo de la colonia da lugar a la organización del hormiguero, la búsqueda eficiente de alimento y la defensa ante amenazas. Este tipo de organización espontánea (un sistema adquiere una estructura o patrón organizado sin intervención externa o control centralizado) es una característica clave de los sistemas complejos, los cuales se estudian en diversos campos como la biología, la economía y la inteligencia artificial.

Todo esto muestra que en los sistemas complejos el todo es más que la suma de las partes

[1] [3] o dicho en términos del filósofo alemán G.W.F. Hegel, en su dialéctica:

“La cantidad se transforma en cualidad y los cambios se interconectan y provocan los unos con los otros. Las matemáticas no han logrado justificar estas operaciones que se basan en la transición, porque la transición no es de naturaleza matemática o formal, sino dialéctica”.

La complejidad es un concepto amplio y diverso, sin una única definición aceptada universalmente. Surge en varias disciplinas y, normalmente, tiene una definición concreta dentro de cada campo, aunque tiene raíces profundas en la física y en las matemáticas, y su desarrollo se vincula con el estudio de sistemas dinámicos y la teoría del caos. Existen múltiples enfoques para describir y cuantificar tanto la complejidad como el orden y la organización, y todos ellos están relacionados con la noción de información, y por tanto, con las distintas entropías propuestas para cuantificarla.

Cabe destacar que, en este trabajo, nos limitaremos a la idea de complejidad con la que se trabaja en ciencia, sin entrar en lo religioso, lo artístico o lo emocional. Es decir, seguiremos la línea de Jorge Wagensberg en los primeros capítulos de su libro “Ideas sobre la complejidad del mundo” [4]. Aunque, inevitablemente, nos encontraremos muy cerca de la frontera entre lo científico y lo filosófico, por lo que surgirán complicaciones interesantes [4]:

“La investigación en los límites compartidos por la ciencia y la filosofía es apasionante por arriesgada, y en este dominio, en severa y delicada tensión, el conocimiento, en alguna de sus formas, avanza.”

Si no nos limitásemos a la descripción científica de la complejidad, abriríamos la puerta a una serie de potenciales confusiones. E, incluso bajo esta limitación, debemos ejercer la precaución, ya que diferentes autores usan la misma palabra con significados muy diferentes. En este sentido, es importante recordar que

“las palabras son símbolos que postulan una memoria compartida”

según Borges en su relato “El congreso”, de “El libro de arena” (1975) y que

“hay que convertir la información (dato objetivo y ajeno) en conocimiento (dato subjetivo y propio)”

según Ramón Buenaventura en “Revista El Semanal, domingo 30 enero 2000”. Estas dos citas resumen bastante bien lo que se acaba de comentar y aparecen en los apuntes de física estadística del Prof. Dr. J.C. Cobos.

El marco teórico desarrollado por Claude Elwood Shannon [5] explica cómo la información contribuye de manera impredecible y creativa a la formación de estructuras organizadas. No obstante, aún no se comprende completamente la relación entre la información, la estructura y el orden; en parte porque los conceptos de orden y desorden están sin definir. El estudio de estos aspectos puede fortalecer la base teórica de la ciencia de la información y fomentar conexiones valiosas con otras disciplinas que analizan la información y la complejidad.

En la actualidad, la complejidad y los sistemas complejos están en auge. En el año 2000, el periódico *The Mercury News* entrevistó al famoso físico teórico Stephen Hawking. Tras preguntarle si pensaba que el siglo XXI iba a ser el siglo de la biología, Hawking respondió:

“Creo que el próximo siglo será el siglo de la complejidad. Ya hemos descubierto las leyes básicas que gobiernan la materia... No existe un límite a la complejidad que podemos construir con estas leyes básicas.”

Esta frase da cuenta de la gran importancia de estudiar todo lo relacionado con la complejidad. La investigación en sistemas complejos está avanzando muy rápido, y el enfoque no reduccionista defendido por Anderson se aplica hoy en día en prácticamente todas las disciplinas del conocimiento. Prueba de que este tema está de moda es que en 2021 el premio Nobel de Física fue concedido a tres científicos por “sus innovadoras contribuciones a nuestra comprensión de los sistemas físicos complejos” según la Real Academia Sueca de Ciencias.

Este trabajo se centra en aclarar y resumir todo aquello afín a los sistemas complejos aplicados a distintos ámbitos (incluyendo en ocasiones métodos y herramientas teóricas). En concreto, se estudiará el surgimiento de la complejidad desde el punto de vista de la física y, además, se tratarán algunos sistemas complejos específicos, como, por ejemplo, los presentes en la economía, observando las diferencias existentes (por ejemplo, en la definición), lo cual sirve como una base concreta para motivar el estudio teórico. Todo esto, con el objetivo de dar a conocer la importancia de la física estadística y “la otra física” como la llama el físico Adrián García en su libro [6].

CAPÍTULO 1

LA COMPLEJIDAD

En este primer capítulo vamos a hablar de la ciencia de la complejidad, enfocándolo en desarrollar herramientas matemáticas generales que luego pueden aplicarse allá donde haga falta. Cabe destacar que “complejo” no significa “complicado”. Es fácil darse cuenta de que la complejidad es parte de nuestra vida diaria y participamos en procesos complejos de manera continua.

Resaltaremos el hecho de que no existe una única definición de sistema complejo universalmente aceptada, y que, dependiendo del ámbito de estudio y de los autores, se tiene una gran variedad de definiciones.

Tras tratar el origen de la complejidad y los sistemas complejos, hablaremos de algunas de sus características más importantes (aunque no entraremos en mucho detalle): fenómenos emergentes, leyes de potencia y redes.

1.1. Origen del concepto

El concepto de complejidad en la ciencia proviene de múltiples campos que han explorado cómo surgen patrones y dinámicas a partir de la interacción de numerosos elementos. Desde un punto de vista etimológico, el término “complejidad” tiene raíces en el latín, derivando de *complectere*, cuyo componente *plectere* significa “trenzar” o “enlazar”. El prefijo *com-* aporta la idea de la unión de dos elementos opuestos que se entrelazan estrechamente sin perder su dualidad. Sus bases se han desarrollado en diversas disciplinas durante los dos últimos siglos:

1. Filosofía y Matemáticas (Siglos XIX y XX): La noción de complejidad surge inicialmente en la filosofía y las matemáticas a través del estudio de los sistemas dinámicos no lineales y la teoría del caos. Un ejemplo destacado es Henri Poincaré (junto a Jacques Hadamard) [7], quien analizó cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden influir significativamente en la evolución de un sistema, sentando así las bases de la teoría del caos, un pilar fundamental en el estudio de la complejidad. De este modo, desde el punto de vista matemático, el concepto aparece debido a que existen horizontes espaciales y temporales (de Lyapunov) que son límites de la teoría de la estabilidad. En cuanto a lo filosófico, Hegel profundiza en la idea aristotélica de complejidad indicando que “la cantidad se transforma en cualidad”.
2. Cibernética y Teoría de Sistemas (mediados del Siglo XX): Norbert Wiener, a través de la cibernética, y Ludwig von Bertalanffy, con la teoría general de sistemas, promovieron

un enfoque integral para el estudio de los sistemas, destacando cómo las interacciones entre sus componentes dan lugar a comportamientos que no pueden explicarse a partir de las propiedades de las partes individuales del sistema. Podemos considerarlos como unos pioneros del pensamiento complejo.

3. Teoría del Caos (décadas de 1960 a 1980): En la línea con lo descubierto por Poincaré unos cuantos años antes, las investigaciones de Edward Lorenz en meteorología y de Benoît Mandelbrot en geometría fractal revelaron que incluso los sistemas dinámicos más simples pueden dar lugar a patrones de comportamiento impredecibles y de gran complejidad.
4. Ciencia de la Complejidad y Sistemas Adaptativos (décadas de 1980 a 2000): A principios de la década de los 80, se creó un centro de investigación llamado Santa Fe Institute (situado en Santa Fe, estado de Nuevo México, Estados Unidos de América) con el objetivo de crear una comunidad de científicos que *“busquen el orden en la complejidad de los mundos en evolución”* según sus propias palabras. Científicos como Stuart Kauffman y John Holland desarrollaron modelos de sistemas adaptativos complejos, aplicados en biología, economía y redes sociales para potenciar esa nueva área de investigación llamada “sistemas complejos” e ir contra la enorme especialización que estaba viviendo la comunidad científica.

De todo esto se desprende que el origen del concepto de complejidad es muy reciente y, cuanto menos, borroso. No fue hasta 1980 cuando por fin se comenzó a tratar todo lo relacionado con la complejidad de forma seria y se empezó a considerar la importancia de los sistemas complejos.

1.2. Sistemas complejos

La pregunta fundamental que vamos a tratar de responder en este epígrafe es: ¿qué es un sistema complejo? Es obvio que la complejidad es una propiedad intrínseca de los sistemas complejos, pero aún no hemos dado una definición explícita. Al consultar abundante bibliografía sobre sistemas complejos, rara vez se encuentra una definición puramente teórica sin el apoyo de un ejemplo. Parece que existe cierta resistencia a ofrecer una explicación precisa y rigurosa, como las que suelen aparecer en los diccionarios. No existe una única definición clara y universalmente aceptada dentro de la comunidad sobre qué constituye un sistema complejo o lo que es la complejidad. Prueba de ello, tenemos los siguientes ejemplos:

- En una conferencia de sistemas complejos, el físico Nigel Goldenfeld dijo que *“la complejidad comienza cuando se rompe la causalidad”*.
- El científico de la NASA David Grin afirmó que *“un sistema complejo es literalmente aquel en el que existen múltiples interacciones entre muchos componentes diferentes”*.
- Desde otras disciplinas, el economista W. Brian Arthur escribió *“comunes a todos los estudios sobre la complejidad son los sistemas con múltiples elementos que se adaptan o reaccionan al patrón que estos elementos crean”*.

Además de estos 3 puntos de vista, existen muchos otros; algunos similares y otros más distintos. Es importante destacar el artículo “Resource Letter CS-1: Complex Systems” de M. E. J. Newman [8], donde se hace un repaso de los distintos ámbitos en los que se pueden tratar los sistemas complejos, proporcionando mucha bibliografía en cada caso y la cual usaremos a lo largo del trabajo. Además de todo lo anterior, creo que es conveniente destacar la definición dada en el libro de referencia de este trabajo para el segundo capítulo llamado *Introduction to the Theory of Complex Systems* de los científicos Stefan Thurner, Rudolf Hanel y Peter Klimek

[9]:

“Los sistemas complejos son redes multicapa que coevolucionan.”

Analicemos un poco esta definición: por red entendemos un conjunto de elementos que se relacionan de algún modo (hablaremos un poco más de ello más adelante); por evolución entendemos variación a lo largo del tiempo y esas variaciones suelen deberse a influencias mutuas (de ahí el término coevolución). Por último, el término multicapa significa que pueden coexistir diversas redes con diferentes clases de conexiones simultáneamente. Otra característica dentro de esta definición es que los sistemas complejos pueden tener memoria.

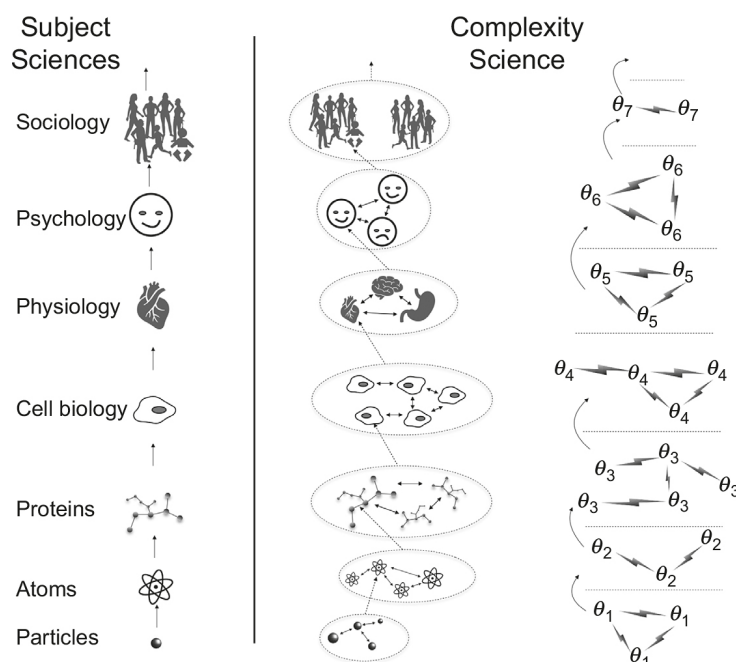


Figura 1.1: Este esquema ilustra cómo la ciencia de la complejidad centra su atención en los patrones generales de interacción entre distintos componentes, y busca, a partir de estas interacciones, reconocer principios comunes que se repiten en diversos sistemas y niveles de organización. Por ejemplo, mientras que la psicología estudia al individuo, la sociología surge al analizar cómo interactúan esos individuos entre sí. La ciencia de la complejidad explora si es posible detectar dinámicas similares y fenómenos emergentes en niveles diferentes. Así, es factible comparar comportamientos sociológicos con los que ocurren a nivel molecular. Aunque los seres humanos y las moléculas sean muy distintos, si se considera de manera abstracta, las interacciones entre ellos pueden presentar características comunes [10].

El concepto de sistema complejo no tiene una única definición universalmente aceptada, y esta diversidad refleja justamente la dificultad de capturar su esencia con precisión. Se trata de un término amplio y multifacético, que ha sido abordado desde distintas disciplinas como la física, la biología, la sociología o la economía, cada una con sus propias perspectivas y enfoques. Algunos lo definen por su capacidad de presentar comportamientos emergentes, otros por su sensibilidad a las condiciones iniciales, su no linealidad, o la multiplicidad de elementos interconectados que lo componen. Esta variedad de definiciones no es una debilidad, sino una señal de la riqueza y complejidad del fenómeno en sí: los sistemas complejos escapan a las categorías tradicionales de análisis, y su estudio exige herramientas nuevas, enfoques interdisciplinarios y una mirada integradora.

Finalmente, es importante comentar todo lo que surge a partir de los sistemas complejos, así como las herramientas de utilidad para su estudio. En primer lugar, destaca la aparición de ciertas propiedades y comportamientos que solo pueden explicarse a través de la colectividad; la clave de todo esto es la aparición de nuevos “niveles” en la descripción de la realidad al unir muchas “partes individuales” de una misma escala. Un nuevo nivel quedaría definido si al pasar a su escala característica aparecen propiedades de la colectividad que se pueden describir con una serie de nuevas leyes en las que no “afectan” las propiedades de sus partes individuales. Esas propiedades recibirían el nombre de “emergentes” si no son consecuencia solamente de las propiedades de cada constituyente en el nivel inferior, sino que es necesario tener en cuenta las interacciones entre estas partes. Incidiremos más sobre ello en un epígrafe posterior.

Por otro lado, en los sistemas complejos se observa en numerosas ocasiones una relación entre dos cantidades que cumple una condición: que una cantidad varíe como una potencia de la otra. De ahí la importancia de las llamadas leyes de potencia. También es interesante el concepto de red desde un punto de vista matemático, pues, como hemos visto antes, esta palabra aparece en la definición dada en [9].

Sobre todo esto de lo que hemos hablado en este último párrafo es lo que trataremos en los epígrafes restantes de este capítulo. Antes de entrar en más detalle, vamos a hacer un pequeño resumen de todas las ramas o enfoques de la teoría de la complejidad.

1.2.1. Enfoques de la teoría de la complejidad

La teoría de sistemas complejos no es un conjunto de ideas unificado o completamente estructurado. Más bien, es un campo formado por muchas ideas distintas que proceden de diferentes enfoques y no siempre encajan perfectamente entre sí. A continuación, se procede a hablar de las distintas ramas en teoría de la complejidad [8].

1. Teoría de escalado: los patrones o regularidades abarcan múltiples órdenes de magnitud diferentes en el espacio y el tiempo.
2. Teoría de redes: ayuda a tratar las dinámicas colectivas de los sistemas complejos. Para medir con precisión los detalles del sistema, primero es necesario definir su topología (es decir, quién se conecta o interactúa con quién) y después su dinámica (cómo actúan los agentes individuales y de qué manera se relacionan entre ellos). La topología suele representarse mediante retículos o redes, siendo esta una de las áreas más avanzadas y consolidadas dentro de la teoría de sistemas complejos.
3. Modelos basados en agentes: la finalidad de estos modelos computacionales, también conocidos como “basados en individuos”, es representar de manera individual y separada a cada agente de un sistema complejo junto con sus interacciones, de modo que los comportamientos que emergen del sistema aparezcan de forma espontánea, en lugar de ser programados directamente. Esos comportamientos tienen un propósito, una función.
4. Teoría de los sistemas dinámicos: en ella, los comportamientos de los agentes a lo largo del tiempo se representan individual o colectivamente mediante modelos matemáticos simples, acoplados entre sí para representar las interacciones.
5. Teoría de la complejidad computacional: trata sobre la dificultad de realizar ciertas tareas, como calcular un número específico o resolver un problema cuantitativo. Aunque generalmente se discute en términos de algoritmos y ciencias de la computación, esta teoría tiene aplicaciones mucho más amplias, como en biología evolutiva, biología molecular, física estadística, teoría de juegos, ingeniería y otras disciplinas.

6. Teoría de la información: generalmente no se incluye dentro de la teoría de sistemas complejos, pero es una de las herramientas más utilizadas para estudiar y entender estos sistemas. En los últimos tiempos se ha utilizado en muchos otros ámbitos, como en el estudio y análisis de diferentes tipos de patrones.

En resumen, la teoría de la complejidad constituye un campo amplio, que abarca una gran variedad de métodos, muchos de ellos provenientes de la física, y que tiene una gama igualmente amplia de aplicaciones, tanto dentro de la física como en muchas otras áreas. Además, la ciencia apenas ha comenzado a responder a las preguntas planteadas por el estudio de los sistemas complejos, y las áreas en las que somos ignorantes superan con creces a aquellas en las que tenemos experiencia.

1.3. Fenómenos emergentes

Como se ha dejado entrever previamente, los fenómenos emergentes pueden entenderse como comportamientos, propiedades o patrones de un sistema cuya existencia necesita, de manera fundamental, de interacción y conexión entre sus elementos. Por supuesto, esto de la emergencia no es nuevo. En física, por ejemplo, el hecho de que el agua adopte su estado líquido es una propiedad emergente que resulta de la interacción entre múltiples moléculas de H_2O cuando se encuentran bajo determinadas condiciones de temperatura y presión. En otras palabras, los estados de la materia no pueden describirse a partir de un solo átomo o molécula; es necesario que haya interacciones colectivas entre un gran número de ellos para que tenga sentido hablar de fases como el líquido o el sólido.

Sin embargo, existen diferentes formas de entender la emergencia. Por ejemplo, tal como la presentan Keating et al. en [11], “emergencia” no es necesariamente un concepto absoluto. En física, existen distintos autores que defienden que la emergencia puede situarse en un continuo que va de “débil” a “fuerte”:

- Emergencia débil: Refiere a cuando es posible establecer alguna conexión rastreable entre la actividad de los componentes y la conducta global del sistema. En otras palabras, las “leyes” del nivel superior deben ser consecuencias de las “leyes” del nivel inferior, aunque, en la práctica, no es posible computar las propiedades de un sistema en el nivel superior a partir de las de sus partes y de las interacciones entre sus partes en el nivel inferior.
- Emergencia fuerte: Refiere a cuando no hay ninguna teoría, concepto o principio capaz de justificar o inferir el comportamiento del sistema a partir de las características o dinámicas de sus elementos a nivel micro. Esto es, las “leyes” del nivel superior no son consecuencia de las “leyes” del nivel inferior por principio, es decir, aunque se conozcan las propiedades de cada parte de un sistema y las interacciones entre ellas, las propiedades “fuertemente emergentes” no se pueden obtener a partir de éstas.

Desde el punto de vista de los sistemas complejos, es de mayor importancia la emergencia “fuerte”. Existen diferentes opiniones acerca de estos 2 tipos de emergencia en física. Philip W. Anderson parece insinuar que la emergencia es fuerte (“More is Different”), pero otros defienden que el reduccionismo no es incorrecto en principio, pero sí irrelevante en la práctica.

Por otro lado, en el límite entre la ciencia y la filosofía, a la emergencia se le puede dar tanto un sentido ontológico como epistemológico [12]:

- Enfoque ontológico (es decir, una cualidad inherente al sistema): Desde esta perspectiva, la emergencia se identifica con la incapacidad de descomponer completamente el sistema

en sus partes individuales. Esto implica que no es posible trasladar conocimientos, metodologías, relaciones causales o interpretaciones desde el nivel superior del sistema hacia sus elementos del nivel inferior, ni en la dirección opuesta. Con todo esto, la emergencia es algo intrínseco al sistema, no a la descripción que hagamos de él mediante un modelo de realidad.

- Enfoque epistemológico: Desde este punto de vista, la emergencia aparece al describir un sistema mediante un modelo, pero no es necesariamente algo intrínseco a él. En este caso, la emergencia se relaciona con la incapacidad del observador para anticipar la aparición de nuevas propiedades en el sistema que analiza.

Podemos notar que, a diferencia de lo que ocurre con el término “complejidad”, el significado común de la palabra “emergencia” se aproxima bastante a la manera en que es concebida dentro del ámbito de la ciencia de la complejidad.

Una característica a destacar de los sistemas complejos y relacionada con los comportamientos emergentes es el fenómeno de autoorganización. En muchas ocasiones, un sistema complejo se autoorganiza de forma espontánea. El movimiento coordinado de un gran grupo de elementos individuales puede autoorganizarse para lograr objetivos colectivos, dando lugar a las propiedades emergentes. Todo esto es importante, pues podemos entender que aparece “orden” de forma natural en los sistemas (*orden a partir de caos*, según Ilya Prigogine, Premio Nobel de Química en 1977). Un ejemplo es el de la criticalidad autoorganizada [13], que es una característica que tienen algunos sistemas que se mantienen muy cerca de un punto crítico (se reorganizan constantemente para estar siempre cercanos a él).

Los fenómenos emergentes se manifiestan en una gran cantidad de sistemas naturales, sean vivos o no. Pueden darse tanto en escalas diminutas como en sistemas cotidianos donde predominan las leyes de la física clásica. Hay emergencia a nuestro alrededor.

1.4. Redes

Comprender las interacciones entre los componentes de un sistema es clave para entenderlo de manera cuantitativa y predictiva. En los sistemas complejos, las interacciones suelen no ser uniformes, isotrópicas ni homogéneas: las interacciones entre elementos pueden ser específicas (cada elemento del sistema no se relaciona igual con todos los demás, sino que sus interacciones dependen de con quién esté interactuando, en qué contexto, con qué intensidad y de qué manera). Las redes son esenciales para comprender la coevolución y los diagramas de fase de los sistemas complejos. También son útiles para describir estructuras de objetos, flujos y datos. Prácticamente todo lo que puede almacenarse en una base de datos es una red. Este tipo de objeto matemático es muy útil para descubrir fenómenos dentro de los sistemas e incluso predecir comportamientos futuros.

Después de presentar el concepto de red, podemos proceder a definir sus componentes y analizar qué características pueden resultar de interés para su estudio. Comenzamos con el elemento principal: cada uno de los integrantes de la red es un nodo. Los nodos constituyen la unidad básica de una red, siendo los elementos individuales que establecen conexiones entre sí. Por otro lado, como acabamos de decir, es posible establecer relaciones o enlaces entre los nodos. *Links* se suelen llamar en ciencia de redes y esta es la otra parte fundamental de una red.

Cabe destacar que cada enlace posee diversas propiedades como, por ejemplo, tener un peso determinado (grado de importancia) o tener direccionalidad. Además, podemos caracterizar los

nodos con su grado: una propiedad de cada nodo, que es el número de enlaces que tiene. En la inmensa mayoría de redes, hay nodos que son mucho más importantes que otros y esa importancia no tiene un origen arbitrario. La distancia entre dos nodos es el menor número de enlaces que hay que recorrer para pasar de uno a otro, mientras que la distancia más grande que se encuentre es el diámetro de la red.

Para un mismo sistema podemos tener dos o más tipos de interacciones. Este fenómeno, de tener varios tipos de interacción que se aplican sobre los mismos elementos, se conoce como red multicapa. Cada tipo de interacción constituye una red por sí sola y nos puede interesar, o no, tener varias de estas interacciones en cuenta a la hora de estudiar un sistema complejo.

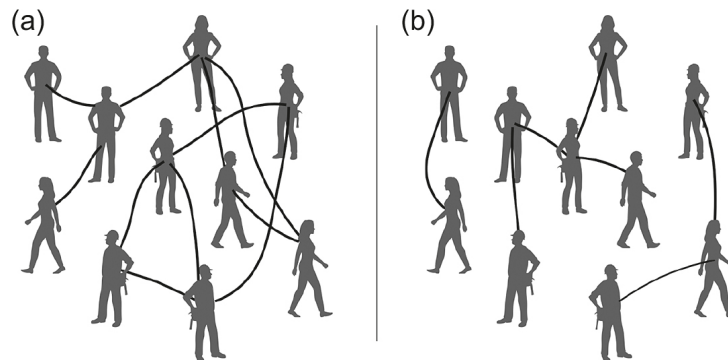


Figura 1.2: Una población puede representarse mediante diferentes redes, dependiendo del aspecto que se esté investigando. En el panel (a), los enlaces indican, por ejemplo, un lugar de trabajo compartido; en el panel (b), por otro lado, los enlaces representan relaciones de amistad [10].

Además, las redes reales pueden tener dinámicas temporales e ir cambiando a medida que pasa el tiempo. El estudio de las redes reales tiene dos claros padres: Paul Erdős y Alfréd Rényi. Dentro de las redes reales, destacan las redes aleatorias y las redes de mundo pequeño.

En el ámbito de las redes aleatorias, el modelo de Erdős-Rényi es uno de los más destacados, ya que parte de la idea de que las redes se forman de manera completamente aleatoria, sin seguir ninguna regla específica, solo guiadas por el azar. Dado que la complejidad de las redes puede parecer un obstáculo insalvable, este enfoque permite simplificar su estudio al asumir que su estructura es aleatoria. Sin embargo, cuando una red cuenta con un gran número de nodos, este modelo presenta una característica particular: la distribución de grado sigue una distribución de Poisson. Esto significa que la mayoría de los nodos tendrá un número similar de conexiones, mientras que solo unos pocos tendrán significativamente más o menos enlaces.

No obstante, al analizar redes reales, se observa que este comportamiento no se cumple. Algo debe estar organizando la estructura de las redes en el mundo real, generando dinámicas que las diferencian de las redes puramente aleatorias. Las redes reales no solo reflejan la estructura del sistema al que pertenecen, sino que también nos ofrecen información sobre su evolución, su proceso de formación y la naturaleza de las conexiones entre los nodos.

Watts y Strogatz estudiaron las llamadas redes de mundo pequeño. Se ha observado que algunas redes exhiben un alto grado de agrupamiento, lo que significa que sus nodos tienden a formar grupos densamente conectados. A primera vista, esto sugiere que desplazarse a través de estas redes debería requerir muchos pasos, ya que un individuo que se desplace dentro de ellas probablemente quedará confinado dentro de estos grupos locales. Sin embargo, en la realidad, muchas de ellas pueden recorrerse en solo unos pocos pasos. Watts y Strogatz demostraron que,

si se parte de una red con una gran cohesión interna y largas distancias entre nodos, es suficiente introducir un número reducido de conexiones aleatorias (o atajos) para dar lugar al denominado “efecto de mundo pequeño”.

Las redes aleatorias y de mundo pequeño no logran describir completamente la estructura de las redes reales, aunque representan un excelente punto de partida para desarrollar modelos más complejos y realistas. Por ello, es relevante mencionar el modelo de Barabási-Albert, cuyos progenitores son el físico húngaro Albert-László Barabási y la física rumana Réka Albert. En 1999, estos investigadores publicaron un estudio en el que planteaban una nueva perspectiva sobre la formación de redes, basada en la observación de que, en el mundo real, el número de nodos no permanece constante. A partir de esta idea, se desarrolló el modelo Barabási-Albert, que permite generar las llamadas redes libres de escala. Este modelo comienza con una red inicial de N nodos interconectados, a la cual se le va añadiendo un nuevo nodo en cada paso. Las conexiones de estos nuevos nodos no se establecen de manera aleatoria, sino siguiendo un principio de “preferencia por los más conectados”: la probabilidad de que un nodo nuevo se conecte a uno existente es proporcional a la cantidad de enlaces que dicho nodo ya posee. Como resultado, los nodos con muchas conexiones tienden a seguir acumulando enlaces a un ritmo acelerado, mientras que los nodos con pocas conexiones tienen menos oportunidades de recibir nuevos enlaces. Entonces, estas redes libres de escala se caracterizan por la aparición de una distribución en la que tenemos muchos elementos con pocas conexiones y pocos elementos con muchas conexiones, lo cual es bastante habitual en redes del mundo real. Esa distribución tiene una íntima relación con las denominadas leyes de potencia.

A lo largo del tiempo y con el auge de la ciencia de redes, se han desarrollado cada vez más herramientas para su análisis. Sin embargo, desde sus inicios, esta disciplina ya tuvo un impacto notable. Por ello, sigue siendo un referente de cómo el estudio de la realidad desde esta perspectiva (que la concibe como un conjunto de puntos interconectados) puede ofrecernos valiosos conocimientos. Las redes proporcionan una nueva forma de interpretar el mundo que nos rodea, un mundo más interconectado de lo que jamás habíamos imaginado. Algunos expertos predicen que el estudio de las redes será fundamental para los avances científicos y tecnológicos en las próximas décadas.

1.5. Leyes de potencia

Una ley de potencia es una relación matemática que describe la proporción entre dos magnitudes en la cual una varía de manera proporcional a una potencia de la otra. El caso es que hay potencias en muchos más fenómenos de los que puede parecer en principio: el número de células, el crecimiento de la deuda en un interés compuesto, las estafas piramidales, las reacciones nucleares en cadena... Las leyes de potencia poseen una relevancia crucial, ya que suelen revelar simetrías fundamentales en los principios físicos subyacentes. Aunque han sido conocidas desde hace bastante tiempo [14], su estudio cobró gran impulso hace unas décadas [15], especialmente durante el auge del análisis de los fenómenos críticos en equilibrio. En los últimos años, la atención de los físicos se ha centrado cada vez más en las relaciones de tipo ley de potencia, debido a su aparición recurrente en casi todas las ramas de la física.

¿Cómo surgen matemáticamente las leyes de potencia? Un objeto se dice que es escalable si permanece igual o “invariante” (salvo un factor) bajo transformaciones del tipo $x \rightarrow \lambda x$ (estiramiento o compresión). A menudo, estos objetos de escala están dados por funciones $f(x)$.

Una *relación de escala* está presente si existen funciones f y g continuas y reales, tales que, bajo una transformación de escala $x \rightarrow \lambda x$, se cumple lo siguiente:

$$f(\lambda x) = g(\lambda)f(x),$$

donde λ es un número real positivo. Esta ecuación de escala tiene una solución real que se expresa como:

$$f(x) = bg(x) \quad \text{con} \quad g(x) = x^c,$$

donde b y c son constantes reales y g se denomina la *función de escala*.

Las soluciones a ecuaciones de escala son siempre leyes de potencia. Esto es evidente porque la solución a la ecuación $f(xy) = f(x)f(y)$ es siempre una ley de potencia, $f(x) = bx^c$. Siempre que existe una relación de escala, esto se refleja en la existencia de una ley de potencia o, equivalentemente, las funciones de escala son leyes de potencia [9].

Las leyes de potencia descubiertas hasta ahora indican que, en ciertos rangos, existen fenómenos que ocurren sin una escala definida o característica. Según el físico Philip Anderson (ya citado con su artículo “*More is Different*”), las leyes de potencias “destruyen” los límites de las campanas de Gauss (Figura 1.3), a los cuales estamos más acostumbrados en nuestra cotidianidad. El escalamiento aparece en las funciones de distribución de cantidades observables en sistemas dinámicos o procesos, y es aquí donde se ve su gran relación con los sistemas complejos. Algunos de los mecanismos más importantes a través de los cuales surge el escalamiento en sistemas complejos son la criticalidad, la criticalidad autoorganizada y los procesos multiplicativos sobre los cuales se habla en [9].

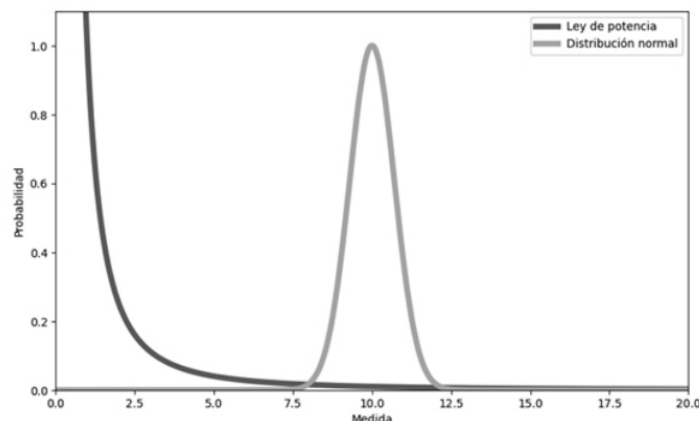


Figura 1.3: Esquema que ilustra las principales diferencias entre una distribución normal y una ley de potencia. En la distribución normal hay un valor pico (donde se concentra la mayoría de probabilidad) mientras que el resto son desviaciones, menos probables cuanto más lejos se está de ese valor central. A grandes distancias la probabilidad es muy pequeña. En una ley de potencia los valores se acumulan en un lado de la gráfica, y es más probable encontrar medidas alejadas que en una distribución normal [6].

En definitiva, el escalado aparece en muchos contextos diferentes. El objeto de escalado puede ser una función, una estructura, una ley física o una función de distribución que describe las estadísticas de un sistema o un proceso temporal. Las estructuras que exhiben escalado suelen llamarse fractales. Los fractales son una característica esencial de la naturaleza y se encuentran en prácticamente cualquier lugar que observemos. Su presencia generalizada los convierte en herramientas valiosas para modelar y comprender una amplia variedad de sistemas complejos, cuyo estudio ha impulsado avances tecnológicos. Un referente clave en este campo es Benoît Mandelbrot, quien en 1982 publicó *The Fractal Geometry of Nature*, un libro en el que defendía

su idea de que la naturaleza no era geometría pura y elegante, sino fractal y compleja [16]. Se pueden observar muchos ejemplos de fractales en el libro [6] [2].

CAPÍTULO 2

SISTEMAS COMPLEJOS EN FÍSICA

En este capítulo se van a estudiar los sistemas complejos con las herramientas propias de la física. Previamente, se repasarán los sistemas simples, incluyendo las ideas de Landsberg de orden, desorden y complejidad. Como ejemplo, se mostrará el problema de los 2 niveles con degeneración posterior. Se definirá una entropía general para los sistemas complejos, y se destacarán algunos casos particulares. Finalmente, se discutirá brevemente la validez de estas entropías.

En resumen, exploramos un marco matemático conceptualmente coherente para la entropía de sistemas complejos.

2.1. Sistemas complejos desde el punto de vista físico

La física se basa principalmente en un enfoque analítico. Los fenómenos se describen mediante ecuaciones matemáticas que posibilitan la realización de predicciones. Esto es factible porque las interacciones en la física son uniformes, simétricas y de una única naturaleza. En la mayoría de los casos, estas interacciones permanecen constantes a lo largo del tiempo, ya que están predefinidas y no varían. El desafío radica en determinar soluciones concretas para la evolución del sistema, considerando un conjunto específico de condiciones iniciales y límites.

A diferencia de los sistemas físicos tradicionales, en los sistemas complejos las interacciones no son fijas, sino que pueden modificarse con el tiempo como resultado de la propia dinámica del sistema. En otras palabras, la estructura interna de sus interacciones evoluciona conforme el sistema cambia. Por esta razón, se vuelve fundamental una representación basada en algoritmos, es decir, un conjunto de reglas que define cómo se actualizan los estados del sistema y sus interacciones futuras, lo que a su vez introduce nuevas restricciones en la evolución del sistema en el siguiente instante temporal. Este tipo de descripción no solo permite modelar la transformación de los estados individuales de los componentes, sino también la manera en que cambian las relaciones entre ellos, determinando así las actualizaciones sucesivas. En muchos sistemas complejos, estos procesos ocurren de manera simultánea, lo que introduce enormes desafíos matemáticos y dificulta considerablemente su comprensión y análisis.

Los sistemas complejos son algorítmicos. Se pueden hacer predicciones cuantitativas que pueden ser probadas experimentalmente dentro del paradigma analítico o algorítmico. Desde el punto de vista físico, se podría intentar caracterizar los sistemas complejos mediante las siguientes ampliaciones de la típica descripción física [9]:

- Los sistemas complejos están compuestos por muchos elementos, componentes o partículas. Los elementos no se limitan a formas físicas de la materia; cualquier cosa que pueda interactuar y describirse mediante estados puede considerarse como *materia generalizada*. Cada una de estas unidades se caracteriza por su estado, que puede incluir atributos como velocidad, ubicación, edad, rotación, color, nivel de riqueza, masa, forma, entre otros. Además, algunos de estos elementos pueden presentar características aleatorias.
- Las interacciones entre los elementos pueden ser específicas de los elementos involucrados y depender de la dinámica, hablándose entonces de *interacciones generalizadas*. Son interacciones en un nivel de descripción que es diferente del de las cuatro fuerzas fundamentales, es decir, no se limitan al intercambio de bosones de gauge (actúan como portadores de una interacción fundamental de la naturaleza), sino que también pueden ocurrir a través de la transmisión de mensajes, la transferencia de objetos, el flujo de información... Las conexiones entre los elementos, incluyendo quién se relaciona con quién, en qué momento, de qué manera y con qué fuerza; se representan a través de redes de interacción.
- Los sistemas complejos tienden a mostrar un comportamiento caótico, ya que su evolución está fuertemente influenciada por las condiciones iniciales y las particularidades del sistema. Las ecuaciones que modelan su dinámica de manera algorítmica suelen presentar una naturaleza no lineal, pues el mundo es no lineal.
- Los sistemas complejos suelen ser “driven systems” (impulsados por una “fuerza” externa). Algunos obedecen leyes de conservación, otros no.
- Los sistemas complejos pueden mostrar una rica estructura de fases y tener una amplia gama de macroestados que, frecuentemente, no se pueden deducir solo de las propiedades de los elementos. A esto se le llama, en ocasiones, emergencia. Las formas más simples de emergencia ya se encuentran en la física.

Con estas ampliaciones, podemos enunciar una posible definición para la teoría de los sistemas complejos: *la teoría de los sistemas complejos es la ciencia cuantitativa, predictiva y comprobable experimentalmente de la materia generalizada que interactúa a través de interacciones generalizadas. Las interacciones generalizadas se describen por el tipo de interacción, quién interactúa con quién, en qué momento y con qué intensidad.*

Debido a interacciones más específicas y variables en el tiempo, así como a una mayor diversidad de tipos de interacción, la variedad de estados macroscópicos y propiedades sistémicas aumenta drásticamente en los sistemas complejos. Esta mayor diversidad de macroestados y fenómenos surge tanto de las propiedades de los componentes del sistema como de sus interacciones. En este sentido, hay que destacar la importancia de los aspectos evolutivos, pues son esenciales para muchos sistemas complejos y no pueden ser ignorados. La dinámica evolutiva es radicalmente diferente de la física por dos razones principales:

1. En los sistemas evolutivos, las condiciones frontera generalmente no pueden fijarse arbitrariamente. Esto significa que es imposible descomponer el sistema y separarlo de su contexto sin alterarlo masivamente e incluso quizás destruirlo. El concepto de reduccionismo es inadecuado para describir los procesos evolutivos. Los sistemas complejos evolutivos cambian sus condiciones de frontera a medida que se desarrollan en el tiempo. Coevolucionan con sus condiciones de frontera.
2. En los sistemas evolutivos, el espacio de fases no está bien definido; cambia con el tiempo. Pueden surgir nuevos elementos que cambian el entorno y, por lo tanto, también la dinámica para todos los elementos existentes del sistema.

Todo esto nos hace llegar a la definición dada en el primer capítulo para los sistemas complejos.

2.1.1. Definición física de sistema complejo

Como ya se mencionó en el capítulo 1, los sistemas complejos son redes multicapa que coevolucionan. Con esta afirmación, se tiene en cuenta todo lo comentado hasta ahora, y también se resumen los siguientes nueve hechos sobre los sistemas complejos, ofreciendo una visión intuitiva de la esencia de los sistemas complejos:

1. Los elementos se relacionan entre sí mediante uno o varios tipos de interacción. Estas interacciones suelen ser específicas para cada par de elementos. Para registrar qué elementos están conectados, empleamos redes. En estas redes, las interacciones se representan como enlaces, mientras que los elementos involucrados actúan como nodos. Cada tipo de interacción puede considerarse una capa dentro de una red multicapa. Una red multicapa consiste en un conjunto de redes que conectan el mismo grupo de nodos. Si estas redes operan de manera independiente, la red multicapa no es más que una superposición de redes. No obstante, en muchos casos, también existen conexiones entre las distintas capas de interacción.
2. Las interacciones pueden tener un carácter físico, químico, social o simbólico. En la mayoría de los casos, estas interacciones ocurren a través de un proceso de intercambio entre los nodos. Así, la intensidad de la interacción suele depender de la cantidad de objetos intercambiados. Las interacciones pueden ser deterministas o estocásticas.
3. Los elementos se definen por sus estados, los cuales pueden ser escalares. Si un elemento tiene múltiples estados independientes, se representará mediante un vector o un tensor de estado. De nuevo, estos estados no permanecen fijos, sino que varían con el tiempo. Pueden describir propiedades como la velocidad de un planeta, el espín de un electrón o la capitalización de un banco. Los cambios en el estado pueden ocurrir de manera determinista o aleatoria y pueden originarse a partir de una dinámica interna o de factores externos.
4. Los sistemas complejos se caracterizan porque los estados y las interacciones no suelen ser independientes, sino que cambian simultáneamente al afectarse entre sí. En otras palabras, los estados y las interacciones evolucionan de manera conjunta.
5. La dinámica de las redes multicapa que coevolucionan suele ser altamente no lineal.
6. Los sistemas complejos dependen del contexto. Las redes multicapa proporcionan ese contexto y, por lo tanto, ofrecen la posibilidad de una descripción auto-consistente de los sistemas complejos. Específicamente, para cualquier proceso dinámico que ocurra en una capa de red determinada, las otras capas actúan como el “contexto”, ya que representan las únicas formas en que los elementos de la capa inicial pueden ser afectados. Las redes multicapa, en ocasiones, permiten ver los sistemas complejos como “sistemas cerrados”. Sin embargo, estos sistemas pueden ser impulsados por factores externos y, por lo general, son disipativos y no hamiltonianos. En este sentido, describir los sistemas complejos de manera analítica resulta complicado.
7. Los sistemas complejos son algorítmicos, y es una consecuencia directa de las interacciones discretas entre las redes de interacción y los estados.
8. Los sistemas complejos están condicionados por su evolución pasada (dependen del camino o trayectoria) y, por lo tanto, suelen ser no ergódicos. Cuando la dinámica de la red es lo suficientemente lenta, las redes en las distintas capas pueden verse como una memoria que conserva y registra la historia dinámica reciente del sistema.

9. Los sistemas complejos a menudo tienen memoria. La información sobre el pasado puede almacenarse en los nodos, si estos tienen memoria, o en la estructura de la red de las distintas capas.

2.2. Física estadística en sistemas simples

En muchas ocasiones, nuestra falta de conocimiento nos obliga a describir la dinámica de un sistema de manera probabilística y simplificada. Esto implica asignar probabilidades a la aparición de ciertos estados, interacciones y cambios entre estados. Según la naturaleza del sistema en cuestión, existen tres enfoques principales para analizarlo a partir de información probabilística. Cada uno de estos enfoques incorpora la idea de entropía, una función que depende de las probabilidades asociadas a los estados y sus transiciones. Si estudiamos sistemas físicos, recurrimos a la física estadística para comprender sus propiedades globales; si nuestro interés está en medir la cantidad de información generada por el sistema, aplicamos la teoría de la información; y si buscamos deducir funciones de distribución a partir de datos estadísticos, utilizamos el Principio de Máxima Entropía. Por sistema simple nos referimos a aquel sistema estacionario, markoviano (aquel en el que el estado futuro del sistema depende únicamente del estado actual y no de cómo se llegó a ese estado) y ergódico (aquel cuya evolución cubre todas las configuraciones posibles de manera estadísticamente uniforme).

2.2.1. Sobre la entropía. Axiomas de Shannon-Khinchin.

Hay que tener en cuenta que en física se suele trabajar con la llamada entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon, cuya expresión matemática es:

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln p_i \quad (2.1)$$

donde Ω representa el número de estados del sistema, k_B la constante de Boltzmann y p_i la probabilidad del estado i -ésimo. En física estadística, comenzó llamándose entropía de Boltzmann, pero se observó que era equivalente a las proposiciones de Gibbs y Shannon.

Existen argumentos probabilísticos [17] [18] [19] que justifican inequívocamente que, en las condiciones adecuadas, el uso de esta entropía para *inferir probabilidades* a partir del Principio de Máxima Entropía. Esas condiciones son [20]:

1. La información es correcta (esto es, las frecuencias relativas obtenidas se adecúan a la información inicial, pues de lo contrario dicha información sería incorrecta o el experimento se habría realizado de forma incompatible con ella).
2. La información es suficiente (es decir, incluye todas las ligaduras físicas relevantes del experimento).
3. Cuando se utiliza dicha información para hallar el máximo condicionado de la entropía, dicho máximo es único.

Además, esta expresión de la entropía se justifica como buena *medida de la falta de información o incertidumbre* sobre un sistema probabilístico simple y finito (interpretación de Jaynes) a partir de los axiomas de Shannon-Khinchin. En efecto, según el teorema de unicidad de Shannon [9] [5], *cualquier funcional $S(p)$ que dependa de la distribución de probabilidad $p = (p_1, \dots, p_\Omega)$, asociada a un sistema probabilístico para el cual se cumplen los cuatro axiomas de Shannon-Khinchin, solo puede tener la forma $S(p) = -k \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln p_i$, donde $k > 0$ es una constante multiplicativa.* Los axiomas de Shannon-Khinchin son:

1. **Primer axioma de Shannon-Khinchin (SK1):** establece que la entropía $S(p_1, p_2, \dots, p_\Omega)$ es una función continua de todos sus argumentos p_i y no depende de nada más que de las probabilidades de los Ω estados.
2. **Segundo axioma de Shannon-Khinchin (SK2):** afirma que, para un sistema con Ω estados, cada uno con una probabilidad $p_i \geq 0$ y donde $\sum_{i=1}^{\Omega} p_i = 1$, la entropía $S(p_1, p_2, \dots, p_\Omega)$ toma su valor máximo en el equilibrio, es decir, cuando $p_i = 1/\Omega$ para todo i . Si todos los estados son igualmente probables, la entropía es máxima.
3. **Tercer axioma de Shannon-Khinchin (SK3):** indica que la entropía debe permanecer igual cuando se añaden estados que nunca ocurren o que tienen una probabilidad cero. Agregar un estado $\Omega + 1$ donde $p_{\Omega+1} = 0$ no cambia el valor numérico de la entropía, es decir,

$$S(p_1, \dots, p_\Omega, 0) = S(p_1, \dots, p_\Omega)$$

Este axioma fue realmente añadido por Khinchin.

4. **Cuarto axioma de Shannon-Khinchin (SK4):** establece que la composición de dos sistemas probabilísticos (esquemas) A y B , si los sistemas son independientes entre sí, la entropía debe ser aditiva, lo que significa que la entropía del sistema combinado (AB) debe ser la suma de las entropías individuales,

$$S(AB) = S(A) + S(B)$$

Si los dos sistemas dependen el uno del otro, la entropía del sistema combinado, es decir, la información proporcionada por la ocurrencia de los dos esquemas finitos A y B , $S(AB)$, es igual a la información obtenida por la ocurrencia del sistema A , $S(A)$, más la expectativa de la información obtenida por la ocurrencia del sistema B , condicionada a la ocurrencia del sistema A :

$$S(AB) = S(A) + S(B|A)$$

$S(B|A)$ es la entropía condicional. Por razones obvias, SK4 también se llama el axioma de composición.

Los físicos generalmente asocian el concepto de entropía con sistemas termodinámicos en equilibrio debido a la segunda ley de la termodinámica, que establece que la entropía de un sistema físico aislado alcanza su valor máximo cuando se aproxima al equilibrio. En sistemas termodinámicos fuera del equilibrio, la entropía deja de depender únicamente de las variables de estado macroscópicas y su valor comienza a estar determinado por los detalles específicos de cómo se alcanzó ese estado. La entropía se vuelve entonces dependiente del camino seguido, lo que reduce en gran medida su utilidad práctica. Cuando el sistema es complejo en el sentido antes mencionado, esto también ocurre. A pesar de esto, en situaciones fuera del equilibrio, una función entropía adecuada puede seguir siendo útil en cierto grado, como se verá más adelante.

2.2.2. Orden, desorden y complejidad según Landsberg

Landsberg propuso una medida de la complejidad en términos de desorden y orden, por lo que primero debemos presentar cómo definió estos últimos conceptos. A menudo, se considera que la entropía es una medida adecuada del desorden. Sin embargo, esto supone implícitamente que el tamaño del sistema, medido por el número de estados disponibles, no cambia. De hecho, si el número de estados del sistema aumenta, entonces la entropía y, por lo tanto, el desorden del sistema también aumentarán, debido al incremento en el número de estados. Para evitar este problema, considerando un sistema físico que posee un número total de Ω microestados, se define su desorden $D(\Omega)$ de acuerdo con la siguiente expresión matemática:

$$D(\Omega) \equiv \frac{S(\Omega)}{S_{max}(\Omega)} \quad (2.2)$$

donde $S(\Omega)$ es la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) y $S_{max}(\Omega)$ es la entropía máxima, que para un sistema aislado se corresponde con el caso equiprobable. De este modo, la definición del desorden del sistema queda:

$$D(\Omega) = \frac{S(\Omega)}{S_{max}(\Omega)} = \frac{-k_B \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln p_i}{k_B \ln \Omega} = - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \log_{\Omega} p_i \quad (2.3)$$

Esta definición es coherente con que el desorden sea una magnitud intensiva: si se combinan dos sistemas idénticos e independientes que poseen el mismo nivel de desorden, el sistema resultante debe conservar dicho desorden. Para describir de manera adecuada su estructura interna, el desorden no debería estar influenciado por el tamaño del sistema.

Dado que la entropía es ignorancia (falta de información), puede decirse que el desorden es la fracción de ignorancia que se tiene del microestado del sistema en relación a la máxima ignorancia que se puede tener de él [21]. Claramente, se verifica que $0 \leq S(\Omega) \leq S_{max}(\Omega)$, luego $0 \leq D(\Omega) \leq 1$. El caso $D(\Omega) = 0$ (de menor desorden) se da cuando no hay ninguna incertidumbre, mientras que $D(\Omega) = 1$ ocurre cuando la ignorancia alcanza su nivel máximo, es decir, cuando todos los estados son igualmente probables.

Todo lo anterior sugiere una definición de orden del sistema dada por:

$$O(\Omega) = 1 - D(\Omega) \quad (2.4)$$

y se interpreta como la fracción de información que se tiene sobre un sistema en relación a la máxima información que se puede tener de él [21]. Tanto orden como desorden toman valores entre 0 y 1 y están libres de efectos de tamaño. Se trata de variables complementarias.

A continuación vamos a hablar de dos propiedades del desorden [21]:

1. Unión de 2 sistemas con distinto orden:

Si se tienen dos sistemas diferentes e independientes 1 y 2 (con Ω_1 y Ω_2 microestados respectivamente) tales que:

$$D_1 = \frac{S_1}{k_B \ln \Omega_1}, \quad D_2 = \frac{S_2}{k_B \ln \Omega_2} \quad (2.5)$$

entonces el desorden del sistema formado por ambos se puede calcular como:

$$\begin{aligned} D &= \frac{S}{k_B \ln \Omega} = \frac{S_1 + S_2}{k_B \ln(\Omega_1 \Omega_2)} = \frac{D_1 k_B \ln \Omega_1 + D_2 k_B \ln \Omega_2}{k_B \ln(\Omega_1 \Omega_2)} \\ D &= \frac{\ln \Omega_1}{\ln(\Omega_1 \Omega_2)} D_1 + \frac{\ln \Omega_2}{\ln(\Omega_1 \Omega_2)} D_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se ve claramente que en el caso de que los dos sistemas tengan el mismo desorden ($D_1 = D_2$) se obtiene $D = D_1 = D_2$.

2. Evolución temporal:

Consideremos un sistema termodinámico que experimenta un proceso en el cual su número de microestados, representado por $\Omega(t)$, varía con el tiempo. Aceptando que la entropía, originalmente definida solo en equilibrio, puede extenderse a estados intermedios, aplicando logaritmos a la ecuación (2.2) y derivando respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{\dot{D}}{D} = \frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{S}_{max}}{S_{max}} \quad (2.7)$$

Reescribiendo la ecuación sustituyendo la expresión de S_{max} y de su derivada respecto del tiempo, se obtiene:

$$\dot{D} = \left[\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega \ln \Omega} \right] D \quad (2.8)$$

sonde se sabe que $S \geq 0$ y que $\Omega \geq 1$. La ecuación (2.7) describe la tasa de cambio del desorden en función de la variación de la entropía y del número de microestados.

Un aspecto interesante de la ecuación (2.8) es que, si $\dot{S} > 0$ y $\dot{\Omega} > 0$ (lo cual es característico de sistemas biológicos en crecimiento), entonces puede ocurrir que estemos ante un sistema en el que la entropía aumenta mientras el desorden disminuye siempre y cuando:

$$\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega \ln \Omega} < 0 \quad (2.9)$$

Tras esto podemos preguntarnos, ¿bajo que condiciones se cumple la ecuación (2.9) considerando que $\dot{S} > 0$ y $\dot{\Omega} > 0$? Trabajando con esta ecuación llegamos a:

$$\frac{dS}{d\Omega} = \frac{\dot{S}}{\dot{\Omega}} < \frac{S}{\Omega \ln \Omega} = \frac{DS_{max}}{\Omega \ln \Omega} = \frac{Dk_B}{\Omega} \leq \frac{k_B}{\Omega} = \frac{d(k_B \ln \Omega)}{d\Omega} \Rightarrow \frac{dS}{d\Omega} < \frac{dS_{max}}{d\Omega} \quad (2.10)$$

Para que el desorden disminuya mientras la entropía sigue aumentando en un sistema biológico en crecimiento, es necesario que la variación de la entropía ocurra a un ritmo menor que el crecimiento de $k_B \ln \Omega$ en función del número de microestados. Esto se expresa matemáticamente como:

$$\frac{dS}{d\Omega} < \frac{dS_{max}}{d\Omega} \quad (2.11)$$

Dependiendo de cómo evolucionen los microestados y el desorden, se pueden identificar distintos escenarios en el comportamiento del sistema:

- **Caso de “equilibrio biológico”:** Si $\dot{\Omega} = 0 \Leftrightarrow \dot{S}_{max} = 0$, entonces la relación entre la entropía y el desorden se expresa como:

$$\dot{S} = S_{max} \dot{D} \quad (2.12)$$

En este escenario, la entropía varía en proporción al desorden sin que haya cambios en el número de microestados.

- **Caso de “evolución biológica”:** Si $\dot{\Omega} > 0 \Leftrightarrow \dot{S}_{max} > 0$, pueden surgir dos situaciones distintas:

- Cuando el desorden permanece constante, $\dot{D} = 0$, se tiene:

$$\dot{S} = D \dot{S}_{max} \quad (2.13)$$

Es decir, la variación de la entropía se debe únicamente a la evolución del número de microestados sin alterar el desorden.

- Cuando el desorden varía, $\dot{D} \neq 0$, se obtiene la ecuación general:

$$\dot{S} = \dot{D}S_{max} + D\dot{S}_{max} \quad (2.14)$$

En este caso, existe la posibilidad de que la entropía aumente incluso si el crecimiento del desorden es negativo, es decir, si $\dot{D} < 0$.

Para definir cuantitativamente la complejidad, es razonable exigir que sea cero en situaciones de orden o desorden absolutos y que crezca conforme el sistema se aparta de estos casos límite. Un sistema en el que $D = 1$ y $O = 0$ representa un estado de máximo desorden, lo que implica que su entropía alcanza el valor más alto posible, caracterizándolo como completamente aleatorio. En contraste, un sistema donde $D = 0$ y $O = 1$ es totalmente ordenado y posee entropía nula. Estos dos extremos son los casos más sencillos de describir, ya que representan los límites de aleatoriedad máxima y mínima. Sin embargo, cuando un sistema se aleja de estos estados extremos, su comportamiento se vuelve progresivamente más complejo de analizar. Esto va muy en la línea de lo que explican Solé y Manrubia en [2], ya que nos ofrece una imagen de lo que es un sistema complejo: uno que no es completamente aleatorio ni totalmente determinista.

Según Landsberg [22], una forma natural de medir la complejidad consiste en considerar el producto del orden y el desorden del sistema:

$$C(\Omega) = D(\Omega)O(\Omega) = D(\Omega)[1 - D(\Omega)] \quad (2.15)$$

Esta función cumple con la condición de anularse cuando el sistema es completamente ordenado ($D = 0$) o totalmente desordenado ($D = 1$). Su valor máximo ocurre cuando $D = O = 1/2$, es decir, cuando el sistema se encuentra en un estado intermedio, alejado tanto del orden absoluto como del caos total.

2.2.2.1. Ejemplo: el problema de los 2 niveles con degeneración

Presentamos aquí el ejemplo 1 de Landsberg en [23], que ilustra que la información puede aumentar la entropía y también que puede cambiar la entropía y el desorden en direcciones opuestas. Consideremos un sistema físico formado por entidades elementales idénticas e independientes, distribuidas en dos niveles de energía ϵ_1 y ϵ_2 ($\epsilon_1 < \epsilon_2$). Ambos niveles están ocupados con igual probabilidad: $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. La entropía por entidad es:

$$S_1 = k_B \ln 2.$$

Dado que el sistema es homogéneo, y el desorden es intensivo, se verifica que:

$$D = \frac{S_1}{S_{max,1}} = 1.$$

Por tanto, la complejidad resulta ser nula:

$$C = D(1 - D) = 0.$$

Un experimento posterior desvela que el nivel superior es doble en realidad, y que consiste en otros dos niveles de energía muy próximos entre sí ϵ'_2 y ϵ'_3 (con $\epsilon'_2 < \epsilon'_3$). ¿Qué ocurre con las probabilidades de ocupación de los niveles, con la entropía y con el desorden del sistema? Sean p'_1 , p'_2 y p'_3 las nuevas probabilidades de ocupación respectivas de los niveles ϵ_1 , ϵ'_2 y ϵ'_3 . Para ser coherentes con la información de la que se disponía antes, la población del nivel ϵ_1 ha de ser la mitad de la población total. Es decir: $p'_1 = p_1 = \frac{1}{2}$. Por tanto, p'_1 no es una incógnita en este problema. Esta ecuación, junto a la condición de normalización $p'_1 + p'_2 + p'_3 = 1$, da la condición:

$$p'_2 + p'_3 = \frac{1}{2}$$

Maximizando con esta ligadura la entropía por entidad elemental (es decir, aplicando el Principio de Máxima Entropía) se llega a que

$$p'_2 = p'_3 = \frac{1}{4}.$$

La nueva entropía por entidad elemental de esta distribución de probabilidad resulta ser:

$$S'_1 = \frac{3}{2}k_B \ln 2 = \frac{3}{2}S_1 > S_1.$$

La entropía máxima por entidad elemental es en este caso $S'_{max,1} = k_B \ln 3$, y el desorden del sistema:

$$D' = \frac{S'_1}{S'_{max,1}} = \frac{\frac{3}{2} \ln 2}{\ln 3} \approx 0,9464 < D$$

Y la complejidad es:

$$C' = D'(1 - D') = 0,0507 > C.$$

Se llega, por tanto, al hecho de que el conocimiento de la nueva información (la existencia de dos niveles en lugar de uno) hace que la entropía aumente (porque el número de microestados aumenta y, por tanto, el sistema puede contener más información), el desorden disminuya y la complejidad aumente (porque el sistema deja de ser completamente aleatorio).

Cabe destacar la gran similitud de este problema con la paradoja de Monty Hall: un concursante debe elegir una puerta entre tres (todas cerradas); el premio consiste en llevarse lo que se encuentra detrás de la elegida. Se sabe con certeza que tras una de ellas se oculta un coche, y tras las otras dos hay cabras. Una vez que el concursante haya elegido una puerta y comunicado su elección a los presentes, el presentador, que sabe lo que hay detrás de cada puerta, abrirá una de las otras dos, en la que habrá una cabra. A continuación, le da la opción al concursante de cambiar, si lo desea, de puerta (tiene dos opciones). Teniendo en cuenta la información anterior (detrás de qué puerta hay una cabra) para actualizar nuestro estado de conocimiento (qué puerta elige el concursante), se llega a la conclusión de que es más probable llevarse el premio cambiando de puerta.

Ante todo esto, nos podemos plantear, ¿es posible usar la complejidad de Landsberg en sistemas más complejos? Observemos que con la complejidad de Landsberg hemos conseguido abordar un ejemplo físico muy sencillo que en nada se parece a los sistemas complejos que pretendemos abordar. Por ello, todo dependerá de si es posible generalizar la idea de Landsberg para que sea aplicable de forma similar a un sistema complejo. Todavía no se ha propuesto ninguna idea en esta línea, y podría ser objetivo de un trabajo posterior explorar si es viable o no.

2.3. Sobre sistemas simples y sistemas complejos

En este epígrafe se van a comentar algunos aspectos físicos clave sobre las diferencias entre los sistemas simples y los sistemas complejos que nos van a servir de “enlace” para comprender mejor lo que resta del capítulo.

Para sistemas simples, tenemos 3 enfoques de entropía a priori distintos pero que degeneran en uno solo. Esos tres enfoques son los de la entropía termodinámica (una magnitud macroscópica dependiente de las variables de estado termodinámicas), el de la entropía asociada a la inferencia (se utiliza como un método estadístico para inferir funciones de distribución estadística a partir de datos) y el de la entropía ligada a la información (utilizada para cuantificar la cantidad de información que los sistemas producen a medida que evolucionan). Los 2 primeros enfoques se encuentran muy relacionados en la física estadística de sistemas simples y son los más importantes. Estas entropías, desde el punto de vista de la física estadística y la termodinámica de sistemas en ausencia de interacciones y/o correlaciones a larga distancia y en equilibrio, se corresponden con la expresión $S = -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln p_i$ (entropía de Shannon) y no dependen de las paredes ni del entorno. Además, las distribuciones de probabilidad de las magnitudes con sentido a nivel macro y micro (energía E , volumen V , número de partículas N ...) son muy estrechas (poca dispersión, valores cercanos a la media). Este hecho es de vital importancia y es el que permite identificar el valor macroscópico de las variables extensivas en el equilibrio con su valor medio de acuerdo con la distribución de probabilidad de los microestados del sistema. Bajo estas condiciones, todas las entropías BGS calculadas con distintas ligaduras coinciden numéricamente con:

$$k_B \ln \Omega(< E >, < V >, < N >)$$

Es decir, no hay dependencia con el conjunto (microcanónico, canónico,...) utilizado para el estudio (en el límite termodinámico) y esto es lo que identificamos con la entropía termodinámica. Desde el punto de vista macroscópico, esta entropía está justificada por hechos experimentales y desde el punto de vista microscópico aparece de forma natural usando todo el formalismo que acabamos de comentar.

Para sistemas complejos, nos estamos saliendo de todo este marco de la física estadística tradicional. Algunas desviaciones son los sistemas pequeños [24] o las interacciones/correlaciones a larga distancia, que son campos en desarrollo y en los que sí se intenta aplicar lo mencionado anteriormente. Aquí, la entropía dependerá de las paredes (la entropía depende del conjunto y cada conjunto tendrá su propia ley) y el entorno. Además, dejará de ser extensiva en muchas ocasiones. Quizás no tiene sentido usar la entropía para los sistemas complejos en el mismo sentido que para los sistemas simples, pues no está claro que se pueda definir el concepto de microestado como un suceso que tiene cierta probabilidad independiente del tiempo. La cuestión es que se está intentando resolver un problema diferente imponiendo la misma metodología que para los sistemas simples por analogía, pero realmente aún no está ni siquiera claro cuál es el problema que se quiere resolver. Por tanto, todo el formalismo de usar una entropía e inferir queda en entredicho.

Es importante dejar claro que todo este tema de los sistemas complejos no está bien hilado por nadie y que la intención de este trabajo no es clarificarlo, sino sólo presentar algunas de las propuestas existentes analizando la coherencia de las mismas desde el punto de vista de la física estadística conocida. Esto es lo que se realizará en los epígrafes restantes de este tema, en los cuales nos saldremos de los conocimientos correspondientes al Grado en Física, explorando un ámbito que está evolucionando rápidamente, ampliando sus horizontes, y generando nuevas oportunidades o desafíos.

2.4. Física estadística en sistemas complejos

Todo lo expuesto anteriormente refiere mayoritariamente a sistemas en equilibrio. En sistemas fuera del equilibrio, la entropía ya no depende únicamente de las variables de estado macroscópicas (macroestado), sino que su valor se ve influenciado por el proceso mediante el

cual se alcanzó ese estado. Esto hace que se reduzca significativamente la utilidad práctica de la entropía. No obstante, en contextos de no equilibrio, aún puede conservar cierta relevancia, siempre que se diferencien claramente las distintas formas en que se define esta magnitud.

Los sistemas complejos son, por naturaleza, dependientes del camino y la historia (no markovianos) y no ergódicos. En muchos sistemas complejos, la función entropía elegida respeta los axiomas de Shannon-Khinchin SK1-SK3. Sin embargo, lo que distingue verdaderamente a los sistemas complejos es si la función entropía escogida para su estudio cumple el cuarto axioma, el de composición, que está relacionado con la ergodicidad. Cuando estos sistemas se unen, crecen o se dividen, el modo en que esto sucede influye en las propiedades del sistema o sistemas resultantes. La razón de esto es que, al fusionarse o separarse, surgen interacciones entre los elementos de los subsistemas que afectan su comportamiento. La hipótesis de trabajo habitual a la hora de escoger una función entropía que sea adecuada o útil en sistemas complejos es sustituir el axioma SK4 por reglas de composición más generales. A todo esto se llega a raíz de intentar hacer un tratamiento de estos sistemas similar al de los sistemas simples, encontrándose que el uso de la entropía tradicional presenta ciertas limitaciones a la hora de cuantificar la información y de realizar inferencia estadística. De este modo, si se abandona SK4, es claro que la fórmula de la entropía debe ser más general que la fórmula de Boltzmann-Gibbs-Shannon. Se busca entonces una nueva “función entropía” que va a tener un sentido diferente al que tenía hasta ahora y que permite cuantificar la información de manera más adecuada.

La física estadística de los sistemas complejos será fundamental para la comprensión, gestión y control de estos sistemas. Sin embargo, aún no existe una teoría completamente desarrollada, aunque está en proceso de construcción. Dado todo esto, no es una tarea sencilla alcanzar un concepto significativo y una definición clara de lo que debería ser la entropía de un sistema complejo, en parte porque además el problema “general” a resolver tampoco está claro. En este contexto, necesitamos una noción de entropía que permita establecer una conexión significativa entre las propiedades microscópicas y macroscópicas de un sistema. Para aplicar la entropía de manera efectiva en sistemas complejos, existen solo dos enfoques posibles:

- El primero consiste en descomponer el sistema en partes que, individualmente, no sean complejas, es decir, que se mantengan cerca del equilibrio, sean independientes, ergódicas y no dependan del proceso que las llevó a su estado actual. Si esto fuera factible (lo cual, en la mayoría de los casos, no lo es, al existir interacciones de larga distancia) se podrían emplear sin problemas los conceptos tradicionales de entropía. El verdadero desafío radica en integrar nuevamente los resultados de manera que las propiedades globales del sistema sigan siendo predictivas y coherentes.
- La segunda alternativa es trabajar con el sistema en su totalidad y ajustar las formulaciones matemáticas de la entropía para garantizar que las predicciones a nivel sistémico sigan siendo precisas y teóricamente consistentes.

En este trabajo, nos centraremos exclusivamente en este segundo enfoque. Vamos a desarrollar un marco coherente para una entropía que sea significativa para al menos varios sistemas complejos.

2.4.1. Axiomas de Shannon-Khinchin para sistemas complejos

Consideramos aquellos sistemas complejos para los cuales la entropía usada cumple los siguientes axiomas.

- Cumplen **SK1**: la entropía $S(p_1, p_2, \dots, p_\Omega)$ es una función continua de todos sus argumentos p_i . No depende de ninguna otra variable.

- Cumplen **SK2**: la entropía $S(p_1, p_2, \dots, p_\Omega)$ asume un valor máximo en el caso en que todos los Ω estados sean igualmente probables (equidistribución), lo que significa que $p_i = 1/\Omega$.
- Cumplen **SK3**: agregar un estado $\Omega + 1$ al sistema que nunca ocurre, $p_{\Omega+1} = 0$, no cambia la entropía, $S(p_1, p_2, \dots, p_\Omega) = S(p_1, p_2, \dots, p_\Omega, 0)$.
- La entropía tiene forma de “traza”. Significa que asumimos que la entropía resultante es de la forma $S_g = \sum_i g(p_i)$ (con g una función matemática), lo cual no es la suposición más general. Esta suposición no es esencial, pero simplifica el análisis matemático.

2.4.2. Entropía y sistemas complejos

Ahora podemos establecer una generalización del teorema de unicidad de Shannon para sistemas complejos en los cuales la entropía utilizada viola el axioma SK4, pero SK1, SK2 y SK3 siguen siendo válidos. Enunciamos a continuación un teorema de clasificación de los sistemas complejos:

Teorema de clasificación de sistemas complejos. Todos los sistemas para los cuales se cumplen los axiomas SK1, SK2 y SK3 pueden ser:

1. Clasificados de manera única por dos números, c y d .
2. Representados por una entropía de dos parámetros,

$$S_{c,d}(p) = \sum_{i=1}^{\Omega} \left[\frac{r}{c} A^{-d} e^{A \Gamma(1+d, A - c \ln p_i) - r p_i} \right], \quad (2.16)$$

donde $\Gamma(a, b) = \int_b^{\infty} dt t^{a-1} e^{-t}$ es la función Gamma incompleta, r es una constante compuesta por c y d , $A = \frac{cdr}{1-(1-c)r}$, y e es la base del logaritmo. La constante $r > 0$ puede elegirse libremente, pero, dependiendo de los valores de d , debe satisfacer:

$$\begin{aligned} d > 0 : \quad r &< \frac{1}{1-c}, \\ d = 0 : \quad r &= \frac{1}{1-c}, \\ d < 0 : \quad r &> \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

La entropía de la ecuación (2.16) se llama **entropía** (c, d) , **entropía de sistemas complejos**, o simplemente $S_{c,d}$. Los parámetros c y d son característicos, pues intervienen en dos leyes de escala para todos los sistemas estadísticos para los cuales la entropía cumple SK1, SK2 y SK3. Estas leyes de escala, considerando $S_{c,d} = S_g = \sum_{i=1}^{\Omega} g(p_i)$ son:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{S(\Omega \lambda)}{S(\Omega)} = \lambda^{1-c}, \quad \text{con } 0 \leq c < 1$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{S(\Omega^{1+a})}{S(\Omega) \Omega^{a(1-c)}} = (1+a)^d, \quad \text{con } d \text{ real}$$

donde λ es un escalar. Todos los sistemas pueden clasificarse de manera única mediante dos exponentes de escala, c y d , que caracterizan el cambio en la entropía al añadir o eliminar estados del sistema. Los sistemas que tienen los mismos exponentes se dice que pertenecen a la misma clase de equivalencia (c, d) . La demostración de todo esto puede encontrarse en [9].

$S_{c,d}$ depende de los exponentes de escala únicos c y d , que caracterizan completamente el comportamiento de escala de la entropía. Diferentes sistemas, en general, tendrán diferentes

exponentes de escala para su entropía. Mencionamos que r en la ecuación (2.16) puede elegirse de manera relativamente libre. Para $d > 0$, una elección práctica para r es:

$$r = \frac{1}{1 - c + cd}$$

para la cual la constante $A = \frac{cdr}{1-(1-c)r} = \frac{cd \frac{1}{1-c+cd}}{1-(1-c)\frac{1}{1-c+cd}} = \frac{cd}{cd} = 1$, y la ecuación (2.16) se simplifica a:

$$S_{c,d}(p) = \frac{e}{c(1-c+cd)} \sum_{i=1}^{\Omega} \Gamma(1+d, 1-c \ln p_i) - \frac{1}{1-c+cd} \quad (2.17)$$

Para $d < 0$, una elección conveniente es

$$r = \frac{\exp(-d)}{(1-c)}$$

Cada elección de r nos proporciona un representante equivalente de la clase de equivalencia (c, d) , es decir, r no afecta las propiedades de la entropía en el límite de Ω grande. Sin embargo, la elección de r codifica características de tamaño finito del sistema.

Es importante notar que $S_{c,d}$ en la ecuación (2.16) no es única, y que existen otras funciones que también satisfacen las dos relaciones de escala mencionadas anteriormente. Quizás la posibilidad más simple sea:

$$S_{c,d} \sim \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^c \left(\ln \frac{1}{p_i} \right)^d$$

Esta función nos da las propiedades asintóticas correctas, pero no funciona para todos los valores posibles de c y d .

2.4.2.1. Casos especiales

A partir de la expresión de la entropía dada en la ecuación (2.16), ahora podemos discutir algunos casos especiales importantes:

1. Entropía clásica de Boltzmann, Gibbs, Shannon y Jaynes:

Usando la expresión (2.17), sustituyendo $c = 1$ y $d = 1$ y teniendo en cuenta que la función Gamma incompleta es $\Gamma(d+1, x) = \int_x^{\infty} t e^{-t} dt = e^{-x}(x+1)$ recuperamos la fórmula de la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon:

$$S_{1,1}(p) = e \left[\sum_{i=1}^{\Omega} (\Gamma(2, 1 - \ln p_i)) - 1 \right] = e \sum_{i=1}^{\Omega} \left(\frac{p_i}{e} (2 - \ln p_i) \right) - 1 = \sum_{i=1}^{\Omega} (2p_i - p_i \ln p_i) - 1,$$

$$S_{1,1}(p) = 2 - 1 + \sum_{i=1}^{\Omega} -p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^{\Omega} -p_i \ln p_i + 1.$$

(se ha usado que $\sum_{i=1}^{\Omega} 2p_i = 2$), donde la constante irrelevante 1 aparece como consecuencia de la relajación de SK4. No afecta ninguna de las propiedades de la entropía y no altera la validez de SK1, SK2 y SK3.

2. Entropía de Tsallis:

En este caso, $c = q$ y $d = 0$ y la función Gamma incompleta se convierte en $\Gamma(1, x) = e^{-x}$. Usando esto en la ecuación (2.16), obtenemos:

$$S_{q,0} = \frac{1}{(1-q)q} e \left[\sum_{i=1}^{\Omega} (\Gamma(1, 1 - q \ln p_i)) \right] - \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)q} e \left[\sum_{i=1}^{\Omega} e^{\ln(p_i^q)-1} \right] - \frac{1}{1-q},$$

$$S_{q,0} = \frac{1}{(1-q)q} e \left[\sum_{i=1}^{\Omega} \frac{p_i^q}{e} \right] - \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)q} \left[\sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q \right] - \frac{1}{1-q},$$

$$S_{q,0} = \frac{1}{q} \frac{1 - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q - 1}{q - 1} - \frac{1}{1-q} = \frac{1}{q} \left[\frac{1 - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q}{q - 1} - \frac{1}{q - 1} + \frac{q}{q - 1} \right],$$

$$S_{q,0} = \sum_i g_{q,0}(p_i) = \frac{1}{q} \left(\frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} + 1 \right).$$

Este caso especial es ampliamente conocido como la entropía de Tsallis, salvo por un factor. La entropía de Tsallis desempeña un papel importante en la física estadística de sistemas complejos, principalmente porque está estrechamente relacionada con las leyes de potencias. Esto es, si se maximiza bajo ciertas restricciones, se obtienen funciones de distribución con leyes de potencias.

3. Entropía de Anteonodo–Plastino:

Poniendo $c = 1$, $d > 0$ en la ecuación (2.16), se obtiene:

$$S_{1,d>0} = \sum_{i=1}^{\Omega} g_{1,d}(p_i) = \frac{e}{d} \sum_{i=1}^{\Omega} \Gamma(1 + d, 1 - \ln p_i) - \frac{1}{d}.$$

Si se maximiza bajo ciertas restricciones, las funciones de distribución correspondientes son exponenciales generalizadas.

2.4.2.2. Otros casos

Durante las últimas cinco décadas se han propuesto una serie de funcionales de entropía. La mayoría de ellos fueron introducidos en un contexto específico, como la relatividad especial, la computación cuántica o por razones puramente matemáticas. En la tabla 2.1, se pueden observar algunas de ellas.

Ante esta cantidad de expresiones diferentes, podemos preguntarnos: ¿son todas estas entropías igual de válidas que la entropía BGS? Las entropías de la tabla 2.1, como la de Tsallis o la de Rényi, son generalizaciones de esta última. Al aplicar el Principio de Máxima Entropía con estas generalizaciones, se obtienen distribuciones diferentes, las cuales pueden ser útiles en ciertos contextos, pero no siempre son compatibles con algunos aspectos como las leyes termodinámicas estándar, las predicciones de la física estadística convencional y la mecánica cuántica (en ciertos casos).

¿Dónde puede surgir la contradicción? Por ejemplo, con la segunda ley de la termodinámica (si la entropía no crece como se espera), con las ecuaciones de movimiento (si las distribuciones resultantes predicen comportamientos físicos no observados) o con el equilibrio termodinámico (si el estado de equilibrio predicho no coincide con el que se observa experimentalmente). Penrose

Entropía		c	d
BGS	$S_{BGS} = \sum_i p_i \ln(1/p_i)$	1	1
Rényi	$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_i p_i^\alpha$	1	1
Tsallis 1	$S_{q<1} = \frac{1-\sum_i p_i^q}{q-1} \quad (q < 1)$	$q < 1$	0
Kaniadakis	$S_\kappa = -\sum_i p_i (p_i^\kappa - p_i^{-\kappa})/(2\kappa) \quad (0 < \kappa \leq 1)$	$1 - \kappa$	0
Abe	$S_{A,q} = -\sum_i (p_i^q - p_i^{1/q})/(q - 1/q)$	$0 < q \leq 1$	0
Sharma–Mittal	$S_{SM,r,\kappa} = -\sum_i p_i^r \frac{(p_i^\kappa - p_i^{-\kappa})}{2\kappa}$	$r - \kappa$	0
Landsberg–Vedral	$S_{LV,q} = \frac{((\sum_i p_i^q) - 1)}{q-1}$	$2 - q$	0
Tsallis 2	$S_{q>1} = (1 - \sum_i p_i^q)(q - 1) \quad (q > 1)$	1	0
Curado	$S_b = \sum_i (1 - e^{-bp_i}) + e^{-b} - 1 \quad (b > 0)$	1	0
Exponential	$S_E = \sum_i p_i \left(1 - e^{-\frac{p_i-1}{p_i}}\right)$	1	0
Anoteondo–Plastino	$S_\eta = \sum_i \left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}, -\ln p_i\right) - p_i \Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \right) \quad (\eta > 0)$	1	$1/\eta$
Ubriaco	$S_\gamma = \sum_i p_i \ln^{1/\gamma}(1/p_i)$	1	$1/\gamma$
Shafee	$S_\beta = \sum_i p_i^\beta \ln(1/p_i)$	β	1
Hanel–Thurner 1	$S_{c,d} = r \sum_i \left(\frac{e}{c} \Gamma(d+1, 1 - c \ln p_i) - p_i \right)$	c	d
Hanel–Thurner 2	$S_{c,d} = \sum_i p_i^c \ln^d(1/p_i)$	c	$d \neq 0$

Tabla 2.1: Disitintas expresiones para la entropía [9]. Excepto por la entropía de Rényi y la entropía de Landsberg–Vedral, que no tienen forma de traza, todas las entropías listadas son casos particulares de la entropía $S_{c,d}$ dada en la ecuación (2.16).

[25] y otros autores clásicos de física estadística [17] [18] [26] [19] generalmente trabajan con la entropía BGS y son cautelosos respecto a otras formas, precisamente porque la consistencia de los resultados obtenidos de su uso no está garantizada en cualquier situación.

¿Cuándo no hay contradicción? Pues cuando se justifica el uso de una entropía distinta por propiedades específicas del sistema (como no extensividad, fractalidad, memoria), cuando se revisan y adaptan las leyes termodinámicas o dinámicas a la nueva definición de entropía, y cuando se verifica que la nueva entropía representa correctamente los aspectos que se quieren cuantificar de los fenómenos observados. Pero, de hecho, este planteamiento depende del sistema concreto estudiado y resulta bastante complicado [9].

En conclusión, si nos planteamos hasta qué punto se puede realizar inferencia con estas entropías, es claro que no se puede aplicar el Principio de Máxima Entropía tal y como lo conocemos para sistemas simples. El lector puede consultar el libro de Thurner, Hanel y Klimek [9] si desea detalles acerca de una nueva línea de razonamiento propuesta para un Principio de Máxima Entropía generalizado para sistemas complejos, más complicado matemáticamente y con una filosofía de trabajo algo diferente.

2.4.3. Consecuencias para la entropía al abandonar los sistemas simples

Al renunciar al cuarto axioma de Shannon-Khinchin (SK4), la entropía deja de ser de la forma tradicional de Boltzmann–Gibbs–Shannon:

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i,$$

y pasa a ser una función más general, estando determinada por la manera en que se distribuyen las probabilidades sobre el conjunto de estados accesibles.

Se descubrieron dos leyes de escala generales que controlan el comportamiento de la entropía al modificar el número de estados. En sistemas con muchos estados, estas leyes de escala determinan de manera única una familia general de entropías $S_{c,d}$, caracterizada por dos exponentes de escala, c y d .

Esta forma general puede considerarse como la entropía de sistemas complejos que no cumple con el axioma de composición (SK4), pero sí satisfacen los axiomas SK1, SK2 y SK3. Estas leyes también se extienden a entropías que no tienen forma de traza.

Resumimos con lo siguiente las consecuencias de trabajar con sistemas complejos:

- Se puede clasificar diferentes sistemas complejos según el comportamiento de escala de su entropía generalizada. Esto da lugar a clases de equivalencia (c, d) caracterizadas por dos exponentes.
- La entropía (c, d) explica de forma natural el origen de muchas entropías propuestas anteriormente. Muchos sistemas dentro de una clase (c, d) comparten comportamiento estadístico, en especial colas idénticas en sus funciones de distribución. No obstante, existen otras entropías cuyo origen es distinto al de la entropía $S_{c,d}$.
- La entropía (c, d) permite explicar la existencia de una amplia gama de funciones de distribución en sistemas estocásticos complejos, como leyes de potencias y exponenciales. La distribución de Boltzmann también aparece como caso particular.
- Esta entropía también permite dar una interpretación al hecho de que sean tan comunes las leyes de potencias.
- Finalmente, la entropía (c, d) ayuda a entender la estadística de procesos con memoria o dependencia del camino.
- Se puede plantear la existencia de un Principio de Máxima Entropía generalizado para sistemas complejos.

Finalmente, cabe destacar que existen sistemas complejos en los que, además de que la función entropía no cumpla el axioma SK4, tampoco cumple alguno de los otros axiomas. Estos sistemas no pueden ser tratados a partir de $S_{c,d}$, sino que es necesario definir nuevas entropías para trabajar. Esto pone de manifiesto que el estudio de la entropía en sistemas complejos es un campo en constante evolución, donde aún quedan numerosos desafíos conceptuales y técnicos por resolver, lo que hace imprescindible continuar investigando para comprender mejor la diversidad de comportamientos que estos sistemas pueden exhibir.

En este contexto, profundizar en la comprensión y extensión de las entropías generalizadas no solo es relevante desde un punto de vista teórico, sino que resulta fundamental para abordar problemas reales en física, biología, economía y otras disciplinas donde la complejidad y la no ergodicidad juegan un papel central.

CAPÍTULO 3

SISTEMAS COMPLEJOS EN ECONOMÍA Y ECONOFÍSICA

En este tercer y último capítulo vamos a hablar de un ámbito tan importante a nivel mundial como es la economía. Los sistemas económicos, y en particular los mercados financieros, presentan una complejidad inherente que desafía los modelos tradicionales de la economía clásica. A diferencia de los casos de racionalidad perfecta y equilibrio constante, los mercados reales están compuestos por miles o millones de agentes que interactúan de forma no lineal, adaptativa y, muchas veces, impredecible. Es por ello que todo lo que tiene que ver con la economía puede considerarse un muy buen ejemplo de sistema complejo.

Ante esta realidad, surge la econofísica como una alternativa para modelar estos sistemas desde una perspectiva basada en los métodos y teorías de la física estadística.

3.1. ¿Qué es un sistema complejo en economía?

En el ámbito económico, un sistema complejo no puede entenderse simplemente como la suma de sus componentes. Está compuesto por múltiples actores (como consumidores, empresas, instituciones financieras y entes reguladores) que interactúan de manera no lineal. Esto implica que una acción puede generar consecuencias desproporcionadas o impredecibles.

Dentro de este tipo de sistemas, se observan ciertas características clave:

- **El comportamiento global no se deduce directamente de las partes individuales:** analizar un solo agente no basta para comprender el funcionamiento del conjunto del mercado.
- **Emergen dinámicas colectivas inesperadas:** como el estallido de una crisis que ningún actor anticipó ni provocó de forma aislada.
- **Existe una fuerte interdependencia entre los elementos:** destacan los mecanismos de retroalimentación; las acciones de los agentes afectan al sistema, y las reacciones del sistema influyen de nuevo en los agentes, produciendo dinámicas que pueden intensificarse o amortiguarse. Esto ocurre, por ejemplo, durante episodios de pánico financiero.

Por tanto, un sistema complejo en economía es un entramado dinámico donde múltiples agentes interactúan de forma interdependiente, dando lugar a comportamientos colectivos que

no pueden anticiparse mediante el análisis de cada parte por separado. En estos sistemas, pequeñas variaciones pueden desencadenar efectos significativos, lo que los vuelve sensibles al contexto y a las condiciones iniciales.

Como vemos, es una definición muy en la línea de lo visto para los sistemas complejos en física. Este suceso motiva la aparición del término “econofísica”. Los sistemas complejos en economía poseen varias características distintivas que los diferencian de los modelos lineales tradicionales:

- **Comportamiento no lineal:** pequeñas perturbaciones pueden generar efectos amplificados, muy alejados de lo esperado.
- **Fenómenos emergentes:** aparecen comportamientos consecuencia del todo, sin que ningún agente los haya provocado directamente.
- **Capacidad de adaptación:** los actores dentro del sistema ajustan sus decisiones según los cambios del entorno, lo que modifica la evolución global del sistema.
- **Autoorganización espontánea:** sin una autoridad central, se generan estructuras complejas como jerarquías, agrupamientos o burbujas de precios.

3.2. Origen de la econofísica

Tras su aparición, el Instituto de Santa Fe buscó el apoyo de expertos para definir su agenda científica. En una de sus primeras reuniones, se propuso explorar cómo los avances recientes en ciencias naturales y tecnología informática podrían aplicarse para entender mejor el flujo de capital y la deuda a nivel global. Estaban interesados en ampliar los horizontes de la teoría económica convencional para que eventualmente pudiera abordar problemas macroeconómicos complejos como la economía global, en lugar de aplicar teorías económicas preexistentes a este problema y convertirse así en un foro de opiniones enfrentadas sobre las causas o soluciones, basadas en teorías claramente incompletas.

En una conferencia a la que acudieron científicos y economistas, se fijaron los siguientes temas a tratar para la econofísica [27]:

1. **Aprendizaje de los agentes económicos sobre la economía (información con ruido).** Optimización ruidosa. ¿Se pueden aplicar modelos complejos de aprendizaje? Adaptación en juegos secuenciales (como el dilema del prisionero). ¿Es la biología lo mismo que la economía o esta última se diferencia porque tiene en cuenta la previsión? (El truco de evitar la historia en economía). Cómo modelar diferentes tipos de interacciones en biología y economía, como depredación, simbiosis, infraestructura u otros tipos de relaciones.
2. **Innovaciones y coevolución.** Cómo el desarrollo de un organismo limita los cambios posibles. ¿El espacio disponible para el crecimiento es finito o abierto? ¿Qué pasa con los recursos?
3. **El desarrollo económico como un sistema complejo.** ¿Existen muchos caminos similares para llegar al mismo lugar? ¿Podemos ver el desarrollo como un proceso que se difunde de una forma parecida a cómo se propagan las reacciones? El papel de la política en frenar o acelerar el desarrollo.
4. **Diferencias económicas entre regiones.** ¿Hay una tendencia a que se generen desigualdades? ¿Pueden los modelos económicos explicar esta tendencia? ¿Pasa lo mismo a nivel internacional?

5. **Problemas de bloqueo o estancamiento económico.** ¿Métodos como el temple (se utiliza para modelar situaciones en las que se busca optimizar un resultado (como el beneficio o la eficiencia) en condiciones de incertidumbre o complejidad) pueden ayudar a la economía a liberarse de un estancamiento dañino?
6. **Relación entre modelos deterministas y aleatorios en economía.** El papel de la previsión para evitar sistemas inestables. ¿Es posible predecir los comportamientos en sistemas económicos sin tener una previsión perfecta?
7. **Mercados financieros.** Teorías económicas, modelos de probabilidades, volatilidad excesiva, explicaciones de los volúmenes de transacciones. ¿Ayuda el análisis de sistemas no lineales? Componentes psicológicos (exceso de confianza; formación de expectativas no basadas en probabilidad).
8. **La economía global.** Conexiones entre países y a lo largo del tiempo. ¿Cómo afectan los cambios de divisa y los tipos de cambio (fijos o flotantes) en los flujos internacionales de dinero?
9. **Ciclos económicos.** Modelos que explican los ciclos económicos, como los estocásticos y los deterministas no lineales, con muchas variables que afectan de forma diferente. ¿Hay cambios significativos en los sistemas, como las grandes guerras, la Gran Depresión o la aparición de ciclos económicos?

3.3. Fundamentos de la econofísica

La econofísica comenzó a consolidarse como disciplina en la década de 1990, cuando investigadores provenientes de la física de sistemas complejos, la estadística y la física teórica comenzaron a transferir herramientas matemáticas y modelos cuantitativos del ámbito físico al análisis de fenómenos económicos y financieros. Es un enfoque interdisciplinar que aplica herramientas de la física estadística al análisis de sistemas económicos, especialmente en los mercados financieros.

Este nuevo enfoque fue impulsado por varios factores clave:

- El acceso creciente a grandes volúmenes de datos financieros de alta resolución temporal, especialmente en el contexto de los mercados bursátiles.
- La evidencia de que muchos comportamientos observados en economía no podían ser explicados bajo las suposiciones de la teoría económica tradicional, como la distribución normal de retornos, usada para modelar cómo se comportan los rendimientos de un activo financiero.
- El interés creciente por parte de los físicos en explorar sistemas fuera del ámbito convencional, caracterizados por interacciones no lineales y dinámicas emergentes.

Dentro de este movimiento, H. Eugene Stanley y Rosario N. Mantegna destacaron como figuras centrales al aplicar herramientas de la física estadística al estudio de series temporales financieras, identificando regularidades como leyes de escala, correlaciones de largo alcance y distribuciones con colas gruesas, típicas de leyes de potencia [28].

La econofísica ofrece la posibilidad de:

1. **Trabajar con mucha información** sin necesidad de conocer con exactitud el razonamiento individual que hay detrás de cada decisión económica.

2. **Identificar patrones escondidos** aplicando herramientas propias de las matemáticas, como por ejemplo:
 - El uso de espacios métricos para calcular qué tan similares son diferentes activos.
 - El estudio de correlaciones en múltiples dimensiones para entender relaciones complejas entre variables.
3. **Recrear comportamientos colectivos**, como crisis financieras o la evolución de precios en el mercado, utilizando modelos matemáticos inspirados en la física de partículas o de fluidos.
4. **Adoptar una perspectiva probabilística**, más adecuada para enfrentar la incertidumbre inherente a los mercados, en lugar de suponer que todos los agentes actúan con total racionalidad y de manera predecible.

En resumen, la econofísica constituye un enfoque metodológico novedoso para analizar los sistemas financieros. Al considerar los mercados como sistemas complejos y abiertos, proporciona una manera más adaptable, realista y basada en datos para entender fenómenos como la inestabilidad, los eventos extremos y las dinámicas no lineales presentes en la economía. No pretende sustituir a la economía tradicional, sino complementarla, aportando herramientas innovadoras que permiten captar mejor la complejidad que caracteriza a los mercados actuales.

3.3.1. Similitudes con la física

Stanley y Mantegna proponen que los mercados financieros pueden analizarse de manera efectiva si se consideran como sistemas físicos complejos. Desde esta perspectiva, el comportamiento de los precios y de los agentes económicos presenta notables similitudes con fenómenos estudiados en física [28].

Por ejemplo:

- **Fluidos turbulentos:** El comportamiento errático y aparentemente caótico de los precios financieros se asemeja a los patrones impredecibles del flujo turbulento en un fluido. Al igual que en la turbulencia, pequeñas perturbaciones pueden amplificarse, generando movimientos bruscos e inesperados.
- **Transiciones de fase:** Los cambios drásticos en los mercados (como el paso de una fase de estabilidad a una de crisis) guardan paralelismo con las transiciones de fase en la física, como el cambio de agua líquida a vapor. Estas transformaciones, aunque puedan parecer súbitas, responden a condiciones críticas acumuladas en el sistema.
- **Redes neuronales:** Los participantes del mercado, al interactuar entre sí, forman estructuras en red que recuerdan a las conexiones neuronales del cerebro. Estas redes pueden dar lugar a comportamientos emergentes complejos.

Estas analogías permiten aplicar herramientas desarrolladas en la física (como las ecuaciones de difusión para modelar la propagación de precios, la teoría de redes para estudiar la interconexión entre activos y agentes, o el análisis espectral para identificar patrones ocultos en series de tiempo financieras) al estudio riguroso de los mercados. De esta forma, la econofísica abre nuevas vías para comprender fenómenos que escapan a los enfoques tradicionales de la economía.

La tabla 3.1 muestra una comparativa entre la física estadística y la econofísica.

Por otro lado, la econofísica y la física comparten un enfoque fundamental: la idealización de sistemas para desarrollar modelos y teorías. En física, se utilizan modelos idealizados, como

Física estadística	Econofísica
Átomos o espines	Agentes económicos
Energía	Coste / utilidad / beneficio
Temperatura	Ruido / incertidumbre en decisiones
Interacciones locales	Influencia entre agentes
Transiciones de fase	Cambios súbitos de mercado (crash)
Leyes de potencias	Distribución de rendimientos financieros
Movimiento browniano	Movimiento de precios

Tabla 3.1: Analogías entre física estadística y econofísica.

el movimiento sin fricción o los sistemas infinitos, para entender fenómenos complejos en un contexto controlado y simplificado. Estas idealizaciones permiten a los físicos desarrollar teorías precisas y realizar experimentos diseñados para probar estas teorías, aunque siempre con la conciencia de que los sistemas reales, aunque aproximados, presentan comportamientos que se desvían de los modelos idealizados. De manera similar, en econofísica, los mercados financieros se modelan como sistemas ideales, como el de un mercado perfectamente eficiente. Este enfoque permite a los investigadores crear teorías sobre la dinámica de los mercados financieros y realizar pruebas empíricas dentro de un marco controlado. Sin embargo, al igual que en física, los economistas y físicos que estudian los mercados reconocen que estos modelos idealizados solo ofrecen una aproximación a la realidad y que el comportamiento de los mercados reales se desvía inevitablemente de los modelos ideales.

Al igual que los físicos, los econofísicos utilizan idealizaciones no solo para simplificar los problemas, sino también para obtener una comprensión más clara de las propiedades estadísticas fundamentales que rigen los sistemas económicos. Estos modelos idealizados sirven como base para explorar patrones, identificar correlaciones y simular comportamientos dentro de un sistema económico. No obstante, el desafío, tanto en la física como en la econofísica, radica en aplicar estas abstracciones de manera que sigan siendo útiles para describir y prever el comportamiento de sistemas reales. Así, al igual que la física ha avanzado mediante el uso de idealizaciones, la econofísica también ha logrado avances significativos al adoptar enfoques similares, siempre con la conciencia de que, aunque los modelos pueden ser útiles, nunca representarán de manera perfecta los sistemas complejos del mundo real [28].

Conclusiones

En este trabajo se ha realizado una revisión general del concepto de sistema complejo y de las herramientas disponibles para estudiarlos, analizando su relación con la física estadística tradicional. Cabe destacar que el objetivo no ha sido ofrecer una versión definitiva del concepto de sistema complejo ni un análisis exhaustivo de la ciencia de la complejidad, pues tal tarea excedería con creces la dificultad y la extensión de este documento.

Se ha visto que existen determinados sistemas, llamados sistemas complejos, para los cuales el enfoque reduccionista no resulta adecuado, debido a la imposibilidad de entender sus propiedades de conjunto (en un nivel superior de descripción) únicamente a partir de las propiedades de sus elementos por separado (en un nivel inferior de descripción). Se destaca que:

- No existe una definición clara de lo que es un sistema complejo y existen diversas propuestas de definición dependiendo del ámbito en el que se trabaje. Se ha trabajado con una definición propuesta por Thurner, Hamel y Klimek [9] (“redes multicapa que coevolucionan”), que pretende capturar la mayoría de sus características generales, entre las que destacan que sus elementos pueden no ser entes materiales, que sus interacciones pueden depender del tiempo y de los elementos concretos que interaccionan y que su dinámica es no lineal, con histéresis o memoria y correlacionada con la dinámica de las condiciones límite.
- Debido a su naturaleza diversa, es necesario para su estudio introducir nuevas herramientas (como las redes y las leyes de potencia) y nuevos conceptos (como los fenómenos emergentes).

Se han inspeccionado algunos tratamientos cuantitativos de los sistemas complejos, tratando de extender herramientas de la física estadística y la termodinámica. Para ello, se revisan los tres papeles distintos que juega la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) $S_{BGS} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$ en sistemas simples (como entropía termodinámica, como entropía de información y como herramienta para inferencia estadística). Además, en el caso de estos sistemas es posible dar una medida del orden, del desorden y de la complejidad, de acuerdo con lo propuesto por Landsberg. Prueba de ello es el problema de los dos niveles con degeneración posterior, donde se ha visto que, de acuerdo con estas definiciones, aumentan la entropía y la complejidad mientras que disminuye el desorden.

La entropía BGS, usada en física estadística de sistemas simples, cumple los 4 axiomas de Shannon-Khinchin. Se ha estudiado cómo puede convenir usar otras entropías para cuantificar distintos aspectos de un sistema complejo. Para ello, se ha estudiado una familia de entropías que incumplen el cuarto axioma (de composición), cuya expresión general es $S_{c,d}(p) = \sum_{i=1}^{\Omega} \left[\frac{r}{c} A^{-d} e^{A \Gamma(1+d, A - c \ln p_i) - r p_i} \right]$, donde c y d representan exponentes de escala propios de cada sistema. Algunos ejemplos son la propia entropía de BGS, la entropía de Tsallis y la entropía de Rényi. En este caso, también se ha propuesto un Principio de Máxima Entropía generalizado [9].

Cabe destacar que los sistemas complejos aparecen en múltiples fenómenos de la naturaleza y de la vida y que el estudio de la complejidad no es exclusivo de la física, sino que la física ofrece herramientas útiles que se están extendiendo a otras disciplinas (biología, economía, sociología, inteligencia artificial). Como ejemplo, se ha tratado el punto de vista de la econofísica. Aplicar la perspectiva de sistemas complejos a la economía permite revelar patrones universales y emergentes, aportando una visión alternativa y cuantitativa de dinámicas económicas que, de

otro modo, serían impredecibles.

En definitiva, para abordar los sistemas complejos es indispensable ir más allá de lo tradicional y de la física clásica, ajustando o reinventando los marcos teóricos preexistentes. La teoría de la complejidad, desde el punto de vista de la ciencia, se encuentra en pleno desarrollo y aún no se conoce exactamente qué problema general se quiere resolver y, por tanto, tampoco su solución. De este modo, se trata de uno de los campos con más futuro de cara a la investigación en este siglo. Es decir, pese a los avances, aún hay grandes retos abiertos, especialmente sobre:

- Cómo formalizar una teoría unificada de complejidad.
- La dificultad de definir una entropía generalizada adecuada para sistemas complejos.
- La relación precisa entre complejidad e información.

Definir y tratar lo complejo nunca va a ser trivial, independientemente de la rama de conocimiento en la que se trabaje.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. W. Anderson. “More is Different”. En: *Science* 177[4047] 1972, págs. 393-396. DOI: [10.1126/science.177.4047.393](https://doi.org/10.1126/science.177.4047.393).
- [2] Ricard V. Solé y Susanna C. Manrubia. *Orden y caos en sistemas complejos*. Ilustrada. Politext: Área de Física, Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, España: Edicions de la UPC, S.L., 2000. ISBN: 84-8301-430-0.
- [3] Robert B. Laughlin. *Un universo diferente: La reinvencción de la física en la edad de la emergencia*. Buenos Aires: Katz Editores, 2007.
- [4] Jorge Wagensberg. *Ideas sobre la complejidad del mundo*. Barcelona: Tusquets Editores, 2007.
- [5] C. Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”. En: *Bell System Technical Journal* 271948, págs. 379-423, 623-656.
- [6] A. García. *Caos, orden y otras movidas del universo*. Oberon, 2023.
- [7] David Ruelle. *Azar y caos*. Madrid: Hermann / Alianza Editorial, 1991.
- [8] M. E. J. Newman. “Resource Letter CS-1: Complex Systems”. En: *American Journal of Physics* 79[8] 2011, págs. 800-810. DOI: [10.1119/1.3590372](https://doi.org/10.1119/1.3590372).
- [9] Stefan Thurner, Rudolf Hanel y Peter Klimek. *Introduction to the Theory of Complex Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2018. ISBN: 978-0-19-882193-9.
- [10] H. J. Jensen. *Complexity Science: The Study of Emergence*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
- [11] C. Keating et al. “System of Systems Engineering”. En: *Engineering Management Journal* 15[3] 2003, págs. 36-45.
- [12] Johnson et al. “A Theory of Emergence and Entropy in Systems of Systems”. En: *Procedia Computer Science*. Vol. 20. Conference: Complex Adaptive Systems, Publication 3. Organized by Missouri University of Science and Technology, 2013 - Baltimore, MD. Edited by Cihan H. Dagli. Elsevier, 2013, págs. 283-289.
- [13] Donald T. Jacobs. “Resource Letter SOP-1: Self-Organizing Physics”. En: *American Journal of Physics* 83[8] 2015, págs. 680-687. DOI: [10.1119/1.4922338](https://doi.org/10.1119/1.4922338).
- [14] G. Galileo. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Biblioteca de la Literatura y el Pensamiento Universal, n^o 10. Madrid: Editora Nacional, 1976.

- [15] Kurt Wiesenfeld. “Resource Letter: ScL-1: Scaling Laws”. En: *American Journal of Physics* 69[9] 2001, págs. 938-947. DOI: [10.1119/1.1383601](https://doi.org/10.1119/1.1383601).
- [16] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman y Company, 1982.
- [17] E. T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Ed. por G. Larry Bretthorst. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN: 9780521592710.
- [18] E. T. Jaynes. “Where Do We Stand on Maximum Entropy?” En: *The Maximum Entropy Formalism*. Ed. por R. D. Levine y M. Tribus. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1978. URL: <https://bayes.wustl.edu/etj/articles/stand.on.entropy.pdf>.
- [19] E. T. Jaynes. “Concentration of Distributions at Entropy Maxima”. En: *Foundations of Probability Theory, Statistical Inference, and Statistical Theories of Science*. Ed. por William L. Harper y Clifford A. Hooker. Vol. 3. Dordrecht: Reidel, 1978, págs. 239-252. ISBN: 978-94-010-1164-0. DOI: [10.1007/978-94-010-1162-6_15](https://doi.org/10.1007/978-94-010-1162-6_15).
- [20] Óscar Bernardo Rodríguez. *El Principio de máxima entropía en física estadística: una revisión con ejemplos ilustrativos*. Trabajo Fin de Grado. 2023. URL: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/63267/TFG-G6656.pdf>.
- [21] Luis Fernando Hevia de los Mozos. *Entropía y Desorden*. Trabajo de Fin de Grado. 2014. URL: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/6094/TFG-G589.pdf>.
- [22] J. Shiner, D. Davison y P. Landsberg. “Simple measure for complexity”. En: *Physical Review E* 59[2] 1999, págs. 1459-1464. DOI: [10.1103/PhysRevE.59.1459](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.1459).
- [23] P. T. Landsberg. “Can Entropy and Order Increase Together?” En: *Physics Letters A* 102[4] 1984, págs. 171-173. DOI: [10.1016/0375-9601\(84\)90941-9](https://doi.org/10.1016/0375-9601(84)90941-9).
- [24] Terrell L. Hill. *Thermodynamics of Small Systems*. New York: Dover Publications, 2002. ISBN: 978-0-486-43286-0.
- [25] Oliver Penrose. “Foundations of statistical mechanics”. En: *Reports on Progress in Physics* 42[12] 1979, págs. 1937-2006. DOI: [10.1088/0034-4885/42/12/002](https://doi.org/10.1088/0034-4885/42/12/002).
- [26] John E. Shore y Rodney W. Johnson. “Axiomatic Derivation of the Principle of Maximum Entropy and the Principle of Minimum Cross-Entropy”. En: *IEEE Transactions on Information Theory* 26[1] 1980, págs. 26-37. DOI: [10.1109/TIT.1980.1056144](https://doi.org/10.1109/TIT.1980.1056144).
- [27] Philip W. Anderson, Kenneth J. Arrow y David Pines, eds. *The Economy as an Evolving Complex System*. Vol. V. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2018.
- [28] Rosario N. Mantegna y H. Eugene Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780521620086.