



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

**EL FORMALISMO "EFFECTIVE-ONE-BODY" EN EL ESTUDIO DE UN SISTEMA
BINARIO DE AGUJEROS NEGROS EN COALESCENCIA.**

Autor/a: PABLO RECALDE RODRÍGUEZ

**Tutor/es/as: JAVIER PATRICIO MATULICH FABRES (IFT) Y JOSÉ MANUEL
IZQUIERDO RODRÍGUEZ (UVa)**

Año: 2025

Índice

1. Resumen	3
2. Abstract	3
3. Introducción a la gravitación	4
4. Ondas gravitatorias	10
5. Límite Post-Newtoniano	13
6. De la dinámica relativista al modelo EOB	14
6.1. Dinámica de la partícula de prueba	14
6.2. Movimiento partícula de prueba en la métrica de Schwarzschild	15
6.3. El problema efectivo de dos cuerpos	18
7. Modelo EOB	19
7.1. Inspiral-plunge-merger	19
7.2. Ringdown	24
8. Conclusiones	28
9. Bibliografía	30
10. Lista de Figuras	32
11. Apéndice A: Desarrollo del límite Post-Newtoniano	33
12. Apéndice B: Soluciones de agujeros negros	37

1. Resumen

Este trabajo estudia la dinámica de sistemas binarios de agujeros negros en el marco de la relatividad general, con especial atención a su aplicación en la modelización de señales de ondas gravitatorias. Se introduce el formalismo "Effective One Body" (EOB), que permite describir de manera unificada las fases principales de una coalescencia de agujeros negros: inspiral, plunge, merger y ringdown. A partir de la dinámica de una partícula de prueba en la métrica de Schwarzschild, se construye un modelo efectivo para el problema de dos cuerpos que incorpora correcciones postnewtonianas y efectos relativistas fuertes. Además, se analiza la emisión de radiación gravitatoria mediante funciones de onda factorizadas y se estudia la fase de relajación del sistema mediante los modos cuasinormales. El trabajo combina herramientas analíticas y perturbativas con fundamentos geométricos para ofrecer una visión coherente del proceso completo de fusión binaria.

2. Abstract

This work studies the dynamics of compact binary systems within the framework of general relativity, with a special focus on their application in modeling gravitational wave signals. The Effective One Body (EOB) formalism is introduced as a unified framework to describe the phases of black hole coalescence: inspiral, plunge, merger, and ringdown. Starting from the dynamics of a test particle in the Schwarzschild metric, an effective model for the two-body problem is constructed, incorporating post-Newtonian corrections and strong-field relativistic effects. Additionally, the emission of gravitational radiation is analyzed through factorized waveform models, and the system's relaxation is studied using quasinormal modes. This work combines analytical and perturbative tools with geometric foundations to provide a consistent description of the full binary merger process.

3. Introducción a la gravitación

A lo largo de este apartado voy a desarrollar los conceptos fundamentales necesarios para comprender la formulación geométrica de la gravitación en el marco de la relatividad general. Para ello, seguiré de forma estructurada las ideas y el enfoque expuesto en el libro de S.M.Carroll [4], introduciré de manera progresiva los elementos matemáticos esenciales que construyen la teoría gravitatoria que serán necesarios para presentar el modelo EOB.

Una variedad es el escenario en el que se desarrolla la física del espacio-tiempo, proporcionando la estructura matemática para describir la geometría y la curvatura inducida por la gravedad. Toda esta información viene intrínsecamente en la métrica, un tensor 2 veces covariante y 0 veces contravariante definido como $g_{\mu\nu}$. Es un tensor no degenerado, lo que implica que su determinante es distinto de cero y por tanto existe una métrica inversa $g^{\lambda\sigma}$, que cumple

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = g_{\alpha\nu}g^{\mu\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1)$$

La métrica es un elemento fundamental en la teoría ya que nos aporta la noción de pasado y futuro, nos da la capacidad de definir distancias y tiempo propio, determina la distancia más corta entre dos puntos y por tanto el movimiento de las partículas de prueba, reemplaza al campo gravitatorio newtoniano ϕ , proporciona una noción de sistema de referencia localmente inercial, determina la causalidad imponiendo que las señales no pueden viajar más rápido que la velocidad de la luz, reemplaza el producto escalar y además se utiliza para subir y bajar índices.

El elemento diferencial de línea en relatividad general se expresa utilizando la métrica de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \quad (2)$$

Es necesario definir una nueva derivada capaz de derivar tensores de forma coherente con la curvatura del espacio tiempo. Esta derivada se denomina derivada covariante y esá definida como

$$\nabla_{\nu} = \partial_{\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}. \quad (3)$$

La derivada covariante es una aplicación de un campo tensorial k veces covariante y l veces contravariante a otro campo tensorial k+1 veces covariante y l veces contravariante. Mejora a la derivada parcial ∂_{ν} ya que pasa a transformarse correctamente como un tensor.

Cumple la propiedad de linealidad y la regla del producto de Leibniz

$$\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S, \quad (4)$$

$$\nabla(T \times S) = (\nabla T) \times S + T \times (\nabla S). \quad (5)$$

La existencia de la métrica define una única conexión compatible. Una conexión es una estructura matemática que permite definir como se transportan los vectores sobre la variedad de forma coherente. La única conexión compatible con la métrica es la de Christoffel, representada con los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ y definida como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\nu}g_{\sigma\mu} + \partial_{\mu}g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (6)$$

De la conexión de Christoffel deducimos que

$$\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0. \quad (7)$$

La torsión de una conexión mide la falta de simetría del operador de derivación covariante al intercambiar dos objetos. El símbolo de Christoffel, al ser simétrico en sus dos índices inferiores,

define una conexi3n sin torsi3n.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda. \quad (8)$$

Un objeto, por ejemplo, un tensor, se transporta paralelamente cuando su derivada direccional covariante se anula. Esto se interpreta como que se mantiene constante a lo largo de un camino espec3fico.

En particular, la derivada direccional covariante dada una curva $x^\mu(\lambda)$ es

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu, \quad (9)$$

De esta forma, una geod3sica es una curva en la que su vector tangente se transporta paralelamente, por lo que cumple

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (10)$$

lo que conduce a la ecuaci3n de las geod3sicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (11)$$

El principal uso de las geod3sicas en relatividad general se debe a que son las curvas por las que se mueven las particulas de prueba, siendo estas, cuerpos que se mueven sin interferir en la geometr3a del sistema. En el espacio plano las curvas que cumplen la ecuaci3n de las geod3sicas son las rectas.

El tensor de curvatura de Riemann ofrece una descripci3n local de la curvatura. Voy a obtenerlo realizando el conmutador de dos derivadas covariantes, es decir la diferencia entre transportar paralelamente a lo largo de una curva cerrada un objeto en una direcci3n y posteriormente transportarlo en la misma curva en el orden inverso, para demostrarlo lo har3 actuar en este caso sobre un vector, es decir

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) = \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) = \\ &= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho. \end{aligned} \quad (12)$$

Del resultado anterior obtenido renombrando 3ndices y eliminando los t3rminos que se anulan al antisimetrizar, reconozco que el segundo t3rmino es el tensor de torsi3n, que para la conexi3n de Christoffel se anula

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda = 0. \quad (13)$$

Llego por lo tanto a la conclusi3n que el t3rmino entre par3ntesis debe ser un tensor y es precisamente el tensor de Riemann

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (14)$$

El tensor de Riemann cumple las siguientes propiedades:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad (15)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad (16)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (17)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0, \quad (18)$$

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0. \quad (19)$$

De las que se puede deducir la segunda identidad de Bianchi:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0. \quad (20)$$

El tensor de Riemann contraído en dos de sus índices es el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad (21)$$

mientras que la traza del tensor de Ricci es el escalar de Ricci o también denominada curvatura escalar:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}, \quad (22)$$

La contracción de la segunda Identidad de Bianchi permite obtener la siguiente expresión

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} - \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R = 0, \quad (23)$$

la que me permite definir convenientemente el tensor de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (24)$$

que es simétrico sin divergencia, es decir

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0. \quad (25)$$

Una vez definido el tensor de Einstein, que encapsula de forma geométrica la curvatura del espacio-tiempo y su divergencia nula, estaré en condiciones de abordar su papel en la formulación dinámica de la relatividad general. A partir de este objeto tensorial, se establece el vínculo profundo entre la geometría y la materia, por medio de la ecuación de Einstein, permitiendo interpretar la gravedad como la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo inducida por la presencia de energía y momento. La concepción de la gravedad como una fuerza queda descartada por el principio de equivalencia de Einstein que explica como los efectos de un campo gravitatorio pueden eliminarse localmente si elegimos correctamente un sistema de referencia inercial.

Mi objetivo a continuación será obtener la ecuación de Einstein. Voy a utilizar dos métodos diferentes para definirla.

En el primer análisis, reflejaré en el límite Newtoniano una descripción de la gravedad a partir de las ecuaciones de Einstein utilizando únicamente argumentos de geometría diferencial.

El primer paso es escribir las leyes físicas en el espacio plano, a continuación, las escribiremos de forma tensorial, para que se comporten adecuadamente al hacer transformaciones entre sistemas de referencia. Finalmente probaremos que son válidas para el espacio curvo y que describen correctamente la gravedad.

Empezaré analizando una partícula libre que cumple la ecuación de las geodésicas, junto con la conservación del tensor Energía momento

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (26)$$

En el límite Newtoniano las partículas se mueven despacio con respecto a la velocidad de la luz, es decir

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tau} \ll \frac{\partial t}{\partial \tau} . \quad (27)$$

Estas consideraciones permiten escribir la métrica como una perturbación del espacio plano, de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (28)$$

Junto con su inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} , \quad (29)$$

siendo $\eta_{\mu\nu}$ la métrica del espacio de Minkowski y la perturbación débil

$$h_{\mu\nu} \ll 1 . \quad (30)$$

Con estas suposiciones, si además considero que el campo es estático, es decir

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 , \quad (31)$$

la ecuación de las geodésicas, tomando de parámetro afín el tiempo propio, queda

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 , \quad (32)$$

Quedándome a primer orden en la perturbación

$$\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} , \quad (33)$$

Por lo tanto, obtengo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} . \quad (34)$$

Usando $\partial_0 h_{00} = 0$ la componente temporal queda

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 . \quad (35)$$

Las componentes espaciales, volviendo al tiempo coordenado t van a ser

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} , \quad (36)$$

comparando el resultado con la aceleración Newtoniana llegamos a

$$h_{00} = -2\phi , \quad (37)$$

Por tanto la componente "00" de la métrica es

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) , \quad (38)$$

siendo ϕ el campo escalar gravitatorio, encontrando por consiguiente una relación entre el campo escalar gravitatorio y la métrica. Ahora deduciré la ecuación de Einstein por analogía con la ecuación de Poisson en el límite Newtoniano, es decir

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho , \quad (39)$$

En la parte izquierda tengo segundas derivadas de la métrica y en la parte derecha se encuentra

la distribución de masa. Ya que el tensor de Einstein está descrito con segundas derivadas de la métrica y el tensor energía momento define precisamente la distribución de masa, se propone la siguiente ecuación

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} , \quad (40)$$

Conociendo que las trazas son

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -R , \quad (41)$$

$$kg^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = kT , \quad (42)$$

Obtengo

$$R = -kT , \quad (43)$$

llegando a la siguiente relación

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (44)$$

Veamos ahora como se comporta para un fluido perfecto que cumple

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} . \quad (45)$$

Cuando las partículas se mueven despacio en comparación a la velocidad de la luz, $p = 0$ y si nos encontramos en el sistema de referencia centro de masas, deducimos que

$$U^\mu = U^0 , \quad (46)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que

$$T_{00} = \rho , \quad (47)$$

$$T = -\rho , \quad (48)$$

$$R_{00} = \rho . \quad (49)$$

Recuperando el tensor de Riemann que se expresa de la siguiente manera en función de las componentes de la métrica a primer orden en la perturbación

$$R_{00} = R_{0\lambda 0}^\lambda = R_{0i0}^i = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} , \quad (50)$$

Comparando el resultado con la ecuación de Poisson (39), obtengo el siguiente valor para la constante

$$k = 8\pi G . \quad (51)$$

De los resultados anteriores surge la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (52)$$

La otra alternativa para obtener la ecuacion de Einstein será a partir del principio de mínima acción.

La acción de Hilbert–Einstein surge como la formulación más simple y natural para una teoría

de gravedad que conduce a las ecuaciones de Einstein en el vacío. Requiere que la acción sea invariante bajo transformaciones generales de coordenadas, lo cual impone que el volumen de integración adopte la forma invariante $\sqrt{-g}d^n x$. La información sobre la curvatura del espacio-tiempo se introduce mediante el escalar de Ricci R , un escalar adecuado ya que se transforma covariantemente y depende de la métrica y sus derivadas hasta segundo orden. Este carácter de segundo orden es esencial, ya que las derivadas primeras de la métrica pueden anularse en un punto mediante una transformación de coordenadas por el principio de equivalencia, sin embargo, las derivadas segundas contienen la información física sobre la curvatura. Así, la acción de Hilbert-Einstein está dada por

$$S_H = \int d^n x R \sqrt{-g}. \quad (53)$$

Como resultado, la acción construida es la más sencilla que respeta la covariancia general y que, al ser variada con respecto a la métrica, conduce directamente a las ecuaciones de campo de la relatividad general.

Voy a demostrarlo variando la acción.

$$\delta S_H = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^n x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^n x R \delta \sqrt{-g}. \quad (54)$$

Quedándome a primer orden en las perturbaciones, la primera integral es proporcional a la variación del tensor de Ricci y toma la forma

$$\int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\lambda (\delta g^{\sigma\lambda})]. \quad (55)$$

Así, usando el teorema de Stokes observo que esta integral es un término de borde. Para este análisis voy a considerar que las variaciones de la métrica tienden a cero lo suficientemente rápido en el infinito por lo que la integral se anula.

Es importante remarcar que esta aproximación impone que en el infinito los términos de borde no dependen de las derivadas de las variaciones de la métrica, en general, esto no es cierto por lo que para un estudio más preciso sería necesario añadir términos de superficie a la acción de Hilbert que cancelen exactamente los términos de frontera.

La segunda integral ya está en la forma deseada, en función de la variación de nuestra variable dinámica, la métrica.

Para la tercera integral voy a utilizar la siguiente propiedad de las matrices:

$$\frac{1}{\det(M)} \delta(\det(M)) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M). \quad (56)$$

Por lo tanto, conociendo que $\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} \delta g^{\rho\sigma}$, queda

$$\int d^n x R \delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \int d^n x R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (57)$$

Finalmente la variación total de la acción es

$$\delta S_H = \int d^n x \sqrt{-g} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}, \quad (58)$$

por lo tanto utilizando el principio de mínima acción obtengo la ecuación de Einstein en el vacío

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta S_H = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (59)$$

Fuera del vacío será necesaria añadir un nuevo término a la acción S_M que de cuenta de la masa y normalizar la acción de Hilbert.

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M . \quad (60)$$

Donde utilizando el principio de mínima acción obtengo.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 . \quad (61)$$

Siendo el tensor energía momento:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (62)$$

Finalmente tengo la ecuación de Einstein en presencia de materia.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (63)$$

4. Ondas gravitatorias

En esta sección introduciré una de las soluciones más interesantes de la teoría de Relatividad General, llamada, ondas gravitacionales y sus propiedades más importantes.

Las ondas gravitatorias son perturbaciones dinámicas del espacio-tiempo, por lo que voy a interpretar la métrica $g_{\mu\nu}$ en su forma perturbativa. En este análisis consideraré que la perturbación es débil, pero no estática. Además no pondré límite a la velocidad de las partículas de prueba. Así, bajo las anteriores condiciones, los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann, así como también el tensor y el escalar de Ricci toman la forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) , \quad (64)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma}) , \quad (65)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) , \quad (66)$$

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h . \quad (67)$$

La descripción de la métrica no es única, esto es debido a la simetría gauge presente en la teoría, tal que

$$h_{\mu\nu}^\epsilon = h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_X \eta_{\mu\nu} , \quad (68)$$

siendo $\mathcal{L}_X$ la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial X_μ . Bajo estas transformaciones infinitesimales de coordenadas, la curvatura se mantiene invariante $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

Si analizo los grados de libertad puedo ver que el tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes, aunque no todas se van a corresponder con grados de libertad efectivos debido a la simetría gauge. Para deducir cuales van a ser estos grados de libertad voy a estudiar el tensor descomponiéndolo de acuerdo con las propiedades de transformación bajo rotaciones espaciales. La componente 00 se transforma como un escalar bajo rotaciones

$$h_{00} = -2\phi , \quad (69)$$

en cambio, la componente 0i se transforma respectivamente como un 3-vector

$$h_{0i} = h_{i0} = w_i , \quad (70)$$

y las componentes ij como un tensor espacial.

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij}, \quad (71)$$

siendo Ψ la traza

$$\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}, \quad (72)$$

y s_{ij} la parte libre de traza

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij}). \quad (73)$$

De esta forma considerando el caso en el vacío, en dónde no tengo tensor energía-momento, la componente 00 del tensor de Einstein es

$$G_{00} = 2\nabla^2\Psi + \partial_k\partial_l s^{kl} = 0, \quad (74)$$

por lo que

$$\nabla^2\Psi = -\frac{1}{2}\partial_k\partial_l s^{kl}, \quad (75)$$

En esta ecuación se puede observar que no hay grados de libertad propagantes ya que no hay derivadas segundas con respecto del tiempo, el potencial Ψ se puede determinar completamente conociendo la forma del tensor s y los términos de borde.

Por otra parte, las componentes $i0$ quedan

$$G_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\Psi + \partial_0\partial_k s_j^k = 0. \quad (76)$$

En esta ecuación deduzco de la misma manera, que tampoco hay grados de libertad propagandose. Por último para las componentes ij tengo

$$G_{ij} = (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\phi - \Psi) + \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2\Psi - \square s_{ij} + 2\partial_k\partial_{(i}w_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl}. \quad (77)$$

El término $\square s_{ij}$ esta gobernado por la función de onda, lo que indica que tiene grados de libertad propagantes. Con el fin de encontrar la solución a esta ecuación, se puede seleccionar el gauge Transverse-Traceless (TT) para eliminar todas las componentes no físicas del tensor de perturbación $h_{\mu\nu}$, dejando así solo las partes que realmente se propagan como ondas gravitatorias.

Las condiciones que definen este gauge son:

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \quad (78)$$

la condición para que sea un tensor espacial

$$h_{0\nu}^{TT} = 0, \quad (79)$$

la condición que implica que sea libre de traza

$$\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \quad (80)$$

y la de transversalidad

$$\partial^\mu h_{\mu\nu}^{TT} = 0. \quad (81)$$

Una vez fijado el gauge, propongo la siguiente solución de onda

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (82)$$

siendo $C_{\mu\nu}$ un tensor (0,2) espacial, transverso y libre de traza.

Si a continuación le aplico el operador D'Álambertiano $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ me queda

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = -k_\sigma k^\sigma h_{\mu\nu}^{TT} = 0. \quad (83)$$

Con este resultado llego a que $k_\sigma k^\sigma = 0$, lo que me permite saber que el vector de onda es de tipo nulo, es decir las ondas gravitatorias se mueven a la velocidad de la luz.

Voy a considerar el vector de onda

$$k^\mu = (\omega, k^1, k^2, k^3), \quad (84)$$

en el cual ω es la frecuencia de la onda. De la condición de transversalidad

$$\partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} = 0, \quad (85)$$

puedo deducir que $C^{\mu\nu} k_\mu = 0$, lo que implica que el vector de onda y la amplitud son ortogonales, por lo tanto, si considero que el vector de onda se mueve en la dirección z, el tensor amplitud será:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (86)$$

Las componentes h_+ y $h_\times$ son los dos grados de libertad físicos de la perturbación del espacio-tiempo. Estas representan cómo una onda gravitatoria deforma el espacio perpendicular a su dirección de propagación, h_+ produce elongaciones y compresiones alternadas a lo largo de dos ejes x e y, mientras $h_\times$ genera deformaciones rotadas 45 grados respecto a las anteriores.

Puedo relacionar las propiedades de transformación del campo bajo rotaciones con el espín de las partículas que se espera obtener cuantizando el campo. Los grados de libertad físicos que acabo de describir son invariantes bajo rotaciones de 180° , lo que determina que la partícula que media la interacción gravitatoria tendría que tener espín 2. Esta partícula se llama gravitón y aun no se ha detectado.

La detección directa de ondas gravitatorias se realiza mediante interferómetros láser de muy alta precisión, como LIGO y Virgo, que operan bajo el principio de medir diferencias ínfimas en la distancia entre dos puntos debido a la perturbación del espacio-tiempo que provocan las ondas gravitatorias.

Los detectores funcionan con un interferómetro de Michelson. El interferómetro de Michelson divide un haz láser coherente en dos haces perpendiculares mediante un divisor de haz. Estos haces recorren dos brazos del interferómetro, rebotan en espejos suspendidos y luego se recombinan en el punto de origen. Si ambos brazos tienen la misma longitud, los haces vuelven en fase y producen interferencia constructiva o destructiva dependiendo de la diferencia de camino óptico. Cuando una onda gravitatoria pasa por el detector, deforma el espacio-tiempo de forma diferente en los dos brazos. Uno se alarga y el otro se acorta alternativamente, modificando la fase relativa entre los haces. Este cambio produce un patrón de interferencia variable que puede ser detectado con extrema precisión, permitiendo inferir la presencia de la onda y extraer su amplitud y frecuencia.

Puedo aproximar la siguiente expresión integrando las distancias a primer orden en la perturbación

$$\frac{\Delta L}{L} \approx h, \quad (87)$$

por lo que la detección de ondas gravitatorias exige una sensibilidad extrema, ya que las señales esperadas en la Tierra tienen amplitudes del orden de

$$h \approx 10^{-21}, \quad (88)$$

Por lo tanto, para un interferómetro con brazos de $L = 4\text{km}$ como los de LIGO, implica medir variaciones en la longitud de los brazos del interferómetro del orden

$$\Delta L \approx 10^{-18}\text{m}, \quad (89)$$

una distancia menor que la del radio de un protón.

Para lograr esta precisión, los interferómetros como LIGO y Virgo emplean tecnologías avanzadas que mitigan diversas fuentes de ruido. El ruido sísmico se reduce mediante suspensiones en múltiples etapas de aislamiento, como péndulos y sistemas de amortiguación activa. El ruido térmico se controla con materiales de baja disipación y sistemas criogénicos, mientras que el ruido cuántico, como el disparo de fotones y la presión de radiación, se atenúa utilizando láseres de alta potencia, cavidades ópticas resonantes y técnicas como la luz exprimida. Además, se implementan sistemas ópticos como las cavidades de Fabry–Pérot en los brazos para aumentar la longitud efectiva del trayecto óptico, junto con esquemas de reciclaje de potencia y de señal que optimizan la respuesta del detector.

Cuando una onda gravitatoria incide sobre un detector interferométrico, no se mide directamente el tensor de perturbación $h_{\mu\nu}$, sino su efecto proyectado sobre la geometría del interferómetro. En el gauge transversal y libre de traza (TT), las únicas componentes físicas de la onda son las polarizaciones h_+ y $h_\times$, que describen deformaciones en direcciones ortogonales al eje de propagación. El interferómetro responde a estas perturbaciones mediante una combinación lineal de ambas, ponderadas con funciones de respuesta o de antena $F_+(\theta, \phi, \psi)$ y $F_\times(\theta, \phi, \psi)$ que dependen de la dirección de llegada de la onda θ, ϕ y la orientación del detector ψ .

$$h(t) = F_+ h_+ + F_\times h_\times \quad (90)$$

Este formalismo, introducido originalmente en [18], permite describir cómo los patrones de antena determinan la sensibilidad del detector a ondas provenientes de distintas regiones del cielo y con diferentes orientaciones de polarización. Gracias a esta caracterización, es posible combinar la información de múltiples detectores para reconstruir la ubicación y geometría de la fuente gravitacional.

5. Límite Post-Newtoniano

Ya habiendo introducido las soluciones de ondas gravitatorias y antes de describir el formalismo EOB en detalle, resulta útil presentar brevemente el enfoque post-newtoniano sobre el que se apoya en sus primeras fases, en concreto en la fase denominada inspiral en el que tenemos un sistema binario de dos agujeros negros que rotan entre sí.

El método de aproximación Post-Newtoniano (PN) permite describir la dinámica gravitacional, como una expansión en serie de potencias de parámetro u . Este parámetro se puede expresar de diferentes maneras.

$$u = \frac{GM}{r} = \frac{v}{c} = (Mw)^{\frac{2}{3}}, \quad (91)$$

siendo M la masa total del sistema, r la distancia entre los dos cuerpos del sistema binario y v la velocidad típica del sistema. Obtengo la tercera igualdad mediante la tercera Ley de Kepler en la cual w es la frecuencia angular. El límite PN es válido bajo ciertas condiciones, si expreso la métrica como una perturbación de la métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (92)$$

la perturbación es pequeña por lo que estamos en el límite de campo débil $h_{\mu\nu} \ll 1$ en donde la velocidad del sistema es pequeña con respecto a la velocidad de la luz.

$$\frac{v}{c} \ll 1. \quad (93)$$

Estas dos condiciones no son independientes. En el ejemplo de dos agujeros negros rotantes, mientras permanecen lo suficientemente alejados, el campo gravitatorio es débil y la aproximación postnewtoniana resulta válida. Sin embargo, a medida que se aproximan, la intensidad del campo gravitatorio aumenta significativamente, lo que provoca una aceleración progresiva del sistema justo antes del colapso. En ese régimen, la aproximación postnewtoniana pierde precisión, al quedar fuera de su dominio de validez.

Otra condición para una buena aproximación PN es la separación de las escalas. El tamaño de los cuerpos debe ser mucho menor que el tamaño de la órbita, además la escala donde se propagan las ondas gravitatorias fuera de la órbita esta desacoplada con la escala orbital, esta aproximación es valida cuando la longitud de onda de las ondas gravitatorias es mucho mayor que la escala orbital. Al ser la velocidad del sistema lenta con respecto a la velocidad de la luz se puede expresar la siguiente desigualdad con respecto a las variaciones de la perturbación

$$\frac{1}{c} \partial_t h_{\mu\nu} \ll \partial_x h_{\mu\nu}. \quad (94)$$

Bajo las anteriores condiciones podré utilizar la expansión PN en la escala orbital, lo que definiré como límite de zona cercana.

En el apéndice A voy a analizar la aproximación Post-Newtoniana para sistemas binarios con algo más de profundidad, concretamente para el primer orden del desarrollo, en la que ya veré efectos físicos reseñables como es el caso de la precesión del perihelio de Mercurio. Con el objetivo de no desvertebrar el hilo argumentativo que estoy siguiendo para presentar el modelo EOB, llevaré la explicación a un apéndice y en las siguientes secciones presentaré directamente los resultados correctamente referenciados.

6. De la dinámica relativista al modelo EOB

En esta sección se construyen los elementos fundamentales que permiten transitar desde la descripción relativista de una partícula de prueba en un espacio-tiempo curvado hasta la formulación efectiva del problema de dos cuerpos en relatividad general. Este desarrollo sirve como base conceptual para entender cómo el formalismo EOB reinterpreta la dinámica orbital.

6.1. Dinámica de la partícula de prueba

Para comprender el origen del modelo EOB, comenzaré revisando la dinámica relativista de una partícula de prueba en un fondo gravitatorio fijo.

Empezaré aproximando la masa como puntual y no rotante. La acción para una masa puntual esta dada por

$$S = -m \int d\tau = - \int d\lambda m \sqrt{-g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu}. \quad (95)$$

siendo τ el tiempo propio, λ una parametrización cualquiera, U^μ la cuatriveLOCIDAD

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (96)$$

y L el Lagrangiano que viene dado por

$$L = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} \quad (97)$$

El principio de mínima acción, $\delta S = 0$, me permite obtener las ecuaciones de movimiento

$$\frac{D}{d\lambda}\left(\frac{mU_\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu}}\right) = 0. \quad (98)$$

El cuatrimomento de la masa puntual que se transporta paralelamente a lo largo de las geodésica viene dado por

$$p_\mu = \frac{dL}{dU^\mu} = \frac{mU_\mu}{\sqrt{-g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu}}. \quad (99)$$

Observo que con esta definición el lagrangiano toma la forma

$$L = p_\mu U^\mu, \quad (100)$$

lo que permite obtener el Hamiltoniano por medio de una transformación de Legendre

$$H = p_\mu U^\mu - L = 0. \quad (101)$$

El sistema es invariante bajo reparametrizaciones del parámetro λ por lo que tiene una libertad gauge. Además toda la dinámica del sistema queda recogida en la restricción que impone el Hamiltoniano.

De [99](#) vemos como hemos obtenido la siguiente aplicación no invertible

$$U^\mu \longrightarrow p_\mu \quad (102)$$

La utilidad de esta aplicación subyace en el hecho de que el cuatrimomento se puede contraer usando cualquier parámetro, sin embargo para la cuatriveLOCIDAD solo conozco el resultado para el tiempo propio

$$p_\mu p^\mu = -m^2 \quad (103)$$

Esta restricción se denomina cascarón de masa y queda descrita en ella toda la dinámica del sistema.

6.2. Movimiento partícula de prueba en la métrica de Schwarzschild

Como primer paso hacia la formulación efectiva, analizaré el movimiento de una partícula de prueba en un fondo de Schwarzschild, lo que me permitirá identificar estructuras dinámicas relevantes que más adelante serán reinterpretadas en el contexto de un sistema gravitatorio de dos cuerpos. Las soluciones relevantes sobre agujeros negros, entre ellos los de Schwarzschild se encuentran en el Apéndice B y las demostraciones detalladas en la referencia [\[4\]](#)

La partícula que voy a considerar tiene una masa μ y coordenadas $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Supondré que se mueve en torno al agujero negro en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, la elección de gauge escogida será tal que $\lambda = t$, donde t es el tiempo coordenado.

Con estas consideraciones las magnitudes relevantes quedan de la forma

$$U^0 = \frac{dt}{d\lambda} = 1, \quad (104)$$

$$L = p_\mu U^\mu = p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} + p_0. \quad (105)$$

Dado que el lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada temporal t , esta es cíclica. Por tanto, su momento conjugado se conserva. En particular, en el caso de la métrica de Sch-

warzschild, este momento se identifica con la energía conservada del sistema y por tanto con el Hamiltoniano.

$$H = -p_0 \quad (106)$$

La condición del cascarón de masa queda

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -\mu^2. \quad (107)$$

El elemento diferencial de camino de la métrica de Schwarzschild está dado por

$$ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = A dt^2 - \frac{dr^2}{A} - r^2 d\phi^2, \quad (108)$$

donde A es (para G=c=1)

$$A = \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (109)$$

Ahora, si llamo $L = p_\phi$ al momento angular, puedo reescribir el cascarón de masa como

$$-\frac{1}{A} H^2 + A p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} = -\mu^2, \quad (110)$$

y despejando obtengo el Hamiltoniano

$$H = \sqrt{A(\mu^2 + A p_r^2 + \frac{L^2}{r^2})}. \quad (111)$$

Por consiguiente, la acción del sistema es

$$S = \int dt (p_r \dot{r} + L \dot{\phi} - H), \quad (112)$$

y sus ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dH}{dp_r}, \quad (113)$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dH}{dL}, \quad (114)$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{dH}{dr}, \quad (115)$$

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{dH}{d\phi} = 0. \quad (116)$$

La ultima igualdad me dice que el momento angular es una constante del movimiento, por lo que podemos afirmar que, hasta ahora, estoy en un sistema conservativo sin perdidas por emisión de ondas gravitatorias.

En el caso particular en el que considero que las órbitas son circulares, tengo que

$$p_r = 0, \quad (117)$$

$$r = cte, \quad (118)$$

$$\frac{dH}{dr} = 0 \quad (119)$$

El Hamiltoniano toma su valor mínimo en el caso de una órbita circular, lo que equivale a

$$\frac{dH^2}{dr} = 0 \quad (120)$$

cuando $H = 0$, ya que en ese caso el mínimo del Hamiltoniano se corresponde con el mínimo de su cuadrado. No obstante, incluso cuando $H \neq 0$, estoy multiplicando la derivada del Hamiltoniano por H por lo que la forma funcional de la condición no se altera. En mi caso particular, trabajar con H^2 resulta conveniente porque elimina la raíz cuadrada y simplifica la expresión de manera que

$$H^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\mu^2 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (121)$$

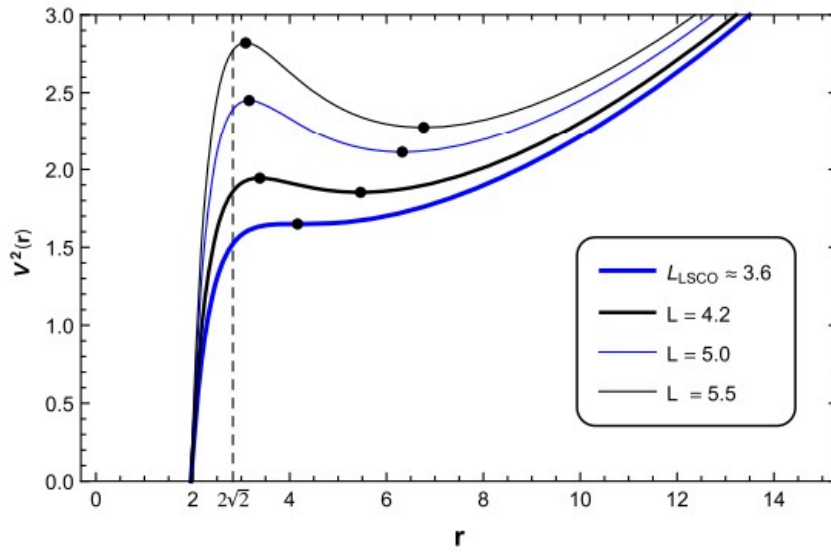


Figura 1: Potencial efectivo $V^2(r)$ para diferentes valores de momento angular L . Adaptado de [12].

De la ecuación anterior puedo ver que cuando r tiende a infinito H^2 tiende a μ^2 .

Tengo un punto de equilibrio estable que equivale al radio para la órbita circular.

Existe una barrera de potencial en la que la altura depende del momento angular. A diferencia del caso Newtoniano el efecto relativista implica que la barrera tiene un máximo y la función desciende hasta hacerse cero en $r=2M$, es decir en el horizonte de sucesos del agujero negro.

Para r menor que $2M$ la partícula se encontraría dentro del agujero negro causalmente desconectada del exterior, por lo que aunque la función se hace menos infinito ya no describe ningún escenario físico. En este caso ya no tengo un sistema conservativo, ya que L va disminuyendo debido a la emisión de ondas gravitatorias. Se observa como la barrera pierde altura y el máximo se desplaza hacia la derecha. Simultáneamente la órbita circular estable lo hace hacia la izquierda adiabáticamente.

Ambos puntos coinciden en un valor de $r = 6M$ en lo que se denomina Última órbita estable (LSO). Posteriormente la partícula cae en el agujero negro puesto que la gravedad vence al momento angular.

En la figura se representa el potencial efectivo habitual en el análisis de las geodésicas en la métrica de Schwarzschild. En este trabajo hemos utilizado una notación alternativa basada en el formalismo hamiltoniano, en la que H^2 cumple un papel análogo. Ambas funciones describen la energía total cuadrada del sistema en función del radio y del momento angular, y comparten los mismos puntos críticos, los mínimos corresponden a órbitas circulares estables, los máximos a

órbitas inestables, y la coalescencia de ambos en un punto, marca la última órbita circular estable (LSO). Por lo tanto, el análisis cualitativo y dinámico extraído de la figura es directamente aplicable a mi descripción.

Si se estudia el comportamiento de los fotones, con masa igual a cero, veremos como solo hay una órbita circular conocida como anillo de luz, la que se encuentra en $r = 3M$ y es inestable. Para valores del radio menores los fotones caen al agujero negro y para valores mayores tenemos un fenómeno de scattering en el que la presencia del agujero negro cambia la trayectoria del foton pero este no cae en él.

6.3. El problema efectivo de dos cuerpos

A partir de la dinámica de una partícula en un fondo fijo, estoy en condiciones de reinterpretar el problema de dos cuerpos en relatividad general como un sistema efectivo equivalente, en el que una partícula de masa reducida se mueve en una métrica modificada que incorpora los efectos mutuos de interacción gravitatoria.

En el sistema binario que estamos describiendo tenemos que para un observador inercial, ambos cuerpos de masa m_1 y m_2 orbitan en torno al centro de masas con momentos p_1 y p_2 . Mi objetivo consiste en realizar una transformacion de las variables, que describan un nuevo sistema equivalente, en el que tenga una masa total definida como M que crea un campo gravitatorio fijo y una masa efectiva μ para la partícula de prueba que orbita en torno a M

$$M = m_1 + m_2, \quad (122)$$

y

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (123)$$

. Respectivamente el momento de la masa total será

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte, \quad (124)$$

tal que en el sistema de referencia centro de masas

$$\vec{P} = 0, \quad (125)$$

por otro parte, el momento relativo, que se corresponde al de la masa efectiva en función de los momentos individuales es

$$\vec{p} = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2. \quad (126)$$

Tal como he descrito en secciones anteriores, toda la dinámica del sistema está encapsulada en la contracción de masa

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2, \quad (127)$$

por lo que voy a mapear la contracción de masa desde el sistema de dos cuerpos al equivalente de un cuerpo. Asumiré de momento que estamos en un espacio-tiempo plano y en el sistema de referencia centro de masas. La contracción de masa para los momentos individuales es

$$p_1^2 = -m_1^2, \quad (128)$$

$$p_2^2 = -m_2^2. \quad (129)$$

A continuación, introduciré una definición para el momento de la masa efectiva.

$$p^\mu = \frac{1}{M} (-p_1 \cdot p_2, P^0 \vec{p}_1) , \quad (130)$$

con lo que se puede demostrar que al contraerlo se obtiene la masa efectiva al cuadrado, cumpliendo por tanto con la condición del cascarón de masa.

$$p_\mu p^\mu = -\mu^2 , \quad (131)$$

Con esta definición voy a calcular ahora la contracción de masa para el momento del centro de masas P^μ

$$P^\mu P_\mu = -M^2 [1 + 2\nu (-\frac{p_0}{\mu} - 1)] \quad (132)$$

Observo que para describir correctamente la dinámica, es necesario corregir la masa invariante M con un parámetro ν definido como ratio de simetría de masas.

$$\nu = \frac{\mu}{M} . \quad (133)$$

Conociendo ya las restricciones de masa para el sistema de un cuerpo vamos a analizar ahora la energía. Conozco que el Hamiltoniano real del sistema binario es

$$H = -P_0 \quad (134)$$

ya que sale de sumar las componentes temporales de las masas individuales

$$P_0 = p_{01} + p_{02} , \quad (135)$$

por otro lado tendré que la energía efectiva será

$$H_e = -p_0 . \quad (136)$$

Mi objetivo es mapear la energía total a la energía efectiva utilizando [132](#)[134](#) [136](#)

$$H = \sqrt{M^2 [1 + 2\nu (\frac{H_e}{\mu} - 1)] + \vec{P}^2} . \quad (137)$$

Aquí, se han despreciado los efectos de retroceso los cuales surgen debido a que la emisión de ondas gravitatorias no son necesariamente simétricas bajo ciertas condiciones y pueden provocar un movimiento total del sistema que no anularía $\vec{P}$.

7. Modelo EOB

El modelo Effective One Body (EOB) surge para describir de forma unificada y coherente todas las fases de la coalescencia de un sistema binario compacto, en nuestro caso nos centraremos en la coalescencia de dos agujeros negros. La espiralización inicial (inspiral), el colapso de la órbita (plunge), la fusión (merger) y la relajación final del agujero negro resultante hasta su fase estacionaria (ringdown). El modelo nos permite obtener predicciones precisas del sistema a partir de las ondas gravitatorias emitidas. Este enfoque fue desarrollado inicialmente por [?], y perfeccionado en trabajos posteriores [\[6\]](#), [\[7\]](#), [\[8\]](#), [\[13\]](#), [\[14\]](#)

7.1. Inspiral-plunge-merger

En las anteriores secciones he obtenido cual es el Hamiltoniano del sistema binario y el Hamiltoniano efectivo de la partícula de prueba pasando de un problema de dos cuerpos a un problema efectivo de un cuerpo. Mi objetivo ahora es relacionar el sistema descrito con los resultados PN.

Con el siguiente fin voy a centrarme en H_e de la partícula de prueba y voy a proponer una deformación en la métrica y en la contracción de masa. Seguire considerando que la métrica deformada o efectiva $g_{\mu\nu}^e$ es diagonal y la haré dependiente de las funciones A,D,C y Q, que a su vez dependen únicamente de r , ν y p_i .

$$g_{\mu\nu}^e dx^\mu dx^\nu = -Adt^2 + \frac{1}{AD}dr^2 + \frac{r^2}{C}(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (138)$$

$$g_{\mu\nu}^e p^\mu p^\nu + Q = -\mu^2. \quad (139)$$

Es posible realizar una transformación canónica de coordenadas que me permite fijar $C = 1$, y que Q solo dependa de p_r , que en la aproximación de órbitas circulares va a ser muy pequeño. Cabe mencionar que cuando ν tiende a cero, es decir, una masa es mucho mas grande que la otra, se recupera la métrica de Schwarzschild

El Hamiltoniano efectivo con la nueva métrica será:

$$H_e = -p_0 = \sqrt{A(\mu^2 + ADp_r^2 + \frac{L^2}{r^2} + Q)} \quad (140)$$

Que posteriormente lo introducimos en la expresión para el Hamiltoniano total del sistema binario [137](#)

Primero veré la forma de las funciones de la métrica, que llamaré potenciales EOB, con su desarrollo Post-Newtoniano obtenido en los trabajos de [5](#)[2](#)[6](#). Para la función A(r,ν), que controla la parte temporal de la métrica tengo

$$A = 1 - 2u + 2\nu u^3 + (\frac{94}{3} - \frac{41\pi^2}{32})\nu u^4, \quad (141)$$

de donde veo como el primer término corresponde a la métrica de Schwarzschild, la corrección a 2PN refleja el efecto de la interacción entre las dos masas, el término 3PN se obtiene comparando la expansión PN completa de la energía orbital con la energía efectiva EOB.

La función D afecta a la parte radial de la métrica y tiene el siguiente desarrollo

$$D = 1 + 6\nu u^2 + (52\nu - 6\nu^2)u^3, \quad (142)$$

donde aquí, el término 2PN corrige la dinámica radial y el término 3PN se obtiene para asegurar que las órbitas elípticas en el modelo EOB coincidan con los resultados de relatividad general hasta ese orden.

La función Q introduce correcciones dependientes del momento radial necesarias para describir la dinámica de dos cuerpos más allá del movimiento geodésico.

$$Q = 2(4 - 3\nu)\nu u^2 p_r^4, \quad (143)$$

donde el primer término no trivial aparece a orden 3PN y ajusta la dinámica cuando las órbitas no son circulares.

Para los tres potenciales [141](#), [142](#), [143](#) el orden 4PN contiene terminos logarítmicos complicados y describen los efectos de cola que surgen cuando las ondas gravitatorias emitidas vuelven a interactuar con el sistema.

Por otra parte, si las órbitas son circulares deduzco que $Q = 0$ y D es despreciable, por lo tanto el único potencial relevante que determina la dinámica será $A(r,\nu)$

El formalismo EOB descrito hasta ahora es completamente conservativo porque su Hamiltoniano describe la dinámica orbital de dos cuerpos bajo interacción gravitatoria, sin considerar la pérdida de energía y momento angular debida a la emisión de ondas gravitatorias.

Para extender este modelo y capturar la evolución realista de sistemas binarios compactos, es necesario introducir fuerzas de reacción radiativa en las ecuaciones de movimiento.

A partir de las ecuaciones de Hamilton deduciré la nueva forma de las ecuaciones de movimiento.

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}, \quad (144)$$

$$\omega = \dot{\phi} = \frac{dH}{dL}, \quad (145)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{dH}{dr} + f_r \quad (146)$$

$$\dot{L} = -\frac{dH}{d\phi} + f_\phi, \quad (147)$$

siendo f_r y f_ϕ las fuerzas de reacción

La pérdida de energía y de momento angular se describen mediante ecuaciones de balance que relacionan las derivadas temporales de la energía y del momento angular del sistema con los correspondientes flujos radiativos de las ondas hacia el infinito

Sin embargo, este balance no es exacto en cada instante de tiempo. La razón fundamental es que la radiación gravitatoria está ligada tanto a los cambios del sistema binario como al comportamiento del campo gravitacional cercano (no radiativo), que también almacena y libera energía durante la evolución orbital. Por este motivo, el balance de energía y momento angular se cumple únicamente en promedio sobre escalas temporales largas, por ejemplo un periodo orbital, mientras que a nivel instantáneo se introducen oscilaciones adicionales que deben ser correctamente identificadas.

Estos términos adicionales son los denominados términos de Schott, descritos en el trabajo de [1] y representan la energía y momento angular asociados al campo gravitacional cercano al sistema binario. Aunque no corresponden a radiación real que escapa al infinito, sí influyen en el balance instantáneo, ya que oscilan periódicamente durante la órbita.

De esta forma las ecuaciones de balance de energía y de momento quedan

$$\dot{E} + \dot{E}_{Schott} + F_E = 0, \quad (148)$$

$$\dot{L} + \dot{L}_{Schott} + F_L = 0. \quad (149)$$

Así, utilizando las ecuaciones de Hamilton [144], [145], [146], [147] obtengo

$$\dot{E} = \frac{dH}{dt} = \dot{r} \frac{dH}{dr} + \dot{\phi} \frac{dH}{d\phi} + \dot{p}_r \frac{dH}{dp_r} + \dot{L} \frac{dH}{dL} = \dot{r} f_r + f_\phi \dot{\phi}. \quad (150)$$

La energía de enlace e , es un parámetro adimensional que mide cuánta energía se ha utilizado para formar el sistema ligado respecto a las masas separadas en reposo.

$$e \sim \frac{E - M}{\mu}, \quad (151)$$

siendo E la energía total del sistema, M la masa total y μ la masa reducida. Su evolución está directamente relacionada con la emisión de ondas gravitatorias.

El flujo de energía F_E , también llamado luminosidad, describe la tasa de pérdida de energía del sistema debida a dicha emisión. La relación entre el flujo y la variación temporal de la energía de enlace es:

$$\mu \frac{de}{dt} = -F_E \quad (152)$$

De manera análoga, el sistema binario también pierde momento angular como consecuencia de la emisión de ondas gravitatorias. Esta pérdida se caracteriza mediante el flujo F_L , que representa la cantidad de momento angular radiado por unidad de tiempo.

Previamente he asumido en diferentes momento que la órbita es circular, esta suposición tiene una explicación física adecuada. La emisión de ondas gravitatorias hace perder momento angular al sistema tal y como he visto. Esta pérdida es mas eficiente cuanto mayor excentricidad tiene la órbita elíptica por lo que en un intervalo corto de tiempo en comparación con los tiempos típicos de la fase inspiral la órbita tiende a circularizarse, ver [15] para más detalles. Por lo tanto puedo concluir que para este modelo considerar órbitas sin excentricidad es una buena aproximación. Las ecuaciones de balance quedan de la siguiente manera

$$\dot{r}f_r + f_\phi\dot{\phi} + \dot{E}_{Schott} + F_E = 0, \quad (153)$$

$$f_\phi + \dot{L}_{Schott} + F_L = 0. \quad (154)$$

Debido a que la órbita es circular puedo observar que las fuerzas de reacción no son independientes, ya que la pérdida de momento angular provoca una disminución de la órbita y por tanto una disminución de la energía, de la misma forma que si hago el razonamiento inverso.

Las soluciones para estas fuerzas no son únicas si no que van a depender de la elección de gauge. En este caso vamos a considerar $f_r = 0$ para que sigan siendo consistentes las ecuaciones de balance y los flujos no sean cero.

Si se realiza el promedio sobre una órbita completa veo como los términos de Schott tienen derivada nula por lo que los puedo despreciar, obteniendo

$$-f_\phi = F_L = \frac{F_E}{\dot{\phi}}. \quad (155)$$

La solución de esta ecuación se puede obtener del desarrollo PN, pero sería necesario una resummación, es decir una reorganización de los términos de la perturbación con el objetivo de que siga teniendo un buen comportamiento fuera del límite de campo débil. Es necesario utilizar datos numéricos para ajustar los resultados

Debido a la dificultad de este proceso seguiré un camino alternativo que consiste en analizar como son las ondas gravitatorias obtenidas y de sus propiedades físicas obtener información sobre el sistema binario.

Las dos polarizaciones de las ondas gravitacionales se pueden expresar como un campo complejo de la siguiente forma

$$h = h_+ + ih_\times \quad (156)$$

. Dado que en la zona lejana (región de ondas) las ondas gravitatorias se propagan sobre un fondo plano, su dependencia angular puede separarse de su dependencia temporal y radial. Para ello, es natural expandir h en una base de funciones que reflejen tanto la simetría esférica como la naturaleza tensorial del campo gravitatorio. Esta base está dada por los armónicos esféricos de espín 2, donde el signo nos indica que son ondas salientes. Cada modo h_{lm} se asocia a una componente específica del momento angular radiado, y los armónicos ${}_2Y^{lm}(\theta, \phi)$ describen la distribución angular de la onda

$$h_+ + ih_\times = \sum_{m,l} h_{lm}(t) {}_2Y^{lm}(\theta, \phi). \quad (157)$$

Relacionando el flujo de energía con la amplitud de las ondas gravitatorias se llega a que

$$F_E = \frac{r^2}{16\pi} \int d\Omega \left(\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \right). \quad (158)$$

Esta expresión refleja que la energía transportada por las ondas gravitatorias es proporcional al cuadrado de la velocidad de deformación del espacio-tiempo, y se suma sobre todas las direcciones

del espacio

$$F_E = \frac{1}{16\pi} \sum_{m,l} \left| \dot{h}_{\ell m}(t) \right|^2. \quad (159)$$

Por tanto para obtener el flujo y las fuerzas de reacción que me permiten describir el sistema binario, es necesario conocer los modos h_{lm} . Estos se pueden escribir en forma de expansión PN, sin embargo, es necesario una resumación para que las series converjan en la espiral tardía, en el plunge y merger. La resumación la voy a realizar por el método de factorización. En la que los modos van a tener la siguiente forma

$$h_{lm} = h_{lm}^N \hat{h}_{lm}, \quad (160)$$

en donde el primer término lo voy a llamar Newtoniano y es la contribución principal, sin resumar. El segundo termino es el que contiene los factores que resuman la serie y esta dado por

$$\hat{h}_{lm} = S_{eff}^{lm} T_{lm} e^{i\delta_{lm}} \rho_{lm}^l. \quad (161)$$

A continuación voy a dar una breve explicación sobre cada factor y expondre los resultados obtenidos de los trabajos de [7], [8], [13]

S_{eff}^{lm} es la fuente efectiva, actúa como un puente entre la dinámica y la radiación, permitiendo que el modo refleje adecuadamente el comportamiento relativista del sistema binario relacionandolo con el Hamiltoniano efectivo. Su forma depende de si el modo es par o impar. Así, Si $l + m$ es par, entonces

$$S_{eff}^{lm} = \frac{H_e}{\mu}, \quad (162)$$

en cambio, si $l + m$ es impar

$$S_{eff}^{lm} = \frac{L}{\sqrt{u}\mu M}. \quad (163)$$

T_{lm} es conocido como factor de cola gravitacional. Este término encapsula los efectos heredados de la dispersión de las ondas gravitatorias por la curvatura del espacio-tiempo, generada por la masa total del sistema. Su origen está en la necesidad de resumar logaritmos que aparecen en los desarrollos postnewtonianos. Su forma explícita esta dada por

$$T_{lm} = \frac{\Gamma(l+1-2imHw)}{\Gamma(\ell+1)} e^{\pi m H w} [2mHw r_0]^{2imHw}, \quad (164)$$

en la que H es la masa ADM o la energía real del sistema y $r_0 = \frac{2M}{\sqrt{e}}$.

El término $e^{i\delta_{lm}}$ viene dominado por la corrección de fase δ_{lm} que se introduce para capturar desfases residuales que no están explicados por otros factores. Su origen está en el ajuste entre la señal calculada analíticamente y la onda obtenida a través de métodos numéricos o perturbativos, especialmente es importante en regímenes de campo fuerte. El desfase se expresa como una serie en torno al parámetro postnewtoniano y resulta esencial para una reconstrucción precisa de la señal de onda gravitatoria en fase.

La función ρ_{lm} representa una corrección a la amplitud de la onda gravitatoria. Esta función captura los efectos postnewtonianos que modifican la amplitud respecto a la predicción en el límite newtoniano. Se introduce para mejorar la convergencia del desarrollo postnewtoniano de la amplitud mediante resumaciones logarítmicas y racionales.

En la fase temprana del "inspiral", la dinámica binaria puede describirse con buena precisión bajo la suposición de órbitas cuasi-circulares, lo que permite tomar $p_r = 0$. Sin embargo, esta aproximación deja de ser válida en las etapas finales del inspiral, donde la pérdida acelerada de

energía provoca un aumento significativo del momento radial haciendo que la órbita se desvíe de la circularidad. Para capturar con precisión estas desviaciones en los modos, se introduce un factor correctivo conocido como Non-Quasi-Circular (NQC), que modifica las expresiones factorizadas estándar mediante un término multiplicativo f_{lm}^{NQC} . Esta corrección incorpora dependencias explícitas con el momento radial, la aceleración radial y la derivada temporal del momento angular. Se ajusta generalmente por comparación con resultados de relatividad numérica. El uso del término NQC permite modelar con mayor fidelidad la señal gravitatoria en las fases finales del inspiral y durante el plunge en la transición hacia el merger, es decir cuando supera la última órbita circular estable y el sistema colapsa.

7.2. Ringdown

Tras la fusión de dos cuerpos compactos y la formación de un agujero negro final, el sistema entra en la fase denominada ringdown. En este régimen, el agujero negro recién formado se encuentra fuera de equilibrio y emite ondas gravitatorias mientras se relaja hacia una configuración estacionaria. Esta relajación se describe de forma precisa mediante la teoría de perturbaciones de agujeros negros (Black Hole Perturbation Theory), que consiste en estudiar pequeñas desviaciones métricas sobre el fondo exacto de un agujero negro de Schwarzschild, es decir

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{Schw} + h_{\mu\nu}, \quad (165)$$

donde sigo considerando que la perturbación $h_{\mu\nu}$ es débil. Debido a la simetría esférica de fondo, que es la métrica de Schwarzschild, la perturbación de la métrica se puede descomponer de forma multipolar en armónicos esféricos. Esto me permite distinguir entre los modos de paridad impar (axiales) y los modos de paridad par (polares). Para cada tipo de paridad y para cada multipolo existe una combinación de las componentes de $h_{\mu\nu}$ que da lugar a una función escalar que llamaré función maestra $Q(r^*)$. Esta función satisface una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, es decir una ecuación de onda de tipo Schrödinger, que representa el grado de libertad físico de la perturbación para ese modo.

$$\left[\frac{d^2}{dr^{*2}} + w^2 - V_{RW/Z}(r) \right] Q(r^*) = 0. \quad (166)$$

La función maestra está expresada en coordenadas tortuga r^* definidas por

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \quad (167)$$

Esta reparametrización radial extiende la región cercana al horizonte $r = 2M$ permitiendo un tratamiento regular del comportamiento de las ondas en el horizonte y hasta el infinito.

El potencial efectivo $V_{RW/Z}$ depende de la perturbación y del primer modo, cuando la paridad es impar utilizamos el potencial de Regge-Wheeler V_{RH} definido como

$$V_{RW} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] \quad (168)$$

y cuando los modos son de paridad par el potencial de Zerilli V_Z viene dado por

$$V_Z = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{2n^2(n+1)r^3 + 6n^2Mr^2 + 18nM^2r + 18M^3}{r^3(nr + 3M)^2}, \quad (169)$$

donde

$$2n = (l-1)(l+2) \quad (170)$$

El parámetro w representa la frecuencia compleja de oscilación de la perturbación. Los resultados

están recogidos en la referencia [10]

Las soluciones físicamente relevantes para $Q(r)$ corresponden a aquellas que satisfacen condiciones de contorno puramente entrantes en el horizonte $r^* \rightarrow \infty$ y puramente salientes en el infinito $r^* \rightarrow +\infty$. Estas condiciones definen los denominados modos cuasinormales (QNM), que caracterizan la emisión de ondas gravitatorias durante la fase de ringdown.

Cada modo cuasinormal está asociado con la frecuencia compleja

$$w = w_R + w_I, \quad (171)$$

donde w_R determina la frecuencia de oscilación y w_I su amortiguamiento. Defino w_{RD} como la frecuencia del modo cuasinormal fundamental del agujero negro final, es decir la que domina la señal gravitatoria tras la fusión, es la frecuencia con menor amortiguamiento.

Para estimar el valor de la parte real de w_{RD} voy a utilizar el siguiente razonamiento, tras la fusión de los dos agujeros negros, surge un agujero negro final y una perturbación del espacio-tiempo en torno a él, gobernada por los modos cuasinormales de las ondas gravitatorias.

Supondré que esta perturbación se encuentra localizada en el anillo de luz a una distancia $r=3M$ del agujero negro, debido a que el potencial ya sea RH o Z , tiene un máximo en torno a $r=3M$, el máximo actúa como una barrera que refleja ondas ya que las perturbaciones se acumulan temporalmente en esa región antes de escapar al infinito o ser absorbidas por el agujero negro, es decir, es el lugar donde las oscilaciones cuasinormales en especial la fundamental está concentrada espacialmente.

En este análisis las perturbaciones rotan en una órbita circular de radio $3M$ con una frecuencia w . Debido a que las ondas gravitatorias se comportan como campos de espín 2, la relación entre la frecuencia angular de la órbita y la frecuencia angular del modo fundamental es

$$Re(w_{RD}) \approx 2w \quad (172)$$

Utilizando la 3ª Ley de Kepler.

$$w^2 r^3 = M, \quad (173)$$

llego al siguiente resultado,

$$Re(Mw_{RD}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0,38. \quad (174)$$

Esta aproximación concuerda notablemente bien con el resultado exacto, por lo que puedo concluir que midiendo la frecuencia del modo cuasinormal fundamental puedo conocer la masa del agujero negro de Schwarzschild.

No lo demostraré en esta sección pero es posible extender este análisis a un agujero negro rotante en la métrica de Kerr. En este caso la posición del anillo de luz va a depender del momento angular del agujero negro, y por lo tanto la frecuencia angular w_{RD} .

Tras la fusión de dos agujeros negros, he explicado que las perturbaciones tienden a concentrarse en torno al anillo de luz, que se corresponde a la única órbita circular inestable. Para continuar este análisis voy a utilizar una teoría de perturbaciones sobre geodésicas nulas.

Considero una familia de rayos de luz que pasan cerca del anillo de luz de radio r_{LR} . Dado que esta órbita es inestable, cualquier pequeña perturbación radial crecerá exponencialmente con el tiempo. Este crecimiento se describe por el exponente de Lyapunov γ , que cuantifica la inestabilidad dinámica de estas órbitas [3].

La evolución radial de un rayo ligeramente desviado del anillo de luz toma la forma:

$$r(t) = r_{LR}[1 + \epsilon \sinh(\gamma(t - t_p)) + O(\epsilon^2)], \quad (175)$$

donde ϵ representa una pequeña perturbación radial y t_p es el tiempo en el cual los rayos se encuentran más próximos al anillo de luz, es decir cuando se crea la perturbación y la amplitud de las ondas gravitatorias es máxima. Si extrapolo hacia el pasado $t < t_p$ los rayos convergen al anillo de luz. Por el contrario, si extrapolo hacia el futuro $t > t_p$ los rayos se dispersan exponencialmente hacia el horizonte o hacia el infinito.

El resto de componentes toman la forma

$$\phi = wt + O(\epsilon^2), \quad (176)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + O(\epsilon^2). \quad (177)$$

El escalar de Weyl Ψ_4 , extraído mediante el formalismo de Newman-Penrose del tensor de Weyl $C_{\rho\sigma\mu\nu}$ en [17], representa la parte radiativa del campo gravitacional en regiones alejadas de la fuente, en la zona de ondas, donde están los observatorios como LIGO, codifica la curvatura que se propaga como onda gravitatoria y se relaciona directamente con las polarizaciones físicas observables a través de

$$\Psi_4 = \ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times. \quad (178)$$

Ψ_4 es la fuente inmediata de la señal detectada por los observatorios y por tanto contiene toda la información relevante sobre la dinámica del sistema tras la fusión. Durante la fase de ringdown, refleja la disipación de la perturbación gravitatoria generada en las cercanías del anillo de luz y su estructura temporal descrita está dada en [9]

$$\Psi_4 = A_p \text{sech}(\gamma(t - t_p)), \quad (179)$$

donde la amplitud máxima de la señal es A_p . Mientras que la desviación radial de las trayectorias luminosas se describe mediante una función hiperbólica creciente, la amplitud de la señal se modela con una secante hiperbólica, que refleja una emisión transitoria localizada en el tiempo. Esta función alcanza su máximo en $t = t_p$, y decae exponencialmente hacia el pasado y el futuro, capturando el comportamiento físico de la radiación gravitacional.

Analizando ahora el comportamiento del momento angular L , se puede observar que su parte no estacionaria decae exponencialmente con el tiempo, reflejando la disipación de la perturbación gravitacional generada tras la fusión. Este comportamiento puede modelarse como

$$L \approx e^{-\gamma t} + \text{constante}. \quad (180)$$

Esta forma indica que la emisión de momento angular en forma de ondas gravitatorias disminuye progresivamente, hasta que el sistema alcanza una configuración estacionaria, correspondiente al agujero negro final. Si se incorpora la rotación del campo, debida al espín 2 de la onda, esta evolución se describe en general como una perturbación compleja que decae en amplitud con $e^{-\gamma t}$ y gira en fase con $e^{-i\omega_R t}$, unificando la emisión de momento angular y la frecuencia de oscilación del ringdown en una sola estructura.

La potencia emitida en forma de ondas gravitatorias durante el ringdown es proporcional a $[\dot{h}^2]$. Voy a interpretar esta potencia por analogía con un sistema rotacional clásico en el cual la energía cinética es

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (181)$$

En este caso tengo una perturbación gravitacional rotante que corresponde a la deformación del espacio-tiempo en torno al anillo de luz. Por lo tanto, la potencia emitida en forma de ondas gravitacionales va a ser proporcional a $I \omega^2$. El momento de inercia efectivo del sistema se corresponde con

$$I = \frac{dL}{dw}, \quad (182)$$

que físicamente describe cómo el sistema responde rotacionalmente a una oscilación de frecuencia dada, es decir cuán costoso es angularmente emitir a una frecuencia w . Puedo considerar como una buena aproximación que I es constante debido a que la emisión gravitatoria está dominada por la frecuencia fundamental, y el momento angular varía linealmente con la frecuencia, lo que lleva a

$$[\dot{h}^2] \propto \frac{d}{dt}(Iw^2) = 2Iw\dot{w}. \quad (183)$$

Debido a que la frecuencia w varía mucho más rápido que el resto de magnitudes como la amplitud o la fase, puedo considerar

$$\dot{h} \approx \frac{\ddot{h}}{w} \approx \frac{\Psi_4}{w}, \quad (184)$$

y agrupando todos los resultados previos obtengo

$$w\dot{w} \propto [\dot{h}]^2 \propto \left[\frac{\Psi_4}{w}\right]^2 \propto \frac{1}{w^2} \cos^{-2}(\gamma(t - t_p)), \quad (185)$$

cuya solución esta dada por

$$w(t) \propto [\tanh(\gamma(t - t_p)) + cte]^{\frac{1}{4}}. \quad (186)$$

La fase ϕ de la onda gravitatoria surge de volver a integrar w . Aunque esta integral no tiene una forma cerrada elemental, puede evaluarse numéricamente o ajustarse con funciones especiales o interpolaciones suaves. El resultado es una fase que crece monótonamente, empezando con una curvatura lenta (en el entorno del punto t_p , donde la frecuencia cambia más rápido) y que luego se asienta de forma adiabática hacia una evolución lineal, en línea con una frecuencia asintóticamente constante. Se ajusta el resultado numérico para que conecte de forma natural con la fase del "inspiral", que también se obtiene integrando una frecuencia angular creciente, aunque en ese caso el crecimiento es impulsado por la pérdida de energía gravitacional.

$$\phi(t) = \int w(t)dt + \phi_0, \quad (187)$$

quedando la expresión completa del Ringdown

$$h(t)^{ringdown} = A_p \cos^{-1}(\gamma(t - t_p)) e^{-i\phi(t)}. \quad (188)$$

En este análisis, en el cual el modo fundamental de oscilación es el único que contribuye significativamente a la señal observada, puedo expresar la onda gravitatoria en términos del modo dominante. De este modo, la señal se escribe en la base de armónicos esféricos, lo que permite una conexión natural con la evolución previa durante la fase de inspiral–merger–plunge

$$h(t) \approx h_{lm}(t). \quad (189)$$

8. Conclusiones

En esta sección voy a resumir el comportamiento físico tanto de los cuerpos cómo de la señal de la onda detectada.

En la fase de inspiral, los dos cuerpos compactos, orbitan lentamente uno alrededor de otro en orbitas cuasicirculares. Debido a la pérdida de energía y momento producida por la emisión de ondas gravitacionales las órbitas se van contrayendo adiabáticamente y la velocidad de los cuerpos va aumentando. La transición crítica ocurre en la última órbita circular estable LSO, que si estoy teniendo en cuenta la métrica de Schwarzschild de fondo, se encuentra en $r = 6M$. Una vez superado este punto ya no existe equilibrio estable y el sistema llega a un colapso dinámico en el que la partícula entra en caída libre hacia el horizonte, en una fase que denominamos plunge donde ya no hay suposición adiabática.

Posteriormente ambos cuerpos se fusionan en la fase de merger, puedo definir t_m como el instante en el que se forma un horizonte de sucesos común.

En instantes posteriores a t_m puedo describir el sistema como un único agujero negro de Kerr o Schwarzschild deformado que vibra. Estas vibraciones se van relajando hasta llegar a un agujero negro estacionario.

Debido a que la emisión de ondas gravitatorias no es uniforme en todas las direcciones del espacio, la emisión de momento lineal genera una reacción sobre el agujero negro final que lo impulsa en el otro sentido provocando que el nuevo agujero negro se desplace por el espacio a una cierta velocidad.

La onda gravitatoria completa en el modelo Effective One Body (EOB) se expresa como:

$$h_{lm}^{EOB}(t) = \Theta(t_m - t) h_{lm}^{insplunge}(t) + \Theta(t - t_m) h_{lm}^{ringdown}(t), \quad (190)$$

donde $\Theta(t)$ es la función escalón de Heaviside, $h_{lm}^{insplunge}(t)$ representa la señal durante el inspiral y plunge, $h_{lm}^{ringdown}(t)$ en el ringdown.

13

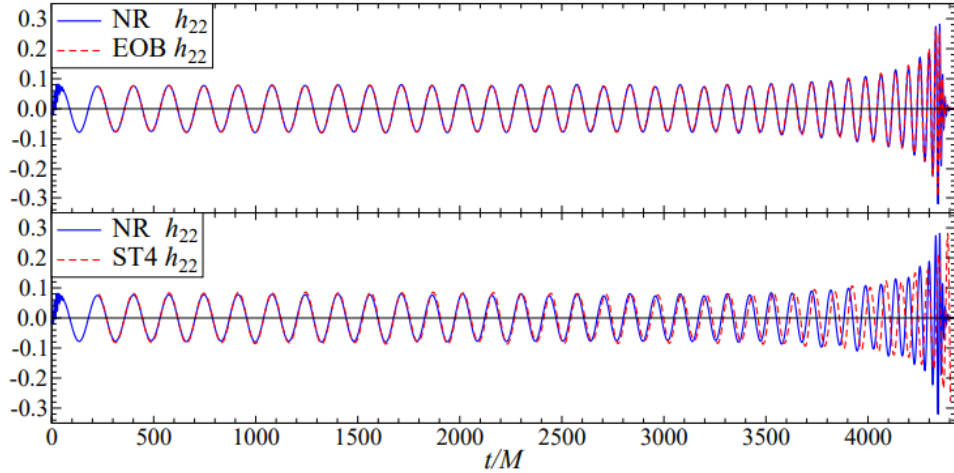


Figura 2: Forma de onda $h_{22}(t)$ obtenida con el formalismo EOB comparada con resultados de relatividad numérica, mostrando la evolución desde el inspiral hasta el ringdown. [14].

En la fase de inspiral observo una disminución progresiva del radio de la órbita lo que deriva en un aumento tanto en la velocidad como en la aceleración del sistema lo que afecta directamente a la forma de las ondas emitidas, las cuales crecen progresivamente en amplitud y en frecuencia en un proceso que denominamos chirp.

En el instante t_m la onda alcanza el máximo en amplitud y frecuencia. En el instante posterior tenemos el agujero negro deformado recién formado que vibra emitiendo ondas que se van apagando progresivamente hasta relajarse completamente dando lugar al agujero negro estacionario.

El significado físico entre t_p y t_m es distinto ya que t_p es el tiempo para el cual la perturbación en el ringdown está más próxima al anillo de luz y t_m es el tiempo en el que la amplitud de la onda es máxima y se produce la transición entre el modelo binario y el ringdown. Sin embargo, en este análisis he considerado buena la siguiente aproximación $t_p \approx t_m$ ya que en sistemas binarios con masas comparables y órbitas cuasi-circulares, ambas condiciones ocurren casi simultáneamente. Además esta elección facilita el empalme entre las fases de plunge y ringdown permitiendo una transición continua en frecuencia y fase.

El modelo Effective One Body (EOB) no solo representa un desarrollo teórico sofisticado dentro de la relatividad general, sino que también constituye una herramienta esencial para la interpretación de datos experimentales en la era de la astronomía de ondas gravitatorias. Gracias a su capacidad para describir de forma unificada todas las fases de un sistema binario compacto, el formalismo EOB proporciona formas de onda teóricas precisas que se pueden comparar directamente con las señales medidas por detectores como LIGO y Virgo.

Estas predicciones son utilizadas en el análisis de datos a través de técnicas de correlación por filtrado adaptado (matched filtering), donde las señales registradas se comparan con miles de plantillas generadas con distintos parámetros utilizando el EOB. Al maximizar esta correlación, somos capaces de detectar señales débiles ocultas en el ruido, además de extraer los parámetros físicos del sistema con alta precisión.

El modelo EOB, al incorporar tanto los efectos post-newtonianos en la fase inicial como el comportamiento durante la fusión y el posterior ringdown, se convierte en uno de los marcos más fiables y flexibles para generar estas plantillas.

Además, la estructura modular del EOB permite ajustes calibrados con simulaciones numéricas y la inclusión de correcciones por efectos de espín, modos subdominantes y dinámica de radiación. Esto refuerza su valor como modelo intermedio entre los cálculos analíticos post-newtonianos y las simulaciones de relatividad numérica completa. En este sentido, el EOB actúa como un puente que conecta la teoría gravitacional fundamental con las señales astrofísicas observables, permitiendo así convertir ondas gravitatorias en herramientas precisas para estudiar el universo.

9. Bibliografía

Referencias

- [1] D. Bini, T. Damour, *Gravitational radiation reaction along general orbits in the effective one-body formalism*, Phys. Rev. D **86**, 124012 (2012). [arXiv:1210.2834](#) [gr-qc]
- [2] A. Buonanno, T. Damour, *Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics*, Phys. Rev. D **59**, 084006 (1999).
- [3] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek, V. T. Zanchin, *Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes*, Phys. Rev. D **79**, 064016 (2009).
- [4] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2003.
- [5] T. Damour, P. Jaranowski, G. Schäfer, *Equivalence between the ADM-Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries*, Phys. Rev. D **62**, 084011 (2000).
- [6] T. Damour, *Coalescence of two spinning black holes: an effective one-body approach*, Phys. Rev. D **64**, 124013 (2001).
- [7] T. Damour, A. Nagar, *Faithful Effective-One-Body waveforms of small-mass-ratio coalescing black-hole binaries*, Phys. Rev. D **76**, 064028 (2007). [arXiv:0705.2519](#) [gr-qc]
- [8] T. Damour, B. R. Iyer, A. Nagar, *Improved resummation of post-Newtonian multipolar waveforms from circularized compact binaries*, Phys. Rev. D **79**, 064004 (2009). [arXiv:0811.2069](#) [gr-qc]
- [9] S. E. Gralla, A. Lupsasca, N. P. O’Murchadha, *Gravitational waveform model based on photon motion*, [arXiv:2204.09367](#) [gr-qc] (2022).
- [10] K. D. Kokkotas, B. G. Schmidt, *Quasi-normal modes of stars and black holes*, Living Rev. Relativity **2**, 2 (1999).
- [11] M. Maggiore, *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*, Oxford University Press, 2007.
- [12] S. Mandal, S. Upadhyay, Y. Myrzakulov, G. Yergaliyeva, *Timelike geodesics for five-dimensional Schwarzschild and thermodynamics*, Eur. Phys. J. C (2023). [arXiv:2302.08818](#) [gr-qc]
- [13] Y. Pan et al., *Inspiral-merger-ringdown waveforms of spinning, precessing black-hole binaries in the effective-one-body formalism*, Phys. Rev. D **84**, 124052 (2011). [arXiv:1106.1021](#) [gr-qc]
- [14] Y. Pan, A. Buonanno et al., *Inspiral-merger-ringdown waveforms of spinning, precessing black-hole binaries in the EOB formalism*, Phys. Rev. D **89**, 084006 (2014).
- [15] P. C. Peters, *Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses*, Phys. Rev. **136**, B1224–B1232 (1964).
- [16] E. Poisson, *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, 2004.
- [17] M. Sasaki, H. Tagoshi, *Analytic Black Hole Perturbation Approach to Gravitational Radiation*, Living Rev. Relativity **6**, 6 (2003). <https://doi.org/10.12942/lrr-2003-6>

- [18] B. F. Schutz, M. Tinto, *Antenna patterns of interferometric detectors of gravitational waves: I. Linearly polarized waves*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **224**, 131–149 (1987).
- [19] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets, *Quasinormal modes of black holes and black branes*, Phys. Rept. **493**, 155–308 (2009). [arXiv:0905.2975 \[gr-qc\]](#)
- [20] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [21] D. Zürcher, *Solutions to the General Relativistic Two-Body Problem in the Post-Newtonian Approximation Scheme: A Review*, Bachelor thesis, Department of Physics, University of Zurich, July 2017.

10. Lista de Figuras

Índice de figuras

1.	Potencial efectivo $V^2(r)$ para diferentes valores de momento angular L . Adaptado de [12].	17
2.	Forma de onda $h_{22}(t)$ obtenida con el formalismo EOB comparada con resultados de relatividad numérica, mostrando la evolución desde el inspiral hasta el ringdown. [14].	28

11. Apendice A: Desarrollo del límite Post-Newtoniano

En este apéndice se presenta un resumen estructurado del formalismo post-newtoniano aplicado al problema relativista de dos cuerpos. El desarrollo teórico y las aproximaciones utilizadas siguen principalmente el tratamiento expuesto en el trabajo de Dominik Zürcher [21]

Para describir como afectan las correcciones post-newtonianas a las ecuaciones de movimiento de un sistema binario voy a analizar en primer lugar el caso newtoniano.

El sistema que estoy analizando tiene como lagrangiano

$$L_N = \frac{1}{2}(mv^2 + m'v'^2) + \frac{Gmm'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (191)$$

Realizando un cambio de coordenadas desde las posiciones y velocidades individuales de las partículas, hacia coordenadas relativas. Se define el vector de posición relativa como

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad (192)$$

y la velocidad relativa como

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}', \quad (193)$$

siendo μ la masa reducida y M la masa total. En el centro de masa, las posiciones individuales se reescriben como

$$\vec{r} = \frac{\mu}{m} \vec{R}, \quad (194)$$

$$\vec{r}' = -\frac{\mu}{m'} \vec{R}, \quad (195)$$

y de forma análoga para las velocidades. El lagrangiano en este nuevo sistema de coordenadas tiene la forma

$$L_N = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{Gmm}{R}. \quad (196)$$

La simetría del nuevo lagrangiano bajo traslaciones espaciales y bajo transformaciones de Lorentz me dejan dos cantidades conservadas. El momento total y el momento del centro de masas relativista P_N y K_N , que en el sistema de referencia del centro de masas se anulan. Además las simetrías bajo traslaciones temporales y bajo rotaciones espaciales, me dan otras dos cantidades conservadas. La energía E y el momento angular $\vec{J}$

$$E = \frac{1}{2}\mu V^2 - \frac{GM}{R}, \quad (197)$$

$$\vec{J} = \vec{R} \times \vec{V}. \quad (198)$$

La ecuación de movimiento utilizando el principio de mínima acción es

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{GM}{R^2} \vec{N}, \quad (199)$$

siendo $\vec{N} = \frac{\vec{R}}{R}$

Por otra parte, la conservación del momento angular implica que el movimiento se produce en un plano. Si a partir de ahora utilizo coordenadas polares obtengo

$$V^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad (200)$$

$$\left[\vec{R} \times \vec{V} \right] = R^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (201)$$

Manipulando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = A + \frac{2B}{R} + \frac{C}{R^2}, \quad (202)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{R^2}, \quad (203)$$

siendo $A=2E$, $B=GM$, $C = -J^2$, $H = [\vec{J}]$. El signo de A va a definir si el movimiento del sistema es hiperbólico $A>0$, parabólico $A=0$ o elíptico para $A<0$.

Para el caso elíptico las soluciones a las ecuaciones [202](#), [203](#) son

$$R = a(1 - e \cos(u)), \quad (204)$$

$$\theta - \theta_0 = A_e(u) \equiv 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \right). \quad (205)$$

Utilizando la anomalía excentrica u , que corresponde al ángulo de la circunferencia auxiliar, el semieje mayor $|a|$, la excentricidad $|e|$ y $n = \sqrt{\frac{B}{a^3}}$ que encapsula el periodo orbital $T = 2\pi/n$, llego a la ecuación de Kepler.

$$n(t - t_0) = u - e \sin(u). \quad (206)$$

Las soluciones son

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (207)$$

La conclusión principal que se obtiene es que en un movimiento completo de la órbita $\Delta\theta = 2\pi$, el perihelio no se desplaza. Veremos más adelante como al introducir la primera corrección post-newtoniana esta conclusión ya no es correcta.

Para describir como afectan las correcciones post-newtonianas a las ecuaciones de movimiento, partiré de la siguiente acción

$$S = \sum S_i = \int dt (L_0 + \frac{1}{c^2} L_1 + \frac{1}{c^4} L_2 + \dots), \quad (208)$$

donde el Lagrangiano lo he dividido en sus diferentes órdenes y la acción es la suma de las acciones de cada partícula.

$$S_i = -m_i c \int dt \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}, \quad (209)$$

El tensor de la métrica expresado de forma expandida será

$$g_{00} = -1 + \frac{1}{c^2} g_{00}^{0PN} + \frac{1}{c^4} g_{00}^{1PN} + \frac{1}{c^6} g_{00}^{2PN} + \dots, \quad (210)$$

$$g_{0i} = \frac{1}{c^3} g_{0i}^{1PN} + \frac{1}{c^5} g_{0i}^{2PN} + \dots, \quad (211)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{c^2} g_{ij}^{1PN} + \frac{1}{c^4} g_{ij}^{2PN} + \dots, \quad (212)$$

Es importante destacar que la potencia de $\frac{1}{c}$ con la que aparece un término en el desarrollo de

la métrica no se corresponde directamente con su orden post-newtoniano (PN). Esto se debe a que las ecuaciones de campo de Einstein contienen derivadas de la métrica, y estas derivadas pueden modificar el orden efectivo de los términos. Por esta razón, el orden PN de un término no se determina simplemente por su exponente c , sino por el efecto físico que produce en las ecuaciones de movimiento, lo que requiere analizar su contribución completa dentro del sistema. La expresión del tensor energía momento de una partícula puntual se puede escribir

$$T_i^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\det(g)}} \gamma_i m_i \frac{dx_i^\mu}{dt} \frac{dx_i^\nu}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad (213)$$

siendo

$$\gamma_i = \frac{d\tau_i}{dt} = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx_i^\mu}{dt} \frac{dx_i^\nu}{dt}}. \quad (214)$$

En esta expresión voy a introducir los términos de la métrica hasta orden 1PN y voy a resolver la ecuación de campo de Einstein. Una vez resuelta la ecuación voy a introducir las componentes del tensor métrico en la acción para poder obtener el Lagrangiano a primer orden. De esta forma estoy teniendo en cuenta toda la interacción entre las dos partículas ya que la métrica que utilizamos en la acción de una partícula es la que he obtenido resolviendo las ecuaciones de Einstein con el tensor energía momento generado por la otra. El resultado obtenido será

$$L_{1PN} = L_N + \frac{1}{c^2} L_2, \quad (215)$$

siendo L_2 el lagrangiano a primer orden llamado lagrangiano de Einstein-Infeld-Hoffmann.

$$L_2 = \frac{1}{8} m v^4 + \frac{1}{8} m' v'^4 + \frac{G m m'}{2R} (3v^2 + 3v'^2 - 7\vec{v}\vec{v}' - (\vec{N}\vec{v})(\vec{N}\vec{v}') - G \frac{m+m'}{R}). \quad (216)$$

La simetría del nuevo lagrangiano bajo traslaciones espaciales y bajo transformaciones de Lorentz deja dos cantidades conservadas, el momento total y el momento del centro de masas relativista P_{1PN} y K_{1PN} , que no coinciden con las cantidades P_N y K_N para el lagrangiano Newtoniano. Si hago una transformación de coordenadas al centro de masas para que se anulen P_{1PN} y K_{1PN} . Las posiciones relativas $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ cambian. Sin embargo, debido a que las correcciones son de orden $\frac{1}{c^2}$ al introducirlas en el Lagrangiano, este va a quedar a orden superior a 1PN. Por lo tanto para este análisis puedo utilizar las coordenadas relativas que había utilizado previamente para el caso Newtoniano.

Queda por tanto el siguiente lagrangiano

$$L_{1PN} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{GM}{R} + \frac{1}{8} (1 - 3\nu) \frac{V^4}{c^2} + \frac{GM}{2Rc^2} ((3 + \nu)V^2 + (\vec{N}\vec{V})^2 - \frac{GM}{R}), \quad (217)$$

siendo $\nu = \frac{\mu}{M}$ el ratio de masa. Utilizando el principio de mínima acción obtengo las ecuaciones de movimiento. He reemplazado los términos con potencias de c^{-2} por las soluciones del caso newtoniano $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GM}{R} \vec{N}$. Finalmente obtengo

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GM}{R^2} \vec{N} + \frac{GM}{c^2 R^2} (\vec{N} [\frac{GM}{R} (4 + 2\nu) - V^2 (1 + 3\nu) + \frac{3}{2} \nu (\vec{N}\vec{V})^2] + (4 - 2\nu) (\vec{N}\vec{V}) \vec{V}). \quad (218)$$

Usando el teorema de Noether y debido a las simetrías bajo traslaciones temporales y bajo rotaciones espaciales, tengo otras dos cantidades conservadas. La energía E y el momento angular $\vec{J}$ que a primer orden en el desarrollo PN toman la siguiente forma.

$$E = \frac{1}{2} V^2 - \frac{GM}{R} + \frac{3}{8} (1 - 3\nu) \frac{V^4}{c^2} + \frac{GM}{2Rc^2} ((3 + \nu)V^2 + (\vec{N}\vec{V})^2 + \frac{GM}{R}), \quad (219)$$

$$\vec{J} = R \times \vec{V} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - 3\nu) \frac{V^2}{c^2} + (3 + \nu) \frac{GM}{Rc^2}\right). \quad (220)$$

Al igual que hice para el caso newtoniano, utilizando coordenadas polares y manipulando las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones con los coeficientes dependientes de E, J, M .

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = A + \frac{2B}{R} + \frac{C}{R^2} + \frac{D}{R^3}, \quad (221)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{R^2} + \frac{I}{R^3}, \quad (222)$$

cuyas soluciones esta dada en [21]

$$r = \left(a_r - \frac{Gm^2m}{2M^2c^2}\right) \frac{1 - e_\theta^2}{1 + e_\theta \cos((\theta - \theta_0) \sqrt{\frac{J^2 - 6G^2M^2/c^2}{J}})} + \frac{Gm^2m}{2M^2c^2} \quad (223)$$

$$\Delta\theta = 6\pi \frac{G^2M^2}{J^2c^2}. \quad (224)$$

En conclusión, el desarrollo post-newtoniano a primer orden modifica de forma significativa la estructura de la órbita respecto al caso newtoniano. Esta corrección se manifiesta directamente en la solución radial obtenida en la ecuación anterior, donde el argumento del coseno incorpora un factor multiplicativo que implica que el ángulo correspondiente al perihelio se desplaza ligeramente en cada revolución. Es decir, la órbita no se cierra exactamente. Esta diferencia angular acumulativa da lugar a la precesión del perihelio, un fenómeno ausente en la dinámica newtoniana. El resultado obtenido muestra que esta precesión es una consecuencia directa de la geometría curva del espacio-tiempo en el régimen de campos gravitatorios débiles, y justifica observacionalmente efectos como la anomalía del perihelio de Mercurio.

En los órdenes superiores, concretamente 2PN y 3PN, se conserva la estructura funcional de la ecuación radial de Kepler, pero aparecen correcciones adicionales en la evolución angular que afectan la precisión del modelado orbital. Estos órdenes describen autointeracciones del campo gravitatorio y aportan correcciones tanto a la energía cinética como al potencial gravitatorio. Son especialmente relevantes en la fase de inspiral tardío, cuando las velocidades relativas aumentan y el sistema se acerca a la fusión.

A partir del orden 2.5PN, el sistema deja de ser conservativo: aparece una fuerza de reacción asociada a la emisión de ondas gravitacionales, responsable de la pérdida de energía orbital. Esta fuerza produce un decaimiento secular del semieje mayor, observable en la espiralización de las órbitas.

En el orden 3.5PN se introduce una nueva corrección disipativa que mejora la descripción del flujo radiado. En este punto también comienzan a aparecer efectos de cola en la parte disipativa: parte de la radiación gravitacional se dispersa en la curvatura del espacio-tiempo generada por el propio sistema, y regresa influyendo de forma retardada sobre su evolución. Estos efectos no pueden describirse mediante una dependencia puramente local en el tiempo.

Finalmente, a partir del orden 4PN, emergen contribuciones conservativas no locales: efectos de memoria gravitacional, interacciones retardadas más complejas y términos integrales sobre la historia pasada del sistema. En conjunto, estos efectos reflejan la naturaleza no lineal y retardada de la interacción gravitatoria en relatividad general, más allá de los regímenes perturbativos simples.

Aunque en principio el desarrollo post-newtoniano se basa en la suposición de campos débiles y velocidades pequeñas respecto a la velocidad de la luz, en la práctica ha demostrado ser robusto hasta órdenes altos, como 3.5PN, en la descripción de la fase de inspiral de sistemas binarios compactos. A ordenes más altos la expansión empieza a perder precisión en la fase final del inspiral

cuando las velocidades son comparables con la velocidad de la luz. Sin embargo, esta pérdida de convergencia no representa un obstáculo fundamental, sino más bien una indicación de que deben utilizarse formulaciones resumadas o relatividad numérica, que reorganizan y amplían la validez de los términos PN. Así, los órdenes altos del desarrollo post-newtoniano siguen siendo fundamentales, ya que proporcionan la base perturbativa sobre la cual se construyen descripciones más completas del fenómeno gravitacional.

12. Apéndice B: Soluciones de agujeros negros

En esta sección se revisan las principales soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que describen agujeros negros. El desarrollo teórico se apoya fundamentalmente en la exposición clara y rigurosa presentada en [4], donde se analizan en detalle las geometrías de Schwarzschild y Kerr, así como las propiedades físicas asociadas a los horizontes, las singularidades y las geodésicas en estos espacios.

La métrica de Schwarzschild es la solución para agujeros negros estáticos en el vacío y con perfecta simetría esférica. Tiene la siguiente forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2 \quad (225)$$

$|R=2GM|$ corresponde a la posición del horizonte de sucesos, es una singularidad aparente que se puede evitar cambiando de sistema de referencia. Representa que cualquier señal que se acerca al agujero negro a una distancia menor a esa cantidad queda desconectada causalmente del exterior. La métrica de Kerr es otra solución para agujeros negros rotantes en el vacío. Tiene la siguiente forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2, \quad (226)$$

Siendo

$$\Delta = r^2 - 2GMR + a^2, \quad (227)$$

$$\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (228)$$

Y $|a|$ es el momento angular por unidad de masa

$$a = \frac{J}{M}. \quad (229)$$