



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

Osciladores caóticos.

Autor: Guillermo Muñoz Hernández

Tutores: José María Muñoz Muñoz y Óscar Alejos Ducal

2025

RESUMEN

En este trabajo se ha estudiado el comportamiento caótico de circuitos electrónicos mediante el análisis y la modificación de un oscilador sencillo. Inicialmente se comprobó, a través de simulaciones en LTspice, la dinámica caótica de un circuito basado en transistores. No obstante, su elevada sensibilidad a la temperatura y la complejidad de sus ecuaciones matemáticas, dificultaba su caracterización. Para superar estas limitaciones, se propuso un nuevo diseño en el que uno de los transistores fue sustituido por un comparador con amplificador operacional, lo que permitió simplificar el modelo matemático y reducir parcialmente la dependencia con la temperatura. El circuito modificado fue caracterizado tanto mediante simulaciones en MicroCap como a través de experimentos en el laboratorio con un osciloscopio, obteniendo así diagramas de bifurcaciones mediante el barrido de parámetros y series temporales que evidencian cascadas de duplicación de periodo, aparición de atractores extraños y alternancia entre ventanas caóticas y periódicas. Los resultados confirman que el comparador actúa como un interruptor que reproduce cualitativamente el comportamiento no lineal del transistor original, confirmando así que hemos encontrado una alternativa robusta para el estudio del caos electrónico.

Palabras clave: sistemas dinámicos, caos, osciladores electrónicos, bifurcaciones, atractor.

ABSTRACT

In this project, the chaotic behavior of electronic circuits has been studied through the analysis and modification of a simple oscillator. The chaotic dynamics of a transistor-based circuit were initially verified using LTspice simulations. However, its high sensitivity to temperature and the complexity of its mathematical equations made its characterization difficult. To overcome these limitations, a new design was proposed in which one of the transistors was replaced by an op-amp comparator, simplifying the mathematical and partially reducing the dependence on temperature. The modified circuit was characterized both through MicroCap simulations and laboratory experiments with an oscilloscope. Bifurcation diagrams from parameter sweeps and time series were obtained. They revealed period-doubling cascades, the emergence of strange attractors, and the alternation between chaotic and periodic states. The results confirm that the op-amp comparator acts as a switch that qualitatively reproduces the nonlinear behavior of the original transistor, thus providing a robust alternative for the study of electronic chaos.

Keywords: dynamical systems, chaos, electronic oscillators, bifurcations, attractors.

ÍNDICE GENERAL

1	Sistemas dinámicos	3
1.1	Soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales	4
1.2	Flujo de una ecuación diferencial	4
1.2.1	Sistemas dinámicos	5
1.3	Linealización y puntos de equilibrio	6
1.4	Órbitas periódicas y conjuntos límite	6
1.5	Sistemas caóticos	7
1.5.1	El atractor de Lorenz	8
1.6	Estabilidad de soluciones	8
1.6.1	Estabilidad uniforme	9
1.7	Introducción a la teoría de bifurcaciones	10
1.7.1	Bifurcación de tipo Saddle-Node	10
1.7.2	Bifurcación de duplicación de periodo	10
2	Osciladores caóticos	13
2.1	El circuito	13
2.1.1	El oscilador RC	14
2.1.2	Caos en el circuito	16
2.2	Modelo matemático del circuito	17
2.3	Simulaciones en LTspice	17
3	El nuevo circuito modificado	21
3.1	Funcionamiento del comparador	22
3.2	Simulación del circuito	23
3.2.1	Barrido del parámetro V_+	23
3.2.2	Otras medidas	25
3.3	Resultados experimentales	26
3.3.1	Montaje	26

3.3.2	Variación del potencial V_+	26
3.3.3	Otras medidas	33
4	Conclusiones	37
A	Formalismo matemático sobre sistemas dinámicos	39
A.1	Soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales	39
A.2	Sistemas dinámicos	40
A.3	Linealización y puntos de equilibrio	41
A.3.1	El Teorema de Hartman-Grobman	41
A.4	Órbitas periódicas y conjuntos límite	41
A.5	Sistemas caóticos	42
A.6	Estabilidad de soluciones	43
A.6.1	Estabilidad en el sentido de Lyapunov	44
A.6.2	Estabilidad uniforme	44
A.6.3	Soluciones atractivas	44
A.6.4	Estabilidad asintótica y uniformemente asintótica	44
A.6.5	Soluciones globalmente atractivas	44
B	Barrido sobre el voltaje de alimentación	45

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Atractor de Lorenz (la "mariposa") para $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$. Figuras obtenidas con MATLAB, resolviendo numéricamente las ecuaciones con la función <code>ode45</code>	9
2.1	Oscilador caótico RC de desplazamiento de fase con dos transistores. Los componentes situados dentro del recuadro de línea discontinua son los responsables de generar la dinámica caótica en un oscilador RC con polarización automática, que por lo demás es de diseño convencional [1].	14
2.2	Circuito oscilador formado por una red de escalera RC y un transistor que funciona como amplificador.	14
2.3	Simulación en LTspice de la escalera RC. Evolución temporal de v_{CE_1} (rojo), v_1 (azul), v_2 (negro) y v_{BE_1} (verde).	17
2.4	Evolución temporal de distintos voltajes para $R_4 = 44 \text{ k}\Omega$ y $V_p = 5 \text{ V}$ en régimen caótico para una serie de 0.7 ms con incrementos de 1 ns obtenida con LTspice.	18
2.5	Transformada rápida de Fourier para la señal de v_{CE_1} en régimen caótico para $R_4 = 44 \text{ k}\Omega$ y $V_p = 5 \text{ V}$, obtenida con LTspice.	18
2.6	Variación de las condiciones iniciales para 3 valores del voltaje de alimentación V_p : 4.9 V, 5 V y 5.1 V.	19

2.7	Evolución temporal de v_{CE1} para 3 valores de la temperatura: 20.9 °C (azul), 21 °C (rojo) y 22 °C (negro).	19
2.8	Proyecciones del atractor del circuito para $V_p = 5$ V y $R_4 = 44$ k Ω . Datos obtenidos de LTspice. La escala de color indica la transición durante la simulación, desde rojo al inicio, hasta amarillo al final de la simulación. . .	20
2.9	Vista tridimensional del atractor para $V_p = 5$ V y $R_4 = 44$ k Ω . La escala de color indica la transición durante la simulación, desde rojo al inicio, hasta amarillo al final de la simulación. Los datos se han obtenido simulando el circuito en LTspice, y la Figura se ha hecho con Python.	20
3.1	Esquema en MicroCap del nuevo circuito que sustituye el transistor Q_2 por un comparador.	21
3.2	Representación de v_2 (eje y) frente a v_{CE} (eje x) de los datos obtenidos mediante simulación del circuito en régimen no caótico con MicroCap para el valor $V_+ = 425$ mV.	22
3.3	Representación gráfica de V_2 frente a v_{CE} para diferentes valores de V_+ . . .	24
3.4	Diagrama de bifurcaciones unidimensional generado con datos de MicroCap al variar el parámetro V_+	25
3.5	Evolución temporal de los voltajes del comparador V_- y V_{out} con $V_+ = 529$ mV en régimen caótico.	26
3.6	Montaje experimental del circuito con comparador.	27
3.7	Esquema del programa utilizado en VEE para realizar barridos sobre el parámetro V_+ con lectura de datos del osciloscopio.	28
3.8	Barrido del parámetro V_+ : representación del voltaje v_2 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro.	29
3.9	Barrido del parámetro V_+ : representación del voltaje v_1 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro.	30

3.10	Diagrama de bifurcaciones para el parámetro V_+ en el rango 510 – 582 mV con datos obtenidos con el osciloscopio.	31
3.11	Zoom sobre el diagrama de bifurcaciones en el rango 548 – 581 mV.	31
3.12	Evolución temporal de la tensión de colector v_{CE} (azul) y de la tensión de salida del comparador v_{out} (rojo) obtenida con el osciloscopio.	32
3.13	Evolución temporal de la tensión v_- (azul) y de la tensión de salida del comparador v_{out} (rojo) en régimen caótico, obtenida con el osciloscopio. . .	33
3.14	Representación de v_{out} (eje y) frente a v_{CE} (eje x) para los valores medidos con el osciloscopio.	34
3.15	Barrido del voltaje de alimentación V_p como parámetro: representación del voltaje v_2 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro, con $V_+ = 529$ mV.	35
B.1	Barrido del voltaje de alimentación V_p como parámetro: representación del voltaje v_2 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro, con $V_+ = 529$ mV.	46

INTRODUCCIÓN

Aunque la dinámica es, a día de hoy, una materia interdisciplinar, originalmente se trataba de una rama de la física. El concepto de la dinámica comenzó a mediados del siglo XVII, cuando Newton introdujo las ecuaciones diferenciales, sus leyes del movimiento y la gravitación universal. Newton combinó todos estos temas para explicar las leyes del movimiento planetario de Kepler y resolvió el problema de los dos cuerpos.

Más adelante, a finales del siglo XIX, Poincaré introdujo un nuevo punto de vista en el estudio de los sistemas dinámicos, el cual se centraba en analizarlos desde un enfoque cualitativo más que cuantitativo. Por ejemplo, en lugar de tratar de hallar la posición exacta de los planetas en todo momento, se preguntó si el sistema solar sería estable indefinidamente o si, por el contrario, algunos planetas acabarían desplazándose hasta el infinito. Poincaré desarrolló un enfoque geométrico muy potente para plantearse estas cuestiones, el cual ha dado lugar a la actual disciplina de la dinámica.

Además, fue Poincaré el primero que introdujo el concepto de caos, por el cual sistemas deterministas exhiben comportamientos no periódicos y extremadamente sensibles a perturbaciones de las condiciones iniciales, lo que imposibilita su predicción a largo plazo.

No obstante, el estudio del caos pasó a un segundo plano y, en la primera mitad del siglo XX, los investigadores interesados en la dinámica se centraron en el estudio de las oscilaciones no lineales y sus aplicaciones en física e ingeniería. Esto impulsó el desarrollo de nuevas técnicas matemáticas por pioneros como van der Pol o Levinson. En paralelo, los métodos geométricos de Poincaré se continuaron perfeccionando para profundizar en la mecánica clásica gracias a las contribuciones de Birkhoff, Kolmogorov y otros autores.

El caos volvió a ponerse en el centro de atención cuando Edward Norton Lorenz descubrió en 1963 el movimiento caótico en un atractor extraño mientras estudiaba modelos de convección del calor en la atmósfera para entender su impredecibilidad. Lorenz observó que las soluciones de sus ecuaciones no convergían ni a un único punto ni a un estado periódico, sino que permanecían oscilando de manera irregular y no periódica. Además, encontró que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales del sistema daban lugar, tras cierto tiempo, a trayectorias completamente diferentes. La implicación fundamental de este estudio es que el sistema de Lorenz era impredecible: un error mínimo en la medida del estado actual de la atmósfera, o de cualquier sistema caótico, conduce inevitablemente

a predicciones futuras erróneas.

Poco después, los fenómenos caóticos comenzaron a observarse también en el campo de la electrónica. El ejemplo más influyente en este ámbito fue el circuito de Chua, presentado a finales del siglo XX, que constituyó el primer circuito electrónico capaz de generar caos de manera controlada. El oscilador de Chua, basado en una sencilla red de elementos lineales combinados con una no linealidad introducida, abrió un nuevo campo de experimentación en el estudio del caos aplicado a circuitos electrónicos.

En esta misma línea, en este trabajo nos centramos en un diseño aún más simple de circuito caótico, presentado en [1], que consiste en un oscilador con alimentación única, dos transistores y una red RC. Este circuito, pese a su sencillez, es capaz de generar dinámicas caóticas para determinados valores de sus parámetros.

La historia de este oscilador resulta especialmente interesante, pues en él se observan tanto oscilaciones biestables como comportamiento caótico, reproducibles tanto en simulaciones como en experimentos de laboratorio. Sin embargo, presenta una notable sensibilidad a la temperatura, lo que dificulta su uso práctico. Desde un punto de vista teórico, el sistema se modela mediante un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales de gran complejidad, que hacen del análisis matemático un reto considerable.

Con el objetivo de reducir la dependencia con la temperatura y, al mismo tiempo, simplificar las ecuaciones matemáticas asociadas, en este trabajo hemos modificado el diseño original. En particular, se ha sustituido el segundo transistor —responsable de introducir la no linealidad en el circuito— por un comparador, cuyos dos posibles estados imitan las oscilaciones biestables producidas originalmente por el transistor. De esta manera, se simplifica el circuito desde el punto de vista electrónico, pero se obtiene un modelo matemático más manejable.

Este nuevo diseño se ha estudiado tanto mediante simulaciones como experimentalmente en el laboratorio con ayuda de un osciloscopio. Se han realizado barridos de diferentes parámetros para comprobar la aparición de dinámicas caóticas y atractores extraños, comparando los resultados obtenidos con los del circuito original y discutiendo las similitudes y diferencias más relevantes.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DINÁMICOS

La teoría de sistemas dinámicos, esto es, de sistemas cuyo estado evoluciona con el tiempo, constituye un área de estudio amplia y aún en pleno desarrollo. Partimos en este primer capítulo con el objetivo de introducir los conceptos fundamentales de esta teoría, los cuales estarán presentes a lo largo de este trabajo.

De manera general, la evolución de un sistema dinámico puede describirse mediante ecuaciones diferenciales, para el caso continuo, o mediante ecuaciones en diferencias, para el caso discreto. En este trabajo nos vamos a centrar principalmente en los sistemas dinámicos continuos, es decir, en aquellos que podemos describir mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

No obstante, en la práctica, en muchas ocasiones, estas ecuaciones resultan complejas, o incluso imposibles, de resolver. Es por ello que se suelen investigar de manera cualitativa o de manera geométrica con el fin de hallar propiedades de sus soluciones, o de ser capaces de describir el modo en el que estas evolucionan, sin necesidad de resolver las ecuaciones de forma exacta. Por lo tanto, presentaremos también algunos conceptos sobre estabilidad y sobre el comportamiento de las soluciones de un sistema dinámico.

En este trabajo nos centraremos en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales autónomos de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con I un intervalo de $\mathbb{R}$, es una función real, y $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^k(A)$, con $k \geq 1$ y A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si la función $\mathbf{f}$ depende también del tiempo, hablaremos de sistemas no autónomos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1.2}$$

De todas maneras, cualquier sistema no autónomo con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse como uno autónomo (1.1) con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ poniendo $x_{n+1} = t$ y $\dot{x}_{n+1} = 1$. En lo que sigue, nos limitaremos a comentar de manera intuitiva cada sección que introduzcamos. Un desarrollo más formal viene incluido en el Apéndice A.

1.1 Soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

Cuando hablamos de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma (1.1), lo que queremos es describir cómo evoluciona el estado del sistema que viene descrito por dichas ecuaciones a lo largo del tiempo, partiendo de unas ciertas condiciones iniciales. Esto es, si suponemos que en un cierto instante t_0 , el sistema se encuentra en una posición $\mathbf{x}_0$, estamos interesados en hallar la curva $\mathbf{x}(t)$ que describe la evolución del sistema en el espacio de fases; esto es, en el espacio donde se mueve el sistema.

En la práctica, dicho problema es el llamado *problema de valor inicial de Cauchy*:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

La idea es que, a partir de esta condición inicial, el sistema quede completamente determinado. No obstante, hay que asegurarse de que la solución esté bien definida; esto es, hay que garantizar lo siguiente:

- Existencia: hay una trayectoria que parte de dicho punto inicial.
- Unicidad: dicha trayectoria está completamente determinada y no hay soluciones diferentes que partan del mismo punto.

Para asegurar esto, se pide que la función $\mathbf{f}$ verifique la condición de Lipschitz (ver Apéndice A, Definición A.2). Esta condición exige que la función $\mathbf{f}$ no varíe de forma brusca, y que puntos cercanos del espacio de fases produzcan variaciones cercanas en su evolución. Esta condición evita que trayectorias diferentes salgan de un mismo punto. No obstante, basta con pedir que la función $\mathbf{f}$ sea derivable para que esta cumpla la condición de Lipschitz.

Ahora, el resultado central en el contexto de las soluciones de la ecuación (1.1) es el **Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones** (ver Apéndice A, Teorema A.3). Este Teorema nos garantiza que si la función $\mathbf{f}$ verifica la condición de Lipschitz, el problema de Cauchy (1.3) tiene una única solución definida en un cierto intervalo alrededor del instante inicial t_0 .

Además, existe una versión más fuerte de este Teorema que asegura la existencia de una solución única en un intervalo maximal (α, β) que depende de la condición inicial $\mathbf{x}_0$. Es decir, la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ va a estar bien definida mientras no se salga del dominio considerado.

En lo que sigue, sin pérdida de generalidad, supondremos que $t_0 = 0$ dado que la mayoría de los fenómenos dinámicos son invariantes frente a traslaciones temporales. El comportamiento del sistema no depende del instante exacto en que comencemos a observarlo, siempre que mantengamos constantes las condiciones iniciales.

1.2 Flujo de una ecuación diferencial

Fijemos ahora una cierta condición inicial $\mathbf{x}_0$. Vamos a denotar por $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ a la solución del problema de valor inicial (A.2) definida en su intervalo maximal de definición, de

manera que $\phi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Es decir, fijando una condición inicial $\mathbf{x}_0$, si dejamos evolucionar el sistema, obtenemos la trayectoria $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ que describe cómo se mueve el sistema en el espacio de fases a medida que avanza el tiempo.

Si repetimos este procedimiento con distintas condiciones iniciales, cada punto genera una curva en el espacio, y todas ellas juntas forman un campo de trayectorias que nos permite visualizar la dinámica del sistema. Este conjunto de trayectorias es lo que conocemos como *flujo del sistema*.

Entonces, vamos a denominar, para cada $t \in J(\mathbf{x}_0)$, *flujo de la ecuación diferencial* (1.1) al conjunto de aplicaciones ϕ_t dadas por:

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0). \quad (1.4)$$

Para cada instante de tiempo, el flujo ϕ_t nos dice en dónde se encuentra el sistema si partimos de un cierto punto $\mathbf{x}_0$ en el instante inicial.

El conjunto de puntos del espacio que recorre una solución concreta lo denominaremos *órbita o trayectoria*, y la denotamos por $\gamma(\mathbf{x}_0)$; es decir,

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \{\phi(t, \mathbf{x}_0), \forall t\}.$$

Geométricamente, la trayectoria es una curva en el espacio de fases que traza el camino que sigue el sistema partiendo de $\mathbf{x}_0$. Si se cumplen las condiciones de unicidad, estas trayectorias no se cruzan nunca, lo que refleja que la evolución del sistema está determinada de manera unívoca por las condiciones iniciales.

1.2.1 Sistemas dinámicos

Un *sistema dinámico* no es más que una regla que nos dice cómo se transforma con el tiempo cualquier punto del espacio de fases. En la práctica, esto se materializa a través del flujo que acabamos de definir. Dado un punto inicial $\mathbf{x}_0$, el sistema dinámico nos indica cuál será su posición en el instante t , a la cual vamos a denotar por $\phi_t(\mathbf{x}_0)$, como en el caso del flujo.

Un sistema dinámico ha de cumplir las siguientes dos propiedades:

1. Si fijamos el instante de tiempo en $t = 0$, esto es, no dejamos pasar el tiempo, entonces el sistema no evoluciona y se queda donde empieza: $\phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.
2. Avanzar un tiempo t_1 y posteriormente, un tiempo t_2 , equivale a avanzar directamente un tiempo igual a $t_1 + t_2$.

Es decir, un sistema dinámico transporta todos los puntos del espacio de fases a lo largo de sus trayectorias.

Por otra parte, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es un campo de vectores, es decir, una regla que asigna a cada punto $\mathbf{x}$ del espacio una dirección y una velocidad de movimiento. Entonces, se tiene que esta función también genera un sistema dinámico. Cada vector nos dice hacia dónde se desplaza el punto en ese instante, y el flujo ϕ_t es el mapeo temporal que nos da dichas trayectorias.

De este modo, cuando hablamos de un sistema dinámico, podemos referirnos, sin pérdida de generalidad, tanto al sistema de ecuaciones diferenciales que lo define, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, como al flujo ϕ_t que describe la evolución del mismo. Ambos enfoques son equivalentes y complementarios: las ecuaciones nos dan la ley local de movimiento, mientras que el flujo nos proporciona la visión global de cómo cambian los estados a lo largo del tiempo (ver Apéndice A.2).

1.3 Linealización y puntos de equilibrio

Hay sistemas dinámicos en los que existen unos puntos de manera que si colocamos al sistema en uno de estos estados, este no se moverá más. A estos puntos se los llama *puntos de equilibrio*. Matemáticamente, son aquellos puntos donde el campo de vectores $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ se anula, es decir, donde no hay ninguna fuerza ni tendencia a cambiar su estado. En otras palabras, $\mathbf{x}$ es un punto de equilibrio del sistema (1.1) si

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Para entender cómo se comporta el sistema alrededor de un punto de equilibrio, se aproxima la dinámica del sistema no lineal por la del siguiente sistema lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x},$$

con $\mathbf{x}_0$ un punto de equilibrio y $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ evaluada en dicho punto.

Se va a tener entonces que los autovalores de la matriz Jacobiana nos van a dar el tipo de punto de equilibrio que tenemos, y va a caracterizar la geometría local del flujo cerca de este punto:

- Si todos los autovalores tienen parte real negativa, las trayectorias cercanas se sienten atraídas hacia el equilibrio y se comporta como un *sumidero*.
- Si todos los autovalores tienen parte real positiva, se tiene que cualquier perturbación hará que el sistema se aleje de este punto, y tendremos, por lo tanto, una *fuentes*.
- Si existen dos autovalores de distinto signo, unas direcciones atraen hacia el punto y otras repelen. En este caso, hablaremos de que el punto de equilibrio es un *punto de silla*. Las trayectorias llegan al equilibrio en una dirección, y salen de este en otra.

El resultado más importante en este contexto es el Teorema de Hartman-Grobman, el cual garantiza que, cerca de un punto de equilibrio hiperbólico (todos los autovalores de la matriz jacobiana tienen parte real no nula), el comportamiento cualitativo del sistema no lineal es equivalente a la del sistema lineal. En otras palabras, si el sistema lineal tiene la estructura de un sumidero, una fuente, o un punto de silla, el sistema original se comportará de forma análoga cerca del punto de equilibrio (ver Apéndice A.3).

1.4 Órbitas periódicas y conjuntos límite

En la evolución de un sistema dinámico, hay trayectorias que no solo dependen de lo que ocurre en un instante concreto, sino también de lo que pasa a largo plazo. Para describir

este comportamiento, se introducen los llamados conjuntos límite (descritos con detalle en el Apéndice A.4).

A priori, distinguimos dos tipos de conjuntos límite de una trayectoria: de tipo ω y de tipo α . Básicamente, los conjuntos del primer tipo son aquellos que recogen todos los puntos hacia los que se acerca una determinada órbita del sistema a medida que el tiempo avanza ($t \rightarrow \infty$); por otro lado, los de tipo α son los opuestos: forman parte de un conjunto límite de tipo α todos aquellos puntos de los que proviene la trayectoria si miramos hacia atrás en el tiempo ($t \rightarrow -\infty$).

En algunos casos concretos, puede darse que una órbita no vaya a parar a un cierto estado de equilibrio, sino que recorre una curva cerrada de manera indefinida. En este caso, hablaremos de *órbita periódica o ciclo*. Se tendrá entonces que existe un cierto periodo T de manera que, tras transcurrir ese tiempo, la trayectoria vuelve a ese mismo punto ($\phi(t + T, \mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$).

Un caso de interés, y que nos encontraremos en este trabajo, es el de los ciclos límite. Estos tienen lugar cuando el comportamiento periódico se convierte en el lugar al que van a parar distintas trayectorias cercanas. Distinguimos dos tipos: estable, cuando cualquier estado próximo al ciclo límite acaba por acercarse a él, de forma que el movimiento periódico actúa como atractor; e inestable, cuando las trayectorias cercanas se alejan.

1.5 Sistemas caóticos

En el estudio de sistemas dinámicos no lineales, nos encontraremos, en muchas ocasiones, comportamientos que van mucho más allá de las órbitas periódicas o de la convergencia a un equilibrio. Aparecen movimientos irregulares, aparentemente impredecibles que, sin embargo, están completamente determinados por las ecuaciones que describen el sistema. A este fenómeno lo llamamos *caos*.

Geométricamente, el caos da lugar a órbitas que no llegan a estabilizarse en un punto fijo, o que se repiten, pero que tampoco se dispersan hacia el infinito. En lugar de eso, permanecen confinadas en una región del espacio de fases, trazando patrones complejos, a menudo con forma fractal. Estas regiones reciben el nombre de *atractores extraños*.

En general, un sistema se denomina *caótico* si dos trayectorias que comienzan muy cerca una de otra, es decir, con condiciones iniciales muy cercanas, terminan separándose de forma exponencial con el tiempo. Esto implica que pequeñas imprecisiones al medir estas condiciones iniciales crecen y se propagan de manera exponencial con el tiempo hasta hacer imposible una predicción fiable a largo plazo, debido a la diferencia de trayectorias. Todo esto tiene lugar a pesar de que el comportamiento sea completamente determinista.

En este contexto, conviene introducir primero la noción de *conjunto invariante*: se dice que un cierto conjunto del espacio es *invariante* si, una vez que la trayectoria de un punto entra en este conjunto, esta nunca sale, para cualquier instante de tiempo. Por ejemplo, una órbita periódica (un ciclo) constituye un conjunto invariante sencillo (véase Apéndice A.5 para una definición más formal).

Más interesante aún es el caso de los *atractores*, que son conjuntos invariantes capaces de atraer a todas las trayectorias cercanas. Es decir, aunque distintas condiciones iniciales den lugar a órbitas distintas, todas acaban acercándose a la misma región del espacio de fases. Esta propiedad hace que los atractores sean una herramienta clave para entender el caos.

En general, vamos a considerar las siguientes condiciones esenciales del caos:

1. Sensibilidad a las condiciones iniciales: Trayectorias casi idénticas inicialmente se separan de manera exponencial con el tiempo.
2. Densidad de órbitas periódicas: En el atractor, siempre hay órbitas periódicas muy próximas a cualquier otra trayectoria.
3. Transitividad topológica: Dada cualquier región del atractor, siempre hay una órbita que, tras cierto tiempo, pasa arbitrariamente cerca de otra región.

Un atractor que cumple estas propiedades, es decir, que es caótico, es lo que llamamos *atractor extraño*. La palabra *extraño* refleja precisamente que su geometría no es regular como un ciclo o un punto de equilibrio, sino que presenta estructuras fractales que combinan orden y desorden.

1.5.1 El atractor de Lorenz

Uno de los ejemplos más emblemáticos de atractor extraño es el *atractor de Lorenz*, descubierto por Edward Lorenz en 1963 en el contexto de la modelización de convección atmosférica. El sistema de Lorenz es un sistema dinámico tridimensional definido por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde σ , ρ y β son parámetros positivos.

Lorenz observó que, para ciertos valores de los parámetros (por ejemplo, $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$, véase Figura 1.1), las soluciones no convergen ni a un punto fijo ni a un ciclo límite, sino que se mantienen en un conjunto compacto con estructura aparentemente irregular. Este conjunto, posteriormente denominado *atractor de Lorenz*, exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales y una geometría de tipo fractal.

1.6 Estabilidad de soluciones

La noción de estabilidad resulta esencial para comprender el comportamiento cualitativo de sistemas dinámicos. No basta con determinar la existencia de una solución: es igualmente importante analizar si las trayectorias próximas a ella permanecen cercanas

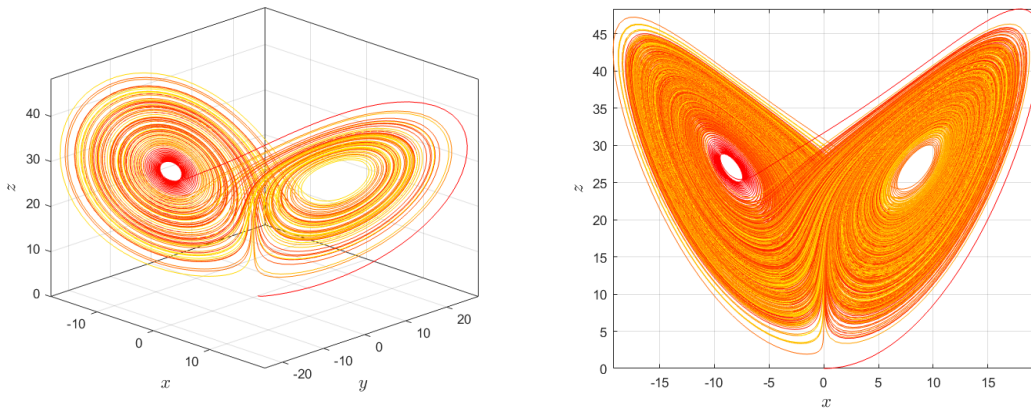


Figura 1.1: Atractor de Lorenz (la "mariposa") para $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$. Figuras obtenidas con MATLAB, resolviendo numéricamente las ecuaciones con la función `ode45`.

o, por el contrario, se alejan con el tiempo. En este contexto, se han desarrollado distintas nociones de estabilidad que permiten caracterizar la respuesta del sistema frente a perturbaciones en las condiciones iniciales y describir la posible convergencia hacia soluciones concretas. En este apartado presentamos de manera intuitiva los tipos de estabilidad, mientras que en el Apéndice A.6 pueden encontrarse las definiciones formales.

Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La idea de estabilidad en el sentido de Lyapunov es sencilla: una cierta solución del sistema (1.1) es estable si, al modificar ligeramente las condiciones iniciales, es decir, el punto de partida, la trayectoria resultante permanece cercana a la original a medida que transcurre el tiempo. Desde el punto de vista geométrico, existe una región del espacio cercana a una solución estable dentro de la cual permanecen confinadas las trayectorias con condiciones iniciales perturbadas.

1.6.1 Estabilidad uniforme

En ocasiones, nos va a interesar que esta cercanía no dependa del instante en el que se produzca la perturbación. En tal caso, hablaremos de *estabilidad uniforme*, de forma que el comportamiento cercano a la solución de referencia va a ser el mismo, con independencia del instante de tiempo en el que conozcamos sus condiciones iniciales.

Soluciones atractivas

En el caso de que, con el paso del tiempo, las trayectorias no solo permanecen cerca de la solución de referencia, sino que acaban acercándose a esta con el paso del tiempo, diremos entonces que la solución es *atractiva*. En otras palabras, trayectorias lo suficientemente cercanas a una solución atractiva convergen a esta cuando t tiende a infinito.

Estabilidad asintótica y uniformemente asintótica

Una solución del sistema (1.1) es *asintóticamente estable* cuando combina ambos comportamientos: las trayectorias cercanas no se alejan (estabilidad de Lyapunov) y, además,

terminan convergiendo hacia ella (atractividad). Si, además, esta propiedad se mantiene con independencia del instante inicial, hablamos de *estabilidad uniformemente asintótica*.

Soluciones globalmente atractivas

Finalmente, en el caso más fuerte posible, una solución es *globalmente atractiva* si cualquier condición inicial del sistema, sin importar lo alejada que esté, termina aproximándose a ella con el tiempo. En este escenario, todo el espacio de fases constituye su dominio de atracción, lo que convierte a la solución en el destino inevitable de toda la dinámica.

1.7 Introducción a la teoría de bifurcaciones

Pasamos a continuación a realizar una breve introducción a la teoría de las bifurcaciones. Es de gran interés el estudio de la dependencia de sistemas dinámicos con parámetros. La estructura cualitativa del flujo de nuestro sistema puede variar con los parámetros; en particular, se pueden crear o destruir puntos fijos, o incluso puede llegar a cambiar su estabilidad. Estos cambios cualitativos que se producen en la dinámica se denominan *bifurcaciones*, y los valores de los parámetros a los que tienen lugar se denominan *puntos de bifurcación*. Estas bifurcaciones resultan de gran importancia ya que dan lugar a modelos de transiciones e inestabilidades a medida que se varía un parámetro de control [2].

En este trabajo nos limitaremos a comentar el caso de bifurcaciones en una dimensión, y empezaremos comentando la bifurcación más fundamental: la de tipo saddle-node.

1.7.1 Bifurcación de tipo Saddle-Node

La bifurcación de tipo saddle-node es el mecanismo básico mediante el cual se crean y destruyen puntos de equilibrio. A medida que se varía un cierto parámetro, dos puntos fijos se acercan, colisionan y desaparecen. El ejemplo más básico viene dado por la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{x} = r + x^2, \quad (1.6)$$

donde r es un cierto parámetro. Si r es negativo, hay dos puntos de equilibrio, $x = \pm\sqrt{-r}$, uno estable y otro inestable; a medida que r tiende a cero, estos dos puntos se van acercando hasta que, cuando $r = 0$, se tiene un único punto de equilibrio en $x = 0$, que es estable; no obstante, este punto de equilibrio desaparece en cuanto r toma un valor positivo, quedándonos así sin puntos de equilibrio. Decimos en este caso que ha tenido lugar una *bifurcación* en $r = 0$, pues los campos de vectores para r positivo y r negativo son cualitativamente diferentes.

1.7.2 Bifurcación de duplicación de periodo

Una *ruta hacia el caos* es un mecanismo a través del que un sistema dinámico que depende de un parámetro pasa de un estado no caótico a un estado caótico determinista a medida que se varía este parámetro. Uno de los mecanismos más universales en la transición hacia el caos es la *bifurcación de duplicación de periodo*. Este tipo de bifurcación se produce cuando, al variar un parámetro de control en un sistema dinámico, una órbita periódica

de periodo único pierde estabilidad y da lugar a una nueva órbita periódica de periodo doble. Si se continúa variando el parámetro, puede que se sigan dando más bifurcaciones, de manera que sobre las dos trayectorias anteriores, aparecerían ahora cuatro.

La repetición indefinida de este proceso se conoce como *cascada de duplicación de periodo*. En el límite, los valores de los parámetros en los que ocurren las bifurcaciones se acumulan en un valor finito. A partir de este punto, el sistema exhibe comportamiento caótico, caracterizado por la coexistencia de infinitas órbitas periódicas inestables y trayectorias sensibles a las condiciones iniciales.

La cascada de duplicación de periodo constituye, junto con las bifurcaciones de tipo Hopf y las órbitas homoclínicas, una de las principales rutas al caos. Sander y Yorke [3] demostraron que en sistemas unidimensionales y bidimensionales que dependen suavemente de un parámetro, la transición de un régimen no caótico a uno caótico implica la existencia de infinitas cascadas de duplicación de periodo bajo hipótesis genéricas. Esto implica que la bifurcación de duplicación de periodo no es un fenómeno aislado, sino una característica estructural de amplias clases de sistemas dinámicos.

Este tipo de cascadas se ha observado en numerosos sistemas físicos: desde osciladores de Van der Pol hasta péndulos forzados y ecuaciones de Duffing. Así se confirma la relevancia de la duplicación de periodo como mecanismo universal de transición al caos [2].

CAPÍTULO 2

OSCILADORES CAÓTICOS

Una vez realizada una introducción sobre sistemas caóticos, en este trabajo vamos a comenzar estudiando el comportamiento de un oscilador caótico formado por dos transistores, una única fuente de alimentación, resistencias y condensadores, utilizando [1] como principal referencia. En este artículo se presenta un sencillo circuito oscilante formado por dos transistores que, para determinados valores de sus parámetros, presenta dinámicas caóticas.

Este oscilador caótico se obtiene modificando un oscilador RC de desfase (*RC phase-shift oscillator*), de un solo transistor y auto-polarizado (el punto de operación se establece por sí mismo sin necesidad de una fuente de polarización externa adicional), con el fin de inducir el caos. Para ello, se añade a este un subcircuito que interactúa con una escalera RC, dando lugar a dinámicas caóticas. El circuito emplea únicamente dos transistores, no requiere inductores y funciona con una única fuente de alimentación. Por todo esto, resulta atractivo al tratarse de una fuente de oscilaciones caóticas simple, de bajo coste y que utiliza pocas componentes.

2.1 El circuito

Elwakil y Kennedy plantean la hipótesis de que todo oscilador caótico autónomo contiene en su núcleo un oscilador sinusoidal o de relajación [4]. En consecuencia, es posible obtener un oscilador caótico a partir de cualquier oscilador de este tipo. Motivados por esta idea, en [1] se modifica el conocido oscilador RC de desplazamiento de fase con el fin de generar caos.

En el enfoque de [1], se emplea un oscilador RC basado en transistores al que se le añade un pequeño circuito que interactúa directamente con la propia red RC, cuyo objetivo es introducir una parte no lineal en dicha red. Además, ni los valores de los componentes, ni la tensión de alimentación, son críticos, y el funcionamiento del circuito no depende de las propiedades dinámicas de los elementos activos, como ocurre a menudo en otros circuitos caóticos más simples que emplean un único transistor. La frecuencia principal de oscilación abarca desde menos de 1 Hz hasta varios cientos de kilohercios, rango que puede alcanzarse ajustando las capacidades y/o resistencias.

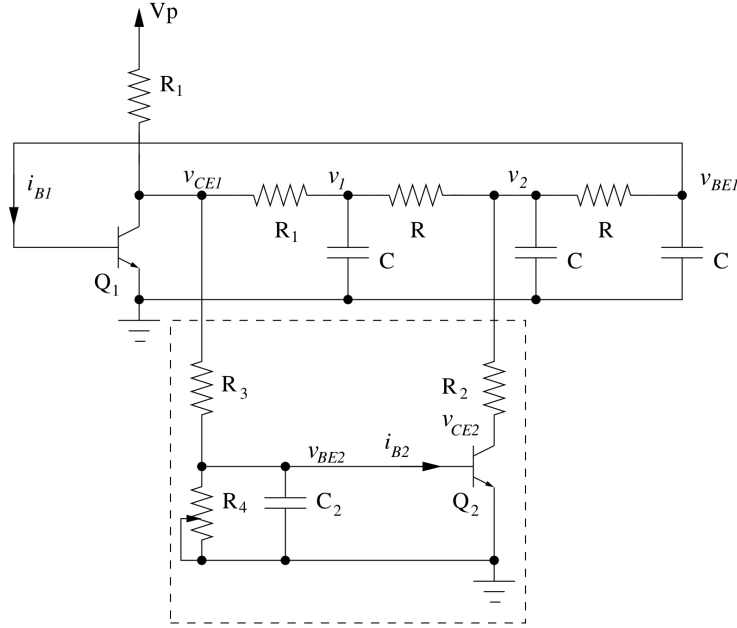


Figura 2.1: Oscilador caótico RC de desplazamiento de fase con dos transistores. Los componentes situados dentro del recuadro de línea discontinua son los responsables de generar la dinámica caótica en un oscilador RC con polarización automática, que por lo demás es de diseño convencional [1].

Se tiene también que el circuito presenta la interesante característica de que el oscilador central subyacente es claramente identificable en su estructura, lo que lo convierte en una excelente herramienta pedagógica introductoria para el estudio del caos.

2.1.1 El oscilador RC

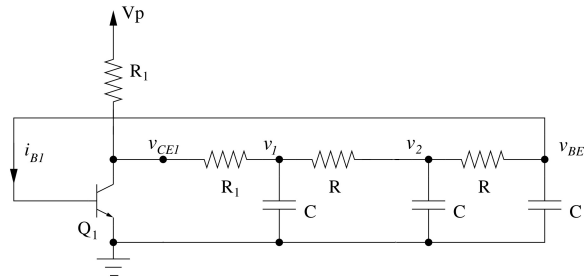


Figura 2.2: Circuito oscilador formado por una red de escalera RC y un transistor que funciona como amplificador.

Partimos de un oscilador RC basado en transistores al que se añade un pequeño subcircuito que interactúa directamente con la escalera RC, introduciendo una no linealidad. Para comprender cómo influye esta modificación, es fundamental analizar primero la escalera RC original, obtenida al eliminar el subcircuito que contiene al segundo transistor (véase la Figura 2.2), estudiando su comportamiento dinámico y su respuesta en frecuencia. Este análisis permite entender por qué el circuito es oscilante incluso antes de considerar fenómenos caóticos, sentando las bases para explicar la aparición de oscilaciones no lineales.

El oscilador RC está formado por un amplificador inversor, el transistor Q1 en configuración emisor de común, cuya salida a través del colector entrega una versión invertida y amplificada de la tensión de entrada en la base; y por una escalera de tres secciones RC que devuelve parte de la salida a la entrada con un desplazamiento de fase dependiente de la frecuencia. Para una frecuencia concreta, la red RC aporta, aproximadamente, 180° de desfase, y la retroalimentación del transistor Q1, otros 180° (inversión), con lo que la realimentación está en fase. Por último, el criterio de Barkhausen [5] nos dice que si el módulo del producto de la ganancia de la retroalimentación por la atenuación producida por la red RC es igual a 1, entonces, el circuito es capaz de mantener las oscilaciones.

La escalera RC es una red pasiva que toma la señal de salida del colector, la atenúa y le aplica un desplazamiento de fase dependiente de $\omega = 2\pi f$. Ahora, tanto la primera resistencia de la escalera RC como la resistencia del colector del transistor Q1 se han elegido iguales a $R/2$ ya que, como la resistencia de salida de un amplificador de emisor común es casi igual a la resistencia del colector, la resistencia combinada es igual a R , dando así lugar a la primera resistencia de la escalera RC [1].

Con esta consideración, obtenemos para este circuito las siguientes ecuaciones para los diferentes nodos:

$$\begin{cases} \frac{v_1 - v_{CE1}}{R} + j\omega C v_1 + \frac{v_1 - v_2}{R} = 0, \\ \frac{v_2 - v_1}{R} + j\omega C v_2 + \frac{v_2 - v_{BE1}}{R} = 0, \\ \frac{v_{BE1} - v_2}{R} + j\omega C v_3 = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Este sistema lineal se resuelve para la relación $\beta(j\omega) = \frac{v_{BE1}}{v_{CE1}}$, siendo estos voltajes los de salida y entrada de la red, respectivamente, y se obtiene lo siguiente tras simplificar:

$$\beta(j\omega) = \frac{1}{(j\omega RC)^3 + 5(j\omega RC)^2 + 6(j\omega RC) + 1}. \quad (2.2)$$

Queremos entonces hallar la frecuencia ω para la que la red suministra un desfase de 180° ; esto es, el valor para el que $\beta(j\omega)$ es real y negativo [6]. Si ponemos $x = \omega RC$, el denominador queda como sigue:

$$D = (jx)^3 + 5(jx)^2 + 6(jx) + 1.$$

Teniendo en cuenta que $j^2 = -1$ y que $j^3 = -j$,

$$D = (1 - 5x^2) + j(6x - x^3).$$

Entonces, para que la ganancia $\beta(j\omega)$ sea real, ha de ser que la parte imaginaria de D sea nula; esto es,

$$6x - x^3 = 0 \implies x(6 - x^2) = 0.$$

Por lo tanto, la solución no trivial es $x = \sqrt{6}$, luego la frecuencia de oscilación es la siguiente:

$$\omega = \frac{\sqrt{6}}{RC} \implies f = \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC}.$$

Evaluando ahora la parte real para $x = \sqrt{6}$, se obtiene el siguiente valor para la atenuación:

$$\beta(j\omega) = -\frac{1}{29},$$

el cual es, efectivamente, real y negativo. De este modo, la red entrega un desfase de -180° y una atenuación de módulo $1/29$.

Ahora, el transistor en emisor común proporciona una inversión de fase aproximada de 180° , con ganancia negativa, y la red RC aporta otros 180° , luego la fase total del lazo es de 360° . Como la atenuación es de $-1/29$, la ganancia ha de ser, en módulo, al menos igual a 29 para que pequeñas perturbaciones se amplifiquen y la oscilación arranque. Finalmente, la amplitud se estabiliza debido a las no linealidades del transistor, ya que cuando la señal crece, la ganancia efectiva baja hasta alcanzarse un régimen estacionario.

En el circuito se han utilizado los valores de $R = 10 \text{ k}\Omega$ y $C = 1 \text{ nF}$, por lo que la frecuencia a la que la escalera RC tiene un desfase de 180° necesario para las oscilaciones viene dada por

$$f = \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC} \approx 39 \text{ kHz}.$$

No obstante, la influencia de la base del transistor Q_1 sobre la última etapa RC provoca que la frecuencia de oscilación libre se desplace a 54 kHz [1].

2.1.2 Caos en el circuito

En esta sección vamos a analizar las características que debe reunir un circuito para que este pueda presentar un comportamiento caótico. En primer lugar, si vamos a estudiar un circuito como un sistema dinámico autónomo, es necesario que las variables que lo describen evolucionen según un conjunto de ecuaciones diferenciales. Es necesario para que haya caos que dichas ecuaciones no sean puramente algebraicas; para ello, necesitamos que el circuito incluya elementos capaces de almacenar energía, como condensadores o inductancias. En nuestro caso, este requisito se satisface gracias a la red RC que forma parte esencial del oscilador.

En cuanto al número de variables de estado, se tiene que para que un sistema pueda mostrar caos, su dimensión ha de ser, por lo menos, igual a tres [7]. Esto es una consecuencia directa del Teorema de Poincaré-Bendixon [8, pp. 117–121], el cual no vamos a enunciar dada su complejidad, y debido a que únicamente nos interesa el resultado que acabamos de mencionar.

La complejidad de un circuito, en términos dinámicos, depende de los componentes que almacenan energía. Como se comenta en [9], cada condensador o inductor introduce una nueva variable de estado en la descripción matemática del circuito. Por lo tanto, como nuestro circuito bajo estudio incluye cuatro condensadores, es susceptible a que pueda mostrar caos.

Finalmente, para que el sistema presente caos no basta con tener almacenamiento de energía: también debe introducirse una no linealidad. En nuestro caso, esta función la desempeña el transistor adicional acoplado a la red RC. Este componente es el responsable

de que el sistema pueda abandonar un régimen puramente oscilatorio y pasar a mostrar dinámica caótica para determinados valores de los diferentes parámetros.

2.2 Modelo matemático del circuito

A continuación, vamos a presentar las ecuaciones que rigen la dinámica del circuito, obtenidas aplicando las leyes de Kirchoff:

$$\begin{aligned}
 RC \frac{dv_1}{dt} &= -v_1 \left(1 + \frac{R}{R_1} - \frac{RR_3}{R_1(2R_3 + R_1)} \right) + v_2 + \frac{RR_3}{2R_3 + R_1} \left(\frac{V_p}{R_1} - i_{C1} + \frac{v_{BE2}}{R_3} \right), \\
 RC \frac{dv_2}{dt} &= -2v_2 + v_1 + v_{BE1} - i_{C2}R, \\
 RC \frac{dv_{BE1}}{dt} &= -v_{BE1} + v_2 - i_{B1}R, \\
 (2R_3 + R_1)C_2 \frac{dv_{BE2}}{dt} &= -v_{BE2} \left(2 + \frac{2R_3 + R_1}{R_4} \right) + v_1 + V_p - i_{C1}R_1 - i_{B2}(2R_3 + R_1).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

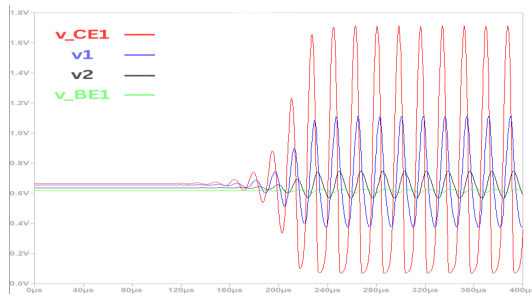
Las corrientes i_{B1} , i_{B2} , i_{C1} y i_{C2} están determinadas por el modelo del transistor, y son todas ellas función de los potenciales de base-emisor y de colector, v_{BE1} , v_{BE2} , v_{CE1} y v_{CE2} . Estas corrientes son las encargadas de introducir la parte no lineal en las ecuaciones (2.3). Nótese que, aunque la resistencia R_2 no aparece en (2.3), como $v_{CE2} = v_2 - i_{C2}R_2$, la corriente i_{C2} está influenciada por esta resistencia.

2.3 Simulaciones en LTspice

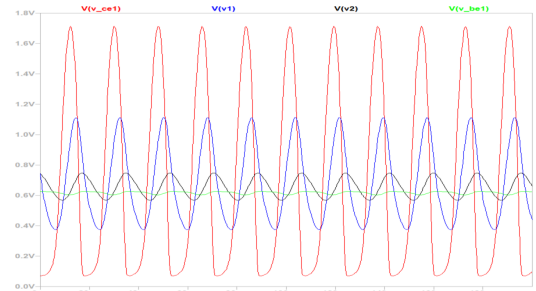
Para investigar el comportamiento caótico del circuito y verificar la dependencia de este con diferentes parámetros, se han realizado simulaciones con el programa LTspice. Salvo indicación contraria, los valores de los componentes utilizados son los siguientes:

$$R = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_1 = 5 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 15 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 30 \text{ k}\Omega,$$

$$C = 1 \text{ nF}, \quad C_2 = 360 \text{ pF}, \quad V_p = 5 \text{ V}.$$



(a) Crecimiento de las oscilaciones desde el instante inicial.



(b) Oscilaciones estables.

Figura 2.3: Simulación en LTspice de la escalera RC. Evolución temporal de v_{CE1} (rojo), v_1 (azul), v_2 (negro) y v_{BE1} (verde).

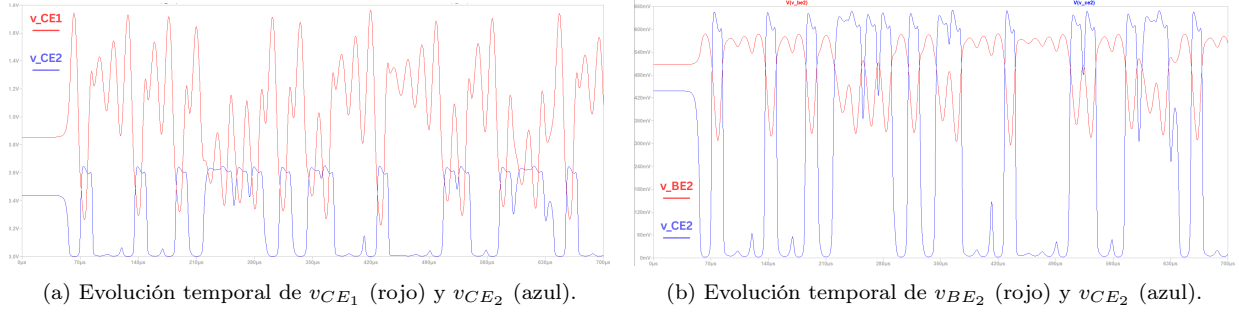


Figura 2.4: Evolución temporal de distintos voltajes para $R_4 = 44 \text{ k}\Omega$ y $V_p = 5 \text{ V}$ en régimen caótico para una serie de 0.7 ms con incrementos de 1 ns obtenida con LTspice.

Para el modelo de los transistores se han seleccionado los de tipo BC547C, pues son los que se han empleado en [1]; no obstante, el funcionamiento del circuito no depende de forma crítica de este modelo. Por último, la resistencia R_4 va a ser un parámetro que vamos a variar con el fin de observar cómo el oscilador pasa de régimen no caótico a caótico.

En primer lugar, para poner de manifiesto el comportamiento oscilatorio de la escalera RC, se ha modelado el circuito de la Figura 2.2 y se ha simulado. Para los valores de los diferentes parámetros indicados anteriormente se han obtenido las gráficas que se muestran en la Figura 2.3. En ellas podemos ver, en primer lugar, que las oscilaciones comienzan a crecer hasta que alcanzan un régimen estacionario en que el sistema permanece oscilando de manera indefinida.

Pasemos ahora al estudio del circuito completo. Como se ha comentado anteriormente, el subcircuito formado por Q_2 , R_2 , R_3 , R_4 y C_2 es el responsable del comportamiento caótico observado. Este bloque altera el equilibrio del circuito de forma que Q_1 puede permanecer polarizado como amplificador activo y, por tanto, mantener las oscilaciones que ya hemos visto que produce la escalera RC. Para valores pequeños de R_4 o de la tensión de alimentación V_p , el transistor Q_2 deja de conducir y recuperamos el circuito oscilador formado por la escalera RC.

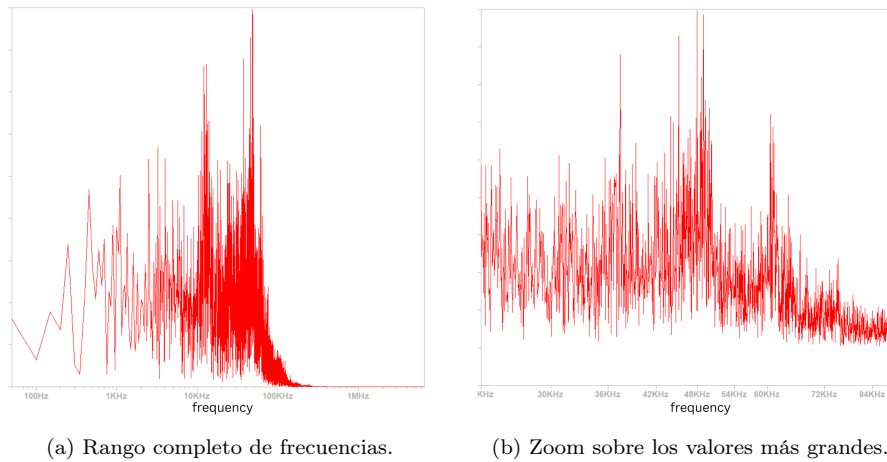


Figura 2.5: Transformada rápida de Fourier para la señal de v_{CE1} en régimen caótico para $R_4 = 44 \text{ k}\Omega$ y $V_p = 5 \text{ V}$, obtenida con LTspice.

Como se menciona en [1], el valor del parámetro $R = 44 \text{ k}\Omega$ da lugar a un régimen caótico. Utilizando este valor en las simulaciones de LTspice obtenemos, en primer lugar, las gráficas de la Figura 2.4. En la Figura 2.4a se muestran las evoluciones temporales de las tensiones de colector v_{CE1} y v_{CE2} . En esta se observa que el comportamiento dinámico de la tensión de colector de Q_2 consiste en saltos entre dos niveles, los cuales se corresponden a los estados de saturación y de corte del transistor. Entre estos saltos vemos que v_{CE1} oscila de manera creciente. Se tiene entonces que la tensión de colector de Q_2 presenta una distribución casi binaria, donde se tienen oscilaciones entre dos estados claramente diferenciados.

Por otro lado, en la Figura 2.4b, se muestra de nuevo la evolución temporal de v_{CE2} , pero esta vez, junto a la evolución de v_{BE2} . Aquí se ve claramente cómo, cuando v_{BE2} supera un cierto valor umbral de unos 500 mV, el transistor Q_2 cambia de estado y pasa a oscilar en torno a los 0 V. Además, utilizando la transformada rápida de Fourier de LTspice, obtenemos que la frecuencia básica de oscilación de v_{CE1} se sitúa en torno a los 48 kHz (véase la Figura 2.5).

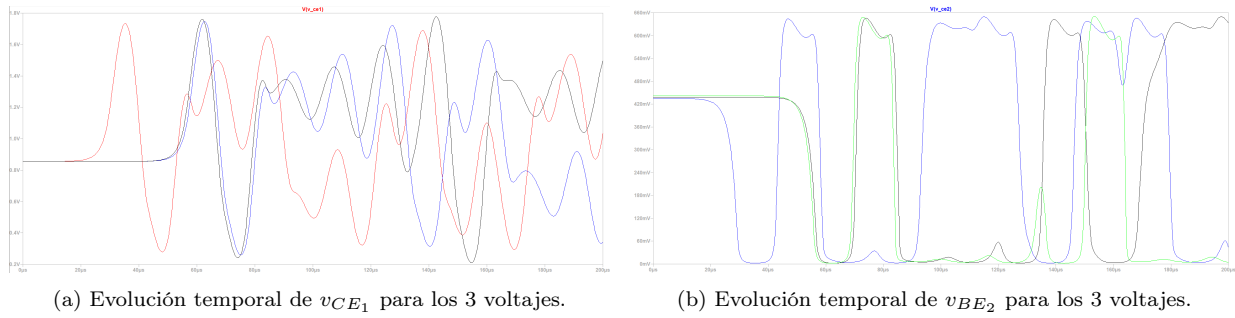


Figura 2.6: Variación de las condiciones iniciales para 3 valores del voltaje de alimentación V_p : 4.9 V, 5 V y 5.1 V.

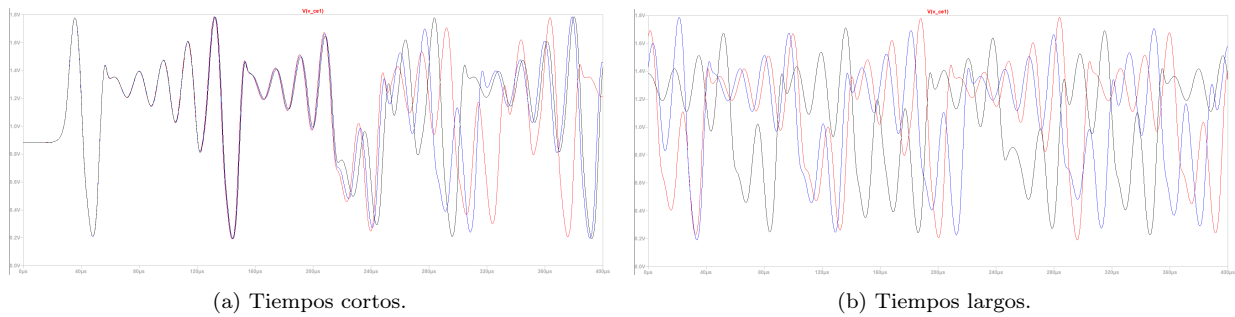


Figura 2.7: Evolución temporal de v_{CE1} para 3 valores de la temperatura: 20.9 °C (azul), 21 °C (rojo) y 22 °C (negro).

Queremos ilustrar también con el simulador tanto la sensibilidad a las condiciones iniciales de la dinámica caótica, como la sensibilidad a la temperatura del circuito. El primer caso se muestra en la Figura 2.6, y el segundo, en la Figura 2.7. En ambos casos vemos cómo las trayectorias comienzan siendo similares y, pasado un cierto tiempo, estas se separan hasta ser completamente diferentes.

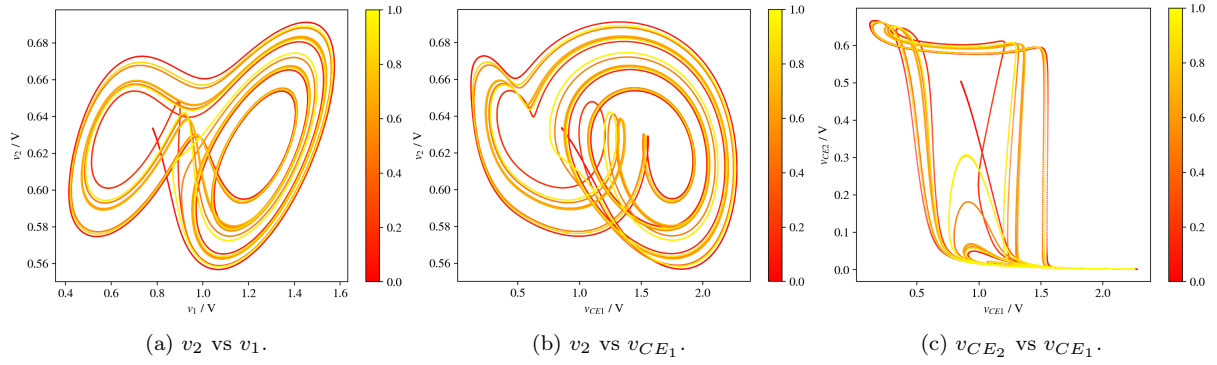


Figura 2.8: Proyecciones del atractor del circuito para $V_p = 5$ V y $R_4 = 44$ k Ω . Datos obtenidos de LTspice. La escala de color indica la transición durante la simulación, desde rojo al inicio, hasta amarillo al final de la simulación.

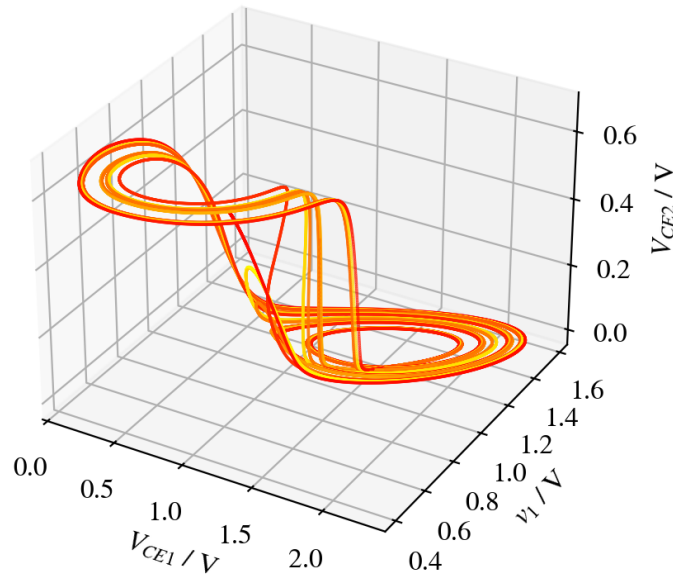


Figura 2.9: Vista tridimensional del atractor para $V_p = 5$ V y $R_4 = 44$ k Ω . La escala de color indica la transición durante la simulación, desde rojo al inicio, hasta amarillo al final de la simulación. Los datos se han obtenido simulando el circuito en LTspice, y la Figura se ha hecho con Python.

Por último, se han representado proyecciones bidimensionales del atractor en la Figura 2.8, y una proyección tridimensional (el sistema es de dimensión 4) en la Figura 2.9, con código de color todas ellas representando el tiempo que pasa desde el inicio de la simulación (rojo) hasta el final (amarillo). La naturaleza del circuito, cuya dinámica oscila entre dos estados claramente diferenciados, se pone de manifiesto en la Figura 2.9, así como los atractores.

CAPÍTULO 3

EL NUEVO CIRCUITO MODIFICADO

Como hemos comentado anteriormente, el circuito con los dos transistores es extremadamente sensible a la temperatura, y con apenas tocarlo, cambia completamente su comportamiento. Si bien podría resultar interesante estudiar su dependencia con la temperatura, en este trabajo hemos tratado de reducir esta dependencia con la temperatura con el fin, a su vez, de simplificar las ecuaciones matemáticas que lo describen. Para ello, hemos sustituido el segundo transistor Q_2 , el cual era el encargado de introducir la no linealidad en el circuito, y el más sensible a la temperatura, por un comparador. De este modo, reducimos la sensibilidad del circuito a la temperatura, aunque sin eliminarla por completo ya que el primer transistor, aunque actúa como amplificador, sigue siendo también sensible, aunque en menor medida.

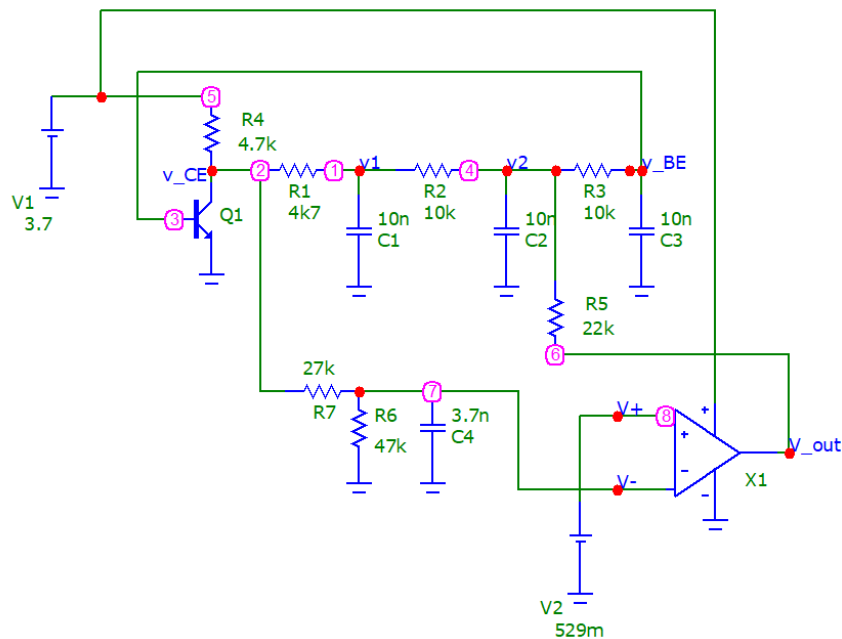


Figura 3.1: Esquema en MicroCap del nuevo circuito que sustituye el transistor Q_2 por un comparador.

El esquema del nuevo circuito se puede observar en la Figura 3.1, donde vienen especificados los nuevos valores de los diferentes componentes del circuito.

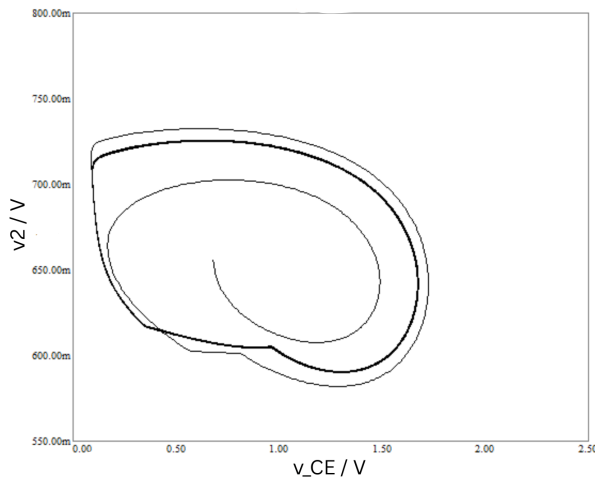
3.1 Funcionamiento del comparador

Un comparador es un dispositivo electrónico cuya función consiste en contrastar los valores de dos señales de entrada y entregar una señal de salida en función de cuál de ellas sea mayor. En este trabajo, el comparador se ha incluido en el circuito sustituyendo al transistor Q_2 (ver Figura 3.1).

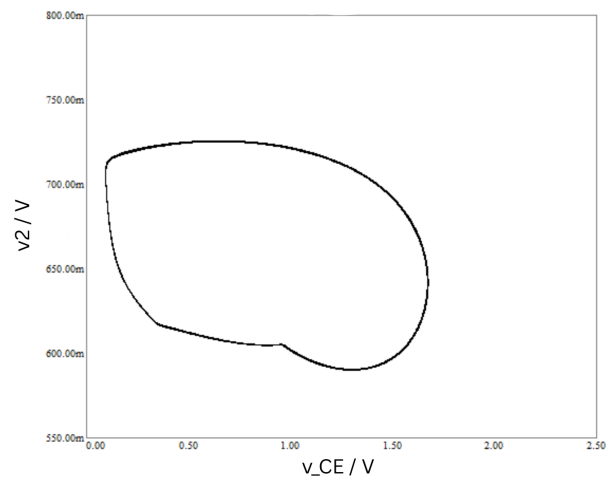
El esquema básico de un comparador consta de dos terminales de entrada, la no inversora, designada como V_+ , y la inversora, designada como V_- , así como de una salida. Su principio de funcionamiento es el siguiente:

- Si el potencial en la entrada no inversora es mayor que el de la entrada inversora, es decir, si $V_+ > V_-$, el dispositivo conmuta a un estado en el que la salida alcanza el nivel alto definido por la alimentación. En este régimen, la corriente de salida i_{out} puede considerarse nula y el comparador actúa como un interruptor abierto.
- En el caso contrario, cuando $V_+ < V_-$, la salida conmuta al nivel bajo, de modo que el potencial de salida se aproxima a cero, $V_{out} \approx 0$ V.

En esencia, el comparador se comporta como un dispositivo con dos estados estables bien diferenciados, dependiendo del signo de la diferencia de potencial entre sus entradas; luego, variar el parámetro V_+ modifica cuándo salta el comparador. Esta característica lo convierte en un sustituto natural del transistor que, en el circuito original, actuaba de forma semejante a un disparador Schmitt: proporciona una transición brusca entre estados y constituye el origen de la no linealidad necesaria para la aparición de un comportamiento caótico.



(a) Trayectoria del sistema desde el instante inicial de la simulación.



(b) Trayectoria del sistema para tiempos largos.

Figura 3.2: Representación de v_2 (eje y) frente a v_{CE} (eje x) de los datos obtenidos mediante simulación del circuito en régimen no caótico con MicroCap para el valor $V_+ = 425$ mV.

3.2 Simulación del circuito

En primer lugar, hemos utilizado el simulador de circuitos MicroCap para comprobar el funcionamiento del nuevo circuito con comparador y ver si su comportamiento es similar al circuito original. Los valores utilizados se muestran en la Figura 3.1. Cabe destacar que en el programa se ha fijado la temperatura a 21 °C (recordemos la dependencia con la temperatura del transistor).

Para ello, en este caso, hemos seleccionado como parámetro el voltaje del terminal positivo del comparador V_+ y hemos realizado un barrido de este para comprobar si el sistema presenta régimen caótico para determinados valores de este parámetro. En la Figura 3.2 se muestra la evolución del sistema en régimen no caótico para $V_+ = 425$ mV, tanto desde el instante inicial (Figura 3.2a), como para tiempos largos (Figura 3.2b). Comparando ambas gráficas se puede ver cómo el sistema empieza en un punto con unas determinadas condiciones iniciales, y su trayectoria evoluciona con el tiempo hasta alcanzar un ciclo límite, en el cual se queda oscilando de manera indefinida, siempre y cuando no perturbemos el sistema.

3.2.1 Barrido del parámetro V_+

En la Figura 3.3 se muestran las diferentes gráficas obtenidas al realizar un barrido sobre el parámetro V_+ , la tensión en el terminal positivo del comparador, comenzando con $V_+ = 476$ mV, llegando hasta $V_+ = 545$ mV. En estas observamos cómo el sistema comienza mostrando un ciclo límite, el cual se duplica y acaba dando lugar a una dinámica caótica. Al seguir aumentando el parámetro, observamos la aparición de un segundo atractor. Más adelante, veremos cómo este comportamiento es similar al obtenido mediante medidas experimentales del circuito real.

Además, en la Figura 3.4 se muestra el diagrama de bifurcaciones obtenido al variar el parámetro V_+ en el rango comprendido entre 450 y 600 mV. En el eje vertical se representa la frecuencia dominante de la órbita del sistema, mientras que el eje horizontal corresponde al valor de V_+ .

Para la construcción del diagrama de bifurcaciones se realizaron simulaciones en el software Micro-Cap, efectuando un barrido de 400 valores equiespaciados del parámetro V_+ en el rango ya comentado. Para cada uno de estos valores se calculó la transformada rápida de Fourier (FFT) de la señal con MicroCap, obteniendo 300 coeficientes que recogen la intensidad de las distintas frecuencias de oscilación presentes en la órbita. Estos resultados se organizaron en una matriz de datos que fue posteriormente procesada en MATLAB para generar un diagrama de intensidades. Con el fin de representar de manera adecuada la contribución relativa de cada frecuencia, las columnas de la matriz, correspondientes a cada valor de V_+ , se normalizaron entre 0 y 1, asignando así una escala de grises en la que las regiones más oscuras indican frecuencias dominantes en la dinámica del sistema.

En cuanto al diagrama, se observa cómo el sistema parte de un régimen periódico con una frecuencia bien definida, en torno a los $f \simeq 5.5$ kHz, que se mantiene estable hasta aproximadamente $V_+ \approx 475$ mV. A partir de este valor comienzan a apreciarse las primeras bifurcaciones de periodo, manifestadas en la aparición de nuevas ramas en el diagrama. En

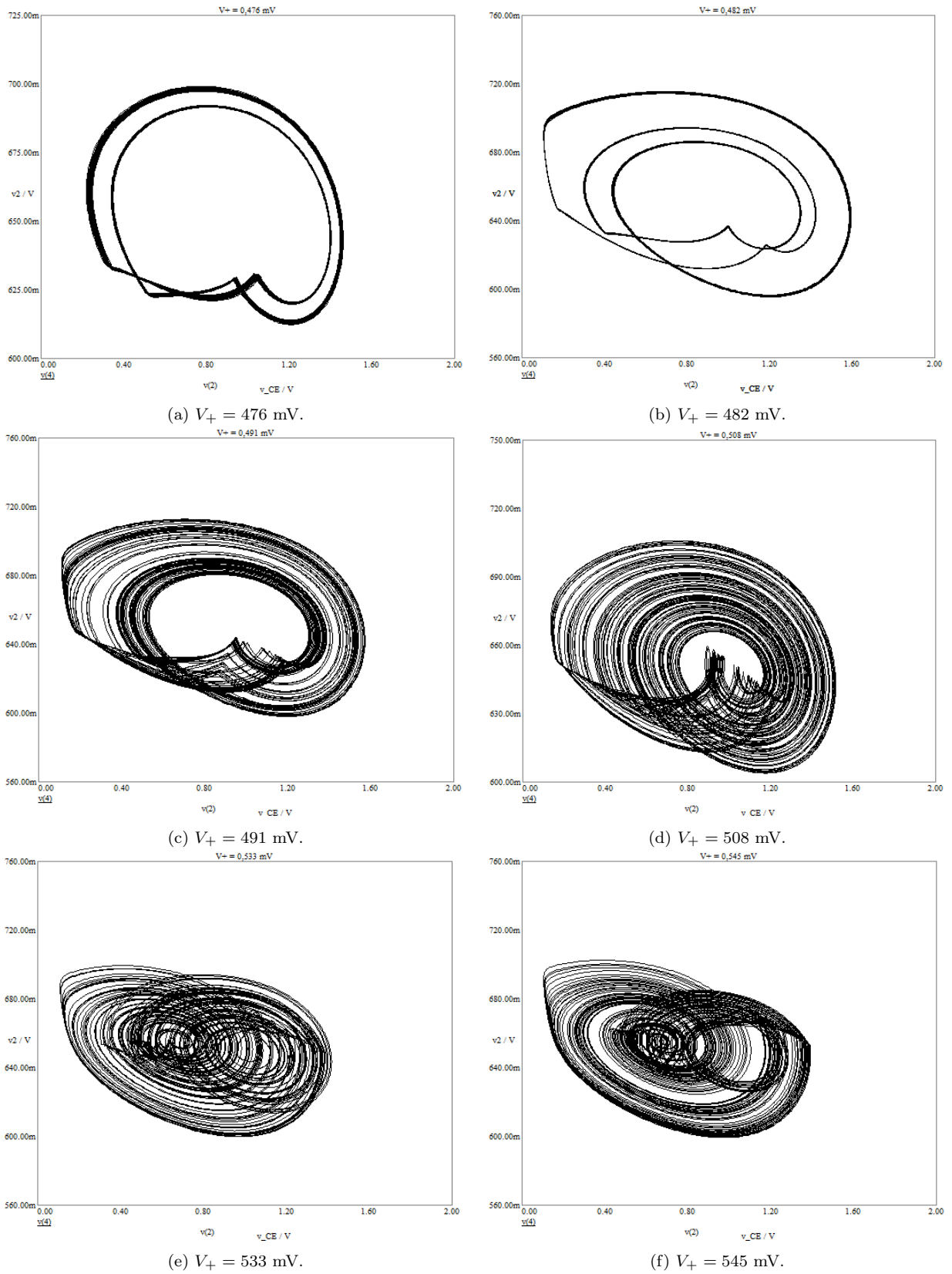


Figura 3.3: Representación gráfica de V_2 frente a v_{CE} para diferentes valores de V_+ .

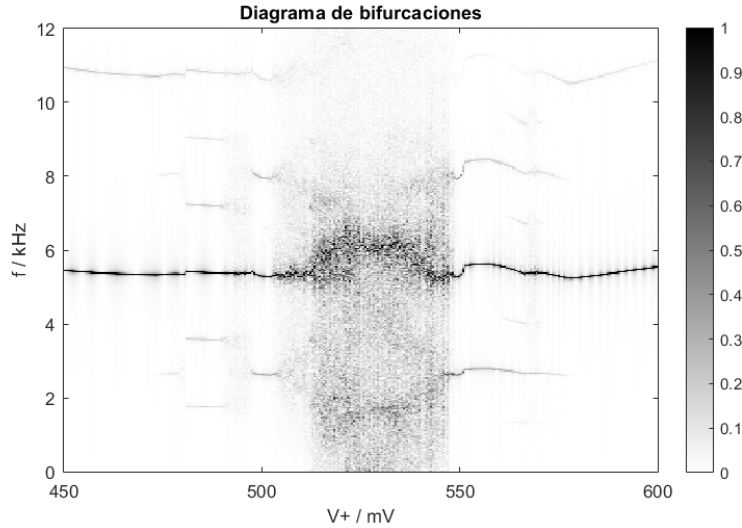


Figura 3.4: Diagrama de bifurcaciones unidimensional generado con datos de MicroCap al variar el parámetro V_+ .

particular, alrededor de $V_+ \approx 476$ mV, la órbita principal duplica su periodo, lo cual se puede observar en la Figura 3.3a. Por otro lado, la línea de un gris más claro que se observa en torno a los 11 kHz se corresponde con el primer armónico de la frecuencia fundamental de oscilación.

En torno a los 490 mV se observa una zona más difuminada, correspondiente a una ventana caótica. Un ejemplo del comportamiento de esta zona es el de la Figura 3.3c.

Al incrementar V_+ hacia valores cercanos a $V_+ \approx 500$ – 520 mV, el sistema entra en una zona claramente caótica: el espectro de frecuencias se densifica y aparecen múltiples componentes. En este intervalo, la Figura 3.3d. El régimen caótico persiste en un rango amplio, aproximadamente entre $V_+ \approx 495$ mV y 540 mV, con frecuencias distribuidas entre 0 y 8 kHz.

Más allá de $V_+ \approx 550$ mV, el sistema abandona el régimen caótico a través de una sucesión inversa de bifurcaciones. Así, el diagrama de bifurcaciones no solo permite identificar con precisión los intervalos de periodicidad y caos, sino que, al compararse con las gráficas del espacio de fases, proporciona una visión más completa de la dinámica: desde órbitas periódicas simples hasta atractores caóticos, y de nuevo, hacia regímenes con ciclos límite.

3.2.2 Otras medidas

Hemos observado entonces que para el valor del parámetro $V_+ = 529$ mV el circuito muestra un comportamiento caótico.

En la Figura 3.5 se muestra la evolución temporal del voltaje en el terminal negativo de entrada del comparador, v_- , y en el de salida, v_{out} . Además, hemos dibujado una recta en el valor de $V_+ = 529$ mV. Vemos entonces que, efectivamente, cuando $V_- > V_+$, el potencial de salida es nulo, mientras que si $V_- < V_+$, entonces, sí que se tiene un voltaje que oscila en el terminal de salida. Logramos entonces imitar el comportamiento de las oscilaciones bistables que tenía el circuito original para el potencial colector-emisor del segundo transistor.

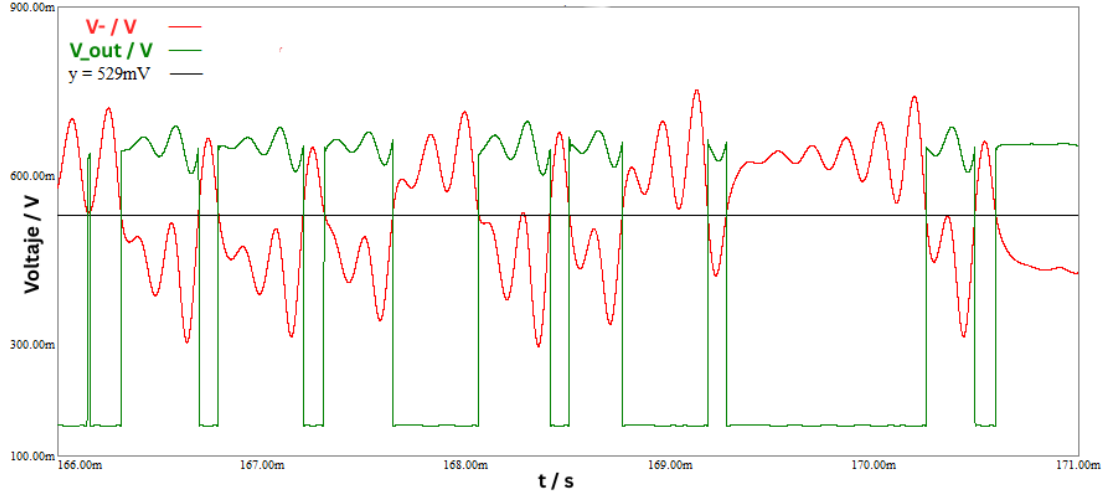


Figura 3.5: Evolución temporal de los voltajes del comparador V_- y V_{out} con $V_+ = 529$ mV en régimen caótico.

3.3 Resultados experimentales

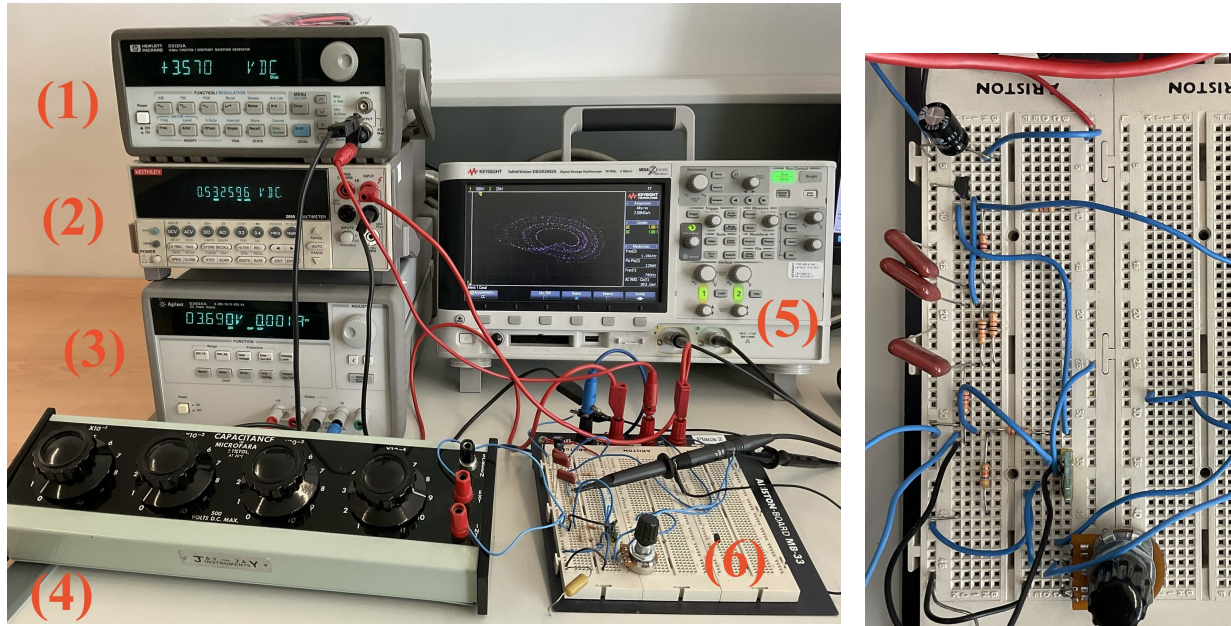
Por último, este nuevo circuito se ha diseñado sobre una placa. Se han tomado medidas con el osciloscopio y, con ayuda de programas como Excel o VEE, se han obtenido estos datos, se han representado en gráficas y se han realizado barridos de diferentes parámetros. En esta última sección comentaremos cómo hemos llevado a cabo este proceso, presentaremos los resultados obtenidos y comentaremos las similitudes y diferencias que hemos encontrado respecto al circuito original.

3.3.1 Montaje

El montaje realizado para las medidas experimentales se puede observar en la Figura 3.6. Conviene comentar los componentes que se han añadido con respecto al esquema de la simulación para mejorar el funcionamiento del circuito. En primer lugar, se ha colocado un condensador en paralelo con la entrada de la fuente de alimentación (3) con el fin de filtrar el ruido de entrada; por otro lado, si bien se tiene que el generador (1) es el encargado de alimentar el terminal V_+ del comparador, se ha colocado en la tabla un potenciómetro que divide entre 10 el potencial de entrada, permitiendo así obtener una mayor precisión, lo cual es aconsejable debido a la sensibilidad frente al parámetro V_+ que presenta el circuito. Por lo tanto, es el voltímetro (2) el que muestra el voltaje real V_+ del terminal positivo del comparador.

3.3.2 Variación del potencial V_+

El primer parámetro que hemos variado es el del potencial de entrada del terminal positivo del comparador. Para ello, hemos representado en el canal 1 del osciloscopio el potencial de colector-emisor del transistor, v_{CE} , y en el canal 2, el potencial del nodo del segundo condensador de la escalera, v_2 . Lo hemos representado en modo XY y se ha variado



(a) (1) Generador de funciones que alimenta el terminal V_+ del comparador. (2) Voltímetro que marca el potencial real V_+ . (3) Fuente de alimentación V_p del circuito. (4) Condensador de capacidad variable. (5) Osciloscopio. (6) Placa con el circuito.

(b) Zoom sobre el circuito.

Figura 3.6: Montaje experimental del circuito con comparador.

la tensión del generador desde 3,2 V hasta 4.1 V con el programa de VEE que se muestra en la Figura 3.7, produciendo una variación en el valor real de V_+ de entre 0,48824 V y 0,60261 V. El sexto decimal se ha despreciado, pues variaba bastante. Recordamos que podemos obtener esta precisión en V_+ gracias a la introducción de un potenciómetro en el circuito.

Hemos obtenido las gráficas para algunos valores concretos del potencial del generador, parando el osciloscopio y leyendo los valores con ayuda de EXCEL. Todas las gráficas obtenidas en el barrido del parámetro V_+ se pueden observar en la Figura 3.8, y el valor del parámetro V_+ usado se muestra encima de cada una de ellas.

La dinámica del circuito comienza siendo no caótica, alcanzando un ciclo límite de periodo único y duplicándose este para $V_+ \approx (488,24 \pm 0,01)$ mV (ver Figura 3.8a). A medida que variamos el potencial V_+ , se tiene otra duplicación de periodo, pasando a tener un ciclo límite de cuatro periodos (Figura 3.8b), y se alcanza una dinámica caótica para $V_+ = (516,76 \pm 0,01)$ mV (Figura 3.8c). Aquí observamos que la dinámica sigue siendo periódica y que la órbita gira en torno a un atractor extraño, moviéndose en un conjunto compacto y sin salir de este, llenando todo el espacio.

Al seguir aumentando el parámetro V_+ , desaparece el caos y aparece de nuevo un ciclo límite de triple periodo, o en otras palabras, el ciclo límite da tres vueltas alrededor del atractor (Figura 3.8d). Este se vuelve a duplicar en la Figura 3.8e, y pasan a darse seis vueltas. Entre las Figuras 3.8f y 3.8i vemos de nuevo alternancia entre presencia de caos y ausencia con duplicación de periodo. En la Figura 3.8j no tenemos caos, y se observa cómo el ciclo límite de periodo tres describe una especie de ciclo, el cual evoluciona, como se observa en las Figuras 3.8k y 3.8l, a un segundo atractor extraño.

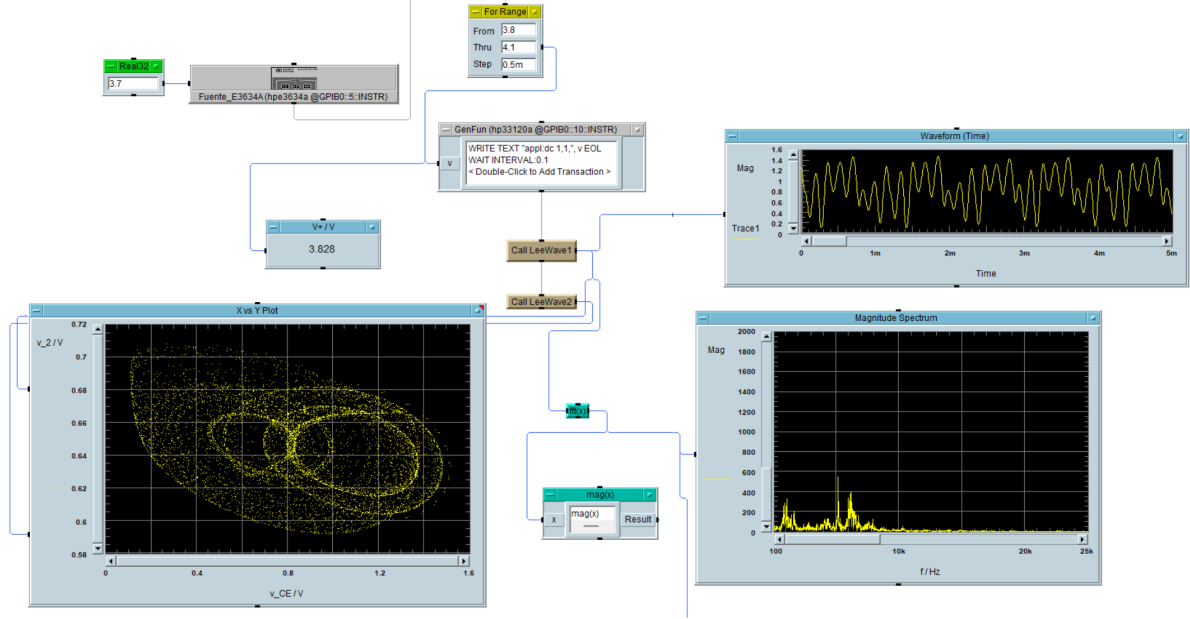


Figura 3.7: Esquema del programa utilizado en VEE para realizar barridos sobre el parámetro V_+ con lectura de datos del osciloscopio.

Este nuevo segundo atractor se observa de manera más clara en la Figura 3.8m, donde tenemos caos pero en un área delimitada. En las Figuras 3.8n y 3.8ñ, donde no hay caos, observamos que el ciclo límite da un número distinto de vueltas alrededor de cada atractor.

El sistema sigue evolucionando al variar el parámetro y cabe destacar que, en la Figura 3.8q, para un valor de aproximadamente $V_+ \approx (588, 56 \pm 0, 01)$ mV, es cuando se observa con mayor claridad la dinámica caótica del sistema con dos atractores extraños, y se observa cómo la órbita llena prácticamente todo el espacio.

Por último, en las Figuras 3.8r, 3.8s y 3.8t, vemos cómo el caos ha desaparecido y de nuevo la trayectoria del sistema alcanza un ciclo límite. Por mucho que se aumente el valor de V_+ , el sistema permanece en un estado similar al de la Figura 3.8t; esto se debe a que el valor del potencial v_- no supera los 0.6 V, y como tendríamos el valor de V_+ por encima de este, desaparecería la no linealidad producida por el comparador, ya que este permanecería en el mismo estado.

Hemos visto entonces con este barrido que el sistema es muy sensible al parámetro V_+ y que se puede obtener un comportamiento similar al circuito con dos transistores presentado en [1].

Por otro lado, para reafirmar el parecido con el otro circuito, se ha representado también el potencial v_1 frente al potencial de colector v_{CE} para distintos valores de V_+ del barrido (ver Figura 3.9). Vemos de nuevo que, aunque el trazado de la órbita es diferente, el comportamiento cualitativo es el mismo: se tienen cascadas de duplicación de periodo para llegar a régimen caótico. Se alternan ventanas en las que el sistema alcanza ciclos límite con situaciones en las que el sistema presenta caos. También, inicialmente se tiene un único atractor, y posteriormente, aparece un segundo.



Figura 3.8: Barrido del parámetro V_+ : representación del voltaje v_2 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro.



Figura 3.9: Barrido del parámetro V_+ : representación del voltaje v_1 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro.

Diagrama de bifurcaciones

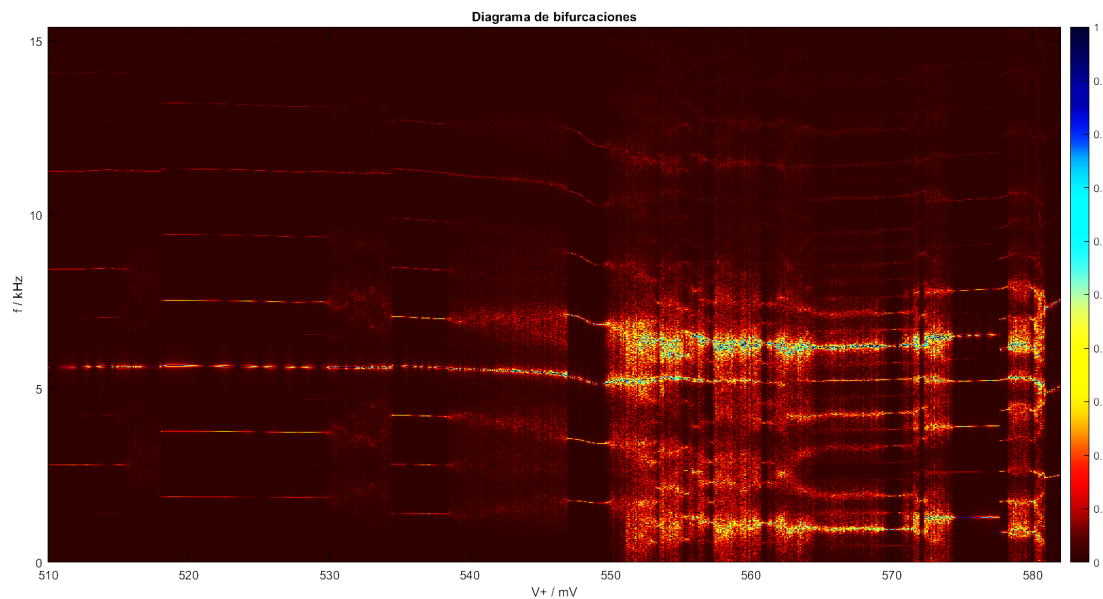


Figura 3.10: Diagrama de bifurcaciones para el parámetro V_+ en el rango 510 – 582 mV con datos obtenidos con el osciloscopio.

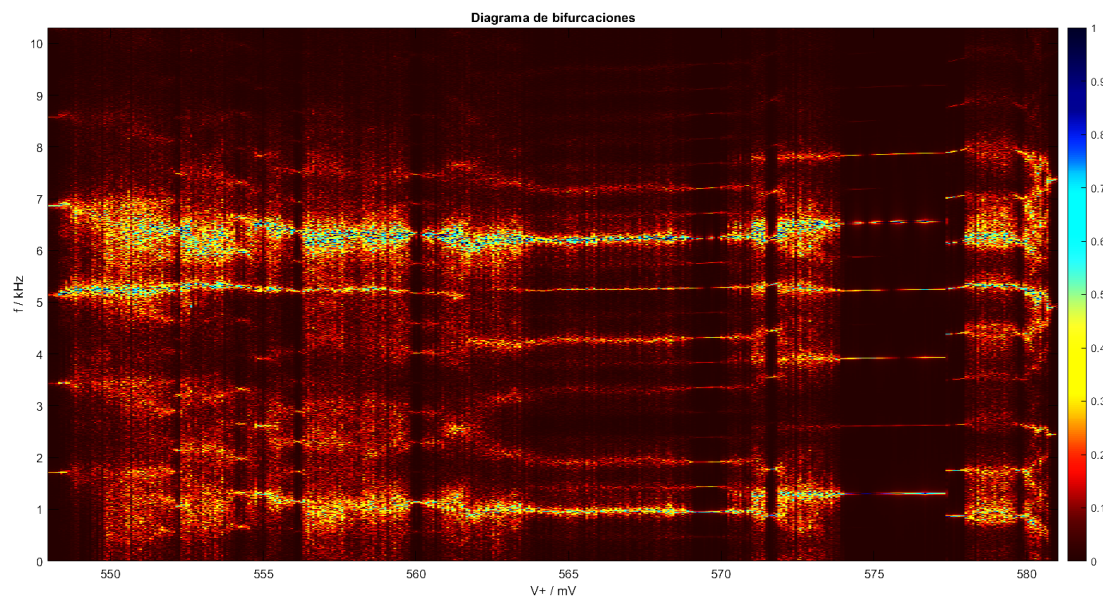


Figura 3.11: Zoom sobre el diagrama de bifurcaciones en el rango 548 – 581 mV.

Una vez más, hemos obtenido el diagrama de bifurcaciones del sistema al barrer el parámetro V_+ (ver Fig. 3.10). En este caso, los datos provienen directamente de las medidas realizadas con el osciloscopio. Con ayuda del programa VEE, para cada valor de V_+ se calculó la transformada rápida de Fourier (FFT) y se almacenaron las intensidades de cada frecuencia en un archivo de texto. Posteriormente, el procesamiento con Python generó una matriz de alrededor de 1000×1000 puntos, a partir de la cual se construyó el diagrama de intensidades con MATLAB.

Este tipo de representación tiene una ventaja clara: permite explorar de un vistazo la evolución global del sistema y visualizar las transiciones entre distintos regímenes dinámicos sin necesidad de elaborar una gráfica individual para cada caso. Así se obtiene una representación mucho más completa de los cambios de comportamiento.

En el rango de 510–550 mV se distinguen claramente ventanas en las que el sistema alterna entre regímenes periódicos y caóticos. Esto concuerda con las señales registradas en las Figuras 3.8b, 3.8c, 3.8d y 3.8e. Por ejemplo, en la Figura 3.8b se aprecia un ciclo de cuatro oscilaciones, lo cual se corresponde con las cuatro líneas más marcadas en el diagrama alrededor de 510–515 mV. En cambio, en la Figura 3.8c el sistema recorre únicamente tres vueltas, pero en el diagrama aparecen más componentes debido a la presencia de armónicos de las frecuencias principales. Esto ilustra bien cómo los diagramas de bifurcación en el dominio de la frecuencia no solo reflejan las oscilaciones fundamentales, sino también el espectro asociado.

Para el intervalo de 550–580 mV realizamos un zoom específico (ver Fig. 3.11), ya que las ventanas de periodicidad se vuelven más estrechas y la dinámica cambia con gran sensibilidad. Aunque el aspecto general resulta más borroso, todavía se pueden identificar regiones de comportamiento periódico, por ejemplo cerca de 552, 554, 555, 556 y 560 mV. En estas zonas aparecen líneas espectrales más definidas, que contrastan con las regiones caóticas cercanas. El desenfoque refleja tanto el ruido experimental del circuito como la sensibilidad extrema del sistema en las proximidades del caos, donde pequeñas perturbaciones externas o fluctuaciones internas bastan para modificar el espectro.

En conjunto, los diagramas muestran no solo la alternancia entre estados periódicos y caóticos, sino también la coexistencia de armónicos y subarmónicos, la fragmentación de las ventanas periódicas y las consecuencias de la sensibilidad del sistema, y, como hemos comentado, si bien las gráficas dan una idea de la trayectoria del sistema, estos diagramas dan una visión general desde el punto de vista cualitativo de la evolución del comportamiento del circuito.

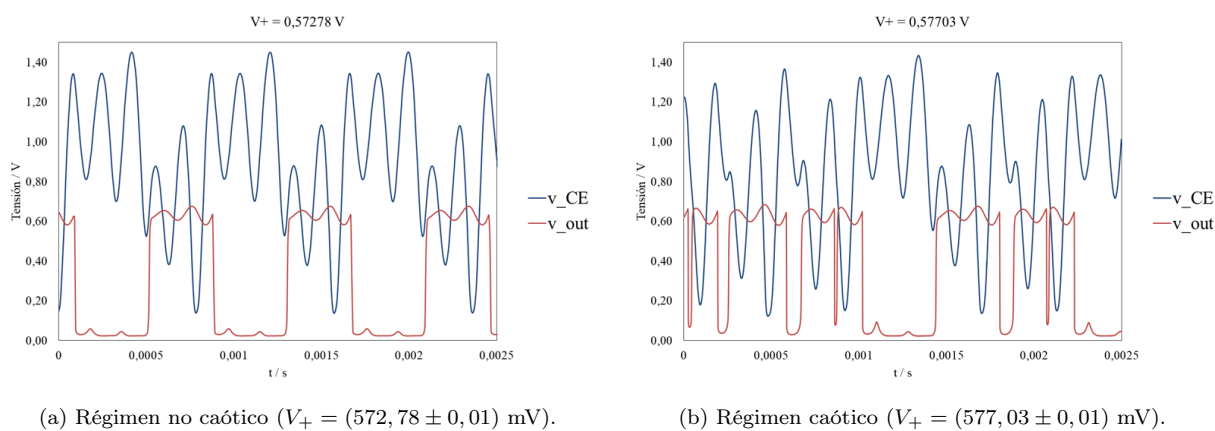


Figura 3.12: Evolución temporal de la tensión de colector v_{CE} (azul) y de la tensión de salida del comparador v_{out} (rojo) obtenida con el osciloscopio.

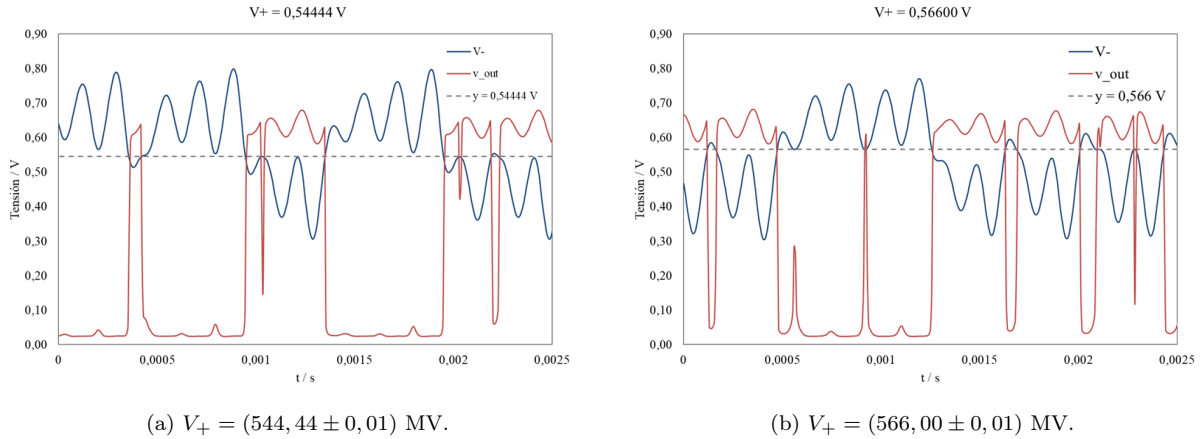


Figura 3.13: Evolución temporal de la tensión v_- (azul) y de la tensión de salida del comparador v_{out} (rojo) en régimen caótico, obtenida con el osciloscopio.

3.3.3 Otras medidas

Con el barrido que hemos realizado, hemos podido saber en torno a qué valores de la tensión V_+ el circuito presenta un comportamiento caótico. Por ello, hemos realizado medidas de otros valores en régimen caótico para ver el comportamiento del resto de variables del circuito.

Primeramente, se muestran en la Figura 3.12 las evoluciones temporales del potencial de colector del transistor y del potencial de salida del comparador, tanto en régimen caótico como no caótico. Vemos que, cualitativamente, el comportamiento es muy similar al obtenido en las simulaciones para el circuito con los dos transistores (Figura 2.4). Se observan dos estados claramente diferenciados de v_{out} donde se producen oscilaciones, que se corresponden con el caso de $V_+ > v_-$, y de $V_+ < v_-$. Asimismo, el potencial de colector también se mueve en dos estados de mayor y menor potencial, donde se presentan oscilaciones crecientes.

Por otro lado, en la Figura 3.13 hemos representado el potencial de entrada del terminal negativo del comparador, y el de salida, para probar que, como habíamos visto en las simulaciones, en el momento en el que v_- cruza el valor umbral fijado para v_+ , el potencial de salida salta de un estado a otro.

Asimismo, también para visualizar mejor estos dos estados diferenciados, hemos representado el voltaje v_1 frente a la tensión de salida v_{out} en la Figura 3.14. Vemos de nuevo cómo el sistema salta entre dos estados. Cuando se tiene caos (Figura 3.14a), vemos cómo, en el estado superior, se tiene un atractor extraño, y en el inferior, que las oscilaciones son prácticamente horizontales ya que, la mayoría del tiempo, el valor de v_{out} es casi cero y apenas oscila. Cabe destacar también que hay puntos intermedios entre los estados superior e inferior, lo que evidencia que, en la práctica, el cambio de estado del comparador no se produce de manera brusca.

En la Figura 3.14b se representa una situación sin caos, y podemos ver claramente cómo el sistema alcanza un ciclo límite que da cuatro vueltas tanto en el estado superior como en el inferior. Además, estas cuatro vueltas se pueden observar también en forma de los

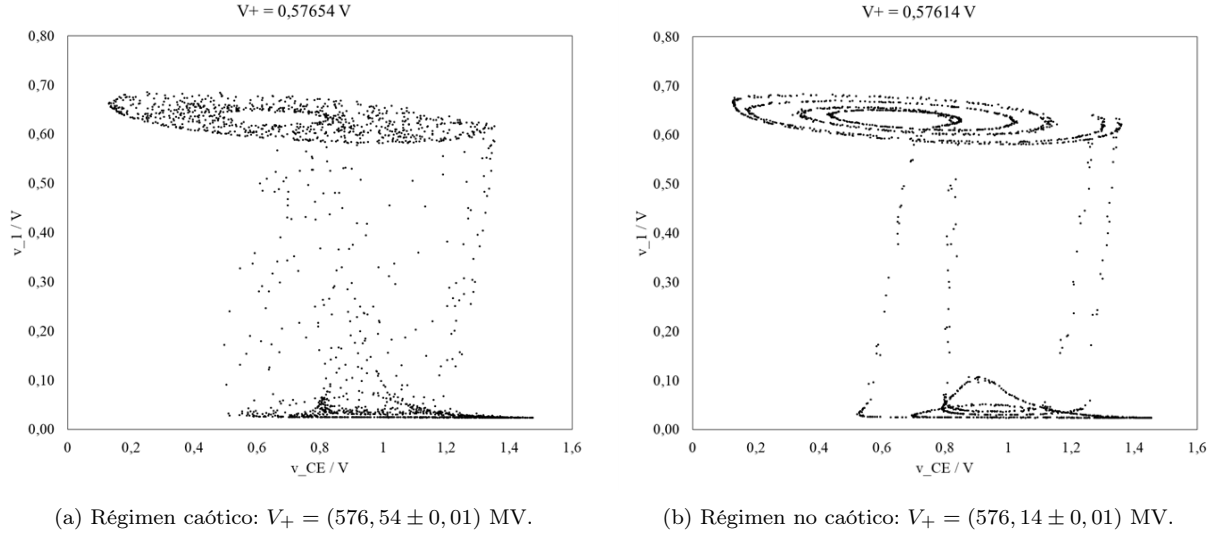


Figura 3.14: Representación de v_{out} (eje y) frente a v_{CE} (eje x) para los valores medidos con el osciloscopio.

cuatro caminos perfectamente determinados que sigue la trayectoria al pasar de un estado a otro.

El voltaje de alimentación como parámetro

Para terminar esta sección, se ha realizado también un barrido sobre el voltaje de alimentación del circuito, V_p , fijando en este caso el valor de $V_+ = (580 \pm 3)$ mV. El error se debe a que variar V_p influye en la propia tensión de entrada del comparador, V_+ . Las gráficas obtenidas para el barrido completo se muestran en el Apéndice B, en la Figura B.1, mientras que en la Figura 3.15 hemos incluido únicamente algunas de las gráficas más relevantes.

Este barrido se ha hecho con el fin de mostrar que también se puede elegir este valor como parámetro y obtener, de nuevo, un comportamiento similar al obtenido variando V_+ (Figura 3.8). El sistema comienza con ciclo límite que da una única vuelta (no se muestra) y sufre duplicaciones de periodo (Figura 3.15a) hasta alcanzar el caos (Figura 3.15b). A partir de ahí, se alternan ventanas periódicas con regímenes completamente caóticos (Figura 3.15e), hasta recuperar el estado de un único ciclo límite (Figura 3.15f).

Vemos también que, si bien inicialmente se tienen dos atractores, al aumentar el voltaje de alimentación, pasamos a tener solamente uno. Se puede observar también cómo, en muchas ocasiones, las transiciones entre regímenes periódicos y caóticos no son bruscas; las órbitas dejan de ser periódicas pero, inicialmente, la dinámica caótica tiene lugar en un entorno de los ciclos límite que se tenían (ver Figuras 3.15c y 3.15d).

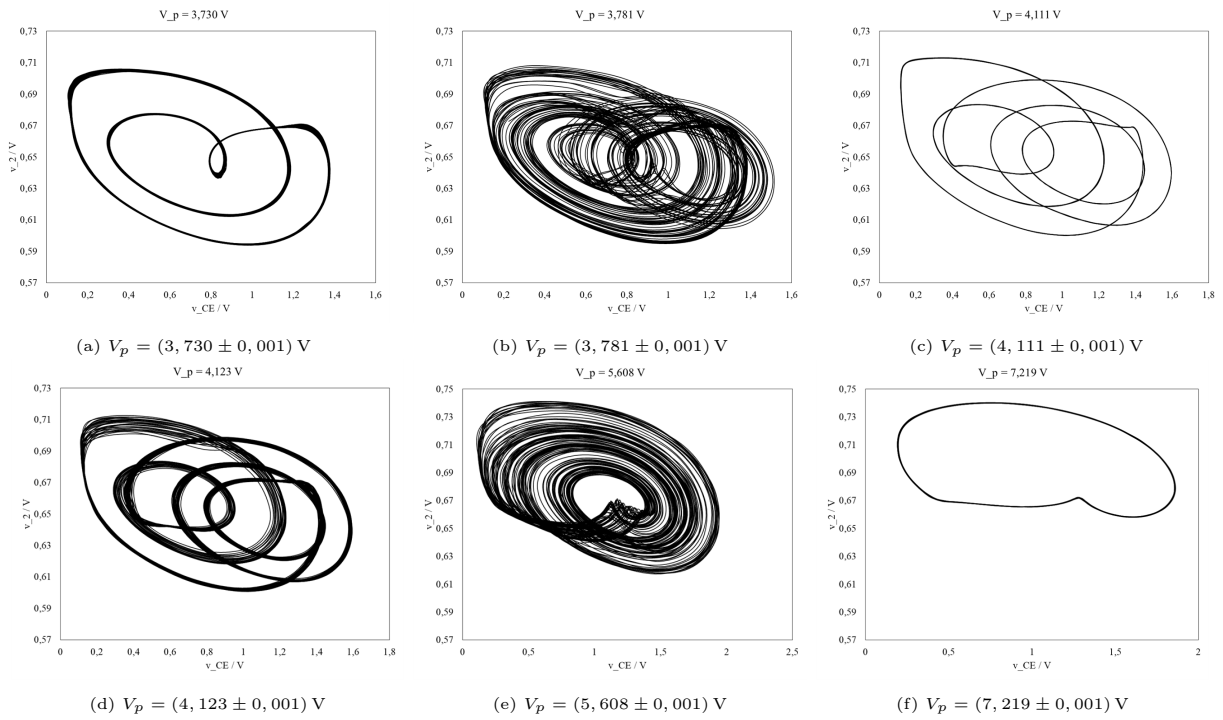


Figura 3.15: Barrido del voltaje de alimentación V_p como parámetro: representación del voltaje v_2 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro, con $V_+ = 529$ mV.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En este capítulo final se presenta una síntesis del trabajo realizado, destacando los principales logros alcanzados, las dificultades encontradas y las posibles líneas de continuación. El estudio comenzó con una revisión de los conceptos matemáticos fundamentales relacionados con los sistemas dinámicos y el caos, que sirvió como base teórica para abordar posteriormente el análisis de oscilaciones caóticas en circuitos electrónicos.

Hemos presentado un circuito especialmente simple desde el punto de vista electrónico que es capaz de generar oscilaciones caóticas para determinados valores de sus parámetros. Mediante simulaciones en LTspice se verificó la presencia de comportamiento caótico, obteniendo resultados acordes con los presentados en el artículo de Keuninckx y sus colaboradores [1]. Sin embargo, este circuito original presentaba una alta sensibilidad a la temperatura y un modelo matemático de gran complejidad, lo que dificultaba tanto su caracterización experimental como su análisis teórico.

Con el fin de superar estas limitaciones, se propuso una modificación que consistía en sustituir uno de los transistores del circuito original por un comparador. Esta sustitución permitió simplificar las ecuaciones que gobiernan el sistema, ya que se pasó de corrientes dependientes del modelo de transistor a un dispositivo con dos estados claramente diferenciados. En otras palabras, se complicó el diseño electrónico para lograr simplificarlo matemáticamente.

El nuevo circuito fue caracterizado tanto mediante simulaciones en MicroCap como experimentalmente en el laboratorio, utilizando un osciloscopio y programas de adquisición de datos. Se observó que su dinámica reproduce cualitativamente la del circuito original: el comparador actúa como un interruptor, imitando el comportamiento no lineal del transistor en saturación y corte. Además, al variar el parámetro de control V_+ , se observaron cascadas de duplicación de periodo que dan lugar a regímenes caóticos, así como la aparición de atractores adicionales, es decir, comportamientos similares a los del circuito original.

El análisis se completó con la obtención de diagramas de bifurcaciones, con datos de simulaciones y experimentales, que mostraron de forma clara la transición entre regímenes periódicos y caóticos, así como la alternancia de ventanas con y sin caos. Estos resultados ponen de manifiesto la característica esencial de los sistemas caóticos: la extrema

sensibilidad a las condiciones iniciales y a variaciones mínimas de parámetros, lo que en la práctica se tradujo en una gran inestabilidad del sistema incluso frente a perturbaciones externas muy pequeñas.

Quiero destacar también que durante la realización de este trabajo se han utilizado distintos programas, como LTspice y MicroCap, para la simulación de circuitos; VEE y Excel, para realizar barridos de parámetros y lecturas con el osciloscopio en el laboratorio; y Python y MATLAB, para el tratamiento y procesamiento de datos obtenidos de simulaciones y del osciloscopio, y para la construcción de gráficas y de diagramas de bifurcación.

Entre las ventajas del circuito estudiado destaca su simplicidad de implementación y la posibilidad de ajustar el rango de frecuencias de operación variando los valores de los condensadores y de las resistencias. Estas características lo convierten en un sistema versátil, con potencial aplicación en áreas como la generación de números aleatorios, criptografía basada en caos, robótica y sincronización de sistemas caóticos. Adicionalmente, la ausencia de inductores reduce el riesgo de acoplamientos magnéticos no deseados, lo que refuerza su interés para el estudio de redes caóticas en electrónica.

Por último, cabe señalar el valor pedagógico del circuito propuesto, ya que su diseño sencillo y su capacidad de reproducir fenómenos caóticos complejos lo convierten en una herramienta didáctica útil para introducir conceptos de caos y sistemas dinámicos en el ámbito universitario. Como continuación natural de este trabajo, sería de interés profundizar en otros métodos para caracterizar el caos del sistema, como los exponentes de Lyapunov, explorar la sincronización entre varios osciladores de este tipo y analizar la robustez del diseño frente a diferentes condiciones de ruido y variabilidad de componentes.

APÉNDICE A

FORMALISMO MATEMÁTICO SOBRE SISTEMAS DINÁMICOS

A.1 Soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

Definición A.1. Supongamos que la función $\mathbf{f}$ es continua en un abierto A de $\mathbb{R}^n$. Entonces, diremos que la función $\mathbf{x}(t)$ es solución del sistema autónomo (1.1) en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si es diferenciable en I y para cada $t \in I$, $\mathbf{x}(t) \in A$ y verifica que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (\text{A.1})$$

Sean ahora $t_0 \in I$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, llamaremos problema de valor inicial de Cauchy a

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Para poder establecer la existencia de soluciones de este problema, vamos a definir el concepto de condición de Lipschitz.

Definición A.2. Se dice que una función $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente lipschitziana en A si existe una constante positiva L tal que para cada par $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ se tiene que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (\text{A.3})$$

Diremos que $\mathbf{f}$ es localmente lipschitziana si para cada $\mathbf{x}_0 \in A$ existe un entorno $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{x}_0$ y una constante L_0 tal que para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq L_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; \quad (\text{A.4})$$

es decir, $\mathbf{f}$ es uniformemente lipschitziana en el entorno de $\mathbf{x}_0$. Tomaremos por simplicidad que

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}. \quad (\text{A.5})$$

Vamos a tener que toda aplicación $\mathbf{f}$ de clase $\mathcal{C}^k(A)$ es localmente lipschitziana. Veamos entonces la existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy no lineal.

Teorema A.3 (Teorema fundamental de existencia y unicidad de soluciones). Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación localmente lipschitziana. Sean también $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial (A.2) tiene una única solución $\mathbf{x}(t)$ definida en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Una prueba de este último resultado puede encontrarse en [11, pp. 74–76]. En lo que sigue, consideraremos, sin pérdida de generalidad, que $t_0 = 0$ dado que la mayoría de los fenómenos dinámicos son invariantes frente a traslaciones temporales. El comportamiento del sistema no depende del instante exacto en que comencemos a observarlo, siempre que mantengamos constantes las condiciones iniciales.

El teorema anterior tiene una versión más fuerte que nos dice que para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, existe un intervalo maximal $J(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}$ en el que el problema de valor inicial tiene una única solución, $\mathbf{x}(t)$, con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Además, el intervalo va a ser abierto, luego se tendrá $J(\mathbf{x}_0) = (\alpha, \beta)$. Llamaremos a $J(\mathbf{x}_0)$ intervalo maximal de existencia del problema de valor inicial (A.2).

A.2 Sistemas dinámicos

En relación con el flujo de una ecuación diferencial, diremos que un *sistema dinámico* en $\mathbb{R}^n$ es una función diferenciable

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{A.6})$$

de manera que $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_t(\mathbf{x})$ verifica las siguientes propiedades:

1. $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función identidad, $\phi_0(\mathbf{x}_0) = \phi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.
2. La composición de funciones se comporta de la siguiente manera:

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s},$$

para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

Nótese entonces que esta definición está íntimamente relacionada con el sistema de ecuaciones diferenciales que hemos introducido anteriormente; esto es, un sistema dinámico (A.6) siempre da lugar a un campo de vectores en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera: dada la aplicación ϕ_t , sea

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi_t(\mathbf{x}).$$

Entonces, ϕ_t es el mapa temporal asociado al flujo del sistema no lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

De manera análoga, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

da lugar a un sistema dinámico suave siempre y cuando el mapa temporal del flujo esté bien definido y sea diferenciable para todo instante de tiempo t . No obstante, este no será siempre el caso. De todas formas, en lo que sigue, usaremos el término sistema dinámico para referirnos indistintamente a la aplicación (A.6) y al sistema (A.7).

A.3 Linealización y puntos de equilibrio

Definición A.4. Diremos que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema autónomo (1.1) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Diremos que un punto de equilibrio $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es hiperbólico si todos los autovalores de la matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ evaluada en $\mathbf{x}_0$, $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, tienen parte real no nula.

Diremos entonces que el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x} \quad (\text{A.8})$$

es la linealización de (1.1) en $\mathbf{x}_0$.

Supongamos que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio. Entonces, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, luego, por el Teorema de Taylor,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x} + \frac{1}{2}D^2\mathbf{f}(\mathbf{0})(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \dots \quad (\text{A.9})$$

Se tiene entonces que el sistema lineal $D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x}$ es una buena primera aproximación de la función no lineal $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ cerca de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; luego cabría esperar que el comportamiento del sistema no lineal (1.1) cerca de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se aproxime por el comportamiento de su linealización en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Definición A.5. Diremos que un punto de equilibrio $\mathbf{x}_0$ es un *sumidero* si todos los autovalores de la matriz jacobiana $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real negativa; diremos que el punto de equilibrio es una *fuentes* si tienen parte real positiva; y por último, diremos que el punto de equilibrio es un *punto de silla* si se tiene que $\mathbf{x}_0$ es un punto hiperbólico, y que la matriz jacobiana tiene al menos un autovalor con parte real positiva, y al menos otro con parte real negativa.

A.3.1 El Teorema de Hartman-Grobman

El Teorema de Hartman-Grobman es un importante resultado dentro de la teoría local cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este Teorema nos dice que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico, $\mathbf{x}_0$, el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}.$$

A.4 Órbitas periódicas y conjuntos límite

Vamos a seguir [12] para introducir algunas nociones sobre conjuntos límite y órbitas periódicas, los cuales van a estar presentes en el circuito que estudiaremos en este trabajo.

Definición A.6. Diremos que un punto $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^n$ está en el conjunto límite ω de la curva solución $\phi(t, \mathbf{x}_0)$, al cual denotamos por $\omega(\mathbf{x}_0)$, si existe una sucesión creciente de puntos de la órbita (esto es, a medida que $t \rightarrow +\infty$) que converge al punto $\mathbf{z}$. Más concretamente, $\mathbf{z} \in \omega(\mathbf{x}_0)$ si existe una sucesión creciente no acotada de números reales, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}_0) = \mathbf{z}$$

Definición A.7. Diremos que un punto $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^n$ está en el conjunto límite α de la curva solución $\phi(t, \mathbf{x}_0)$, al cual denotamos por $\alpha(\mathbf{x}_0)$, si existe una sucesión decreciente no acotada de números reales, $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, con $t_n \rightarrow -\infty$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}_0) = \mathbf{z}.$$

Se tiene que si $\mathbf{x}_0$ es un punto de equilibrio, entonces, $\omega(\mathbf{x}_0) = \alpha(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0\}$. Nótese además que, para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, el conjunto límite α de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es el conjunto límite ω de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Definición A.8. Diremos que una solución $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ del sistema autónomo (1.1) es una *órbita periódica*, o que es un *ciclo*, si se verifica que $\mathbf{x}_0$ no es un punto de equilibrio y que existe un cierto número real $T > 0$ de manera que

$$\phi(t + T, \mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0), \quad \forall t.$$

El menor valor T que verifica lo anterior se denomina *periodo de la órbita*.

Definición A.9. Diremos que un conjunto límite es un *ciclo límite* si este forma una trayectoria cerrada, un ciclo.

1. Diremos que el ciclo límite es *estable* si todas las trayectorias lo suficientemente cercanas convergen al ciclo límite cuando t tiende a ∞ .
2. En caso contrario, diremos que es *inestable* si las trayectorias lo suficientemente cercanas se alejan de este.

Por último, queremos introducir los conceptos de órbitas homoclínicas y heteroclínicas. Una *órbita homoclínica* es aquella cuyos conjuntos límite α y ω son exactamente el mismo punto de equilibrio; por otro lado, la órbita será heteroclínica si los conjuntos límite α y ω son dos puntos de equilibrio distintos.

Por último, si se tiene un ciclo que está formado por la unión de dos o más órbitas heteroclínicas que forman un ciclo cerrado, diremos que se tiene un ciclo heteroclínico.

Veamos ahora una serie de conceptos que nos van a llevar a definir formalmente lo que entendemos por un sistema caótico.

A.5 Sistemas caóticos

Consideremos de nuevo un sistema dinámico dado por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

donde habíamos denotado por $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ a la solución del sistema anterior que en $t = 0$ pasa por $\mathbf{x}_0$. Entonces, diremos que un conjunto $M \subset A \subset \mathbb{R}^n$ es invariante si para cada $\mathbf{x}_0 \in M$ se tiene que $\phi(t, \mathbf{x}_0) \in M$, para todo t ; es decir, el flujo de cada punto de M permanece en M , para todo t .

Definición A.10. Diremos que un conjunto $\Gamma \subset A$ es un *conjunto atractor* si verifica las siguientes propiedades:

1. Γ es compacto e invariante.
2. Existe un conjunto abierto U que contiene a Γ de manera que para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, se tiene que $\phi(t, \mathbf{x}_0) \in U$ y que $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi(t, U)} = \Gamma$.
3. (Transitividad) Para cada par de puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Gamma$ y dos entornos U_1 y U_2 de cada punto en U , respectivamente, existe una curva solución que comienza en U_1 y que posteriormente pasa por U_2 .

La condición de transitividad se incluye para asegurarse de que tenemos un único atractor, y no una colección de atractores dinámicamente diferentes. No obstante, no hay una definición universalmente aceptada de atractor; en matemáticas, algunos textos llaman *atractor* a un conjunto Γ que verifica las dos primeras propiedades, y *atractor transitivo* si verifica también la tercera [13].

El estudio de los atractores nos lleva a introducir la noción de caos en los sistemas dinámicos. Intuitivamente, decimos que un sistema es *caótico* cuando, a pesar de que el sistema de ecuaciones diferenciales que lo rige sea determinista, presenta una dinámica altamente irregular y sensible a las condiciones iniciales. Así, trayectorias que comienzan con condiciones iniciales arbitrariamente próximas se separan de manera exponencial en el tiempo, imposibilitando la predicción a largo plazo.

Definición A.11. Un sistema dinámico continuo se dice *caótico* si cumple, sobre algún conjunto invariante Γ , las siguientes propiedades fundamentales [2], [13]:

1. Sensibilidad a las condiciones iniciales: Existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que, para todo $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ y todo entorno U de $\mathbf{x}_0$, se puede encontrar $\mathbf{y}_0 \in U$ y un instante $t > 0$ tal que $\|\phi(t, \mathbf{x}_0) - \phi(t, \mathbf{y}_0)\| > \delta$.
2. Densidad de órbitas periódicas: El conjunto de soluciones periódicas es denso en Γ .
3. Transitividad topológica: Para cualesquiera dos abiertos U, V que intersequen Γ , existe un tiempo $t > 0$ tal que $\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$.

De acuerdo con esta definición, un atractor que exhibe comportamiento caótico se denomina *atractor extraño*. El término *extraño* refleja que, a diferencia de los ciclos límite o los puntos fijos, este tipo de atractores presenta una geometría compleja, típicamente fractal.

A.6 Estabilidad de soluciones

El estudio de la estabilidad de soluciones ocupa un lugar central en la teoría de sistemas dinámicos. En particular, resulta fundamental analizar cómo se comportan las trayectorias cercanas a una solución cuando evolucionan en el tiempo. Para formalizar esta noción se introducen diferentes conceptos de estabilidad, que recogen tanto la persistencia frente a perturbaciones iniciales como la tendencia de las trayectorias a acercarse a la solución de referencia.

A.6.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Sea $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ la solución del sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

y sea $\mathbf{y}(t)$ otra solución que verifica que $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Decimos que $\mathbf{y}(t)$ es *estable en el sentido de Lyapunov* si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta$, entonces

$$\|\phi(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

En otras palabras, perturbaciones suficientemente pequeñas en las condiciones iniciales generan trayectorias que permanecen arbitrariamente cerca [11].

A.6.2 Estabilidad uniforme

Una solución $\mathbf{y}(t)$ se denomina *uniformemente estable* si la definición anterior puede hacerse independiente del instante inicial. Es decir, el mismo δ asociado a cada ε sirve para todo $t_0 \in \mathbb{R}$. Esta propiedad refuerza la noción de estabilidad, pues garantiza que el comportamiento cercano no depende de cuándo se inicia la perturbación.

A.6.3 Soluciones atractivas

Decimos que una solución $\mathbf{y}(t)$ es *atractiva* si existe un cierto $\delta > 0$ tal que, para cualquier condición inicial $\mathbf{x}_0$ con $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}(0)\| < \delta$, se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{y}(t)\| = 0.$$

En este caso, las trayectorias que comienzan suficientemente cerca de $\bar{x}(t)$ no solo permanecen próximas, sino que tienden a ella para tiempos suficientemente largos.

A.6.4 Estabilidad asintótica y uniformemente asintótica

Una solución $\mathbf{y}(t)$ es *asintóticamente estable* si es estable en el sentido de Lyapunov y, además, es atractiva. Es decir, se combinan la persistencia frente a perturbaciones pequeñas y la convergencia asintótica de las trayectorias vecinas.

Por otra parte, $\mathbf{y}(t)$ es *uniformemente asintóticamente estable* si es uniformemente estable en el sentido de Lyapunov y atractiva.

A.6.5 Soluciones globalmente atractivas

Finalmente, se dice que una solución $\mathbf{y}(t)$ es *globalmente atractiva* si, para toda condición inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y todo instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{y}(t)\| = 0,$$

con $\phi(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. En este caso, el dominio de atracción de la solución coincide con todo el espacio de fases, lo que garantiza que cualquier condición inicial conduce a trayectorias que tienden a $\mathbf{y}(t)$.

APÉNDICE B

BARRIDO SOBRE EL VOLTAJE DE ALIMENTACIÓN



Figura B.1: Barrido del voltaje de alimentación V_p como parámetro: representación del voltaje v_2 (eje y) frente al voltaje v_{CE} (eje x), medidos con el osciloscopio, para distintos valores del parámetro, con $V_+ = 529 \text{ mV}$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. Keuninckx, G. Van der Sande y J. Danckaert, “Simple Two-Transistor Single-Supply Resistor–Capacitor Chaotic Oscillator,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 62, n.º 9, págs. 891-895, 2015. DOI: [10.1109/TCSII.2015.2435211](https://doi.org/10.1109/TCSII.2015.2435211).
- [2] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Second. CRC Press, 2018. dirección: https://www.biodyn.ro/course/literatura/Nonlinear_Dynamics_and_Chaos_2018_Sтивен_H._Strogatz.pdf.
- [3] E. Sander y J. A. Yorke, *The cascades route to chaos*, 2009. arXiv: [0910.3570](https://arxiv.org/abs/0910.3570) [nlin.CD]. dirección: <https://arxiv.org/abs/0910.3570>.
- [4] A. Elwakil y M. Kennedy, “Chua’s circuit decomposition: a systematic design approach for chaotic oscillators,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 337, n.º 2, págs. 251-265, 2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(00\)00019-3](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(00)00019-3). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003200000193>.
- [5] E. Lindberg, “The Barkhausen Criterion (Observation ?)” En *Proceedings of NDES 2010*, IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES), Dresden, Germany, 2010, págs. 15-18. dirección: <https://backend.orbit.dtu.dk/ws/portalfiles/portal/4933992/Lindberg-NDES-2010.pdf>.
- [6] K. A. Morgan, “Analysis and Design of R-C Phase-Shift Oscillator Networks,” Naval Research Laboratory, Washington, DC, Technical Report AD1214402, jun. de 1950, Approved for public release, pág. 120. dirección: <https://apps.dtic.mil/sti/trecms/pdf/AD1214402.pdf>.
- [7] M. Farkas, *Periodic Motions* (Applied Mathematical Sciences), 1.ª ed. Springer-Verlag (Springer New York), 1994, vol. 104. DOI: [10.1007/978-1-4757-4211-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4211-4).
- [8] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Texts in Applied Mathematics), 2.ª ed. Springer New York, 2003, vol. 2. DOI: [10.1007/b97481](https://doi.org/10.1007/b97481).
- [9] M. Kennedy, “Three steps to chaos. Part I. evolution,” *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, *IEEE Transactions on*, vol. 40, págs. 640-656, nov. de 1993. DOI: [10.1109/81.246140](https://doi.org/10.1109/81.246140).

- [10] V. Rodríguez Gil, “Osciladores caóticos,” 2022. dirección: <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/58281>.
- [11] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems* (Texts in Applied Mathematics, 7), eng, Thrid edition. New York, NY: New York, 2001.
- [12] K. T. Alligood, T. Sauer y J. A. Yorke, *Chaos : an introduction to dynamical systems* (Textbooks in mathematical sciences), eng, 1st ed. 1996. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [13] M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3.^a ed. Waltham, MA: Academic Press, 2013.

