



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA

Caracterización de Superconductores No-convencionales mediante SQUIDS.

Autor: Sergio Martín Nieto
Tutor: Manuel Donaire del Yerro
2025

A mis padres y a mis abuelos, por apoyarme y soportarme a lo largo de todos estos años, y por confiar en mí aún cuando yo lo hacía.

A todos mis amigos, por hacer de estos años los mejores de mi vida. En especial a Jaime, por haber sacado siempre un rato para responder a mis dudas con una sonrisa, y por ser el mejor amigo que uno podría pedir.

A Petra, por darme un motivo para querer ir a clase todos los días.

A mi tutor, Manuel, por aceptar dirigirme este trabajo, y por sus correcciones y comentarios, y a Andrés, por sus apuntes y observaciones.

RESUMEN

La teoría fenomenológica de Ginzburg-Landau es un modelo que permite estudiar desde un punto de vista teórico los superconductores, tanto convencionales, a los que se les puede aplicar la teoría BCS como no convencionales, a los que no se les puede aplicar. En este trabajo se propone un estudio de la teoría de Ginzburg-Landau, con especial atención en el estudio del efecto Josephson. Se plantea además el estudio de una unión de Josephson con una esquina entre un superconductor convencional y uno no convencional, y se obtiene una ecuación de tipo Sine-Gordon para la descripción de las diferencias de fase invariantes gauge a lo largo de la unión.

ABSTRACT

The phenomenological Ginzburg-Landau theory is a model that describes superconductors from a theoretical point of view. It can be used to study both conventional, those for which BCS theory is valid, and unconventional superconductors, those for which BCS is not valid. In this thesis we give an overview of the Ginzburg-Landau theory, with special attention to the Josephson effect. We also explore a Josephson junction with a corner between a conventional and an unconventional superconductor, and we obtain a Sine-Gordon-like equation for the gauge-invariant phase difference along the junction.

Índice general

Introducción	6
1. Preliminares	8
1.1. Grupos de homotopía	8
1.2. El vacío y la ruptura espontánea de simetría	10
1.3. Teorías gauge	11
1.4. Vórtices	12
2. Teoría de Ginzburg Landau y SQUIDS	13
2.1. La teoría de London	13
2.2. La teoría de Landau de los cambios de fase	15
2.2.1. Las ecuaciones diferenciales de Ginzburg-Landau	17
2.2.2. Validez de la teoría de Ginzburg-Landau	20
2.3. Longitud de coherencia de GL y clasificación de los superconductores	21
2.4. Fluxones	22
2.5. Vórtices	23
2.6. El efecto Josephson	26
2.7. SQUIDS	30
2.8. Vórtices de Josephson	31
3. JJ en una unión con una esquina entre un superconductor usual y uno no convencional	34
3.1. Conceptos previos	34
3.2. Descripción del problema a estudiar	36
3.3. Formulación matemática	38
3.4. Primera tentativa de una solución para μ	41
Conclusiones	44
Índice de figuras	45
Bibliografía	46

Introducción.

Desde que Heike Kamerlingh Onnes los descubriera en 1911, los materiales superconductores han sido objeto de fascinación e investigación constante por parte de la comunidad científica. Estos materiales presentan, entre otras propiedades, superconductividad, siempre que su temperatura esté por debajo de una temperatura crítica, T_c , y que no estén sometidos a un campo magnético demasiado intenso. La superconductividad es la capacidad que poseen ciertos materiales de conducir corriente sin presentar resistencia eléctrica. Esta propiedad por su cuenta ya hace que estos materiales merezcan ser estudiados, por la gran cantidad de aplicaciones prácticas que se les puede dar: desde la resonancia magnética nuclear en el ámbito de la sanidad, hasta la fabricación de magnetómetros de alta precisión mediante uniones de Josephson en ámbitos puramente científicos. Ahora bien, en estos materiales hay otro efecto igual de interesante a nivel teórico: el efecto Meissner, por el cual los superconductores son capaces de expulsar el campo magnético de su interior aún si había un flujo neto antes de que se volvieran superconductores.

En la actualidad hay dos teorías principales que permiten estudiar este tipo de materiales: la teoría fenomenológica de Ginzburg-Landau (en adelante, GL), y la teoría BCS (siglas de Bardeen-Cooper-Schrieffer, apellidos de los científicos que la desarrollaron). La primera es una teoría basada en la teoría de transiciones de fase de Landau, y describe el cambio de fase a partir de un parámetro de orden, que es una función compleja definida en el cuerpo del superconductor, que toma el valor 0 cuando el material se encuentra en la fase normal, y un valor no nulo en la fase superconductora, y que se interpreta como la densidad de portadores de supercorriente [11]. Este será el marco teórico en el que se desarrollará el trabajo. La segunda, la teoría BCS [4] es una teoría microscópica que explica la superconducción a partir de la formación de pares de electrones, llamados pares de Cooper mediante interacciones electrón-fonón. No vamos a desarrollar esta teoría con detalle en este trabajo, aunque sí que haremos algunas observaciones relativas a su conexión con la teoría de GL cuando resulte oportuno. En cualquier caso, esta teoría permite estudiar solamente los superconductores convencionales, no los no convencionales, para los cuales se recurre a la formulación de la teoría de GL que introducimos en el capítulo 3.

Este trabajo se organiza en 3 capítulos. En el primero se dan unos preliminares matemáticos; se habla sobre el grupo fundamental, solitones y vórtices, aunque en un contexto general, y sin hablar de manera explícita de los superconductores. Se trata de un capítulo mucho más matemático que el resto del trabajo, donde se insiste mucho más en la física. El segundo capítulo se dedica íntegramente al estudio de los superconductores convencionales. Se comienza presentando el modelo de London, e inmediatamente después se introduce la que será la herramienta fundamental del resto del trabajo: la teoría fenomenológica de Ginzburg-Landau. Se presenta un estudio relativamente detallado de esta teoría, obteniendo de un principio de acción estacionaria las ecuaciones diferenciales del parámetro de orden y la corriente en un superconductor convencional, y se estudian las propiedades de simetría del funcional de Ginzburg-Landau. En el marco de esta teoría se muestra que en los superconductores de tipo II aparecen vórtices, a través de los cuales el flujo magnético (o los fluxones, según el caso) resultan ser múltiplos de un valor fijo Φ_0 , es decir, están cuantizados. Una vez desarrollada toda esta teoría, se presentan las uniones de Josephson que son uniones de dos materiales superconductores separados por una región aislante (o simplemente no superconductora), y se introduce el concepto de diferencia de fase invariante gauge. El estudio continúa con el efecto Josephson de corriente continua [18], que consiste en la aparición de corriente en una unión de Josephson aún cuando no se polariza externamente, y que depende de la diferencia de fase invariante gauge entre los superconductores. Se presenta en este capítulo el cálculo explícito que permite obtener la expresión de la corriente de Josephson. Por último, el capítulo 3 contiene la parte original de este trabajo. Tras hacer una breve introducción a la adaptación de la teoría de GL a los superconductores no convencionales, se parte del estudio de una unión de Josephson en zigzag entre dos superconductores conven-

cionales realizado en [12], y se aplican las ideas de [9] para estudiar una unión de Josephson con una esquina entre un superconductor convencional y uno no convencional, obteniéndose una ecuación de tipo Sine-Gordon, y dándose una primera tentativa de resolución aproximada.

Destacamos finalmente que a lo largo del texto se van a utilizar tanto notación covariante, como en términos de operadores diferenciales según conveniencia. Puesto que no se va a trabajar en un contexto relativista, no se prestará particular atención a la posición de los índices al aplicar el convenio de sumación de Einstein.

Capítulo 1

Preliminares

Dedicamos este capítulo al estudio de los vórtices, que son unas soluciones particulares de las ecuaciones de campo obtenidas a partir de la aplicación del método variacional a la energía de Ginzburg-Landau. También introducimos el concepto matemático de *grupo fundamental*, que aparece de manera natural en el estudio de los solitones, así como el concepto de ruptura espontánea de simetría. Algunos de los conceptos que aquí se presentan son muy útiles cuando quiero estudiar los solitones desde un punto de vista fundamentalmente teórico y abstracto. Es un tema un tanto abstracto y matemático, que vamos a tratar de presentar de manera intuitiva. En cualquier caso, en los siguientes capítulos, que es donde pondremos en práctica estos conceptos, vamos a lidiar siempre con un problema físico concreto, y estudiaremos campos que tienen una interpretación física clara. Este capítulo está principalmente basado en [24]. A lo largo del mismo, denotamos $\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, e $I = [0, 1]$. Nótese que $\mathbb{S}^1$ es la circunferencia usual.

1.1. Grupos de homotopía

1.1 Definición. Sean X e Y dos espacios topológicos, y $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Sea $A \subset X$ tal que $f(a) = g(a)$ para cada $a \in A$. Diremos que son *homótopas relativamente a* A si existe otra aplicación $F : X \times I \rightarrow Y$ continua cumpliendo $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$, y $F(a, t) = f(a) = g(a)$ para todos $t \in I$, $a \in A$ escribimos en ese caso $f \sim g$.

Esta definición engloba la idea de que dos aplicaciones son homótopas cuando una puede transformarse en la otra de manera continua, pues la aplicación F puede entenderse como una deformación de f en g en la que $t \in [0, 1]$ parametriza un intervalo de tiempo, y en todo momento los valores correspondientes a $f(a)$ permanecen fijos. La relación de homotopía relativa a A es *de equivalencia*, es decir, $f \sim f$, si $f \sim g$ entonces $g \sim f$ y si además $g \sim h$, entonces $f \sim h$ (propiedades reflexiva, simétrica y transitiva respectivamente). Estas propiedades permiten identificar todas las aplicaciones homótopas como una sola, trabajando con *clases de equivalencia*. Es decir, definimos $[f]$ como el conjunto de todas aplicaciones que son homótopas a f , y lo llamamos *clase de equivalencia* de f . La idea es que si $f \sim g$, entonces en términos de clases de equivalencia, $[g] = [f]$, y podemos considerarlas, a efectos de los grupos de homotopía que vamos a introducir, como la misma aplicación. Un ejemplo de aplicaciones homótopas puede verse en la figura 1.1. Las aplicaciones f y g tienen dos extremos fijos, y una se va deformando continuamente en la otra, que es lo que muestran las líneas de puntos. Cada línea de puntos representa una de las $F(x, t)$ para cierto $t \in I$. Por último, para lo que vamos a considerar, X e Y serán $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ (o subespacios suyos), así que no es necesario entrar en la definición precisa de espacio topológico.

Estamos interesados en el caso $X = I$ y $A = \{0, 1\}$, es decir, nos interesan aplicaciones continuas $\alpha : I \rightarrow Y$ que llamaremos *camino*, pues son curvas que se recorren en el espacio Y .

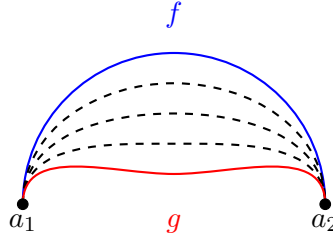


Figura 1.1: Dos aplicaciones f y g homótopas.

Dados dos caminos α y β tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, es decir, uno termina donde empieza el otro, se define su concatenación como

$$(\alpha\beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

es decir, como el camino obtenido al recorrer primero α y después β . Aquellos caminos que cumplen $\alpha(0) = \alpha(1) = y_0$ para cierto $y_0 \in Y$ se llaman *lazos* en y_0 , pues son caminos que empiezan y terminan en el mismo punto. Se define entonces $\pi_1(Y, y_0)$ como el conjunto de las clases de homotopía de lazos en y_0 relativamente a $\{0, 1\}$. Es decir, el conjunto de los $[\alpha]$ tales que α es un lazo en y_0 . Puede probarse entonces que la clase de la concatenación de lazos $[\alpha\beta]$ (obsérvese que dos lazos siempre se pueden concatenar) no depende de los representantes de $[\alpha]$ y $[\beta]$ elegidos, de modo que podemos definir un producto $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha\beta]$. Este producto está bien definido y dota a $\pi_1(Y, y_0)$ de estructura de grupo. Dado un camino α , se define $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1 - t)$, de manera que el inverso de $[\alpha]$ es $[\alpha^{-1}]$. El elemento neutro de dicho grupo es simplemente el camino $\alpha : I \rightarrow Y, t \rightarrow y_0$, es decir, el camino constantemente igual a y_0 . Si además Y es conexo por caminos (todo par de puntos de Y puede unirse mediante un camino), entonces $\pi_1(Y, y_0)$ no depende de y_0 y se denota simplemente $\pi_1(Y)$.

La teoría de homotopías tiene aplicaciones directas en las teorías de campos escalares donde los campos pueden verse como aplicaciones continuas $\phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow Y$, donde $\mathbb{R}$ parametriza el tiempo, y X e Y son variedades diferenciables (conjuntos que, localmente, son iguales a $\mathbb{R}^n$). Una de las propiedades interesantes de las clases de homotopía es que son invariantes topológicos, en el sentido de que se preservan por homeomorfismos (aplicaciones continuas de inversa continua), es decir, no cambian cuando se consideran espacios topológicos que son “en esencia iguales”.

1.2 Definición. Sea X un espacio topológico, diremos que X es *simplemente conexo* cuando es conexo por caminos, y $\pi_1(X) = \{0\}$.

Fijémonos en que, el hecho de que un espacio topológico sea simplemente conexo, quiere decir que todo lazo puede deformarse de manera continua hasta convertirse en un punto. A efectos prácticos, que un espacio sea simplemente conexo quiere decir que no tiene agujeros (y así es como lo utilizaremos en el estudio de la teoría de Ginzburg-Landau). Un ejemplo de espacio simplemente conexo es $\mathbb{R}^p$ para todo $p \in \mathbb{N}$, pues cualquier lazo en $\mathbb{R}^p$ se puede deformar de manera continua en un punto. Por el contrario $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo, ya que cualquier lazo con base en, por ejemplo, $(1, 0)$ que de una vuelta alrededor del origen no puede deformarse en un punto de manera continua, pues cualquier intento de deformarlo *choca* con el agujero que hay en el origen. Otro espacio no simplemente conexo es $\mathbb{S}^1$, para el que se puede probar que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, donde el símbolo $\cong$ significa que son isomorfos, pero se debe interpretar como que ambos grupos en esencia son el mismo. Intuitivamente, lo anterior quiere decir que todo camino en la circunferencia es, salvo deformación, un camino circular que dará una o varias vueltas alrededor del origen en uno u otro sentido, y las clases de homotopía quedan determinadas una vez se especifica el número de vueltas que ha dado el camino, y su sentido, lo

cual puede a su vez especificarse mediante un número entero. Una construcción más detallada de este concepto puede verse en [26, Cap. 9].

1.3 Ejemplo. Consideremos el caso concreto que $\mathbb{S}^1$. Una aplicación $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ puede verse como una aplicación $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(2\pi) - f(0) = 2\pi k$ (esta condición es necesaria para la continuidad). El valor de k correspondiente se llama *winding number* o *índice* de f . Nos da el número de veces que f da vueltas a $\mathbb{S}^1$ cuando θ recorre $[0, 2\pi]$. Aunque esto no es argumento completamente riguroso, como se trata de un entero, no puede cambiar de manera continua al deformar f de manera continua. Se concluye así que k caracteriza toda la clase de homotopía de f , y que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

1.2. El vacío y la ruptura espontánea de simetría

Desarrollamos esta primera sección en el contexto de la teoría de campos. Por no perder generalidad, sí que vamos a considerar en esta sección el espacio-tiempo de Minkowski asociado a un espacio k -dimensional, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ con su métrica asociada $\eta := \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Los puntos del espacio-tiempo se denotarán mediante $x := (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$. Tomamos unidades en las que $c = \hbar = 1$ salvo que se indique lo contrario, y denotamos $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $0 \leq \mu \leq k$. Un campo es una aplicación $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) y puede entenderse como la representación de una cantidad infinita y continua de grados de libertad. En este contexto, se trabaja con *densidades lagrangianas*, que se denotan $\mathcal{L}$, y que suponemos que dependen de Ψ y de sus derivadas de manera polinomial y sin términos mayores que cuadráticos.

Definiendo la acción para un caso general con n campos $S[\psi] := \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D d^k \mathbf{x} \mathcal{L}(\psi_l, \partial_0 \psi_l, \nabla \psi_l)$ y aplicando el principio de acción estacionaria, se obtienen las ecuaciones de los campos:

$$\partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_l)} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi_l)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} = 0 \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_l)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} = 0 \quad 1 \leq l \leq n \quad (1.1)$$

donde ambas ecuaciones son la misma pero en la segunda expresión simplemente se ha utilizado notación relativista.

Consideremos una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ que depende de n campos que agrupamos en un vector $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$, y con un potencial $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (de manera que en la densidad lagrangiana aparece $U(\psi)$). Suponemos que U está acotado inferiormente (lo cual es importante para obtener campos sin singularidades al resolver las ecuaciones 1.1), suponemos que alcanza su mínimo, y que dicho mínimo es 0.

1.4 Definición. En las condiciones anteriores, supongamos que U alcanza su mínimo en una subvariedad $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$. Llamamos a $\mathcal{V}$ *variedad de vacío de la teoría*. Si los campos están definidos en cierto $D \subset \mathbb{R}^k$, y toman valores en $\mathcal{V}$ (esto es $\psi(t, D) \subset \mathcal{V}$ para todo instante), entonces decimos que ψ es la *configuración de vacío*.

En la definición anterior, la palabra subvariedad es un tecnicismo matemático que se debe entender como la generalización a varias dimensiones del concepto de superficie en $\mathbb{R}^3$.

Supongamos ahora que $\mathcal{L}$ tiene una simetría continua que representamos mediante la acción de un grupo de Lie, G . Matemáticamente, la existencia de esta simetría continua quiere decir que todas las configuraciones que están en una misma órbita de G tienen la misma energía (si G actúa sobre un conjunto X , la órbita de un elemento $x \in X$ es el conjunto $Gx := \{g \cdot x : g \in G\}$). Por ejemplo, si $\mathcal{L}$ tiene simetría $SO(3)$, entonces es invariante bajo rotaciones de los campos, y la órbita de una configuración de campos ψ es el conjunto de todas las posibles rotaciones actuando sobre ψ .

1.5 Definición. Supongamos que $\mathcal{L}$ tiene una simetría continua descrita por un grupo G , y que el mínimo de la energía se alcanza en una sola órbita de G . Si la órbita es un conjunto con un solo elemento, entonces decimos que la simetría *no se rompe en el vacío*. En caso contrario, el vacío no está determinado de manera unívoca, y se produce una elección aleatoria de uno de los puntos de la órbita. Decimos que hay una *ruptura espontánea de simetría*.

Como ejemplo, si consideramos que $\mathcal{L}$ tiene simetría $SO(n)$, y el potencial $U(\psi) := (c + \psi_l \psi_l)^2 - c^2$ para $c \geq 0$, entonces el mínimo se produce para $\psi \equiv 0$ y no hay ruptura de simetría. Para el potencial $U(\psi) = (c - \psi_l \psi_l)^2$ el vacío es la elección de un campo ψ en el que $\psi_i = \delta_{ij} \sqrt{c}$ para cierto $1 \leq j \leq n$. En general, todos los elementos de $SO(n)\psi$ producen energía nula.

1.3. Teorías gauge

Una teoría de gauge es aquella en que hay una simetría descrita por un grupo de Lie G que actúa de manera *local*, esto es, independientemente en cada punto del espacio-tiempo. Configuraciones de los campos que difieren solamente en una transformación de gauge se deben entender como iguales a nivel físico, y diremos que son *equivalentes gauge*. Como ejemplo sencillo, podemos considerar una teoría de gauge basada en $G = U(1) \cong \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, que es abeliano. Es por ello que esta teoría se llama *teoría de gauge abeliana*. Consideremos una teoría con un solo campo escalar complejo ψ (cuyo conjugado se denota ψ^*), y la densidad lagrangiana siguiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - U(|\psi|^2).$$

Claramente, $\mathcal{L}$ es invariante bajo la simetría global $\psi \mapsto e^{i\alpha} \psi$. Ahora bien, si consideramos una acción local de G , entonces la fase α es una función del punto del espacio-tiempo. U sigue siendo invariante bajo esta transformación, pero el término $\partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi$ ya no lo es. Para remediar este problema, se introduce el potencial electromagnético $(A_0, \mathbf{A})$. Se postula que si se realiza una transformación de gauge $\psi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)} \psi(x)$, el potencial se transforma según $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \alpha$. Se define entonces la *derivada covariante* de ψ como

$$D_\mu \psi := \partial_\mu \psi - i A_\mu \psi.$$

Observemos que en ese caso $D_\mu \psi$ se transforma como ψ (de forma covariante)

$$D_\mu \psi \mapsto \partial_\mu (e^{i\alpha} \psi) - i(A_\mu + \partial_\mu \alpha) e^{i\alpha} \psi = \cancel{i \partial_\mu \alpha e^{i\alpha} \psi} + e^{i\alpha} \partial_\mu \psi - i e^{i\alpha} A_\mu \psi - \cancel{i e^{i\alpha} \psi \partial_\mu \alpha} = e^{i\alpha} D_\mu \psi.$$

Puesto que $(D_\mu \psi)^* = (\partial_\mu \psi)^* + i A_\mu \psi^*$, se concluye de lo anterior que $(D_\mu \psi)^* \mapsto e^{-i\alpha} D_\mu \psi^*$. Del mismo modo, $D^\mu \psi = \partial^\mu \psi - i A^\mu \psi$, que transforma según $D^\mu \psi \mapsto e^{i\alpha} D^\mu \psi$. Con esto, el término $D_\mu \psi^* D^\mu \psi$ tiene invarianza de gauge local. El campo electromagnético se introduce en el Lagrangiano mediante el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$, que es invariante bajo transformaciones de gauge. Así, podemos construir una densidad lagrangiana con simetría local $U(1)$ e invariante Lorentz como sigue

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \psi)^* D^\mu \psi - U(|\psi|^2).$$

Separando en la densidad anterior los términos que involucran partes “temporales” (los que contienen ∂_0 y A_0) y observando que $\mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{A} - \nabla A_0$ (luego $E_i = F_{0i}$) y que las componentes de $\mathbf{B}$ son F_{ij} se obtiene:

$$F = \int_D \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} (D_i \psi)^* D_i \psi + U(|\psi|^2) \right) d^k \mathbf{x}$$

F se llama *energía de Ginzburg-Landau*. Esta energía es la misma que se utilizará en el siguiente capítulo, aunque se expresará de una forma algo diferente. De hecho, en el capítulo siguiente, se

obtendrá esta misma expresión para el caso particular de la densidad de pares de Cooper en un superconductor, pero no partiendo de una densidad lagrangiana, sino de la teoría termodinámica de cambio de fase de Landau. En cualquier caso, en el siguiente capítulo también es posible utilizar una densidad lagrangiana, tal y como se muestra en [30, Cap. 1].

1.4. Vórtices

Un *solitón* para una teoría de campos descrita por una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ es una solución diferenciable de las ecuaciones de movimiento asociadas a la densidad, que es estable, localizada, y que da lugar a una energía total finita. Además, topológicamente hablando, los solitones se caracterizan porque son soluciones no homotópicamente equivalentes al vacío, tal y como lo hemos definido antes. Es decir, son soluciones que no se pueden deformar de manera continua en la solución del vacío.

Los conceptos relativos al grupo fundamental que se han introducido al principio del capítulo pueden resultar útiles para saber si una teoría de campos concreta admite o no soluciones en forma de solitón, y en su caso, clasificarlos según las simetrías que pudieran tener. Comencemos considerando teorías de campos en $\mathbb{R}^d$, con una energía $E[\Psi]$, que se obtiene integrando cierta densidad de energía que depende de los campos, y que tiene un término potencial $U(\Psi)$. Se supone además que dicha densidad tiende a 0 rápidamente cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$. Si $\mathcal{V}$ es la variedad de vacío de la teoría, entonces Ψ debe tomar valores en $\mathcal{V}$ cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$. Vamos a suponer que para cada dirección fija en $\mathbb{R}^d$, que identificamos con $\mathbb{S}^{d-1}$, los campos toman un valor límite cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$. Esto permite definir una aplicación de $\mathbb{S}^{d-1}$ en $\mathcal{V}$, que asigna a cada dirección el valor de dicho límite. Decimos entonces que podemos definir una aplicación en la *esfera del infinito*: $\Psi^\infty : \mathbb{S}_\infty^{d-1} \rightarrow \mathcal{V}$. Consideremos el caso $d = 2$. TEn ese caso, toda la información necesaria para clasificar la solución está contenida en Ψ^∞ , que define un elemento de $\pi_1(\mathcal{V})$. Además, $\mathbb{S}_\infty^1$ se identifica simplemente con la circunferencia en el plano, Ψ^∞ define un elemento del grupo fundamental, $\pi_1(\mathcal{V})$. Esto último se sigue de que dar una aplicación continua de I en un espacio tal que $f(0) = f(1)$ es lo mismo que dar una aplicación de $\mathbb{S}^1$ en ese mismo espacio.

1.6 Definición. Un *vórtice* es un solitón en $\mathbb{R}^2$ cuya variedad de vacío tiene grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{V}) \cong \mathbb{Z}$ y tal que su forma límite en la esfera del infinito tiene índice $N = 1$. Un *antivórtice* se define igual, pero con índice $N = -1$. Las soluciones con $|N| > 1$ se llaman *multivórtices*.

Por el momento, no vamos a entrar a dar una descripción del significado físico que tiene un vórtice, pues depende del contexto en que aparezca. En nuestro caso, los vórtices aparecerán de manera natural cuando estudiemos los superconductores de tipo II en el capítulo siguiente, y ahí daremos una interpretación física clara de lo que representan. Además, nosotros vamos a trabajar en $\mathbb{R}^3$, pues necesitamos trabajar con campos magnéticos en el espacio. Aún así, vamos a seguir llamando vórtices a soluciones de las ecuaciones de los campos que cumplan las propiedades anteriores. Por otro lado, cuando trabajemos con superconductores reales, estos nunca van a ser finitos. La condición de que en ∞ los campos deben tomar valores en la variedad de vacío va a interpretarse como que infinito es suficientemente lejos de los bordes del superconductor.

Capítulo 2

Teoría de Ginzburg Landau y SQUIDS

Si bien el objetivo de este trabajo es el estudio de los superconductores no convencionales, vamos a comenzar introduciendo las ideas básicas de la teoría de Ginzburg-Landau en el contexto de los superconductores convencionales de baja temperatura. Estos superconductores pueden estudiarse, como ya hemos comentado, a partir de la teoría microscópica BCS. De manera muy resumida, esta teoría muestra que, en los materiales superconductores, dos electrones interactúan dando lugar a un estado ligado, formando lo que se denomina un *par de Cooper*. Estos pares de Cooper son portadores de carga que dan lugar a la superconducción. Más detalles pueden encontrarse en [34, Cap. 3] y [23, Cap. 8]. El modelo que vamos a estudiar es un modelo fenomenológico, llamado modelo de Ginzburg-Landau. Este modelo está estrechamente relacionado con la teoría de las transiciones de fase desarrollada por Lev Landau en términos de un parámetro de orden, que cambia de valor cuando se produce un cambio de fase termodinámico. En nuestro caso, estudiamos el cambio de fase conductor-superconductor. A lo largo de todo el texto, nos referiremos a la fase que no es superconductora como *fase normal*. También vamos a introducir la teoría de London de la superconductividad, pues será relevante en el estudio del campo magnético en el interior de los superconductores. A lo largo de todo el capítulo, e denota la carga del electrón con su signo, es decir, $e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ C (seguimos la convención adoptada en [34]). Esto no es demasiado importante, pues en la mayoría de expresiones la carga del electrón entra elevada al cuadrado.

2.1. La teoría de London

Una de las propiedades de los superconductores es el *diamagnetismo perfecto*, es decir, el campo magnético en el interior de un superconductor siempre es nulo. Merece la pena destacar que el hecho de que los superconductores presenten resistencia nula, permite explicar que el campo no penetre en ellos, pero no permite explicar otro fenómeno experimental: si se introduce un material superconductor que se encuentra por encima de su temperatura crítica en una región con campo magnético, y se enfría el material por debajo de T_c , el material *expulsa* el campo magnético de su interior. Este fenómeno se conoce como *efecto Meissner*, y una descripción del mismo está dado por la segunda ecuación de London

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}.$$

Llamamos a $\lambda_L = \sqrt{m/\mu_0 n_s e^2}$ *longitud de penetración de London*, un parámetro con dimensiones de longitud, que suele ser del orden de nm. n_s denota la densidad de electrones superconductores (que es el doble de la densidad de pares de Cooper que introduciremos en la sección siguiente). Para el caso unidimensional, las soluciones de esta ecuación en el interior de un superconductor son proporcionales a $e^{-\lambda_L x}$ donde x es la distancia al interior del superconductor.

Extrapolando esta idea al caso general, observamos que en un material superconductor, el campo magnético solo puede penetrar en una pequeña región de espesor λ_L en el superconductor, lo cual justifica el nombre elegido para el parámetro. Esta ecuación *no* es una ecuación de movimiento de las obtenidas a partir del funcional de GL (esto es importante tenerlo en cuenta para las secciones siguientes). Podemos dar una derivación de esta expresión tal y como la dieron los hermanos London (que está basada en [32, Cap. 26]). Para ello, partiendo de la observación experimental del efecto Meissner, supusieron que, en los superconductores, además de existir electrones usuales, existían *electrones superconductores*, de masa m^* , carga e^* , y densidad n_s^* . En el momento en que se propuso esta hipótesis, no se sabía de la existencia de los pares de Cooper, que resultaron ser, en un análisis un tanto simplista, los electrones superconductores buscados. El desarrollo que vamos a ver no es perfectamente riguroso, en el sentido de que llegado un momento, los hermanos London tuvieron que hacer una suposición a priori no justificada. Esto se debe a que las ecuaciones de London no pueden obtenerse de manera rigurosa de las ecuaciones de Maxwell y razonamientos clásicos. Fue necesaria la introducción de la teoría BCS para dar una justificación sólida a esta ecuación. En cualquier caso, trabajando bajo la hipótesis de que estos electrones no experimentan resistencia, su densidad de corriente se puede expresar como $\mathbf{J} = e^* n_s^* \mathbf{v}_s$ donde $\mathbf{v}_s$ denota su velocidad. Suponiendo que no hay resistencia, se puede plantear la ecuación de Newton

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e^* \mathbf{E} \Rightarrow \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

Ahora bien, de las ecuaciones de Maxwell, sabemos también que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$. Tomando rotacionales en (2.1), y sustituyendo, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m^*}{n_s^* e^{*2}} \nabla \times \mathbf{J} \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\nabla \times \mathbf{J} + \frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \mathbf{B} \right) = 0.$$

Aquí es donde es necesario hacer una suposición no del todo justificada: los hermanos London supusieron que el término entre paréntesis no sólo era constante en el tiempo, sino directamente nulo. Esto es, $\nabla \times \mathbf{J} = -n_s^* e^{*2}/m^* \mathbf{B}$. Puesto que, suponiendo campos eléctricos constantes, la ley de Ampère-Maxwell toma la forma siguiente $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, sustituyendo, y notando que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se tiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{m^*}{e^{*2} n_s^* \mu_0} \mathbf{B}.$$

Teniendo en cuenta que si se da a los “electrones superconductores” los parámetros correspondientes a dos electrones, es decir, $e^* = 2e$, $m^* = 2m$, y se tiene en cuenta que $n_s = 2n_s^*$, se obtiene en el miembro derecho $\lambda_L^{-2} \mathbf{B}$, que es la ecuación de London, tal y como la habíamos enunciado antes. Algo parecido ocurre con la corriente en el cuerpo de los superconductores, que también responde a una ecuación similar

$$\nabla^2 \mathbf{J} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{J}.$$

Esta ecuación se obtiene sin más que tomar rotacionales a ambos lados de la igualdad $\nabla \times \mathbf{J} = -n_s^* e^{*2}/m^* \mathbf{B}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{J}) = \nabla^2 \mathbf{J} - \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{n_s^* e^{*2}}{m^* \mu_0} \mathbf{J}$$

y observando que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, pues en una situación estacionaria siempre se supone que no se acumulan cargas (se utiliza la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0$, siendo ρ la densidad volumétrica de carga).

La aparición de corrientes está estrechamente ligada con el efecto Meissner. En efecto, el campo magnético $\mathbf{B}$ se anula en el interior de un superconductor gracias a la aparición de

corrientes apantalladoras (*screening currents* en inglés) que producen un campo magnético en el interior de la muestra opuesto al externo, de manera que la superposición de ambos es nula. De acuerdo con la ecuación anterior, estas corrientes fluyen en la superficie del superconductor, en una región de espesor λ_L . Además, hay un gauge particular, llamado *gauge de London*, que se obtiene imponiendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ en el cuerpo del superconductor y $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ en su superficie (matemáticamente hablando, en el borde del conjunto). Esta elección de gauge conduce a una ecuación análoga para el potencial $\mathbf{A}$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{A}.$$

Las condiciones anteriores definen un gauge unívocamente cuando el superconductor es simplemente conexo, es decir, cuando no tiene agujeros.

Cabe destacar que, en realidad, la longitud de penetración depende de la temperatura, y se puede denotar $\lambda(T)$. Es común en la literatura denotar por λ_L el valor $\lambda(0)$, y la dependencia de λ con la temperatura puede aproximarse por $\lambda(T) \approx \lambda_L(1 - (T/T_c)^4)^{-1/2}$.

2.2. La teoría de Landau de los cambios de fase

En 1937, Lev Landau introdujo esta teoría buscando una manera de modelizar las transiciones de fase continuas [22]. Una transición de fase continua o de segundo orden aparece cuando un nuevo estado de menor simetría (habitualmente llamado *ordenado*) emerge de manera continua a partir de un estado de mayor simetría (habitualmente llamado *desordenado*) cuando se reduce la temperatura por debajo de cierto valor crítico, T_c . Se habla entonces de una ruptura de simetría. Esta pérdida de simetría se modeliza utilizando un *parámetro de orden*, que denotaremos ψ , es decir, un parámetro fenomenológico que se elige de manera específica en cada situación, y que, en equilibrio, se anula por encima de T_c (en la fase ordenada), y toma un valor no nulo por debajo de T_c (en la fase desordenada). La teoría de Landau se basa entonces en la suposición de que el potencial de Helmholtz, $\mathcal{F}$, que es mínimo en el equilibrio, es una función analítica de dicho parámetro de orden, al menos cerca de la temperatura crítica. De este modo, puede desarrollarse en serie de Taylor $\mathcal{F}(\psi, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(T) \psi^n$ [29]. En la mayor parte de los casos, se considera el desarrollo solamente hasta orden 4. Por encima de la temperatura crítica, el parámetro de orden que minimiza F es $\psi = 0$, y por debajo, será un valor concreto, diferente para cada situación. En algunos casos, el parámetro de orden ψ no toma un valor único en todo el sistema, sino que es una función que depende del espacio, $\psi(\mathbf{x})$. En esos casos se considera la densidad de energía libre F , y que ahora es un funcional de $\psi(\mathbf{x})$ [17]. Esto es precisamente lo que sucede en el caso de la transición conductor-superconductor que nos ocupa. Merece la pena destacar que el hecho de utilizar un formalismo de origen termodinámico como es la teoría de Landau para el estudio de los superconductores, se fundamenta en el hecho de que la transición conductor-superconductor verdaderamente *es* una transición de fase perfectamente reversible, es decir, el estado superconductor *es* una fase en el sentido termodinámico. En cualquier caso, el estado superconductor es de origen cuántico, y como tal, puede verse como un estado cuántico macroscópico [5]. Esta elección de un parámetro de orden que es a la vez una función, surgió de la intuición física de Ginzburg y Landau, que intuyeron que el parámetro de orden debía representar algún tipo de función de onda de electrones superconductores. La teoría así definida se llama teoría de Ginzburg-Landau. Aunque nosotros mantendremos la notación ψ para referirnos al parámetro de orden, es también común encontrar el símbolo Δ en la literatura, especialmente cuando se relaciona con la teoría BCS [6].

Ginzburg y Landau, introdujeron como parámetro de orden una pseudofunción de onda compleja, $\psi(\mathbf{x})$, tal que $|\psi(\mathbf{x})|^2 = n_s^*(\mathbf{x})$ es la densidad local de pares de Cooper, es decir, de

partículas superconductoras. F ahora puede depender no solamente de ψ , sino también de sus derivadas $\nabla\psi$, y en caso de haber un campo magnético externo, también del potencial $\mathbf{A}$. Se postula entonces que si ψ es pequeño, y su variación en el espacio es lenta, entonces la densidad del potencial de Helmholtz se puede expandir del siguiente modo

$$F(\psi, \mathbf{A}) = F_{n0}(T) + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0}. \quad (2.2)$$

En la siguiente sección se muestra escrita en términos de las derivadas covariantes (ecuación (2.4)).

Hagamos algunas observaciones iniciales. En primer lugar, tiene perfecto sentido considerar ψ como parámetro de orden, pues por encima de la temperatura crítica, no hay superconductividad, y por tanto, la densidad de pares de Cooper es nula. El valor F_{n0} representa aquí el potencial de Helmholtz en la fase normal (no superconductora) cuando el campo aplicado es nulo. Por otro lado, m^* y e^* son parámetros del modelo, y suelen elegirse $e^* = 2e$ y $m^* = 2m$ (siendo m y e la masa y carga del electrón respectivamente). Ginzburg y Landau sugirieron que el término $i\hbar\nabla\psi$ estaba relacionado con la energía cinética de los pares, y en particular con el momento lineal (que recordemos, en mecánica cuántica se representa como $-i\hbar\nabla$). Esto les llevó a considerar que en el caso de haber un campo magnético descrito por un potencial $\mathbf{A}$, debían incluir un término $-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A}$ (esto es, efectuar *minimal coupling*). Esto tiene sentido, pues al final $|\psi|^2$ es la densidad de pares de Cooper, que son estados ligados de dos electrones. Además, puesto que ψ es una función compleja, podremos escribir $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$ para cierta función $\varphi(\mathbf{x})$. Teniendo esto en cuenta, puede verse que (2.2) es invariante bajo la transformación de gauge

$$\varphi(\mathbf{x}) \mapsto \varphi(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x}) \quad A_\mu(\mathbf{x}) \rightarrow A_\mu(\mathbf{x}) + (\hbar/2e) \cdot \partial_\mu \alpha(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Obsérvese que la primera transformación equivale a $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow e^{i\alpha(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})$. Salvo constantes debidas a las unidades, esta es la transformación de las teorías de gauge abelianas que veíamos en el primer capítulo. El único término que no es obviamente invariante bajo esta transformación es el cuarto sumando de (2.2). Para ver que efectivamente lo es, se puede desarrollar (no incluimos los detalles, son manipulaciones algebraicas sencillas) hasta obtener la expresión siguiente

$$\frac{1}{2m^*} \left[\hbar^2 (\nabla|\psi|)^2 + (\hbar\nabla\varphi - 2e\mathbf{A})^2 |\psi|^2 \right]$$

y aquí es el segundo sumando el único que no es evidentemente invariante gauge. Ahora bien, sin más que desarrollar

$$(\hbar\nabla\varphi - 2e\mathbf{A})^2 \mapsto \left(\hbar\nabla\varphi + \hbar\nabla\alpha - 2e\mathbf{A} - 2e \cdot \frac{\hbar}{2e} \nabla\alpha \right)^2 = (\hbar\nabla\varphi - 2e\mathbf{A})^2.$$

En particular, tomando α como una constante, se puede fijar un valor concreto y arbitrario de la fase en un punto al fijar el gauge. Nos centramos ahora en el estudio de los parámetros $\alpha(T)$ y $\beta(T)$, que en principio dependen de la temperatura únicamente. Consideremos el caso en que no hay campos externos, de modo que puede fijarse $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Entonces $F = F_{n0} + \alpha|\psi|^2 + \beta/2 \cdot |\psi|^4$. Por construcción de F , en el equilibrio debe tomar su valor mínimo (ver [29, Cap. 8]). Si $\beta < 0$, entonces F no está acotada inferiormente, por ello no tiene mínimos absolutos, de modo que $\beta > 0$, y en primera aproximación, se toma como constante. Respecto al valor de α , para estudiarlo se calculan los extremos relativos de F . Derivando respecto de $|\psi|$ de la manera usual,

$$\frac{\partial F}{\partial |\psi|} = 2\alpha|\psi| + 2\beta|\psi|^3 = 0 \Rightarrow |\psi| = 0 \text{ y } |\psi|^2 = \frac{-\alpha}{\beta}.$$

Cuando $\alpha > 0$, $|\psi| = 0$ es un mínimo, y la otra solución implicaría $|\psi|^2 < 0$, lo cual directamente no puede ocurrir porque $|\psi|^2$ es el módulo de un número complejo. Cuando $\alpha < 0$, $|\psi| = 0$ es

un máximo, y $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$ define un mínimo. En este segundo caso, si se dibuja el potencial en el plano complejo, se obtiene el potencial de *sombrero mexicano* (ver figura 2.1), y toda una circunferencia corresponde a un mínimo. En términos de lo expuesto el capítulo anterior, si en lugar de hablar de una densidad lagrangiana, hablamos de una densidad de potencial de Helmholtz, F , podemos decir que $\mathbb{S}^1$ (vista dentro de $\mathbb{C}$) es la variedad de vacío de la teoría, y que cualquier campo con módulo constante e igual a $|\psi| = \sqrt{-\alpha/\beta}$ es una configuración de vacío. En particular, el vacío no está determinado de manera única, pues cualquier solución con el módulo anterior es una solución de vacío. Este es uno de los casos en que decimos que hay ruptura espontánea de simetría. Además, aquí no le hemos pedido ninguna propiedad topológica al superconductor aún. Eso quiere decir que, las soluciones de las ecuaciones diferenciales de movimiento que vamos a derivar de un principio de acción estacionaria en la sección siguiente van a ser solitones, y como su variedad de vacío es $\mathbb{S}^1$, podrán ser vórtices.

En cualquier caso, el signo de α tiene que cambiar en T_c para que $|\psi|$ verdaderamente sea un parámetro de orden, pues recordemos que para $T > T_c$ el sistema se encuentra en fase normal. Es por ello que, cerca de T_c , se puede aproximar $\alpha = a(T - T_c)$. Esta solución particular proporciona la densidad de pares de Cooper que hay en el material cuando está en estado superconductor en ausencia de campos externos: $-\alpha(T)/\beta(T)$. Obsérvese que dicha densidad depende de la temperatura. Cabe destacar que la teoría GL no proporciona ninguna forma de calcular los parámetros a y β , y estos deben obtenerse o bien experimentalmente, o bien a partir de la teoría microscópica.

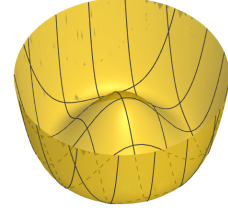


Figura 2.1: Potencial sombrero mexicano. Imagen graficada con Geogebra.

Analicemos con detalle la expresión de la energía libre. Podemos escribirla como

$$F(T, \psi) = U(|\psi|) + \frac{1}{2m^*} \left[\hbar^2 (\nabla |\psi|)^2 + (\hbar \nabla \varphi - 2e\mathbf{A})^2 |\psi|^2 \right] + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0}$$

donde el primer sumando es un potencial (concretamente el potencial de la figura 2.1, $U(|\psi|^2) = F_{n0} + \alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4$), y el último, la energía asociada al campo magnético. El segundo sumando tiene a su vez dos sumandos. El primer término es la energía asociada a los gradientes en la distribución de pares de Cooper. El segundo sumando es una densidad de energía cinética. En efecto, dicha densidad se puede escribir como $n_s^*(1/2 \cdot m^* v_s^2)$ donde v_s denota la velocidad promedio de un par. Observando que el momento canónico conjugado de una partícula en un campo magnético es $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e^*\mathbf{A}$, se sigue que

$$\frac{1}{2} n_s^* m^* \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2m^*} |\psi|^2 (m^* \mathbf{v})^2 = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e^* \mathbf{A})^2 = \frac{1}{2m^*} (\hbar \nabla \varphi - e^* \mathbf{A})^2$$

de modo que realmente ese término es una densidad de energía cinética.

2.2.1. Las ecuaciones diferenciales de Ginzburg-Landau

En primer lugar, utilizando notación covariante, $D_\mu = \hbar \partial_\mu - ie^* A_\mu$, y la densidad de energía libre de Ginzburg-Landau se puede escribir como

$$F = U(\psi\psi^*) + \frac{1}{2m^*} (D_j \psi)^* D_j \psi + \frac{1}{8\mu_0} \cdot (F^{jk} F_{jk}). \quad (2.4)$$

La energía libre total (del sistema superconductor y entorno) es $\mathcal{F}[T, \psi, \mathbf{A}] = \int_{\mathbb{R}^3} F(T, \psi, \mathbf{A}) d^3\mathbf{x}$. Puesto que en el equilibrio F debe ser mínimo, tiene sentido obtener ecuaciones para el campo aplicando el método variacional a este funcional.

2.1 Proposición. Las ecuaciones de GL, obtenidas al aplicar el principio variacional a F , son:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{1}{2m^*}D_j D_j \psi = 0 \quad \text{o} \quad \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})^2\psi = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \cdot \partial_j F^{jk} = \frac{\hbar e^*}{i2m^*}(\psi(\partial_k \psi)^* - \psi^*(\partial_k \psi)) - \frac{e^{*2}}{m^*}\psi\psi^* A_k,$$

que escrito en forma vectorial se transforma en

$$\mathbf{J} := \frac{e^*\hbar}{i2m^*}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*}\psi\psi^*\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.6)$$

Demostración. La demostración que vamos a incluir es una versión simplificada de [7], donde se puede encontrar una discusión muy detallada, así como una justificación de todos los pasos. Denotemos Ω al superconductor, y $\partial\Omega$ a su borde (es decir, la superficie que lo limita). Sea $\mathcal{F}[\psi, \mathbf{A}] := \int_{\mathbb{R}^3} F[\psi, \mathbf{A}] d\mathbf{x}$. Se considera la integral a todo el espacio, pues la energía libre contendrá, en principio, términos de la energía del campo magnético también fuera del superconductor. Las ecuaciones se obtienen imponiendo que las variaciones de $\mathcal{F}$ al variar ψ , ψ^* (que se toman como independientes) y $\mathbf{A}$ sean nulas. Es decir, $\delta\mathcal{F} = 0$. La diferencia con el procedimiento usual de aplicación del principio variacional que permite, por ejemplo, obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la acción, es que aquí en general no será cierto que $\delta\psi$ y $\delta\psi^*$ se anulen en $\partial\Omega$. La condición frontera que se impone es $\hat{\mathbf{n}} \cdot (-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi|_{\partial\Omega} = 0$ donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal exterior a Ω . Teniendo esto en cuenta, imponiendo variaciones respecto de ψ^* , se obtiene (la integral aquí se toma sobre Ω porque ψ y ψ^* se anulan fuera):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= \int_{\Omega} \left[\alpha\psi\delta\psi^* + \beta|\psi|^2\psi\delta\psi^* + \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla\psi - e^*\mathbf{A}\psi) \cdot (-i\hbar\nabla\delta\psi^* - e^*\mathbf{A}\delta\psi^*) \right] d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \alpha\psi\delta\psi^* + \beta|\psi|^2\psi\delta\psi^* d^3\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{2m^*}\delta\psi^*(-i\hbar\nabla\psi - e^*\mathbf{A}\psi) d\mathbf{S} \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{2m^*}\delta\psi^*(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})^2\psi d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde se ha integrado por partes el término en $\nabla\delta\psi^*$. De la condición de borde, la integral de superficie se anula, mientras que imponiendo que las variaciones $\delta\psi^*$ sean arbitrarias, se obtiene la primera ecuación. En rigor, habría que hacer lo mismo variando ψ , pero se obtiene la conjugada compleja de la ecuación anterior.

Se consideran ahora variaciones respecto de $\mathbf{A}$. Esto puede resultar problemático, pues en principio $\mathbf{A}$ no es una variable interna del sistema que se pueda variar sin restricciones. En cualquier caso, cuando no se conecta el superconductor a corrientes externas, sí que es cierto que las variaciones de $\mathbf{A}$ llevan a $\delta\mathcal{F} = 0$ (ver [7]). Con esto

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})}{2\mu_0} + \frac{1}{2m^*}\delta[(-i\hbar\nabla\psi - e^*\mathbf{A}\psi) \cdot (i\hbar\nabla\psi^* - e^*\mathbf{A}\psi^*)] d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})}{2\mu_0} + i\frac{e^*\hbar\delta\mathbf{A}}{2m^*} \cdot (-\psi\nabla\psi^* + \psi^*\nabla\psi) + \frac{e^{*2}\delta\mathbf{A}}{m^*}|\psi|^2\mathbf{A} d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta\mathbf{A} \left[i\frac{e^*\hbar}{2m^*} \cdot (-\psi\nabla\psi^* + \psi^*\nabla\psi) + \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{2\mu_0} + \frac{e^{*2}}{m^*}|\psi|^2\mathbf{A} \right] d^3\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} -\frac{1}{2\mu_0}\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \delta\mathbf{A}) d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

el último término se sigue de la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$ aplicada a $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{G} = \delta\mathbf{A}$. Aplicando el teorema de la divergencia, y suponiendo que el integrando decrece suficientemente rápido, el segundo término se anula. Igualando a 0 el término que multiplica a $\delta\mathbf{A}$ en la segunda ecuación, se obtiene la ecuación buscada. $\square$

2.2 Observación. Hagamos algunas observaciones relativas a las ecuaciones anteriores.

1. La ecuación (2.5) es casi igual a la de Schrödinger, con autovalor $-\alpha$, salvo por el término cuadrático.
2. La ecuación (2.6), define una corriente cuya forma es la de una corriente de probabilidad usual en mecánica cuántica para una partícula de masa m^* , carga e^* y función de densidad de probabilidad $\psi(\mathbf{x})$. Además, esta corriente es de hecho la corriente de Noether que se corresponde con la simetría global $U(1)$ de la densidad de energía de Ginzburg-Landau. En efecto, el grupo de Lie $U(1)$ actúa sobre el conjunto de campos mediante la transformación $\psi \mapsto e^{i\theta}\psi$, que es una simetría de (2.2). Esta simetría tiene asociada la corriente Noether siguiente

$$J^\mu = \frac{\partial F}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} e^{i\theta}\psi + \frac{\partial F}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} e^{-i\theta}\psi^* = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\psi^*(\partial_\mu \psi) - \psi(\partial_\mu \psi^*)) - \frac{e^*\hbar}{m^*} \psi\psi^* A_\mu,$$

que coincide con la corriente anterior salvo un factor $e^*/\hbar$, que no afecta a su conservación.

3. De acuerdo con la interpretación de $|\psi|^2$ como densidad de pares de Cooper, esta corriente es una corriente en el sentido usual de la palabra, es decir, refleja el movimiento de cargas en el superconductor, y en particular, se trata de una cantidad que se puede medir, y por consiguiente, tiene que ser invariante gauge. Esta corriente suele denominarse *super-corriente*. Esto es relevante, pues permite obtener la manera en que al hacer un cambio de gauge sobre el potencial electromagnético debe variar la fase compleja φ . Para verlo, desarrollando la expresión de $\mathbf{J}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{e^*\hbar}{i2m^*} (|\psi|e^{-i\varphi} \cdot (\nabla|\psi|e^{i\varphi} + i\nabla\varphi|\psi|e^{i\varphi}) - |\psi|e^{i\varphi} \cdot (\nabla|\psi|e^{-i\varphi} - i\nabla\varphi|\psi|e^{-i\varphi})) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} \\ &= \frac{e^*\hbar}{i2m^*} \cdot (2i\nabla\varphi|\psi|^2 + |\psi|\nabla|\psi| - |\psi|\nabla|\psi|) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} = \frac{e^*}{m^*} |\psi|^2 (\hbar\nabla\varphi - e^* \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

En particular, esta expresión proporciona una corriente física que se puede medir, luego debe ser invariante gauge. Esto es consistente con las transformaciones $A_\mu \mapsto A_\mu + \hbar/e^* \partial_\mu \alpha$, y $\varphi \mapsto \varphi + \alpha$. De aquí se sigue que la fase no puede ser una cantidad directamente medible, pues no es invariante gauge.

4. Esto justifica la elección de solamente las potencias pares de $|\psi|$ en (2.2). Más concretamente, en principio F se podría expandir en serie de Taylor en términos de $\text{Re}(\psi)$ e $\text{Im}(\psi)$, o equivalentemente, de ψ y ψ^* . Ahora bien, la energía libre no debe depender del gauge elegido, y hemos visto que al cambiar de gauge, se modifica la fase. Es por ello que los términos incompatibles con la invarianza gauge deben rechazarse, y no aparecen términos de órdenes 1 o 3, o términos del tipo $\psi^*\psi^*$. Además, no se añaden más términos, pues las correcciones debidas a estos comienzan a ser despreciables [6].

Consideremos además el resultado siguiente.

2.3 Proposición. Si en un superconductor simplemente conexo se considera el gauge de London, entonces φ es constante.

Demostración. La suposición de que el superconductor sea simplemente conexo se utiliza para que el gauge de London esté bien definido. Por otro lado, en condiciones generales, la densidad de carga será uniforme y constante en el cuerpo del superconductor. La justificación es que en la red atómica hay una distribución uniforme de iones positivos, que son los que han cedido electrones al material. Si los electrones no estuvieran distribuidos de manera uniforme, habría una distribución no uniforme de carga, y por consiguiente un campo eléctrico que llevaría a

los electrones a distribuirse uniformemente [10, Cap. 21]. En resumen, se puede suponer que $n_s^*(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|$ es constante. Como además n_s y $\mathbf{J}$ representan cargas y corrientes usuales, debe cumplirse la ecuación de continuidad, luego utilizando la expresión (2.7)

$$0 = \frac{\partial n_s(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{e^*}{m^*} |\psi|^2 (\hbar \nabla \cdot \nabla \varphi - e^* \nabla \cdot \mathbf{A}).$$

Por la elección de gauge, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, luego $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0$. Esto implica que $\nabla \varphi = 0$ en el superconductor (utilizando la descomposición de Helmholtz, ver [14, Apéndice B]). Se concluye así que φ es constante. $\square$

En particular, eligiendo este gauge, se puede expresar la supercorriente como $\mathbf{J} = -e^*/m^* \cdot |\psi|^2 \cdot \mathbf{A}$ (expresión que claramente *no* es invariante gauge). Así, siempre que se considere un superconductor sin agujeros, se puede tomar una fase constante.

2.2.2. Validez de la teoría de Ginzburg-Landau

En muchos superconductores, la electrodinámica es *no local*. A grandes rasgos, esto quiere decir que la supercorriente en un punto no depende solamente de $\mathbf{A}$ en ese punto (en el gauge de London), sino que depende del promedio espacial de $\mathbf{A}$ multiplicado por un factor exponencial.

$$\mathbf{J} = -\frac{n_s e^2}{m} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\xi_0} \iiint \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^4} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\xi_p}} d^3\mathbf{x}' \right) \quad (2.8)$$

ξ_0 denota la distancia promedio entre dos pares de Cooper, y si ℓ denota el camino libre medio de los electrones, entonces $\xi_p^{-1} + \xi_0^{-1} = \ell^{-1}$. ξ_p se denomina *longitud de coherencia de Pippard*. Todas estas magnitudes dependen del superconductor estudiado. La justificación de que deba promediarse el valor de $\mathbf{A}$ en toda una región, es que la conducción se produce gracias a pares de electrones ligados, pero a cierta distancia unos de otros. Sienten por tanto valores distintos de $\mathbf{A}$. La expresión (2.8) es la expresión general para superconductores con impurezas (llamados superconductores *sucios*). Para los que son puros, la misma expresión es válida, pero tomando $\xi_p = \xi_0$. Para más detalles, ver [23, Cap. 2].

En cualquier caso, lo más relevante es que la teoría de Ginzburg-Landau es válida solamente cerca de T_c , y para superconductores con $\lambda(T) > \xi_0$ si son puros, y $\lambda(T) > \xi_p$ si son sucios. Aún con estas restricciones, muchos casos importantes, como los superconductores de alta temperatura pueden describirse mediante la teoría de Ginzburg-Landau [34]. En particular, los superconductores de tipo II, que son los que resultan de interés para nuestro estudio, pueden describirse sin necesidad de recurrir a la teoría no local, estudiando la penetración del campo magnético a partir de la teoría de London. Detallaremos algo más la clasificación de los superconductores en tipos I y II en la sección siguiente.

Destaquemos de nuevo que esta teoría es completamente fenomenológica, en el sentido de que se trata de una teoría que no busca, y no puede proporcionar una explicación microscópica del fenómeno de la superconductividad, como sí que hace la teoría BCS. Simplemente toma como punto de partida el hecho de que el parámetro de orden es una función compleja, y a partir de esta hipótesis, describe las propiedades físicas de los superconductores. En cualquier caso, es una teoría de gran utilidad, pues nos va a permitir deducir de manera teórica, a partir de las premisas sencillas bajo las que la hemos construido, una gran variedad de fenómenos experimentales. Además, su validez no solo se justifica a partir del acuerdo con los resultados experimentales, sino que además, casi inmediatamente después de la aparición de la teoría BCS, Gor'kov probó que las ecuaciones de Ginzburg-Landau, que ya se conocían, pueden deducirse de la teoría BCS [13]. De hecho, uno de los puntos fuertes de esta teoría es que, aunque se trata de una teoría consistente con la teoría BCS, no se basa en ella. En particular, esto permite utilizarla para materiales que

tienen propiedades de superconductor, como los superconductores no convencionales, para los que no se conoce una explicación microscópica de su superconductividad.

2.3. Longitud de coherencia de GL y clasificación de los superconductores

Consideremos un superconductor no sometido a campos externos. Despreciando cualquier campo magnético que vayan a producir las cargas del superconductor, puede tomarse $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Suponiendo $T < T_c$, definimos $\psi_\infty^2 := -\alpha/\beta > 0$, y consideramos una función normalizada $f := \psi/\psi_\infty$. La ecuación para f en una dimensión (2.5) se transforma en

$$\psi_\infty \alpha f + \beta |f|^2 f |\psi_\infty|^2 \psi_\infty - \frac{\hbar^2}{2m^*} \psi_\infty \frac{d^2}{dx^2} f = 0.$$

Puesto que todos los coeficientes de la ecuación son reales, puede tomarse f real. Multiplicando por $\psi_\infty^{-1} \alpha^{-1}$, y notando que $\psi_\infty^2 = -\alpha/\beta$ se obtiene

$$\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \frac{d^2}{dx^2} f + f - f^3 = 0 \quad (2.9)$$

y se define la *longitud característica* o *longitud de coherencia de Ginzburg-Landau*

$$\xi(T) := \frac{\hbar}{\sqrt{2m^*|\alpha(T)|}}.$$

La interpretación de esta longitud de coherencia es la siguiente: si se produce una variación de ψ con respecto de ψ_∞ , esta decae en la longitud característica del orden de $\xi(T)$. Para justificarlo con algo más de detalle, si se supone que $f(x) \approx 1 + g(x)$ con $\|g(x)\| \ll 1$, entonces la ecuación, a primer orden en g se transforma en

$$0 = \xi^2 g'' + (1 + g) - (1 + g)^3 = \xi^2 g'' + (1 + g) - (1 + 3g + 3g^2 + g^3) \approx \xi^2 g'' - 2g.$$

Se obtiene así $g'' = (2/\xi^2)g$, ecuación cuya solución es una combinación de exponenciales $e^{\pm\sqrt{2}/\xi \cdot x}$. De ahí la interpretación anterior.

Esta longitud característica permite además clasificar los superconductores en tipo I y tipo II. Para esta clasificación, se define el *parámetro de Ginzburg-Landau*, $\kappa := \lambda/\xi$. Se trabaja a temperaturas cercanas a T_c , y en esos casos, teniendo en cuenta las dependencias de λ y ξ con T_c , las velocidades de divergencia de ambas se compensan, y se obtiene un valor finito para κ . Antes de comentar la clasificación, recordemos que la respuesta magnética de un material se caracteriza mediante un vector $\mathbf{M}$ llamado *magnetización*, y se define $\mathbf{H} := 1/\mu_0 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{M}$.

1. Si $\kappa \ll 1$, entonces el superconductor es de tipo I. En estos materiales, por debajo de la temperatura crítica existe un campo $H_c(T)$ tal que, si se supera, devuelve al superconductor al estado no conductor. De este modo, por debajo de H_c se tiene $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$, y por ello, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Además, en este tipo de superconductores, se puede producir coexistencia de fases conductora y superconductora para una misma muestra de material. Esto ocurre cuando las densidades volumétricas de energía libre de Gibbs de ambas fases coinciden (ver [23, Caps. 4 y 5]). Hemos de destacar que las fases que coexisten tienen escalas del orden de milímetros.
2. Si $\kappa \gg 1$, entonces el superconductor es de tipo II. A diferencia de los de tipo I, en estos superconductores, existen dos campos críticos $H_{c1}(T)$ y $H_{c2}(T)$ tales que si $H < H_{c1}$, el material está en fase superconductora, si $H > H_{c2}$ está en fase normal, y si $H_{c1} < H < H_{c2}$,

entonces el material está en una fase mixta, también llamada *fase de Shubnikov*, en la que sigue siendo diamagnético, pero ya no perfecto, de modo que $\mathbf{B}$ no es nulo en el interior, aunque está apantallado. Son estos superconductores en los que nos centraremos. Es en estos materiales, y concretamente en la región intermedia, en los que pueden aparecer vórtices. De manera simplificada, estos vórtices son como *hilos* de fase normal que atraviesan la muestra, y que tienen escalas mucho menores que las regiones normales que aparecen en los superconductores de tipo I.

De hecho, la clasificación que se suele hacer de los superconductores es más precisa en lo que respecta al parámetro κ . Los superconductores se llaman de tipo I cuando $\kappa < 1/\sqrt{2}$, y de tipo II cuando $\kappa > 1/\sqrt{2}$.

2.4 Observación. En el párrafo anterior, nos hemos limitado a describir el comportamiento de los superconductores según su valor de κ , pero no hemos hecho ningún comentario sobre por qué el valor $\kappa = \lambda/\xi$ está relacionado con que un material sea de tipo I o de tipo II. Un análisis detallado de la relación de κ con el comportamiento de los superconductores se sale de los objetivos de este trabajo, pero puede encontrarse en [34, Cap. 4]. La idea resumida consiste en hacer un estudio de tipo termodinámico de la energía libre de Gibbs, que resulta ser el potencial termodinámico adecuado, y el que debe tratarse de minimizar. Cuando se considera un superconductor en que coexisten una región de fase normal y una región de fase superconductora, aparece una energía de pared, o energía superficial de interacción entre las dos fases. Lo que ocurre entonces es que la energía de Gibbs de interacción es positiva cuando $\kappa < 1/\sqrt{2}$, y negativa cuando $\kappa > 1/\sqrt{2}$. Como el estado de equilibrio se alcanza minimizando la energía de libre Gibbs, el superconductor de tipo II va a tender a tener la mayor superficie de interacción posible. De este modo, cuando se aplica un campo externo, en un superconductor de tipo I habrá regiones grandes (del orden de mm) que pasarán a la fase no superconductora, mientras que en uno de tipo II, habrá muchas regiones microscópicas más pequeñas que cambiarán de fase, dando lugar a los vórtices. Es decir, para un mismo volumen de superconductor que pasa a la fase normal, el superconductor de tipo I tratará que la superficie de contacto entre las dos fases sea mínima, y el de tipo II, que sea máxima.

2.4. Fluxones

Consideremos un superconductor con agujeros. Estos agujeros se deberán, en su mayor parte, a regiones en las que el superconductor ha pasado a la fase normal. Por consiguiente, ψ se anula en todas ellas. Tomemos un agujero, y sea $\mathcal{C}$ un lazo alrededor del mismo, es decir, un camino que empieza en un punto y *da una vuelta* alrededor del agujero hasta regresar al punto original. Se tiene entonces la definición siguiente, dada por London.

2.5 Definición. En las condiciones anteriores, se define, para cada agujero el fluxón asociado

$$\Phi' = \Phi + \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{m^*}{e^{*2}n_s} \right) J_i dx^i$$

donde $\Phi = \oint_{\mathcal{C}} A_i dx^i$ es el flujo magnético usual alrededor de cualquier superficie con borde y cuyo borde sea $\mathcal{C}$, y J_i son las componentes del vector corriente $\mathbf{J}$.

Observemos que el fluxón está cuantizado. Para ello, notemos que $\hbar/e^* \cdot \partial_i \varphi = A_i + m^*/e^{*2}n_s^* \cdot J_i$ (ver ecuación (2.7)), de modo que para cualquier curva $\mathcal{C}$, no necesariamente alrededor de una región normal, se tiene

$$\Phi' = \oint_{\mathcal{C}} \left(\left(\frac{m^*}{e^{*2}n_s^*} \right) J_i + A_i \right) dx^i = \frac{\hbar}{e^*} \oint_{\mathcal{C}} \partial_i \varphi dx^i = \frac{\hbar}{e^*} \oint_{\mathcal{C}} \nabla \varphi \cdot d^3 \mathbf{x} = 2\pi n \cdot \frac{\hbar}{e^*} = n \frac{h}{e^*}.$$

En el último paso se ha utilizado que el parámetro de orden ψ debe ser univaluado, de modo que alrededor de un ciclo completo, la fase debe cambiar en múltiplos enteros de 2π . En particular, se concluye que Φ' toma valores que son múltiplos enteros de $\Phi_0 = h/|2e| = 2.068 \cdot 10^{-15}$ Wb, cantidad que recibe el nombre de *cuanto de flujo magnético*. El haber definido Φ_0 como positivo es una convención, el signo de Φ dependerá de la orientación de la superficie y del sentido del campo magnético.

2.6 Observación.

1. Tal y como lo hemos definido, el fluxón depende del camino elegido. Vamos a ver que no es así. Lo primero que hemos de observar es que si el camino $\mathcal{C}$ es homotópicamente equivalente a un punto (es decir, puede deformarse de manera continua en un punto), entonces $\oint_{\mathcal{C}} \partial_i \varphi dx^i = 0$. Una justificación de esto es que según se modifica $\mathcal{C}$ de manera continua, el valor de la integral debería variar de manera continua también. Sin embargo, los valores de Φ' son discretos, tal y como hemos visto. Por consiguiente, Φ' no puede variar cuando se deforma el camino de manera continua. Como en el caso en que el camino es un punto, la integral es nula, se concluye el resultado buscado. Ese mismo argumento permite probar que si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos caminos no necesariamente contráctiles, pero homótopos, entonces el fluxón toma el mismo valor cuando se calcula a lo largo de cualquiera de ellos.
2. Consideremos ahora un camino $\mathcal{C}$ en un superconductor no necesariamente simplemente conexo, pero que no se acerca a las superficies a una distancia inferior a λ . En particular, en todos los puntos de este camino $\mathbf{J}$ puede tomarse como nula (recordemos que se apantalla exponencialmente desde la superficie de acuerdo con la ecuación de London). En ese caso, se sigue del teorema de Stokes que

$$n\Phi_0 = \Phi' = \oint_{\mathcal{C}} A_i dx^i = \iint_{\partial S} A_i dx^i = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi,$$

donde el borde de S es $\mathcal{C}$ (esto se denota $\partial S = \mathcal{C}$). Es decir, $\Phi = n\Phi_0$, de modo que el flujo magnético que atraviesa un agujero en un superconductor *está cuantizado* y solamente puede tomar múltiplos enteros del cuanto de flujo magnético.

2.5. Vórtices

Ya hemos presentado los vórtices en un contexto algo más abstracto en el capítulo anterior y hemos visto cómo surgían como soluciones que hacen estacionaria la energía de Ginzburg-Landau para una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$. En dicho capítulo, no se buscó dar una interpretación física del campo que se utilizaba. En esta sección, vamos a estudiar los vórtices que surgen a partir de las ecuaciones de Ginzburg-Landau. Observemos que, salvo constantes (que se deben a los sistemas de unidades utilizados), la energía de Ginzburg-Landau del tema anterior es la densidad de potencial de Helmholtz, F , y el campo considerado ahora es la pseudofunción de onda ψ , cuyo cuadrado sí que tiene una interpretación física clara: la densidad volumétrica de pares de Cooper.

Los vórtices aparecen en superconductores de tipo II, cuando $H_{c1} < |\mathbf{H}| < H_{c2}$, es decir, en la fase mixta. De manera resumida, lo que ocurre es que el campo magnético comienza a penetrar en el material, y en lugar de distribuirse de manera uniforme en una región macroscópica, como ocurre en los superconductores de tipo I, se concentra en una curva (o en un punto, si consideramos una placa bidimensional de superconductor) que se denomina núcleo (*core* en inglés). Alrededor de este núcleo aparece una supercorriente, que da a su vez lugar a un campo magnético alrededor del núcleo mucho mayor que H_{c2} , que produce que, cerca del núcleo, el material regrese a la fase normal. Podemos establecer aquí una conexión con lo visto sobre vórtices en el caso genérico, pues en los núcleos de los vórtices, el material pasa a la fase normal, y por

consiguiente $\psi(\mathbf{x}) = 0$. Fijémonos además en que, de acuerdo con lo anterior, se produce cuantización del flujo magnético a través de cada vórtice. Esto se justifica directamente a partir de la discusión anterior, teniendo en cuenta que los *agujeros* del superconductor son precisamente los núcleos de los vórtices, y considerando caminos que se adentren en el superconductor a una distancia de las regiones normales mayor que λ .

Cuando el flujo magnético penetra inicialmente en el material, puede hacerlo creando varios vórtices diferentes. Vamos a suponer que estos vórtices están separados por una distancia mucho mayor que λ , de manera que su interacción se podrá despreciar. La justificación de esta afirmación es que la energía de interacción entre dos vórtices decae exponencialmente con longitud característica λ (ver [32, eq. 26.4.61]). Esto permite estudiar la solución para un único vórtice. En ese caso, si se considera un superconductor isótropo, que está sometido a un campo $\mathbf{H}$ y una dirección fija, se tiene simetría cilíndrica, y se puede trabajar en coordenadas cilíndricas. Suponiendo que la solución no depende de la coordenada z , puede buscarse de la forma $\psi(\mathbf{x}) = \psi_\infty f(r) e^{i\chi(\theta)}$ donde r y θ son las coordenadas polares, y $f(0) = 0$. Una primera observación es que el índice de la aplicación χ (que puede verse como una aplicación de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$) es quien determina los cuantos de flujo magnético que hay asociados a la solución (ver ejemplo 1.3). En efecto,

$$\Phi = \frac{\hbar}{e^*} \oint_C \nabla \chi(\theta) d\mathbf{x} = \frac{\hbar}{2e^*} \cdot (\chi(2\pi) - \chi(0)).$$

De acuerdo con nuestra definición, para tener vórtices el índice debe ser 1. Podemos por tanto buscar soluciones de las ecuaciones de Ginzburg-Landau del tipo $\psi(r, \theta) = \psi_\infty f(r) e^{i\theta}$, que claramente tienen índice 1. En el caso general, no se pueden obtener soluciones analíticas para un único vórtice. Sí que puede hacerse en algunos casos particulares, como por ejemplo, si se desprecia el término $\beta|\psi|^2\psi$ en la ecuación de GL (en cuyo caso se obtiene una ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico) o si se supone que $\lambda \gg \xi$, en cuyo caso se puede suponer que ψ pasa a su valor de equilibrio ψ_∞ en una distancia del orden de ξ , de modo que se hace constante en una distancia mucho menor que la de variación de $\mathbf{B}$. El cálculo explícito puede encontrarse en [32, Sec. 24.4.6], y da lugar a un campo $\mathbf{B}$ dirigido a lo largo de una recta, que decae exponencialmente lejos del núcleo, y a una corriente en dirección $\hat{\theta}$ a su alrededor que también decae exponencialmente. En la figura 2.2 se muestra como varían el campo magnético y el módulo del parámetro de orden en un vórtice aislado. Merece la pena observar que las variaciones se producen en las longitudes propias de variación de $\mathbf{B}$ y $|\psi|$, que son λ y ξ respectivamente. Dentro de que el estudio de un vórtice aislado puede ser interesante, en la realidad, lo más habitual es observar una red de vórtices, cada uno de ellos conteniendo un cuanto de flujo magnético. El flujo magnético total a través del superconductor debe ser $n\Phi_0$ para cierto $n \in \mathbb{Z}$. Además, un estudio energético permite deducir que es más favorable, energéticamente hablando, tener muchas regiones en fase normal más pequeñas, en lugar de una muy grande. Por ello, es más favorable que aparezcan varios vórtices, cada uno aportando un flujo magnético igual a Φ_0 , a un solo vórtice que contenga el flujo magnético total $n\Phi_0$. Por otro lado, los vórtices interactúan entre sí mediante una fuerza que es atractiva o repulsiva según su sentido de giro (ver figura 2.3a). Cuando hay un flujo magnético total $n\Phi$, y cada vórtice aporta un flujo Φ_0 , los n vórtices tienen el mismo sentido de giro, y aparecen fuerzas repulsivas entre ellos, que hacen que se repelan tanto como sea posible.

De hecho, Alekséi Alekséyevich Abrikósov recibió el Premio Nobel en 2003 por predecir este fenómeno teóricamente. Su idea fue partir de la ecuación (2.5), despreciando el término $\beta|\psi|^2\psi$, para lo cual debe suponerse que $|\psi|$ es pequeño. Esta aproximación es válida cerca de T_c , pues en ese caso $\psi \rightarrow 0$. Suponiendo un campo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, y tomando $\mathbf{A} = xB\hat{y}$, se obtiene la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \frac{1}{2m^*} (-i\hbar\partial_y - e^*Bx)^2 \psi = |\alpha|\psi.$$

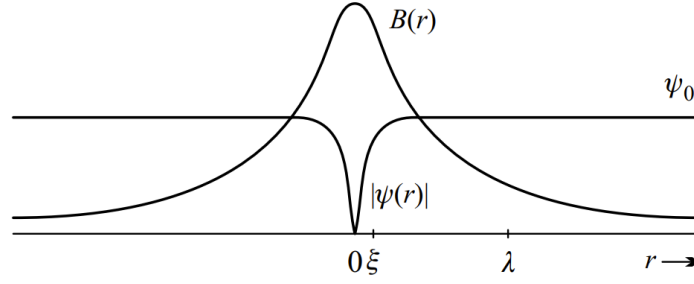


Figura 2.2: Variación del campo magnético y el módulo del parámetro de orden en un vórtice. Imagen tomada de [32].

Falta el factor ∂_{yy} en el laplaciano porque se simplifica al escribir la ecuación de esta forma. La forma de la ecuación, y más concretamente la invarianza traslacional en las direcciones y, z nos puede llevar a plantear el *ansatz* siguiente $\psi(\mathbf{x}) = e^{i(k_y y + k_z z)} f(x)$. Sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(x) + \frac{1}{2m^*} (\hbar k_y - e^* x B)^2 f(x) = \left(|\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right) f(x),$$

que es la ecuación de un oscilador armónico cuántico centrado en $x_0 = \hbar k_y / (e^* B)$, de masa m^* , y frecuencia $\omega^* = |e^*| B / m^*$. El término de la derecha hace las veces de energía. Las soluciones son proporcionales a $\exp(-(x - x_0)^2 / 2\ell^2)$ donde $\ell = \sqrt{\hbar / m^* \omega^*}$. Teniendo además en cuenta que las energías del oscilador son $\hbar \omega^* (n + 1/2)$ para $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que esta solución es posible cuando

$$B = \frac{m^*}{\hbar |e^*|} \cdot \left(\frac{|\alpha| - \hbar^2 k_z^2 / 2m^*}{n + 1/2} \right). \quad (2.10)$$

En particular, hay un campo máximo a partir del cual esta solución comienza a ser válida, B_{c2} , que se corresponde con el valor H_{c2} que ya hemos mencionado. Se obtiene al imponer $n = k_z = 0$, y es $H_{c2} = 2m^* |\alpha| / (\hbar |e^*| \mu_0) = \Phi_0 / 2\pi \xi^2 \mu_0$. Nótese que para ese valor de B , $\ell = \xi$. Dicho esto, observemos que en esa situación, cualquier combinación de soluciones en estas condiciones vuelve a ser una solución. Así, se describe la presencia de varios vórtices (idealmente una cantidad infinita) como

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inby} \exp \left(-\frac{(x - na)^2}{2\xi^2} \right),$$

donde se toma $x_0 = na$ para cierto parámetro a , y $k_y = nb = nae^* B / \hbar$ para que la ecuación del oscilador esté centrada en na . Vemos que esta solución es periódica en x e y , y describe una disposición periódica rectangular de los vórtices. Por cuestión de simetría, es de esperar que el periodo en ambos ejes sea el mismo. Como en el eje y el periodo está dado por $2\pi/b$ (por tener una exponencial compleja), al imponer $a = 2\pi/b$, se obtiene $ab = 2\pi$, luego $a^2 |e^*| B / \hbar = 2\pi$, de modo que el flujo magnético en cada cuadrado de lado a , centrado en cada vórtice, es $Ba^2 = 2\pi \hbar / |e^*| = \Phi_0$, como habíamos anticipado. Observemos que realmente estamos describiendo vórtices, notando que en los núcleos de cada vórtice, ψ verdaderamente se anula. En efecto, tomando puntos $(x_m, y_p) = a \cdot (m + 1/2, p + 1/2)$, y sustituyendo, se obtiene:

$$\psi(x_m, y_p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i n}{a} \cdot a(p + \frac{1}{2})} \exp \left(-\frac{a^2 (m + \frac{1}{2} - n)^2 \cdot 2\pi}{2a^2} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \exp \left(-\pi \left(m + \frac{1}{2} - n \right)^2 \right)$$

donde hemos utilizado que $a = \sqrt{2\pi} \xi$, lo cual se deduce despejando de (2.10). La suma anterior es nula, pues el sumando n -ésimo se cancela con el sumando n' -ésimo, siendo $n' = -(2m + 1 + n)$.

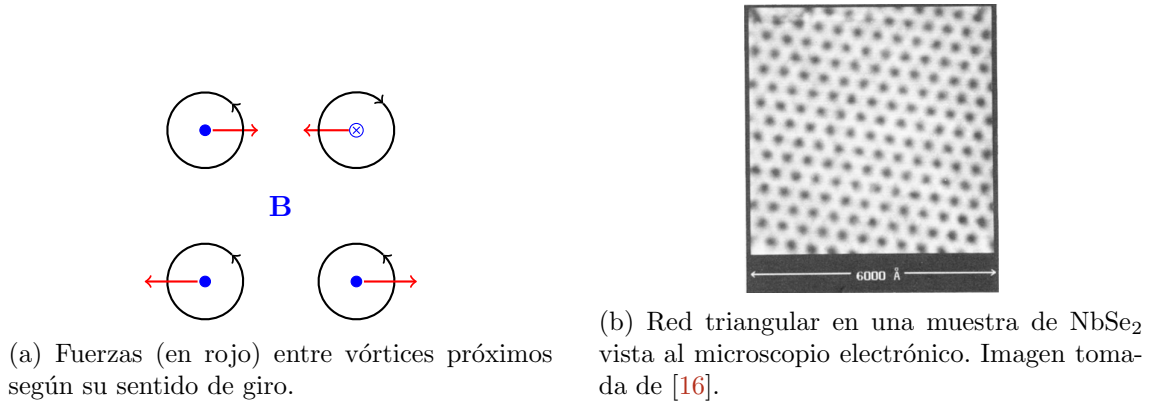


Figura 2.3: Interacción de vórtices en un superconductor de tipo II.

2.7 Observación. Desde un punto de vista algo más cualitativo, al penetrar el campo magnético en un superconductor, se forman vórtices de corriente alrededor de las regiones en que ha penetrado, cuya dirección de giro se determina imponiendo la regla de la mano derecha. Estos vórtices se comportan ahora como dipolos, ejerciéndose una fuerza de atracción o repulsión, según el sentido de giro, con longitud característica λ . Cuando todos los vórtices giran en el mismo sentido en una muestra macroscópica, su fuerza es repulsiva, y se disponen en el plano separándose tanto como les sea posible. Esto se muestra en la figura 2.3a. En la figura 2.3b se muestra una red de vórtices en una muestra real de material superconductor.

2.6. El efecto Josephson

El efecto Josephson es un efecto predicho originalmente por el físico teórico Brian Josephson en 1962 [18], y comprobado experimentalmente por John Martin Rowell y Philip Warren Anderson en 1963 [1]. Basándose en la teoría microscópica de los pares de Cooper, Josephson predijo que al colocar dos materiales superconductores separados por una barrera aislante delgada (configuración denominada *unión de Josephson*), aparecería una supercorriente entre ellos, aún si no se les imponía una diferencia de potencial externamente. Este efecto se conoce como el efecto Josephson DC, pues Josephson predijo otro efecto: si se mantiene una diferencia de potencial constante entre los superconductores, entonces aparece una corriente alterna de frecuencia $2eV/h$ donde V es la diferencia de potencial aplicada. Vamos a centrarnos en el efecto Josephson DC, y en adelante nos referiremos a él simplemente como efecto Josephson. Si bien es cierto que Josephson lo predijo inicialmente a partir de la teoría microscópica, vamos a ver que el enfoque fenomenológico de Ginzburg-Landau permite explicarlo también. Para poder observar el efecto, no es necesario que los superconductores estén separados por una capa aislante, también son válidas las configuraciones en las que se introduce una muestra de un metal no superconductor entre los electrodos superconductores. Esto da lugar a uniones de Josephson llamadas S-I-S (superconductor-aislante-superconductor) o S-N-S (superconductor-normal-superconductor). A nivel microscópico, lo que ocurre es que pares de Cooper atraviesan la unión por efecto túnel. El cálculo que vamos a hacer es un cálculo simplificado que requiere de una serie de aproximaciones que iremos detallando conforme vayamos necesitando. En adelante, utilizaremos la expresión JJ para referirnos a la unión de Josephson (del inglés, *Josephson junction*).

Comenzamos la discusión para el caso particular de una unión de Josephson formada por dos muestras del mismo material en ausencia de campos magnéticos. Puesto que la corriente que se quiere calcular es una cantidad física, será invariante gauge, de modo que al no haber campos magnéticos, vamos a fijar el gauge $A_i \equiv 0$. Vamos a considerar una misma función ψ , que estará definida en ambos superconductores, y también en la unión. Observemos que en cada

superconductor, la fase $\varphi(\mathbf{x})$ es constante. Para justificar esto, basta observar que si $A_i \equiv 0$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, de modo que el razonamiento de la proposición 2.3 es válido, y nos dice que $\nabla\varphi = 0$ en cada electrodo (que se asume conexo), y por consiguiente, la fase es constante en cada uno. Buscando hacer un análisis más cuantitativo, consideremos que los dos electrodos están separados por un aislante de anchura d , todo colocado a lo largo del eje x , y de manera que los superconductores comienzan en las posiciones $x = \pm d/2$ [32, Cap. 26]. Vamos a suponer también que $d \ll \xi$, y que los superconductores están en equilibrio. En ese caso, la pseudofunción de onda toma la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} |\psi_\infty| e^{i\varphi_L} & \text{si } x < -d/2 \\ |\psi_\infty| e^{i\varphi_R} & \text{si } x > d/2, \end{cases}$$

para ciertas φ_L, φ_R constantes. En adelante, los subíndices L y R indican izquierda y derecha respectivamente. El hecho de que el módulo en ambos casos sea $|\psi_\infty|$ se debe a la hipótesis de que los superconductores se encuentran en equilibrio y a que en ausencia de campo magnético la densidad de pares de Cooper está dada por $|\psi_\infty|$, que es el valor que minimiza el funcional de Ginzburg-Landau. Definiendo $f = \psi/|\psi_\infty|$, se impone la ecuación (2.9). Se utiliza ahora la hipótesis $\xi/d \gg 1$ para aproximar la ecuación a $f''(x) = 0$, ecuación para la que se conoce solución analítica $f(x) = a + bx$. Cabe destacar que en principio, en la región aislante entre los superconductores no tendría sentido tener un valor no nulo del parámetro de orden, pues el aislante no es superconductor y el parámetro de orden está definido originalmente solamente en los superconductores. La manera de justificar que no sea idénticamente nulo parte de las observaciones experimentales: si se observa una corriente, debe haber portadores de carga atravesando el aislante, cuya densidad estará determinada por el módulo del parámetro de orden. Se impone entonces que f sea continua en los bordes del superconductor, es decir, $f(-d/2) = e^{i\varphi_L}$, y $f(d/2) = e^{i\varphi_R}$. Esto lleva a

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{d}\right) e^{i\varphi_L} + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{d}\right) e^{i\varphi_R},$$

de modo que $\psi(x) \approx |\psi_\infty| \cdot f(x)$. La corriente asociada se obtiene directamente de la ecuación (2.6),

$$\begin{aligned} J &= \frac{e^* \hbar}{i2m^*} (\psi^*(x)\psi'(x) - \psi(x)\psi'^*(x)) = \frac{e^* \hbar |\psi_\infty|^2}{m^* d} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{d}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{d}\right) \right] \sin(\varphi_R - \varphi_L) \\ &= \frac{e \hbar |\psi_\infty|^2}{m^* d} \sin(\varphi_R - \varphi_L) = J_c \sin(\varphi_R - \varphi_L). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Concluimos así que se establece una corriente entre los electrodos que depende del seno de la diferencia de fase entre los superconductores. La corriente es simplemente $I = I_c \sin(\varphi_R - \varphi_L)$ donde $I_c = \frac{e \hbar |\psi_\infty|^2}{m^* d} \mathcal{A}$ se denomina *corriente crítica*, y $\mathcal{A}$ es el área de la sección normal del aislante. Fijémonos en que este parámetro depende de la anchura de la unión. Otra forma de obtener esta ecuación, que también aparece con frecuencia en la literatura, pero que solamente citamos aquí, es la propuesta por Feynman [10], en la que se resuelven dos ecuaciones de Schrödinger acopladas. Si no hubiéramos supuesto que ambas muestras eran iguales, la expresión obtenida sería la misma, salvo sustituir $|\psi_\infty|$ por $|\psi_{\infty,L}| \cdot |\psi_{\infty,R}|$. La densidad de corriente así obtenida es constante. Como vamos a ver a continuación, si hay un campo magnético externo, se obtiene una corriente que varía espacialmente.

Vamos a considerar ahora el caso en que hay un campo magnético, para el que no se puede elegir $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Además, puesto que el superconductor considerado ya no es simplemente conexo (de hecho no es ni conexo), no se puede elegir el gauge de London, y no se puede asegurar que φ sea constante en cada electrodo. En cualquier caso, el efecto Josephson se sigue produciendo, y vamos a obtener la expresión de la corriente mostrando que además es invariante gauge.

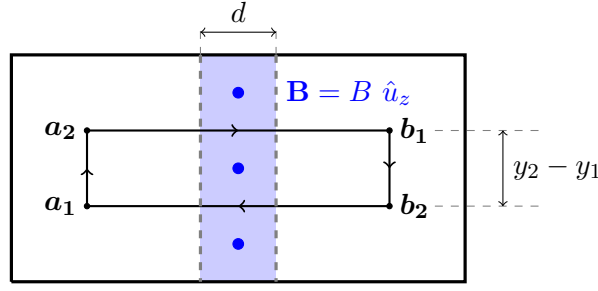


Figura 2.4: Esquema de la unión de Josephson.

Consideramos entonces una disposición de la unión de Josephson igual que en el caso anterior. La corriente de Josephson se va a expresar en términos de una diferencia de fase invariante gauge.

2.8 Definición. Llamamos *diferencia de fase invariante gauge* entre dos puntos con las mismas coordenadas y, z al valor

$$\theta(y, z) := \varphi(x_2, y, z) - \varphi(x_1, y, z) - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathcal{C}(y, z)} A_i dx^i$$

donde $\mathcal{C}(y, z)$ es la curva que une los puntos (x_1, y, z) y (x_2, y, z) mediante una línea recta (a lo largo de la dirección de la corriente). [25]

Se obtiene entonces $\theta(y, z)$, y como vamos a ver, esto conduce a una densidad de corriente que depende del punto estudiado en el plano de la unión. Observemos, eso sí, que esta diferencia de fase es verdaderamente invariante gauge, pues aplicando la transformación (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} \theta' &= (\varphi_2 + \alpha_2) - (\varphi_1 + \alpha_1) - \frac{2\pi e^*}{h} \int_{\mathcal{C}(y, z)} (A_i + \frac{\hbar}{2e} \partial_i \alpha) dx^i \\ &= \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathcal{C}(y, z)} A_i dx^i + \left[\alpha_2 - \alpha_1 - \int_{\mathcal{C}(y, z)} \partial_i \alpha dx^i \right] = \theta, \end{aligned}$$

donde hemos denotado φ_i y α_i los valores de estas magnitudes en un punto (x_i, y, z) .

A efectos de hacer un cálculo analítico, vamos a suponer que los electrodos son infinitos en las direcciones y, z , y que hay un campo magnético externo en la dirección $B(\mathbf{x})\hat{z}$, es decir, perpendicular al plano de la unión. A lo largo de todo este desarrollo vamos a considerar solamente el campo externo aplicado, despreciando el campo magnético que producirá la corriente de Josephson. Por el momento, vamos a asumir como válida esta aproximación, suponiendo que estamos trabajando en una unión *corta*, y posponemos hasta la sección 2.8 una justificación más detallada. Aparece entonces una corriente dada por la expresión (2.7). Suficientemente lejos de la unión, $\nabla\varphi = e^*/\hbar \cdot \mathbf{A} = 2\pi/\Phi_0 \cdot \mathbf{A}$, pues allí no fluye corriente, y podemos tomar $\mathbf{J} \approx \mathbf{0}$ en la ecuación (2.7). Notemos que esta relación implica que, suficientemente lejos de la unión, φ solo varía en la dirección y , luego θ también. Tomemos dos puntos $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ en el superconductor izquierdo, ambos con la misma coordenada x , es decir, a la misma profundidad en el superconductor, y puntos $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ con las mismas coordenadas y, z que $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ como se muestra en la figura 2.4. Sea $\mathcal{D}$ el rectángulo que recorre los puntos $\mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{b}_1 \rightarrow \mathbf{b}_2 \rightarrow \mathbf{a}_2$ (sentido horario). Con esta configuración, aplicando el teorema de Stokes (nótese que por la orientación elegida, $d\mathbf{S}$ lleva dirección $\hat{z}$, de modo que $\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$)

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{D}} A_i dx^i = \underbrace{\int_{\mathbf{a}_2}^{\mathbf{a}_1} A_i dx^i}_{\text{electrodo izq.}} + \underbrace{\int_{\mathbf{a}_1}^{\mathbf{b}_1} A_i dx^i}_{\text{unión inf.}} + \underbrace{\int_{\mathbf{b}_1}^{\mathbf{b}_2} A_i dx^i}_{\text{electrodo der.}} + \underbrace{\int_{\mathbf{b}_2}^{\mathbf{a}_2} A_i dx^i}_{\text{unión sup.}}$$

A lo largo de los electrodos, de acuerdo con la suposición anterior

$$\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathbf{a}_2}^{\mathbf{a}_1} A_i dx^i = \varphi(\mathbf{a}_1) - \varphi(\mathbf{a}_2) \qquad \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathbf{b}_1}^{\mathbf{b}_2} A_i dx^i = \varphi(\mathbf{b}_2) - \varphi(\mathbf{b}_1).$$

Por otro lado, a lo largo de las uniones, teniendo en cuenta la definición de θ , se tiene

$$\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathbf{a}_1}^{\mathbf{b}_1} A_i dx^i = \varphi(\mathbf{b}_1) - \varphi(\mathbf{a}_1) - \theta(y_1) \qquad \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathbf{b}_2}^{\mathbf{a}_2} A_i dx^i = \varphi(\mathbf{a}_2) - \varphi(\mathbf{b}_2) + \theta(y_2).$$

En esta expresión, θ denota la diferencia de fase invariante gauge del lado derecho respecto del izquierdo. Además, el flujo magnético se puede aproximar como $\Phi = B(d + \lambda_L + \lambda_R)(y_2 - y_1)$ donde estamos suponiendo que B es aproximadamente constante. Esta aproximación es necesaria para poder continuar con el cálculo analítico, aunque no es particularmente fiel a la realidad, ya que como se vio al estudiar la ecuación de London, el campo magnético en el superconductor decae con una longitud característica igual a la longitud de London. En la expresión anterior, λ_L y λ_R denotan las longitudes de London en los lados izquierdo y derecho de la unión. Estamos haciendo algo de abuso de notación con respecto a la introducida al principio del capítulo, pues λ_L denota la longitud de penetración de London en el lado izquierdo para la temperatura a la que se encuentre la unión. En cualquier caso, tomando esta aproximación se sigue que

$$\Phi = B(d + \lambda_L + \lambda_R)(y_2 - y_1) = \oint_{\mathcal{D}} A_i dx^i = \frac{\Phi_0}{2\pi} (\theta(y_2) - \theta(y_1)),$$

y al reorganizar y tomar límites, se obtiene

$$B = \frac{2\pi\Phi_0}{(d + \lambda_L + \lambda_R)} \cdot \lim_{y_1 \rightarrow y_2} \frac{\theta(y_2) - \theta(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\Phi_0}{2\pi D} \cdot \frac{d\theta}{dy}(y_2). \quad (2.12)$$

Consideramos ahora una unión finita, de dimensiones L_z y L_y . En ese caso, el flujo magnético total a través de la unión es simplemente $\Phi = B(d + \lambda_L + \lambda_R)L_y$. De cara a futuras referencias, definimos $D := d + \lambda_L + \lambda_R$. Por consiguiente, de la expresión anterior se puede obtener (θ_0 es simplemente una constante de integración que depende de la diferencia de fase en $y = 0$):

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{B \cdot 2\pi D L_y}{\Phi_0 L_y} \Rightarrow \theta(y) = \theta_0 + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \cdot \frac{y}{L_y} \quad (2.13)$$

Para obtener la corriente de Josephson, hacemos la suposición de que los campos son débiles. Entonces podemos seguir tomando la ecuación aproximada (siempre que mantengamos la suposición $d \ll \xi$) $f'' = 0$, y asumimos que el efecto de los campos es simplemente hacer que las fases dependan de la posición. Se puede entonces tomar la misma expresión para la corriente de Josephson que en el desarrollo en ausencia de campo, pero poniendo la fase invariante gauge [19, Cap. 15]. Además de este argumento, la demostración de Feynman que se comentó en el caso anterior puede adaptarse al caso en que hay campo magnético, y proporciona la misma expresión de la corriente en función de la diferencia de fase invariante gauge [5, Sec. 1.5]. De este modo,

$$\mathbf{J}(y) = J_c \sin(\theta(y)) \hat{x} = J_c \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \cdot \frac{y}{L_y}\right) \hat{x}. \quad (2.14)$$

Esta expresión es válida para situaciones con geometrías más generales, en las que se tendrá simplemente $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_c \sin(\theta(\mathbf{x}))$.

Por otro lado, se puede obtener la corriente total integrando la densidad de corriente. Esto nos lleva a una relación de dependencia de la corriente con el flujo magnético que se asemeja notablemente al patrón de interferencias de Fraunhofer que aparece en óptica cuando se estudia la difracción de la luz a través de una rendija. Además, para un flujo magnético dado, según

la fase θ_0 , la unión transportará cualquier valor de corriente, en cualquier sentido, entre 0 y el valor máximo, $I_m = |\sin(\pi\Phi/\Phi_0)/(\pi\Phi/\Phi_0)|$ [23, Cap. 12]. En efecto, integrando la densidad de corriente,

$$I = \int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz \int_{-L_y/2}^{L_y/2} J_0 \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi\Phi y}{\Phi_0 L_y}\right) dy = J_0 L_y L_z \sin(\theta_0) \cdot \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0}. \quad (2.15)$$

Los mínimos de esta función aparecen justamente en los múltiplos enteros del cuanto de flujo, Φ_0 . Esto tiene sentido físico, pues en ese caso, de la expresión (2.7) se sigue que caben longitudes de onda enteras en la unión, de modo que la densidad de corriente en un sentido se cancela con la densidad de corriente igual en el otro, y la corriente neta es nula. Es decir, la corriente de Josephson se cancela en cada ciclo completo, estos ciclos completos se denominan en ocasiones *vórtices de Josephson* como detallaremos más adelante.

2.7. SQUIDS

Los SQUIDS (*Superconducting QUantum Interference Devices*) son circuitos superconductores cerrados que contienen una o varias uniones de Josephson. Hay dos tipos principales, los SQUIDS-dc, que se insertan en circuitos o dispositivos electrónicos, y los SQUIDS-rf, que están aislados físicamente, y solamente interactúan con el exterior mediante acoplamiento electromagnético [23]. Los SQUIDS pueden tener además una o varias uniones de Josephson. En la figura 2.5 se muestran dos SQUIDS-rf en forma de anillo, una de ellas con una sola unión (figura 2.5a), y la otra con dos (figura 2.5b). En ambos casos se trata de SQUIDS-rf porque los anillos no están conectados a ningún circuito externo, y solamente tienen interacciones con el exterior mediante el campo magnético. En los SQUIDS mostrados en la figura, los anillos están compuestos de material superconductor, y hay solamente una pequeña cuña (o dos) de material aislante (o en general, material no superconductor). Por otro lado, la figura 2.5c muestra un SQUID-dc. Se trata de un bucle superconductor con dos ramas que contienen uniones de Josephson, y que se introduce en un circuito externo, de manera que se puede introducir una corriente a través de las uniones. Esta corriente se divide en dos para atravesar el SQUID-dc, y en cada rama se suma con una corriente i que aparece siempre que haya un flujo magnético externo como consecuencia del efecto Josephson. Los SQUIDS son dispositivos muy interesantes en sí mismos, pues tienen numerosas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, se pueden utilizar para crear magnetómetros, amplificadores, y voltímetros de alta sensibilidad (ver [34, Sec. 6.5.3]).

Los SQUIDS-dc se utilizan en experimentos de interferencias de corrientes. En efecto, considerando el dispositivo de la figura 2.5c, se tienen dos uniones, HG y EF en el dibujo. Los extremos de la unión se pueden conectar, por ejemplo, a un amperímetro. La corriente total se podrá escribir como la suma $I_{HG} + I_{EF}$. En el caso más sencillo de superconductores convencionales, las dos corrientes interfieren, y la corriente máxima que se puede obtener resulta ser proporcional a $|\cos(2\pi\Phi/\Phi_0)|$ (ver por ejemplo [10] o [34]). De hecho, estas interferencias permiten estudiar también uniones de Josephson en las que uno de los superconductores es no convencional. Esto es lo que se hace en [9], artículo que tomaremos como punto de partida en el capítulo siguiente, en el que estudiaremos este tipo de materiales. Aun así, nuestro estudio del capítulo siguiente no va a basarse en un SQUID, sino directamente en una unión de Josephson. Haremos algunos breves comentarios sobre una posible disposición experimental cuando detallemos el problema que vamos a estudiar.

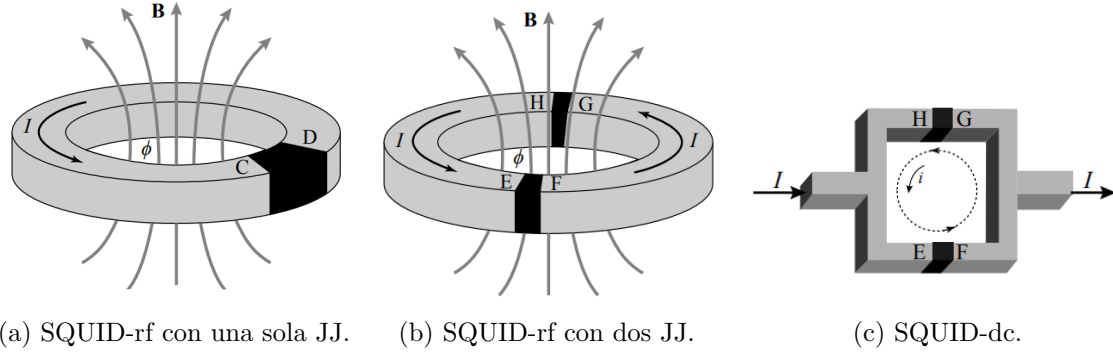


Figura 2.5: Diagramas de los diferentes tipos de SQUIDs. Imágenes tomadas de [23].

2.8. Vórtices de Josephson

En el estudio que hemos realizado sobre el efecto Josephson en presencia de un campo magnético, hemos supuesto que $\mathbf{B}$ era constante en la unión, y aunque no lo hemos explicitado en dicha sección, no hemos considerado ninguna interacción entre las corrientes apantalladoras y la corriente de Josephson que hemos calculado. Esto es lo que se denomina una *unión corta*. Aquellas uniones en las que esta aproximación no es válida, es decir, en las que $\mathbf{B}$ no puede tomarse como constante y la interacción entre las corrientes apantalladoras y de Josephson debe estudiarse detenidamente, se llaman *uniones largas*. Como vamos a ver, esta clasificación depende de la relación entre la longitud de la unión, que denotamos a (la longitud de la dirección a lo largo de la que varíe $\mathbf{B}$, es decir, la longitud a lo largo de la dirección y en la figura 2.4) y una nueva longitud característica, llamada *longitud de penetración de Josephson*.

Volvamos al caso de la unión corta ya estudiada. La densidad de corriente en la unión tiene la forma dada en (2.14). Ahora bien, en el interior de la unión hay un campo magnético, que vamos a suponer que depende solamente de y , es decir, $B(y) \hat{z}$. De acuerdo con la ley de Ampère-Maxwell, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Por consiguiente, $\partial_y B_z(y) = \mu_0 J(y)$. Ahora bien, de (2.12), se sigue que $\partial_y B_z = \Phi_0 / (2\pi D) \theta''(y)$. Uniendo ambas expresiones, se obtiene

$$\frac{\Phi_0}{2\pi D} \frac{d^2 \theta}{dy^2} = \mu_0 J_c \sin(\theta(y)).$$

Esto motiva definir la *longitud de penetración de Josephson* como

$$\Lambda_J := \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 J_c (d + \lambda_L + \lambda_R)}}.$$

Con este nuevo parámetro, que suele ser del orden de milímetros, mucho mayor que la longitud de penetración de London [23, Sec. 12.4.1], la ecuación para θ se transforma en la ecuación de *Ferrell-Prange*

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} = \frac{\sin(\theta(y))}{\Lambda_J^2} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\sin \theta}{\Lambda_J^2}, \quad (2.16)$$

donde la segunda ecuación es la que obtiene si se permite a $\mathbf{B}$ variar en las direcciones y, z [5, Sec. 1.7]. Si se incluye también un campo eléctrico, que puede aparecer, por ejemplo, si se polariza externamente la unión, entonces la ecuación de la fase pasa a ser la ecuación de *Sine-Gordon*, $\partial_y^2 \theta + \partial_z^2 \theta - v^{-2} \partial_t^2 \theta = \Lambda_J^{-2} \sin \theta$. Es claro que la ecuación de Ferrell-Prange es el caso particular obtenido a partir de este cuando no se considera dependencia temporal. En cualquier caso, vamos a estudiar situaciones estacionarias, de modo que nos centraremos en la ecuación (2.16), a la que vamos a llamar ecuación de Sine-Gordon.

2.9 Observación. Merece la pena destacar algunos aspectos de la relación anterior.

1. Cuando $\theta \rightarrow 0$, $\sin \theta \approx \theta$, y la ecuación se reduce a $\theta''(y) = \Lambda_J^{-2}\theta(y)$. De la ecuación (2.12), se sigue que $\partial_y^2 B_z = \Lambda_J^{-2} B_z$, y de la ley de Ampère-Maxwell y esta relación, se obtiene $\partial_y^2 J = \Lambda_J^{-2} J$. Para el campo magnético, se impone la condición de que en el borde de la unión (esto es, para $y = \pm a/2$), debe coincidir con el campo externo. Se obtiene entonces una ecuación de apantallamiento para $\mathbf{B}$ y $\mathbf{J}$ con longitud característica Λ_J . En las uniones cortas, se tiene $a \ll \Lambda_J$. En esos casos, las corrientes de Josephson a través de la unión son muy pequeñas comparadas con las corrientes apantalladoras del interior de los superconductores, y en las regiones superconductoras no hay campo magnético, pero en la región aislante entre ellas, el campo magnético es prácticamente constante y coincide con el campo externo aplicado (ver [23, Cap. 12]). En la región aislante aparecen corrientes de Josephson sinusoidales, y hay un flujo magnético a través del aislante (ver figura 2.6a). Por el contrario, si $a \gg \Lambda_J$, entonces el tratamiento anterior no es válido, y $\mathbf{B}$ y $\mathbf{J}$ decrecen exponencialmente con respecto al borde de la unión (en la dirección que se adentra en el superconductor). Para campos débiles, las corrientes de London que aparecen lateralmente en los electrodos son las que acaban transformándose en las corrientes de Josephson en la unión (ver figura 2.6b). Es decir, el campo magnético no solamente queda apantallado en el interior de los superconductores, sino también en la capa aislante.
2. La ecuación (2.16) es la ecuación de movimiento de un péndulo para el que θ denota el ángulo medido con respecto a la vertical superior, identificando la coordenada y con el tiempo t , la fase $\theta(y)$ con el desplazamiento angular del péndulo, $\alpha(t)$, el campo magnético (que es proporcional a la derivada de la fase) con la velocidad angular, y Λ_J con el inverso de la frecuencia de oscilación $\Omega^{-1} = \sqrt{\ell/g}$ (ver [23, Tabla 12.1]). En cualquier caso, es importante recalcar que aunque el movimiento del péndulo sea periódico *en el tiempo*, la fase θ es periódica *en el espacio*, y concretamente, en la dirección y . En estos términos, la ecuación (2.13), que nos lleva a una fase lineal, se corresponde con un péndulo que se mueve con velocidad angular constante, es decir, uno que tiene tanta energía cinética que los efectos de la gravedad son despreciables. Para que esto ocurra en un péndulo, la frecuencia debe ser muy elevada, lo cual se corresponde con $\Lambda_J \rightarrow \infty$, y de la ecuación (2.16), se sigue $\theta'(y)$ es constante, de modo que $\mathbf{J}$ varía de manera sinusoidal.

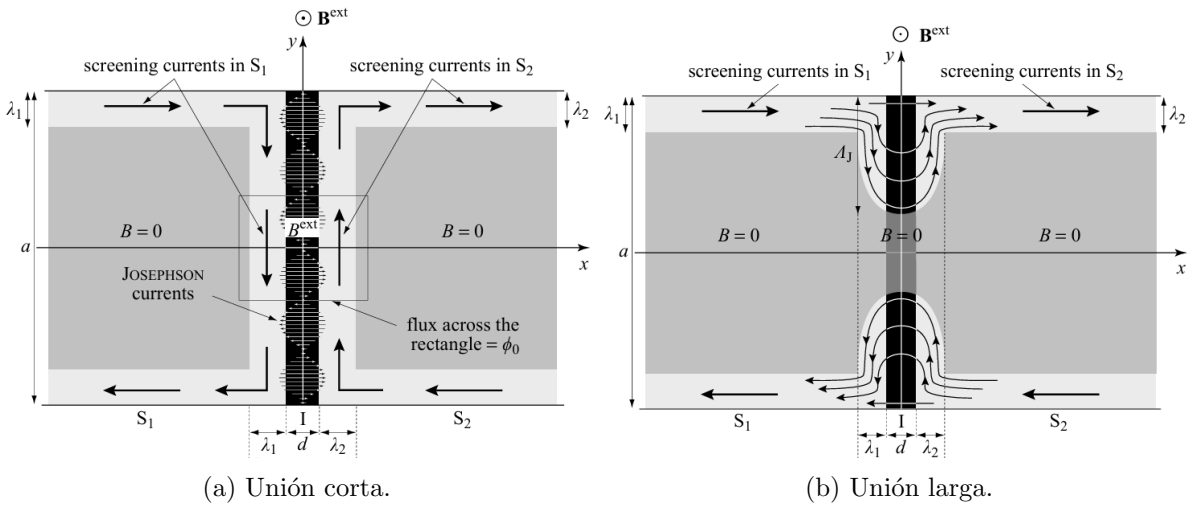


Figura 2.6: Esquemas de los dos tipos de uniones de Josephson. Imágenes tomadas de [23].

Para continuar con el estudio de los vórtices de Josephson, vamos a continuar con la analogía del péndulo. Puesto que las uniones reales son finitas, en el péndulo deben considerarse

solamente movimientos con $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$ (esto equivale a considerar $-a/2 \leq y \leq a/2$). Denotemos ω_0 la velocidad angular inicial del péndulo, que suponemos que comienza en $t = -\tau/2$ en el punto inferior de su trayectoria. Si $\omega_0 \geq 2\Omega$, entonces el péndulo puede dar una vuelta completa. Se tiene entonces una velocidad angular periódica, aunque no sinusoidal, y que oscila entorno a un valor positivo. Esta situación, en términos de campo magnético, se corresponde con un campo externo mayor que un valor crítico $B_{cJ} = 2\mu_0 J_c \Lambda_J$. Para ver que el campo crítico toma este valor, basta escribir la condición $\dot{\alpha}|_{t=-\tau/2} > 2\Omega$, sustituyendo $\Omega = \Lambda_J^{-1}$, y $\dot{\alpha}|_{t=0} = \theta'|_{y=-a/2} = 2\pi D \Phi_0 B(-a/2)$, y operar, teniendo en cuenta que el campo externo es justamente $B(-a/2)$. De este modo, cuando el campo externo supera B_{cJ} , θ es periódica, aunque no necesariamente armónica, y se obtiene una distribución de corriente también periódica en la dirección y [34]. Concretamente, los vórtices aparecen cuando las corrientes que atraviesan la unión aislante se cierran dentro de las regiones de London de los electrodos, dando lugar a una red de remolinos de corriente. Estos remolinos son los *vórtices de Josephson*. Estas estructuras vuelven a ser vórtices tal y como los vimos en el primer capítulo, lo único que cambia es la geometría.

Algunas de las afirmaciones anteriores se pueden comprobar resolviendo analíticamente la ecuación (2.16). Para un único vórtice de Josephson aislado que se encuentra en una unión infinita en la dirección y , se puede comprobar que

$$\theta(y) = 4 \arctan(e^{y/\Lambda_J}) \quad (2.17)$$

es una solución que cumple las condiciones de contorno $\theta(y \rightarrow -\infty) = 0, \theta(y \rightarrow \infty) = 2\pi$, y $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \theta'(y) = 0$. Utilizando ahora la ecuación (2.13), se sigue que $B_z(y) = \Phi_0/2\pi D \cdot \theta'(y)$. Observamos así que, efectivamente, el flujo contenido en el vórtice es Φ_0 ,

$$\Phi = D \int_{-\infty}^{\infty} B_z(y) dy = \frac{\Phi_0}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(y) dy = \frac{\Phi_0}{2\pi} \cdot 2\pi = \Phi_0.$$

Capítulo 3

JJ en una unión con una esquina entre un superconductor usual y uno no convencional

Dedicamos este último capítulo al estudio de una JJ dispuesta de una forma más concreta: una unión entre dos superconductores, uno no convencional, y otro convencional con onda de tipo d , dispuestos tal y como se muestra en la figura 3.1. La geometría del problema a estudiar, así como gran parte de las técnicas que se van a utilizar en este capítulo están recogidas en los artículos [9] y [12]. En caso de consultarse, debe tenerse en cuenta que muchas de las notaciones que se utilizan en estos difieren significativamente de las nuestras. De hecho, este aviso es válido para cualquiera de las referencias utilizadas para este texto: en general, no hay un convenio mayoritario en la notación utilizada para las fases y las fases invariantes gauge, por ejemplo, en [12], θ denota la diferencia de fase entre los parámetros de orden, en [9], φ denota la diferencia de fase invariante gauge. A diferencia de los demás casos que hemos tratado en el trabajo, los superconductores no convencionales son materiales aún no completamente conocidos, y son sujeto de investigación aún a día de hoy. Es por ello que el caso que vamos a estudiar es relativamente novedoso, y puede abrir las puertas a realizar investigaciones más detalladas e interesantes en un futuro. Comenzamos el capítulo exponiendo aquello que sí que se conoce sobre los superconductores no convencionales y viendo la manera en que la teoría de Ginzburg-Landau se puede adaptar para trabajar con ellos.

3.1. Conceptos previos

Los *superconductores no convencionales* son aquellos materiales que presentan superconductividad, pero a los que no se les puede aplicar satisfactoriamente la teoría BCS. Entre ellos, destacan los superconductores con varios *gaps*. Aplicando las técnicas habituales de la física del estado sólido (ver, por ejemplo, [31]), se concluye que, cuando los electrones están sometidos a un potencial periódico (que es justamente lo que ocurre en un material sólido cristalino, como son los superconductores que manejamos), aparecen huecos (*gaps*) en su relación de dispersión en los bordes de su zona de Brillouin. Esto lleva a que el espectro electrónico, es decir, los posibles niveles de energía que pueden ser ocupados por los electrones, se divida en bandas, que contienen los estados que pueden estar ocupados, y que están separados por regiones prohibidas. Estas regiones prohibidas contienen niveles de energía que no pueden estar ocupados.

A grandes rasgos, en la teoría BCS se considera únicamente una banda, en el sentido de que solamente se consideran los electrones en esa banda, y se ignoran todas las demás. En ella, una interacción atractiva entre pares de electrones puede llevar a un estado fundamental que queda separado de los estados excitados mediante un *gap* [20, Cap. 10]. En los materiales en los que

debe considerarse más de una banda, y por ende, más de un *gap*, no se puede aplicar directamente la teoría BCS. Consideremos el caso más sencillo, constituido por un superconductor con dos *gaps*, el cual tiene dos bandas superconductoras. En ese caso, al igual que Ginzburg y Landau postulaban que la energía libre se podía expandir en potencias del parámetro de orden, ahora se postula que el sistema puede describirse mediante dos parámetros de orden $\psi_1(\mathbf{x})$ y $\psi_2(\mathbf{x})$ (de nuevo funciones complejas), y que, siempre que los parámetros de orden sean suficientemente pequeños, y la temperatura sea próxima a T_c , la densidad de energía de Ginzburg-Landau se puede expandir del siguiente modo (ver [27] y [3])

$$\begin{aligned} F[\psi_1, \psi_2, \mathbf{A}] &= \alpha_1(T)|\psi_1|^2 + \frac{\beta_1}{2}|\psi_1|^4 + \frac{1}{2m_1^*}|(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi_1|^2 + \alpha_2(T)|\psi_2|^2 + \frac{\beta_2}{2}|\psi_2|^4 \\ &\quad + \frac{1}{2m_2^*}|(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi_2|^2 + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} + \eta(\psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1) \\ &= F^{(1)}[\psi_1, \mathbf{A}] + F^{(2)}[\psi_2, \mathbf{A}] + \eta(\psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1) - \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde cada $F^{(j)}[\psi_j, \mathbf{A}]$ es el funcional de GL de un superconductor con una sola banda en un campo magnético. Restamos el factor $\frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0}$ en la última expresión porque en caso contrario lo estaríamos sumando dos veces. Fijémonos en que esta expresión es prácticamente idéntica a la suma de los funcionales de GL para dos parámetros de orden diferentes, al que se le ha añadido un término de interacción (el último sumando). En un material con n bandas, se considerarían n parámetros de orden ψ_i , $1 \leq i \leq n$. Cabe ahora preguntarse cuál es la interpretación física de estos parámetros. Aunque en los superconductores no convencionales la teoría BCS no se pueda aplicar, se siguen formando pares de Cooper. La diferencia con los convencionales, y la justificación de que la teoría BCS deje de ser aplicable, es que los mecanismos que llevan a la formación de estos pares son distintos a los que hay en los convencionales (interacción electrón-fonón) [33]. En cualquier caso, para la aplicación de la teoría de GL, nos es indiferente el mecanismo microscópico que haya producido los pares de Cooper, pues se trata de un modelo fenomenológico. De este modo, ahora se forman pares de Cooper en cada una de las bandas, y se tiene un parámetro de orden diferente en cada banda, cuya interpretación física vuelve a ser la misma; $|\psi_i(\mathbf{x})|^2$ proporciona la densidad de pares de Cooper en la banda i -ésima, y en la posición $\mathbf{x}$ del superconductor. Los parámetros m_i^* denotan la masa efectiva de los portadores de carga en la i -ésima banda [2].

Al igual que sucede en los superconductores con una sola banda, los valores de ψ_1 y ψ_2 en el equilibrio se pueden obtener minimizando el funcional de GL (3.1), pero esta vez con respecto a los dos parámetros de orden. Esto lleva, tal y como puede verse en [21], a dos ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} \alpha_1\psi_1 + \beta_1\psi_1|\psi_1| + \eta \cdot \psi_2 - \frac{1}{2m_1^*}(i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi_1 &= 0 \\ \alpha_2\psi_2 + \beta_2\psi_2|\psi_2| + \eta \cdot \psi_1 - \frac{1}{2m_2^*}(i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuaciones muy similares a las obtenidas en la proposición 2.1, salvo por el término $\eta \cdot \psi_j$ que aparece en la ecuación de ψ_i ($i \neq j$). De hecho, si no fuera por el término de interacción $\eta(\psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2)$, se tendría que las bandas se comportarían como las de dos superconductores convencionales independientes.

Es interesante también estudiar las simetrías del nuevo funcional de GL. A partir de lo visto en el capítulo anterior, es obvio que las transformaciones $\psi_j \mapsto e^{i\theta}\psi_j$ son simetrías de los sumandos $F^{(j)}$ por separado ($j = 1, 2$). Ahora bien, como en el término de interacción aparecen

siempre productos de un parámetro de orden y el conjugado del otro, el término de interacción también queda invariante bajo esta transformación. Si concluye así que F tiene simetría $U(1)$. Tiene entonces sentido aplicar el teorema de Noether para obtener la correspondiente corriente conservada asociada. Siguiendo entonces el procedimiento de la observación 2.2 obtenemos

$$\begin{aligned} J^\mu &= \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial F}{\partial(\partial_\mu \psi_j)} \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} e^{i\theta} \psi_j + \frac{\partial F}{\partial(\partial_\mu \psi_j^*)} \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} e^{-i\theta} \psi_j^* \right] \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[\frac{i\hbar^2}{2m_j^*} (\psi_j^* \partial_\mu \psi_j - \psi_j (\partial_\mu \psi_j^*)) \right] - e^* \hbar A_\mu \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2m_j^*} \psi_j \psi_j^*. \end{aligned}$$

O escrito en notación vectorial,

$$\mathbf{J} = \hbar^2 \left[\frac{i}{2m_1^*} (\psi_1^* \nabla \psi_1 - \psi_1 (\nabla \psi_1)^*) + \frac{i}{2m_2^*} (\psi_2^* \nabla \psi_2 - \psi_2 (\nabla \psi_2)^*) \right] - e^* \hbar \left[\frac{|\psi_1|^2}{2m_1^*} + \frac{|\psi_2|^2}{2m_2^*} \right] \mathbf{A}.$$

Por otro lado, cabe destacar que es muy común en la literatura encontrar una clasificación de los superconductores en tipos $s, s_\pm, s_{++}, p, d, f \dots$. Esta clasificación se fundamenta en las posibles simetrías que presente el cristal, pues estas están estrechamente relacionadas con las simetrías del *gap* en la teoría BCS. Para nuestros propósitos, no va a ser necesaria una descripción más detallada de este fenómeno, pero sí que utilizaremos el tipo de superconductor a la hora de determinar cuál es el salto de fase en diferentes puntos de la unión.

3.2. Descripción del problema a estudiar

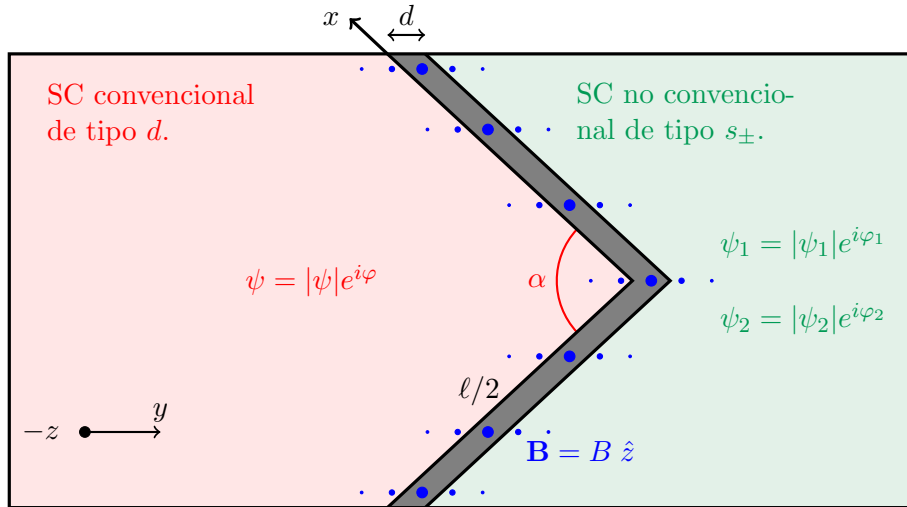


Figura 3.1: Esquema de la unión de Josephson para el problema a estudiar.

El estudio que vamos a hacer trata de aplicar el modelo teórico propuesto en [9] a una versión simplificada del problema geométrico enunciado en [12]. En el segundo de los artículos mencionados, se estudia una unión JJ en zigzag, con múltiples esquinas entre dos superconductores convencionales. Lo que vamos a hacer aquí es considerar el caso de una unión JJ en zigzag con una única esquina, pero utilizando un superconductor convencional y uno no convencional. La disposición geométrica se muestra en la figura 3.1. Se considera un superconductor convencional de tipo d en el lado izquierdo, separado por una fina capa de aislante de anchura d de otro superconductor, esta vez no convencional y de tipo $s_\pm$. En los artículos [9] y [12] no se menciona la capa de aislante, aunque se asume que está presente, y se asume también, tanto en dichos artículos como en el estudio que va a realizarse aquí, que $d \ll w, \xi_L, \xi_R^{(1)}, \xi_R^{(2)}, \lambda_L, \lambda_R$. Hemos

denotado w el espesor en la dirección z (la disposición de los ejes se detalla en la figura 3.1), ξ_L y λ_L la longitud de coherencia y la longitud de penetración de London en el lado izquierdo, y $\xi_R^{(i)}$ y λ_R los correspondientes en el lado derecho, pero teniendo en cuenta que debe considerarse una longitud de coherencia asociada a cada banda. El parámetro d no solamente afecta al parámetro J_c (ver ecuación (2.11)), sino que tiene implicaciones a nivel del modelo físico considerado que discutiremos más adelante, y que van a resultar relevantes. En lo que se refiere a los ejes, cabe destacar que se elige el eje x “doblado”, de manera que se encuentre a lo largo de la unión. Se toma como positivo el sentido del eje x que apunta hacia arriba y negativo hacia abajo. Se supone que la esquina se encuentra en el punto medio de la unión, y se denota $\ell/2$ la extensión de la unión hacia arriba y abajo, de modo que la longitud de la unión es ℓ . El ángulo que forma la esquina se toma como $\alpha = \pi/4$ (45°).

Aunque este trabajo es de tipo teórico, sí que merece la pena realizar un breve comentario sobre la manera en que se construiría una unión como esta a nivel práctico. Para la construcción del dispositivo mostrado en figura 3.1 no es necesario utilizar un SQUID como los presentados en la sección 2.7, sino que se construye la unión directamente. Estas uniones suelen ser bastante pequeñas, y se construyen como circuitos impresos de Al o Nb. La región aislante o no superconductora entre ellos se obtiene añadiendo impurezas; por ejemplo, oxidando parte del material. Esta oxidación hace que su temperatura de transición se reduzca drásticamente, de modo que a la temperatura de trabajo, solamente la parte del cristal sin impurezas es superconductora. Por último, para conseguir la esquina se aprovecha la estructura cristalina cúbica de los materiales utilizados, que ya tienden a formar esquinas.

Consideramos además un campo magnético $\mathbf{B} = B(x) \hat{z}$ dirigido a lo largo del eje z . En la figura 3.1 hemos representado el decrecimiento exponencial del campo a ambos lados de los superconductores. Respecto a los superconductores en sí mismos, el superconductor izquierdo es un superconductor convencional de tipo d , y por consiguiente, tiene un único parámetro de orden que denotamos $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$. Es en lo que se refiere a la fase donde entra en juego que se trate de un superconductor de tipo d . En efecto, en estos superconductores, cuando se produce un giro de $\pi/4$ en la estructura cristalina subyacente, que es precisamente lo que ocurre al construir la JJ con dicho ángulo en la esquina, se produce un cambio en la fase intrínseca de sus pares de Cooper, que a nivel del modelo de GL se traduce en que la fase presenta un salto de valor π en la esquina (ver [12]). En particular, podemos asumir que la fase no cambia en la dirección z , y que no depende de y tampoco, sino solamente de x . Supondremos además que el comportamiento de la fase es

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \pi H(x) - \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \varphi_0 + \pi/2 & \text{si } 0 < x < \ell/2 \\ \varphi_0 - \pi/2 & \text{si } -\ell/2 < x < 0, \end{cases}$$

donde $H(x)$ es la función de Heaviside, y φ_0 cierta constante. El valor de esta constante no es importante, pues podemos elegirla fijando el gauge adecuadamente, como detallaremos después.

Respecto al superconductor izquierdo, se trata de un superconductor no convencional de tipo $s_{\pm}$. Estos superconductores tienen dos parámetros de orden, que denotamos $\psi_1 = |\psi_1|e^{i\varphi_1}$ y $\psi_2 = |\psi_2|e^{i\varphi_2}$, donde ψ_2 es el parámetro de orden asociado a la banda de mayor energía. En estos materiales, existe además una relación entre las fases de las dos bandas, en todo punto debe cumplirse $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$. Esto ocurre cuando el parámetro η en la ecuación (3.1) es positivo, y es dominante con respecto a los demás términos del funcional de GL. En caso de no ser así, el salto en la fase podría tomar otro valor (ver por ejemplo, [27]). Volveremos sobre ello después, pero existe otro tipo de superconductor no convencional, llamado s_{++} , para el que se tiene $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. El hecho de tener ahora *dos* parámetros de orden en uno de los lados de la JJ implica que hemos de definir *dos* diferencias de fase invariantes gauge en lugar de solamente una. Siguiendo la definición 2.8, y suponiendo que solamente dependen de la coordenada x , las

diferencias de fase invariantes gauge son

$$\theta_j(x) := \varphi_j(x) - \varphi(x) - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathcal{C}(x)} A_y dy \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

vamos a denotar $\Delta\varphi_j(x) := \varphi_j(x) - \varphi(x)$, y $\mu(x) := -\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{\mathcal{C}(x)} A_y dy$. $\mathcal{C}(x)$ es el segmento de línea recta que une los puntos respecto de los cuales se calcula la diferencia de fase invariante gauge. Como se trata de un segmento recto en la dirección y , la integral a lo largo de la curva es solamente una integral en la dirección y . Estos sumandos se denominan *diferencia de fase geométrica* y *diferencia de fase magnética* respectivamente.

En lo que respecta al efecto Josephson, si bien es cierto que en el capítulo anterior no se estudió exactamente la configuración de la JJ cuyo estudio se plantea aquí, sigue habiendo un efecto Josephson, con una corriente que vuelve a ser proporcional al seno de la diferencia de fase invariante gauge (ver [12]). Cuando, en lugar de superconductores convencionales se tiene uno no convencional, se puede realizar un estudio considerando separadamente cada banda del no convencional, obteniéndose para cada una una corriente de Josephson (ver [9]). De este modo, para la disposición geométrica de la figura 3.1, aparecerá una corriente de Josephson $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{c1} \sin \theta_1 + \mathbf{J}_{c2} \sin \theta_2$. Es razonable, vista la simetría de la distribución y tras el estudio realizado en la sección 2.6, suponer que dicha corriente llevará dirección $\hat{y}$, de modo que escribiremos simplemente $J(x) = J_{c1} \sin \theta_1(x) + J_{c2} \sin \theta_2(x)$.

3.3. Formulación matemática

Una vez explicada la disposición geométrica del problema a estudiar, queremos seguir ideas similares a las presentadas en [12] para calcular la forma funcional de $\mu(x)$ a lo largo de la unión. Vamos a dedicar esta sección a la formulación matemática del problema, comentando algunas de las aproximaciones que será necesario hacer, y dedicaremos la sección siguiente a plantear una primera tentativa de resolución del problema. En principio, vamos a estudiar el caso de un superconductor de tipo $s_{\pm}$, aunque presentaremos llegado el momento los cambios que habría que hacer si quisiéramos estudiar uno de tipo s_{++} .

En primer lugar, teniendo en cuenta que $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, y la discontinuidad que se produce en φ , vamos a escribir las diferencias de fase geométricas como

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \mathcal{H}(x) - \varphi_0 \quad \Delta\varphi_2 = \pi + \varphi_1 - \mathcal{H}(x) - \varphi_0 \quad (3.3)$$

donde hemos definido $\mathcal{H}(x) := \pi H(x) - \pi/2$ por conveniencia.

Vamos a considerar una configuración simplificada del sistema, que es lo habitual, tanto en la literatura como en los experimentos. Vamos a suponer que el campo magnético aplicado en la unión, entre las piezas superconductoras es uniforme. Tal y como se muestra en [8], en el caso de una unión entre superconductores convencionales, el flujo magnético se expulsa de los superconductores, y queda confinado en la unión, lo cual lleva a la anulación del término de la derivada covariante del parámetro de orden, $D_j\psi$ a lo largo de la unión. En nuestro caso de estudio, en que uno de los superconductores es no convencional y de tipo $s_{\pm}$, las ecuaciones de GL llevan a que se anule una suma ponderada de las derivadas covariantes de los parámetros de orden. Cuando se considera la aproximación de London, esto conduce a la ecuación siguiente.

$$\nu_1 \frac{d\theta_1}{dx} + \nu_2 \frac{d\theta_2}{dx} = \frac{2\pi}{\ell} \cdot \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \nu_i = \frac{m_i^* |\psi_i|^2}{m_1^* |\psi_1|^2 + m_2^* |\psi_2|^2}, \quad (3.4)$$

Aquí, Φ denota el flujo magnético total a través de la unión. Esta ecuación es estrictamente cierta para el caso de una unión corta y describe una configuración metaestable. Esto se asume

implícitamente en las referencias [28] y [12]. Nuestro caso de estudio *no* se corresponde exactamente con esta situación, pues vamos a estudiar el *caso de una unión larga*. Ahora bien, gracias a las condiciones asintóticas que vamos a imponer, y a la discontinuidad de la fase geométrica en la esquina, sí que habrá una corriente de Josephson a través de la unión aunque esta sea larga.

Aunque esa ecuación no sea estrictamente válida para nuestro caso, vamos a obtener otra ecuación similar, utilizando para ello el modelo fenomenológico que se presenta en [12]. Con esto, vamos a tratar de obtener una ecuación para la diferencia de fase magnética, μ . Para ello, vamos a pasar por una ecuación de tipo Sine-Gordon, pero generalizada para nuestra situación particular. Siguiendo el modelo físico que se plantea en [12], podemos plantear un circuito equivalente a la unión, tal y como se muestra en la figura 3.2.

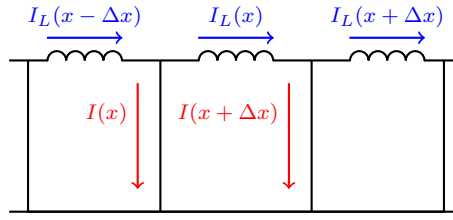


Figura 3.2: Circuito equivalente para la JJ con un vértice.

En nuestro modelo, hay una autoinducción L asociada a la unión, que vamos a suponer constante. Incluir un coeficiente de autoinducción supone una diferencia fundamental con el estudio planteado en [9] donde *no* se tiene en cuenta. Nosotros vamos a seguir el estudio planteado en [12] donde *sí* que se tiene en cuenta. El considerar o no L está muy relacionado con considerar que la anchura de la región no superconductora entre los superconductores sea despreciable o no (la región coloreada de negro en la figura 3.1). Cuando se supone que $d \approx 0$, es decir, que los superconductores están *muy próximos*, pueden despreciarse los efectos de los electrones normales que hay en la región no superconductora. Cuando se supone que d no es despreciable, hay que tener en cuenta estos efectos. Esto es lo que se tiene en cuenta al añadir el parámetro L . Llamamos $I_L(x)$ a la corriente que hay *a lo largo de la unión*, en la dirección x . Estas son las *corrientes apantalladoras* que mencionábamos en el capítulo anterior, y que circularán en una región de espesor igual a la longitud de penetración de London, tal y como se muestra en la figura 2.6a. Denotamos $I(x)$ la corriente de Josephson *que atraviesa la unión*. En cada uno de los nodos del circuito equivalente se puede aplicar la ley de los nudos de Kirchoff, que proporciona la relación siguiente

$$I_L(x) + I(x) = I_L(x - \Delta x) \Rightarrow I_L(x) - I_L(x - \Delta x) = -I(x), \quad (3.5)$$

donde hemos supuesto que dos nodos consecutivos están *muy próximos*, es decir, separados por una distancia Δx muy pequeña, de ahí que evaluemos en $x - \Delta x$. Además, al haber supuesto un coeficiente de autoinducción, tendremos $L = \Phi_c / I_L$ por definición de autoinducción [14, Cap. 7], donde Φ_c denota el flujo asociado al campo magnético que produce I_L . Dicho esto, podremos relacionar la densidad de corriente de Josephson en cierto punto de la unión x con la corriente correspondiente vía $I(x) = J(x) \cdot w\Delta x$, donde $w\Delta x$ es un elemento de superficie. Esto permite sustituir en (3.5), y tomando límites cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos una relación entre la densidad de corriente de Josephson y la corriente I_L

$$I_L(x) - I_L(x - \Delta x) = -J(x) \cdot w\Delta x \Rightarrow -wJ(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I_L(x) - I_L(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{dI_L(x)}{dx}. \quad (3.6)$$

Dicho esto, volvamos a la búsqueda de una ecuación con la que sustituir la ecuación (3.4). En [12], se estudia una unión con un superconductor convencional, y tienen en cuenta la autoinducción

mediante una ecuación fenomenológica que proporciona la variación de la diferencia de fase invariante gauge a lo largo de la unión: $\theta(x + \Delta x) - \theta(x) = \frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_e - I_L L)$, válida cuando la esquina no se encuentre entre x y $x + \Delta x$. En esta ecuación, Φ_e es el flujo magnético externo aplicado. Por analogía con esta, en el caso de una unión con un superconductor no convencional, se obtiene una ecuación similar a esta, pero con una suma ponderada de las diferencias de fase en el miembro derecho. Es decir, $\nu_1(\theta_1(x + \Delta x) - \theta_1(x)) + \nu_2(\theta_2(x + \Delta x) - \theta_2(x)) = \frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_e - I_L L)$. Podemos calcular Φ_e de manera aproximada como $\Phi_e \approx B \cdot (\lambda_L + \lambda_R + d) \cdot \Delta x$. Por otro lado, podemos aproximar $L = \mu_0 \cdot (\lambda_L + \lambda_R)/w \cdot \Delta x$, donde $\mu_0 \cdot (\lambda_L + \lambda_R)$ es la autoinducción de un cuadrado de electrodos superconductores (ver [12]). Podemos entonces dividir por Δx en la ecuación anterior, y tomar límites cuando $\Delta x \rightarrow 0$ para obtener una ecuación en términos de las derivadas de las fases.

$$\nu_1 \frac{d\theta_1}{dx} + \nu_2 \frac{d\theta_2}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \cdot \left(B \cdot (\lambda_L + \lambda_R + d) - \frac{\mu_0 \cdot (\lambda_L + \lambda_R)}{w} \cdot I_L(x) \right) \quad (3.7)$$

Observemos que, por su propia definición, $\nu_1 + \nu_2 = 1$. Por otro lado, si buscamos soluciones de la forma (3.2), pero con un factor $\mathcal{H}(x)$ en la parte geométrica, solamente podremos discutir las soluciones para $x > 0$ y $x < 0$, pues estamos buscando soluciones no continuas, y por ello no derivables. Una manera de remediar esto, es modificar ligeramente la ecuación (3.4), añadiendo un factor $\pi \cdot (\nu_1 + \nu_2) \cdot \delta(x)$, donde $\delta(x)$ es la función δ -de Dirac, que tenga en cuenta las aportaciones de las funciones de Heaviside de las diferencias de fase geométricas (recordemos que la derivada de la función de Heaviside es la δ de Dirac en el sentido de las distribuciones). Esto da lugar a una ecuación ligeramente modificada (hemos denotado $\bar{L} := \mu_0 \cdot (\lambda_L + \lambda_R)/w$)

$$\nu_1 \frac{d\theta_1}{dx} + \nu_2 \frac{d\theta_2}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \cdot (B \cdot (\lambda_L + \lambda_R + d) - \bar{L} \cdot I_L(x)) + \pi \delta(x). \quad (3.8)$$

Podemos derivar en esta expresión y aplicar la relación (3.6), obteniendo

$$\begin{aligned} \nu_1 \frac{d^2\theta_1}{dx^2} + \nu_2 \frac{d^2\theta_2}{dx^2} &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \left[\frac{dB}{dx} \cdot (\lambda_L + \lambda_R + d) + \bar{L}w \cdot J(x) \right] + \pi \cdot \frac{d\delta(x)}{dx} \\ &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \left[\frac{dB}{dx} \cdot (\lambda_L + \lambda_R + d) + \tilde{J}_{c_1} \sin \theta_1 + \tilde{J}_{c_2} \sin \theta_2 \right] + \pi \cdot \frac{d\delta(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde hemos desarrollado en la última igualdad $J(x) = J_{c_1} \sin \theta_1 + J_{c_2} \sin \theta_2$, y definiendo $\tilde{J}_{c_i} := \bar{L}w J_{c_i}$. La ecuación (3.9) es una ecuación de tipo Sine-Gordon, aunque algo modificada. Vamos a suponer en un primer momento que dB/dx se puede despreciar, o más bien, que se puede considerar como un término perturbativo. La validez de esta aproximación podría ser discutida, y no será siempre cierta, pero a nivel de cálculo, resulta muy conveniente. Esto se debe a que muchas de las técnicas que se conocen para resolver esta ecuación se basan en considerar dB/dx como un término perturbativo, resolver la ecuación sin él, y después tratar de perturbar dicha solución para obtener una del problema inicial. Esta técnica se desarrolla por ejemplo en [15].

Además, esta ecuación plantea, a priori, dos problemas. El primero es que es una sola ecuación, pero contiene dos variables: θ_1 y θ_2 , y el segundo es que aparece un factor $d\delta(x)/dx$, que complica su resolución. El primero de los problemas tiene fácil solución si escribimos $\theta_i = \Delta\varphi_i + \mu$, y notamos que $\Delta\varphi_1$ y $\Delta\varphi_2$ difieren en un factor constante e igual a π . Además, el término de diferencia de fase magnética es el mismo para ambas bandas, pues depende solamente del campo magnético. Escribiendo el miembro izquierdo de (3.9) en términos de μ obtenemos una ecuación con una sola incógnita, y además solucionamos el problema de la derivada de la δ de Dirac. En efecto, definiendo $K_i := \frac{2\pi}{\Phi_0 \ell} \tilde{J}_{c_i}$, $i = 1, 2$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \nu_1 \frac{d^2\theta_1}{dx^2} + \nu_2 \frac{d^2\theta_2}{dx^2} &\stackrel{(1)}{=} (\nu_1 + \nu_2) \cdot \left(\frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{d^2\Delta\varphi_1}{dx^2} \right) = \frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \pi \frac{d\delta(x)}{dx} = \\ &= K_1 \sin(\Delta\varphi_1 + \mu) + K_2 \sin(\Delta\varphi_2 + \mu) + \pi \frac{d\delta(x)}{dx} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde (1) se sigue de que $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 + \pi$. Aquí podría considerarse un estudio más general que englobase también el caso de un superconductor de tipo s_{++} . Para ello, bastaría con escribir $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 + q \cdot \pi$, donde q sería un factor que tomaríamos como igual a 1 para estudiar un superconductor $s_{\pm}$, e igual a 0 para estudiar uno de tipo s_{++} .

3.4. Primera tentativa de una solución para μ

Dedicamos esta última sección a buscar una primera solución para μ en la ecuación (3.10). Comenzamos haciendo algunos comentarios.

3.1 Observación.

1. En la ecuación (3.10) hay algunos comentarios que hacer, pues hemos suprimido el término $\varphi_1 - \varphi_0$ (y en particular, $\varphi_1''(x)$). Esto puede hacerse porque podemos fijar el gauge mediante una transformación de la fase como la dada en la ecuación (2.3), tomando $\alpha = -(\varphi_1 - \varphi_0)$. Esto, por supuesto, modificará μ , pero habiendo hecho es ta elección, buscamos μ para este gauge. En particular, de la relación (3.3), se sigue que nuestra elección implica $\Delta\varphi_1 = -\mathcal{H}(x)$.
2. Si suponemos $\nu_2 = 0$ en la ecuación (3.10), es decir, que $|\psi_2| = 0$, o lo que es equivalente, que solo hay una banda, obtenemos $\mu''(x) + \pi\delta'(x) = K_1 \sin(\Delta\varphi_1 + \mu)$ (notemos que en ese caso la corriente de Josephson solamente tiene un término, esto es $J_{c_2} = 0$). Esta ecuación es la ecuación (14) de [12] (salvo por lo que en artículo llaman *términos perturbativos*, que además luego desprecian). Esto aporta consistencia a nuestros argumentos, pues al considerar un superconductor con una sola banda, recuperamos la situación física ya conocida de un superconductor convencional.

Además, $\sin(\Delta\varphi_2 + \mu) = \sin(\Delta\varphi_1 + \mu + \pi) = -\sin(\Delta\varphi_1 + \mu)$. Con esto, el miembro derecho puede escribirse como $(K_1 - K_2) \cdot (\sin \Delta\varphi_1 \cdot \cos \mu + \cos \Delta\varphi_1 \cdot \sin \mu)$. Por otro lado, puesto que $\Delta\varphi_1(x) = -\mathcal{H}(x)$, toma valores $\pm\pi/2$, se sigue que $\cos(\Delta\varphi_1) = 0$, y $\sin(\Delta\varphi_1) = \pm 1$ según si $x < 0$ o $x > 0$. Definiendo $K = -(K_1 - K_2)$, obtenemos la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(x) = \begin{cases} -K \cdot \cos \mu(x) & \text{si } x < 0 \\ K \cdot \cos \mu(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Denotamos $\mu^\pm$ las soluciones para $x > 0$ y $x < 0$, y denotamos las derivadas con subíndices para aligerar la notación, esto es $\mu_{xx}^\pm = \pm K \cos \mu^\pm$. Podemos resolver cada una de las dos separadamente. Para ello, multiplicamos por $2\mu_x^\pm$ a ambos lados de la igualdad, obteniendo $2\mu_x^\pm \mu_{xx}^\pm = ((\mu_x^\pm)^2)_x = \pm 2K \mu_x^\pm \cos \mu^\pm = \pm 2K (\sin \mu^\pm)_x$. Por consiguiente, $((\mu_x^\pm)^2 \mp 2K \sin \mu^\pm)_x = 0$, de modo que existen constantes $C_\pm$ tales que $(\mu_x^\pm)^2 = \pm 2K \sin \mu^\pm + C_\pm$. Los valores de estas constantes se siguen de las condiciones de contorno a imponer para μ , concretamente $\mu^\pm(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\pi/2$, y $\mu_x(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. Estas condiciones se siguen de las condiciones que deben cumplir θ_1 y θ_2 cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Dichas condiciones de contorno son análogas a las impuestas en [12], y son:

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 & \theta_1'(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \\ \theta_2(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pi & \theta_2'(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

En primer lugar, como $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, las condiciones sobre θ_1 determinan unívocamente las condiciones sobre θ_2 . En un primer análisis, podría parecer que estas condiciones son contradictorias con lo estudiado en el capítulo anterior. El $\pm\infty$ debe entenderse como que estudiamos el comportamiento lejos de la esquina, donde esperaríamos que la situación fuese análoga a la de una JJ

plana. Ahora bien, si en esos límites $\theta_1 \rightarrow 0$ y $\theta_2 \rightarrow \pi$, se tendría $\mathbf{J} \rightarrow J_{c1} \sin 0 + J_{c2} \sin \pi = 0$. Sin embargo, en una unión de Josephson plana *hay* corriente, en contra de lo que muestra nuestra descripción, pues estamos tomando condiciones de contorno que conducen a campos y corrientes asintóticamente nulos. Lo que ocurre es que tanto en nuestro estudio como en [12], se estudia un estado *metaestable*, que *no es un mínimo global* del funcional de Ginzburg-Landau, sino local. Destacamos que el hecho de buscar una solución metaestable *es algo que estamos imponiendo* al fijar estas condiciones de contorno. De hecho, al imponer estas condiciones de contorno también estamos imponiendo el flujo magnético neto a través del vórtice que se forma en la esquina. Además, estas condiciones de contorno se utilizan para garantizar el confinamiento del flujo magnético. En cualquier caso, el hecho de utilizar estas condiciones de contorno y no otras es una elección que se hace *ad hoc* para imponer el flujo magnético externo. Podrían imponerse otras condiciones diferentes, y en principio conducirían a otras soluciones.

Con estas condiciones, si $\Delta\varphi_1 = -\mathcal{H}(x)$, su derivada en $x \rightarrow \pm\infty$ es nula (de hecho en cualquier punto distinto de la esquina) y por ello, $\mu_x(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. De un modo similar, si $\theta_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, entonces $\mu \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\Delta\varphi_1 = \mathcal{H}(x)$. Teniendo estas condiciones en cuenta

$$\begin{aligned} (\mu_x^+)^2 &= 2K \sin \mu^+ + C_+ \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = 2K \sin(\pi/2) + C_+ \Rightarrow C_+ = -2K \\ (\mu_x^-)^2 &= -2K \sin \mu^- + C_- \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 = -2K \sin(-\pi/2) + C_- \Rightarrow C_- = -2K. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De este modo, las ecuaciones obtenidas son

$$(\mu_x^+)^2 = -2K(1 - \sin \mu^+) \quad (\mu_x^-)^2 = -2K(1 + \sin \mu^-). \quad (3.13)$$

Podemos transformar los senos en cosenos sumando $\pi/2$ al argumento, y utilizar que $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$. De este modo, $(\mu_x^+)^2 = -2K(1 - \cos(\pi/2 - \mu^+)) = -4K \sin^2(\pi/4 - \mu^+/2)$, y análogamente obtenemos $(\mu_x^-)^2 = -2K \cos^2(\pi/4 - \mu^-/2)$. Nótese que $K = K_2 - K_1 < 0$, pues de acuerdo con [9], $|\psi_{2,\infty}| < |\psi_{1,\infty}|$, y K_i es proporcional a J_{ci} , que es a su vez proporcional a $|\psi_{i,\infty}|$ (ver definición de K_i y ecuación (2.11)). Para resolver esta ecuación, definimos las variables $\beta^\pm := \mu^\pm/2$, de modo que las ecuaciones se transforman simplemente en $(\beta_x^+)^2 = -4K \sin^2(\pi/4 - \beta^+)$ y $(\beta_x^-)^2 = -4K \cos^2(\pi/4 - \beta^-)$. Definimos $\tilde{K} := \sqrt{-K}$, y tomamos la raíz cuadrada en las ecuaciones anteriores. Se obtiene así $\beta_x^+ = \tilde{K} \sin(\pi/4 - \beta^+)$ y $\beta_x^- = \tilde{K} \cos(\pi/4 - \beta^-)$. El hecho de tomar la raíz cuadrada positiva en ambos casos no es trivial, pues a priori podríamos haber tomado la raíz negativa en algún lado de la igualdad. El hecho de tomar un signo u otro en el la unión con un superconductor convencional determina el sentido del campo magnético en el vórtice que se forma en la esquina (ver [12]). Es razonable suponer que este comportamiento se va a mantener en el caso del superconductor no convencional. Por otro lado, una vez obtenida la solución hemos de asegurarnos de que sea consistente con haber elegido la raíz positiva. Las ecuaciones anteriores ya pueden resolverse por integración directa

$$\frac{d\beta^+}{dx} = \tilde{K} \sin(\pi/4 - \beta^+) \Rightarrow x + x_+^* = \int \frac{d\beta^+}{\tilde{K} \sin(\pi/4 - \beta^+)} = -\frac{1}{\tilde{K}} \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\beta^+}{2} \right) \right)$$

y

$$\frac{d\beta^-}{dx} = \tilde{K} \cos(\pi/4 - \beta^-) \Rightarrow x + x_-^* = \int \frac{d\beta^-}{\tilde{K} \cos(\pi/4 - \beta^-)} = -\frac{1}{\tilde{K}} \ln \left(\frac{1 + \sin(\pi/4 - \beta^-)}{\cos(\pi/4 - \beta^-)} \right)$$

donde x_-^* y x_+^* son constantes de integración. Para evaluarlas, hemos de imponer alguna condición adicional. Imponiendo que μ sea continua en la esquina, deducimos que $\mu^+(0) = \mu^-(0)$, pero esto no permite obtener ambas constantes. Una forma de obtener ambas, es imponer que μ tome en $x = 0$ el valor promedio entre sus valores límite, que son $\pm\pi/2$. Esto es razonable por la simetría del dispositivo. Se sigue de aquí que $\beta^\pm(0) = 0$, de donde, despejando

$x_-^* = -1/\tilde{K} \cdot \ln(\tan(\pi/8)) = -1/\tilde{K} \cdot \ln(\sqrt{2}-1)$ y $x_+^* = -1/\tilde{K} \cdot \ln\left(\frac{1+\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)}\right) = -1/\tilde{K} \cdot \ln(\sqrt{2}+1)$. Definamos $\mathcal{G} := \sqrt{2} - 1$. Con esto, la expresión para μ (ver figura 3.3) se obtiene sin más que despejar en cada ecuación

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 4 \arctan\left(\mathcal{G}e^{-\tilde{K}x}\right) & \text{si } x < 0 \\ 4 \arctan\left(\mathcal{G}e^{\tilde{K}x}\right) - \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

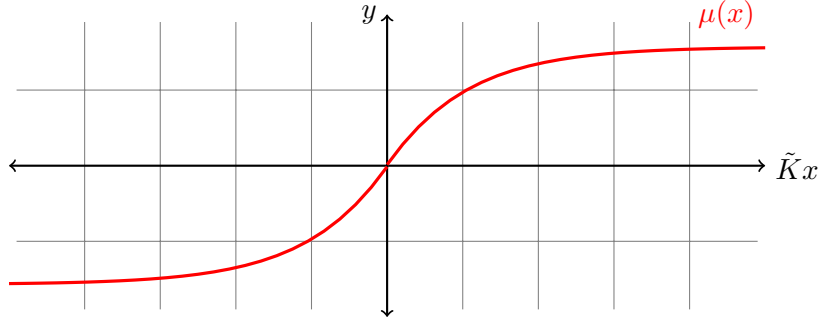


Figura 3.3: Representación de $\mu(x)$.

Finalmente, notemos que esta solución es consistente con haber elegido la raíz positiva. En efecto, $\mu_x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (en la figura 3.3) se ve que μ es creciente. Además, si $x > 0$, entonces $\mu \in (0, \pi/2)$. Por consiguiente, $\beta_+ \in (0, \pi/4)$, y $\sin(\pi/4 - \beta_+) \in (0, 1/\sqrt{2})$, que en cualquier caso es positivo. Para β_- se razona análogamente.

Por último, notemos que $\mu_x = \int_{\mathcal{C}(x)} \partial_x A_y dy$ es proporcional al campo magnético, $\mathbf{B}$, de modo que, derivando la ecuación anterior, podemos obtener el perfil de variación del campo, $\mu_x(x) = \frac{4\mathcal{G} \cdot e^{-\tilde{K}|x|}}{1 + \mathcal{G}^2 \cdot e^{-2\tilde{K}|x|}}$. Vemos en la curva roja de la figura 3.3 que el campo magnético a lo largo de la unión para el problema estudiado alcanza un máximo justamente en la esquina, y tiende a cero según nos alejamos de ella. En la figura 3.4, representamos en verde el perfil del campo magnético para una unión sin esquina entre superconductores convencionales, obtenida a partir de la expresión de la fase dada en (2.17). Observamos que en el caso de la unión con un vértice, el campo magnético no es derivable en el $x = 0$. Esto ocurre también para superconductores convencionales, y es consecuencia de la geometría, como se muestra en [12]. Además, el flujo magnético total en el caso de la unión sine squina corresponde a un fluxón, mientras que cuando aparece la esquina, corresponde con medio fluxón (es común llamar a esta configuración un *semifluxón*).

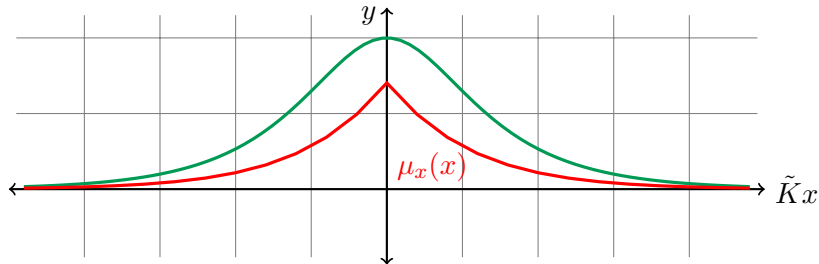


Figura 3.4: Representación de $\mu_x(x)$ y del campo magnético en una unión sin esquina entre superconductores convencionales.

Conclusiones

Tras presentar una breve introducción relativa a la estructura matemática de los vórtices, se ha dedicado un capítulo a introducir la teoría de Ginzburg-Landau de la superconductividad. Se ha comenzado presentando la teoría de los superconductores convencionales, que se conoce desde aproximadamente la mitad del siglo pasado, y está ya muy asentada. Se han derivado las ecuaciones de Ginzburg-Landau para el parámetro de orden, y se ha estudiado la clasificación de los superconductores en tipo I y tipo II. Además, partiendo de esta teoría se ha mostrado cómo los vórtices surgen de manera natural en los superconductores de tipo II, y se ha explicado, dentro de nuestro modelo, la cuantización del flujo magnético a través de los vórtices. Una vez expuesta la teoría general de la superconductividad, se han estudiado las uniones de Josephson, y el efecto Josephson DC. En particular, se ha presentado un cálculo teórico detallado de la corriente de Josephson en el caso más sencillo: una unión plana entre dos superconductores convencionales.

Tras esto, se ha pasado al tema que verdaderamente es objeto de investigación en la actualidad: los superconductores no convencionales. Pese a que la teoría BCS no se aplica a este tipo de materiales, la teoría de Ginzburg-Landau sí que se puede aplicar, siempre que se consideren tantos parámetros de orden como bandas de energía. En esta situación, se ha estudiado el caso de una unión de Josephson con una esquina de 45° , entre un superconductor convencional, y uno no convencional. Partiendo de algunos resultados de la teoría microscópica, como el cambio de fase en la esquina, se ha presentado una primera tentativa de un cálculo aproximado del término magnético de la diferencia de fase invariante gauge siguiendo los modelos presentados en [9] y [12]. Este primer cálculo es relativamente básico, pero abre las puertas a realizar un estudio más detallado y extenso. Este estudio puede pasar por analizar mejor las aproximaciones que se han tenido que realizar, o estudiar el caso en que no pueda suponerse que el campo es uniforme en la región ocupada por el aislante. Además, como conocido el término magnético μ se conocen las fases invariantes gauge, θ_1 y θ_2 , se podrían incluso plantear experimentos que trataran de medir las corrientes mediante una construcción como la estudiada.

Índice de figuras

1.1. Dos aplicaciones f y g homótopas.	9
2.1. Potencial sombrero mexicano	17
2.2. Variación del campo magnético y el módulo del parámetro de orden en un vórtice.	25
2.3. Interacción de vórtices en un superconductor de tipo II.	26
2.4. Esquema de la unión de Josephson.	28
2.5. Diagramas de los diferentes tipos de SQUIDS.	31
2.6. Esquemas de los dos tipos de uniones de Josephson.	32
3.1. Esquema de la unión de Josephson para el problema a estudiar.	36
3.2. Circuito equivalente para la JJ con un vértice.	39
3.3. Representación de $\mu(x)$	43
3.4. Representación de $\mu_x(x)$ y del campo magnético en una unión sin esquina entre superconductores convencionales.	43

Bibliografía

- [1] P. W. Anderson y J. M. Rowell. “Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect”. En: *Phys. Rev. Lett.* 10 (6 mar. de 1963), págs. 230-232. DOI: [10.1103/PhysRevLett.10.230](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.230). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.230>.
- [2] I. N. Askerzade. “Ginzburg–Landau theory: the case of two-band superconductors”. En: *Physics-Uspekhi* 49.10 (oct. de 2006), pág. 1003. DOI: [10.1070/PU2006v049n10ABEH006055](https://doi.org/10.1070/PU2006v049n10ABEH006055). URL: <https://dx.doi.org/10.1070/PU2006v049n10ABEH006055>.
- [3] Egor Babaev. “Vortices with Fractional Flux in Two-Gap Superconductors and in Extended Faddeev Model”. En: *Physical Review Letters* 89.6 (jul. de 2002). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.89.067001](https://doi.org/10.1103/physrevlett.89.067001). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.067001>.
- [4] J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer. “Theory of Superconductivity”. En: *Phys. Rev.* 108 (5 dic. de 1957), págs. 1175-1204. DOI: [10.1103/PhysRev.108.1175](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>.
- [5] A. Barone y G. Paterno. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. A Wiley-interscience publication. Wiley, 1982. ISBN: 9780471014690.
- [6] R. Combescot. “Ginzburg–Landau Theory”. En: *Superconductivity: An Introduction*. Cambridge University Press, 2022, págs. 184-213.
- [7] A. V. Dmitriev y W. Nolting. “Details of the thermodynamical derivation of the Ginzburg–Landau equations”. En: *Superconductor Science and Technology* 17.3 (ene. de 2004), págs. 443-447. ISSN: 1361-6668. DOI: [10.1088/0953-2048/17/3/024](https://doi.org/10.1088/0953-2048/17/3/024). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0953-2048/17/3/024>.
- [8] M Donaire. “Topological defects from first-order gauge theory phase transitions”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39.48 (nov. de 2006), págs. 15013-15056. ISSN: 1361-6447. DOI: [10.1088/0305-4470/39/48/012](https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/48/012). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/39/48/012>.
- [9] M. Donaire y A. Cano. *Fractional-flux oscillations of Josephson critical currents in multi-gap superconductors: a test for unconventional superconductivity*. 2025. arXiv: [2502.09964](https://arxiv.org/abs/2502.09964) [[cond-mat.supr-con](https://arxiv.org/abs/2502.09964)]. URL: <https://arxiv.org/abs/2502.09964>.
- [10] R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands. *The Feynman lectures on physics: The Definitive Edition (Vol. 3)*. Pearson, 2009. ISBN: 9788131721698.
- [11] V. L. Ginzburg y L. D. Landau. “On the Theory of superconductivity”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20 (1950). Ed. por D. ter Haar, págs. 1064-1082. DOI: [10.1016/b978-0-08-010586-4.50078-x](https://doi.org/10.1016/b978-0-08-010586-4.50078-x).
- [12] E. Goldobin, D. Koelle y R. Kleiner. “Semifluxons in long Josephson $0 - \pi$ junctions”. En: *Physical Review B* 66 (2002), pág. 100508. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118997443>.

- [13] L. P. Gor'kov. "Microscopic derivation of the Ginzburg–Landau equations in the theory of superconductivity". En: *Sov. Phys. - JETP (Engl. Transl.); (United States)* 9:6 (ene. de 1959). URL: <https://www.osti.gov/biblio/7264935>.
- [14] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Re-published by Cambridge University Press in 2017. Boston, MA: Pearson, 2013. DOI: [1108420419](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2015.01.001).
- [15] J. Ha y S. Shon. *Perturbation Analysis and Neural Network-Based Initial Condition Estimation for the Sine-Gordon Equation*. 2025. arXiv: [2504.00386 \[math.AP\]](https://arxiv.org/abs/2504.00386). URL: <https://arxiv.org/abs/2504.00386>.
- [16] H. F. Hess et al. "Scanning-Tunneling-Microscope Observation of the Abrikosov Flux Lattice and the Density of States near and inside a Fluxoid". En: *Phys. Rev. Lett.* 62 (2 ene. de 1989), págs. 214-216. DOI: [10.1103/PhysRevLett.62.214](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.214). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.214>.
- [17] P.C. Hohenberg y A.P. Krekhov. "An introduction to the Ginzburg–Landau theory of phase transitions and nonequilibrium patterns". En: *Physics Reports* 572 (abr. de 2015), págs. 1-42. ISSN: 0370-1573. DOI: [10.1016/j.physrep.2015.01.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2015.01.001). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2015.01.001>.
- [18] B.D. Josephson. "Possible new effects in superconductive tunnelling". En: *Physics Letters* 1.7 (1962), págs. 251-253. ISSN: 0031-9163. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](https://doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916362913690>.
- [19] J.B. Ketterson y S.N. Song. *Superconductivity*. Cambridge University Press, 1999. ISBN: 9780521562959.
- [20] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. 8.^a ed. Wiley, 2004. ISBN: 9780471415268.
- [21] V. G. Kogan y J. Schmalian. "Ginzburg-Landau theory of two-band superconductors: Absence of type-1.5 superconductivity". En: *Physical Review B* 83.5 (feb. de 2011). ISSN: 1550-235X. DOI: [10.1103/physrevb.83.054515](https://doi.org/10.1103/physrevb.83.054515). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.83.054515>.
- [22] L. D. Landau. "On the theory of phase transitions. I." En: *Phys. Z. Sowjet.* 11 (1937), pág. 26.
- [23] P. Mangin y R. Kahn. *Superconductivity: An introduction*. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 9783319505275.
- [24] N. Manton y P. Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [25] Y. Mawatari. "Anomalous magnetic interference of cross-type Josephson junctions exposed to oblique magnetic fields". En: *Journal of Physics D: Applied Physics* 55.20 (feb. de 2022), pág. 200002. ISSN: 1361-6463. DOI: [10.1088/1361-6463/ac52ce](https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac52ce). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6463/ac52ce>.
- [26] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000. ISBN: 9780131816299.
- [27] T. K. Ng y N. Nagaosa. "Broken time-reversal symmetry in Josephson junction involving two-band superconductors". En: *EPL (Europhysics Letters)* 87.1 (jul. de 2009), pág. 17003. ISSN: 1286-4854. DOI: [10.1209/0295-5075/87/17003](https://doi.org/10.1209/0295-5075/87/17003). URL: <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/87/17003>.
- [28] Y. Ota et al. "Theory of Heterotic Superconductor-Insulator-Superconductor Josephson Junctions between Single- and Multiple-Gap Superconductors". En: *Phys. Rev. Lett.* 102 (23 jun. de 2009), pág. 237003. DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.237003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.237003). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.237003>.

- [29] C.F. Pineda y S.V. Maíllo. *Termodinámica*. INGENIERÍA Y CIENCIAS. Editorial Universitaria Ramón Areces, 2009. ISBN: 9788480049498.
- [30] E. Šimánek. *Inhomogeneous Superconductors: Granular and Quantum Effects*. Oxford University Press, sep. de 1994. ISBN: 9780195078282. DOI: [10.1093/oso/9780195078282.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780195078282.001.0001). URL: <https://doi.org/10.1093/oso/9780195078282.001.0001>.
- [31] S. H. Simon. *The Oxford solid state basics*. Oxford, UK: Oxford Univ. Press, 2013.
- [32] J. Sólyom. *Fundamentals of the Physics of Solids: Volume II: Electronic Properties*. First. Springer, dic. de 2008. ISBN: 3540853154.
- [33] G. R. Stewart. “Unconventional superconductivity”. En: *Advances in Physics* 66.2 (abr. de 2017), págs. 75-196. ISSN: 1460-6976. DOI: [10.1080/00018732.2017.1331615](https://doi.org/10.1080/00018732.2017.1331615). URL: <http://dx.doi.org/10.1080/00018732.2017.1331615>.
- [34] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. 2.^a ed. Dover Publications, jun. de 2004. ISBN: 0486435032.